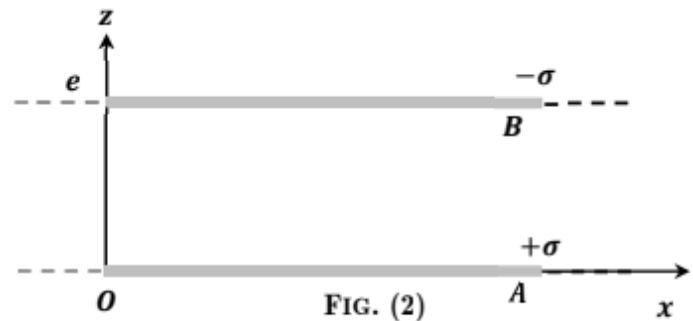
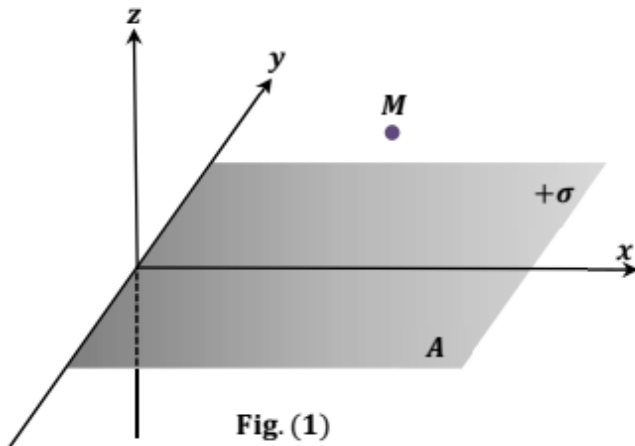


EXERCICE I : PLAN INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ

considère un plan infini A parallèle au plan xoy (de cote $z = 0$) chargé avec une densité de charges surfacique uniforme $\sigma > 0$. (FIG. (1)).



- 1) Montrer par des considérations de symétrie et d'invariance que le vecteur champ électrostatique produit par le plan A en un point M de cote z s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$$

- 2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$
- 3) Calculer le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'espace.
- 4) On considère un autre plan B parallèle au plan A chargé avec une densité de charges surfacique uniforme $-\sigma$ et de cote $z = +e$. (FIG. (2)).

En utilisant le principe de superposition, déterminer le vecteur champ et le potentiel en tout point M de l'espace.

EXERCICE II: SPHERE CHARGEE

- D Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge répartie dans le volume de la sphère avec une densité volumique de charges uniforme ρ_0 .

En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

II) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ_0 et à symétrie sphérique répartie dans le volume $r < R_1$ et dans le volume $R_2 < r < R_3$. (FIG. (3)).

1) En utilisant le principe de superposition, exprimer le champ $\vec{E}$ en un point de M l'espace, l'espace situé à une distance r du centre O , dans les cas suivants :

- $r \geq R_3$;
- $R_2 \leq r \leq R_3$
- $R_1 \leq r \leq R_2$
- $r \leq R_1$

2) Déduire l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace.

3) Retrouver l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.

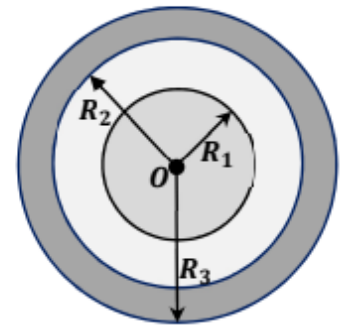


FIG. (3)

En coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Par suite de la symétrie sphérique :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

EXERCICE III: CYLINDRES COAXIAUX

Exprimer le vecteur champ électrostatique créé en tout point M de l'espace, par une distribution volumique de charge ρ positive répartie entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) avec une densité volumique de charges uniforme ρ . (FIG. (4)).

1) En utilisant le théorème de Gauss.

2) A partir de l'équation locale : $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$.

En coordonnées cylindriques l'expression de $\text{div } \vec{E}$ est :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

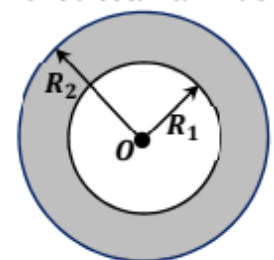


FIG. (4)

EXERCICE IV : CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE

Une sphère (S) conductrice portant une charge $Q > 0$ est supposée en équilibre électrostatique (FIG. (5)).

1) Comment sont réparties les charges sur (S) ? Justifier.

- 2) Pourquoi la densité de charge d dans cette sphère est-elle uniforme ? quelle est l'expression de d ?
- 3) Représenter les lignes de champ créé par cette distribution de charges Comment sont les surfaces équipotentielles ?
- 4) Rappeler l'expression du champ électrique au voisinage immédiat de la surface de la sphère.
- 5) Déterminer l'expression du potentiel V électrostatique de la sphère (S) .
- 6) En déduire l'énergie potentielle électrostatique E_p de la sphère chargée.

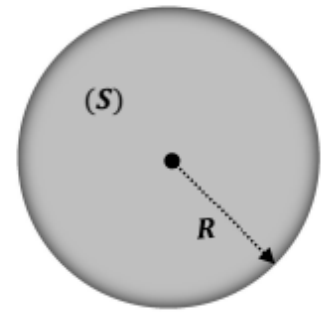


FIG. (5)

La sphère conductrice chargée (S) est maintenant immergée dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}_{ext}$ uniforme vertical ascendant.

- 7) Décrire l'effet du champ $\vec{E}_{ext}$ sur la répartition des charges dans la sphère.
- 8) Représenter schématiquement cette nouvelle distribution.
- 9) À partir des résultats de la question précédente, tracer schématiquement l'allure des lignes du champ électrostatique régnant dans la région où est placée la sphère.

On considère maintenant deux sphères conductrices (S_1) et (S_2) de rayons respectifs R_1 et R_2 chargées uniformément par les deux charges Q_1 et Q_2 (FIG. (6)).

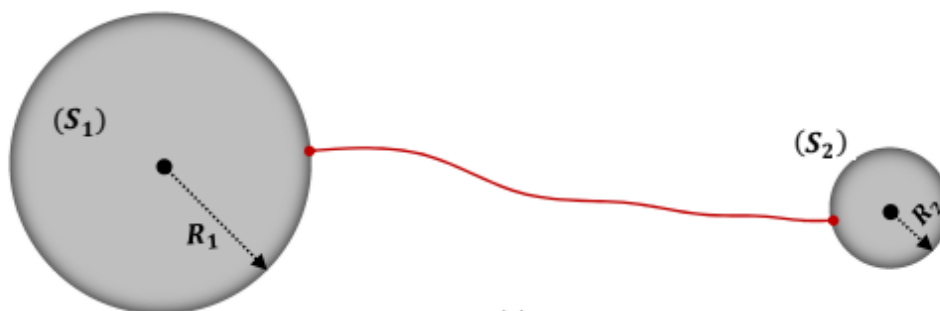


FIG. (6)

On admet que les deux sphères sont sans influence électrostatique l'une sur l'autre (la distance D les séparant étant supposée très supérieure devant R_1 et R_2).

On relie (S_1) et (S_2) par un fil conducteur d'épaisseur négligeable.

- 10) Que peut dire des potentiels des deux sphères ?
- 11) Quelle relation existe-il entre σ_1 , σ_2 , R_1 et R_2 ?
- 12) Calculer les champs électrostatiques aux voisinages des surfaces de chaque sphère. Conclure. Quel est l'effet mis en évidence dans cette expérience ?

EXERCICE V : CÂBLE COAXIAL ET CONDENSATEUR CYLINDRIQUE

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique qu'on appelle âme d'axe $(z'z)$ et de rayon extérieur

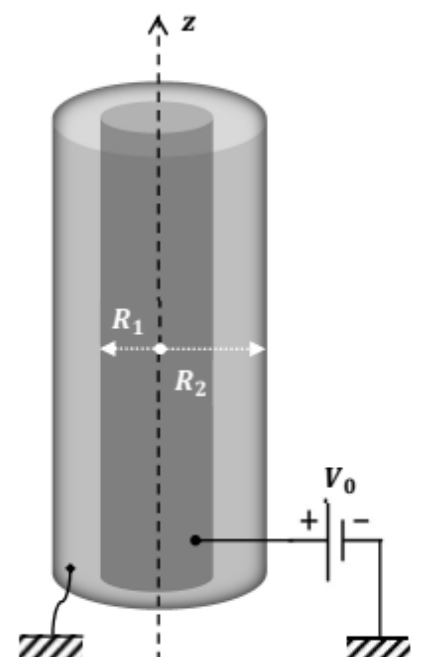


FIG. (7)

R_1 enroulé d'un conducteur cylindrique de même axe et de rayon intérieur $R_2 > R_1$. Les deux conducteurs sont séparés d'un espace vide. La longueur h du câble est considérée comme infiniment grande devant R_2 . La gaine est reliée à la masse tandis que le conducteur central est porté au potentiel V_0 . L'ensemble constitue un condensateur cylindrique dont l'armature centrale porte la charge Q que l'on admettra être distribuée symétriquement (symétrie cylindrique). (FIG. (7)).

- 1) En étudiant les symétries et les invariances du câble coaxial, déterminer la direction du champ et les variables desquelles sa norme dépendra.
- 2) Établir l'expression du champ et du potentiel en tout point de l'espace.
- 3) Quelles sont les distributions de charges sur chacun des conducteurs du câble coaxial ?
- 4) Trouver l'expression de la capacité C du câble coaxial.
- 5) Trouver l'expression approchée de la capacité C dans le cas où $R_2 - R_1 \ll R_1$.
- 6) Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur ainsi formé :
 - a) À partir de la définition faisant intervenir les charges et les potentiels.
 - b) En utilisant la densité d'énergie électrostatique.

EXERCICE VI : CONDENSATEUR PLAN

Un condensateur plan placé dans l'air sec est constitué de deux armatures métalliques de surface S et distantes de e . On admettra que les deux armatures sont en influence totale et que les effets de bords sont négligeables. On impose au condensateur une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ grâce à un générateur de tension continu. Soient Q la charge du condensateur et σ sa densité de charge surfacique.

- 1) En se basant sur les résultats établis dans l'exercice I de la série (3), donner sans calcul l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.
- 2) Établir l'expression de la différence de potentiel U . En déduire l'expression de la capacité du condensateur ainsi formé.
- 3) Déterminer, par deux méthodes différentes, l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur. Justifier pourquoi cette énergie se situe dans l'espace interarmature.

On introduit parallèlement aux armatures du condensateur une plaque métallique d'épaisseur a . Montrer que le système ainsi formé est équivalent à un condensateur de capacité C_{eq} puis exprimer C_{eq} .

TRAVAUX DIRIGÉS D'ÉLECTRICITÉ 1

SÉRIE N°3 : ÉLECTROSTATIQUE

www.ExoMaroc.com

Corrigé de l'exercice 2 :

PLAN INFINI

On considère un plan infini A parallèle au plan xoy (de cote $z = 0$) chargé avec une densité de charges surfacique uniforme $\sigma > 0$.

1)

- Les plans zOx et zOy sont des plans de symétries alors

$$\vec{E} \in (zOx) \cap (zOy)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) \in Oz$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_z$$

- La distribution de charge est invariante par translation suivant l'axe Ox ou Oy donc ne dépend ni de x ni de y alors :

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie. Le champ en M' symétrique de M par rapport au plan $z = 0$ est :

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) = -E(z) \vec{e}_z$$

2) La surface de Gauss est un cylindre C coupant verticalement le plan chargé.

En appliquant le théorème de Gauss :

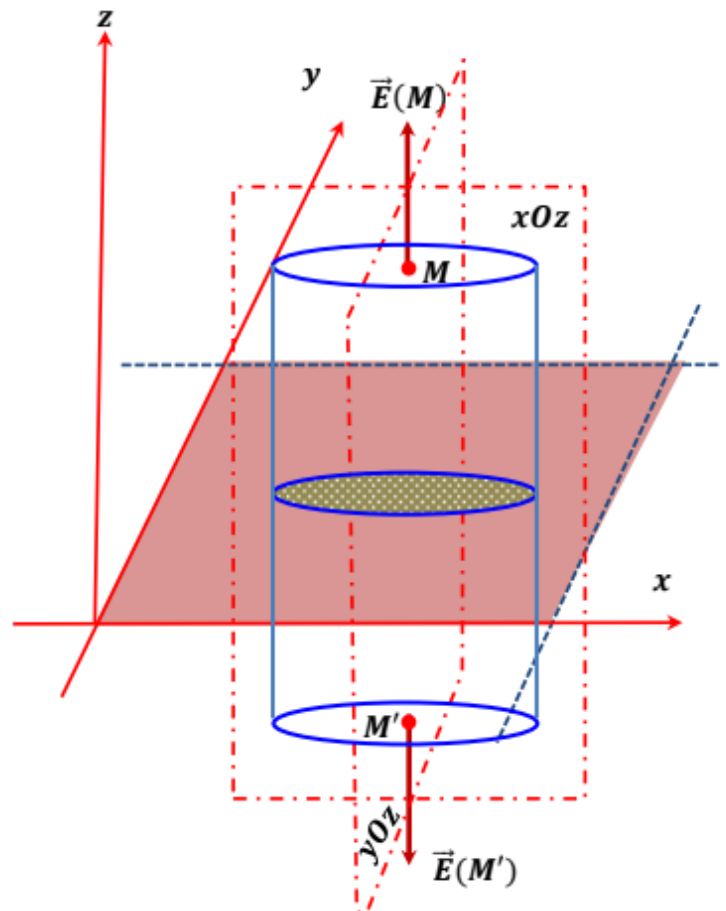
$$\oiint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \iint_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_1} + \iint_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_2} + \iint_{Lat} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

A la base B_1 : $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$ et $d\vec{S}_{B_1} = dS_{B_1} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} d\vec{S}_{B_1} = E(z) dS_{B_1}$

A la base B_2 : $\vec{E}(M') = -E(z) \vec{e}_z$ et $d\vec{S}_{B_2} = -dS_{B_2} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} d\vec{S}_{B_2} = E(z) dS_{B_2}$

Avec $E(z) = Cte$ et $dS_{B_2} = dS_{B_1} = dS_B$



A la surface latérale $\vec{E} \perp d\vec{S}_L \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = 0$

$$\Rightarrow \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_C 2 E(z) dS_B$$

$$\Rightarrow \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E(z) \iint_C dS_B$$

$$\Rightarrow \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E(z) S_B$$

$$Q_{int} = \iint_C \sigma dS_B$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint_C dS_B$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \sigma S_B$$

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2 E(z) S_B = \frac{\sigma S_B}{\epsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_A(M') = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

3) le potentiel $V(z)$ en tout point de l'espace.

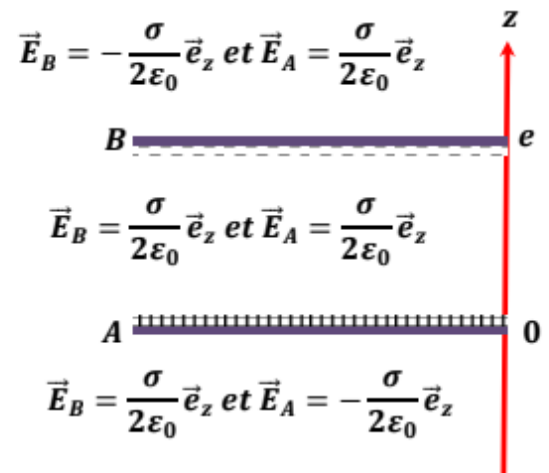
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

4) On considère un autre plan B parallèle au plan A chargé avec une densité de charges surfacique uniforme $-\sigma$ et de cote $z = +e$. En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

$$\begin{cases} \vec{E}_B(z > e) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_B(z < e) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{E}_A(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_A(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{Total}(M) &= \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) \Rightarrow \vec{E}_{Total}(M) \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ si } z \in]0, e[\\ 0 \text{ si } z \in]-\infty, 0[\cup]e, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$



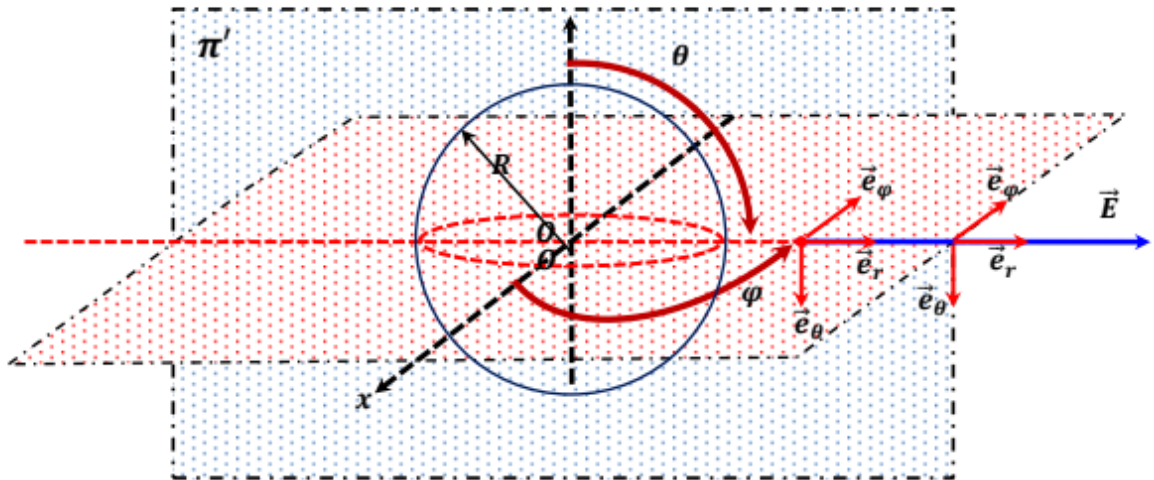
Corrigé de l'exercice 2 :

SPHERE CHARGEE

I) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ_0 et à symétrie sphérique répartie dans le volume $r < R$.

Les symétries :

$\pi' \equiv (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\pi \equiv (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ deux plans de symétrie donc $\vec{E}$ appartient à l'intersection des deux plans π et π' alors $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$,



Les Invariances

La distribution de charge est invariante par toutes rotations autour de O . En coordonnées sphériques deux rotations autour de O sont possibles une d'un angle θ et l'autre d'un angle φ donc E ne dépend ni de θ ni de φ par suite $E(r, \theta, \varphi) = E(r)$

Donc le champ est radiale et ne dépend que de r .

Finalement $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

En utilisant le théorème de Gauss, exprimons le champ $\vec{E}$ en un point de M l'espace dans les cas suivants :

- $r \geq R$;
- $r < R$

Puisque E ne dépend que de r donc la surface de GAUSS sera une sphère contenant M et de centre O .

En appliquant le théorème de Gauss :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E}_M \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E_M(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E_M(r) \cdot dS$$

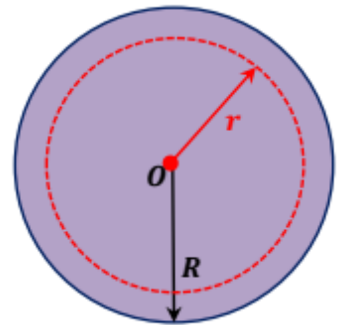
$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M \cdot d\vec{S} = E_M(r) \oiint_{(S)} dS$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M \cdot d\vec{S} = E_M(r) S$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{E}_M \cdot d\vec{S} = E_M(r) 4\pi r^2$$

- Le champ électrostatique $\vec{E}_{ext}$ à l'extérieur de la sphère $r \geq R$

$$Q_{int} = \iiint_V \rho_0 d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \iiint_0^R d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$$



$$\Rightarrow E_M(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_M(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

- Le champ électrostatique $\vec{E}_{int}$ à l'extérieur de la sphère $r < R$:

$$Q_{int} = \iiint_V \rho_0 d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \iiint_{R_2}^r d\tau \Rightarrow Q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_M(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_M(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

Conclusion

$$\Rightarrow E_M(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} & r \geq R \\ \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} & r < R \end{cases}$$

- II) On considère une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ_0 et à symétrie sphérique répartie dans le volume $r < R_1$ et dans le volume $R_2 < r < R_3$. (FIG. (3)).

1)

On peut considérer le système comme l'association de trois sphères chargées en volume :

- Sphère chargée de rayon R_1 de densité ρ_0 ;
- Sphère chargée de rayon R_2 de densité $-\rho_0$;
- Sphère chargée de rayon R_3 de densité ρ_0 .

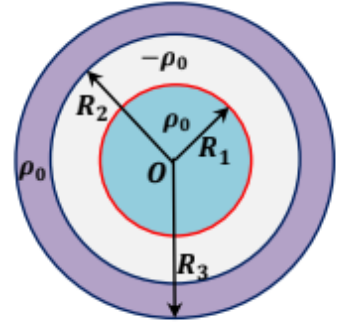


FIG. (3)

En utilisant le principe de superposition, exprimons le champ $\vec{E}$ en un point de M l'espace, l'espace situé à une distance r du centre O , dans les cas suivants :

$$r \geq R_3 : E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 R_2^3}{3\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 R_3^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3 + R_3^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$R_2 \leq r \leq R_3 : E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 R_2^3}{3\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3 + r^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 : E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} - \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$r \leq R_1 : E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

- 2) Dédisons l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \\ -\frac{\rho_0 (R_1^3 + r^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ -\frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} + A & r > R_3 \\ \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + B & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + C & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + D & r \leq R_1 \end{cases}$$

Avec A, B, C et D des constantes à déterminer en utilisant la continuité du potentiel et que le potentiel à l'infini est nul.

- Détermination de A

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow A = 0$$

- Détermination de B

$$\begin{aligned} V(r = R_3^+) = V(r = R_3^-) &\Rightarrow \frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 R_3} + A = \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 R_3} - \frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0} + B \\ \Rightarrow \frac{\rho_0 R_3^2}{3\varepsilon_0} &= -\frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0} + B \\ \Rightarrow B &= \frac{\rho_0 R_3^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{6\varepsilon_0} \\ \Rightarrow B &= \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

- Détermination de C

$$\begin{aligned} V(r = R_2^+) = V(r = R_2^-) &\Rightarrow \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 R_2} - \frac{\rho_0 R_2^2}{6\varepsilon_0} + B = \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + C \\ \Rightarrow -\frac{\rho_0 R_2^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R_2^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} &= C \\ \Rightarrow C &= -\frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} \\ \Rightarrow C &= \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

- Détermination de D

$$\begin{aligned} V(r = R_1^+) = V(r = R_1^-) &\Rightarrow \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1} + C = -\frac{\rho_0 R_1^2}{6\varepsilon_0} + D \\ \Rightarrow \frac{\rho_0 R_1^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_1^2}{6\varepsilon_0} &= D \\ \Rightarrow D &= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (2R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2 + R_1^2) \\ \Rightarrow D &= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (3R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2) \\ \Rightarrow D &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (R_1^2 + R_3^2 - R_2^2) \end{aligned}$$

Les expressions du potentiel en un point M de l'espace est

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} & r > R_3 \\ \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (R_1^2 + R_3^2 - R_2^2) & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} & r > R_3 \\ \frac{\rho_0 (R_1^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R_3^2}{2\varepsilon_0} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2\varepsilon_0} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (3R_1^2 + 3R_3^2 - 3R_2^2 - r^2) & r \leq R_1 \end{cases}$$

- 3) Retrouvons l'expression du potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.

L'équation locale de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En coordonnées sphérique :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Par suite de la symétrie sphérique :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

Absence de charge pour $r > R_3$ et $R_1 \leq r \leq R_2$, on applique l'équation locale de Laplace : $\Delta V = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pour } r > R_3 \text{ et } R_1 \leq r \leq R_2$$

Présence de charge pour $r < R_1$ et $R_2 \leq r \leq R_3$, on applique l'équation locale de Poisson: $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r < R_1 \text{ et } R_2 \leq r \leq R_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = \begin{cases} 0 & r > R_3 \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ 0 & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = \begin{cases} 0 & r > R_3 \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r & R_2 \leq r \leq R_3 \\ 0 & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (rV)}{\partial r} = \begin{cases} A & r > R_3 \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + B & R_2 \leq r \leq R_3 \\ C & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + D & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow rV = \begin{cases} Ar + A' & r > R_3 \\ -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^3 + Br + B' & R_2 \leq r \leq R_3 \\ Cr + C' & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^3 + Dr + D' & r \leq R_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(M) = \begin{cases} A + \frac{A'}{r} & r > R_3 \quad [1] \\ -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + B + \frac{B'}{r} & R_2 \leq r \leq R_3 \quad [2] \\ C + \frac{C'}{r} & R_1 \leq r \leq R_2 \quad [3] \\ -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + D + \frac{D'}{r} & r \leq R_1 \quad [4] \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(M) = -\frac{\partial V}{\partial r} \begin{cases} \frac{A'}{r^2} & r > R_3 \quad [1] \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{B'}{r^2} & R_2 \leq r \leq R_3 \quad [2] \\ \frac{C'}{r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \quad [3] \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{D'}{r^2} & r \leq R_1 \quad [4] \end{cases}$$

Avec A, A', B, B', C, C', D et D' des constantes à déterminer en utilisant la continuité du potentiel et que le potentiel à l'infini est nul ainsi que la continuité de l'intensité du champ électrostatique.

- Détermination de A

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ donc } [1] \Rightarrow A = 0$$

- Détermination de D'

$$V(r) \text{ est fini en } r = 0 \text{ donc } [4] \Rightarrow D' = 0$$

- Détermination de B

$$V(r = R_3^+) = V(r = R_3^-) \Rightarrow \frac{A'}{R_3} = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_3^2 + B + \frac{B'}{R_3} \quad [5]$$

$$E(r = R_3^+) = E(r = R_3^-) \Rightarrow \frac{A'}{R_3^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_3 + \frac{B'}{R_3^2} \quad [6]$$

- Détermination de C

$$V(r = R_2^+) = V(r = R_2^-) \Rightarrow -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_2^2 + B + \frac{B'}{R_2} = C + \frac{C'}{R_2} \quad [7]$$

$$E(r = R_2^+) = E(r = R_2^-) \Rightarrow \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 + \frac{B'}{R_2^2} = \frac{C'}{R_2^2} \quad [8]$$

- Détermination de D

$$V(r = R_1^+) = V(r = R_1^-) \Rightarrow C + \frac{C'}{R_1} = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_1^2 + D \quad [9]$$

$$E(r = R_1^+) = E(r = R_1^-) \Rightarrow \frac{C'}{R_1^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_1 \quad [10]$$

$$[10] \Rightarrow C' = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0}$$

$$[8] \Rightarrow \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2 + \frac{B'}{R_2^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2^2} \Rightarrow \frac{B'}{R_2^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2^2} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2$$

$$\Rightarrow B' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_1^3 - R_2^3)$$

$$[6] \Rightarrow \frac{A'}{R_3^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_3 + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(R_1^3 - R_2^3)}{R_3^2} \Rightarrow A' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_3^3 + \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_1^3 - R_2^3)$$

$$\Rightarrow A' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_3^3 + R_1^3 - R_2^3)$$

$$[5] \Rightarrow \frac{A'}{R_3} = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_3^2 + B + \frac{B'}{R_3} \Rightarrow B = \frac{\rho}{6\epsilon_0} R_3^2 + \frac{A' - B'}{R_3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} R_3^2 + \frac{\frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_3^3 + R_1^3 - R_2^3) - \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_1^3 - R_2^3)}{R_3} \\
\Rightarrow B &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} R_3^2 \\
[7] \Rightarrow -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_2^2 + B + \frac{B'}{R_2} &= C + \frac{C'}{R_2} \Rightarrow C = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_2^2 + B + \frac{B' - C'}{R_2} \\
\Rightarrow C &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_2^2 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} R_3^2 + \frac{\frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_1^3 - R_2^3) - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0}}{R_2} \\
\Rightarrow C &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_2^2 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} R_3^2 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2^2 \\
\Rightarrow C &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0} R_2^2 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} R_3^2 \\
\Rightarrow C &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \\
[9] \Rightarrow C + \frac{C'}{R_1} &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_1^2 + D \Rightarrow D = C + \frac{C'}{R_1} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} R_1^2 \\
\Rightarrow D &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) + \frac{\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0}}{R_1} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} R_1^2 \\
\Rightarrow D &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) + \frac{\rho}{2\epsilon_0} R_1^2 \\
\Rightarrow D &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2 + R_3^2)
\end{aligned}$$

En remplaçant les constantes on trouve l'expression de $V(M)$ et $E(M)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V(M) &= \begin{cases} \frac{\rho(R_1^3 - R_2^3 + R_3^3)}{3\epsilon_0 r} & r > R_3 \quad [1] \\ -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R_3^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho(R_1^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r} & R_2 \leq r \leq R_3 \quad [2] \\ \frac{\rho(R_3^2 - R_2^2)}{2\epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r} & R_1 \leq r \leq R_2 \quad [3] \\ -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho(R_3^2 - R_2^2 + R_1^2)}{2\epsilon_0} & r \leq R_1 \quad [4] \end{cases} \\
\Rightarrow E(M) &= \begin{cases} \frac{\rho(R_3^3 + R_1^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \quad [1] \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{\rho(R_1^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & R_2 \leq r \leq R_3 \quad [2] \\ \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \quad [3] \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & r \leq R_1 \quad [4] \end{cases} \\
\Rightarrow E_M(r) &= \begin{cases} \frac{\rho_0 (R_1^3 + R_3^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \\ \frac{\rho_0 (R_1^3 + r^3 - R_2^3)}{3\epsilon_0 r^2} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} & r \leq R_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3 :**CYLINDRES COAXIAUX**

Exprimons le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge ρ positive répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

1) Utilisation du théorème de Gauss,

Étude de la symétrie :

Il existe deux types de plan de symétrie :

- i- Le plan passant par le point M et l'axe du cylindre : $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$.
- ii- Les plans passant par le point M et perpendiculaires à l'axe du cylindre : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Alors, l'intersection de ces deux types de plan nous donne la direction du champ électrostatique au point M alors $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_r$. Dans la base cylindrique, on peut écrire :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$$

Étude des invariances :

La distribution de charge est invariante par :

- ♦ Rotation θ autour de l'axe du cylindre Oz , alors E ne dépend pas de θ ,
- ♦ Translation le long de l'axe Oz , alors E ne dépend pas de z .
- ♦ Alors E ne dépend que de r

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

Choix de la surface de GAUSS :

La norme de E est invariante sur une surface latérale cylindrique S_1 , de rayon r et de hauteur h quelconque, passant par le point M . En lui ajoutant les bases S_2 et S_3 , on fabrique une surface fermée S . Le flux de $\vec{E}$ à travers S s'exprime très simplement en fonction de $E(r)$.

Théorème de GAUSS**Calcul du flux**

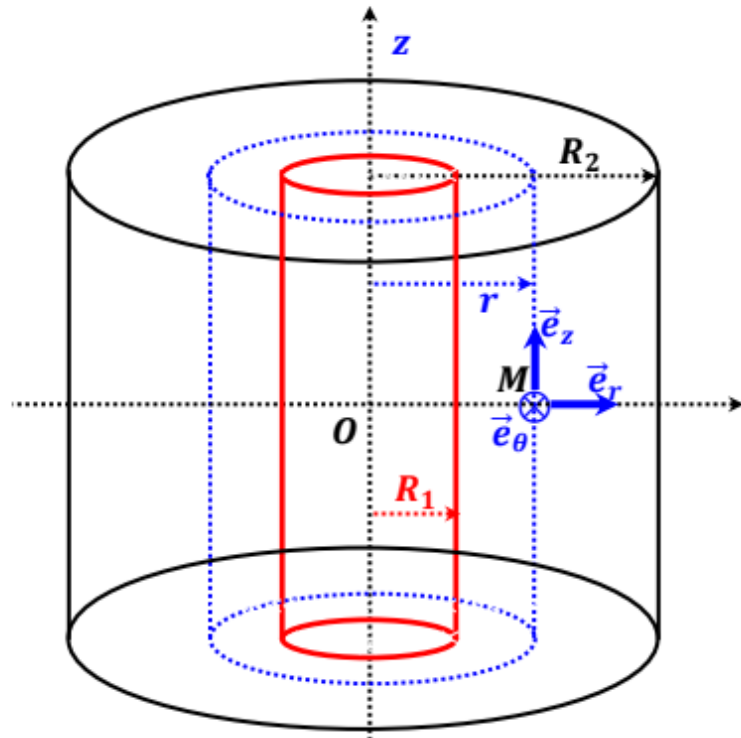
- Le flux de $\vec{E}$ à travers les bases S_2 et S_3 est nul, car $\vec{E}$ est perpendiculaire à ces surfaces. Le calcul du flux de $\vec{E}$ à travers S se limite donc à la surface S_1 .
- La normale à S_1 , orientée vers l'extérieur de S , se confond avec $\vec{e}_r$. E a la même valeur $E(r)$ en tout point de la surface S_1 dont l'aire est égale à $2\pi r h$. On peut donc écrire :

$$\phi = 2\pi r h E(r)$$

Calcul de la charge à l'intérieur de la surface fermée

La charge intérieure est différente selon que le point M est à l'intérieur du cylindre de rayon R_1 ou entre les deux cylindres de rayons R_1 et R_2 à l'extérieur du cylindre de rayon R_2 :

- si $r < R_1$ (point à l'intérieur du 1^{er} cylindre),



la charge contenue à l'intérieur de S est : $Q_{int} = 0$:

$$\Rightarrow 2\pi r h E(r) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0} \text{ pour } r < R_1$$

- si $R_1 \leq r < R_2$, (point entre les deux cylindres)

la charge contenue à l'intérieur de S est : $Q_{int} = \rho \pi (r^2 - R_1^2) h$:

$$\Rightarrow 2\pi r h E(r) = \frac{\rho \pi (r^2 - R_1^2) h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{e}_r \text{ pour } R_1 \leq r < R_2$$

- $r \geq R_2$ (point à l'extérieur du 2^{ème} cylindre)

la charge contenue à l'intérieur de S est :

$$Q_{int} = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) h$$

$$\Rightarrow 2\pi r h E(r) = \frac{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r \text{ pour } R_1 \leq r < R_2$$

Conclusion

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{E}(M) = \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{e}_r & \text{pour } R_1 \leq r < R_2 \\ \vec{E}(M) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } R_1 \leq r < R_2 \end{cases}$$

- 2) A partir de l'équation locale : $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$.

En coordonnées cylindriques l'expression de $\text{div } \vec{E}$ est :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Or suite aux symétries et aux invariances $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r = E_r \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r$$

La valeur de ρ dépend de la position du point M .

- ♦ si $r < R_1$ (point à l'intérieur du 1^{er} cylindre) on a $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rE(r))}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow rE(r) = A$$

Comme $E(r=0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow$ si $r < R_1$ on a $E(r) = 0$

- ♦ si $R_1 \leq r < R_2$, (point entre les deux cylindres) on a $\rho = \text{cte} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rE(r))}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rE(r))}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r$$

$$\Rightarrow rE(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + B$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r + \frac{B}{r}$$

$$E(r) \text{ est continue en } r = R_1 \Rightarrow E(R_1^+) = E(R_1^-)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1 + \frac{B}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{B}{R_1} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_1^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r - \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} R_1^2$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{e}_r \text{ pour } R_1 \leq r < R_2$$

♦ $r \geq R_2$ (point à l'extérieur du 2^{ème} cylindre) on a $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial(rE(r))}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow rE(r) = C$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{C}{r}$$

$$E(r) \text{ est continue en } r = R_2 \Rightarrow E(R_2^+) = E(R_2^-)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R_2 - \frac{R_1^2}{R_2} \right) = \frac{C}{R_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho R_2}{2\varepsilon_0} \left(R_2 - \frac{R_1^2}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Conclusion :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{E}(M) = \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{e}_r & \text{pour } R_1 \leq r < R_2 \\ \vec{E}(M) = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } R_1 \leq r < R_2 \end{cases}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE IV

1) Répartition des charges sur la sphère conductrice (S)

À l'équilibre électrostatique, les charges électriques seront localisées à la surface S de la sphère. Elles constitueront une distribution surfacique sur cette surface.

2) L'uniformité de la densité de charge d

Les charges réparties sur la surface sphérique S , ont tendance à se repousser mutuellement. La surface étant de forme régulière, les charges vont se répartir à égale distance les unes des autres, ce qui fait de d une densité de charge surfacique uniforme. L'expression de d est $d = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

3) Lignes de champ et surfaces équipotentielles

S'agissant d'une distribution sphérique, le champ sera alors radial par raison de symétrie. Par ailleurs, les surfaces équipotentielles seront des sphères concentriques (figure ci-contre).

4) Expression du champ au voisinage immédiat de la surface de la sphère

Le champ au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre électrostatique est :

$$\vec{E} = \frac{d}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$$

d est assimilable à la densité surfacique du conducteur en équilibre et $\vec{n}_{ext}$ est un vecteur unitaire normale à la surface la sphère se dirigeant vers l'extérieur de celle-ci.

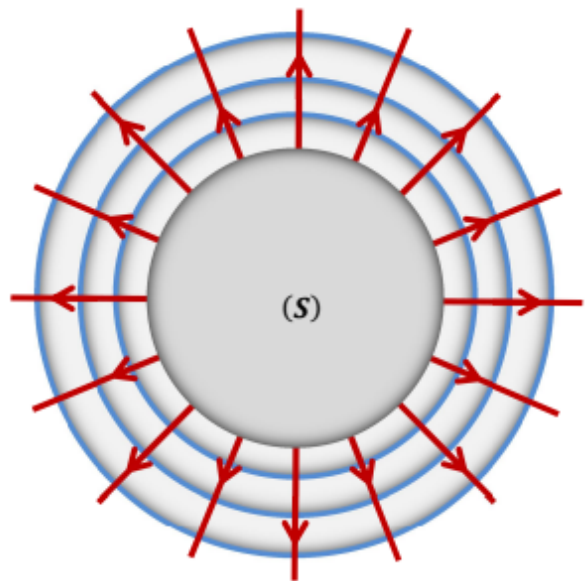
5) Expression du potentiel de la sphère

Le potentiel est le même en tout point de la sphère. Il a la même valeur $V(R)$ à sa surface que sa valeur $V(0)$ en son centre. Ce dernier s'obtient aisément par :

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{d \times dS}{R} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_S dS = \frac{d}{4\pi\epsilon_0 R} (4\pi R^2)$$

D'où

$$V(0) = \frac{dR}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$



6) Énergie potentielle E_p de la sphère

On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour calculer cette énergie. Pour simplifier, on reprend la notation usuelle σ pour la densité surfacique au lieu de la notation d .

- **Méthode (1) :**

L'énergie potentielle E_p est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(M) V(M) dS = \frac{\sigma^2 R}{2\epsilon_0} \iint_S dS = \frac{\sigma^2 R}{2\epsilon_0} (4\pi R^2)$$

D'où
$$E_p = \frac{2\pi R^3 \sigma^2}{\epsilon_0}$$

- **Méthode (2) :**

L'énergie potentielle E_p est définie à partir de la densité $\frac{\epsilon_0 E^2(r)}{2}$ de l'énergie électrostatique par :

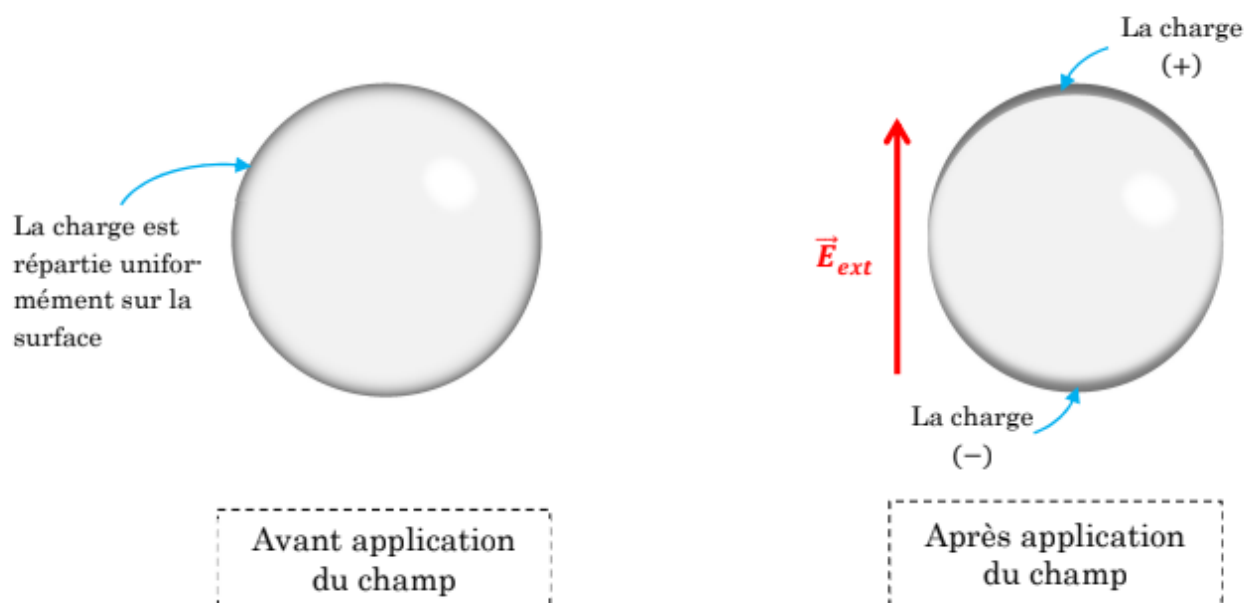
$$E_p = \iiint_{\text{Espace}} \frac{\epsilon_0 E^2(r)}{2} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^{+\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi R^4 \sigma^2}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty}$$

Donc
$$E_p = \frac{2\pi R^3 \sigma^2}{\epsilon_0}$$

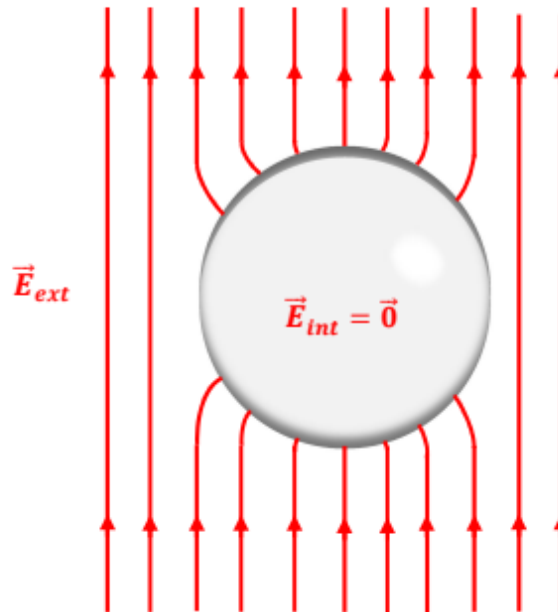
7) Effet du champ extérieur $\vec{E}_{ext}$ sur la sphère

L'application du champ électrique ascendant $\vec{E}_{ext}$ entrainera la modification de la répartition des charges sur la surface de la sphère. En effet, les charges $(-)$ seront poussées par ce champ vers le bas alors les charges $(+)$ seront poussées vers le haut de la sphère.

8) Représentation de la nouvelle distribution de charge



9) Les lignes du champ électrostatique régnant dans la région où est placée la sphère



10) Les potentiels des deux sphères

À l'équilibre électrostatique, les potentiels des deux sphères seront égaux. En effet, puisque les deux sphères sont reliées par fil conducteur et l'équilibre électrostatique veut que le potentiel soit le même. O écrit que :

$$V_1 = V_2$$

11) La relation entre σ_1 , σ_2 , R_1 et R_2

L'égalité des potentiels électrostatiques conduit à :

$$V_1 = V_2 \quad \text{alors} \quad \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Ainsi,

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

12) Les champs électrostatiques aux voisinages des surfaces de chaque sphère

Les champs aux voisinages des surfaces des deux sphères sont respectivement :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{n}_1 \quad \text{Et} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{n}_2$$

Puisque $R_1 > R_2$, il est évident que $\sigma_1 < \sigma_2$. Par conséquent, on aura que $\|\vec{E}_1\| < \|\vec{E}_2\|$.

• L'effet mis en évidence dans cette expérience

Le champ électrique au voisinage de la petite sphère est plus intense que celui régnant au voisinage de la grande sphère : c'est l'effet de pointe qu'on met à profit dans les paratonnerres, les canons à électrons...etc.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE V

1) La direction du champ et les variables dont sa norme dépendra

- Étude des symétries de la distribution

Adoptons le système cylindrique pour cette étude. Soit M un point quelconque de l'espace. $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont deux plans de symétrie passant par M . Le champ électrostatique, étant un vecteur polaire, doit être porté dans leur intersection. C'est donc un champ radial, on écrit :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \varphi, z) \vec{e}_r$$

- **Étude des invariances de la distribution**

La longueur du câble coaxial étant considérée infiniment grande pour négliger les effets des bords. Ainsi, le câble demeure invariant par translation le long de (Oz) ce qui élimine la variable z . Le câble coaxial est aussi invariant par rotation autour de (Oz) ce qui supprime la variable φ . On conclut que :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

Le potentiel électrostatique $V(M)$ ne dépendra pas non plus des deux variables z et φ . On écrit que :

$$V(M) = V(r)$$

2) Expression du champ et du potentiel en tout point de l'espace

Le câble coaxial est constitué de conducteur, les charges n'existeront que sur leurs surfaces. Le champ électrostatique sera nul en tout point de l'espace excepté dans l'espace inter-conducteur. Pour établir l'expression dans cette région, on utilise l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div} \vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r(r))}{\partial r} = 0$$

C'est-à-dire,

$$E_r(R_1 < r < R_2) = \frac{K}{r}$$

Où K est une constante d'intégration.

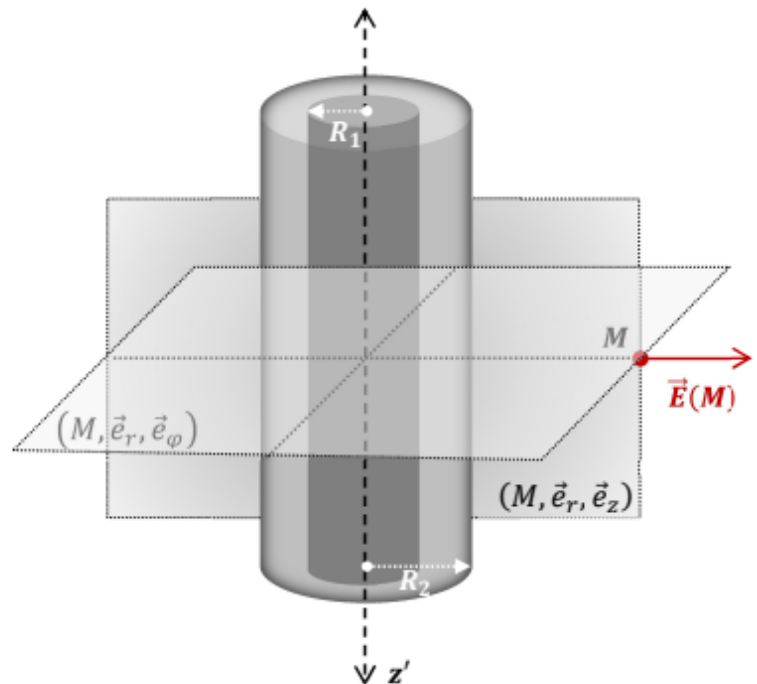
Le potentiel électrique dans la même région est :

$$V(R_1 \leq r \leq R_2) = -K \ln r + K'$$

Où K' est une autre constante d'intégration.

On utilise les deux considérations $V(R_1) = V_0$ et $V(R_2) = 0$ pour trouver que :

$$K = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{et} \quad K' = \frac{V_0 \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$



Les expressions recherchées, du potentiel et du champ dans la région inter-conducteur (interarmature) seront :

Le potentiel

$$V(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_2}{r} \quad \text{et}$$

Le champ

$$E_r(R_1 < r < R_2) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}$$

Le champ en vecteur est :
$$\vec{E}(R_1 < r < R_2) = \left(\frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r} \right) \vec{e}_r$$

3) Les densités de charge sur chacun des conducteurs du câble coaxial**• Sur l'armature centrale**

La densité σ_1 sur cette armature est :

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_r(r \rightarrow R_1^+) = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

• Sur la gaine

La densité σ_2 sur cette armature est :

$$\sigma_2 = -\epsilon_0 E_r(r \rightarrow R_2^-) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

4) Expression de la capacité du câble coaxial

La charge portée par l'âme est $Q_1 = \sigma_1 \times 2\pi R_1 h = CV_0$ où C est la capacité du câble coaxial et est donné par :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La charge portée par la gaine est $Q_2 = \sigma_2 \times 2\pi R_2 h = -\frac{2\pi h \epsilon_0 V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = -Q_1$.

5) L'expression approchée de la capacité C dans le cas où $R_2 - R_1 \ll R_1$.

On pose $\ell = R_2 - R_1$, on trouve que :

$$C \simeq \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 h}{\ell}$$

Remarque ; on a utilisé le développement limité : $\ln(1+x) \approx x$ pour $x \ll 1$.

6) Énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur**a) À partir de la définition faisant intervenir les charges et les potentiels**

On a
$$E_p = \frac{1}{2} Q_1 V_0 = \frac{1}{2} C V_0^2$$

b) À partir de la densité de l'énergie électrostatique

On a
$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{espace}} \vec{E}^2 dV$$

L'intégrale ne porte que sur l'espace interarmature.

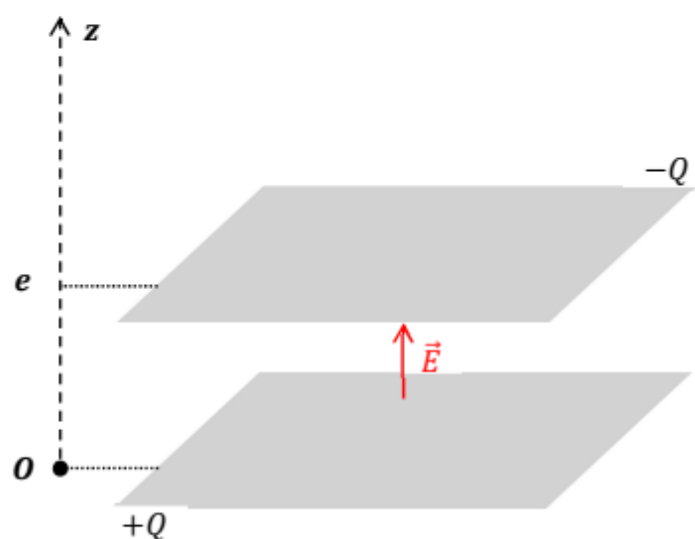
$$E_p = \frac{2\pi h \epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} K^2 \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} 2\pi h \epsilon_0 K^2 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE VI

1) Expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.

Les armatures sont en influence total et les effets de bord sont négligés, un point dans l'espace interarmature « voit » les deux armatures comme deux plans infinis. D'après les résultats de l'exercice I de cette série et compte tenu de la figure ci-après, on a :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z < 0 \\ +\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } 0 < z < e \\ \vec{0} & \text{si } z > e \end{cases}$$



2) Expression de la différence de potentiel U

La différence de potentiel est donnée par :

$$U = V_1 - V_2 = \int_0^e \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_0^e \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^e dz$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

Et compte tenu de $\sigma = Q/S$, l'expression de U devient :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Qe}{\epsilon_0 S}$$

- **En déduire l'expression de la capacité du condensateur ainsi formé.**

Par définition, la capacité d'un condensateur s'exprime par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

Ainsi, on aura :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

3) Détermination, par deux méthodes différentes, de l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur

• Méthode (1) :

L'énergie électrique W_e emmagasinée dans le condensateur est égal au travail de la force électrique qu'il faut appliquer pour charger ce condensateur supposé initialement non chargé avec un générateur de tension continue. Si on suppose qu'à l'instant t la charge du condensateur est $q(t)$. Le travail élémentaire dW nécessaire pour faire passer une charge infinitésimale dq de l'armature négative vers l'armature positive est :

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

Ainsi, le travail total pour charger le condensateur sera :

$$W = W_e = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

• Méthode (2) :

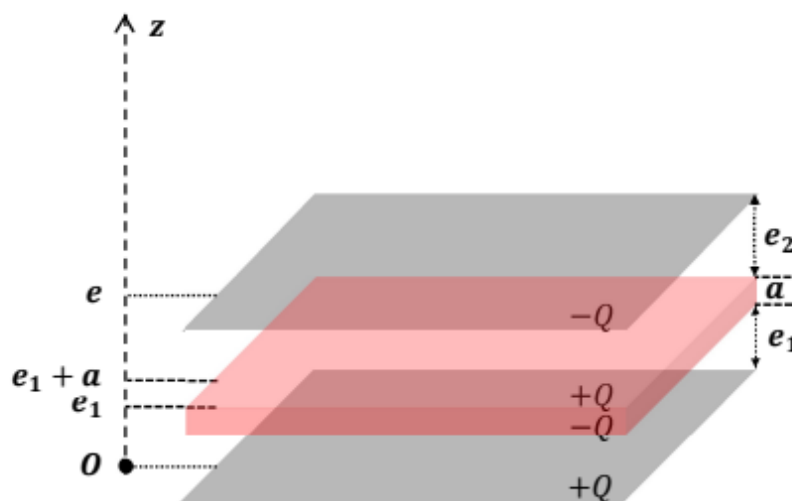
L'énergie emmagasinée dans le condensateur est aussi l'énergie électrostatique dans l'espace interarmature. On écrit :

$$W_e = \iiint_{\text{Esp Inter}} \frac{\epsilon_0 E^2(r)}{2} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^e \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 S dz = \frac{1}{2} \frac{Q^2 e}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Cette énergie se restreint à l'espace interarmature puisque le champ est nul ailleurs.

4) Montrons que le système formé après insertion de la plaque est équivalent à un condensateur de capacité C_{eq}

La figure ci-après illustre le nouveau système formé par introduction parallèlement aux armatures du condensateur d'une plaque métallique d'épaisseur a .



On exprimera la d.d.p entre les armatures du condensateur.

$$U = V_1 - V_2 = \int_0^{e_1} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{d\ell} + \int_{e_1+a}^e \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Notons que le champ à l'intérieur de la plaque métallique est nul.

Tout calcul fait, on a :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\sigma e_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma e_2}{\epsilon_0}$$

Ou encore

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Qe_1}{\epsilon_0 S} + \frac{Qe_2}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{\acute{e}q}}$$

On remarque alors que le système ainsi obtenu est équivalent à un seul condensateur de capacité équivalente $C_{\acute{e}q}$ telle que.

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{\acute{e}q}}$$

Avec, $\frac{1}{C_1} = \frac{e_1}{\epsilon_0 S}$ et $\frac{1}{C_2} = \frac{e_2}{\epsilon_0 S}$

Ce qui veut dire que :

$$C_{\acute{e}q} = \frac{\epsilon_0 S}{e_1 + e_2}$$