Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Mécanique du Point Matériel
Série N° 1
Filières SMIA

Exercice 1 : Equations différentielles

Soit $\mathcal{R}(O, XYZ)$ un repère orthonormé. Le mouvement d'un point matériel est décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -\omega\dot{y} \\ \ddot{y}(t) &= \omega\dot{x} \\ \ddot{z}(t) &= 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) &= y(0) = z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &= v_{0x} > 0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z} = v_{0z} > 0. \end{cases}$$

où ω est une constante positive.

1. Etablir les équations horaires $(x(t), y(t), z(t))$.
2. Décrire la projection du mouvement dans le plan (Oxy) et celle selon l'axe (Oz).

Exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

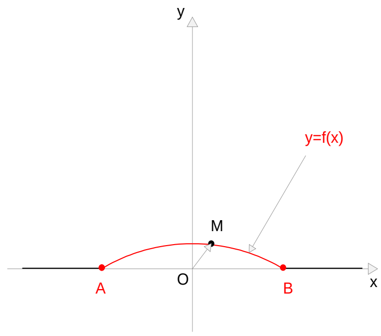
Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.
2. Calculer
$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}.$$
3. En déduire $d\vec{e}_r$, $d\vec{e}_\theta$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base sphérique.
4. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base sphérique peuvent se mettre sous la forme
$$d\vec{e}_r = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad d\vec{e}_\theta = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$
en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$. En déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$.
5. On considère la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Quel est son vecteur rotation par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$.
6. Considérons un vecteur $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$. En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps de $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice 3

Un véhicule, que l'on peut considérer comme un point matériel M, se déplace par rapport à un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ avec un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ telle que $|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = v$. Le véhicule roule sur une bosse dont le profil peut être représenté par $y = f(x)$. On s'intéresse au segment de la route $[A, B]$.

1. Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $\dot{x}$ et de la dérivée première $f'(x) = df(x)/dx$ par rapport à x.
2. Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$. En déduire que la composante de l'accélération selon Oy peut se mettre sous la forme
$$\gamma_y(M/\mathcal{R}) = \frac{v^2 f''(x)}{(f'^2+1)^2}$$
$f''(x)$ étant la dérivée seconde de $f(x)$ par rapport à x.



Exercice à traiter comme devoir

L'objectif de cet exercice est de reformuler les expressions des opérations vectorielles en utilisant la fonction de Kronecker δ_{ij} [1] et le tenseur de Levi-Civita ϵ_{ijk} [2]. Les indices $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, étant donné que l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension 3.
On considère un repère $\mathcal{R}$ muni de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La propriété d'orthonormalité de la base se traduit par $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, qui sera utilisée dans la suite de l'exercice, sauf mention contraire. Soient trois vecteurs $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$.

1. Montrer que le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1,3} a_i b_i$.
2. Sachant que la $i^{\text{ème}}$ composante de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ peut s'écrire comme suit $(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$, en déduire que
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i.$$
3. Montrer que le produit mixte
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$
4. En utilisant le résultat de la question 2, montrer
$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot C)\vec{B} - (\vec{A} \cdot B)\vec{C}$$
5. Montrer que
$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \wedge \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right).$$

---

1. la fonction de Kronecker est définie par
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$
2. Le tenseur de Levi-Civita est défini par
$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux} \\ 1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\} \end{cases}.$$
Le tenseur possède les propriétés suivantes, que l'on ne va pas démontrer
$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \sum_{i} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$