



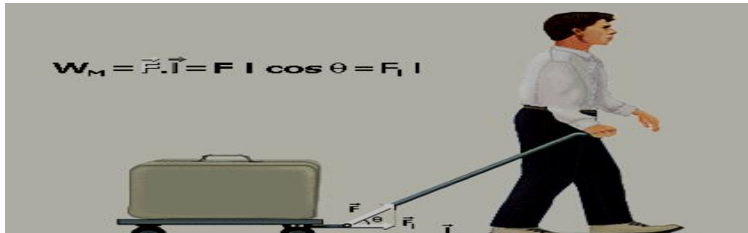
$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

*Physique : Premières F2-F3-F4 & EA*

**Option : Sciences Techniques Industrielles (STI)**

**LE GUIDE DU TECHNICIEN**

**DOCUMENT DU PROFESSEUR**



Rédigé par :

Valère AGUIDA

Alexandre G. AMOUSSOU

Benoît C. OGAN

Falilou OSSENI

*Sous la supervision de **Houssou C. ZANNOU KPITI**,*

Inspecteur de Sciences Physique Chimique et Technologie

## Avant-propos

Chers collègues, nous vous remercions pour vos attachements aux ouvrages de la « collection Puissance ». Ce document vous propose une piste de résolution des activités qui figurent dans le cahier de l'élève.

Nous vous prions de nous faire part de vos remarques et suggestions pour l'amélioration future des ouvrages de la « collection Puissance ».

Ensemble avec les ouvrages de la «collection Puissance», révolutionnons l'enseignement des sciences physiques dans nos Lycées et Collèges.

Les auteurs,

e-mail: [valamourg@gmail.com](mailto:valamourg@gmail.com)

# 1. VECTEURS ET LEURS PROJECTIONS

## Activité 1 : Opérations sur les vecteurs

1.1)

- a)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$
- b)  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- c)  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- d)  $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$
- e)  $\vec{v} - (\vec{w}) = \vec{v} + (-\vec{w}) =$
- f)

1.2) La multiplication : Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires.

- a)  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
- b)  $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- c)  $\alpha(\beta\vec{v}) = \alpha\beta\vec{v}$
- d)  $1\vec{v} = \vec{v}$
- e)  $0\vec{v} = \vec{0}$

1.3) Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points d'un espace affine

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- b)  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

### Application 1

Réduis les expressions suivantes :

- 1)  $\vec{A} = \vec{u}(-2 + 3) + \vec{v}(3 - 5) = \vec{u} - 2\vec{v}$
- 2)  $\vec{B} = \vec{u}(6 - 3) + \vec{v}(-12 + 6) = 3(\vec{u} - 2\vec{v})$
- 3) Déduis que  $\vec{B} = 3\vec{A}$

4)

- a)  $\vec{U} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$   
 $\vec{U} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CD}$
- b)  $\vec{V} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v} = 2\vec{AC} - \vec{DA} = 3\vec{AD} + 2\vec{DC}$$

5)  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad \vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \quad \lambda \vec{v} \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$

### Activité 2 : La norme d'un vecteur

2.1) Si  $\vec{v}$  est un vecteur, on utilise le symbole  $\|\vec{v}\|$  pour représenter la norme de  $\vec{v}$ . Soit  $\lambda$  un scalaire, complète les égalités et inégalités suivantes :

- a)  $\|\vec{v}\| \geq 0$
  - b)  $\|\vec{v}\| = 0$  si et seulement si  $\vec{v} = \vec{0}$
  - c)  $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
  - d)  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$
  - e)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$  (inégalité du triangle)
- 2.2)  $\vec{v}$  est qualifié de vecteur unité (ou unitaire) si  $\|\vec{v}\| = 1$
- 2.3) Si  $\vec{v}(a; b)$  dans un système orthonormé alors  $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

### Application 2

1) Effectue les calculs ci-dessous en utilisant

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a)  $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{89}$
- b)  $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| = \sqrt{34} - \sqrt{13}$
- c) Le vecteur unité de direction  $\|\vec{v}\|$  est le vecteur  $\vec{a}$   
tel que :  $\vec{a} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

2) Soit  $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  on a :  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a = 2b \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ a^2 = 4b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \mp \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ a = \mp \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Remarquez que du fait que  $a = 2b$  alors  $a$  et  $b$  sont de

même signe. Ainsi :  $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$  ou  $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-8\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$

### Activité 3 : Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel que l'on peut calculer de diverses façons. C'est cette diversité qui en fait un outil puissant.

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel, noté :

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ , lire («  $\vec{u}$  scalaire »  $\vec{v}$ ) défini par :  $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$$\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

3.1) Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan :

a)

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x^2 + y^2 \text{ avec}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \text{ alors } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

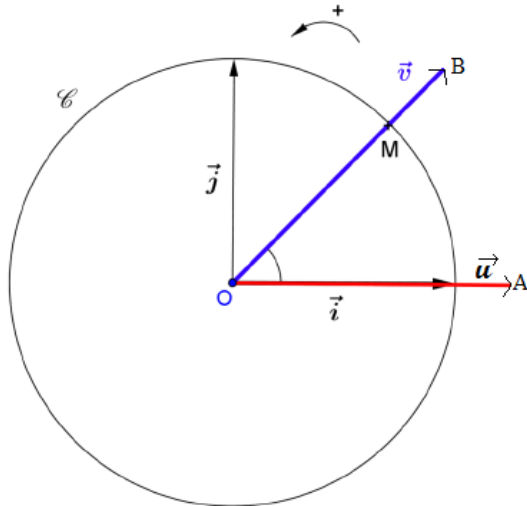
b) Démontrer que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = xx' + yy'$$

3.2)

a)



b) Détermine les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{OA}(OA; 0); \vec{OB}(OB\cos(\vec{i}, \vec{OB}); OB\sin(\vec{i}, \vec{OB}))$$

c)

$$(\vec{i}, \vec{OB}) = (\vec{u}, \vec{v}) = \text{alors } \vec{OB}(OB\cos(\vec{u}, \vec{v}); OB\sin(\vec{u}, \vec{v}))$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = OA \times OB\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$OA = \|\vec{u}\|; OB = \|\vec{v}\| \text{ et } (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\alpha$$

d) On pose  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

3.3)  $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ . La base est orthonormée.

Généralité :

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base orthonormée.}$$

Pour trois vecteurs :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  on a :

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0; \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ et } \vec{w} \cdot \vec{v} = 0; \end{cases}$$

### Application 3

1) Calculer le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  et l'angle aigu entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$

a)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$  donc  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .

b)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 7$  donc  $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{7}{5 \times \sqrt{2}}$   
 $(\vec{v}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{5 \times \sqrt{2}}\right) = 8,13^\circ$

2) Posons:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

3) Posons :  $(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\lambda\vec{u} - \vec{v}) = 0$   
 $\Rightarrow 5\lambda^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mp\sqrt{5}$

3.4) Complète les propriétés suivantes sur le produit scalaire :

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

d)  $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$

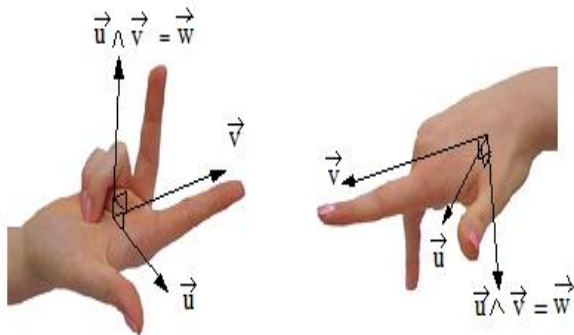
e)  $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v}$

3.5) Recherche les identités remarquables suivantes :

- a)  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$   
 b)  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$   
 c)  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

**Activité 4 : Produit vectoriel**

4.1) Donne une représentation de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$



- 4.2) Exprimer  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$   
 4.3) Lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$   
 4.4)  $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$   
 a)  $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -21 \end{pmatrix}$  ;  
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$   
 b)  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = 15$

EXERCICES DE CONSOLIDATION

1)  $A = \vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$A = 4 - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$B = (\vec{u} + \vec{v})^2 = 10$$

$$C = (\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = -12$$

$$D = (\overrightarrow{3u} + \vec{v})^2 = 34$$

2)

a)  $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \Rightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 2 \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

b)  $\|\vec{u}\|^2 - 8\|\vec{u}\| + 15 = 0 \Rightarrow (\|\vec{u}\| - 3)(\|\vec{u}\| - 5) = 0$

$\|\vec{u}\| = 3$  ou  $\|\vec{u}\| = 5$  avec  $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\| - 6$

EXERCICE 2

- Dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  :

$$\vec{i} = \vec{u} - \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}; \quad \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}; \quad \text{Les coordonnées sont :}$$

$$\vec{i} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{j} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\vec{v} = \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{u} = \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{i}; \quad \text{Les coordonnées}$$

$$\text{sont : } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

1)

$$\text{a) } \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

b)  $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$  et  $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$ ; Les coordonnées

sont :  $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2)

$$\text{a) } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{i} - 2\vec{j} = (x+2)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AM} = (x+2)\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) + (y-2)\left(-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 2\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\vec{v}$$

$\overrightarrow{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  donc:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

EXERCICE 4

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 5

a)  $AB = \sqrt{17}$  ;  $BC = \sqrt{5}$  et  $AC = \sqrt{14}$  .

b)  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$S = \left\| \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{2} \right\| = \frac{\sqrt{69}}{2} \text{ u. a avec u. a : l'unité d'aire.}$$

EXERCICE 7

1) On donne :  $\|\vec{a}\| = 6$  ;  $\|\vec{b}\| = 5$ . Sachant que  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont orthogonaux, calculer :

$$(\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = 136$$

$$(3\vec{a} - 6\vec{b})^2 = 1224; (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 11$$

2)

a)  $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 4 - \sqrt{6}$ ;  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 6 + 2\sqrt{3}$ ;

b)  $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = -2 - 5\sqrt{6}$  et

$$(3\vec{u} + \vec{v})^2 = 15 + 6\sqrt{6}$$

## 2. STATIQUE

### 1) Les méthodes de la statique

#### Activité 1 : Modélisation des actions mécaniques

1.1) On appelle action mécanique, toute cause capable de provoquer ou d'empêcher (le mouvement du solide, la déformation du solide) en translation (forces) et /ou en rotation (moment)..

1.2) Ce sont les forces ( $\vec{F}$ ) et moments ( $\vec{M}$ ).

1.3) Définitions :

**Les actions mécaniques extérieures** : actions qu'exercent, sur les différents éléments du système isolé, tous les solides n'appartenant pas au système matériel isolé. (actions de contact qui s'exercent à la frontière du système isolé ou actions à distance). Ce qui n'est pas isolé est souvent appelé le milieu extérieur.

**Les actions mécaniques intérieures** : ce sont les inter-efforts qu'exercent les différents éléments du système isolé les uns sur les autres aux différents points de contact. Ces efforts intérieurs peuvent être des efforts de cohésion traduisant la résistance du matériau aux sollicitations. Attention ! Ces actions ne peuvent pas être visualisées donc représentées. Elles n'apparaissent pas dans l'inventaire des actions lors de l'isolement.

1.4) Plan d'une étude de statique :

Isoler le solide ou le système de solides :

- le représenter seul
- matérialiser graphiquement les AM auquel il est soumis
- choisir et représenter un système d'axes de projection

Etablir le bilan des A.M.E :

- Action : nom, point d'application, direction et intensité.

Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

1.5.1) AM de contact et AM à distance.

1.5.2) Définitions et exemples :

- Une AM est dite à « distance » si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre les 2 solides ;  
Exemples : Action de la pesanteur ; action magnétique
- Une AM est dite de « contact » lorsqu'elle résulte d'une liaison mécanique entre au moins deux solides ;  
Exemples : action de contact entre la table et le sol ; l'action d'une boule sur un plan

## **Activité 2 : Force et moment**

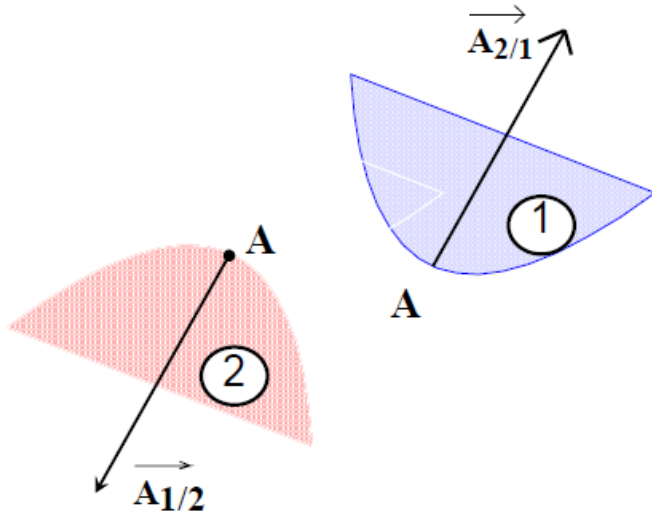
2.1.1) Cette grandeur est une force représentée par  $\vec{F}$

Une force, en mécanique, désigne l'effort qui tend à faire se translater un solide. Elle se définit par :

- Son point d'application.
- Sa direction (droite support de la force)

- Son sens
- Sa norme (intensité) exprimée en Newton (N).

### 2.1.2) Représentation



### 2.1.3) Principe des actions mutuelles.

Si un solide 1 exerce une action mécanique sur un solide 2 alors le solide 2 exerce une action réciproque sur le solide 1. Ces deux actions sont directement opposées :

$$\begin{cases} \vec{A}_{1/2} = -\vec{A}_{2/1} \\ \vec{M}_A(1/2) = -\vec{M}_A(2/1) \end{cases}$$

### 2.1.4) Forces de contact et forces à distance

2.1.5) La résultante de forces est l'unique force qui jouerait le même que toutes les autres force réunies.

2.2.1) C'est une rotation

2.2.2) C'est le moment

2.2.3) Représentation

### **Application 1**

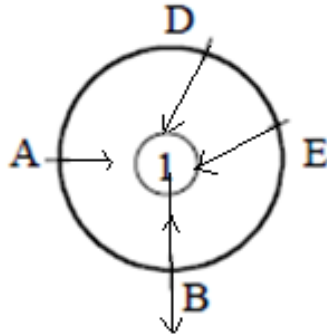
Présentation du bilan des forces dans un tableau :

	(1)	(2)	(3)	(1 + 2 + 3)	(1 + 2)
$\vec{P}_1$	E	/	/	E	E
$\vec{P}_2$	/	E	/	E	E
$\vec{P}_3$	/	/	E	E	/
$\vec{A}_{4/1}$	E	/	/	E	E
$\vec{B}_{4/1}$	E	/	/	E	E
$\vec{C}_{4/3}$	/	/	E	E	/
$\vec{D}_{1/2}$	/	E	/	I	I
$\vec{D}_{2/1}$	E	/	/	I	I
$\vec{E}_{1/3}$	/	/	E	I	/
$\vec{E}_{3/1}$	E	/	/	I	E
$\vec{F}_{2/3}$	/	/	E	I	/
$\vec{F}_{3/2}$	/	E	/	I	E

Légende :

I: Action intérieure; E: Action extérieure; / sans objet

Représenter uniquement les actions extérieures sur le solide (1). Ce sont :  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{A}_{4/1}$ ,  $\vec{D}_{2/1}$ ,  $\vec{E}_{3/1}$  et  $\vec{B}_{4/1}$ .



### Activité 3 : Moment d'une force par rapport à un point ; vecteur moment

$$3.1.1) \quad \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

$$3.1.2) \quad \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ et } B \text{ sont confondus ou} \\ \vec{F} \text{ est un vecteur nul ou} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$$

$$3.1.3) \quad \left\| \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \right\| = \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} \right\| = \|\vec{F}\| \|\overrightarrow{AB}\| |\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F})|$$

avec  $AH = \|\overrightarrow{AB}\| |\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F})| = d$  d'où  $\left\| \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \right\| = F \cdot d$

3.1.4) a)

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{F} ;$$

$\overrightarrow{CB}$  et  $\vec{F}$  sont colinéaires alors :  $\overrightarrow{CB}\Delta\vec{F} = \vec{0}$

D'où  $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AC}\Delta\vec{F}$ .

b) Conclusion : Le moment d'une force par rapport à un point ne dépend pas de la position du point d'application de la force sur sa droite d'action.

3.1.5)

$$\overrightarrow{M_D}(\vec{F}) = \overrightarrow{DB}\Delta\vec{F} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})\Delta\vec{F} = \overrightarrow{DA}\Delta\vec{F} + \overrightarrow{AB}\Delta\vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_D}(\vec{F}) = \overrightarrow{DA}\Delta\vec{F} + \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) : \text{transport de moment}$$

$$3.2.1) \quad \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} L_A = F_z(y_B - y_A) - F_y(z_B - z_A) \\ M_A = F_x(z_B - z_A) - F_z(x_B - x_A) \\ N_A = F_y(x_B - x_A) - F_x(y_B - y_A) \end{cases}$$

3.2.1) Exprime les coordonnées  $L_A, M_A$  et  $N_A$  de  $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$$3.2.2) \quad \left\| \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \right\| = \sqrt{L_A^2 + M_A^2 + N_A^2}$$

3.2.3) Unité : N.m

#### **Activité 4: Moment d'une force par rapport à son axe**

$$4.1) \quad \left\| \overrightarrow{M_{\overline{x}}}(\vec{F}) \right\| = \left\| \overrightarrow{M_O}(\vec{F}') \right\| = F' \times OAsin\beta \text{ et}$$

$$F' = F \times \cos\alpha \Rightarrow \left\| \overrightarrow{M_{\overline{x}}}(\vec{F}) \right\| = F \times \cos\alpha \times OAsin\beta$$

$$4.2) \quad \left\| \overrightarrow{M_{\overline{x}}}(\vec{F}) \right\| = 500 \times \cos 60^\circ \times 0,2 \times \sin 30^\circ = 25 \text{ N.m}$$

### Activité 5: Modélisation d'une AM par un torseur

5.1) Force et moment

5.2) C'est le torseur des AM.

5.3) L'ensemble de ces 2 vecteurs est appelé

TORSEUR de l'AM (force  $\vec{A}_{1/2}$ ) sur le solide au point B est noté  $\{T_{2/1}\}_B$

$$\{T(\vec{A}_{1/2})\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{M}_{B2/1} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{1/2} \\ \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{1/2} \end{array} \right\}_B$$

Les éléments de réduction du torseur sont :

$$\vec{R}_{1/2} = \vec{A}_{1/2} \text{ et } \overrightarrow{M_B(\vec{A}_{1/2})} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{1/2}$$

### Activité 6 : Torseur des AM d'un système de forces sur un solide

$$6.1) \quad \{T(S)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S) \\ \vec{M}_A(S) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_i \\ \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) \end{array} \right\}_A$$

$$6.2) \quad \{T(S)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S) \\ \vec{M}_B(S) \end{array} \right\}_B \text{ avec} \\ \vec{M}_B(S) = \vec{M}_A(S) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(S)$$

$$6.3) \quad \{0\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$6.4) \quad \{(\vec{P})\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{array} \right\}_G ;$$

$$\{(\vec{P})\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} 0 \quad L \\ 0 \quad M \\ -P \quad N \end{array} \right\}_A$$

$$\{\tau_{m \rightarrow c}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{A \rightarrow c} \end{array} \right\}_A$$

### Application 2

$$1) \overrightarrow{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}; \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F} \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_B(\vec{F}) = 50\vec{k}; \quad \|\overrightarrow{M}_B(\vec{F})\| = 50\text{N.m}$$

2)

$$a) A \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F} \begin{pmatrix} -50\sqrt{2} \\ 50\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0,5 & -50\sqrt{2} \\ -1 & 50\sqrt{2} \\ 0,5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = -25\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$b) \|\overrightarrow{M}_A(\vec{F})\| = 25\sqrt{2}\sqrt{3} = 25\sqrt{6}\text{N.m}$$

### 2) Les cas particuliers d'équilibre

#### Activité 7 : Principe fondamental de la statique

$$7.1) \quad \{\vec{F}_{\text{ext}}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\vec{F}_{\text{ext}}) \\ \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) \end{array} \right\}_O$$

7.2) condition d'équilibre du solide (S)

$$\{\vec{F}_{\text{ext}}\}_O = \{0\}_O \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0 \\ \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0 \end{cases}$$

7.3) Les deux cas d'équilibre sont :

- Equilibre en translation :  $\vec{R}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0$
- Equilibre en rotation :  $\vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0$

7.4) Enoncé du PFS : Un solide est en équilibre dans un référentiel galiléen si le torseur des actions mécaniques extérieures qui lui est appliqué est nul.

- Théorème de Varignon : Le moment d'une force par rapport à un axe quelconque est égale à la somme algébrique des moments de ses composantes.

7.5)

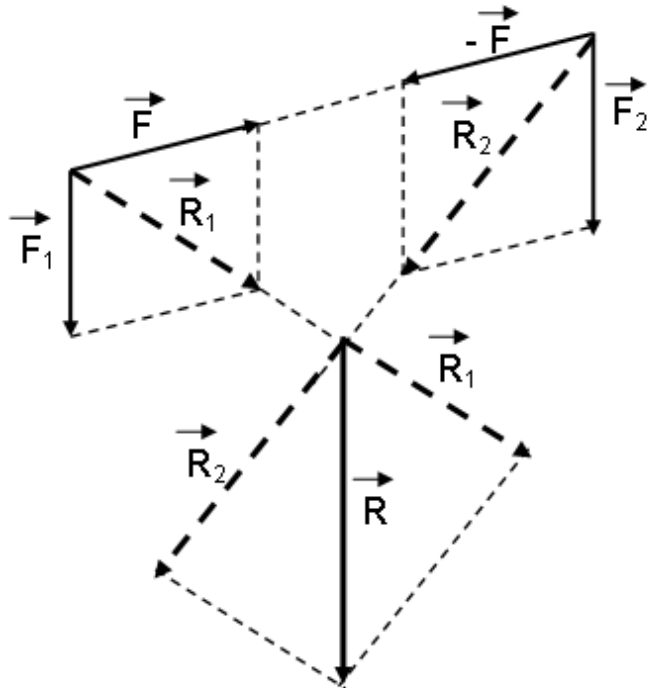
Principaux cas d'équilibre	Equations indépendantes	Nombre d'inconnues déterminables
Forces colinéaires	$X(S) = 0$	1
Forces parallèles	$\begin{cases} X(S) = 0 \\ M_A(S) = 0 \end{cases}$	2
Forces concourantes (même point)	$\begin{cases} X(S) = 0 \\ Y(S) = 0 \end{cases}$	2
Cas général	$\begin{cases} X(S) = 0 \\ Y(S) = 0 \\ M_A(S) = 0 \end{cases}$	3

- $\left\{ \begin{array}{l} X(S): \text{composante de la r\u00e9sultante des forces suivant X} \\ Y(S): \text{composante de la r\u00e9sultante des forces suivant Y} \\ M_A: \text{moment r\u00e9sultant des AM sur le solide (S) au point A} \end{array} \right.$

**Activit\u00e9 8 : R\u00e9sultante de forces**

8.1)  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{0}$

8.2)



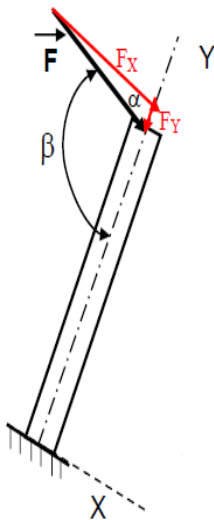
- 8.3) Un vecteur glissant est un vecteur dont le point d'application peut être pris à un point quelconque sur un support.
- 8.4) Voir schéma précédent

**Activité 9 : Composantes d'une force**

9.1)  $\begin{cases} F_X = F \cdot \cos\theta \\ F_Y = F \cdot \sin\theta \end{cases}$

9.2)  $\begin{cases} \text{norme: } \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} \\ \text{direction: } \tan\theta = \frac{F_Y}{F_X} \end{cases}$

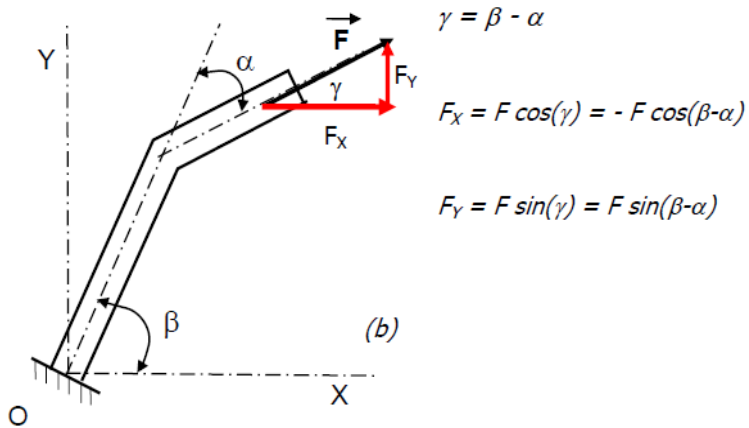
9.3)



$$\alpha = \pi - \beta$$

$$F_X = F \cos(\alpha) = -F \cos(\beta)$$

$$F_Y = F \sin(\alpha) = F \sin(\beta)$$



9.4)

F	x	Résultat	y	résultat
$F_1$	$F_1 \cdot \cos\alpha$	5,19	$F_1 \cdot \sin\alpha$	3
$F_2$	$F_2 \cdot \sin\beta$	4,94	$-F_2 \cdot \cos\beta$	-4,94
$F_3$	$F_3 \cdot \cos\theta$	-4	$F_3 \cdot \sin\theta$	6,92
R	-3,75		1,02	

9.5)  $R = \sqrt{(-3,75)^2 + (1,02)^2} = 3,88\text{KN}$

**Activité 10 : Equilibre d'un système matériel (solide) soumis à trois forces**

10.1) 
$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 \end{cases}$$

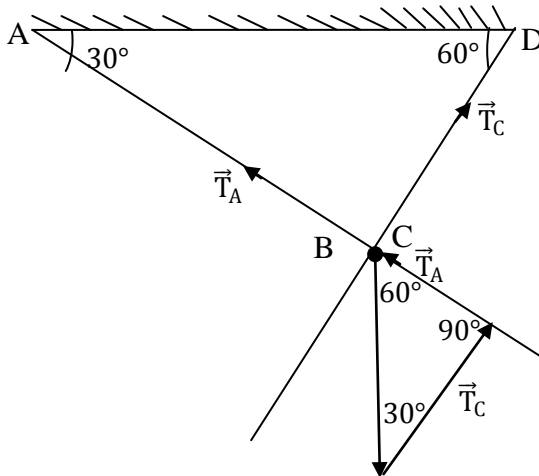
$$\begin{cases} F_1 \cos 30^\circ + (-F_2 \cos 60^\circ) + F_{4x} = 0 \\ F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 + F_{4y} = 0 \\ F_{4x} = -33,48 \text{ N} \\ F_{4y} = 12,01 \text{ N} \end{cases}$$

$$F_4 = \sqrt{(-33,48)^2 + (12,01)^2} = 35,56 \text{ N}$$

10.2) Loi des sinus :

a)  $\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{F_3}{\sin \alpha}$

b)

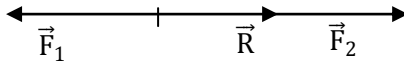


$$\frac{P}{\sin 90^\circ} = \frac{T_A}{\sin 30^\circ} = \frac{T_C}{\sin 60^\circ}$$
$$\begin{cases} T_A = \frac{P \cdot \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} \\ T_C = \frac{P \cdot \sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = 50 \text{ N} \\ T_B = 86,60 \text{ N} \end{cases}$$

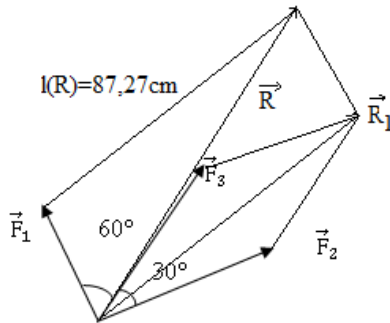
### Application 3

Détermination graphique et analytique

$$l(\vec{R})=1,5\text{cm}$$



$$R = F_2 - F_1 = 15\text{KN}$$



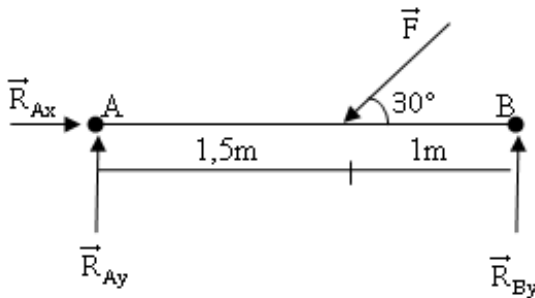
– Détermination analytique :

$$\text{Posons : } \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{F}_1 \end{cases}$$

$$R_1 = \sqrt{F_3^2 + F_2^2 + 2(F_3 F_2) \cos 30^\circ} = 43,57 \text{KN}$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + F_1^2 + 2(R_1 F_1) \cos 60^\circ} = 872,1 \text{KN}$$

### Application 4



$$\begin{aligned} \Sigma \text{ Forces } x &= 0 \\ \Sigma \text{ Forces } y &= 0 \\ \Sigma \text{ Moments } i &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{c} Y \uparrow + \\ \curvearrowright \\ X \rightarrow + \end{array}$$

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 \Rightarrow \\ M_A(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ax} - F_x = 0 \\ R_{Ay} - F_y + R_{By} = 0 \\ -1,5F_y + 2,5R_{By} = 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 21,65 \text{KN} \\ F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 12,5 \text{KN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{By} = -7,5\text{kN} \\ R_{Ay} = -5\text{kN} \end{cases}$$

### **3) Application des lois générales à des systèmes soumis à des AM dont les modèles peuvent-être coplanaires**

#### **Activité 11 : Etude des actions de contact**

11.1) Une liaison mécanique est dite « parfaite » lorsque les surfaces de contact sont géométriquement parfaites ; les effets de « l'adhérence » (solide immobile) ou du « frottement » (solide en mouvement) sont alors négligeables.

11.2) Les différents types d'une AM de contact :

✚ Action ponctuelle : Action appliquée en un point matériel, par exemple une force ponctuelle.

Ex : action d'une boule sur un plan

- L'unité de force ponctuelle est N (Newton)
- Multiples : daN; kN; MN

✚ Action linéique : force appliquée sur un ensemble de points matériels formant une ligne droite ou courbe.

Ex : action d'un cylindre sur un plan

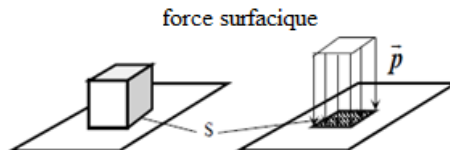
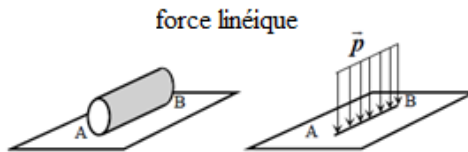
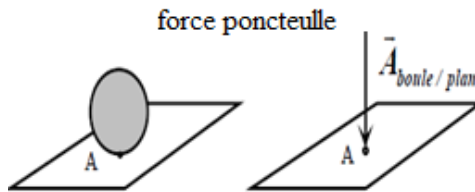
- L'unité de force linéique est : N / m
- Ou multiples : daN. m<sup>-1</sup>; kN. m<sup>-1</sup>; MN. m<sup>-1</sup>

✚ Action surfacique : appliquée sur un ensemble de points matériels formant une surface.

EX : action d'un cube sur un plan

- L'unité de l'action surfacique est :  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
- multiples :  $\text{daN} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\text{MN} \cdot \text{m}^{-2}$

11.3) Identifie de chaque type d'AM de contact :



**Activité 12 : Etat de surface de matériaux : adhérence et frottement**

12.1) Si deux surfaces en contact se déplacent ou glissent l'une par rapport à l'autre, on dit qu'il y a frottement.

Lorsque ces deux surfaces tendent à glisser mais ne se déplacent pas, on dit qu'il y a adhérence.

12.2.1) Cas 1:  $\alpha < \varphi_{adh}$  ;

- a) La relation  $\vec{R}_{0/1} = -\vec{P}$  à l'équilibre.
- b) A l'équilibre, la résultante des actions de contact est située à l'intérieur du cône d'adhérence.
- c)  $\vec{R}_{0/1}$  n'est plus orthogonale au plan tangent de contact, si on décompose cette force suivant une composante appartenant au plan de contact et une composante orthogonale au plan de contact.
- d) on remarque que la composante tangentielle est opposée au sens de déplacement possible. Cette force est qualifiée de force d'adhérence.
- e) Le point d'application I ne coïncide plus avec le centre de gravité de la surface de contact (rectangle), ce point se déplace lorsque  $\alpha$  varie. Ce point I est l'intersection de P avec la surface de contact.

Le torseur de l'action du plan 0 sur le solide 1 se

$$\text{réduit à } \{T_{0/1}\}_I = \left\{ \begin{array}{c} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

12.2.2) Cas 3:  $\alpha > \varphi_{\text{adhé}}$

- a) La relation entre  $\vec{R}_{0/1} + \vec{P} \neq \vec{0}$
- b) Si le solide est en mouvement, la résultante est située sur le cône de frottement.
- c) C'est le frottement.

12.2.3) Cas 2:  $\alpha = \varphi_{\text{adhé}}$

- a) Etablir la relation entre  $\vec{R}_{0/1} = -\vec{P}$
- b) A l'équilibre, la résultante se situe dans le cône d'adhérence.

12.2.4) Complète le texte troué :

Résultante ; cône ; tangentielle ; contact ; adhérence ;  
frottement ; équilibre

### **Activité 13 : Analyse mécanique des liaisons ; modélisation des liaisons (ou appuis)**

13.1) Pour les systèmes plans, les mouvements possibles se ramènent à une rotation autour d'un axe normal au plan du système et à une translation dans une direction quelconque du plan.

13.2) Trois degrés de liberté.

13.3) On distingue :

- Appui simple glissant
- Appui double (ou rotule ou articulation)
- Encastrement

13.2.1) Appui simple glissant

- a) Les mouvements possibles :
  - une translation d'axe Ax
  - une rotation d'axe Az
- b) d. d. l = 2; nombre de réactions  $n_R = 1$
- c) La réaction d'appui en A est donc perpendiculaire au plan tangent en A, seule son intensité suivant Ay est inconnue :  $\vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Description du symbole :

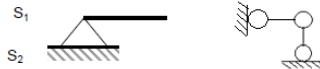
La pointe du triangle symbolise le fait que l'appui est ponctuel, permettant ainsi la rotation autour de la pointe du triangle, tandis que les deux rouleaux signifient que ce dernier est glissant.

13.2.2) Appui double

- a) Mouvement possible :
  - Seule la rotation, autour de l'axe Az du solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_2$ .
- b) d. d. l = 1; nombre de réactions  $n_R = 2$
- c) La réaction d'appui de  $S_2$  sur  $S_1$  a donc deux composantes, une horizontale et une verticale :

$$\vec{R} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Représentation :



13.2.3) Encastrement

- a) Il n'y a pas de mouvement possible
- b) L'encastrement ne permet plus aucun degré de liberté de S1 par rapport à S2.

nombre de réactions  $n_R = 3$

- c) La réaction d'appui de S2 sur S1 a alors trois composantes :
  - une force horizontale  $H_A$  suivant la direction  $Ax$ ;
  - une force verticale  $V_A$  suivant la direction  $Ay$ ;
  - un couple  $C_A$  d'axe  $Az$ .

$$\vec{R} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ C_A \end{pmatrix}$$

- d) Représentation graphique :



**Activité 14 : Système isostatique-système hyperstatique**

14.1) On pose :  $L = n_R - C_0$

- a) Si  $L = 0$  alors la structure est dite isostatique, l'écriture des équations de la statique suffit seule à déterminer les réactions d'appuis.
- b) Si  $L > 0$ , alors la structure est dite hyperstatique d'ordre  $L$  ; l'écriture des équations d'équilibre ne suffit pas seule à déterminer les réactions d'appuis. Il faudra écrire d'autres équations.

c) Si  $L < 0$ , la structure est un mécanisme, elle n'est pas stable. Elle va s'écrouler.

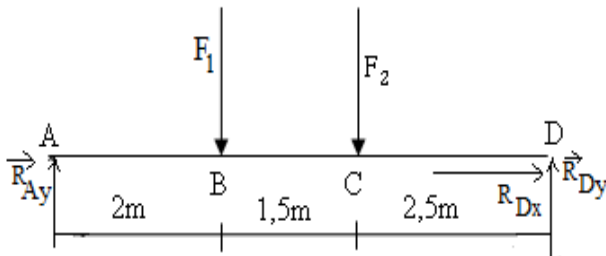
d) Les conditions  $L \geq 0$

NB : Dans le plan, le nombre d'équations  $C_0 = 3$

14.2) On considère la poutre suivante reposant sur deux appuis A et D.

a)  $L = 3 - 3 = 0$ : système isostatique.

b) Schéma statique :



c) Détermination des réactions aux appuis

$$\begin{cases} R_{Dx} = 0 \\ R_{Ay} - F_1 - F_2 + R_{Dy} = 0 \\ -2F_1 - 3,5F_2 + 6R_{Dy} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{Dy} = 441,66\text{N} \\ R_{Ay} = 658,34\text{N} \\ R_{Ax} = 0 \end{cases}$$

**Activité 15 : Les charges (ou forces) réparties**

15.1) Identification de chaque type de charge :

- Fig.1 : charges uniformément réparties
- Fig.2 : charges réparties d'intensité variable

15.2) Intensité de la résultante des charges appliquées :

- Fig.1 :  $Q = P \times S$  avec  $S = B \times H$

- Fig.2 :  $Q = \frac{H \times B}{2}$

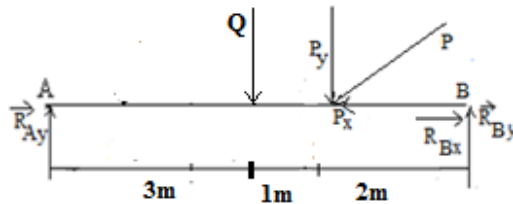
15.3) Point d'application de la résultante :

- Fig.1 :  $AG = \frac{1}{2} H$

- Fig.2 :  $AG = \frac{2}{3} H$

**Application 5**

- Fig.1 :
- Degré d'hyperstaticité :  $L = 3 - 3 = 0$
- Schéma statique



- Réactions aux appuis :

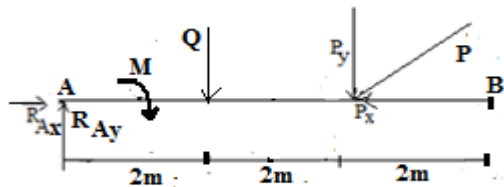
$$\begin{cases} R_{Bx} - P_x = 0 \\ R_{Ay} - Q + R_{By} - P_y = 0 \\ 3Q + 4P_y - 6R_{By} = 0 \end{cases}$$

- Réactions aux appuis

$$\begin{cases} R_{Ay} = P_x \\ R_{By} = \frac{3Q + 4P_y}{6} \\ R_{Ay} = Q + P_y - R_{By} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} P_x = P \cos 30^\circ = 17,2 \text{ kN} \\ P_y = P \sin 30^\circ = 10 \text{ kN} \\ Q = q \times l = 90 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Bx} = 17,32 \text{ kN} \\ R_{By} = 51,66 \text{ kN} \\ R_{Ay} = 48,34 \text{ kN} \end{cases}$$

- Fig. 2
- Degré d'hyperstaticité :  $L = 3 - 3 = 0$
- Schéma statique



$$\begin{cases} R_{Ax} - P_x = 0 \\ R_{Ay} - Q - P_y = 0 \\ M + 2Q + 4P_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} = 21,21 \text{ kN} \\ R_{Ay} = 23,94 \text{ kN} \\ M = -174,84 \text{ kN} \end{cases}$$

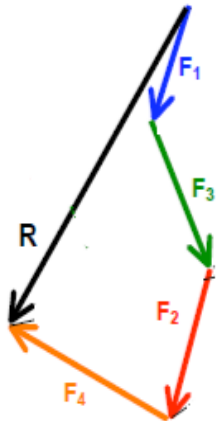
## **Activité 15 : Statique graphique**

### 15.1) Définitions

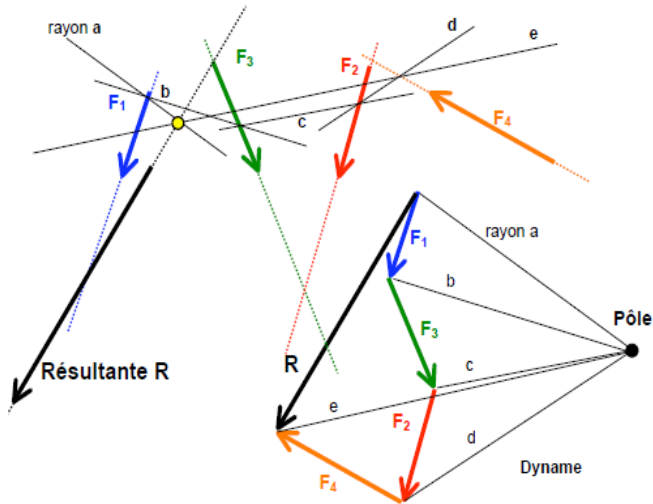
- Dynamique : c'est le polygone de forces
- Dynamique du polygone de forces : C'est la figure comprenant le polygone des forces, le pôle et le rayon polaire
- Funiculaire : C'est le polygone de forces du plan de situation (ou figure de position) et dont les côtés sont parallèles aux rayons polaires.

### 15.2)

#### 15.1.1) Construction du dynamisme ;



15.1.2) Détermination graphique de l'intensité de la résultante  $\vec{R}$  de ces forces.



#### 4) Le du centre de gravité

**Activité 16 : Recherche du centre de gravité d'un système.**

16.1) Le centre de gravité d'un système matériel est le point, noté  $G$ , par lequel passe la ligne d'action de la résultante des forces de pesanteur. C'est le point d'application du poids du système matériel.

16.2) La relation barycentrique : soit G le barycentre

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

16.3) Le C.d.G est indépendant de la position du système matériel dans l'espace.

16.4.1) Expression des coordonnées de G :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{Og_i}}{M} \Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{m_i x_{gi}}{M} \\ Y_G = \frac{m_i y_{gi}}{M} \\ Z_G = \frac{m_i z_{gi}}{M} \end{cases}$$

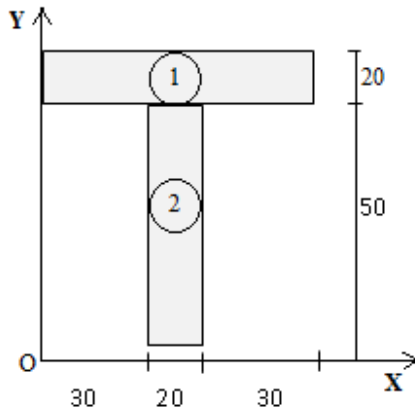
16.4.2) Le C.d.G est indépendant de la position du système matériel dans l'espace du repère.

16.4.3) Expression du C.D.G

$$\begin{cases} X_G = \frac{S_i x_{gi}}{S} \\ Y_G = \frac{S_i y_{gi}}{S} \\ Z_G = \frac{S_i z_{gi}}{S} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} S_i = \text{section élémentaire} \\ S = \text{surface totale} \end{cases}$$

### Application 7

Détermination du CDG des figures suivantes :



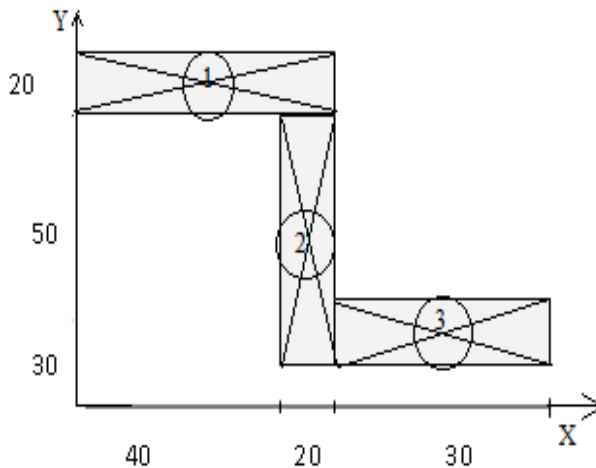
– Aire :  $A_1 = L \times l = 80 \times 20 = 1600\text{m}^2$

– Aire :  $A_2 = L \times l = 50 \times 20 = 1000\text{m}^2$

$$G_1 \begin{cases} x_{G1} = 40 \\ x_{G2} = 60 \end{cases} ; \quad G_2 \begin{cases} x_{G2} = 40 \\ x_{G2} = 25 \end{cases}$$

$$G \begin{cases} X_G = \frac{(x_{G1} \times S_1) + (x_{G2} \times S_2)}{S} \\ Y_G = \frac{(y_{G1} \times S_1) + (y_{G2} \times S_2)}{S} \end{cases}$$

$$G \begin{cases} X_G = \frac{(40 \times 1600) + (40 \times 1000)}{S} = 40 \\ Y_G = \frac{(60 \times 1000) + (25 \times 1000)}{S} = 46,53 \end{cases}$$



- Aire :  $S_1 = L \times l = 20 \times 40 = 1600\text{m}^2$
- Aire :  $S_2 = L \times l = 20 \times 90 = 1800\text{m}^2$
- Aire :  $S_3 = L \times l = 20 \times 30 = 600\text{m}^2$

$$G_1 \begin{cases} x_{G1} = 20 \\ x_{G2} = 80 \end{cases} ; \quad G_2 \begin{cases} x_{G2} = 30 \\ x_{G2} = 45 \end{cases} ; \quad G_3 \begin{cases} x_{G3} = 75 \\ Y_{G3} = 10 \end{cases}$$

$$G \begin{cases} X_G = \frac{(x_{G1} \times S_1) + (x_{G2} \times S_2) + (x_{G3} \times S_3)}{S} \\ Y_G = \frac{(y_{G1} \times S_1) + (y_{G2} \times S_2) + (y_{G3} \times S_3)}{S} \end{cases}$$

$$G \begin{cases} X_G = 47,18 \\ Y_G = 47,18 \end{cases}$$

EXERCICES DE CONSOLIDATION

EXERCICE 1

Pour chacune des figures ci-après, déterminer analytiquement et graphiquement la résultante des forces.

F	x	Résultats	y	Résultats
F <sub>1</sub>	-F <sub>1</sub> sin30°	-5	F <sub>1</sub> cos30°	8,66
F <sub>2</sub>	-F <sub>2</sub> cos35°	-10,64	-F <sub>2</sub> sin35°	-7,45
F <sub>3</sub>	-F <sub>3</sub> sin45°	-9,89	-F <sub>3</sub> sin45°	-9,89
F <sub>4</sub>	F <sub>4</sub> cos60°	6	-F <sub>4</sub> sin60°	-10,39
R		-19,53		-19,07

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-19,53)^2 + (-19,07)^2}$$

$$R = 19,97\text{KN}$$

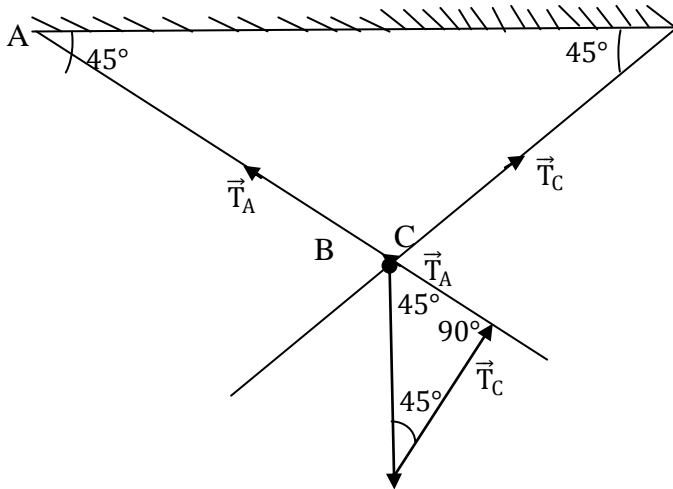
F	x	Résultats	y	Résultats
F <sub>1</sub>	F <sub>1</sub> cos30°	6,06	F <sub>1</sub> sin30°	3,5
F <sub>2</sub>	F <sub>2</sub> cos60°	4	-F <sub>2</sub> sin60°	-6,92
F <sub>3</sub>	-F <sub>3</sub> sin15°	-2,32	-F <sub>3</sub> cos15°	-6,69
F <sub>4</sub>	-F <sub>4</sub> cos35°	-8,19	-F <sub>4</sub> sin35°	-5,73
F <sub>5</sub>	F <sub>5</sub> sin45°	8,48	F <sub>5</sub> cos45°	8,48
R		8,03		-9,36

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-8,03)^2 + (-9,36)^2}$$

$$R = 12,33\text{KN}$$

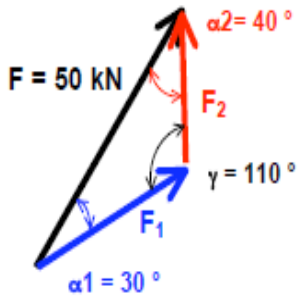
EXERCICE 2

1) Détermination des tensions  $T_A$  et  $T_C$  D



$$\frac{P}{\sin 90^\circ} = \frac{T_A}{\sin 45^\circ} = \frac{T_C}{\sin 45^\circ}$$
$$\begin{cases} T_A = \frac{P \cdot \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\ T_C = \frac{P \cdot \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = 106,06\text{N} \\ T_B = 106,06\text{N} \end{cases}$$

2) Calcul des intensités  $F_1$  et  $F_2$



$$\begin{cases} F_1 = \frac{F \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \\ F_2 = \frac{F \cdot \sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = 34,20\text{N} \\ F_2 = 26,04\text{N} \end{cases}$$

### EXERCICE 3

1) Réduction du système suivant au point I

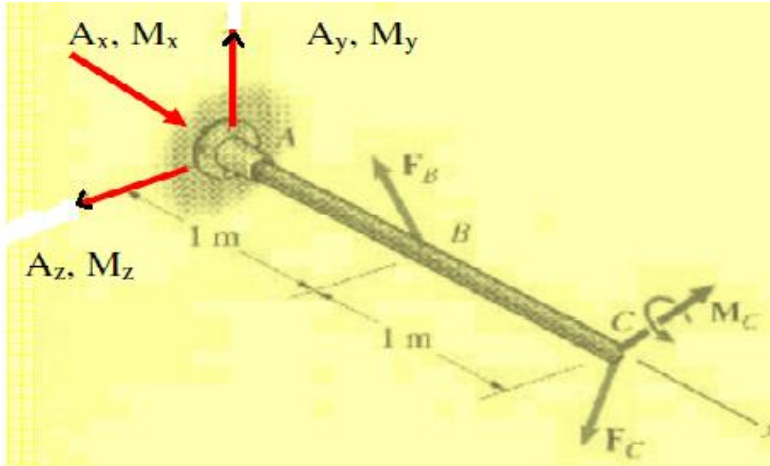
N°	$F_i$ kN	$\alpha_i$ °	$X_i$ m	$Y_i$ m	$F_{ix}$ kN	$F_{iy}$ kN	$M_A$ kNm
1	50	225	-2.5	3.0	-35.4	-35.4	194.7
2	30	0	2.0	1.5	30.0	0.0	-45.0
3	55	60	1.5	-3.0	27.5	47.6	153.9
<b>Somme</b>					<b>22.1</b>	<b>12.2</b>	<b>303.6</b>

$$\text{Résultante } R = \sqrt{22.1^2 + 12.2^2} = 25.2 \text{ kN}$$

$$\text{Angle de la résultante } \alpha_R = \text{tg}^{-1}(12.2 / 22.1) = 28.9^\circ$$

EXERCICE 5

Détermination des réactions aux appuis



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x + 2\text{kN} + 1\text{kN} = 0 \\ A_y + 6\text{kN} - 2\text{kN} = 0 \\ A_z + 3\text{kN} - 2\text{kN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -3\text{kN} \\ A_y = -4\text{kN} \\ A_z = -1\text{kN} \end{cases}$$

- Pour le calcul des moments, il est préférable d'utiliser le calcul vectoriel (matrice).

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

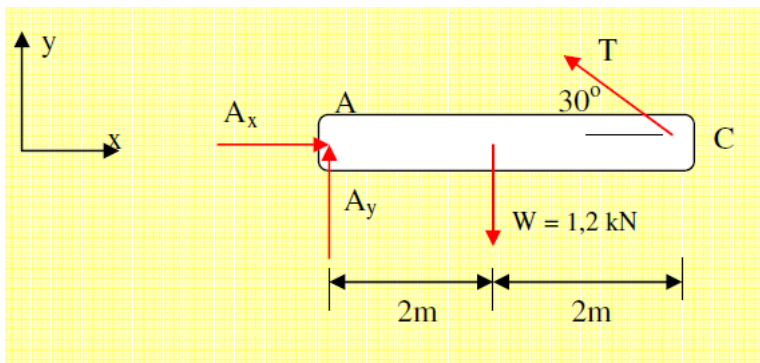
$$M_A(\vec{F}_B) = \overline{AB} \wedge \vec{F}_B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ en kN.m}$$

$$M_A(\vec{F}_C) = \overline{AC} \wedge \vec{F}_C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (4\vec{j} - 4\vec{k}) \text{ en kN.m}$$

$$\begin{cases} \sum M_{Ax} = 0 \\ \sum M_{Ay} = 0 \\ \sum M_{Az} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_x + M_{Cx} = 0 \\ M_y - 3 + 4 + M_{Cy} = 0 \\ M_z + 6 - 4 + M_{Cz} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_x = -2 \text{ kN.m} \\ M_y = 2 \text{ kN.m} \\ M_z = 0 \end{cases}$$

### EXERCICE 6



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1,2 \times 2m + T \cdot \sin 30^\circ \times 4m = 0$$

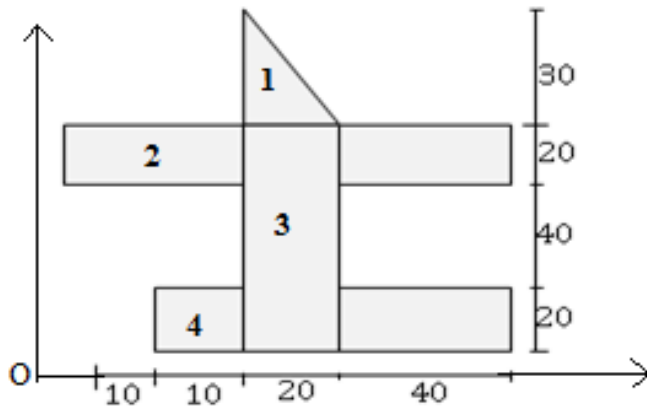
$$\Leftrightarrow T = \frac{1,2 \times 2}{4 \times \sin 30^\circ} = 1,2 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} A_x - T \cos 30^\circ = 0 \\ A_y - T \sin 30^\circ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 1,04 \text{ kN} \\ A_y = 0,6 \text{ kN} \end{cases}$$

EXERCICE 8

- a)  $L = 4 - 3 = 1$ ; système hyperstatistique
- b)  $L = 6 - 3 = 3$ ; système hyperstatistique
- c)  $L = 3 - 3 = 0$ ; système isostatique
- d)  $L = 5 - 3 = 2$ ; système hyperstatistique

EXERCICE 10



$$S_1 = \frac{b \times h}{2} = \frac{20 \times 30}{2} = 300\text{m}^2$$

$$S_2 = L \times l = 80 \times 20 = 1600\text{m}^2$$




$$S_3 = 40 \times 20 = 800\text{m}^2; S_4 = 70 \times 20 = 1400\text{m}^2$$

$$S = \sum S_i = 4100\text{m}^2$$

$$G_1 \begin{pmatrix} 6,66 \\ 90 \end{pmatrix}; G_2 \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \end{pmatrix}; G_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}; G_4 \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$G \begin{cases} X_{G1} = 18,78 \\ Y_{G2} = 45,12 \end{cases}$$

EXERCICE 11

Modélisation		Inconnues de liaison	
	appui mobile	$R_Y \uparrow$	1 inconnue
	appui fixe	$R_Y \uparrow$ $R_X \rightarrow$	2 inconnues
	encastrement	$R_Y \uparrow$ $R_X \rightarrow$ $M \curvearrowright$	3 inconnues

## **3. CINEMATIQUE**

### **A/ LA CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL**

#### **1) Mouvement d'un solide**

##### **Activité 1 : Qu'est ce qu'un référentiel ?**

1.1)

1.1.1) Un référentiel est un corps solide que l'on choisit comme référence pour étudier le mouvement d'un autre corps.

1.1.2) Un point matériel est un objet dont on peut les dimensions son très petites devant l'échelle du problème à résoudre.

– Un mobile est un corps en mouvement.

1.1.3) Un référentiel est constitué :

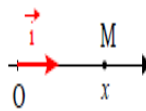
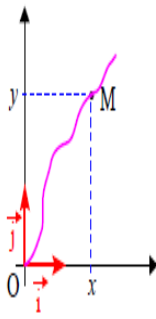
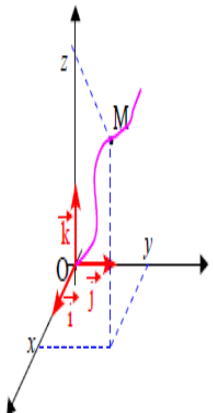
- D'un solide de référence ;
- D'un repère d'espace, lié au solide de référence
- D'un repère de temps.

1.1.4) Quelques référentiels d'étude d'un mobile :

- Référentiel terrestre : il pour référence, tout solide fixe par rapport à la surface de la Terre.
- Référentiel géocentrique : il a pour origine de référence, le centre de gravité de la Terre.
- Référentiel héliocentrique : il a pour origine, le centre de gravité du soleil.

1.2)

- 1.2.1) La trajectoire d'un point mobile est la courbe qui décrit l'ensemble des positions occupées par ce mobile au cours du temps.
- La trajectoire peut être une droite, un cercle ou une courbe quelconque.
- 1.2.2)

Mobile animé d'un mouvement rectiligne	Mobile animé d'un mouvement plan	Mobile animé d'un mouvement non plan
Repère à 1 dimension	Repère à 2 dimensions	Repère à 3 dimensions
		
$\vec{OM} = xi$	$\vec{OM} = xi + yj$	$\vec{OM} = xi + yj + zk$

### Application 1

- 1)  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = 2t.\vec{i} + (3t - 4).\vec{j}$
- 2)  $y = \frac{3x}{2} - 4$
- 3) La trajectoire du mouvement est une droite.

### Activité 2 : Qu'est ce qu'un mouvement de translation ou de rotation ?

- 2.1)
  - Les trajectoires sont identiques ;
  - Les vecteurs vitesses sont les mêmes ;
- 2.2)  $AB = A_0B_0$ ;  $BC = B_0C_0$ .
- 2.3) Un solide est en mouvement de translation lorsqu'un segment quelconque de ce solide reste parallèle a lui-même au cours du déplacement de ce solide.
- 2.4) Translation rectiligne ou curviligne
- 2.5)
  - Lorsque la trajectoires des différents points de ce solide sont des droites, la translation est dite rectiligne.
  - Lorsque la trajectoires des différents points de ce solide sont des courbes la translation est dite curviligne.
- 2.6) Lorsqu'un solide est anime d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires autour de cet axe.

2.7)

- Figure a) : mouvement de translation rectiligne
- Figure b) : mouvement de translation curviligne
- Figure c) : mouvement de rotation

**Activité 3 : Vecteur vitesse d'un point d'un solide en rotation ou en translation rectiligne**


3.1) La vitesse moyenne d'un point d'un solide est le quotient  $L$  de son parcours par la durée correspondante.  $V = \frac{L}{\Delta t}$

3.2) Expression de la vitesse moyenne pour :


3.2.1) Un mouvement de translation rectiligne

3.2.2) Un mouvement curviligne.

Mouvement rectiligne

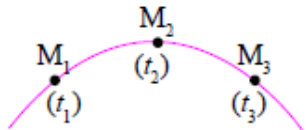

$$v_m = \frac{M_1 M_2}{t_2 - t_1}$$

Mouvement curviligne


$$v_m = \frac{\widehat{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$$

3.3)

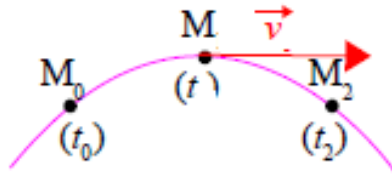
3.3.1)


$$v_2 = \frac{M_1 M_3}{t_3 - t_1}$$

3.3.2) Le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}$  à un instant  $t$  est caractérisé par :

- Un point d'application : l'endroit où se trouve le point à cet instant.
- Une direction, tangente à la trajectoire en ce point.
- Un sens, celui du déplacement à cet instant.
- Une norme  $V$  en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

3.3.3) Représentation du vecteur vitesse.



3.3.4) La nature du mouvement :

- a) Mouvement rectiligne
- b) Mouvement accéléré
- c) Mouvement décéléré

3.4)

3.4.1)  $\omega = \frac{\alpha}{\Delta t}$ ; unité:  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

3.4.2)  $V = R\omega$

**Activité 4 : Vecteur accélération d'un point en rotation et en translation rectiligne**

4.1)

$$4.1.1) \vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

4.1.2) L'unité est  $m \cdot s^{-2}$

$$4.1.3) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$4.1.4) \text{ Expression } a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

4.2)

4.2.1) Les composantes :  $\vec{\Gamma} = \gamma_t \vec{t} + \gamma_n \vec{n}$

$$\vec{\Gamma} = \begin{cases} \gamma_t = \frac{dv}{dt} \\ \gamma_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

4.2.2)  $\begin{cases} \gamma_t : \text{composante tangentielle} \\ \gamma_n : \text{composante normale} \end{cases}$

4.2.3) Quelle est la nature du mouvement dans les cas suivants :

- a)  $\vec{\Gamma}$  et  $\vec{V}$  sont de même sens : mouvement accéléré
- b)  $\vec{\Gamma}$  et  $\vec{V}$  sont de sens contraires : mouvement décéléré

**Activité 5 : Les différentes lois de mouvement en fonction du temps.**

5.1) Mouvement de translation rectiligne :

5.1.1) Le mouvement rectiligne est dit uniforme si la vitesse est une constante.

Etablis son équation horaire :  $x(t) = V_{0x}(t - t_0) + x_0$

Conditions initiales à  $t_0$  :  $\begin{cases} V_{0x}: \text{vitesse initiale} \\ x_0: \text{abscisse initiale} \end{cases}$

5.1.2) Le mouvement rectiligne est uniformément varié si l'accélération est une constante.

Etablis son équation horaire :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2 + V_{0x} (t - t_0) + x_0$$

5.2) Les mouvements de rotation :

5.2.1) Lorsque la vitesse de rotation a une valeur constante la rotation est uniforme et le mouvement est périodique.

5.2.2) Equation horaire du mouvement par :

a) Son abscisse angulaire  $\theta$  :

$$\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta_0 \quad \begin{cases} \omega: \text{vitesse angulaire} \\ \theta_0: \text{abscisse angulaire initiale} \end{cases}$$

b) Par son abscisse curviligne  $s$  :

$$s(t) = V(t - t_0) + S_0 \quad \begin{cases} V: \text{vitesse linéaire} \\ S_0: \text{abscisse curviligne initiale} \end{cases}$$

5.2.3)

a) La période  $T$  est la durée au bout de laquelle le mouvement recommence identique à lui-même.

b)  $T = \frac{1}{N}$  avec  $\begin{cases} T \text{ en seconde (s)} \\ N \text{ en hertz (Hz)} \end{cases}$

5.2.4) Le mouvement circulaire est dit uniforme lorsque sa vitesse angulaire est constante.

a)  $V = R\omega$

b)  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{V}$

### Application 2

1)

a)  $V = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{17} = 4,12m.s^{-1}$

b)  $\begin{cases} x = -4(t - 3) + 2 = -4t + 14 \\ y = (t - 3) - 3 = t - 6 \end{cases}$

c)  $y = 0 \Leftrightarrow t = 6s$

d)  $y = -4 \times 6 + 14 = -10m$

2)  $V = R\omega = \frac{d}{2}\omega = \frac{0,4 \times 2 \times 3,14 \times 1000}{2 \times 60} = 20,93m.s^{-1}$

### Application 3

1)  $x_A = 80t; \quad x_B = -80t + 132$

2)  $x_A = x_B \Leftrightarrow t = 0,88h = 52min48s$

## **B/ LA CINEMATIQUE DU SOLIDE**

### **Activité 6 : Qu'est qu'un mouvement plan ?**

- 6.1) Un solide indéformable est un solide dont la distance entre deux points reste toujours constante au cours du temps.
- 6.2) Translation et rotation
- 6.3) Un mouvement est dit "plan" lorsqu'il ne correspond ni à une translation, ni à une rotation absolue. C'est une combinaison de 2 ou plusieurs mouvements simples.

### **Activité 7 : Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesses linéaires.**

- 7.1) Ecris le torseur cinématique caractérisant le mouvement du solide S par rapport à R au point M.

$$\{V(S/R)\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \overrightarrow{V(M, S/R)} \end{array} \right\}_M \text{ avec}$$

$$\overrightarrow{V(N, S/R)} = \overrightarrow{V(M, S/R)} + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R)}$$

- 7.2) Les éléments de réduction de ce torseur :
- cas d'une translation : tous les points ont même vitesse linéaire. il n'est alors plus indispensable de préciser le centre d'expression du torseur.

$$\{V(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V(A, S/R)} \end{array} \right\}$$

cas d'une rotation : tous les points de l'axe de rotation ont une vitesse linéaire nulle. Ainsi lorsque le centre d'expression du torseur cinématique est pris sur l'axe de rotation, le torseur s'écrit :

$$\{V(S/R)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O ; O, \text{ centre de l'axe de rotation}$$

7.3) Relation :  $\overrightarrow{V(A, S/R)} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(B, S/R)} \cdot \overrightarrow{AB}$

7.4) Le champ des vecteurs vitesse linéaire d'un solide en translation est uniforme. Tous les points ont la même vitesse.

7.5)

7.5.1.) En tant que centre de rotation, le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses du solide.

7.5.2.)  $\frac{V_A}{IA} = \frac{V_B}{IB} = \frac{V_C}{IC} = \omega$

#### **Application 4**

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{0,5 \times 0,866}{0,5} = 0,866 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

EXERCICES DE CONSOLIDATION

EXERCICE 1

1)  $V = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{17} = 4,12m \cdot s^{-1}$

2)

a)

$$\begin{cases} x = -4(t - 3) + 2 = -4t + 14 \\ y = (t - 3) - 3 = t - 6 \end{cases}$$

b)  $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$

3) A  $t_1 = 4s$ :  $M_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  ;  $t_2 = 5s$ :  $M_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

4)  $M_1 M_2 = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (-1 + 2)^2} = 4,12m$

5)  $V = \frac{M_1 M_2}{t_2 - t_1} = 4,12m \cdot s^{-1}$

EXERCICE 2

1.a)  $V_{1x} = 8m \cdot s^{-1}$  et  $V_{2x} = -5m \cdot s^{-1}$

b)  $x_1 = 8t$ ;

$$x_2 = -5(t - 3600) + 50000 = -5t + 68000$$

2)  $x_1 = x_2 \Leftrightarrow t = 5230,76s = 1h27min$  ;

– Les deux cyclistes se croisent à 7h27min

– Et à 41,84km du point A.

3)  $x_2 = 0 \Leftrightarrow t = 13600s = 3h46min12s$

Don le cycliste  $C_2$  passe par A à 10h16min12s; c'est l'heure à laquelle le cycliste passa par A.

$$\begin{aligned} 3) |x_2 - x_1| &= 130 \Rightarrow |13t - 68000| = 130 \\ \Rightarrow 13t - 68000 &= 130 \text{ ou } 13t - 68000 = -130 \\ \Leftrightarrow t &= 5220,76 \text{ ou } t = 5240,76\text{s} \Leftrightarrow t = 1\text{h}27\text{min} \end{aligned}$$

#### EXERCICE 4

La figure suivante représente le système de transmission d'une motocyclette. La roue R de rayon R et la roue r de rayon r sont solidaires et coaxiales, sont reliées par une courroie.

$r_1$  et  $r_2$  sont coaxiales et solidaires et  $r_1$  et  $r_0$  sont en contact par leurs dentures. La roue R de la motocyclette avance à la vitesse  $V = 54\text{km/h}$ .

Système de transmission de la motocyclette

$$R = 3a; r = 1,5a; r_1 = a; r_2 = r; r_0 = 0,6a; \text{ avec } a = 10\text{cm}$$

1.a)  $V_M = V$  soit  $V = 15\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

b)  $V = V_M = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = 50\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$V_C = r\omega = 1,5a\omega = 7,5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.a) Détermine la vitesse angulaire de la roue  $r_2$

$$\omega_2 = \frac{V_C}{r_2} = \frac{V_C}{1,5a} = 50\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)  $V_2 = V_C = 7,5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

3.a)  $V_2 = V_0 = r_0\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{V_2}{r_0} = 2\pi N_0$

$$\Leftrightarrow N_0 = \frac{V_2}{2\pi r_0} = 20,22\text{Hz}$$

b)  $T_0 = \frac{1}{N_0} = 0,050\text{s}$

## **4. RESISTANCE DES MATERIAUX**

### **1) Objet et méthode de la résistance des matériaux**

#### **Activité 1 : Contrainte et déformations dans les poutres**

1.1)

- a) Les différentes parties de cette poutre :
  - 1: Poutre ;
  - 2: Section droite ;
  - 3: Fibre ou ligne moyenne
  - 4: fibre
- b) La ligne moyenne est la courbe décrite par le centre de gravité G de la section droite de la poutre.

1.2)

1.2.1)  $\vec{C}$  est une force intérieure à la poutre

1.2.2)  $C = \frac{F}{S}$

1.2.3) La contrainte s'exprime en  $N \cdot m^{-2}$

Autres unités de la contrainte :

- $1N \cdot m^{-2} = 1Pa$  et  $1bar = 10^5 Pa$
- $1kPa = 1kN \cdot m^{-2} = 10^3 N \cdot m^{-2}$
- $1MPa = 1MN \cdot m^{-2} = 10^6 N \cdot m^{-2}$
- $1daN = 10N$

1.2.4) Définir les composantes normales

$$\begin{cases} \sigma = \frac{F_n}{S} ; c' \text{ est la contrainte normale} \\ \tau = \frac{F_\tau}{S} ; c' \text{ est la contrainte tangentielle} \end{cases}$$

### Application 1

$$1) \begin{cases} F_n = F \cdot \sin 50^\circ = 114,91 \text{ N} \\ F_\tau = F \cdot \cos 50^\circ = 96,42 \text{ N} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sigma = \frac{F_n}{S} = 957,58 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \\ \tau = \frac{F_\tau}{S} = 803,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \end{cases} ; S = L \times l = 0,12 \text{ m}^2$$

### Activité 2 : Torseur des efforts intérieurs

2.1) Définitions :

- effort normal  $\vec{N}$ : C'est la projection de  $\vec{R}$  sur la normale extérieure (G;  $\vec{x}$ ).
- effort tranchant  $\vec{T}$ : C'est la projection de  $\vec{R}$  sur le plan de la section droite (G;  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ).
- moment torsion  $\vec{M}_t$ : C'est la projection de  $\vec{M}_G$  sur la normale extérieure (G;  $\vec{x}$ ).
- moment de flexion  $\vec{M}_f$ : C'est la projection de  $\vec{M}_G$  sur le plan de la section droite (G;  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ).

2.2) Signification de chaque composante

N	Effort normal (dans la direction X)
T <sub>Y</sub>	Effort tranchant dans la direction Y
T <sub>Z</sub>	Effort tranchant dans la direction Z
M <sub>t</sub>	Moment de torsion (autour de l'axe X)
M <sub>Y</sub>	Moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe Y)
M <sub>Z</sub>	Moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe Z)

L'effort tranchant :

$$\vec{T} = T_Y \cdot \vec{y} + T_Z \cdot \vec{z}$$

Le moment de flexion :

$$\vec{M} = M_Y \cdot \vec{y} + M_Z \cdot \vec{z}$$

2.3) N, T<sub>y</sub>, M<sub>t</sub> et M<sub>Y</sub>

2.3.1) Relations entre sollicitations et efforts extérieurs :

$$S_1: \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{et} \quad S_2: \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow G} = \vec{0}$$

2.3.2) On tire que :  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = -\vec{R}$  et  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = -\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow G}$

D'où  $\vec{R} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow G}$

2.3.3) Tire alors une conclusion en complétant la phrase suivante : les sollicitations sont **égales** aux actions des efforts à **gauche** de la section (S) où est pratiquée la coupure.

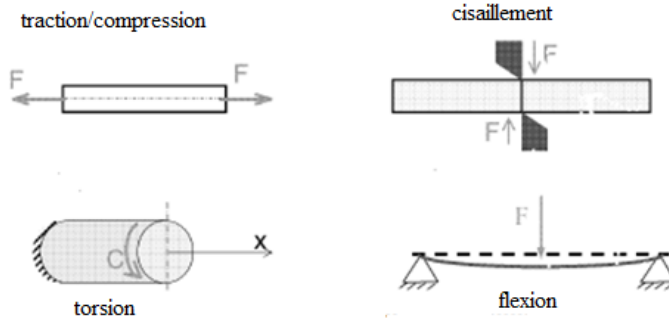
### **Activité 3 : Déformation et sollicitations simples**

- 3.1) Une déformation est dite plastique lorsque le matériau reprend sa forme initiale après sa déformation.
- 3.2) Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie G décrit une courbe  $G_0G_1$ , le plan de (S) restant normal à la courbe  $G_0G_1$ .
- 3.3)
- 3.3.1) Les sollicitations simples que subit une poutre suite à une déformation sont :
- Traction ou compression pure
  - Flexion pure
  - cisaillement
- 3.3.2) Définitions :
- Une poutre est soumise à la traction ou compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à l'allonger (traction) ou à la raccourcir (compression). La seule sollicitation agissante est l'effort normal N.  
On a:  $N \neq 0$ ;  $T = M_t = M_f = 0$ .
  - Une poutre est cisailée chaque fois que les efforts exercés sur deux tronçons différents se réduisent à deux forces égales et opposées perpendiculaires à la ligne moyenne.  
On a:  $T \neq 0$ ;  $N = M_t = M_f = 0$ .
  - Une poutre est sollicitée à la torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à deux couples opposés ayant pour support la ligne moyenne pour les couples tel que :  
 $N = T = M_f = 0$  et  $M_t \neq 0$ .

- Une poutre est soumise à une sollicitation de flexion chaque fois qu'il y a fléchissement de la ligne moyenne. La charge à laquelle est soumise la pièce s'exerce dans le sens ou la direction transversale.

$$N = T = M_t = 0 \text{ et } M_f \neq 0.$$

3.3.3)



### Application 2

Quelles sont les valeurs correspondantes à chaque type de sollicitations enregistrées dans le tableau suivant :

Sollicitations	N	T	$M_t$	$M_f$
Traction/compression	$N \neq 0$	0	0	0
Cisaillement	0	$T \neq 0$	0	0
Torsion	0	0	$M_t \neq 0$	0
Flexion pure	0	0	0	$M_f \neq 0$

## **Activité 5 : Hypothèses et principes de la RDM**

5.1)

- Un matériau est une substance d'origine naturelle ou artificielle, une matière destinée à être mise en forme, entrant dans la composition d'un produit.
- Ex : acier ; le bois ; fer ; contre-plaqué ; PVC...

5.2) Les hypothèses sur un matériau. Le matériau est :

- élastique (le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement déchargement),
- linéaire (les déformations sont proportionnelles aux contraintes),
- homogène (le matériau est de même nature dans toute sa masse),
- isotrope (les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).

5.3) Domaine pratique de validité des hypothèses de la RDM :

- Dimensions transversales de la poutre petites par rapport à sa longueur :
- Rayon de courbure de la fibre moyenne grand par rapport aux dimensions transversales: au moins 5 fois la hauteur des sections droites.

5.4) Les principes :

- Principe de Navier-Bernoulli : Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne restent planes et normales à la fibre moyenne.

- Principe de Saint-Venant : Dans une section éloignée des points d'application des forces concentrées (forces données ou réactions d'appuis), les contraintes et les déformations ne dépendent que de la résultante et du moment.
- Principe de superposition : Un effet (déformation, déplacement, contrainte) produit par plusieurs causes (charges appliquées,..) est la superposition des effets produits par chacune de ces causes supposée agir isolément.

## **2) Interprétation des résultats d'essais des matériaux (traction, dureté, résilience, fatigue)**

### **Activité 6 : Les essais des matériaux**

- 6.1) Un matériau homogène est un matériau dont les caractéristiques (physique ou chimique) sont les mêmes en chaque point.
- 6.2) Ex de matériaux homogène : l'acier ; le fer.
- 6.3) Une éprouvette normalisée est une pièce de dimensions normalisées fabriquée dans le matériau à tester. Elle est de formes cylindrique ou parallélépipédique (plate).
- 6.4) Les différents types d'essais des matériaux :
  - Essais de traction ;
  - Essai de dureté ;
  - Essai de résilience ;
  - Essai de fatigue...

6.5) Définitions :

- L'essai de traction, de compression ou de flexion, détermine l'aptitude à la déformation d'un matériau soumis à un effort progressif
- L'essai de dureté fournit des renseignements sur la résistance à la pénétration d'une pièce dure soumise à un effort constant
- L'essai de résilience caractérise la résistance au choc
- L'essai de fatigue étudie le comportement du matériau vis à vis de sollicitations alternées bien inférieures à la contrainte nécessaire pour le rompre.

**Application 3**

- 1) Eprouvette
- 2) Cylindrique
- 3)
  - $L_0$  : longueur utile initiale de l'éprouvette
  - $S_0$  : section initiale de l'éprouvette
  - $F$  : force appliquée à l'extrémité de l'éprouvette

**Activité 7 : L'essai de traction simple**

- 7.1) Interprétation des différentes zones de la courbe :
- OA : zone de déformation élastique (réversible)
  - AE : palier de plasticité (présence d'un acier doux dans notre cas)
  - EB : zone de déformation plastique répartie
  - BC : zone de déformation plastique non répartie. Il y a striction de l'éprouvette jusqu'à la rupture (en C).
- 7.2)  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  ou  $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- 7.3) Enoncé de la loi de HOOKE :
- La déformation  $\varepsilon$  (epsilon) d'une pièce soumise à une contrainte normale reste proportionnelle à cette contrainte.  $\sigma = E \cdot \varepsilon$
  - La contrainte de proportionnalité est le module d'élasticité noté E encore appelée module d'Young de matériel de la pièce.
- 7.4) Recherche la valeur du module d'élasticité E pour les matériaux suivants : cuivre, fer.

Matériaux	Module d'élasticité (GPa)
Acier	210
Fer	211
Alliage de cuivre	124
Aluminium	70
Cuivre	130

### Application 4

$$1) \sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 2 \cdot 10^5 \times \frac{0,5}{1000} = 100 \text{MPa}$$

$$2) \sigma = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi R^2} \Rightarrow \sigma \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = N$$

$$D^2 = \frac{4N}{\pi\sigma} \Leftrightarrow D = \sqrt{\frac{4N}{\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{4,5 \cdot 10^3}{100\pi}} = 8 \text{mm.}$$

### 3) Relations entre les efforts, les contraintes et les déformations subis par une poutre

#### Activité 8 : Traction simple –compression simple

$$8.1) \quad \sigma = \frac{N}{S}$$

$$8.2) \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{S} = \frac{\Delta l \cdot E}{l_0} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{N}{S \cdot E} = \varepsilon$$

8.3) La condition de résistance de la pièce s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \leq \bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{S}$$

- $\sigma_{\max}$  : contrainte maximale en MPa;
- $\bar{\sigma}_a$  : résistance admissible au matériau en MPa;
- $\sigma_e$  : résistance élastique du matériau en MPa;
- S : coefficient de sécurité.

8.4) Pour une compression :  $\Delta l = l_f - l_0 < 0$ .

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{-N}{S \cdot E} = \varepsilon$$

### Application 5

$$1) \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{N}{S.E} \Leftrightarrow \Delta l = \frac{l_0 \cdot N}{S.E} = \frac{l_0 \times N}{\pi r^2 \cdot E}$$

$$\Delta l = 3,31 \cdot 10^{-2} \text{m}$$

$$2) \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{-N}{S.E} \Rightarrow S = \frac{-N \cdot l_0}{E \cdot \Delta l} \text{ or } s = c^2$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{-N \cdot l_0}{E \cdot \Delta l}} = 0,37 \text{cm}$$

### Application 6

a) Calcul du diamètre du tyran

$$\frac{N}{S} \leq R_p ; S = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow N \leq R_p \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\frac{4N}{\pi R_p} \leq D^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{4N}{\pi R_p}} \leq D \text{ d'où } 8 \text{mm} \leq D$$

b) Calculer l'allongement du tyran.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{S \cdot E} = 0,994 \text{mm}$$

### Activité 9 : Le cisaillement pur

$$9.1) \tau = \frac{T}{S}$$

$$9.2) \begin{cases} \tau: \text{contrainte tangentielle en MPa} \\ T: \text{effort tranchant en N} \\ S: \text{aire de la section droite en mm}^2 \end{cases}$$

NB : Pour n sections cisillées, on a :  $\tau = \frac{T}{n \cdot S}$

9.3.1)

- a)  $\gamma$  appelé angle de glissement relatif.  
b) Dans la zone de déformation élastique  $\gamma$  reste très petit donc  $\tan\gamma \approx \gamma$   
Or  $\tan\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  d'où  $\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

9.3.2)

a)  $G = \frac{\tau}{\gamma}$

b) Énonce la loi de HOOKE pour le cisaillement.

- La déformation  $\gamma$  d'une pièce soumise à une contrainte cisaillement reste proportionnelle à cette contrainte.  $\tau = G \cdot \gamma$

c)  $\left\{ \begin{array}{l} \tau: \text{ en MPa} \\ G: \text{ en MPa} \\ \gamma \text{ en radian ou sans unité} \end{array} \right.$

d) En réalité  $G = 0,4E$ . E étant le module d'YOUNG.  
Retrouve la valeur de G pour le cuivre.

Matériau	Fonte	acier	laiton	duralumin	plexiglas
G(MPa)	40000	80000	34000	32000	11000

e) Condition de résistance.

Pour qu'une poutre résiste en toute sécurité il faut que :

$$\tau \leq R_{pg} \text{ avec } R_{pg} = \frac{R_e}{S}$$

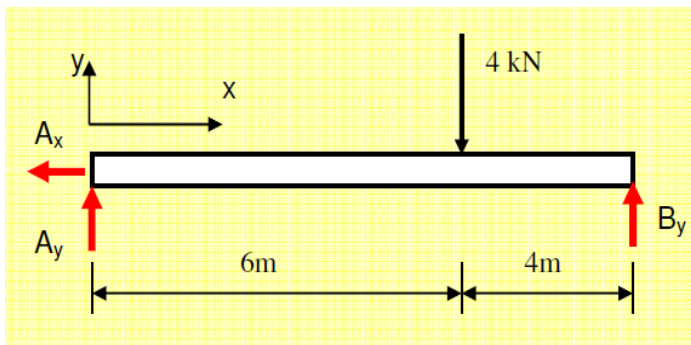
- $\left\{ \begin{array}{l} R_{pg}: \text{ résistance pratique de glissement ou de cisaillement} \\ R_e: \text{ résistance limite de rupture ou de glissement} \end{array} \right.$

**Activité 10 : Epures ou diagrammes des efforts**

10.1) Méthode des sections pour le tracé des DEN et des DMT.

- a) Calculer les réactions aux appuis
- b) Identifier les intervalles où le chargement ne varie pas
- c) Choisir une origine O (appui d'extrémité)
- d) Faire une coupe à une distance  $x$  (quelconque) de l'origine à l'intérieur du premier intervalle
- e) Tracer le DCL partiel (celui de gauche de préférence)
- f) Appliquer les équations d'équilibre de la statique afin d'obtenir les expressions de  $T$  et  $M$  en fonction de  $x$
- g) Refaire les étapes (d), (e) et (f) pour tous les intervalles identifiés à l'étape (b)
- h) Tracer les diagrammes en respectant la convention de signe pour  $T$  et  $M$

10.2) Diagramme des efforts



- Calcul des réactions :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0;$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10B_y - 4 \times 26 = 0$$

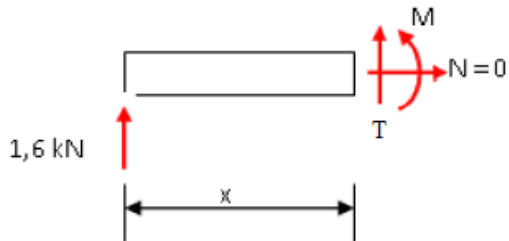
$$\Leftrightarrow B_y = 2,4\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 4 = 0 \Rightarrow A_y = 1,6\text{kN}$$

- Sur cette poutre, il y a deux intervalles :

$$0 < x < 6 \text{ et } 6 < x < 10$$

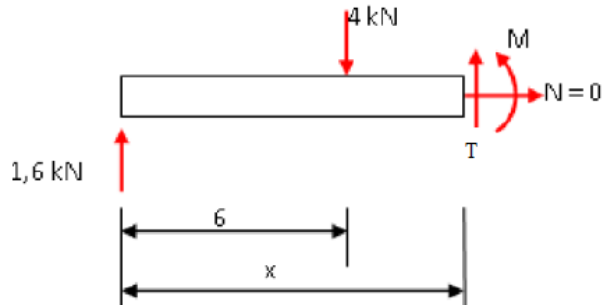
Coupe 1



$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M - 1,6x = 0 \Rightarrow M = 1,6x$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1,6 + T = 0 \Rightarrow T = -1,6$$

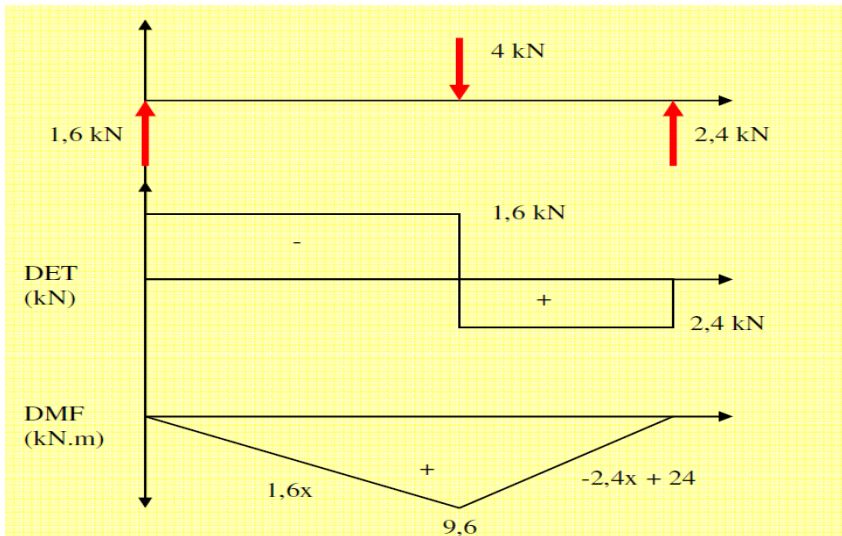
Coupe 2



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1,6 - 4 + T = 0 \Rightarrow T = 2,4$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M - 1,6x + 4(x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$M = -2,4x + 24$$



### Application 7

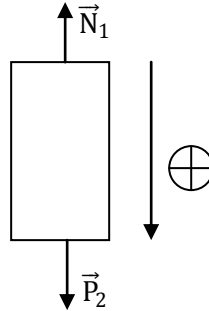
- 1) Détermination :  
– efforts normaux

Section 1 :  $0 \leq x < 80$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$-N_1 + P_2 = 0 \Leftrightarrow N_1 = P_2$$

$$N_1 = 4t = 40\text{kN}$$



Section 2 :  $80 \leq x < 120$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_2 + \vec{P}_2 = \vec{0} \Rightarrow -N_2 + P_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow N_2 = P_2 ; N_2 = 4t = 40\text{kN}$$

Section 3 :  $120 \leq x < 150$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_3 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0} \Rightarrow -N_3 + P_1 + P_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow N_3 = P_1 + P_2 ; N_3 = 6t = 60\text{kN}$$

- contraintes

$$\text{Section 1 : } \sigma_1 = \frac{N_1}{S_2} = 16.10^7 \text{ Pa}$$

$$\text{Section 2 : } \sigma_2 = \frac{N_2}{S_1} = 9,52.10^7 \text{ Pa}$$

Section 3 :  $\sigma_3 = \frac{N_3}{S_1} = 14,28.10^7 \text{ Pa}$

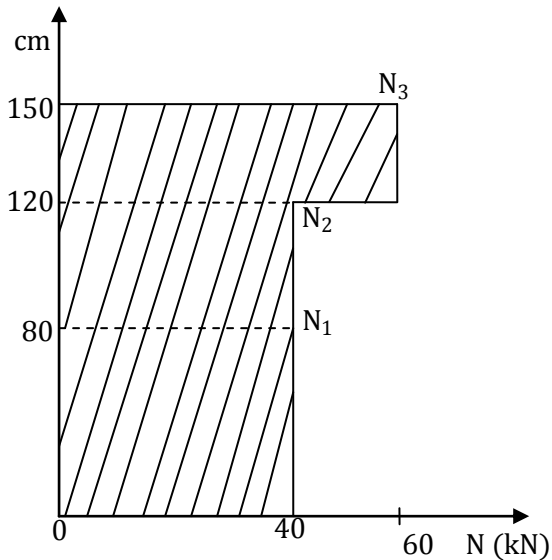
– allongements

Section 1 :  $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_0}{S_2 \times E} = 64.10^{-3} \text{ m}$  avec  $l_0 = 80 \text{ cm}$

Section 2 :  $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_0}{S_1 \times E} = 64.10^{-3} \text{ m}$  avec  $l_0 = 120 \text{ cm}$

Section 3 :  $\Delta l_3 = \frac{N_3 l_0}{S_1 E} = 107.10^{-3} \text{ m}$  avec  $l_0 = 150 \text{ cm}$

2) Tracé du DEN

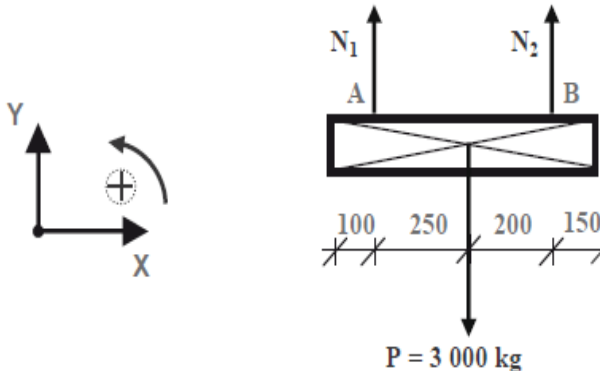


EXERCICES DE CONSOLIDATION

COURS

- 1) Les **efforts** tranchants (T) sont les **forces** extérieures **perpendiculaires** à la ligne **moyenne** de la pièce.
- 2) Dans toute **section droite** (S) :  $\vec{T}$  est égal à la **somme** vectorielle de toutes les forces situées à **gauche** de la section considérée.
- 3) Dans toute section **droite** : le **moment** fléchissant  $M_f$  est **égal** au **moment** résultant en G de toutes **forces** situées **gauche** de la section considérée.

EXERCICE 1



A l'équilibre de la barre :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P_1 \times 250 + N_2 \times 450 = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = 16666,67\text{kg}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P \times 200 - N_1 \times 450 = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = 13333,33\text{kg}$$

– Calcul des contraintes :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13333,33}{240} = 55,55\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{16666,67}{180} = 92,59\text{MPa}$$

– Calcul des allongements

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{13333,33 \times 650}{70000 \times 240} = 0,52\text{mm}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{16666,67 \times 650}{210000 \times 180} = 0,28\text{mm}$$

## EXERCICE 2

- 1) Enoncé de la loi de HOOKE
- 2) Oui ;  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{84}{0,4} = 210\text{MPa}$
- 3)

$\sigma(\text{MPa})$	84	13,65	157,5	189	231	273	315	45,57
$\varepsilon(\%)$	0,4	0,65	0,75	0,9	1,1	1,3	1,5	2,17
$E(\text{MPa})$	210	210	210	210	210	210	210	210

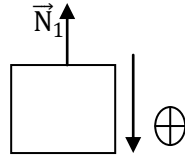
EXERCICE 4

– Détermination des efforts normaux :

Section 1 :  $0 \leq x < 20$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow N_1 = 0$$

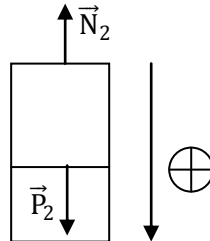


Section 2 :  $20 \leq x < 50$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_2 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$-N_2 + P_2 = 0 \Leftrightarrow N_2 = P_2$$

$$N_1 = 7\text{kN}$$

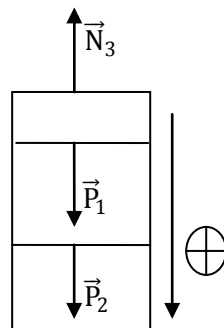


Section 3 :  $50 \leq x < 75$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_3 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -N_3 + P_1 + P_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow N_3 = P_1 + P_2 ; N_3 = 11\text{kN}$$



– contraintes

$$\text{Section 1 : } \sigma_1 = \frac{N_1}{S_2} = 0 \text{ Pa car } N_1 = 0$$

$$\text{Section 2 : } \sigma_2 = \frac{N_2}{S_1} = \frac{7000}{0,00038} = 1,84 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

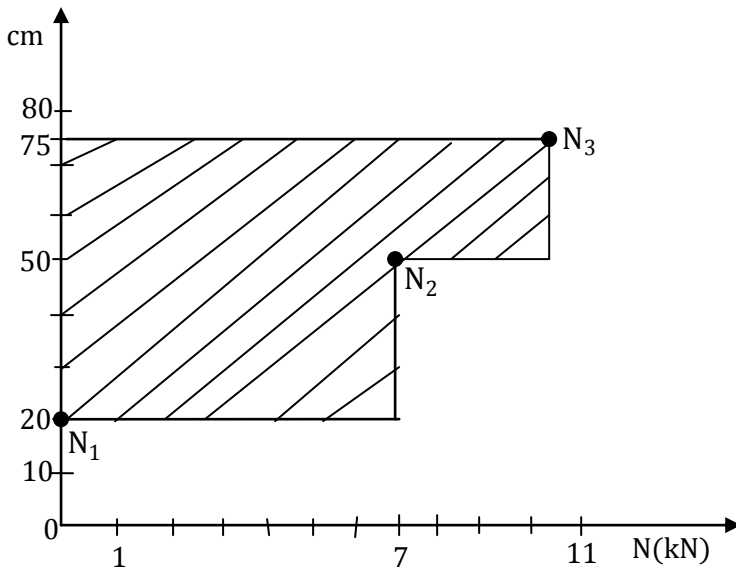
$$\text{Section 3 : } \sigma_3 = \frac{N_3}{S_1} = \frac{11000}{0,00038} = 2,94 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

– allongements

$$\text{Section 1 : } \Delta l_1 = \frac{N_1 l_0}{S_1 \times E} = 0 \text{ m avec } l_0 = 0,20 \text{ m}$$

$$\text{Section 2 : } \Delta l_2 = \frac{N_2 l_0}{S_1 \times E} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ m avec } l_0 = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{Section 3 : } \Delta l_3 = \frac{N_3 l_0}{S_1 \times E} = 1,085 \cdot 10^{-4} \text{ m avec } l_0 = 0,75 \text{ m}$$



EXERCICE 5

1) Les réactions aux appuis :

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum (\vec{F})_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = 4\text{kN} \\ R_{By} = 2\text{kN} \end{cases}$$

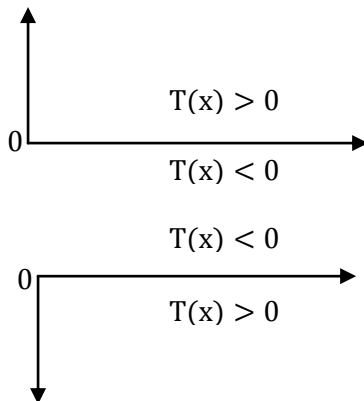
2) Les expressions des efforts tranchants :

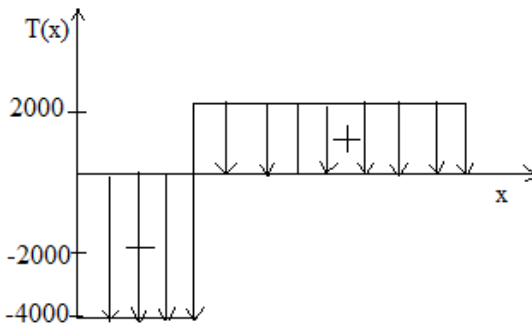
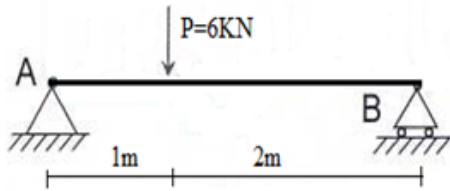
$$0 \leq x < 1; T(x) = 0 - R_{Ay} = -4\text{kN}$$

$$1 \leq x < 3; T(x) = -4 + P = 2\text{kN}$$

3) L'épure des efforts tranchant

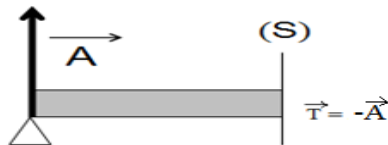
Convention :



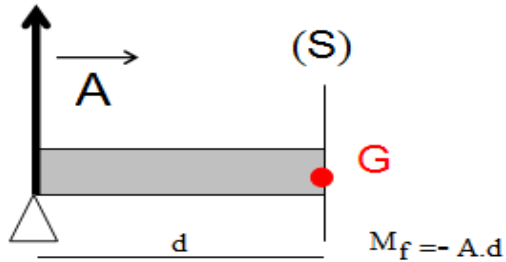


### EXERCICE 6

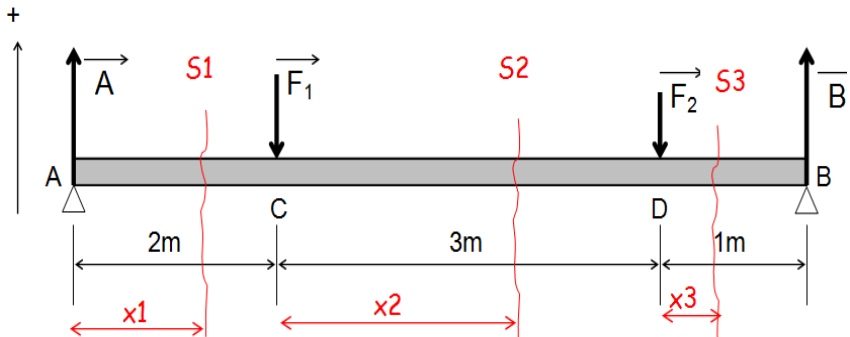
- 1) a) L'effort tranchant  $\vec{T}$  est égale à la somme vectorielle de toutes les forces situées à gauche de la section (S) considérée. Isolons le tronçon situé à gauche de la section (S) : il n'y a qu'une force :



b) Le moment fléchissant  $M_f$  moment résultant en G de toutes les forces situées à gauche de la section (S) considérée. Il n'y a qu'une force :



2) Ici il y a 4 forces, nous ferons donc 3 sections :



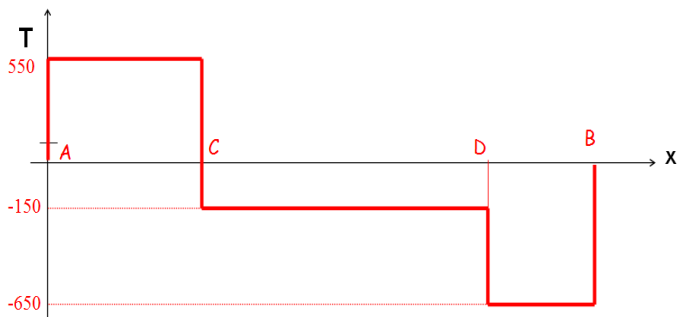
– Les réactions aux appuis :  $\begin{cases} A_y = 550\text{N} \\ B_y = 650\text{N} \end{cases}$

3)

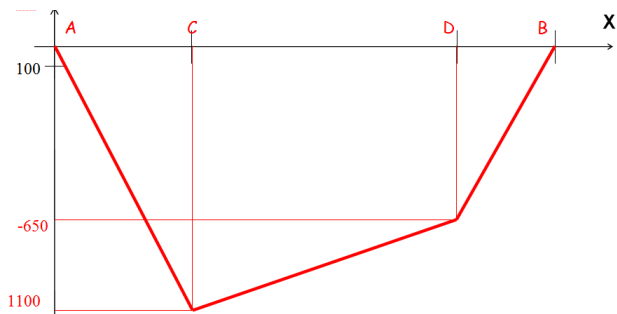
a) L'effort tranchant :

$$\begin{cases} T = 550\text{N pour } 0 < x < 2 \\ T = -150\text{N pour } 2 < x < 3 \\ T = -650\text{N pour } 3 < x < 6 \end{cases}$$

**Diagramme :**



b) DMF



EXERCICE 7

1) Les réactions aux appuis :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-P_1 - Q_1 + R_{Ay} - Q_2 + R_{By} - Q'_1 - P_2 = 0$$

$$-150 - 240 + R_{Ay} - 600 + R_{By} - 320 - 100 = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 1410$$

$$\sum(M)_A = 0 \Rightarrow$$

$$\sum(M)_A = 0$$

$$\Rightarrow -3P_1 - 1,5Q_1 + 2,5Q_2 - 5R_{By} + 7Q'_1 + 9P_2 = 0$$

$$R_{By} = \frac{3P_1 + 1,5Q_1 - 2,5Q_2}{5} = 766 \text{ kN}$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 1410 \Rightarrow R_{Ay} = 644 \text{ kN}$$

2) Les efforts tranchants en chaque point de la poutre

$$0 \leq x < 3$$

$$T(x) = 0 + P_1 + q_1(x - 0) \Rightarrow T(x) = 150 + q_1 \cdot x$$

$$T(x) = 80x + 150 \text{ (kN)}$$

$$x = 0 \Rightarrow T(x) = 150\text{kN} ; x = 3 \Rightarrow T(x) = 390\text{kN}$$

$$3 \leq x < 8$$

$$T(x) = 390 - R_{Ay} + q_2(x - 3)$$

$$T(x) = 390 - 644 + q_2x - 3q_2 = 100x - 554$$

$$x = 3 \Rightarrow T(x) = 300 - 544 = -254\text{kN}$$

$$x = 8 \Rightarrow T(x) = 246\text{kN}$$

$$8 \leq x < 12$$

$$T(x) = 246 - R_{By} + q_1'(x - 8)$$

$$T(x) = 246 - R_{By} + q_1'(x - 8) = 150x - 1720$$

$$x = 8 \Rightarrow T(x) = 150 \times 8 - 1720 = -320\text{kN}$$

$$x = 12 \Rightarrow T(x) = 180 \times 12 + 720 = 80\text{kN}$$

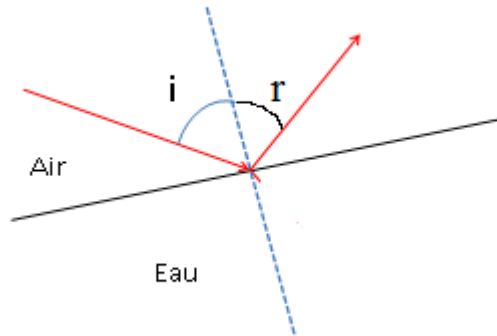
x	0	3	8	12
T(x)	150	390 -254	246 -320	80

## **5. REFLEXION ET REFRACTION DE LA LUMIERE**

### **Activité 1 : Réflexion et réfraction de la lumière : lois de Descartes.**

#### 1) Etude de la réflexion de la lumière

- 1.1) La trajectoire du faisceau est rectiligne dans l'air
- 1.2) C'est la réflexion



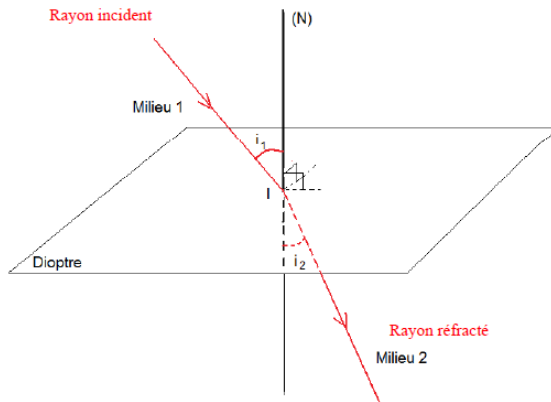
- 1.3) Le plan perpendiculaire au dioptre dans lequel le faisceau incident voyage dans l'air est appelé « plan d'incidence ».

- 1.4) Les lois de Descartes pour la réflexion :
- Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale au miroir au point d'incidence sont contenus dans un même plan.
  - L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :  $i = r$
- 1.5) La trajectoire du faisceau de lumière est rectiligne dans l'eau
- 1.6) Le faisceau subit une déviation lors du changement de milieu.
- 1.7) C'est la réfraction
- 1.8) Le plan formé par le rayon réfracté et la normale au dioptre s'appelle le « plan de réfraction ».

2)

2.1) Un dioptre est une surface de séparation de deux milieux.

2.2)



2.3) Le plan d'incidence est perpendiculaire au plan de séparation des deux milieux. Le rayon réfracté s'y déplace : les plans d'incidence et de réfraction sont confondus.

2.4) Les lois de Descartes pour la réfraction :

- Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale au miroir au point d'incidence sont contenus dans un même plan.
- $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

$$2.5) n = \frac{c}{v}$$

### **Application 1**

$$1) n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right)^{-1} = 18,53^\circ$$

$$2) n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Leftrightarrow n_2 = n_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = 1,68$$

### **Activité 2 : Discussion de la loi de Descartes : Réfringence et réflexion totale**

2.1) De deux milieux, le plus réfringent est celui dont l'indice est plus élevé.

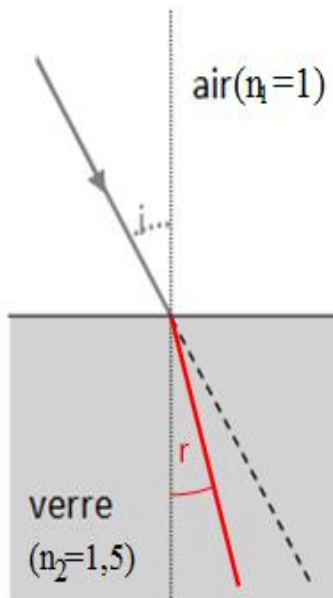
2.2) Si  $n_2 > n_1$  alors le milieu d'indice  $n_1$  est le plus réfringent.

a) Si  $n_2 > n_1 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} > 1 \Rightarrow i_2 < i_1$

Conclusion :

Si le second milieu est plus réfringent que le premier, alors l'angle  $i_2$  est toujours inférieur à l'angle  $i_1$ .

b) Le rayon réfracté se rapproche beaucoup plus de la normale à la surface de séparation des deux milieux.



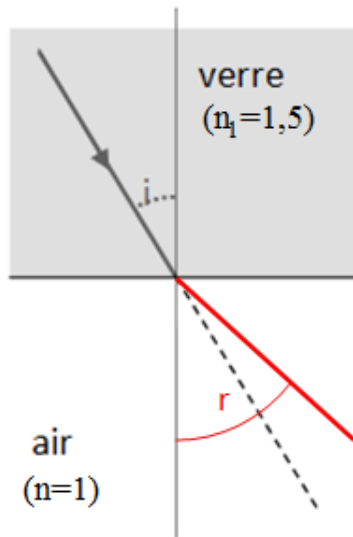
c) Oui, la lumière peut toujours passer d'un milieu donné dans un milieu plus réfringent.

2.3) Si  $n_2 < n_1$  alors le premier milieu est plus réfringent que l'autre.

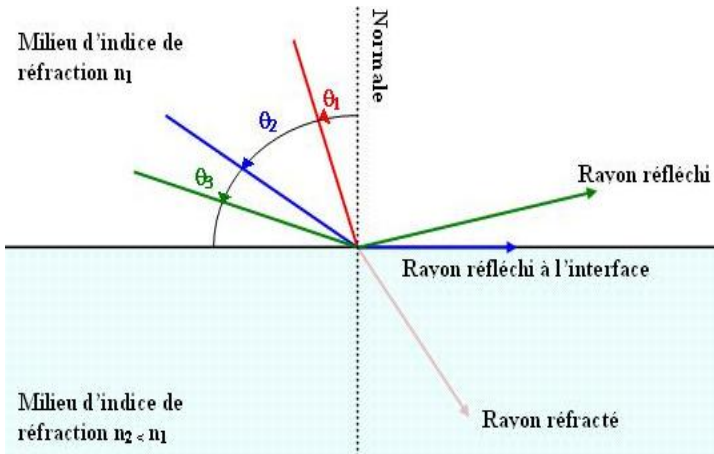
2.3.1) a)  $n_2 < n_1 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} < 1 \Rightarrow i_2 > i_1$

Conclusion : Si le second milieu est moins réfringent que le premier, alors l'angle  $i_2$  est toujours supérieur à l'angle  $i_1$ .

b) Dans ce cas, le rayon réfracté s'éloigne de la normale à la surface de séparation des deux milieux.

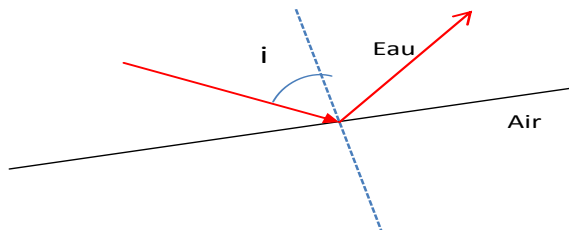


2.3.2) Non, il existe une valeur de l'angle d'incidence  $\theta_1$  pour lequel le rayon serait totalement réfléchi.



2.3.3) On constate qu'au-delà d'un certain angle d'incidence, le rayon réfracté n'existe plus. La lumière est totalement réfléchie.

2.3.4) Réflexion totale.



### **Activité 3 : Mise en évidence du phénomène de la réflexion totale**

3.1)

3.1.1) On constate que le faisceau lumineux n'est pas dévié. Il traverse les deux surfaces de séparation (partie bombée et partie plate sans subir de déviation).

3.1.2) On observe un rayon réfléchi et un rayon réfracté qui est dévié après passage au travers du demi cylindre.

3.1.2) L'angle de réfraction est plus grand que l'angle de réflexion.

#### 3.2) Détermination de l'angle limite de réflexion totale $\lambda$

3.2.1)

- On constate qu'au-delà d'un certain angle d'incidence, le rayon réfracté n'existe plus.
- La lumière est totalement réfléchie.

3.2.2) Valeur de l'angle limite :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 ; \text{ avec } i_2 = 90^\circ \Rightarrow \sin i_2 = 1 \text{ et } i_1 = \lambda$$

$$\text{Alors : } \lambda = \sin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{-1}$$

$$3.2.2) \lambda \geq \sin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^{-1}$$

## Application 2

Lors du passage d'un *milieu* donné d'indice  $n_1$  dans un milieu moins *réfringent* d'indice  $n_2$  ( $n_2 < n_1$ ), le rayon *réfracté* n'existe pas toujours.

Il existe un *angle* limite  $\lambda$  au-delà duquel le *rayon* de lumière ne *change* pas de milieu.

Ce rayon est alors complètement *réfléchi* c'est le phénomène de réflexion *totale*.

Cet angle est tel que  $\sin\lambda = \frac{n_2}{n_1}$

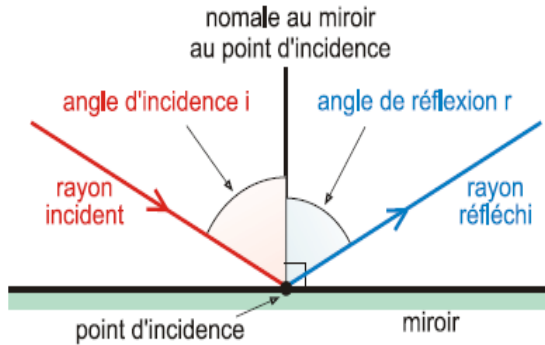
Le rayon réfléchi obéit aux lois de la réflexion : son angle d'incidence et son angle de réflexion sont **identiques**.

## Activité 4 : Miroir plan

- 4.1) Un miroir plan est une surface plane réfléchissante
- 4.2)

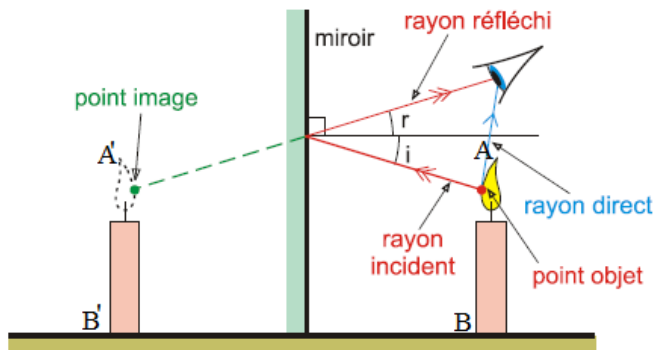


4.3)



4.4) C'est la réflexion de la lumière.

4.5)



4.6)  $A'B' : \begin{cases} - \text{image virtuelle} \\ - \text{même droite} \\ - \text{même taille que l'objet: } A'B' = AB \end{cases}$

EXERCICES DE CONSOLIDATION

EXERCICE 1

1)  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = 0,69 \Rightarrow i_2 = 44^\circ$

2)  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2 = 0,75 \Rightarrow i_2 = 49^\circ$

3) L'angle recherché est :

$$a = i_1 + 90 + 90 - i_2 = i_1 - i_2 + 180$$

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = 0,48 \Rightarrow i_2 = 29^\circ$$

On a donc :  $a = 40 - 29 + 180 = 191^\circ$

EXERCICE 2

1)  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = 0,231 \Rightarrow i_2 = 13^\circ$

2) L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence donc  $r' = 10^\circ$ .

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = 0,130 \Rightarrow i_2 = 7,48^\circ$$

L'angle de réfraction est de  $7,48^\circ$ . Le rayon réfracté ressort quasiment perpendiculaire au dioptre.

3)

EXERCICE 3

1) Le phénomène de réfraction correspond à une déviation des rayons de lumière lors du passage d'un milieu de propagation à un autre. La réfraction est due à un changement de vitesse de la lumière d'un milieu à l'autre, ce qui se traduit dans la loi de Descartes par un changement d'indice de réfraction.

$$2.a) V_{\text{air}} = \frac{c}{n_{\text{air}}} = 3.10^8 \text{m.s}^{-1}$$

$$V_{\text{verre}} = \frac{c}{n_{\text{verre}}} = 2.10^8 \text{m.s}^{-1}$$

La vitesse de la lumière dans l'air est donc plus grande que dans le verre. La lumière se propage donc plus rapidement dans l'air que dans le verre.

b) Le milieu 1 est l'air ; le milieu 2 est le verre.

$$c) \sin r = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} \sin i = 0,28 \Rightarrow r = 16^\circ$$

d) Le rayon se rapproche de la normale car  $r < i$ .

e) Il existe un rayon réfracté pour tout rayon incident : les valeurs de  $i$  peuvent prendre les valeurs suivantes :  $0 < i < 90^\circ$ .  $r$  étant inférieur, le  $r$  peut toujours avoir une valeur entre 0 et  $90^\circ$ .

EXERCICE 4

a)  $\sin r = \frac{n_{\text{verre}}}{n_{\text{air}}} \sin i = 0,63 \Rightarrow r = 39^\circ$

b) Schéma

Le rayon s'éloigne de la normale car  $r > i$

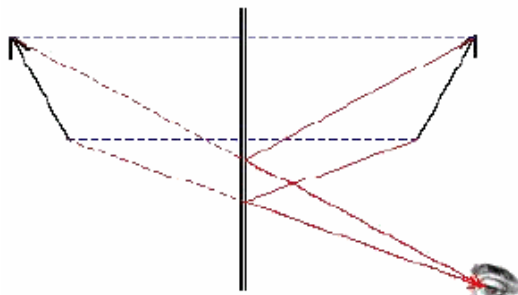
c) Il n'existe pas de rayon réfracté pour tout rayon incident :

-les valeurs de  $i$  sont comprises entre les valeurs suivantes :  $0 < i < 90^\circ$ .

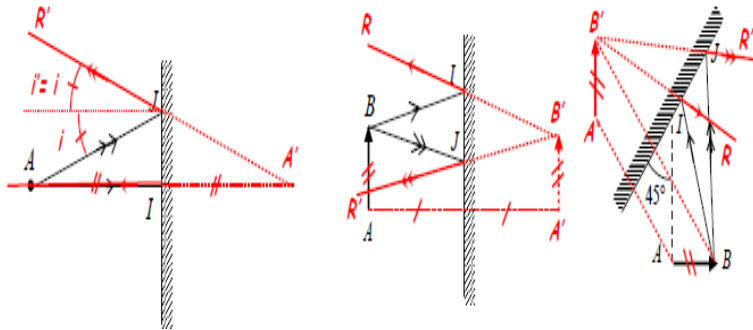
- $r$  étant supérieur, pour une valeur limite de  $i$  ( $i_L$ ), l'angle de réfraction aura la valeur  $r_{\text{max}} = 90^\circ$ .

-Au-delà de cette valeur, le rayon ne rentre plus dans l'air et est entièrement réfléchi.

EXERCICE 5



EXERCICE 6



## **6. LES LENTILLES MINCES**

### **1. Rayon lumineux- faisceaux lumineux**

#### **Activité 1**

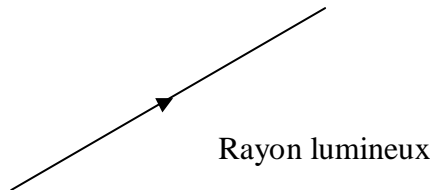
##### 1.1. Définitions :

- milieu homogène : milieu ayant la même composition en tout point ;
- milieu transparent : milieu qui laisse passer la lumière ;
- milieu isotrope : milieu ayant les mêmes propriétés dans toutes les directions.

##### 1.2. Définitions :

- rayon lumineux : droite suivant laquelle se propage la lumière dans un milieu homogène;
- faisceau lumineux : ensemble de rayons lumineux.

##### 1.3.





Faisceau cylindrique  
ou parallèle



Faisceau divergent



Faisceau convergent

## 2. Propriétés importantes d'une lentille mince

### Activité 2

#### 2.1.

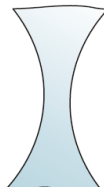
- Une lentille est un dispositif permettant de modifier le trajet des rayons lumineux. Elle est généralement constituée d'une surface courbe juxtaposée à une surface plane ou à une autre surface courbe.



Lentille  
convergente



Symbole  
pour la lentille  
convergente



Lentille  
divergente



Symbole  
pour la lentille  
divergente

- Si elle est plus mince aux bords qu'au centre elle est convergente,
- Si elle est plus épaisse aux bords qu'au centre elle est divergente.

2.2. Remplis le texte troué avec les mots ou groupes de mots convenables.

- Tout rayon incident passant par le *centre* optique d'une lentille sort sans dévier.
- Tout rayon incident parallèle à l'axe principal d'une lentille convergente (de centre optique O) en émerge en passant par son *foyer* principal *image* F'.
- Tout rayon incident parallèle à l'axe principal d'une lentille divergente (de centre optique O) en émerge comme s'il provenait de son foyer principal *image* F'
- Tout rayon incident passant par le *foyer* principal *objet* F d'une lentille convergente (de centre optique O) en émerge parallèlement à l'axe principal optique.
- Tout rayon incident dont le prolongement passe par le foyer principal objet F d'une lentille divergente en émerge parallèlement à l'*axe* principal optique.

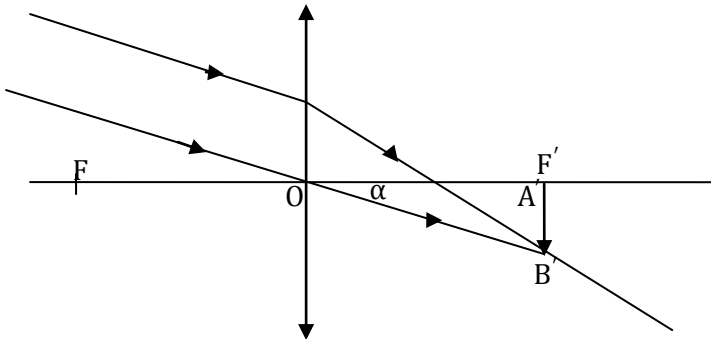
### 3. Exemples de construction d'images

#### Activité 3

### Application 1

1. Vrai, les points A et A' sont des points conjugués.
2. Faux, car les foyers F et F' ne pas images l'un de l'autre à travers la lentille.
3. Faux
4. Faux lorsque l'objet est situé dans le plan focal objet, l'image se forme à l'infini
5. Vrai.

Détermination de l'angle sous lequel est vu l'objet.



$$\tan \alpha = \frac{A'B'}{OF'}; \text{ si } \alpha \ll \text{ alors: } \tan \alpha \approx \alpha$$

$$\Rightarrow A'B' = f' \cdot \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = OF' : \text{ distance focale en m} \\ \alpha : \text{ diamètre apparent en rad} \end{array} \right.$$

#### 4. Formules des lentilles minces

##### Activité 4

4.1) Formule de conjugaison

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2 \Rightarrow (\overline{FO} + \overline{OA})(\overline{F'O} + \overline{OA'}) = -f'^2$$

$$p = \overline{OA}; p' = \overline{OA'}; \overline{OF} = f; \overline{OF'} = f';$$

$$(-f + p)(-f' + p') = -f'^2 \text{ avec } f' = -f$$

$$f'p' - pf' + pp' = 0$$

En divisant cette égalité membre à membre par :  $f'p'p$ :

$$\frac{f'p' - pf' + pp'}{f'p'p} = 0 \Rightarrow \frac{f'p'}{f'p'p} - \frac{pf'}{f'p'p} + \frac{pp'}{f'p'p} = 0$$

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ d'où } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

4.2) La vergence d'une lentille est l'inverse de sa distance focale.  $C = \frac{1}{f'}$  :  $\left\{ \begin{array}{l} f' : \text{distance focale en m} \\ C \text{ en dioptries } (\delta) \end{array} \right.$

4.3) Nature d'une lentille :

$$\left\{ \begin{array}{l} C > 0 : \text{la lentille est convergente} \\ C < 0 : \text{la lentille est divergente} \end{array} \right.$$

4.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} < 0: \text{objet réel} \\ \overline{OA} > 0: \text{objet virtuel} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{OA'} < 0: \text{image virtuelle} \\ \overline{OA'} > 0: \text{image réelle} \end{array} \right.$$

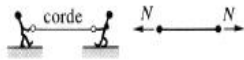

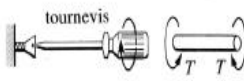

4.5) Formule de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p}$$

4.6

- .  $\gamma > 0$ : l'image est de même *nature* que l'objet
- .  $\gamma < 0$ : l'image est de *sens* contraire à celui de l'objet.
- .  $|\gamma| > 1$  : l'image est plus *grande* que l'objet
- .  $|\gamma| < 1$  : l'image est plus *petite* que l'objet.

## Efforts intérieurs et déformations

Effort intérieur	Illustration et modélisation	Déformation produite
$N$		allongement (traction) raccourcissement (compression)
$V$		déformation transversale ou glissement
$T$		torsion ou déformation en hélice
$M$		courbure

Effort intérieur	Unité	Nature	Action
$N$ : effort normal	[N]	translation	normale à la section
$V$ : effort tranchant	[N]	translation	tangente à la section
$T$ : moment de torsion	[Nm]	rotation	autour de l'axe de la poutre
$M$ : moment de flexion	[Nm]	rotation	sur la section