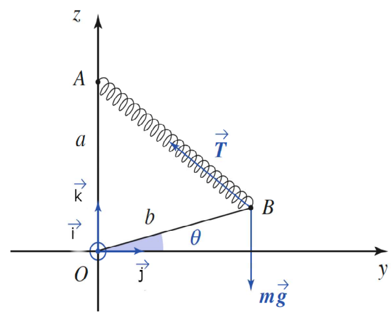
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2020/2021

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 3
Théorèmes Généraux-Forces Centrales

Exercice : Gravimètre à ressort

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable, d'un ressort (AB) de raideur k et de longueur à vide l_0 et d'une masse ponctuelle m suspendue au point B. La tige peut tourner autour de l'axe (Ox). Sous l'action du ressort, la tige est en équilibre à la position horizontale. On pose $\|\overrightarrow{OA}\| = a$, $\|\overrightarrow{OB}\| = b$, $\|\overrightarrow{AB}\| = l$ et $\theta = \left(\vec{j}, \overrightarrow{OA}\right)$.



1. Etablir l'expression du moment cinétique de la masse par rapport à O, $\vec{\sigma}_O(m/\mathcal{R})$ où il faut définir $\mathcal{R}$.
2. Déterminer les moments par rapport à O des forces auxquelles est soumise la masse ponctuelle.
3. Montrer que l'équation du mouvement de la masse ponctuelle est donnée par

$$\ddot{\theta} \;=\; \left\{\frac{ka}{mb}\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\theta}}\right)-\frac{g}{b}\right\}\cos\theta.$$

4. Calculer la longueur du ressort à l'équilibre l_e. A quelle condition cet équilibre existe-t-il ?
5. On considère le mouvement de petites oscillations de la masse ponctuelle autour de la position d'équilibre. Etablir l'expression de la période T dans ce cas.

Exercice : Police scientifique

Un bus s'arrête brusquement et le conducteur d'une voiture de masse $m = 1600$ kg freine en urgence sur une ligne droite pour éviter la collision avec le bus. Toutefois le choc n'a pas pu être évité. Les marques de pneu sur la route laissées par le freinage pour s'arrêter ont une longueur de d=25 m. Le conducteur de la voiture affirme qu'il roulait à une vitesse inférieure à 50 km·h^{-1}. La police scientifique a effectué des tests et a établi que le coefficient de frottement des pneus de la voiture a une valeur égale à $\mu_f = 0.6$.

1. Définir le système à étudier, le référentiel dans lequel on travaille et faire le bilan des forces.
2. Etablir l'expression de la force de frottement.
3. Déterminer la vitesse avec laquelle roulait la voiture. Le conducteur dit-il vrai ?

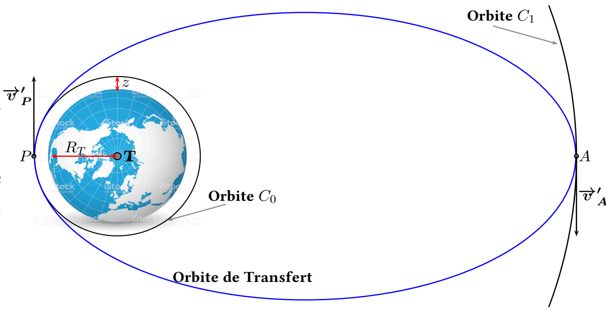
Exercice : Distance minimale d'approche

On considère deux particules A(fixe) et B(mobile) de charges respectives q_A et q_B. On rappelle que la force de Coulomb est $\vec{F}_{B/A} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}$. On néglige les poids des deux particules devant la force de Coulomb. Soit d_0 la distance qui sépare les deux particules à l'instant initial.

1. Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}_{B/A}$.
2. On suppose que $q_A = q_B = q$. On lance B vers A avec la vitesse v_0. A quelle distance minimale, d_{min}, B s'approche-t-elle de A ?
3. On suppose $q_A = -q_B = q$. Quelle vitesse minimale v_{min} faut-il donner à B pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ?

Exercice : Transfert d'un satellite

Cet exercice traite la mise en orbite d'un satellite (S) de masse m_S considéré comme un point matériel en utilisant une orbite transfert. On considère que la Terre est sphérique de centre T, de Masse M_T et de rayon R_T. Soit $\mathcal{R}_g(T, XYZ)$ le référentiel géocentrique, que l'on considère comme galiléen, muni de la base cartésienne $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. La Terre est en rotation dans $\mathcal{R}_g$ autour de (TZ) avec la période $T_0 = 2\pi/\Omega_T$. La base de Lancement du satellite se trouve à l'équateur $(\lambda = 0)$ et coincide avec l'origine du référentiel Terrestre $\mathcal{R}(O, xyz)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



On pose $\overrightarrow{TS} = \rho \vec{e}_\rho$ où $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est la base polaire de $\mathcal{R}_g$. Dans tout l'exercice, le satellite est soumis à la seule force de gravitation de la Terre $\vec{F} = -K_G \frac{M_T m_S}{\rho^2} \vec{e}_\rho = -m_S g_0 \frac{R_T^2}{\rho^2} \vec{e}_\rho$, K_G étant la constante gravitationnelle et $g_0 = K_G M_T / R_T^2$ est le champ gravitationnel à la surface de la Terre. On donne l'énergie potentiel de $\vec{F}$: $E_p = -K_G \frac{M_T m_S}{\rho}$. On note que $\overrightarrow{TO} = R_T \vec{i}$, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) = \Omega_T \vec{k}_0$. On donne $T_0 = 24$heures, $R_T = 6400$km, $g_0 = 9.81$ ms^{-2}.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v_O = \|\vec{V}(S/\mathcal{R}_g)\|$ du satellite à la surface Terrestre.
2. On met le satellite sur l'orbite circulaire (C_0) à l'altitude h_0 telle que $h_0 \ll R_T$. On pose $R_0 = R_T + h_0$.
   a) Etablir les expressions respectives de la vitesse $\vec{V}(S/\mathcal{R}_g)$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g)$.
   b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}_g$, montrer que le mouvement de (S) est circulaire uniforme en précisant sa période T_0. En déduire que l'expression de la vitesse, $v_{C_0} = \|\vec{V}(S/\mathcal{R}_g)\|$, du satellite sur l'orbite (C_0), est donnée par
   $$v_{C_0} \simeq \sqrt{g_0 R_T}\,(1 - h_0/R_T)\,.$$
   On rappelle que $(1+x)^{-n} \simeq 1 - nx$ si $x \to 0$. On prendra pour la suite de l'exercice $R_0 \simeq R_T$ et donc $v_{C_0} \simeq \sqrt{g_0 R_T}$.
3. On place maintenant le satellite (S) sur une nouvelle orbite circulaire (C_1) située dans le plan équatorial à une altitude h_1. On désire que (S) tourne avec la même vitesse de rotation que la Terre de manière qu'il soit vu immobile de tout point de la surface Terrestre. On pose $R_1 = R_T + h_1$.
   a) Qu'appelle-t-on cette orbite ? Quelle est la vitesse angulaire de rotation ω_1 du satellite sur (C_1) ?
   b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'expression de h_1 en fonction de R_T, de g_0 et Ω_T. Calculer la valeur numérique de h_1.
   c) Etablir l'expression de la vitesse $v_{C_1} = \|\vec{V}(S/\mathcal{R}_g)\|$ du satellite sur l'orbite (C_1). En déduire l'expression de v_{C_1}/v_{C_0} en fonction de $x = R_1/R_T$.
   d) Déterminer en fonction de $E_{c0} = \frac{1}{2} m_S v_{C_0}^2$ et de $x = R_1/R_T$, l'énergie nécessaire ΔE pour amener le satellite (S) de la surface Terrestre à l'orbite (C_1).
4. La mise en orbite (C_1) du satellite (S) est réalisée de la manière suivante :
   <u>**Phase 1 :**</u> On lance le satellite (S) depuis la surface Terrestre sur l'orbite (C_0). On désigne par ΔE_1 l'énergie nécessaire à cette opération.
   <u>**Phase 2 :**</u> En un point P de (C_0), on communique au satellite (S) une vitesse v'_P de manière à le placer sur une orbite elliptique de transfert tangente à (C_1) en A, voir figure ci-dessus. On note par v'_A la vitesse du satellite (S) à son arrivée au point A.
   <u>**Phase 3 :**</u> Au point (A), on fait passer la vitesse du satellite (S) de v'_P à v_{C_1}.
   a) Exprimer l'énergie ΔE_1 nécessaire à la phase 1 en fonction de E_{C0}.
   b) Le demi grand-axe de l'ellipse $a = \frac{1}{2}(R_0 + R_1) \simeq \frac{1}{2}(R_T + R_1)$. L'énergie mécanique du satellite sur l'orbite elliptique est donnée par $E_m = -K_G M_T m_S / 2a = -K_G M_T m_S/(R_T + R_1)$. Considérer l'énergie mécanique au point P et en déduire v'_P en fonction de v_{C_0} et de $x = R_1/R_T$.
   c) Exprimer l'énergie ΔE_2 nécessaire à la phase de transfert 2 en fonction de E_{0c} et de x.
   d) En utilisant l'expression de l'énergie mécanique au point A, exprimer v'_A en fonction de v_{C_0} et de x.
   e) Déterminer l'expression de l'énergie ΔE_3 nécessaire à la phase 3 en fonction de E_{c0} et de x. Comparer ΔE, calculée à la question **3-d)**, à $\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$.
   f) Déduire de la 3$^{\text{ème}}$ loi de Képler, la durée Δt du transfert du satellite (S) de l'orbite (C_0) à l'orbite (C_1) en fonction de T_0 et de x.
   Indication : Noter que le trajet de P vers A est la moitié de la révolution de l'ellipse.