Licence1-MI 2025-2026 Fiche de TD1 Nombres réels et suites numériques

Exercice1 Soient $x\ et\ y$ deux nombres réels.

1) Montrer que $|x+y| \leq |x|+|y|$ et $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$
2) Montrer que $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ et $\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|$.
3) Montrer que $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.
4) Montrer que si $x \leq y$ alors $E(x) \leq E(y)$ et en déduire les variations de E où E est la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$.
5) Soit $f(x)=E(2x)-2E(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est 1-périodique et calculer $f(x)$ pour $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[$ puis pour $x \in \left[\frac{1}{2},1\right[$.

Exercice2

1) Soient $A=\left\{\frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}: x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}$ et $B=\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer si possible la borne supérieure et inférieure de A et de B puis en déduire si possible le maximum et minimum de A et de B.
2) Soit $D=\left\{\frac{1}{n^2}-1; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   a) En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, montrer que $\sup(D)=0$ et $\inf(D)=-1$
   b) En déduire si possible le maximum et minimum de D.

Exercice3 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$ et $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$ avec $A+B=\{a+b; a \in A\ et\ b \in B\}$.
2) Montrer que $\sup(A \cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$ et $\inf(A \cup B)=\min(\inf(A),\inf(B))$.
3) Soient $A=\{1\}$ et $B=\left\{\frac{-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer $\sup(B)$ et $\inf(B)$ puis en déduire la borne supérieure et inférieure de $C=\left\{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice4

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{2}$ est irrationnelle.
2) Démontrer que pour tout nombre réel x il existe un entier n tel que $x < n$
3) Démontrer que pour tous réels strictement positifs x *et* y, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny > x$.
4) Démontrer que l'ensemble des rationnelles est dense dans $\mathbb{R}$ et en déduire que l'ensemble des irrationnelles est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice5

1) Enoncer le théorème de Bolzano Weierstrass.
2) Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.
3) Démontrer qu'une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.
4) Soit (u_n) une suite décroissante dont une suite extraite converge. Montrer que (u_n) converge.
5) Soit (u_n) une suite numérique. Montrer que si les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite (u_n) converge l.

Exercice6

1) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 7 \ et \ u_{n+1} = 6 - \frac{9}{u_n}$.
   a) Montrer que (u_n) est minorée par 3 et en déduire sa limite.
   b) Montrer que la suite $a_n = \frac{1}{u_n - 3}$ est une suite arithmétique
   c) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.
2) Déterminer la nature des suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1, a_1 = 2 \ et \ a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ et $b_0 = 1 \ et \ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{-1+b_n}{3+b_n}$.
3) Etudier la nature de la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2} \ et \ u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

Exercice7

4) Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5) En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$ c) $\lim_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Exercice8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2 \; et \; u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$.
c) Montrer que les sous suites (u_{2n}) et(u_{2n+1}) sont adjacentes et calculer leur limite commune l.
d) Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$.

Exercice9

1) Soit (u_n) une suite numérique convergente vers l. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers l.

2) Soit (u_n) une suite numérique non nulle à partir d'un certain rang. Démontrer que si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$.
3) En déduire la limite de la suite suivante : $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

Exercice10

1) Déterminer la limite si celle-ci existe des suites suivantes :
a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ b) $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$ c) $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$

2) Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$ est divergente.