

Collection Butterfly

Terminale A

Quelques formules utiles pour la Terminale A

Limites et compléments sur les dérivées

Probabilités

Fonction logarithme népérien et Fonction exponentielle népérienne

Suites numériques

Tome 1



OUALE K. Fidèle

Professeur de Mathématiques
au Lycée Moderne d'Agnibilékrou

Cel : 58 22 07 09 / 02 58 82 72 / 05 65 91 86



Le photocopillage tue le livre

Ce livre est protégé au titre du droit d'auteur. Toute reproduction, distribution ou création de travaux dérivés de ce livre, même partielles est un délit.

En achetant ce livre vous aidez l'auteur à bénéficier de son œuvre ; de plus vous le motivez à la création d'œuvres nouvelles ...

Les Mathématiques, depuis toujours, sont des mystères pour les élèves, tout simplement parce qu'ils ignorent certains principes d'apprentissage :

1^{ère} étape : la connaissance

2^{ème} étape : la compréhension

3^{ème} étape : l'application

4^{ème} étape : l'analyse

5^{ème} étape : la synthèse

Ces cinq différentes étapes sont primordiales pour assimiler les cours de mathématiques afin de pouvoir aisément traiter des exercices ...

La connaissance

Cette étape passe par la mémorisation des définitions, des propriétés et des formules. Chaque élève doit être capable de se souvenir simplement, de se rappeler des formules qu'il a vu durant le cours ...

La compréhension

Elle vient après la connaissance ; en effet peut-on comprendre ce qu'on ne connaît pas ? Comprendre les formules, c'est saisir leur signification afin de pouvoir les traduire, les interpréter, les reformuler.

L'application

C'est utiliser ce qu'on a compris dans des situations nouvelles ; résoudre un exercice qui fait simplement appel à votre mémoire et votre compréhension : passer du général au concret

L'analyse

Cette étape consiste à décomposer les parties d'un exercice, identifier les formules à utiliser : mettre en relation vos connaissances, votre compréhension et votre attitude à appliquer les formules.

La synthèse

C'est mettre en rapport des connaissances des différentes parties d'une leçon ou de plusieurs leçons

L'objectif premier de l'auteur est d'aider les élèves à s'approprier dans l'ordre ces cinq étapes ; à cet effet les annales de la collection qu'il a mis à la disposition des apprenants sont composées de trois (3) grandes parties :

- **Les cours**
- **Des exercices corrigés** (corrections détaillées et commentées)
- **Des exercices proposés** (non corrigés)

Afin de mettre à la disposition des élèves de Terminale A ,
des annales de mathématiques leur permettant d'*optimiser leur résultat scolaire* ,
l'auteur a scindé en **deux (2) tomes** les cours qui font la spécificité de la série A .

Tome 1

Quelques formules utiles pour la Terminale A

Limites et compléments sur les dérivées - Probabilités

Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle népérienne

Suites numériques

Tome 2

Primitives et Calcul intégral - Statistiques - Systèmes linéaires

Etude de fonctions



« Sans la maîtrise des formules , les Mathématiques restent un mystère »

L'auteur



Collection
Marathon de Butterfly

Sommaire

Quelques formules utiles pour la Terminale	7
Limites et compléments sur les dérivés	23
Probabilités	75
Fonctions logarithme népérien et fonction exponentielle népérienne	130
Suites numériques	181

Quelques formules utiles pour la Terminale A

(1) Egalités remarquables

Formules utilisées pour **développer** ou **factoriser** des polynômes

$$\begin{array}{c}
 \text{Développer} \\
 \curvearrowright \\
 (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\
 \curvearrowleft \\
 \text{Factoriser}
 \end{array}$$

Exercice d'application 01

a) Développer les expressions suivantes à l'aide des égalités remarquables :

$$(x + 3)^2 \quad ; \quad (2y - 5)^2 \quad ; \quad (2 - 5x)(2 + 5x)$$

b) Factoriser les expressions suivantes à l'aide des égalités remarquables :

$$x^2 + 8x + 16 \quad ; \quad 9y^2 - 12y + 4 \quad ; \quad 1 - 81x^2$$

Proposition de solution

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (x + 3)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\
 &= x^2 + 6x + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2y - 5)^2 &= (2y)^2 - 2 \times 2y \times 5 + 5^2 \\
 &= 4y^2 - 20y + 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2 - 5x)(2 + 5x) &= 2^2 - (5x)^2 \\
 &= 4 - 25x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 8x + 4^2 \\
 &= (x + 4)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9y^2 - 12y + 4 &= (3y)^2 - 12y + 2^2 \\
 &= (3y - 2)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - 81x^2 &= 1^2 - (9x)^2 \\
 &= (1 - 9x)(1 + 9x)
 \end{aligned}$$

(2) Comment donner l'arrondi d'un nombre décimal• **Arrondi à l'entier**

On tient compte du 1^{er} chiffre après la virgule

S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas la partie entière

S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 à la partie entière

Exemple : donner l'arrondi à l'entier des nombres décimaux suivants

$$17,\underline{3}71 = 17 \quad ; \quad 81,\underline{7}25 = 82$$

• **Arrondi d'ordre 1** (un chiffre après la virgule)

On tient compte du 2^{ème} chiffre après la virgule

S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas le 1^{er} chiffre après la virgule

S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 au 1^{er} chiffre après la virgule

Exemple : donner l'arrondi d'ordre 1 des nombres décimaux suivants

$$12,6\underline{3}8 = 12,6 \quad ; \quad 8,1\underline{4}5 = 8,1 \quad ; \quad 47,7\underline{5} = 47,8 \quad ; \quad 256,2\underline{8} = 256,3$$

• **Arrondi d'ordre 2** (deux chiffres après la virgule)

On tient compte du 3^{ème} chiffre après la virgule

S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas le 2^{ème} chiffre après la virgule

S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 au 2^{ème} chiffre après la virgule

Exemple : donner l'arrondi d'ordre 2 des nombres décimaux suivants

$$83,25\underline{2} = 83,25 \quad ; \quad 36,16\underline{5} = 36,17 \quad ; \quad 5,19\underline{5}6 = 5,20$$

(3) Equations et inéquations

La résolution des équations se fait généralement par étapes :

• **Equations du type $ax + b = c$**

Etape 1 : On fait passer le b à droite de l'égalité ; il devient $(-b)$

$$ax + b = c \quad \Rightarrow \quad ax = c - b$$

Etape 2 : On calcule si possible $c - b$

Etape 3 : On fait passer le a de l'autre côté de l'égalité ; il divise le résultat de $c - b$

$$ax = c - b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{c - b}{a}$$

Exercice d'application 02Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

a) $2x + 5 = 11$

b) $-7x - 3 = 4$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + 5 = 11 &\Rightarrow 2x = 11 - 5 \\ &\Rightarrow 2x = 6 \\ &\Rightarrow x = \frac{6}{2} \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } -7x - 3 = 4 &\Rightarrow -7x = 4 + 3 \\ &\Rightarrow -7x = 7 \\ &\Rightarrow x = \frac{7}{-7} \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

• **Equations du type $ax + b = cx + d$** **Etape 1** : On fait passer le b à droite l'égalité ; il devient $(-b)$ On fait passer cx à gauche l'égalité ; il devient $(-cx)$

$$\begin{aligned} ax + b = cx + d &\Rightarrow ax = cx + d - b \\ &\Rightarrow ax - cx = d - b \end{aligned}$$

Etape 2 : On calcule si possible $d - b$ et on factorise $ax - cx$

$$ax - cx = d - b \Rightarrow (a - c)x = d - b$$

Etape 3 : On fait passer le $a - c$ de l'autre côté de l'égalité ; il divise le résultat de $d - b$

$$(a - c)x = d - b \Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c}$$

Exercice d'application 03Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

a) $3x + 1 = 2x + 5$

b) $-2x + 3 = 4x - 8$

Proposition de solution

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 3x + 1 = 2x + 5 &\Rightarrow 3x = 2x + 5 - 1 \\
 &\Rightarrow 3x = 2x + 4 \\
 &\Rightarrow 3x - 2x = 4 \\
 &\Rightarrow \mathbf{x = 4}
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{ 4 \}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } -2x + 3 = 4x - 8 &\Rightarrow -2x = 4x - 8 - 3 \\
 &\Rightarrow -2x = 4x - 11 \\
 &\Rightarrow -2x - 4x = -11 \\
 &\Rightarrow -6x = -11 \\
 &\Rightarrow x = \frac{-11}{-6} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x = \frac{11}{6}}
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{11}{6} \right\}$$

- **Inéquations du type $ax + b > c$ (ou $ax + b < c$)**

Etape 1 : On fait passer le b à droite de l'inégalité ; il devient $(-b)$

$$ax + b > c \quad \Rightarrow \quad ax > c - b$$

Etape 2 : On calcule si possible $c - b$

Etape 3 : On fait passer le a de l'autre côté de l'égalité ; il divise le résultat de $c - b$

si a est **positif** , le signe de l'inégalité ne change pas

$$ax > c - b \quad \Rightarrow \quad x > \frac{c - b}{a}$$

si a est **négalif** , le signe de l'inégalité change

$$ax > c - b \quad \Rightarrow \quad x < \frac{c - b}{a}$$

Exercice d'application 04

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

a) $2x + 3 > 11$

b) $-5x + 1 < 4$

Proposition de solution

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 2x + 3 > 11 &\Rightarrow 2x > 11 - 3 \\
 &\Rightarrow 2x > 8 \\
 &\Rightarrow x > \frac{8}{2} \\
 &\Rightarrow x > 4
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} =] 4 ; +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } -5x + 1 < 4 &\Rightarrow -5x < 4 - 1 \\
 &\Rightarrow -5x < 3 \\
 &\Rightarrow x > \frac{3}{-5} \\
 &\Rightarrow x > -\frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left] -\frac{3}{5} ; +\infty \right[$$

- **Inéquations du type $ax + b > cx + d$ (ou $ax + b < cx + d$)**

Etape 1 : On fait passer le b à droite l'égalité ; il devient $(-b)$

On fait passer cx à gauche l'égalité ; il devient $(-cx)$

$$\begin{aligned}
 ax + b > cx + d &\Rightarrow ax > cx + d - b \\
 &\Rightarrow ax - cx > d - b
 \end{aligned}$$

Etape 2 : On calcule si possible $d - b$ et on factorise $ax - cx$

$$ax - cx > d - b \Rightarrow (a - c)x > d - b$$

Etape 3 : On fait passer le nombre $a - c$ de l'autre côté de l'égalité ; il divise le résultat de $d - b$

si $a - c$ est **positif** , le signe de l'inégalité ne change pas

$$(a - c)x > d - b \Rightarrow x > \frac{d - b}{a - c}$$

si $a - c$ est **négatif** , le signe de l'inégalité change

$$(a - c)x > d - b \Rightarrow x < \frac{d - b}{a - c}$$

Exercice d'application 05Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

a) $2x - 3 \geq 3x + 5$

b) $-2x + 1 < -4x + 2$

Proposition de solution

a) $2x - 3 \geq 3x + 5 \Rightarrow 2x \geq 3x + 5 + 3$

$\Rightarrow 2x \geq 3x + 8$

$\Rightarrow 2x - 3x \geq 8$

$\Rightarrow -x \geq 8$

$\Rightarrow x \leq \frac{8}{-1}$

$\Rightarrow x \leq -8$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -8]$

b) $-2x + 1 < -4x + 2 \Rightarrow -2x < -4x + 2 - 1$

$\Rightarrow -2x < -4x + 1$

$\Rightarrow -2x + 4x < 1$

$\Rightarrow 2x < 1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} =]\frac{1}{2} ; +\infty[$

(4) Système linéaire d'équations

Système linéaire de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Pour résoudre un tel système, on dispose de trois (3) méthodes :

- **La méthode de substitution**
- **La méthode de combinaison**
- **La méthode graphique**

On appelle solution d'un tel système tout couple $(x_0 ; y_0)$ qui vérifie les deux équations du système

Exercice d'application 06

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$

Proposition de solution**1- Méthode de substitution**

$$\begin{cases} 4x + y = 1 & (1) \\ x + 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = -2y - 5$$

On remplace x par son expression dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} 4x + y = 1 & \Rightarrow 4(-2y - 5) + y = 1 \\ & \Rightarrow -8y - 20 + y = 1 \\ & \Rightarrow -8y + y = 1 + 20 \\ & \Rightarrow -7y = 21 \\ & \Rightarrow y = \frac{21}{-7} \\ & \Rightarrow y = -3 \end{aligned}$$

Donc en remplaçant y par sa valeur dans l'expression $x = -2y - 5$, on a :

$$x = -2 \times (-3) - 5$$

$$x = 6 - 5$$

$$x = 1$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{ (1 ; -3) \}$$

2- Méthode de combinaison

Remarque

On peut choisir d'éliminer x puis déterminer la valeur de y
(ou choisir d'éliminer y et ensuite déterminer la valeur de x)

On élimine x et on en déduit la valeur de y

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \times 1 \\ \times (-4) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 1 \\ -4x - 8y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -7y &= 21 \\ y &= \frac{21}{-7} \\ y &= -3 \end{aligned}$$

On élimine y et on en déduit la valeur de x

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 2y = -2 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

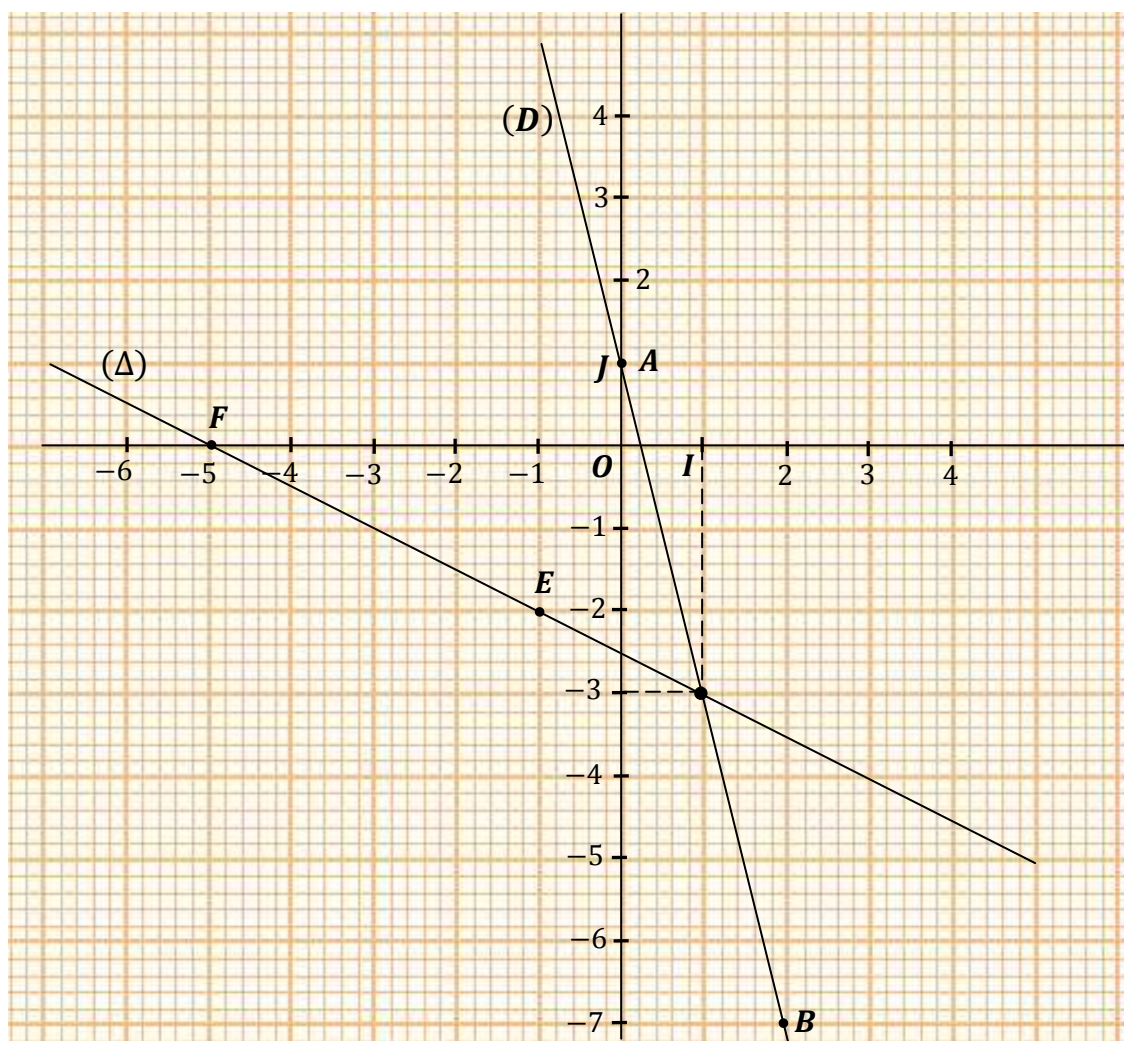
$$\begin{aligned} -7x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{-7} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{ (1; -3) \}$$

3- Méthode graphique

Remarque

Dans cette méthode, on travaille dans un repère orthogonal (ou orthonormé) ; chaque équation du système est représentée à l'aide d'une droite . Si les deux droites obtenues sont sécantes alors le système admet une solution ; par contre si elles sont parallèles alors il n'y pas de solution.



Soit (D) la droite d'équation $4x + y = 1$ et (Δ) la droite d'équation $x + 2y = -5$

- Droite (D) d'équation $4x + y = 1$

	A	B
x	0	2
y	1	-7

La droite (D) est la droite qui passe par les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

- Droite (Δ) d'équation $x + 2y = -5$

	E	F
x	-1	-5
y	-2	0

La droite (Δ) est la droite qui passe par les points $E \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

les droites (D) et (Δ) sont **sécantes** (se coupent) au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

donc le couple $(1; -3)$ est la solution du système

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{ (1; -3) \}$$

(5) Opérations avec les fractions

• Addition avec les fractions

- Addition de deux fractions

Pour additionner deux fractions, on tient compte des dénominateurs :

- * Si elles ont le même dénominateur, on le "garde" et on additionne les numérateurs

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Exemple

$$\frac{8}{11} + \frac{17}{11} = \frac{8+17}{11} = \frac{25}{11}$$

- * Si elles n'ont pas le même dénominateur, on les rend au même dénominateur avant d'additionner les numérateurs

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{c \times d}$$

Exemple

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{2} = \frac{3 \times 2 + 5 \times 8}{8 \times 2} = \frac{6 + 40}{16} = \frac{46}{16} = \frac{23}{8}$$

- Addition d'une fraction et d'un nombre entier

Pour additionner une fraction et un nombre entier, on "suppose" que le nombre entier est une fraction dont le dénominateur est 1 .

On rend par la suite les deux fractions au même dénominateur avant d'additionner les numérateurs

$$\frac{a}{c} + b = \frac{a}{c} + \frac{b}{1} = \frac{a \times 1 + b \times c}{c \times 1}$$

Exemple

$$\frac{4}{7} + 9 = \frac{4}{7} + \frac{9}{1} = \frac{4 \times 1 + 9 \times 7}{7 \times 1} = \frac{4 + 36}{7} = \frac{40}{7}$$

- **Soustraction avec les fractions**

Elle s'effectue de manière similaire comme l'addition avec les fractions

- * Si elles ont le même dénominateur, on le "garde" et on soustrait les numérateurs

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

- * Si elles n'ont pas le même dénominateur, on les rend au même dénominateur avant de soustraire les numérateurs

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{c \times d}$$

Exemple

$$\frac{9}{5} - \frac{2}{7} = \frac{9 \times 7 - 2 \times 5}{5 \times 7} = \frac{63 - 10}{35} = \frac{53}{35}$$

- **Multiplication avec les fractions**

- *Multiplication de deux fractions*

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Exemple

$$\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

- *Multiplication d'une fraction et d'un nombre entier*

Pour multiplier une fraction et un nombre entier, on multiplie seulement le nombre entier par le numérateur de la fraction

$$\frac{a}{c} \times b = \frac{a \times b}{c}$$

Exemple

$$\frac{8}{15} \times 4 = \frac{8 \times 4}{15} = \frac{32}{15}$$

- **Division avec les fractions**

Rappel : Inverse d'une fraction

L'inverse d'une fraction est obtenu en remplaçant le numérateur par le dénominateur et le dénominateur par le numérateur :

$$\frac{a}{b} \text{ a pour inverse } \frac{b}{a}$$

- *Division de deux fractions*

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde fraction.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$$

- *Division d'une fraction et d'un nombre entier*

Pour diviser une fraction par un nombre entier, on multiplie simplement le dénominateur de la fraction par ce nombre entier.

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b \times c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b \times c}$$

Pour diviser un nombre entier par une fraction, on multiplie ce nombre entier par l'inverse de cette fraction.

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b} \quad \text{ou} \quad a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$$

Exemple

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{8}{\frac{7}{12}} = 8 \times \frac{7}{12} = \frac{56}{12} = \frac{14}{3}$$

(6) Puissances

$$* \quad a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

$$** \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$*** \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{et} \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$**** \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}} \quad \text{et} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$***** \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

(7) Règles de priorité dans une opération

L'ordre de priorités dans une opération est :

- 1- Les puissances
- 2- Les parenthèses
- 3- La multiplication ou la division
- 4- L'addition ou la soustraction

Exemple : Donner les résultats des calculs suivants :

$$A = 2(3^3 - 20) + 5$$

$$B = -3 \times 4 + \frac{(-17 + 2^4)^2}{3}$$

Proposition de solution

$$A = 2(3^3 - 20) + 5 \quad (\text{ la puissance } 3^3 = 27)$$

$$A = 2(\mathbf{27} - 20) + 5 \quad (\text{ la parenthèse } 27 - 20 = 7)$$

$$A = 2(\mathbf{7}) + 5 \quad (\text{ la multiplication } 2 \times 7 = 14)$$

$$A = \mathbf{14} + 5 \quad (\text{ l'addition } 14 + 5 = 19)$$

$$A = \mathbf{19}$$

$$B = -3 \times 4 + \frac{(-17 + 2^4)^2}{3}$$

(la puissance $2^4 = 16$)

$$B = -3 \times 4 + \frac{(-17 + \mathbf{16})^2}{3}$$

(la parenthèse $-17 + 16 = -1$)

$$B = -3 \times 4 + \frac{(-\mathbf{1})^2}{3}$$

(la puissance $(-1)^2 = 1$)

$$B = -3 \times 4 + \frac{\mathbf{1}}{3}$$

(la multiplication $-3 \times 4 = -12$)

$$B = -\mathbf{12} + \frac{\mathbf{1}}{3}$$

(l'addition $-\mathbf{12} + \frac{\mathbf{1}}{3} = -\frac{\mathbf{35}}{3}$)

$$B = \frac{-\mathbf{35}}{3}$$

(8) Mise en facteur d'un terme dans une somme

- Pour mettre a en facteur dans l'expression $a + b + c$
 - On écrit a
 - On ouvre une parenthèse dans laquelle on divise tous les termes de $a + b + c$ par a , puis on ferme la parenthèse
 - On simplifie si possible l'expression obtenue dans la parenthèse.

$$\begin{aligned} a + b + c &= a \left(\frac{a}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) \end{aligned}$$

Exercice d'application 07

- 1) Mettre x en facteur dans l'expression $2x + 3$
- 2) Mettre x^2 en facteur dans l'expression $x^2 + 5x - 2$
- 3) Mettre $2x$ en facteur dans l'expression $4x^2 - 7x + 1$

Proposition de solution

$$1) \quad 2x + 3 = x \left(\frac{2x}{x} + \frac{3}{x} \right)$$

$$= x \left(2 + \frac{3}{x} \right)$$

$$2) \quad x^2 + 5x - 2 = x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$3) \quad 4x^2 - 7x + 1 = 2x \left(\frac{4x^2}{2x} - \frac{7x}{2x} + \frac{1}{2x} \right)$$

$$= 2x \left(2x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2x} \right)$$

- Pour mettre $\frac{1}{a}$ en facteur dans l'expression $a + b + c$
 - On écrit $\frac{1}{a}$
 - On ouvre une parenthèse dans laquelle on multiplie tous les termes de $a + b + c$ par a , puis on ferme la parenthèse
 - On simplifie si possible l'expression obtenue dans la parenthèse.

$$a + b + c = \frac{1}{a} (a \times a + a \times b + a \times c)$$

$$= \frac{1}{a} (a^2 + ab + ac)$$

Exercice d'application 08

1) Mettre $\frac{1}{x}$ en facteur dans l'expression $x - 3 + \frac{2}{x}$

2) Mettre $\frac{1}{x^2}$ en facteur dans l'expression $2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2}$

3) Mettre $\frac{1}{4x^2}$ en facteur dans l'expression $2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2}$

Proposition de solution

$$\begin{aligned}
 1) \quad x - 3 + \frac{2}{x} &= \frac{1}{x} \left(x \times x + x \times (-3) + x \times \frac{2}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left(x^2 - 3x + \frac{2x}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{x} (x^2 - 3x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad 2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} &= \frac{1}{x^2} \left(x^2 \times 2 + x^2 \times \frac{1}{x} + x^2 \times \frac{3}{4x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{x^2} \left(2x^2 + \frac{x^2}{x} + \frac{3x^2}{4x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{x^2} \left(2x^2 + x + \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad 2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} &= \frac{1}{4x^2} \left(4x^2 \times 2 + 4x^2 \times \frac{1}{x} + 4x^2 \times \frac{3}{4x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2x^2} \left(8x^2 + \frac{4x^2}{x} + \frac{12x^2}{4x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2x^2} (8x^2 + 4x + 3)
 \end{aligned}$$

Chapitre 1 :

LIMITES ET COMPLEMENTS SUR LES DERIVEES

I- FONCTIONS POLYNOMES

I-1 Définitions

a) Monôme

Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.

On appelle monôme toute expression de la forme ax^n où a est appelé *coefficient* et n est appelé *exposant* du monôme.

Exemple

$2x^3$ est un monôme de coefficient 2 et de degré 3

$-9x^5$ est un monôme de coefficient -9 et de degré 5

x^2 est un monôme de coefficient 1 et de degré 2

b) Polynôme

On appelle polynômes la somme de plusieurs monômes.

$x^3 + 5x^2 - x + 2$ et $-3x^2 + 4x + 1$ sont des polynômes

c) Degré d'un polynôme

On appelle degré d'un polynôme le plus grand exposant des monômes qui composent ce polynôme

Exemple

Le degré du polynôme $2x^3 - x^2 + 7x + 1$ est 3

Le degré du polynôme $x^2 - 3x^4 + 7x^3 + x - 5$ est 4

d) Racine (ou zéro) d'un polynôme

Soit $P(x)$ un polynôme

Le nombre réel a est une racine ou un zéro du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$

I-2 Etude des polynômes du second degré

a) Définition

On appelle polynôme du second degré tout polynôme qui peut se mettre sous la forme

$ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels tels que $a \neq 0$.

En d'autres termes un polynôme du second degré est un *polynôme de degré 2*

b) Discriminant d'un polynôme du second degré

On appelle discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Le discriminant peut être *positif* ($\Delta > 0$), *nul* ($\Delta = 0$) ou *négatif* ($\Delta < 0$).

Exercice résolu

Calculer le discriminant des polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - x - 6$$

$$R(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$S(x) = x^2 + x + 1$$

Proposition de solution

$$P(x) = x^2 - x - 6 \quad (\text{avec } a = 1 \ ; \ b = -1 \ \text{et} \ c = -6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$= 1 + 24$$

$$= \mathbf{25}$$

$$R(x) = 4x^2 + 4x + 1 \quad (\text{avec } a = 4 \ ; \ b = 4 \ \text{et} \ c = 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1$$

$$= 16 - 16$$

$$= \mathbf{0}$$

$$S(x) = x^2 + x + 1 \quad (\text{avec } a = 1 \ ; \ b = 1 \ \text{et} \ c = 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$= 1 - 4$$

$$= \mathbf{-3}$$

c) Utilisation du discriminant

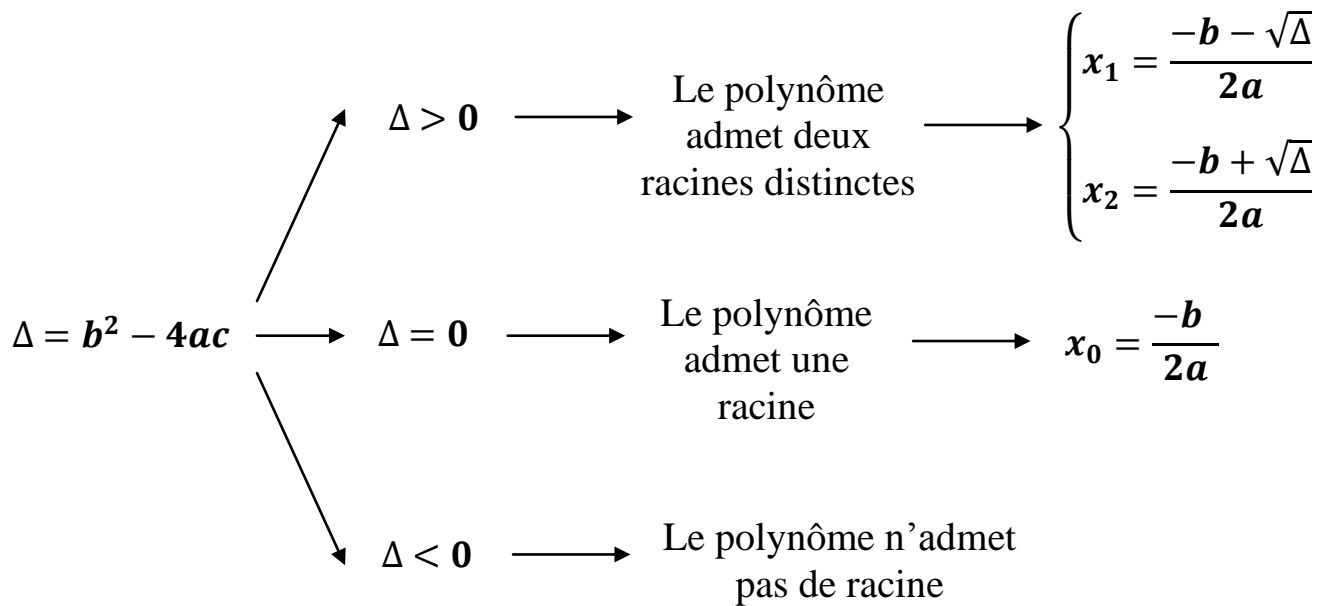
Selon le *signe du discriminant* on peut :

(1) Déterminer le nombre de racines du polynôme $ax^2 + bx + c$

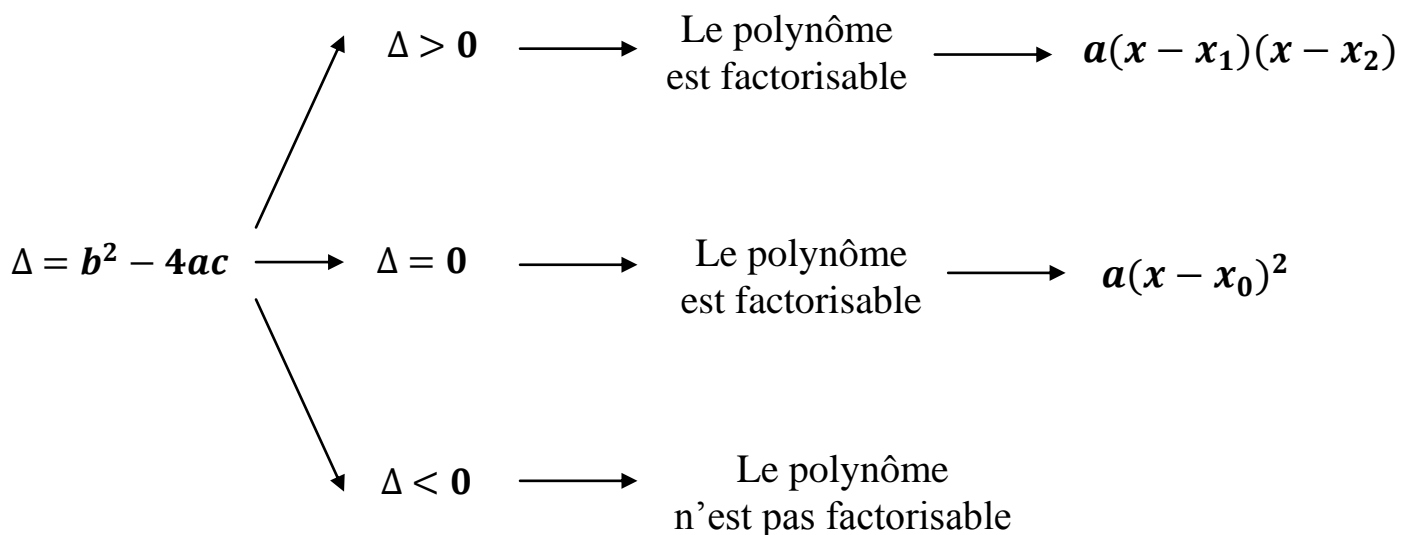
(2) Factoriser si possible le polynôme $ax^2 + bx + c$

(3) Déterminer le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x

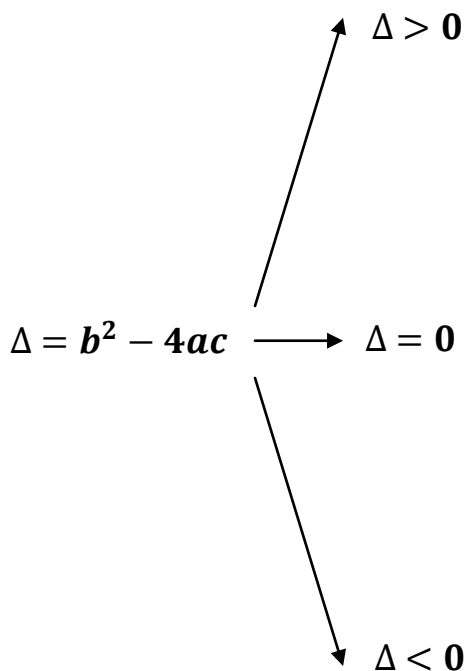
- **Recherche des racines d'un polynôme du second degré en fonction du signe du discriminant**



- **Factorisation d'un polynôme du second degré en fonction du signe du discriminant**



- **Etude du signe d'un polynôme du second degré en fonction du signe du**

discriminant

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe de $(-a)$	Signe de a

(On suppose que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

Exercice résolu

Dans chacun des cas suivants :

- Calculer le discriminant du polynôme de second degré
- Déterminer les racines (ou la racine) du polynôme s'ils existent
- Factoriser si possible le polynôme
- Etudier le signe du polynôme suivant les valeurs du réel x

a) $P(x) = 2x^2 - x - 1$

b) $F(x) = 9x^2 + 6x + 1$

c) $Q(x) = x^2 - 3x + 4$

Proposition de solution

a) $P(x) = 2x^2 - x - 1$ (avec $a = 2$; $b = -1$ et $c = -1$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1)$$

$$= 1 + 8$$

$$= 9$$

Le discriminant est positif ($\Delta > 0$) donc le polynome P admet deux racines

distinctes

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} & & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 x_1 &= \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} & \text{et} & & x_2 &= \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} \\
 x_1 &= \frac{1 - 3}{4} & \text{et} & & x_2 &= \frac{1 + 3}{4} \\
 x_1 &= \frac{-2}{4} & \text{et} & & x_2 &= \frac{4}{4} \\
 x_1 &= -\frac{1}{2} & \text{et} & & x_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Le polynôme P est factorisable car son discriminant est positif

$$\begin{aligned}
 P(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= 2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) (x - 1) \\
 &= 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 1)
 \end{aligned}$$

Tableau de signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$\begin{cases}
 \forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[; P(x) > 0 \\
 \forall x \in]-\frac{1}{2}; 1[; P(x) < 0 \\
 \forall x \in \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\} ; P(x) = 0
 \end{cases}$$

Remarque

Pour le tableau de signe, on peut procéder de la manière suivante

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$x + \frac{1}{2}$	-	0	+	+	
$x - 1$	-	-	0	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+

On aboutit au même résultat que dans la méthode ci-dessus.

$$b) \quad F(x) = 9x^2 + 6x + 1 \quad (\text{ avec } a = 9 \quad ; \quad b = 6 \quad \text{ et } c = 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 \times 1$$

$$= 36 - 36$$

$$= \mathbf{0}$$

Le discriminant est nul ($\Delta = 0$) donc le polynôme F admet une racine : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

$$x_0 = \frac{-6}{2 \times 9}$$

$$= \frac{-6}{18}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Le polynôme F est factorisable car son discriminant est nul

$$F(x) = a(x - x_0)^2$$

$$= 9 \left(x - \left(-\frac{1}{3} \right) \right)^2$$

$$= 9 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2$$

Tableau de signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$F(x)$	+	0	+

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3}; +\infty[; F(x) > 0 \\ \forall x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} ; F(x) = 0 \end{cases}$$

c) $Q(x) = x^2 - 3x + 4$ (avec $a = 1$; $b = -3$ et $c = 4$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$= 9 - 16$$

$$= -7$$

Le discriminant est négatif ($\Delta < 0$) donc le polynôme Q n'admet pas de racine.

De plus le polynôme Q n'est pas factorisable car son discriminant est négatif

Tableau de signe de $Q(x)$ suivant les valeurs de x

Comme $\Delta < 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le polynome $Q(x)$ a le même signe que le coefficient de x^2 ; or $a = 1$ ($a > 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q(x)$	+	

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) > 0$

I-3 Etude des polynômes de degré 3

a) Factorisation d'un polynôme de degré 3

Si un polynôme P de degré 3 admet le réel α comme racine alors il existe un polynôme du second degré $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

Pour déterminer de manière explicite le polynôme Q (c'est-à-dire déterminer les réels a , b et c) on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- *la méthode d'identification*
- *la division euclidienne*
- *la méthode de Horner* (méthode schématisée de la division euclidienne)

Exercice résolu

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

a) Calculer $P(1)$

b) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

Proposition de solution

a) Calculons $P(1)$

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 \\ &= 2 - 5 + 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $P(1) = 0$ alors 1 est une racine du polynôme P ; Il existe donc un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

b) Déterminons les nombres réels a , b et c

1^{ère} méthode : *méthode d'identification*

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &= 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Par identification des monômes de même degré on a :

$$\begin{cases} a = 2 & (1) \\ b - a = -5 & (2) \\ c - b = 2 & (3) \\ -c = 1 & (4) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow b - a = -5 \quad , \quad \text{avec } a = 2 \\ &\Rightarrow b - 2 = -5 \\ &\Rightarrow b = -5 + 2 \\ &\Rightarrow b = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) &\Rightarrow -c = 1 \\ &\Rightarrow c = -1 \end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$

Par conséquent : $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 1)$

2^{ème} méthode : division euclidienne

Comme $P(1) = 0$ alors 1 est une racine du polynôme P , par conséquent le polynôme $ax^2 + bx + c$ est le quotient de $P(x)$ par $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\ \hline - 2x^3 + 2x^2 & \\ \hline -3x^2 + 2x & \\ - -3x^2 + 3x & \\ \hline -x + 1 & \\ - -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{\text{Dividende}}{\text{Diviseur}} = \text{Quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}}$$

$$\text{Si } \text{Reste} = 0 \text{ alors } \frac{\text{Dividende}}{\text{Diviseur}} = \text{Quotient} \Rightarrow \text{Dividende} = \text{Diviseur} \times \text{Quotient}$$

On déduit de la division euclidienne ci-dessus que $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 1)$:
donc $a = 2$; $b = -3$ et $c = -1$

Les étapes de la division euclidienne ci-dessus

Etape 1 : On divise $2x^3$ (du dividende) par x (du diviseur)

On obtient $2x^2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\ \hline & 2x^2 \end{array} \quad \left(\frac{2x^3}{x} = 2x^2 ; \text{ on simplifie par } x \right)$$

Etape 2 : On multiplie $2x^2$ (du quotient) par tous les termes du diviseur $x - 1$

On obtient $2x^3 - 2x^2$

On fait la soustraction de $2x^3 - 5x^2$ (du dividende) et de $2x^3 - 2x^2$

$$\begin{aligned} (2x^3 - 5x^2) - (2x^3 - 2x^2) &= 2x^3 - 5x^2 - 2x^3 + 2x^2 \\ &= 2x^3 - 2x^3 - 5x^2 + 2x^2 \\ &= -3x^2 \end{aligned}$$

Le résultat de la soustraction est : $-3x^2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\ \hline 2x^3 - 2x^2 & \\ \hline -3x^2 & \end{array}$$

Etape 3 : On abaisse le terme suivant qui est : $2x$
le nouveau dividende est : $-3x^2 + 2x$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - & \\
 \hline
 2x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 -3x^2 + 2x & 2x^2
 \end{array}$$

Etape 4 : On divise $-3x^2$ (du nouveau dividende) par x (du diviseur)
On obtient $-3x$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - & \\
 \hline
 2x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 -3x^2 + 2x & 2x^2 - 3x
 \end{array}$$

Etape 5 : On multiplie $-3x$ (du quotient) par tous les termes du diviseur $x - 1$
On obtient $-3x^2 + 3x$

$$\begin{aligned}
 &\text{On fait la soustraction de } -3x^2 + 2x \text{ (du dividende) et de } -3x^2 + 3x \\
 &(-3x^2 + 2x) - (-3x^2 + 3x) = -3x^2 + 2x + 3x^2 - 3x \\
 &= -3x^2 + 3x^2 + 2x - 3x \\
 &= -x
 \end{aligned}$$

Le résultat de la soustraction est : $-x$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - & \\
 \hline
 2x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 -3x^2 + 2x & \\
 - & \\
 \hline
 -3x^2 + 3x & 2x^2 - 3x \\
 \hline
 -x &
 \end{array}$$

Etape 6 : On abaisse le terme suivant qui est : 1
le nouveau dividende est : $-x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - & \hline
 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x \\
 \hline
 -3x^2 + 2x & \\
 - & \\
 -3x^2 + 3x & \\
 \hline
 -x + 1 &
 \end{array}$$

Etape 7 : On divise $-x$ (du nouveau dividende) par x (du diviseur)
On obtient -1

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - & \hline
 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x - 1 \\
 \hline
 -3x^2 + 2x & \\
 - & \\
 -3x^2 + 3x & \\
 \hline
 -x + 1 &
 \end{array}$$

Etape 8 : On multiplie -1 (du quotient) par tous les termes du diviseur $x - 1$
On obtient $-x + 1$

On fait la soustraction de $-x + 1$ (du dividende) et de $-x + 1$

$$\begin{aligned}
 (-x + 1) - (-x + 1) &= -x + 1 + x - 1 \\
 &= -x + x + 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Le résultat de la soustraction est : **0**

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\
 - 2x^3 - 2x^2 & \hline
 \hline
 -3x^2 + 2x & 2x^2 - 3x - 1 \\
 - -3x^2 + 3x & \\
 \hline
 -x + 1 & \downarrow \\
 - -x + 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Etant donné qu'il n'y a plus de terme à abaisser alors le reste de la division est **0**

3^{ème} méthode : méthode de Horner

la méthode de Horner est un algorithme (technique) simple pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$

Proposition de méthode

	1	2	3	4
5	6	8	10	12
	7	9	11	13

Division euclidienne de $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $x - \alpha$

Case 1 \Rightarrow On place le nombre A (le coefficient de x^3)

Case 2 \Rightarrow On place le nombre B (le coefficient de x^2)

Case 3 \Rightarrow On place le nombre C (le coefficient de x)

Case 4 \Rightarrow On place le nombre D (la constante)

Case 5 \Rightarrow On place le nombre α

Case 6 \Rightarrow cette case reste vide

Case 7 \Rightarrow on reporte le nombre A (le coefficient de x^3)

Case 8 \Rightarrow le produit de case 5 et de la case 7

Case 9 \Rightarrow la somme de la case 2 et de la case 8

Case 10 \Rightarrow le produit de case 5 et de la case 9

Case 11 \Rightarrow le somme de la case 3 et de la case 10

Case 12 \Rightarrow le produit de la case 5 et de la case 11

Case 13 \Rightarrow le somme de la case 4 et de la case 12

Interprétation du résultat

Le quotient de la division euclidienne de $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $x - \alpha$ est de la forme : $Q(x) = ax^2 + bx + c$

Case 7 \Rightarrow la valeur de a

Case 9 \Rightarrow la valeur de b

Case 11 \Rightarrow la valeur de c

Case 13 \Rightarrow le reste de la division euclidienne

Application

Division euclidienne de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ par $x - 1$ ($\alpha = 1$)

	2	-5	2	1
1		2	-3	-1
	2	-3	-1	0

On déduit du tableau ci-dessus que :

$a = 2$, $b = -3$ et $c = -1$;

donc $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 1)$

II- FONCTIONS RATIONNELLES

II-1 Définitions

a) Définition

On appelle fonction rationnelle toute fonction qui est le quotient de deux fonctions polynômes.

Exemple

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{4x - 7} \quad \text{sont des fonctions rationnelles}$$

b) Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle ?

Une fonction rationnelle est définie si et seulement si son dénominateur est non nul (c'est-à-dire différent de 0)

Exercice résolu

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x) = \frac{x - 2}{3x + 1}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{2x^2 - 8x + 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

Proposition de solution

$$\text{a) } x \in D_f \Leftrightarrow 3x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{b) } x \in D_g \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \quad \text{et} \quad x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \quad \text{et} \quad x \neq -1$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{ -1 ; 2 \}$$

b) Comment étudier le signe d'une fonction rationnelle ?

Pour étudier le signe d'une fonction rationnelle suivant les valeurs de x , on procède par étapes :

1^{ère} étape : Factoriser le numérateur et le dénominateur
(simplifier l'expression obtenue si cela est possible)

2^{ème} étape : Mettre les différents facteurs dans un tableau de signe

3^{ème} étape : Déduire le signe de la fonction rationnelle à l'aide du tableau de signe

Exercice résolu

Etudier le signe des fonctions rationnelles suivantes

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 4} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6}$$

Proposition de solution

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x + 4} \quad (D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\})$$

Factorisons le numérateur ($-2x^2 + x + 1$) à l'aide du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad ; \quad \text{avec} \quad a = -2 \quad ; \quad b = 1 \quad \text{et} \quad c = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 \\ &= 1 + 8 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $-2x^2 + x + 1$ admet deux racines distinctes et est factorisable .

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-2)}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{-4}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De plus } -2x^2 + x + 1 &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= -2(x - 1) \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \\
 &= -2(x - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que : } \forall x \in D_f ; f(x) = \frac{-2(x - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right)}{x + 4}$$

Tableau de signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$-2(x - 1)$	+	+	+	0	-	
$x + \frac{1}{2}$	-	-	0	+	+	
$x + 4$	-	0	+	+	+	
$f(x)$	+	-	0	+	0	-

$$\begin{cases}
 \forall x \in]-\infty; -4[\cup]-\frac{1}{2}; 1[; f(x) > 0 \\
 \forall x \in]-4; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[; f(x) < 0 \\
 \forall x \in \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\} ; f(x) = 0
 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6} \quad (D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \})$$

Factorisons le numérateur ($x^2 - 4x + 4$) à l'aide du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad ; \quad \text{avec } a = 1 \quad ; \quad b = 4 \quad \text{et } c = 4$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0$$

$\Delta = 0$ donc le polynôme $x^2 - 4x + 4$ admet une racine ; de plus il est factorisable.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

De plus $x^2 - 4x + 4 = a(x - x_0)^2$

$$= (x - 2)^2$$

On en déduit que : $\forall x \in D_g ; g(x) = \frac{(x - 2)^2}{3x - 6}$

$$= \frac{(x - 2)(x - 2)}{3(x - 2)}$$

$$= \frac{x - 2}{3}$$

Comme 3 est positif ($3 > 0$) alors le signe de $g(x)$ dépend du signe de $x - 2$

Tableau de signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$g(x)$	-		+

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 2[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]2; +\infty[; g(x) > 0 \end{array} \right.$$

II-2 Fonctions rationnelles du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P est un polynôme du second degré et Q un polynôme de degré 1

On utilise ce type de fonctions rationnelles très souvent en Terminale A

Exemple : $\frac{x^2 - x + 3}{x + 1}$; $\frac{-2x^2 + x + 1}{-4x + 3}$; $\frac{7x^2 - 4x + 9}{3x - 2}$; $\frac{x^2 + 1}{x - 4}$

a) Transformation d'une fraction rationnelle

Cette transformation peut se faire à l'aide de l'une des trois méthodes suivantes:

- (1) *La méthode d'identification*
- (2) *La division euclidienne*
- (3) *La méthode de Horner*

Exercice résolu

Pour tout $x \neq 1$, déterminer les réels a , b et c tels que :

$$\frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

✿ Cas pratique de la méthode d'identification

Etape 1 : On rend au même dénominateur l'expression $ax + b + \frac{c}{x - 2}$

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x - 2} &= \frac{(ax + b)(x - 2) + c}{x - 2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2} \\ &= \frac{ax^2 + (-2a + b)x - 2b + c}{x - 2} \\ &= \frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} \end{aligned}$$

Etape 2 : Par identification des coefficients des monômes de même degré des numérateurs, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & (-2a + b)x & - & 2b + c & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2x^2 & - & 5x & + & 8 & & \end{array}$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -5 \\ -2b + c = 8 \end{cases}$$

Etape 3 : On résout le système obtenu pour déterminer les valeurs des réels a , b et c

$$\begin{cases} a = 2 & (1) \\ -2a + b = -5 & (2) \\ -2b + c = 8 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow -2a + b = -5 \\ &\Rightarrow -2 \times 2 + b = -5 \\ &\Rightarrow -4 + b = -5 \\ &\Rightarrow b = -5 + 4 \\ &\Rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &\Rightarrow -2b + c = 8 \\ &\Rightarrow -2(-1) + c = 8 \\ &\Rightarrow 2 + c = 8 \\ &\Rightarrow c = 8 - 2 \\ &\Rightarrow c = 6 \end{aligned}$$

donc $a = 2$; $b = -1$ et $c = 6$

✿ Cas pratique de la division euclidienne

$$\frac{\text{Dividende}}{\text{Diviseur}} = \text{Quotient} + \frac{\text{Reste}}{\text{Diviseur}}$$

Etape 1 : On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur
(c'est-à-dire la division euclidienne de $2x^2 - 5x + 8$ par $x - 2$)

Etape 2 : Le *quotient* de la division euclidienne est le polynôme $ax + b$
Le *reste* de la division euclidienne est égal à c

Etape 3 : on déduit des égalités de l'étape 2 les valeurs des réels a , b et c

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 - \quad 2x^2 - 4x & \hline
 \quad \quad -x + 8 & 2x - 1 \\
 - \quad -x + 2 & \\
 \quad \quad \quad 6 &
 \end{array}$$

Le quotient est : $2x - 1$ donc $a = 2$ et $b = -1$

Le reste est : 6 donc $c = 6$

Les étapes de la division euclidienne ci-dessus

Etape 1 : On divise $2x^2$ (du dividende) par x (du diviseur)

On obtient $2x$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 \hline
 & 2x
 \end{array}$$

Etape 2 : On multiplie $2x$ (du quotient) par tous les termes du diviseur $x - 2$

On obtient $2x^2 - 4x$

On fait la soustraction de $2x^2 - 5x$ (du dividende) et de $2x^2 - 4x$

$$\begin{aligned}
 (2x^2 - 5x) - (2x^2 - 4x) &= 2x^2 - 5x - 2x^2 + 4x \\
 &= 2x^2 - 2x^2 - 5x + 4x \\
 &= -x
 \end{aligned}$$

Le résultat de la soustraction est : $-x$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 - \quad 2x^2 - 4x & \hline
 \quad \quad -x &
 \end{array}$$

Etape 3 : Puis on abaisse le terme suivant qui est 8
le nouveau dividende est : $-x + 8$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 - & \\
 \hline
 2x^2 - 4x & 2x \\
 \hline
 -x + 8 &
 \end{array}$$

Etape 4 : On divise $-x$ (du nouveau dividende) par x (du diviseur)
On obtient -1

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 - & \\
 \hline
 2x^2 - 4x & 2x - 1 \\
 \hline
 -x + 8 &
 \end{array}$$

Etape 5 : On multiplie -1 (du quotient) par tous les termes du diviseur $x - 2$
On obtient $-x + 2$

On fait la soustraction de $-x + 8$ (du dividende) et de $-x + 2$

$$\begin{aligned}
 (-x + 8) - (-x + 2) &= -x + 8 + x - 2 \\
 &= -x + x + 8 - 2 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

Le résultat de la soustraction est : 6

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 - 5x + 8 & x - 2 \\
 - & \\
 \hline
 2x^2 - 4x & 2x - 1 \\
 \hline
 -x + 8 & \\
 - & \\
 -x + 2 & \\
 \hline
 6 &
 \end{array}$$

Etant donné qu'il n'y a plus de terme à abaisser alors le reste de la division est **6**

✿ Cas pratique de la méthode de Ruffini-Horner

Etape 1 : Remplissage du tableau

Etape 2 : Interprétation des résultats du tableau

Division euclidienne de $2x^2 - 3x + 5$ par $x - 1$ ($\alpha = 1$)

	2	-3	5
1		2	-1
	2	-1	4

On déduit du tableau ci-dessus que :

$$a = 2 \quad ; \quad b = -1 \quad \text{et} \quad c = 4$$

Le quotient de la division euclidienne de $2x^2 - 3x + 5$ par $x - 1$ est $2x - 1$ et

le reste est 4 , par conséquent :

$$\frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{4}{x - 1}$$

Exercices proposés**Exercice 1**

On considère la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{4x^2 + x - 7}{x + 2}$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f
- 2- Déterminer les réels a , b et c tels que : $\forall x \in D_f ; f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$

Exercice 2

- 1- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - 4x - 5 = 0$
- 2- Justifier que 2 est une solution de l'équation (E): $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$
- 3- Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$
- 4- En utilisant les questions 1 et 3, justifier que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; 2 ; 5\}$

Exercice 3**Partie A**

On donne dans \mathbb{R} , le polynôme $P(x) = x^2 + 4x + 3$

- 1- Résoudre l'équation $P(x) = 0$
- 2- Justifier que : $(x + 3)(x + 1)$

Partie B

On donne la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f
- 2- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = x + 1 + \frac{2}{x + 3}$

III- CALCULS DE LIMITES.

Notion de limites

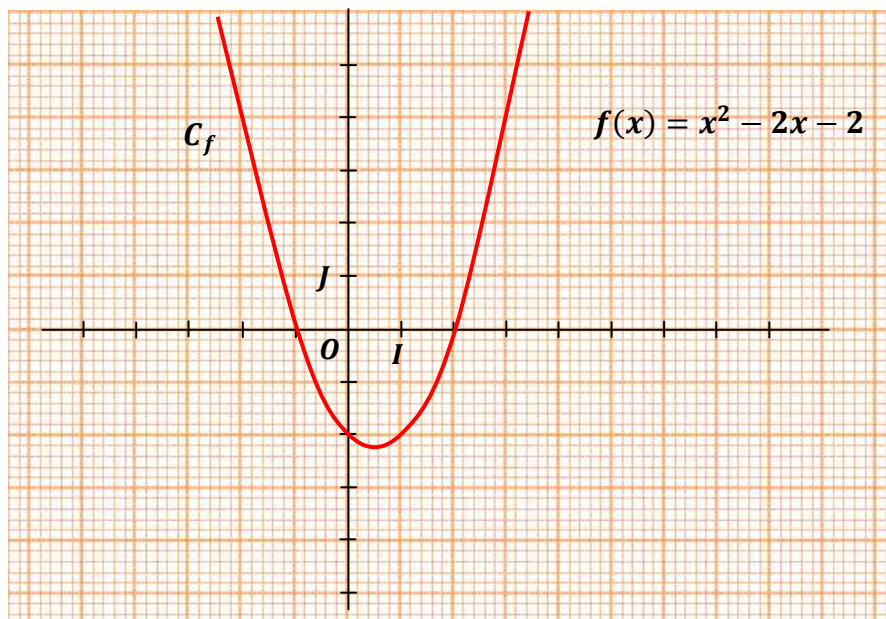


Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	2
$f(x)$	4	0	-2	-2	-1,25	-0,29	-0,0299	-0,002999	-0,0002999	0

Lorsque la variable x se rapproche de 2 , $f(x)$ se rapproche de 0 ; autrement dit lorsque x tend vers 2 , $f(x)$ tend vers 0

On dit : *limite de $f(x)$ lorsque x tend 2 est égale à 0* . On note $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

Approche de la notion de limite

Soit f une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) , a est un nombre réel

Lorsque la variable x se rapproche du réel a (x tend vers a) , on s'intéresse au comportement de $f(x)$:

- Soit $f(x)$ se rapproche d'un **nombre réel**
- soit $f(x)$ est **infini** ($-\infty$ ou $+\infty$)

Dans la pratique, pour calculer la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, il faut premièrement et cela au brouillon, remplacer la variable x de la fonction f par le réel a puis effectuer le calcul.

Exemple : $f(x) = x^2 - 3x + 5$ et $a = 2$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) \\ &= 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\ &= 4 - 6 + 5 \\ &= 3\end{aligned}$$

III-1 Limite de fonctions élémentaires

1) Soit n un nombre entier naturel non nul

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ quelque soit la parité de n

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ \rightarrow -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice résolu

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5$$

Proposition de solution

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad (\text{ car l'exposant de } x \text{ est pair })$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \quad (\text{ car l'exposant de } x \text{ est impair })$$

2) Soit n un nombre entier naturel non nul

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{quel que soit la valeur de } n$$

III-2 Limite en l'infini d'une fonction polynôme

La limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ ou $+\infty$ est égale à la limite du monôme de plus haut degré (en tenant compte du signe de son coefficient)

Application

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = +\infty$$

$$= -3 \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \right)$$

$$= -3 \times (+\infty)$$

$$= -\infty$$

III- 3 Limite en l'infini d'une fraction rationnelle

La limite d'une fraction rationnelle en $-\infty$ ou $+\infty$ est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

(**!!! Attention** au signe des coefficients)

Application

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 8}{2x^2 + 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{-2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^4 - 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

III-4 Limite à droite - Limite à gauche

Soit a un nombre réel.

$$(1) \lim_{x \rightarrow a}^> \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a}^< \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Attention à l'utilisation de ces formules :

Pour certains élèves, limite à droite donne toujours $+\infty$ et limite à gauche donne $-\infty$.

Ce n'est pas toujours vrai !!!

Exercice résolu

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2}^> \frac{x+3}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7}^> \frac{1-2x}{x-7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3}^< \frac{x-1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4}^< \frac{x+2}{x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}^< \frac{4x+9}{-x+1}$$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2}^> \frac{x+3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2}^> (x+3) \times \frac{1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2}^> (x+3) \times \lim_{x \rightarrow 2}^> \frac{1}{x-2} \\ &= 5 \quad \times \quad (+\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7}^> \frac{1-2x}{x-7} &= \lim_{x \rightarrow 7}^> (1-2x) \times \frac{1}{x-7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7}^> (1-2x) \times \lim_{x \rightarrow 7}^> \frac{1}{x-7} \\ &= -13 \quad \times \quad (+\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3}^< \frac{8x-13}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3}^< (8x-13) \times \frac{1}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3}^< (8x-13) \times \lim_{x \rightarrow 3}^< \frac{1}{x-3} \\ &= 11 \quad \times \quad (-\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{x+4} &= \lim_{x \rightarrow -4} (x+2) \times \frac{1}{x+4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -4} (x+2) \times \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} \\
 &= -2 \times (-\infty) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+9}{-x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x+9) \times \frac{1}{-(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x+9) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x+9) \times \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{(x-1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x+9) \times \left[-\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \right) \right] \\
 &= -13 \times [-(-\infty)] \\
 &= -13 \times (+\infty) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

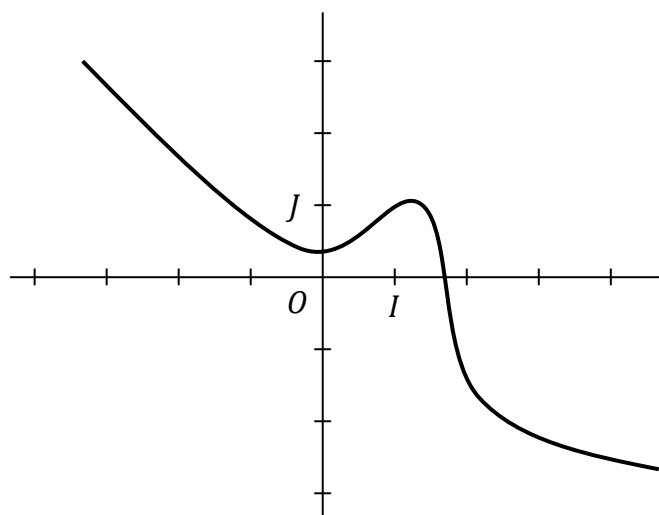
III-5 Calculs de limites à partir de la représentation graphique d'une fonction

(1) Calcul de limite en $-\infty$ ou en $+\infty$

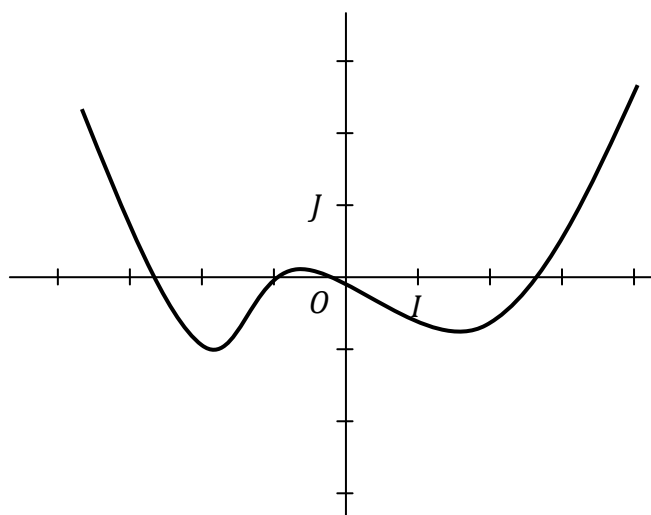
Pour la limite en $-\infty$, on pose la main sur la représentation graphique de la fonction et le déplacement se fait de la droite vers la gauche

Pour la limite en $+\infty$, on pose la main sur la représentation graphique de la fonction et le déplacement se fait de la gauche vers la droite

- Si la fonction croit alors le résultat de la limite est $+\infty$

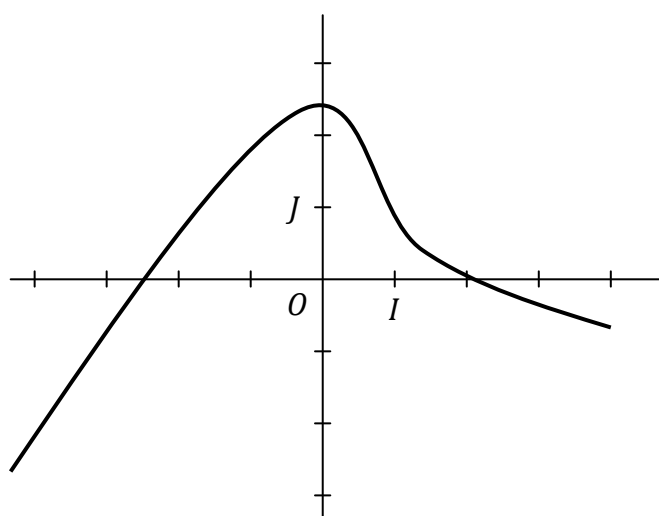


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

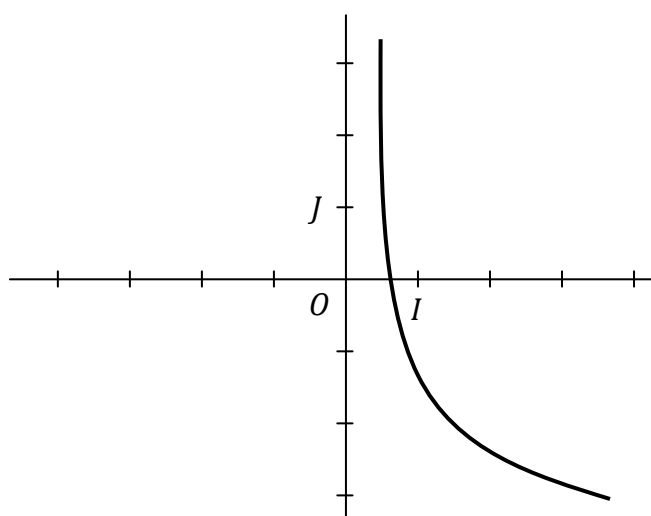


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Si la fonction décroît alors le résultat de la limite est $-\infty$



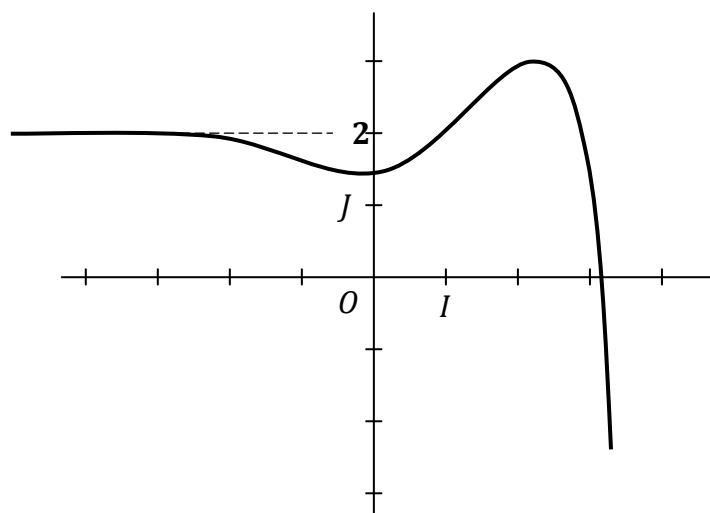
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



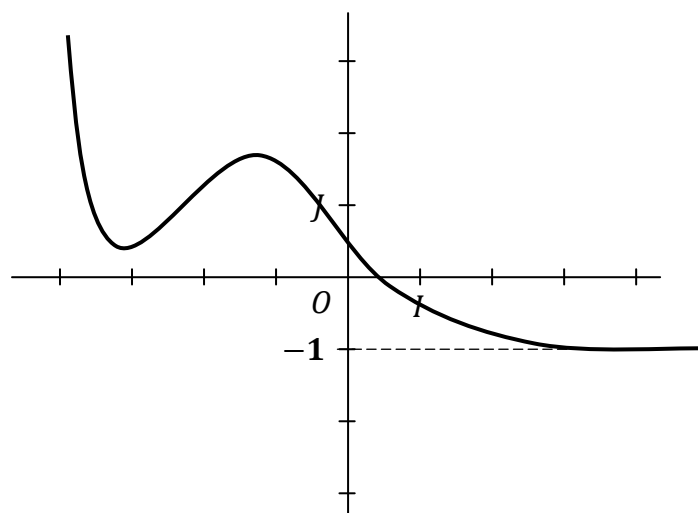
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- Si la fonction semble évoluée de manière horizontale alors le résultat de la limite est un réel

Pour déterminer la valeur de ce réel, on prolonge la partie horizontale de la courbe afin qu'elle coupe l'axe des ordonnées. La valeur obtenue sur l'axe des ordonnées est la valeur de la limite



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

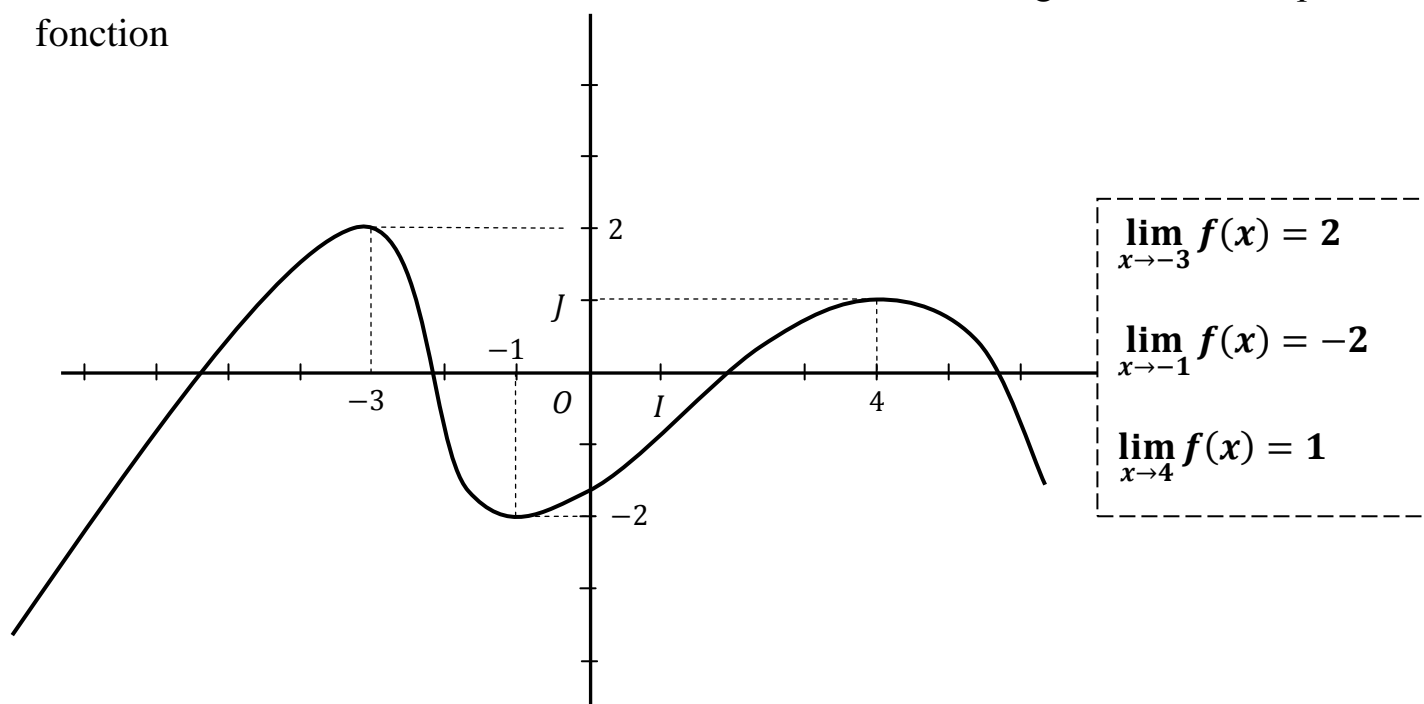


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(2) Calcul de limite en un point

1^{er} cas : la fonction est définie en ce point

Le calcul de limite est "*semblable*" à la détermination de l'image d'un nombre par une fonction



$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$$

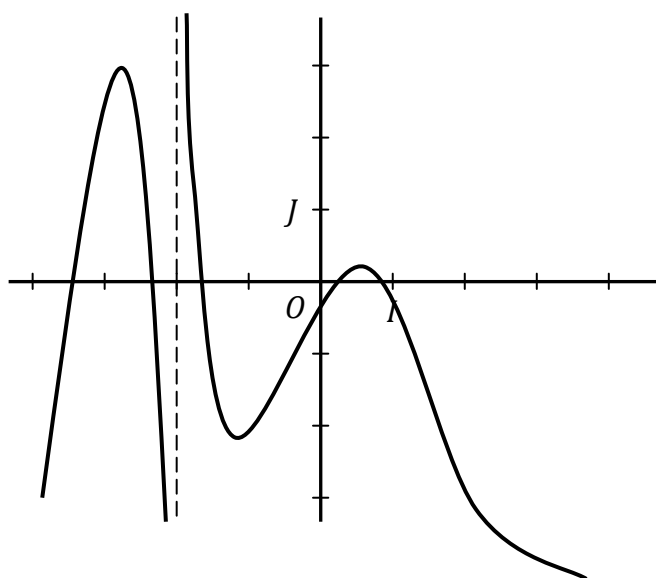
2^{ème} cas : La fonction n'est pas définie en ce point

Dans ce cas, on calcule la limite à gauche et la limite à droite de ce point.

Pour la **limite à gauche**, on pose la main, du côté gauche du point, sur la représentation graphique de la fonction et le déplacement se fait de la gauche vers la droite

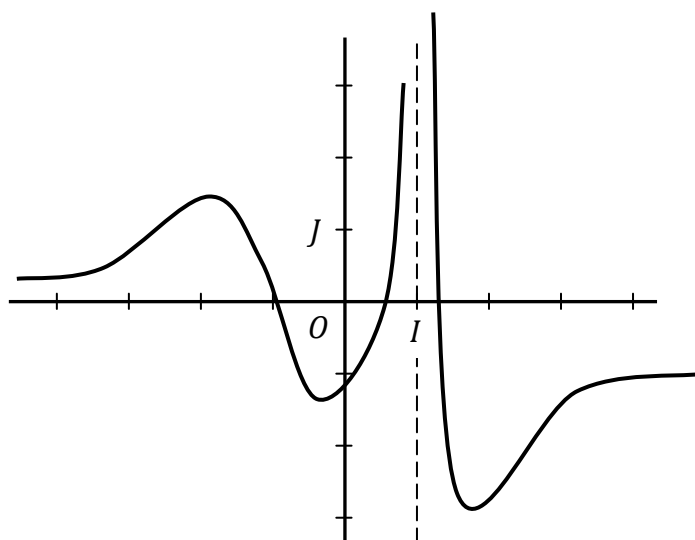
Pour la **limite à droite**, on pose la main, du côté droit du point, sur la représentation graphique de la fonction et le déplacement se fait de la droite vers la gauche

- Si la fonction croit alors le résultat de la limite est $+\infty$
- Si la fonction décroît alors le résultat de la limite est $-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow -2}^- f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^+ f(x) = +\infty$$

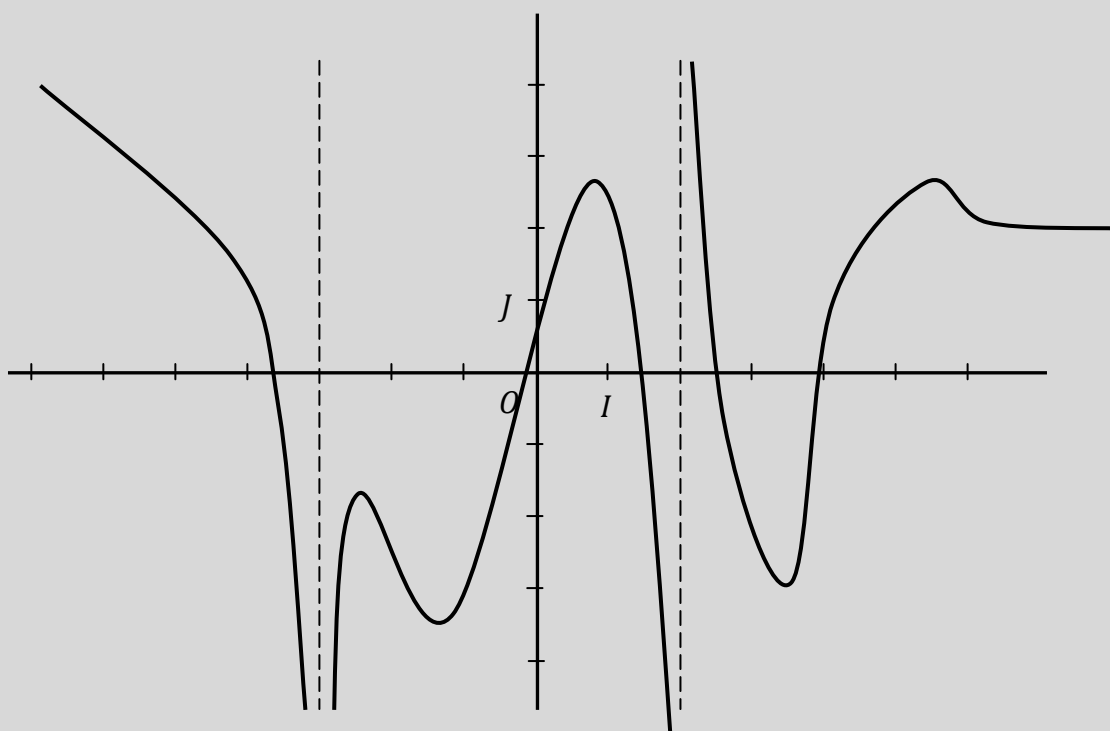


$$\lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x) = -\infty$$

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; -3 [\cup] -3 ; 2 [\cup] 2 ; +\infty [$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous



Déterminer à partir de la représentation graphique de la fonction f les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Proposition de solution

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

III-6 Opérations avec les limites

Lorsque cela n'aboutit pas à une forme indéterminée, on peut effectuer les opérations suivantes avec les limites

(1) **Addition**

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(2) **Produit**

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

(3) **Quotient**

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

III-7 Formes indéterminées

Dans un calcul de limites, lorsqu'on ne peut pas conclure, on dit qu'il y'a une **forme indéterminée**. On relève quatre types de formes indéterminées :

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \times \infty \qquad \infty - \infty$$

Dans ce cas , l'élève sera amené à transformer la limite afin de **lever cette indétermination** en utilisant l'une des méthodes suivantes :

- La factorisation
- L'expression conjuguée

Attention : Les formes suivantes ne sont pas des formes indéterminées :

$$\frac{\infty}{\text{Réel}} \quad ; \quad \frac{0}{\text{Réel}} \quad ; \quad \frac{\text{Réel}}{0} \quad ; \quad \frac{\text{Réel}}{\infty}$$

Pour ne pas les oublier on peut se servir de la phrase :

« **IRI** de **ORO** est le **ROI** de **RIO** »

IRI : ∞ sur Réel donne ∞

ORO : 0 sur Réel donne 0

ROI : Réel sur 0 donne ∞

RIO : Réel sur ∞ donne 0

III-8 Interprétation graphique de limites et Asymptotes

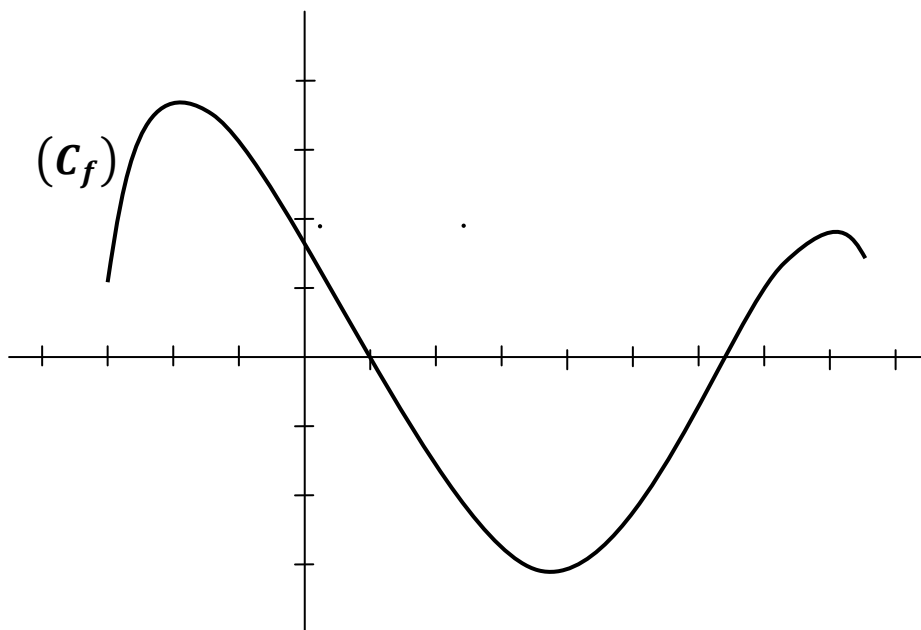
	Limites	Interprétation
Asymptote verticale	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)
	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)
Asymptote horizontale	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $-\infty$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$
Asymptote oblique	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$

Astuce**Asymptote verticale**L'équation est de la forme $x = \text{réel}$ **Asymptote horizontale**L'équation est de la forme $y = \text{réel}$ **Asymptote oblique**L'équation est de la forme $y = ax + b$

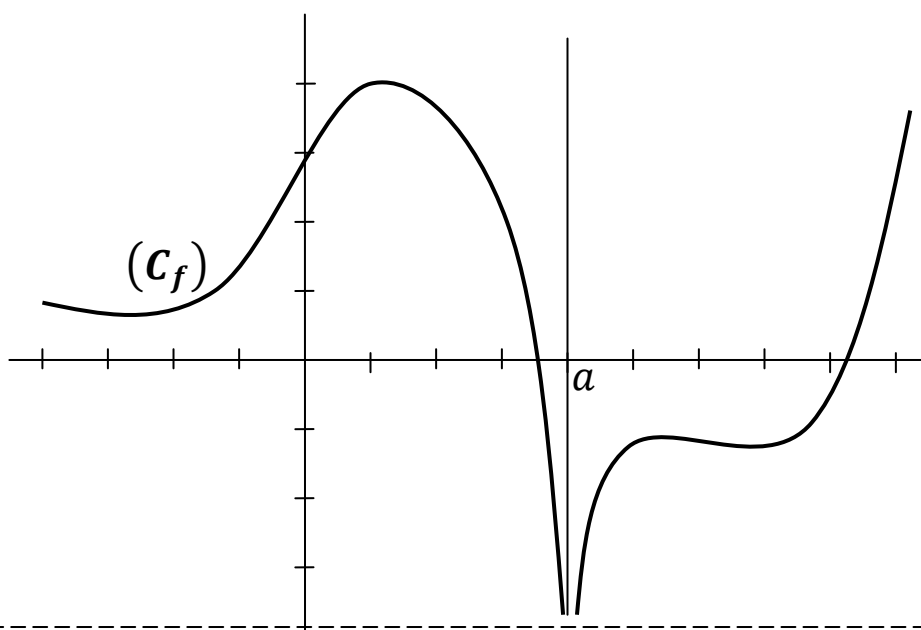
III-9 Continuité

a- Comment montrer graphiquement qu'une fonction est continue sur un intervalle ?

Graphiquement lorsqu'une fonction f est continue sur un intervalle, on peut parcourir la courbe (C_f) sans lever la main.



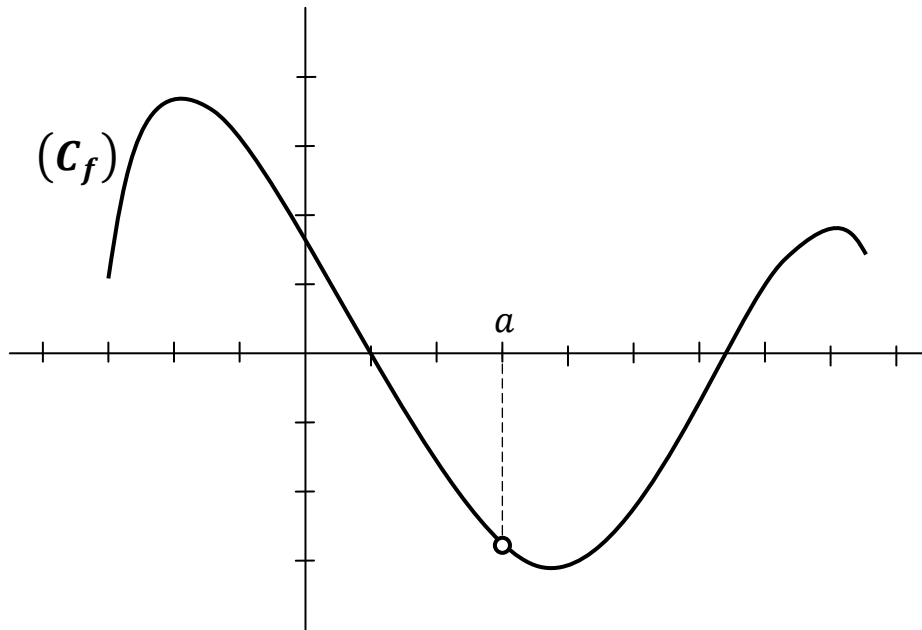
Par contre si la fonction f n'est pas continue en a , on est obligé de lever la main au point d'abscisse a lorsqu'on parcourt la courbe (C_f)



Remarque

Lorsque la fonction f n'est pas continue en a , on dit f est *discontinue* en a

Autre cas de figure où la fonction n'est pas continue en un point d'abscisse a



b- Comment montrer qu'une fonction est continue en utilisant les calculs de limites ?

Une fonction f est continue en un point a lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) a appartient à l'ensemble de définition de f ($a \in D_f$)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exercice résolu

On considère la fonction rationnelle f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \quad \text{et} \quad f(-1) = 2$$

a- Justifier que : $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c- En déduire que f est continue en -1

Proposition de solution

a- Justifions que $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

$$\begin{aligned} (x + 1)(x + 3) &= x^2 + 3x + x + 3 \\ &= x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

donc $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

b- Calculons $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) \\ &= -1 + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

c- **Remarque**

$-1 \in D_f$ car $f(-1)$ existe et est égale à 2

Comme $-1 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 = f(-1)$

On déduit donc que f est continue en -1

c- Continuité d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$

Une fonction f est continue sur un intervalle $[a ; b]$ si elle est continue en tout point de cet intervalle

* Cas particulier des fonctions polynômes et les fonctions rationnelles

Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

I- APPLICATION DE LA DERIVATION

1- Tableaux récapitulatifs des dérivées

fonctions	fonctions dérivées
a (est un réel)	0
x	1
ax	a
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

fonctions	fonctions dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$a \times u$ (a est un réel)	$a \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\frac{ax + b}{cx + d}$	$\frac{a \times d - c \times b}{(cx + d)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(ax + b)$	$-a \times \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$a \times \cos(ax + b)$

Remarque

(1) **La dérivée d'un nombre réel est égale à 0 (zéro) quelque soit ce nombre**

$$(2)' = 0 \quad ; \quad (1000)' = 0 \quad ; \quad (-5)' = 0$$

(2) **La dérivée de x est égale à 1**

Pour déterminer la dérivée d'un nombre réel multiplié par x , on ne touche pas le nombre réel mais on ne dérive que le x

$$(3x)' = 3 \times (x)' = 3 \times 1 = 3$$

$$(8x)' = 8 \times (x)' = 8 \times 1 = 8$$

$$(-6x)' = -6 \times (x)' = -6 \times 1 = -6$$

De manière simple : $(3x)' = 3$

$$(8x)' = 8$$

$$(-6x)' = -6$$

(3) **La dérivée du monôme x^n**

$$(x^n)' = n \times x^{n-1}$$

l'exposant devient le coefficient

le nouveau exposant est égal à l'ancien exposant moins 1

$$(x^3)' = 3 \times x^{3-1} = 3 \times x^2 = 3x^2$$

$$(x^2)' = 2 \times x^{2-1} = 2 \times x^1 = 2x$$

$$(x^5)' = 5 \times x^{5-1} = 5 \times x^4 = 5x^4$$

$$(6x^4)' = 6 \times (x^4)' = 6 \times (4 \times x^{4-1}) = 6 \times (4 \times x^3) = 24x^3$$

$$(-7x^3)' = -7 \times (x^3)' = -7 \times (3 \times x^{3-1}) = -7 \times (3 \times x^2) = -21x^2$$

(4) **La dérivée d'un polynôme**

Pour déterminer la dérivée d'un polynôme, on dérive chaque monôme composant ce polynôme

$$\begin{aligned} (2x^3 - 4x^2 + 3x + 1)' &= (2x^3)' - (4x^2)' + (3x)' + (1)' \\ &= 2(x^3)' - 4(x^2)' + 3(x)' + 0 \\ &= 2 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 + 0 \\ &= 6x^2 - 8x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2x^2 + 7x - 8)' &= (2x^2)' + (7x)' - (8)' \\
 &= 2(x^2)' + 7(x)' + 0 \\
 &= 2 \times 2x + 7 \times 1 \\
 &= 4x^2 + 7
 \end{aligned}$$

Exercice résolu

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = 3x^2 - x + 2$

c) $f(x) = -5x^2 + 4x - 7$

e) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 6\sqrt{x}$

g) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$

h) $f(x) = \frac{1}{4x + 7}$

i) $f(x) = \frac{1}{(1 - 2x)^3}$

j) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

k) $f(x) = x^2 - \frac{x + 1}{x}$

l) $f(x) = (3x + 1)^5$

Proposition de solution

a) $f'(x) = 2$

(car la dérivée de $2x$ est 2 et la dérivée de 3 est 0)

b) $f'(x) = -2x$

(car la dérivée de 1 est 0 et la dérivée de x^2 est $2x$)

$$\begin{aligned}
 c) f'(x) &= 3 \times 2x - 1 \\
 &= 6x - 1
 \end{aligned}$$

(car la dérivée de x^2 est $2x$, la dérivée de $-x$ est -1 et la dérivée de 2 est 0)

d) $f'(x) = -10x + 4$

e) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(car la dérivée de 2 est 0 et la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$)

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= 6(\sqrt{x})' \\ &= 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } f'(x) &= \frac{(2x-1)'(x+3) - (x+3)'(2x-1)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2(x+3) - 1 \times (2x-1)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x+6 - 2x+1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{7}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2x-1}{x+3} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2 \times 3) - (1 \times (-1))}{(x+3)^2} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{6 - (-1)}{(x+3)^2} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{6+1}{(x+3)^2} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } f'(x) &= \frac{-(4x+7)'}{(4x+7)^2} \\ &= \frac{-4}{(4x+7)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } f'(x) &= \frac{-3(1-2x)'}{(1-2x)^{3+1}} \\ &= \frac{-3 \times (-2)}{(1-2x)^4} \\ &= \frac{\mathbf{6}}{(1-2x)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } f'(x) &= \frac{(2x-5)'}{2\sqrt{2x-5}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2x-5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } f'(x) &= 2x - \frac{1 \times 0 - 1 \times 1}{x^2} \\ &= 2x - \frac{-1}{x^2} \\ &= \mathbf{2x + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } f'(x) &= 5 \times (3x+1)' \times (3x+1)^{5-1} \\ &= 5 \times 3 \times (3x+1)^4 \\ &= \mathbf{15(3x+1)^4} \end{aligned}$$

2- Utilisation de la dérivée d'une fonction

a) Sens de variation d'une fonction

Pour déterminer les variations d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$, il suffit de connaître le signe de la dérivée f' sur cet intervalle .

- * Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f'(x) > 0$ (f' est strictement positive sur $[a ; b]$)
alors f est strictement croissante sur $[a ; b]$
- * Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f'(x) < 0$ (f' est strictement négative sur $[a ; b]$)
alors f est strictement décroissante sur $[a ; b]$
- * Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f'(x) = 0$ (f' est nulle sur $[a ; b]$)
alors f est constante sur $[a ; b]$

Attention

On peut donner *le signe de la dérivée* d'une fonction sur la réunion de deux ou plusieurs intervalles par contre *le sens de variation* est donné sur un intervalle.

Exemple

- Signe de la dérivée suivant les valeurs de x

$$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[, f'(x) > 0$$

- Sens de variation

On ne dit pas : f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

Mais on dit plutôt

f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]2 ; +\infty[$

b) Equation de la tangente en un point a

Pour déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse a , il faut d'abord calculer $f(a)$ et $f'(a)$, puis utiliser la formule suivante :

$$(T) : y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Exercice résolu

Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2 à la courbe (C_f) de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x + 3$.

Proposition de solution

Calculons d'abord $f(2)$ et $f'(2)$

- Calculons $f(2)$

$$f(2) = 2^2 - 2 + 3 = 5$$

- Calculons $f'(2)$

Pour déterminer $f'(2)$, il faut utiliser la dérivée de la fonction f

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$

$$\text{donc } f'(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

Une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$$

Par conséquent

$$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2) \quad \Rightarrow \quad y = 3 \times (x - 2) + 5$$

$$\Rightarrow y = 3x - 6 + 5$$

$$\Rightarrow y = 3x - 1$$

On conclut donc qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2 est : (T) : $y = 3x - 1$

c) Tangente horizontale

La courbe (C_f) admet une *tangente horizontale* au point a si $f'(a) = 0$

De plus l'équation de cette tangente est : $y = f(a)$

d) Extremum relatif d'une fonction**(1) Définition**

On dit qu'une fonction f admet un *extremum* en un point x_0 si en ce point la dérivée f' de la fonction s'annule en changeant de signe

Il y'a deux types d'extremums : les *minimums* et les *maximums*

(2) Conséquence de la définition

Si une fonction f admet un extremum relatif en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f admet un minimum relatif m en x_0

Exercice résolu

- 1- Démontrer que : $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$
- 2- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$
 - a) Calculer la dérivée f' de f
 - b) Etudier les variations de f
 - c) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
 - d) Dresser le tableau de variation de f
 - e) Déterminer les extremums relatifs de f

Proposition de solution

- 1- Démontrons que : $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

$$\begin{aligned}(x + 3)(x - 2) &= x^2 - 2x + 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 6\end{aligned}$$

On conclut donc que : $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

- 2- a) Calculons la dérivée f' de f

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{1}{3} \times (3x^2) + \frac{1}{2} \times (2x) - 6 \\ &= x^2 + x - 6\end{aligned}$$

- b) Etudions les variations de f

Pour étudier les variations d'une fonction, il faut connaître le signe de sa dérivée suivant les valeurs de x

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

Tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	0	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$

On conclut que :

- Pour tout $x \in]-\infty ; -3 [\cup] 2 ; +\infty [$, $f'(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; -3 [$ et sur $] 2 ; +\infty [$
- Pour tout $x \in]-3 ; 2 [$, $f'(x) < 0$
donc f est strictement décroissante sur $] -3 ; 2 [$

c) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

d) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{29}{2}$		$-\frac{19}{3}$	$+\infty$

$-\infty \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$

e) Déterminons les extremums relatifs de f

* En -3 , $f'(x)$ s'annule et change de signe donc f admet un extrémum relatif en -3

(plus précisément c'est un maximum relatif dont la valeur est $\frac{29}{2}$)

* En 2 , $f'(x)$ s'annule et change de signe donc f admet un extrémum relatif en 2

(plus précisément c'est un minimum relatif dont la valeur est $-\frac{19}{3}$)

3- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
Intervalle I	$f(I)$	$f(I)$
$[a ; b]$	$[f(a) ; f(b)]$	$[f(b) ; f(a)]$
$[a ; b [$	$\left[f(a) ; \lim_{x \rightarrow b}^< f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b}^< f(x) ; f(a) \right]$
$] a ; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) ; f(b) \right]$	$\left[f(b) ; \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) \right[$
$] a ; b [$	$\left] \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) ; \lim_{x \rightarrow b}^< f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b}^< f(x) ; \lim_{x \rightarrow a}^> f(x) \right[$

Remarque

Pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone, on peut aussi *utiliser le tableau de variation*

x	$-\infty$	-3		-1		0	1	3		5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$			$-$	$-0,5$	0		$+$	
$f(x)$	2	4	$-\infty$		$+\infty$	3	0	-1	$-0,5$	0	

L'image de l'intervalle $]-\infty; -3]$ par la fonction f est l'intervalle $]2; 4]$

L'image de l'intervalle $]-3; -1[$ par la fonction f est l'intervalle $]-\infty; 4[$

L'image de l'intervalle $[1; 3]$ par la fonction f est l'intervalle $[-1; 0]$

- **Solution de l'équation $f(x) = 0$**

- ✓ **Méthode graphique**

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution lorsque la représentation graphique (C_f) de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un point

De manière générale, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est égale au nombre de fois que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses

- ✓ **Méthode utilisant la variation de la fonction**

Pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans un intervalle $[a; b]$ il suffit de montrer que :

- f est continue et strictement monotone (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante) sur $[a; b]$
- Vérifier que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + 3x - 1$

- Déterminer la dérivée f' de f
- Etudier les variations de f
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$

Proposition de solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 3$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} c) f est strictement croissante sur \mathbb{R} , or $]0; 1[$ est une partie de \mathbb{R} , par conséquent f est strictement croissante sur $]0; 1[$.de plus $f(0) = -1$ et $f(1) = 3$ ($f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires)
donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$.

- **Valeur approchée de α , solution de l'équation $f(x) = 0$**

Lorsqu'on ne peut pas trouver la valeur exacte de α (solution de l'équation $f(x) = 0$), on peut déterminer une valeur approchée de α ou dans certains cas donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs. Pour cela, on dispose d'au moins trois (3) méthodes :

- (1) **la méthode de balayage**
- (2) **la méthode de dichotomie**
- (3) **Alternance de la méthode de balayage et de la méthode de dichotomie**

- **Cas pratique de l'application des différentes méthodes**

Exercice résoluSoit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 - 3x + 2$.

f est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$. Donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 par :

- a) La méthode de balayage
- b) La méthode de dichotomie

Proposition de méthode

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = -2$$

a) Méthode de balayage

1^{ère} étape : encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Signe de $f(x)$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,5 < \alpha < 0,6$

2^{ème} étape : encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2

x	0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
Signe de $f(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,59 < \alpha < 0,60$

Remarque

0,59 est une *valeur approchée par défaut* de α

0,60 est une *valeur approchée par excès* de α

b) Méthode de dichotomie**Remarque**

Cette méthode peut aussi se présenter sous forme de tableau

a	b	$\frac{a+b}{2}$	Signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Encadrement de α

On arrête les calculs lorsque , au $10^{\text{ème}}$ près (c'est-à-dire 2 chiffres après la virgule) ,
 α est encadrer par deux nombres consécutifs

$f(a)$ et $f(b)$ sont toujours de signes contraires ; c'est-à-dire :

Si $f(a)$ est positif alors $f(b)$ est négatif

Si $f(a)$ est négatif alors $f(b)$ est positif

Encadrement de α : $a < \alpha < b$

Pour déterminer le nouvel encadrement de α , on calcule $\frac{a+b}{2}$ puis on

détermine le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

1^{er} cas : $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$

* Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ alors $\frac{a+b}{2}$ remplace le nombre qui a une image positive c'est-à-dire a donc le nouvel encadrement de α est : $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$

* Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ alors $\frac{a+b}{2}$ remplace le nombre qui a une image négative c'est-à-dire b donc le nouvel encadrement de α est : $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$

2^{ème} cas : $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$

* Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ alors $\frac{a+b}{2}$ remplace le nombre qui a une image positive c'est-à-dire b donc le nouvel encadrement de α est : $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$

* Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ alors $\frac{a+b}{2}$ remplace le nombre qui a une image négative c'est-à-dire a donc le nouvel encadrement de α est : $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$

Dans l'exercice proposé $a = 0$ et $b = 1$

de plus $f(a) = f(0) = 2 > 0$ et $f(b) = f(1) = -2 < 0$

a	b	$\frac{a+b}{2}$	Signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Encadrement de α
0	1	0,5	+	$0,5 < \alpha < 1$
0,5	1	0,75	-	$0,5 < \alpha < 0,75$
0,5	0,75	0,62	-	$0,5 < \alpha < 0,62$
0,5	0,62	0,56	+	$0,56 < \alpha < 0,62$
0,56	0,62	0,59	+	$0,59 < \alpha < 0,62$
0,59	0,62	0,60	-	$0,59 < \alpha < 0,60$

On déduit du tableau ci-dessus que : **$0,59 < \alpha < 0,60$**

Attention : Eviter de faire de grands calculs, on peut prendre une partie des nombres décimaux, c'est-à-dire pour 0,5625 on peut prendre 0,56

Chapitre 2 :

PROBABILITES

I - DENOMBREMENTS

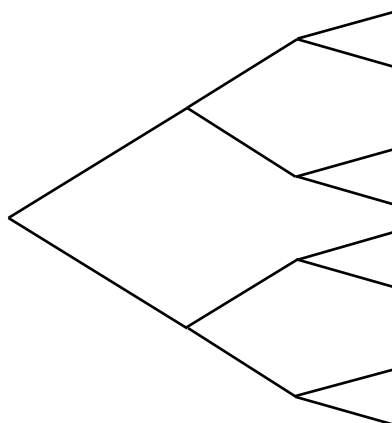
On ne peut pas parler de probabilités sans parler de dénombrements ; car les dénombrements sont la base des probabilités.

Pour dénombrer (compter) on peut utiliser :

(1) Le comptage

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; ...

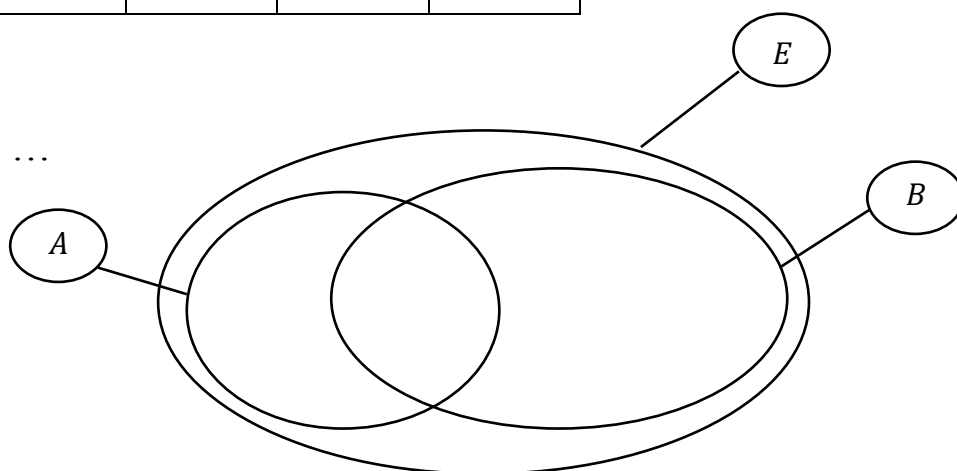
(2) Un arbre de choix



(3) Un tableau (tableau à double entrée, ...)

	1	2	3	4	...
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$	$(a;4)$...
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$	$(b;4)$...
...

(4) Un diagramme ...



(5) Les nombres A_n^p , $n!$, C_n^p et n^p

n et p sont deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$

- A_n^p (*Arrangement de p dans n*)

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs décroissants commençant par } n}$$

p facteurs décroissants commençant par n

Exemple

A_5^2 se lit arrangement de 2 dans 5

$$A_5^2 = 5 \times 4 \quad (2 \text{ facteurs décroissants commençant par } 5)$$

A_9^4 se lit arrangement de 4 dans 9

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \quad (4 \text{ facteurs décroissants commençant par } 9)$$

A_n^3 se lit arrangement de 3 dans n

$$A_n^3 = n \times (n-1) \times (n-2) \quad (3 \text{ facteurs décroissants commençant par } n)$$

- $n!$ (*Factoriel n*)

$$n! = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}_{n \text{ facteurs décroissants commençant par } n}$$

n facteurs décroissants commençant par n

Exemple

$3!$ se lit factoriel 3 ; $3! = 3 \times 2 \times 1$

$5!$ se lit factoriel 5 ; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Remarque :

Expression factoriel de A_n^p :
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- C_n^p (*Combinaison de p dans n*)

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{autrement dit} \quad C_n^p = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

C_6^2 se lit combinaison de 2 dans 6

$$C_6^2 = \frac{A_6^2}{2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

C_5^3 se lit combinaison de 3 dans 5

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{60}{6} = 10$$

Propriété

(1) Par convention pour tout nombre entier naturel n non nul ; on a

$$C_n^0 = 1 \quad , \quad C_n^1 = n \quad \text{et} \quad C_n^n = 1$$

(2) Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $1 \leq p \leq n - 1$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad \text{et} \quad C_n^p = C_n^{n-p}$$

Exemple

$$(1) \quad C_4^0 = 1 \quad , \quad C_4^1 = 4 \quad \text{et} \quad C_4^4 = 1$$

$$C_7^0 = 1 \quad , \quad C_7^1 = 7 \quad \text{et} \quad C_7^7 = 1$$

$$(2) \quad C_6^4 = C_6^{6-4} = C_6^2 \quad , \quad C_8^5 = C_8^{8-5} = C_8^3$$

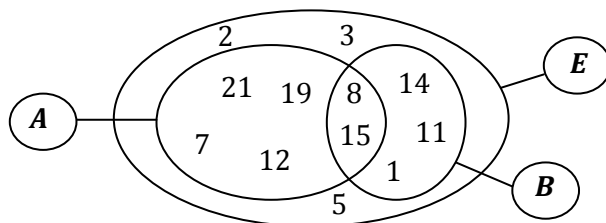
a) Triangle de Pascal

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	C_0^0										
1	C_1^0	C_1^1									
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2								
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3							
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4						
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5					
6	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6				
7	C_7^0	C_7^1	C_7^2	C_7^3	C_7^4	C_7^5	C_7^6	C_7^7			
8	C_8^0	C_8^1	C_8^2	C_8^3	C_8^4	C_8^5	C_8^6	C_8^7	C_8^8		
9	C_9^0	C_9^1	C_9^2	C_9^3	C_9^4	C_9^5	C_9^6	C_9^7	C_9^8	C_9^9	
10	C_{10}^0	C_{10}^1	C_{10}^2	C_{10}^3	C_{10}^4	C_{10}^5	C_{10}^6	C_{10}^7	C_{10}^8	C_{10}^9	C_{10}^{10}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	230	252	230	120	45	10	1

b) Différentes parties d'un ensemble fini

Soit A et B deux parties non vides d'un ensemble fini E



<i>Ensembles</i>	<i>Présentations</i>	<i>Eléments de l'ensemble</i>
E		1 , 2 , 3 , 5 , 7 , 8 , 11 , 12 , 14 , 15 , 19 , 21
$A \cap B$ A inter B		8 , 15
$A \setminus B$ A privé B		7 , 12 , 19 , 21
$B \setminus A$ B privé A		1 , 11 , 14
$A \cup B$ A union B		1 , 7 , 8 , 11 , 12 , 14 , 15 , 19 , 21

c) Outils de dénombrement

De manière générale les exercices de dénombrements peuvent être assimilés à deux types de tirages :

les *tirages simultanés* et les *tirages successifs*

Soit p et n deux nombres entiers naturels tels que : $1 \leq p \leq n$

On tire p éléments dans un ensemble de n éléments. Pour les différentes formules on peut s'aider du schéma ci-dessous

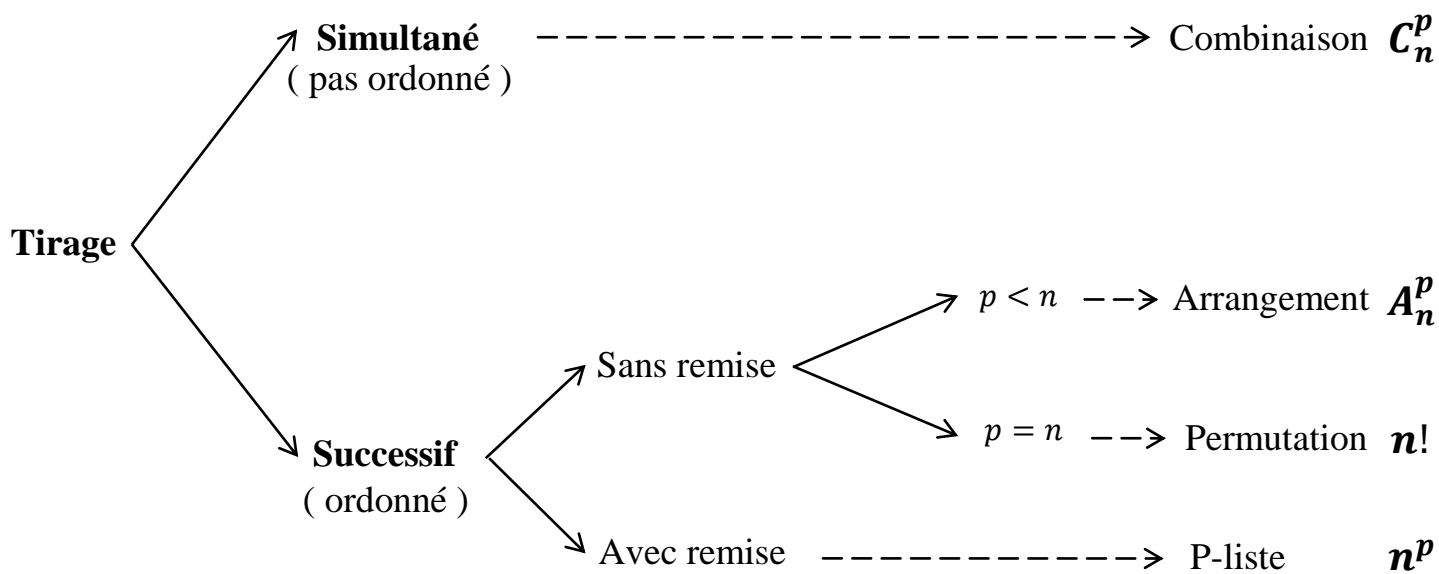


Tableau récapitulatif

n et p sont deux entiers naturels tels que : $0 \leq p \leq n$.

On considère un tirage de p éléments dans un ensemble qui contient n éléments.

Tirages		Ordre	Répétition des éléments	Formules
Simultanés		Les éléments du tirage ne sont pas ordonnés	Chaque élément est tiré une seule fois	Combinaison C_n^p
Successifs	sans remise	Les éléments du tirage sont ordonnés	Chaque élément est tiré une seule fois	Si $p < n$ Arrangement A_n^p Si $p = n$ Permutation $n!$
	avec remise	Les éléments du tirage sont ordonnés	Chaque élément peut être tiré plusieurs fois	P-uplet (ou P-listes) n^p

Astuce

(1) En dénombrements :

le mot « *et* » conduit à une **multiplication**

le mot « *ou* » conduit à une **addition**

(2) Tirer au moins une boule blanche

- Dans un tirage de 3 boules, **tirer au moins une boule** blanche signifie que parmi les boules tirées il peut y avoir : soit **1** boule blanche , soit **2** boules blanches , soit **3** boules blanches
- Lorsqu'on demande de déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche, on peut faire simplement le calcul suivant :
le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche est égale à la différence du cardinal de l'Univers et du nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches

au moins une boule

on commence par une boule et on augmente : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...

(3) Tirer au plus une boule blanche

Tirer au plus une boule blanche signifie que parmi les boules tirées il peut y avoir : soit **0** boule blanche , soit **1** boule blanche

au plus une boule : on commence par une boule et on diminue : 1 ; 0

Exercice résolu

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire.

On tire simultanément 3 boules de l'urne

- Déterminer le nombre de tirages possibles
- Déterminer le nombre de tirages contenant des boules de même couleur
- Déterminer le nombre de tirages contenant des boules de couleur différente
- Déterminer le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches
- Déterminer le nombre de tirages contenant **au moins** une boule blanche
- Déterminer le nombre de tirages contenant **au plus** une boule blanche

Proposition de solution

Tirage simultané \Rightarrow Combinaison

a) Déterminons le nombre de tirage possible

On tire 3 boules dans une urne qui contient 10 boules (C_{10}^3).

Le nombre de tirages possibles est : $C_{10}^3 = 120$

b) Déterminons le nombre de tirages contenant des boules de même couleur

Les 3 boules tirées étant de même couleur alors elles sont : blanches ou rouges

Remarque

On ne peut pas tirer 3 boules noires car il n'y a qu'une seule boule noire

On tire donc 3 boules blanches parmi les 4 boules blanches (C_4^3) **ou** 3 boules rouges parmi les 5 boules rouges (C_5^3)

Le nombre de tirages contenant des boules de même couleur est :

$$C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$$

c) Déterminons le nombre de tirages contenant des boules de couleurs différentes

Les 3 boules tirées étant de couleurs différentes alors le tirage est composé de :

1 boule blanche et 1 boule rouge et 1 boule noire

On tire donc 1 boule blanche parmi les 4 boules blanches (C_4^1)

et 1 boule rouge parmi les 5 boules rouges (C_5^1)

et 1 boule noire (il n'y a qu'une boule noire) (C_1^1)

Le nombre de tirages contenant des boules de couleurs différentes est :

$$C_4^1 \times C_5^1 \times C_1^1 = 4 \times 5 \times 1 = 20$$

d) Déterminons le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches

Dans l'urne il y'a 6 boules (5 boules rouges et 1 boule noire) qui ne sont pas blanches.

On tire donc 3 boules parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^3)

Le nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches est :

$$C_6^3 = 20$$

e) Déterminons le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche

Dire qu'il y'a **au moins une** boule blanche dans les boules tirées signifie que le minimum de boules blanches dans le tirage est 1

Par conséquent parmi les 3 boules tirées il peut y avoir 1 boule blanche ou 2 boules blanches ou 3 boules blanches

Remarque

On a 4 boules blanches et 6 boules qui ne sont pas blanches

On tire donc

1^{er} cas : 1 boule blanche parmi les 4 boules blanches (C_4^1) **et** 2 boules parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^2) ($C_4^1 \times C_6^2$)

ou

2^{ème} cas : 2 boules blanches parmi les 4 boules blanches (C_4^2) **et** 1 boule parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^1) ($C_4^2 \times C_6^1$)

ou

3^{ème} cas : 3 boules blanches parmi les 4 boules blanches (C_4^3) **et** 0 boule parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^0) ($C_4^3 \times C_6^0$)

Le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche est :

$$\begin{aligned} C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3 \times C_6^0 &= 4 \times 15 + 6 \times 6 + 4 \times 1 \\ &= 60 + 36 + 4 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Autre méthode

Lorsqu'on tire 3 boules de l'urne, on peut avoir :

0 boule blanche et 3 boules qui ne sont pas blanches

1 boule blanche et 2 boules qui ne sont pas blanches

2 boules blanches et 1 boule qui n'est pas blanche

3 boules blanches et 0 boule qui n'est pas blanche

Or avoir **au moins une boule** blanche dans les boules tirées signifie que **le minimum** de boules blanches dans le tirage est 1 ,

par conséquent le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche est égale à la différence du nombre de tirages possibles (C_{10}^3) et du nombre de tirages ne contenant pas de boules blanches (C_6^3)

$$C_{10}^3 - C_6^3 = 120 - 20 = 100$$

f) Déterminons le nombre de tirages contenant au plus une boule blanche

Dire qu'il y'a **au plus une boule** blanche dans les boules tirées signifie que **le maximum** de boules blanches dans le tirage est 1

Par conséquent parmi les 3 boules tirées il peut y avoir 0 boule blanche ou 1 boule blanche

On tire donc

1^{er} cas : 0 boule blanche parmi les 4 boules blanches (C_4^0) **et** 3 boules parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^3) ($C_4^0 \times C_6^3$)

ou

2^{ème} cas : 1 boule blanche parmi les 4 boules blanches (C_4^1) **et** 2 boules parmi les 6 boules qui ne sont pas blanches (C_6^2) ($C_4^1 \times C_6^2$)

Le nombre de tirages contenant au plus une boule blanche est :

$$\begin{aligned} C_4^0 \times C_6^3 + C_4^1 \times C_6^2 &= 1 \times 20 + 4 \times 15 \\ &= 20 + 60 \\ &= 80 \end{aligned}$$

II - PROBABILITES

On ne peut faire des exercices de probabilités sans maîtriser le vocabulaire des probabilités : éventualité , univers , événement , ...

a) Vocabulaire

- **Expérience aléatoire**

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ignore d'avance les résultats

- **Eventualité**

Une **éventualité** est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

- **Univers**

L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers** des éventualités.

On le note souvent Ω ou \mathcal{U} .

- **Evénements**

Toute partie vide ou non de l'univers est appelée **événement**.

Il est généralement noté par une lettre majuscule : A , B , C ...

- **Evénement élémentaire**

C'est un événement qui contient une seule éventualité.

- **Evénement impossible**

C'est un événement qui ne contient aucune éventualité de l'univers

- **Evénement certain**

C'est un événement qui contient tous les éventualités de l'univers. C'est l'univers

- **Evénement contraire**

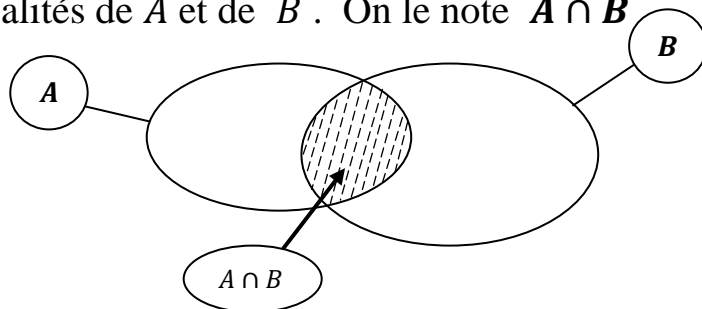
L'événement contraire d'un événement A est l'événement qui contient les éventualités qui sont dans l'univers sans être dans A . On le note \bar{A}

- **Evénements équiprobables**

Deux événements A et B sont équiprobables lorsqu'ils ont la chance d'être réalisés

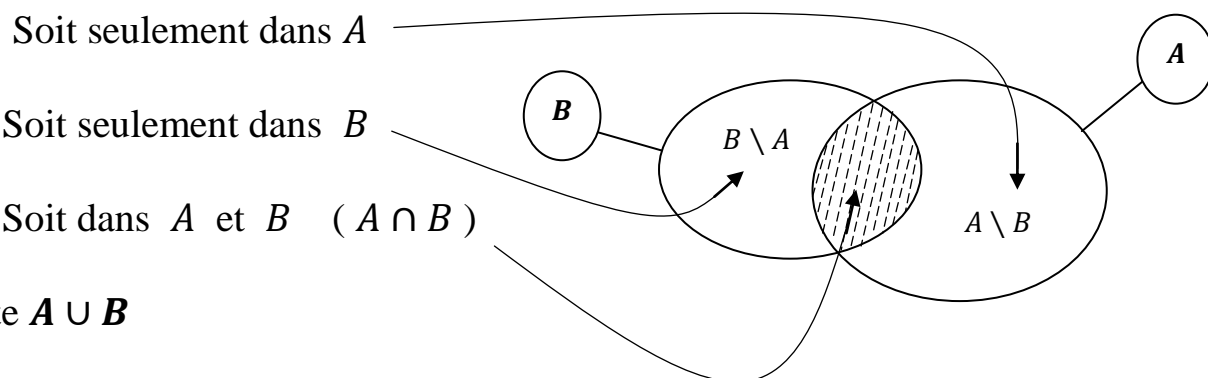
- Intersection de deux événements

L'intersection de deux événements A et B est l'événement qui contient les éventualités de A et de B . On le note $A \cap B$



- Réunion de deux événements

La réunion de deux événements A et B est l'événement qui contient les éventualités qui sont :



On le note $A \cup B$

Remarque

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(A \cap B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cup B)$$

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card} A - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card} B - \text{Card}(A \cap B)$$

- Événements incompatibles

Deux événements A et B sont **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser concomitamment ; d'où $A \cap B = \emptyset$ (l'ensemble vide)

• Cardinal d'un événement

On appelle cardinal d'un ensemble le nombre d'éléments de cet ensemble.

En particulier, on appelle cardinal d'un événement A est le nombre de cas favorables à cette événement ; il se note $\text{card}(A)$

b) Probabilité d'un événement

(1) Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire

On parle de probabilité lorsqu'à toute éventualité de Ω (ou à tout événement) on associe un nombre réel P compris entre 0 et 1 ($0 \leq P \leq 1$).

La probabilité P vérifie les conditions suivantes :

i- Pour toute partie A de Ω (tout événement), on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
La probabilité de tout événement est comprise entre 0 et 1

ii- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

La probabilité de l'*univers* est égale 1

La probabilité de l'*événement impossible* est égale 0

iii- Si $A = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$ alors $P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\})$

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent cet événement

(2) Probabilité d'événements particuliers

Événement impossible $A \Rightarrow P(A) = 0$

Événement certain $A \Rightarrow P(A) = 1$

Événement contraire de A noté $\bar{A} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Réunion de deux événements A et $B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deux événements incompatibles A et $B \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$

Remarque $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

(3) Probabilité d'un événement dans un cas d'équiprobabilité**▪ Equiprobabilité**

On parle d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (c'est-à-dire que tous les événements élémentaires ont la même chance d'être réalisés) .

Remarque

En classe de Terminale A , les exercices de probabilités portent sur les cas d'équiprobabilité.

▪ Calcul de probabilité d'un événement dans un cas d'équiprobabilité

Pour calculer la probabilité d'un événement , on calcule d'abord le cardinal de l'univers (le nombre de cas possibles) , puis la cardinal de l'événement A (le nombre de cas favorables à l'événement A)
La probabilité de l'événement A est définie par :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorable à } A}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Attention :

La *probabilité* P de tout évènement est *un nombre positif inférieur ou égal à 1*
En d'autres termes : $0 \leq P \leq 1$

Cas particulier du tirage d'un seul élément

Lorsqu'on tire un seul élément ;
pour le calcul des probabilités on peut ne pas utiliser les formules usuelles (Combinaison , Arrangement , Permutation , p-uplet) mais faire simplement : « le nombre d'éléments favorables divisé par le nombre total d'éléments »

Exercice résolu

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires ; toutes indiscernables au toucher .On tire une boule de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « Tirer 1 boule rouge »
- b) B : « Tirer 1 boule noire »

Proposition de solution

a) Calculons la probabilité de l'événement A

On a 5 boules rouges (nombre d'éléments favorables) et 8 boules dans l'urne (nombre total d'éléments)

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

b) Calculons la probabilité de l'événement B

On a 3 boules noires (nombre d'éléments favorables) et 8 boules dans l'urne (nombre total d'éléments)

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

Exercice résolu

Dans une classe de Terminale A du Lycée moderne d'Agnibilékrou, les élèves sont repartis dans un tableau suivant leur moyenne la plus élevée parmi les matières suivantes : Français , Histoire-Géographie et Philosophie.

	Français	Hist-Géo	Philosophie	Total
Garçons	9	13	5	27
Filles	20	8	15	43
Total	29	21	20	

1) Donner l'effectif de cette classe

2) On choisit un élève au hasard ; calculer la probabilité des événements suivants :

a- A : « l'élève est une fille »

b- B : « l'élève est un garçon dont la moyenne la plus élevée a été obtenu en Philosophie »

c- C : « la moyenne la plus élevée de l'élève a été obtenu en philosophie ou en Français »

Proposition de solution

1) L'effectif de la classe est 70

2) a- Il y'a 43 filles sur les 70 élèves ; donc $P(A) = \frac{43}{70}$

b- Il y'a 5 garçons dont la moyenne la plus élevée a été obtenue en Philosophie ;

$$\text{donc } P(B) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

c- Il y'a 49 (29 + 20) élèves dont la moyenne la plus élevée a été obtenue

$$\text{en philosophie ou en Français ; donc } P(C) = \frac{49}{70} = \frac{7}{10}$$

Exercice résolu

Dans un Lycée de la Côte d'Ivoire, le club de musique comprend 526 membres dont :

- 330 aiment le piano,
- 215 aiment la flûte,
- 100 aiment le piano et la flûte

1- a) Combien d'élèves aiment seulement le piano ?

b) Combien d'élèves aiment seulement la flûte ?

2- Combien d'élèves du club de musique n'aiment ni le piano ni la flûte ?

Proposition de solution

Soit P : « l'ensemble des élèves qui aiment le piano »

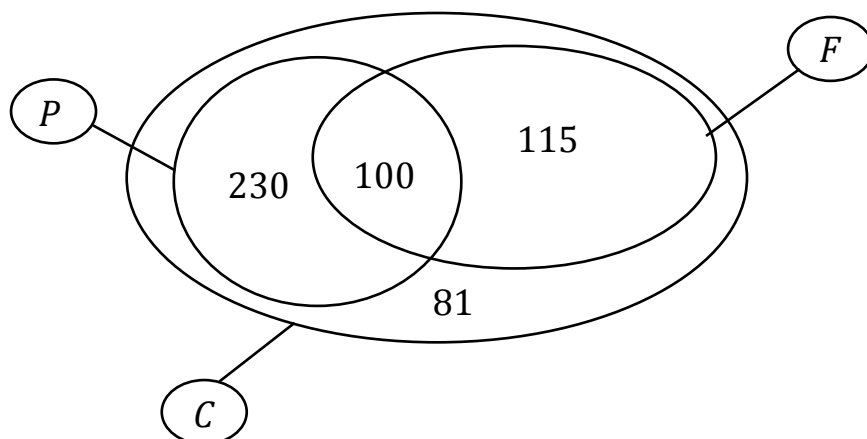
F : « l'ensemble des élèves qui aiment la flûte »

$P \cup F$: « l'ensemble des élèves qui aiment le piano ou la flûte »

C : « l'ensemble des élèves du club de musique »

On sait que : $\text{Card } C = 526$; $\text{Card } P = 330$; $\text{Card } F = 215$; $\text{Card } (P \cap F) = 100$

Illustration à l'aide d'un diagramme



1- a) Déterminons le nombre d'élèves qui aiment seulement le piano

$$\begin{aligned} \text{Card}(P \setminus F) &= \text{Card } P - \text{Card}(P \cap F) \\ &= 330 - 100 \\ &= 230 \end{aligned}$$

b) Déterminons le nombre d'élèves qui aiment seulement la flûte

$$\begin{aligned} \text{Card}(F \setminus P) &= \text{Card } F - \text{Card}(P \cap F) \\ &= 215 - 100 \\ &= 115 \end{aligned}$$

2- Déterminons le nombre d'élèves du club de musique n'aiment ni le piano ni la flûte

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{P \cup F}) &= \text{Card } C - \text{Card}(P \cup F) \\ &= \text{Card } C - [\text{Card } P + \text{Card } F - \text{Card}(P \cap F)] \\ &= 526 - [330 + 215 - 100] \\ &= 81 \end{aligned}$$

Exercice résolu

Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

(Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles)

- 1- Déterminer le nombre de tirages possibles
- 2- Calculer la probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur
- 3- Calculer la probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps
- 4- Calculer la probabilité d'avoir au moins une boule verte

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire

Tirage simultané \Rightarrow Combinaison

1- Déterminons le nombre de tirages possibles

On tire simultanément 3 boules dans un ensemble de 6 boules

$$C_6^3 = 20$$

Remarque

Le nombre de de tirages possibles correspond au cardinal de l'univers ($\text{Card } \Omega$)

- 2- Déterminons la probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur
On ne peut avoir que 3 boules jaunes car il n'y a qu'une boule rouge et 2 boules vertes.

Soit A : « avoir exactement trois boules de même couleur »

$$\text{Card } A = C_3^3 = 1$$

La probabilité d'avoir exactement trois boules de même couleur est :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{20}$$

- 3- Déterminons la probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps
Avoir les trois couleurs en même temps signifie qu'on a tiré une boule de chaque couleur.
On tire une boule jaune parmi 3 (C_3^1), une boule rouge parmi 1 (C_1^1) et une boule verte parmi 2 (C_2^1)

Soit B : « avoir les trois couleurs en même temps »

$$\begin{aligned} \text{Card } B &= C_3^1 \times C_1^1 \times C_2^1 \\ &= 3 \times 1 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir les trois couleurs en même temps est :

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

- 4- Déterminons la probabilité d'avoir au moins une boule verte

Avoir au moins une boule verte signifie que :

(1) Soit on a une boule verte et deux boules qui ne sont pas vertes

(2) Ou soit on a deux boules vertes et une boule qui n'est pas verte

Pour (1), on tire une boule verte parmi 2 (C_2^1) et deux boules qui ne sont pas vertes parmi 4 (C_4^2)

Pour (2), on tire deux boules vertes parmi 2 (C_2^2) et une boule qui n'est pas verte parmi 4 (C_4^1)

Soit C : « avoir au moins une boule verte »

$$\begin{aligned} \text{Card } C &= C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 \\ &= 2 \times 6 + 1 \times 4 \\ &= 12 + 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir au moins une boule verte est :

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Exercice résolu

Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules blanches et 2 boules noires. Elles sont toutes indiscernables au toucher. Marlène tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

- 1- Justifier que le nombre de tirages possibles est 1320
- 2- Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) A : « tirer 3 boules rouges »
 - b) B : « tirer 3 boules de même couleur »
 - c) C : « tirer une boule rouge, une boule blanche et une boule noire dans cet ordre »
 - d) D : « tirer 3 boules de couleur différente »

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire

Tirage successif sans remise \Rightarrow Arrangement

- 1- Justifions que le nombre de tirages possibles est 1320

On tire successivement et sans remise 3 boules dans un ensemble de 12 boules

$$A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

Remarque

Le nombre de tirages possibles est égal au cardinal de l'univers (Card Ω)

- 2- a) Calculons la probabilité de tirer 3 boules rouges

On tire 3 boules rouges parmi 6 (A_6^3) donc :

$$\text{Card } A = A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$$

- b) Calculons la probabilité de tirer 3 boules de même couleur

On peut tirer 3 boules rouges parmi 6 (A_6^3) ou 3 boules blanches parmi 4 (A_4^3) mais on ne peut pas tirer 3 boules puisqu'il n'y a que 2

$$\text{Card } B = A_6^3 + A_4^3 = 120 + 24 = 144$$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{144}{1320} = \frac{6}{55}$$

- c) Calculons la probabilité de tirer une boule rouge, une boule blanche et une boule noire dans cet ordre .

On tire une boule rouge parmi 6 (A_6^1) et une boule blanche parmi 4 (A_4^1) et une boule noire parmi 2 (A_2^1)

$$\text{Card } C = A_6^1 \times A_4^1 \times A_2^1 = 6 \times 4 \times 2 = 48$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{48}{1320} = \frac{2}{55}$$

- d) Calculons la probabilité de tirer 3 boules de couleur différente

Tirer 3 boules de couleur différente c'est aussi tirer une boule de chaque couleur mais en tenant compte de l'ordre (Arrangement)

On peut tirer rouge – blanche – noire (48 cas possibles)

On peut tirer rouge – noire – blanche (48 cas possibles)

On peut tirer blanche – rouge –noire (48 cas possibles)

On peut tirer blanche – noire – rouge (48 cas possibles)

On peut tirer noire – rouge – blanche (48 cas possibles)

On peut tirer noire – blanche – rouge (48 cas possibles)

$$\text{donc Card } D = 6 \times A_6^1 \times A_4^1 \times A_2^1 = 6 \times 48 = 288$$

$$P(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \Omega} = \frac{288}{1320} = \frac{12}{55}$$

Exercice résolu

Un entraîneur de Basket Ball dispose de 4 filles et 6 garçons pour un tournoi mixte organiser par la ville d'Abidjan. Une équipe de 5 joueurs est composée de filles, de garçons ou de filles et de garçons.

1- Montrer que le nombre d'équipes qu'il peut former est 252

2- Calculer la probabilité des événements suivants :

(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)

A : « une équipe composée de garçons uniquement »

B : « une équipe composée d'exactly 3 filles »

C : « une équipe composée d'au moins une fille »

D : « une équipe composée d'au plus une fille »

(**Uniquement A1**)

3- David meilleur joueur au niveau des garçons et Anaëlle meilleur joueuse au niveau des filles doivent faire partie de l'équipe.

Calculer la probabilité de l'évènement E : « avoir exactement 3 filles »

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire

Pour faire partie de l'équipe l'ordre du choix n'est pas important, car choisi 1^{er} ou 2^{ème} ou 5^{ème}, l'essentiel est d'être dans l'équipe.

Comme l'ordre n'intervient pas alors c'est un tirage simultané \Rightarrow Combinaison

1- Montrons que le nombre d'équipes qu'il peut former est 252

On choisit 5 personnes parmi 10

$$C_{10}^5 = 252$$

Remarque

Le nombre d'équipes qu'on peut former est égal au cardinal de l'univers (Card Ω)

2- a) Calculons la probabilité d'une équipe composée de garçons uniquement

On tire 5 garçons parmi 6 (C_6^5)

$$\text{Card } A = C_6^5 = 6$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{252} = \frac{1}{42}$$

b) Calculons la probabilité d'une équipe composée d'exactly 3 filles

Si l'équipe est composée d'exactly 3 filles alors 2 garçons font partie de cette Equipe

On tire 3 filles parmi 4 (C_4^3) et 2 garçons parmi 6 (C_6^2)

$$\text{Card } B = C_4^3 \times C_6^2 = 4 \times 15$$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{60}{252} = \frac{5}{21}$$

c) Calculons la probabilité d'une équipe composée d'au moins une fille

Si l'équipe est composée d'au moins une fille cela signifie qu'on peut avoir dans l'équipe :

1 fille et 4 garçons (on tire 1 fille parmi 4 (C_4^1) et 4 garçons parmi 6 (C_6^4))

2 filles et 3 garçons (on tire 2 filles parmi 4 (C_4^2) et 3 garçons parmi 6 (C_6^3))

3 filles et 2 garçons (on tire 3 filles parmi 4 (C_4^3) et 2 garçons parmi 6 (C_6^2))

4 filles et 1 garçon (on tire 4 filles parmi 4 (C_4^4) et 1 garçon parmi 6 (C_6^1))

$$\begin{aligned} \text{Card } C &= C_4^1 \times C_6^4 + C_4^2 \times C_6^3 + C_4^3 \times C_6^2 + C_4^4 \times C_6^1 \\ &= 4 \times 15 + 6 \times 20 + 4 \times 15 + 1 \times 6 \\ &= 60 + 120 + 60 + 6 \\ &= 246 \end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{246}{252} = \frac{41}{42}$$

d) Calculons la probabilité d'une équipe composée d'au plus une fille

Si l'équipe est composée d'au moins une fille cela signifie qu'on peut avoir dans l'équipe :

0 fille et 5 garçons (on tire 0 fille parmi 4 (C_4^0) et 5 garçons parmi 6 (C_6^5))

1 fille et 4 garçons (on tire 1 fille parmi 4 (C_4^1) et 4 garçons parmi 6 (C_6^4))

$$\begin{aligned} \text{Card } D &= C_4^0 \times C_6^5 + C_4^1 \times C_6^4 \\ &= 1 \times 6 + 4 \times 15 \\ &= 6 + 60 \\ &= 66 \end{aligned}$$

$$P(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \Omega} = \frac{66}{252} = \frac{11}{42}$$

3- David et Anaëlle doivent faire partie de l'équipe et cette même équipe doit avoir exactement 3 filles.

Anaëlle étant une fille, il faut donc choisir 2 filles parmi les 3 qui restent (C_3^2), pour avoir exactement 3 filles dans l'équipe

Si on a exactement 3 filles dans l'équipe, c'est qu'on a exactement 2 garçons et David est déjà choisi, il faut donc choisir 1 garçon parmi les 5 qui restent (C_5^1)

$$\begin{aligned} \text{Card } E &= C_3^2 \times C_5^1 \\ &= 3 \times 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{\text{Card } E}{\text{Card } \Omega} = \frac{15}{252} = \frac{5}{84}$$

Exercice résolu

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

Une boîte contient 12 gâteaux emballés séparément dans 12 paquets identiques. 5 de ces gâteaux sont parfumés à la vanille, 4 autres au chocolat et les 3 derniers à la banane.

Partie A

Nathanaël choisit simultanément 3 gâteaux.

- 1- Combien a-t-il de choix possibles ?
- 2- Quelle est la probabilité qu'il ait choisi :
 - a) Un gâteau de chaque sorte ?
 - b) 3 gâteaux identiques ?
 - c) Exactement 2 variétés de gâteaux ?

Partie B (uniquement A1)

Si Nathanaël mangeait un gâteau le matin, un gâteau à midi et un gâteau le soir :

- 1- Combien aurait-il eu de choix possibles ?
- 2- Quelle aurait été la probabilité de prendre :
 - a) Un gâteau à la vanille le matin, un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir ?
 - b) Un gâteau de chaque sorte ?
 - c) Deux gâteaux à la banane et un au chocolat ?

Proposition de solution**Partie A**

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire

Choix simultané \Rightarrow Tirage simultané \Rightarrow Combinaison

1- Déterminons le nombre de choix possibles de Nathanaël

Il tire 3 gâteaux parmi 12

$$C_{12}^3 = 220$$

Remarque

Le nombre de choix possibles est égal au cardinal de l'univers ($\text{Card } \Omega$)

2- a) Soit l'événement A : « Nathanaël choisi un gâteau de chaque sorte »

Déterminons la probabilité de l'événement A

Nathanaël choisi un gâteau de chaque sorte signifie qu'il choisit :

1 gâteau à la vanille parmi 5 (C_5^1) et 1 gâteau au chocolat parmi 4 (C_4^1)

et 1 gâteau à la banane parmi 3 (C_3^1)

$$\begin{aligned} \text{Card } A &= C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

b) Soit l'événement B : « Nathanaël choisi 3 gâteaux identiques »

Déterminons la probabilité de l'événement B

Nathanaël choisi 3 gâteaux identiques signifie qu'il choisit :

3 gâteaux à la vanille parmi 5 (C_5^3) ou 3 gâteaux au chocolat parmi 4 (C_4^3)

ou 3 gâteaux à la banane parmi 3 (C_3^3)

$$\begin{aligned} \text{Card } B &= C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 \\ &= 10 + 4 + 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

c) Soit l'événement C : « Nathanaël choisi exactement 2 variétés de gâteaux »

Déterminons la probabilité de l'événement C

L'événement C est l'événement contraire de l'événement $A \cap B$

Autrement dit si on enlève, dans le nombre de choix possibles de Nathanaël, le cas des gâteaux de chaque sorte et le cas des gâteaux identiques il restera le cas dans lequel on a exactement 2 variétés de gâteaux.

$$\text{Card } C = \text{Card } \Omega - (\text{Card } A + \text{Card } B)$$

$$= 220 - (60 + 15)$$

$$= 145$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

Remarque (autre méthode)

Nathanaël choisi exactement 2 variétés de gâteaux signifie qu'il choisit :

2 gâteaux à la vanille parmi 5 (C_5^2) et 1 gâteau au chocolat parmi 4 (C_4^1)

ou 2 gâteaux à la vanille parmi 5 (C_5^2) et 1 gâteau à la banane parmi 3 (C_3^1)

ou 2 gâteaux au chocolat parmi 4 (C_4^2) et 1 gâteau à la vanille parmi 5 (C_5^1)

ou 2 gâteaux au chocolat parmi 4 (C_4^2) et 1 gâteau à la banane parmi 3 (C_3^1)

ou 2 gâteaux à la banane parmi 3 (C_3^2) et 1 gâteau à la vanille parmi 5 (C_5^1)

ou 2 gâteaux à la banane parmi 3 (C_3^2) et 1 gâteau au chocolat parmi 4 (C_4^1)

$$\text{Card } C = C_5^2 \times C_4^1 + C_5^2 \times C_3^1 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_4^1$$

$$= 10 \times 4 + 10 \times 3 + 6 \times 5 + 6 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 4$$

$$= 40 + 30 + 30 + 18 + 15 + 12$$

$$= 145$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

Partie B

Soit \mathcal{U} l'univers associé à cette expérience aléatoire

Choix successif et sans remise \Rightarrow Tirage successif et sans remise \Rightarrow Arrangement

1- Déterminons le nombre de choix possibles de Nathanaël

Il tire 3 gâteaux parmi 12

$$A_{12}^3 = 1320$$

2- a) Soit l'événement D : « Nathanaël choisi un gâteau à la vanille le matin, un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir »

Déterminons la probabilité de l'événement D

Nathanaël choisi 1 gâteau à la vanille parmi 5 (A_5^1) le matin et 1 gâteau au chocolat parmi 4 (A_4^1) à midi et 1 gâteau à la banane parmi 3 (A_3^1) le soir

$$\begin{aligned} \text{Card } D &= A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$P(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \mathcal{U}} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$$

b) Soit l'événement E : « Nathanaël choisi un gâteau de chaque sorte »

Matin	Midi	Soir	Cas possibles
Vanille	Chocolat	Banane	$A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 60$
Vanille	Banane	Chocolat	$A_5^1 \times A_3^1 \times A_4^1 = 60$
Chocolat	Vanille	Banane	$A_4^1 \times A_5^1 \times A_3^1 = 60$
Chocolat	Banane	Vanille	$A_4^1 \times A_3^1 \times A_5^1 = 60$
Banane	Vanille	Chocolat	$A_3^1 \times A_5^1 \times A_4^1 = 60$
Banane	Chocolat	Vanille	$A_3^1 \times A_4^1 \times A_5^1 = 60$

Déterminons la probabilité de l'événement E

$$\begin{aligned} \text{Card } E &= 6 \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 \\ &= 6 \times 60 \\ &= 360 \end{aligned}$$

$$P(E) = \frac{\text{Card } E}{\text{Card } \mathcal{U}} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$$

- c) Soit l'événement F : « Nathanaël choisi deux gâteaux à la banane et un au chocolat »

Matin	Midi	Soir	Cas possibles
Banane	Banane	Chocolat	$A_3^2 \times A_4^1 = 24$
Banane	Chocolat	Banane	$A_3^1 \times A_4^1 \times A_2^1 = 24$
Chocolat	Banane	Banane	$A_4^1 \times A_3^2 = 24$

Déterminons la probabilité de l'événement F

$$\begin{aligned} \text{Card } F &= 3 \times 24 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$P(F) = \frac{\text{Card } F}{\text{Card } \mathcal{U}} = \frac{72}{1320} = \frac{3}{55}$$

Exercice résolu

Les codes informatiques de l'entreprise OMEGA sont constitués de trois chiffres distincts suivis d'une lettre de l'alphabet.

Deux exemples de codes sont 245A et 018Q

- 1- a) Démontrer que le nombre de codes possibles est 18720
- b) Déterminer le nombre de codes constitués uniquement de chiffres impairs et terminés par la lettre E
- 2- Après avoir codé son système, le chef du service informatique a oublié une partie de son code. Il se souvient seulement que :
 - la lettre du code est une voyelle ;
 - le code contient un seul chiffre pair
 - aucun des chiffres du code n'est nul
 - a) Démontrer que le nombre de codes conformes aux informations précédentes est 1440
 - b) L'informaticien frappe au hasard trois (3) chiffres non nuls et distincts dont un seul est pair et la lettre A.
Calculer la probabilité que l'informaticien trouve le bon code. (le résultat sera exprimé sous forme de fraction irréductible)

Proposition de solution

1- a) Démontrons que le nombre de codes possibles est 18720

Un nombre de s'écrit chiffre par chiffre \Rightarrow tirage successif (1)

Les trois chiffres sont distincts \Rightarrow tirage sans remise (2)

(1) et (2) \Rightarrow tirage successif sans remise \Rightarrow Arrangement

On tire 3 chiffres parmi 10 (A_{10}^3) et 1 lettre parmi 26 (A_{26}^1)

$$A_{10}^3 \times A_{26}^1 = 720 \times 26 = 18720$$

b) Déterminons le nombre de codes constitués uniquement de chiffres impairs et terminés par la lettre E

Il y a 5 chiffres impairs (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9) et 1 seule lettre E

On tire 3 chiffres parmi 5 (A_5^3) et 1 lettre parmi 1 (A_1^1)

$$A_5^3 \times A_1^1 = 60 \times 1 = 60$$

2- a) Démontrons que le nombre de codes conformes aux informations reçues est 1440

- la lettre du code est une voyelle, or il y a 6 voyelles

- le code contient un seul chiffre pair et aucun des chiffres du code n'est nul : donc le code contient un seul chiffre pair non nul (2 ou 4 ou 6 ou 8) et 2 chiffres impairs (Il y a 5 chiffres impairs qui sont : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9)

On tire 1 chiffre pair non nul parmi 4 (A_4^1) et 2 chiffres impairs parmi 5 (A_5^2) et 1 lettre parmi 6 (A_6^1)

Attention : le résultat est multiplié par 3 car le chiffre impair peut être le 1^{er} chiffre ou le 2^{ème} chiffre ou le 3^{ème} chiffre

$$A_4^1 \times A_5^2 \times A_6^1 \times 3 = 4 \times 20 \times 6 \times 3 = 1440$$

b) "cette question est sensiblement identique à celle de la question 2-a , à la seule différence qu'on a une seule lettre au lieu de 6"

Soit l'événement A : « l'informaticien trouve le bon code »

$$\text{Card } A = A_4^1 \times A_5^2 \times A_1^1 \times 3 = 4 \times 20 \times 1 \times 3 = 240$$

Remarque

Dans la partie 2 de l'exercice , 1440 correspond au cardinal du nouvel univers selon les conditions données.

- (1) la lettre du code est une voyelle ;
- (2) le code contient un seul chiffre pair
- (3) aucun des chiffres du code n'est nul

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{1440} = \frac{240}{1440} = \frac{1}{6}$$

Exercice résolu

Une société fabrique et vend des coffres forts.

Chaque coffre-fort dispose d'un code pour l'ouvrir ; et ce code est composé de 3 chiffres et deux lettres de l'alphabet

Exemple : 255 EF , 012 AB , 906 KK

- 1- Combien de codes peut créer cette société ?
- 2- a) Combien de code sont composés de 3 chiffres distincts
b) Combien de codes sont composés uniquement de chiffres pairs
c) Combien de codes commencent par 5 et se terminent par Z
- 3- Guy possède l'un de ces coffres-forts mais il a oublié le code.

Calculer la probabilité qu'il trouve son code dans les conditions suivantes :

- a) les 3 chiffres sont tous distincts
- b) tous les chiffres du code sont pairs
- c) le code commence par 5 et se termine par Z

Proposition de solution**Remarque**

A travers les exemples proposés, on doit comprendre les chiffres peuvent se répéter (255 EF) et les lettres aussi peuvent se répéter (906 KK)

- 1- Déterminons le nombre de codes que cette société peut créer
Un code s'écrit symbole par symbole \Rightarrow tirage successif (1)
Les symboles se répètent \Rightarrow tirage avec remise (2)

(1) et (2) \Rightarrow tirage successif avec remise \Rightarrow P-uplet (ou P-liste)

On tire 3 chiffres parmi 10 (10^3) et 2 lettres parmi 26 (26^2)

$$10^3 \times 26^2 = 1000 \times 676 = 676000$$

2- a) Déterminons le nombre de codes composées de 3 chiffres distincts

Les chiffres sont distincts \Rightarrow tirage successif sans remise \Rightarrow Arrangement

On tire 3 chiffres parmi 10 (A_{10}^3) et 2 lettres parmi 26 (26^2)

$$A_{10}^3 \times 26^2 = 720 \times 676 = 486720$$

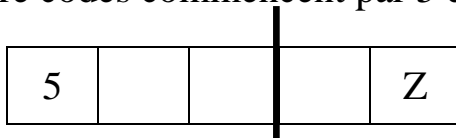
b) Déterminons le nombre de codes composées uniquement de chiffres pairs

Il y a 5 chiffres pairs (0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8)

On tire 3 chiffres parmi 5 (5^3) et 2 lettres parmi 26 (26^2)

$$5^3 \times 26^2 = 125 \times 676 = 84500$$

c) Déterminons le nombre codes commencent par 5 et se terminent par Z



Si le code commence par 5 alors il reste à tirer 2 chiffres parmi 10 (10^2)

Si le code se termine par Z alors il reste à tirer 1 lettre parmi 26 (26^1)

$$10^2 \times 26^1 = 100 \times 26 = 2600$$

3-

Remarque

Le nombre de codes que cette société peut créer est égal au cardinal de l'univers ($\text{Card } \Omega$) (voir question 1)

a) Soit l'événement A : « les 3 chiffres du code sont tous distincts »

$$\text{Card } A = 486720 \quad (\text{ voir question 2-a })$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{486720}{676000} = \frac{18}{25}$$

b) Soit l'événement B : « tous les chiffres du code sont pairs »

$$\text{Card } B = 84500 \quad (\text{ voir question 2-b })$$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{84500}{676000} = \frac{1}{8}$$

c) Soit l'événement C : « le code commence par 5 et se termine par Z »

Card C = 2600 (voir question 2-c)

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{2600}{676000} = \frac{1}{260}$$

Exercice résolu

Soit K l'ensemble des lettres A , B , C , D , E .

3) Un mot est une succession de lettres distinctes ou non de l'ensemble K

Exemple : **AAA** , **ABB** , **BAC** sont des mots de 3 lettres

a) Calculer le nombre de mots de 3 lettres que l'on peut former

b) Calculer le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes.

c) Calculer le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes et terminés par E

4) On tire au hasard et simultanément 3 lettres de l'ensemble K

a) Calculer la probabilité d'avoir une consonne et 2 voyelles

b) Calculer la probabilité d'avoir 2 consonnes et une voyelle

Proposition de solution

Remarque

Un mot s'écrit lettre par lettre \Rightarrow tirage successif (1)

Les exemples montrent que les lettres peuvent se répéter \Rightarrow tirage avec remise (2)

(1) et (2) \Rightarrow tirage successif avec remise \Rightarrow P-uplet (ou P-liste)

1- a) Calculons le nombre de mots de 3 lettres que l'on peut former

L'ensemble K comprend 5 lettres ; on tire 3 lettres parmi 5 (5^3)

$$5^3 = 125$$

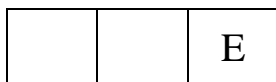
b) Calculons le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes

Si les lettres sont toutes distinctes alors il s'agit d'un tirage successif sans remise c'est-à-dire un **arrangement**

on tire 3 lettres parmi 5 (A_5^3)

$$A_5^3 = 60$$

c) Calculons le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes et terminés par E



Si les mots sont terminés par la lettre E alors il ne reste qu'à tirer 2 lettres parmi 4 (A_4^2)

$$A_4^2 = 12$$

2- Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire

Tirage simultané \Rightarrow Combinaison

On tire 3 lettres parmi 5 (C_5^3)

Le nombre de tirage possible (le cardinal de l'univers) est : $C_5^3 = 10$

a) Soit l'événement A : « avoir une consonne et 2 voyelles »

On dispose de 5 lettres dont 2 voyelles et 3 consonnes

Donc on tire 1 consonne parmi 3 (C_3^1) et 2 voyelles parmi 2 (C_2^2)

$$\text{Card } A = C_3^1 \times C_2^2 = 3 \times 1 = 3$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{10}$$

b) Soit l'événement B : « avoir 2 consonnes et une voyelles »

on tire 2 consonne parmi 3 (C_3^2) et 1 voyelles parmi 2 (C_2^1)

$$\text{Card } B = C_3^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

✿ Uniquement A1

III-VARIABLE ALEATOIRE

a) Définition

Lorsqu'à chaque éventualité(résultat) d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire** .Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X , Y , Z ...

Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont les valeurs prises par une variable aléatoire , alors $(X = x_i)$ est l'événement « **X prend la valeur x_i** » (pour $1 \leq i \leq n$)

Astuce

Pour déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X il faut " bien comprendre " le sens de la première phrase dans laquelle apparaît X

b) Loi de probabilité

Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par la variable aléatoire X on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit **la loi de probabilité de X**

Elle peut se présenter sous forme de tableau à deux (2) lignes

1^{ère} ligne : les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X

2^{ème} ligne : les probabilités respectives des différentes valeurs prises par la variable aléatoire X

x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	P_n

⊛ Il faut toujours vérifier que **la somme des différentes probabilités est égale à 1**
c'est-à-dire $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

Astuce

Si la variable aléatoire X prend la valeur 2 (par exemple) , pour calculer $P(X = 2)$; on peut se poser la question suivante :
« **Quel tirage a-t-on fait pour que $X = 2$?** »

Exercice résolu

Dans un bassin piscicole, Monsieur Chris dispose pour la vente de :

5 machoiron à 500 F l'unité

9 carpes à 300 F l'unité

3 silures à 350 F l'unité

Madame Goly veut lui acheter 2 poissons. Monsieur Chris impose que les poissons soient pêchés au hasard dans le bassin et que la cliente emporte, sans discussion, le colis composé des deux poissons obtenus. Chaque poisson dans le bassin a la même chance d'être pêché.

Soit X la variable aléatoire égale au montant à payer par Madame Goly.

1) Justifier que les valeurs prises par X sont :

600 F ; 650 F ; 700 F ; 800 F ; 850 F ; 1000 F .

2) Déterminer la loi de probabilité de X

Proposition de solution

1) Le montant à payer par Madame Goly est égal à la somme du prix des deux poissons qui composent le colis.

Attention

le colis (Machoiron + Carpe) est le même que le colis (Carpe + Machoiron)

Types de poissons composant le colis	Prix du colis	Valeurs prises par X
Machoiron + Machoiron	500 F + 500 F	1000 F
Machoiron + Carpe	500 F + 300 F	800 F
Machoiron + Silure	500 F + 350 F	850 F
Carpe + Carpe	300 F + 300 F	600 F
Carpe + Silure	300 F + 350 F	650 F
Silure + Silure	350 F + 350 F	700 F

Remarque

Il faut toujours ranger les différentes valeurs de X de manière croissante (de la plus petite valeur à la plus grande valeur)

Les valeurs prises par X sont : 600 F ; 650 F ; 700 F ; 800 F ; 850 F ; 1000F

2) Déterminons la loi de probabilité de X :

Remarque

Pour déterminer la probabilité $P(X = 600)$, c'est-à-dire pour que le montant à payer par Madame Goly soit égal à 600 F ; on peut se poser la question :

" Quel tirage a-t-on fait pour que $X = 600$? "

Réponse : Pour que $X = 600$, il faut que le colis soit composé de deux Carpes.

En d'autres termes, il faut tirer 2 carpes parmi 9

Le choix des deux poissons du colis se fait au hasard (sans ordre) \Rightarrow Combinaison

Déterminons d'abord le nombre de colis possibles (le cardinal de l'univers) :

On tire 2 poissons parmi 17 (C_{17}^2)

$$\text{Card } \Omega = C_{17}^2 = 136$$

* Déterminons $P(X = 600)$

Pour que $X = 600$, il faut que le colis soit composé de deux Carpes

En d'autres termes, il faut tirer 2 carpes parmi 9 (C_9^2)

$$P(X = 600) = \frac{C_9^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{36}{136} = \frac{9}{34}$$

* Déterminons $P(X = 650)$

Pour que $X = 650$, il faut que le colis soit composé d'une Carpe et d'une Silure

En d'autres termes, il faut tirer 1 carpe parmi 9 (C_9^1) et 1 Silure parmi 3 (C_3^1)

$$P(X = 650) = \frac{C_9^1 \times C_3^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{9 \times 3}{136} = \frac{27}{136}$$

* Déterminons $P(X = 700)$

Pour que $X = 700$, il faut que le colis soit composé de deux Silures

En d'autres termes, il faut tirer 2 Silures parmi 3 (C_3^2)

$$P(X = 700) = \frac{C_3^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{136}$$

* Déterminons $P(X = 800)$

Pour que $X = 800$, il faut que le colis soit composé d'un Machoiron et d'une

Carpe . En d'autres termes, il faut tirer 1 Machoiron parmi 5 (C_5^1) et 1 Carpe

parmi 9 (C_9^1)

$$P(X = 800) = \frac{C_5^1 \times C_9^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{5 \times 9}{136} = \frac{45}{136}$$

* Déterminons $P(X = 850)$

Pour que $X = 850$, il faut que le colis soit composé d'un Machoiron et d'une Silure. En d'autres termes, il faut tirer 1 Machoiron parmi 5 (C_5^1) et 1 Silure parmi 3 (C_3^1)

$$P(X = 850) = \frac{C_5^1 \times C_3^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{5 \times 3}{136} = \frac{15}{136}$$

* Déterminons $P(X = 1000)$

Pour que $X = 1000$, il faut que le colis soit composé de deux Machoirons. En d'autres termes, il faut tirer 2 Machoirons parmi 5 (C_5^2)

$$P(X = 1000) = \frac{C_5^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{10}{136} = \frac{5}{68}$$

Loi de probabilité de X

x_i	600	650	700	800	850	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{34}$	$\frac{27}{136}$	$\frac{3}{136}$	$\frac{45}{136}$	$\frac{15}{136}$	$\frac{5}{68}$

Exercice résolu

Ruth possède une tirelire contenant :

3 pièces de 500 F

1 pièce de 100 F

2 pièces de 25 F

Elle tire au hasard simultanément trois pièces de sa tirelire. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des pièces tirées.

- 1) Déterminer les valeurs prises par X .
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X

Proposition de solutionTirage simultané \Rightarrow Combinaison1- Déterminons les valeurs prises par X

<i>Valeurs des pièces tirées</i>	<i>Valeurs prises par X</i>
500 F + 500 F + 500 F	1500 F
500 F + 500 F + 100 F	1100 F
500 F + 500 F + 25 F	1025 F
500 F + 100 F + 25 F	625 F
500 F + 25 F + 25 F	550 F
100 F + 25 F + 25 F	150 F

Les valeurs prises par X sont :

150 F ; 550 F ; 625 F ; 1025 F ; 1100 F ; 1500 F

2- Déterminons la loi de probabilité de X

Déterminons le nombre de tirages possibles (le cardinal de l'univers) :

On tire 3 pièces parmi 6 (C_6^3)Card $\Omega = C_6^3 = 20$ * Déterminons $P(X = 150)$ Pour que $X = 150$, il faut tirer une pièce de 100 F et 2 pièces de 25 F .En d'autres termes, il faut tirer 1 pièce de 100 F parmi 1 (C_1^1) et 2 pièces de 25 F parmi 2 (C_2^2)

$$P(X = 150) = \frac{C_1^1 \times C_2^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{1 \times 1}{20} = \frac{1}{20}$$

* Déterminons $P(X = 550)$ Pour que $X = 550$, il faut tirer une pièce de 500 F et 2 pièces de 25 F .En d'autres termes, il faut tirer 1 pièce de 500 F parmi 3 (C_3^1) et 2 pièces de 25 F parmi 2 (C_2^2)

$$P(X = 550) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1}{20} = \frac{3}{20}$$

* Déterminons $P(X = 625)$

Pour que $X = 625$, il faut tirer une pièce de 500 F, une pièce de 100 F et 1 pièce de 25 F.

En d'autres termes, il faut tirer 1 pièce de 500 F parmi 3 (C_3^1) et 1 pièce de 100 F parmi 1 (C_1^1) et 1 pièce de 25 F parmi 2 (C_2^1)

$$P(X = 625) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1 \times 2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* Déterminons $P(X = 1025)$

Pour que $X = 1025$, il faut tirer 2 pièces de 500 F et 1 pièce de 25 F.

En d'autres termes, il faut tirer 2 pièces de 500 F parmi 3 (C_3^2) et 1 pièce de 25 F parmi 2 (C_2^1)

$$P(X = 1025) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* Déterminons $P(X = 1100)$

Pour que $X = 1100$, il faut tirer 2 pièces de 500 F et 1 pièce de 100 F.

En d'autres termes, il faut tirer 2 pièces de 500 F parmi 3 (C_3^2) et 1 pièce de 100 F parmi 1 (C_1^1)

$$P(X = 1100) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1}{20} = \frac{3}{20}$$

* Déterminons $P(X = 1500)$

Pour que $X = 1500$, il faut tirer 3 pièces de 500 F.

En d'autres termes, il faut tirer 3 pièces de 500 F parmi 3 (C_3^3)

$$P(X = 1500) = \frac{C_3^3}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{20}$$

Loi de probabilité de X

x_i	150	550	625	1025	1100	1500
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

Exercice résolu

Une urne contient 3 boules jaunes, 1 boule rouge et 2 boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

On associe à ce tirage le jeu dont voici les règles :

Une boule jaune tirée fait gagner 25 F

Une boule verte tirée fait gagner 75 F

Une boule rouge tirée fait perdre 100 F

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe le gain ou la perte réalisé.

1) Déterminer les différentes valeurs prises par X

2) Déterminer la loi de probabilité de X

Proposition de solution

1- Déterminons les valeurs prises par X :

<i>Boules tirées</i>	<i>Valeur prise par X</i>
3 boules jaunes	75 F
2 boules jaunes + 1 boule rouge	-50 F
2 boules jaunes + 1 boule verte	125 F
1 boule jaune + 2 boules vertes	175 F
1 boule jaune + 1 boule verte + 1 boule rouge	0 F
1 boule rouge + 2 boules vertes	50 F

les valeurs prises par X sont :

-50 F ; 0 F ; 50 F ; 75 F ; 125 F ; 175 F

2- Déterminons la loi de probabilité de X

Déterminons le nombre de tirages possibles (le cardinal de l'univers) :

On tire simultanément 3 boules parmi 6 (C_6^3)

$$\text{Card } \Omega = C_6^3 = 20$$

* Déterminons $P(X = -50)$

Pour que $X = -50$, il faut tirer 2 boules jaunes et 1 boule rouge

En d'autres termes, il faut tirer 2 boules jaunes parmi 3 (C_3^2) et 1 boule rouge parmi 1 (C_1^1)

$$P(X = -50) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1}{20} = \frac{3}{20}$$

* Déterminons $P(X = 0)$

Pour que $X = 0$, il faut tirer une boule de chaque couleur.

En d'autres termes, il faut tirer 1 boule jaune parmi 3 (C_3^1) et 1 boule rouge parmi 1 (C_1^1) et 1 boule verte parmi 2 (C_2^1)

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1 \times 2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* Déterminons $P(X = 50)$

Pour que $X = 50$, il faut tirer 2 boules vertes et 1 boule rouge.

En d'autres termes, il faut tirer 2 boules vertes parmi 2 (C_2^2) et 1 boule rouge parmi 1 (C_1^1)

$$P(X = 50) = \frac{C_2^2 \times C_1^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{1 \times 1}{20} = \frac{1}{20}$$

* Déterminons $P(X = 75)$

Pour que $X = 75$, il faut tirer 3 boules jaunes.

En d'autres termes, il faut tirer 3 boules jaunes parmi 3 (C_3^3)

$$P(X = 75) = \frac{C_3^3}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{20}$$

* Déterminons $P(X = 125)$

Pour que $X = 125$, il faut tirer 2 boules jaunes et 1 boule verte

En d'autres termes, il faut tirer 2 boules jaunes parmi 3 (C_3^2) et 1 boule verte parmi 2 (C_2^1)

$$P(X = 1100) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* Déterminons $P(X = 175)$

Pour que $X = 175$, il faut tirer 1 boule jaune et 2 boules vertes

En d'autres termes, il faut tirer 1 boule jaune parmi 3 (C_3^1) et 2 boules vertes parmi 2 (C_2^2)

$$P(X = 1500) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 \times 1}{20} = \frac{3}{20}$$

Loi de probabilité de X

x_i	-50	0	50	75	125	175
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$

c) **Esperance mathématique - Variance - Ecart-type**• **Esperance mathématique $E(X)$**

$$E(X) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots + x_n P_n$$

Interprétation de l'Esperance mathématique $E(X)$

L'esperance mathématique représente *le gain moyen* ou *la perte moyenne* qu'une personne est susceptible d'effectuer dans le cadre d'une expérience (jeu de hasard , ...)

L'Esperance mathématique $E(X)$ est un nombre réel , elle peut être :

positive ($E(x) > 0$) , **négative** ($E(x) < 0$) ou **nulle** ($E(x) = 0$)

Lorsque l'esperance mathématique est positive ($E(x) > 0$) , cela signifie qu'en moyenne, le joueur gagnera

Lorsque l'esperance mathématique est négative ($E(x) < 0$) , cela signifie qu'en moyenne, le joueur perdra

Lorsque l'esperance mathématique est égale à 0 ($E(x) = 0$), on dit que le jeu est équitable. Cela signifie que si on participe à un tel jeu, en moyenne, on ne perdra pas , mais on ne gagnera pas non plus.

• **Variance $V(X)$**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Remarque

Le calcul de $E(X^2)$ se fait comme celui de $E(X)$ à la seule différence que les " x " sont élevés au carré

$$E(X^2) = x_1^2 \times P_1 + x_2^2 \times P_2 + x_3^2 \times P_3 + x_4^2 \times P_4$$

• **Ecart-type $\sigma(X)$**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice résolu

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

x_i	-3	1	5	9
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$

Proposition de solution

Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 \\
 &= -3 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 5 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{3}{10} \\
 &= -\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{5}{10} + \frac{27}{10} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$E(X) = 3$$

Calculons la variance $V(X)$ ($V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$)

Calculons d'abord $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= x_1^2 \times P_1 + x_2^2 \times P_2 + x_3^2 \times P_3 + x_4^2 \times P_4 \\
 E(X^2) &= (-3)^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 5^2 \times \frac{1}{10} + 9^2 \times \frac{3}{10} \\
 &= 9 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 25 \times \frac{1}{10} + 81 \times \frac{3}{10} \\
 &= \frac{9}{5} + \frac{2}{5} + \frac{25}{10} + \frac{243}{10} \\
 &= 29
 \end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 29 - 3^2 = 20 \\ &= 29 - 9 = 20 \\ &= \mathbf{20}\end{aligned}$$

$$V(X) = \mathbf{20}$$

Calculons l'écart type $\sigma(X)$

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{20} \\ &= \mathbf{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Exercice résolu

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

Un test oral comporte 10 questions dont 6 d'Anglais et 4 d'Allemand. Les questions sont numérotées de 1 à 10 sur des bouts de papier identiques et déposées dans une boîte opaque.

Un candidat tire simultanément 3 de ces questions.

- 1) Justifier que le nombre de tirages possibles est 120
- 2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a- A : « Les trois questions tirées sont des questions d'Anglais »
 - b- B : « Des trois questions tirées, deux sont des questions d'Allemand »

Uniquement A1

- 3) Pour chaque question d'Allemand tirée, un bonus de 3 points est accordé au candidat. Soit X la variable aléatoire réelle égale à la somme des bonus obtenus par un candidat.
 - a- Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b- Déterminer la loi de probabilité de X
 - c- Calculer l'espérance mathématique de X
 - d- Calculer la variance de X

Proposition de solutionTirage simultané \Rightarrow Combinaison

1) Justifions que le nombre de tirages possibles est 120

On tire 3 questions parmi 10 (C_{10}^3)Le nombre de tirages possibles est : $C_{10}^3 = 120$ 2) a- Déterminons la probabilité de l'événement A On tire 3 questions d'Anglais parmi 6 (C_6^3)Card $A = C_6^3 = 20$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

b- Déterminons la probabilité de l'événement B On tire 2 questions d'Allemand parmi 4 (C_4^2) **et** 1 question d'Anglais parmi 6 (C_6^1)Card $B = C_4^2 \times C_6^1 = 6 \times 6 = 36$

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

3) a- Déterminons les valeurs prises par X

Ensemble des questions tirées		
Nombre de questions d'Anglais	Nombre de questions d'Allemand	Total bonus (valeur de X)
3	0	0
2	1	3
1	2	6
0	3	9

Les différentes valeurs prises par X sont : 0 ; 3 ; 6 ; 9b- Déterminons la loi de probabilité de X * Déterminons $P(X = 0)$ Pour que $X = 0$, il faut tirer 3 questions d'Anglais.En d'autres termes, il faut tirer 3 questions d'Anglais parmi 6 (C_6^3)

$$P(X = 0) = \frac{C_6^3}{\text{Card } \Omega} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

* Déterminons $P(X = 3)$

Pour que $X = 3$, il faut tirer 2 questions d'Anglais et 1 question d'Allemand

En d'autres termes, il faut tirer 2 questions d'Anglais parmi 6 (C_6^2) et 1 question d'Allemand parmi 4 (C_4^1)

$$P(X = 3) = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{\text{Card } \Omega} = \frac{15 \times 4}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

* Déterminons $P(X = 6)$

Pour que $X = 6$, il faut tirer 1 question d'Anglais et 2 questions d'Allemand

En d'autres termes, il faut tirer 1 question d'Anglais parmi 6 (C_6^1) et 2 questions d'Allemand parmi 4 (C_4^2)

$$P(X = 6) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

* Déterminons $P(X = 9)$

Pour que $X = 9$, il faut tirer 3 questions d'Allemand.

En d'autres termes, il faut tirer 3 questions d'Allemand parmi 4 (C_4^3)

$$P(X = 9) = \frac{C_4^3}{\text{Card } \Omega} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

La loi de probabilité de X

x_i	0	3	6	9
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

c- Calculons l'espérance mathématique de X

$$E(X) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{3}{10} + 9 \times \frac{1}{30} \\ &= 0 + \frac{3}{2} + \frac{18}{10} + \frac{9}{30} \\ &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

d- Calculons la variance de X

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Calculons d'abord $E(X^2)$

$$E(X^2) = x_1^2 \times P_1 + x_2^2 \times P_2 + x_3^2 \times P_3 + x_4^2 \times P_4$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{2} + 6^2 \times \frac{3}{10} + 9^2 \times \frac{1}{30} \\ &= 0 + \frac{9}{2} + \frac{108}{10} + \frac{81}{30} \\ &= 18 \end{aligned}$$

par la suite $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\begin{aligned} &= 18 - \left(\frac{18}{5}\right)^2 \\ &= 18 - \frac{324}{25} \\ &= \frac{126}{25} \end{aligned}$$

Exercice résolu

Dans un Lycée de la Côte d'Ivoire, les élèves de Terminale organise en fin d'année une tombola en mettant en vente 600 billets. Mais 500 billets seulement ont été vendus.

Parmi les 500 billets vendus :

- 1 billet gagne un lot d'une valeur de 62 000 F
- 4 billets gagnent chacun un lot d'une valeur de 12 000 F
- 9 billets gagnent chacun un lot d'une valeur de 7 000 F
- 50 billets gagnent chacun un lot d'une valeur de 500 F

Les autres billets sont perdants.

1- Pour encourager les élèves, le Proviseur du Lycée est la toute première personne qui paie et choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le proviseur gagne un lot d'une valeur de 7 000 F »

B : « Le proviseur gagne un lot d'une valeur de 500 F »

C : « Le proviseur ne gagne rien »

2- Les billets sont vendus à $1\,000\text{ F}$. Justifier alors que cette tombola rapporte à cette promotion la somme de $302\,000\text{ F}$.

Uniquement A1

3- On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.

a) Justifier que les valeurs prises par X sont :

$$-1\,000\text{ F} ; -500\text{ F} ; 6\,000\text{ F} ; 11\,000\text{ F} ; 61\,000\text{ F}$$

b) Etablir la loi de probabilité de X

c) Justifier que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à -604 F .

Interpréter ce résultat.

Proposition de solution

1- Calculons la probabilité de l'événement A

Remarque

Lorsque le tirage concerne un élément, la probabilité d'un événement est égale au quotient du nombre d'éléments favorables par le nombre total d'éléments.

Il y'a 9 billets qui gagnent chacun un lot d'une valeur de $7\,000\text{ F}$ (nombre d'éléments favorables) et seulement 500 billets ont été vendus (nombre total d'éléments)

$$P(A) = \frac{9}{500}$$

Calculons la probabilité de l'événement B

Il y'a 50 billets qui gagnent chacun un lot d'une valeur de 500 F (nombre d'éléments favorables)

$$P(B) = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$$

Calculons la probabilité de l'événement C

Il y'a 436 billets qui ne gagnent rien (nombre d'éléments favorables)

$$P(C) = \frac{436}{500} = \frac{109}{125}$$

2- Justifions que la tombola rapporte à la promotion la somme de 302 000 F .

Somme obtenue par la vente des 500 billets

$$500 \times 1000 = 500\,000 \text{ F}$$

Somme totale que les billets gagnants font perdre à la promotion

$$62000 \times 1 + 12000 \times 4 + 7000 \times 9 + 500 \times 50 = 198\,000 \text{ F}$$

Somme que la tombola rapporte à la promotion

$$500\,000 - 198\,000 = 302\,000 \text{ F}$$

3- a) Justifions que les valeurs prises par X sont :

$$-1\,000 \text{ F} \quad ; \quad -500 \text{ F} \quad ; \quad 6\,000 \text{ F} \quad ; \quad 11\,000 \text{ F} \quad ; \quad 61\,000 \text{ F}$$

Remarque

Le gain de chaque billet est égale à la différence de la valeur du lot que gagne le billet et du prix d'achat de ce billet.

Type de billet payé	Gain	Valeur de X
Le billet gagne un lot d'une valeur de 62 000 F	$62000 - 1000$	61 000 F
Le billet gagne un lot d'une valeur de 12 000 F	$12000 - 1000$	11 000 F
Le billet gagne un lot d'une valeur de 7 000 F	$7000 - 1000$	6 000 F
Le billet gagne un lot d'une valeur de 500 F	$500 - 1000$	-500 F
Le billet ne gagne rien	$0 - 1000$	-1000 F

On déduit du tableau ci-dessus que les valeurs prises par X sont :

$$-1\,000 \text{ F} \quad ; \quad -500 \text{ F} \quad ; \quad 6\,000 \text{ F} \quad ; \quad 11\,000 \text{ F} \quad ; \quad 61\,000 \text{ F}$$

b) Etablissons la loi de probabilité de X

* Déterminons $P(X = -1000)$

Pour que $X = -1000$, il faut que le billet payé ne gagne rien

En d'autres termes, il faut tirer 1 billet parmi 436

$$P(X = -1000) = P(C) = \frac{109}{125}$$

* Déterminons $P(X = -500)$

Pour que $X = -500$, il faut que le billet payé gagne un lot d'une valeur de 500 F

En d'autres termes, il faut tirer 1 billet parmi 50

$$P(X = -500) = P(B) = \frac{1}{10}$$

* Déterminons $P(X = 6000)$

Pour que $X = 6000$, il faut que le billet payé gagne un lot d'une valeur de 7000 F

En d'autres termes, il faut tirer 1 billet parmi 9

$$P(X = -1000) = P(A) = \frac{9}{500}$$

* Déterminons $P(X = 11000)$

Pour que $X = 11000$, il faut que le billet payé gagne un lot d'une valeur de 12000 F

En d'autres termes, il faut tirer 1 billet parmi 4

$$P(X = 11000) = \frac{4}{500} = \frac{1}{125}$$

* Déterminons $P(X = 61000)$

Pour que $X = 61000$, il faut que le billet payé ne gagne rien

En d'autres termes, il faut tirer 1 billet parmi 1

$$P(X = 61000) = \frac{1}{500}$$

La loi de probabilité de X

x_i	-1000	-500	6000	11000	61000
$P(X = x_i)$	$\frac{109}{125}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{500}$

c) Justifions que $E(X) = -604$

$$\begin{aligned} E(X) &= -1000 \times \frac{109}{125} + (-500) \times \frac{1}{10} + 6000 \times \frac{9}{500} + 11000 \times \frac{1}{125} + 61000 \times \frac{1}{500} \\ &= -872 - 50 + 108 + 88 + 122 \\ &= -604 \end{aligned}$$

Exercice résolu

(On donnera les résultats des calculs de probabilités sous forme de fractions irréductibles)

On dispose de 5 élèves de Terminale du Lycée Classique d'Abidjan comprenant :

- 3 élèves de la série A1 : Ruth , Grâce et Urielle
- 2 élèves de la série A2 : Marlène et Clarisse

Ces 5 filles prennent place, au hasard, dans 2 taxi-compteurs T1 et T2 de 4 places chacune pour se rendre à un concours de Mathématiques, à raison d'une personne, au plus, par place (les conducteurs ne sont pas comptés)

Partie A

On donne les événements :

- A : « Ruth est dans le taxi T1 »
- B : « Grâce est devant dans le taxi T1 et Marlène est à l'arrière dans le taxi T2 »
- C : « Clarisse et Urielle sont dans le taxi T1 et Ruth est dans le taxi T2 »
- D : « Les filles de la série A1 et celles de la série A2 ne sont pas dans le même taxi »
- E : « Le taxi T1 contient, exactement, une élève »

1- Justifier que le nombre de dispositions possibles des 5 élèves dans l'ensemble des 2 taxis est 6720

2- a) Justifier que : $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{3}{56}$

b) Justifier que : $P(E) = \frac{1}{14}$

3- Calculer la probabilité de chacun des événements C et D

Partie B (uniquement A1)

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles dans le taxi T1

1- Donner les valeurs prises par X

2- a) Justifier que : $P(X = 3) = \frac{3}{7}$

b) Justifier que : $P(X = 4) = \frac{1}{14}$

3- Dresser le tableau de distribution de la loi de probabilité de X

4- Combien d'élèves avons-nous en moyenne dans le taxi T1 ? (Justifiez votre réponse)

Proposition de solution**Partie A**

La disposition des élèves dans les deux taxis est un tirage successif sans remise (car un élève ne peut pas occuper lui seul plusieurs places) \Rightarrow Arrangement

1- Justifions que le nombre de dispositions possibles des 5 élèves dans l'ensemble des 2 taxis est 6720

Remarque : Dans chaque taxi , il y'a 4 places

les 5 élèves dispose en tout de 8 places (A_8^5)

le nombre de dispositions possibles est $A_8^5 = 6720$ ($Card \Omega = 6720$)

2- a) Lorsque Ruth est dans le taxi T1 elle occupe une seule place, mais elle a aussi 4 possibilités différentes de s'asseoir (il y'a 4 places dans un taxi). Il reste donc 7 places pour les 4 élèves restants.

$$Card A = 4 \times A_7^4 = 4 \times 840 = 3360$$

$$P(A) = \frac{Card A}{Card \Omega} = \frac{3360}{6720} = \frac{1}{2}$$

Grâce à une seule possibilité de s'asseoir devant le taxi T1 et Marlène a 3 possibilités de s'asseoir à l'arrière du taxi T2 . Il reste donc 6 places pour les 3 élèves restants.

$$Card B = 1 \times 3 \times A_6^3 = 3 \times 120 = 360$$

$$P(B) = \frac{Card B}{Card \Omega} = \frac{360}{6720} = \frac{3}{56}$$

c) Il y a 5 élèves (donc 5 possibilités de choisir l'élève qui sera dans le taxi T1) et l'élève qui doit être seule dans le taxi T1 dispose de 4 possibilités. Il reste donc 4 places dans le taxi T2 pour les 4 élèves restants.

$$Card E = 5 \times 4 \times A_4^4 = 20 \times 24 = 480$$

$$P(E) = \frac{Card E}{Card \Omega} = \frac{480}{6720} = \frac{1}{14}$$

3- Calculons la probabilité de l'événement C

Clarisse et Urielle dispose de A_4^2 possibilités de s'asseoir dans le taxi T1 et Ruth dispose de 4 possibilités de s'asseoir dans le taxi T2. Il reste donc 5 places pour les 2 élèves restants.

$$\text{Card } C = A_4^2 \times 4 \times A_5^2 = 12 \times 4 \times 20 = 960$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{960}{6720} = \frac{1}{7}$$

Calculons la probabilité de l'événement D

les 3 filles de la série A1 dispose de A_4^3 possibilités de s'asseoir dans le taxi T1 et les 2 filles de la série A2 dispose de A_4^2 possibilités de s'asseoir dans le taxi T2 ($A_4^3 \times A_4^2$)

Si les filles de la série A1 occupent le taxi T2 et les filles de la série A2 le taxi T1, on a toujours le même nombre de possibilités.

$$\text{Card } D = 2 \times A_4^3 \times A_4^2 = 2 \times 24 \times 12 = 576$$

$$P(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \Omega} = \frac{576}{6720} = \frac{3}{35}$$

Partie B

1- Déterminons les différentes valeurs prises par X :

Nombres d'élèves dans le taxi T1	Nombres d'élèves dans le taxi T2	Valeur de X
1	4	1
2	3	2
3	2	3
4	1	4

Remarque

Aucun taxi ne peut être vide car il y a 5 filles et 4 places par taxi

Les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4

2- a) Justifions que $P(X = 3) = \frac{3}{7}$

$X = 3$ signifie qu'il y a 3 filles dans le taxi T1

On choisit 3 filles parmi les 5 (C_5^3), et ces 3 filles disposent de A_4^3 possibilités de s'asseoir dans le taxi T1 et les 2 filles restantes disposent de A_4^2 possibilités de s'asseoir dans le taxi T2

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 \times A_4^3 \times A_4^2}{\text{Card } \Omega} = \frac{2880}{6720} = \frac{3}{7}$$

b) Justifions que $P(X = 4) = \frac{1}{14}$

$X = 4$ signifie qu'il y a 4 filles dans le taxi T1

On choisit 4 filles parmi les 5 (C_5^4), et ces 4 filles disposent de A_4^4 possibilités de s'asseoir dans le taxi T1 et la fille restante disposent de 4 possibilités de s'asseoir dans le taxi T2

$$P(X = 4) = \frac{C_5^4 \times A_4^4 \times 4}{\text{Card } \Omega} = \frac{480}{6720} = \frac{1}{14}$$

3- Dressons le tableau de distribution de la loi de probabilité de X

$$P(X = 1) = P(E) = \frac{1}{14}$$

Déterminons $P(X = 2)$

$X = 2$ signifie qu'il y a 2 filles dans le taxi T1

On choisit 2 filles parmi les 5 (C_5^2), et ces 4 filles disposent de A_4^2 possibilités de s'asseoir dans le taxi T1 et la fille restante disposent de A_4^3 possibilités de s'asseoir dans le taxi T2

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times A_4^2 \times A_4^3}{\text{Card } \Omega} = \frac{2880}{6720} = \frac{3}{7}$$

Loi de probabilité de X

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Chapitre 3 :

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

I- FONCTION LOGARITHME NEPERIEN• **Définition**

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée $\ln x$ et définie sur $]0; +\infty[$ telle que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

De plus $\ln 1 = 0$

• **Propriétés algébriques**

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs ($a > 0$ et $b > 0$)

Propriété fondamentale : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Conséquences de la propriété fondamentale

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \\ \ln a^n = n \times \ln a \quad (n \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Remarque : $\ln \sqrt{a} = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln a$

Attention :

➤ $\ln^2 x \neq \ln x^2$ car $\begin{cases} \ln^2 x = (\ln x)^2 = \ln x \times \ln x \\ \ln x^2 = \ln(x \times x) = \ln x + \ln x = 2 \ln x \end{cases}$

Exercice résolu

a) Ecrire en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$

$$\ln 6 \quad ; \quad \ln 12 \quad ; \quad \ln\left(\frac{16}{9}\right) \quad ; \quad 4 \ln \sqrt{2} \quad ; \quad 5 \ln \sqrt{8}$$

b) Ecrire en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$

$$\ln 10 \quad ; \quad \ln 50 \quad ; \quad \ln\left(\frac{8}{5}\right) \quad ; \quad \ln(5\sqrt{2})$$

Proposition de solution

Astuce : Pensez à écrire les nombres *en produit de facteurs premiers*

$$a) \ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln 12 = \ln(2^2 \times 3) = \ln 2^2 + \ln 3 = 2 \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln\left(\frac{2^4}{3^2}\right) = \ln 2^4 - \ln 3^2 = 4 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$4 \ln \sqrt{2} = 4 \left(\ln 2^{\frac{1}{2}} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} \ln 2 \right) = 2 \ln 2$$

$$5 \ln \sqrt{8} = 5 \left(\ln 8^{\frac{1}{2}} \right) = 5 \left(\frac{1}{2} \ln 8 \right) = \frac{5}{2} \ln 2^3 = \frac{5}{2} \times 3 \ln 2 = \frac{15}{2} \ln 2$$

$$b) \ln 10 = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

$$\ln 50 = \ln(2 \times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2 \ln 5$$

$$\ln\left(\frac{8}{5}\right) = \ln\left(\frac{2^3}{5}\right) = \ln 2^3 - \ln 5 = 3 \ln 2 - \ln 5$$

$$\ln(5\sqrt{2}) = \ln 5 + \ln \sqrt{2} = \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2$$

- **Le nombre e**

Il existe un unique nombre réel compris entre 2 et 3, noté e tel que $\ln e = 1$

De plus $e \cong 2,7182818284 \dots$

Tout nombre réel x peut s'écrire $\ln e^x$; autrement dit $\ln e^x = x$

Exemple : $\ln e^2 = 2$; $\ln e^{-5} = -5$; ...

Exercice résolu

Sachant que $\ln e = 1$ donner une valeur exacte de chacun des nombres suivants.

$$4 \ln \sqrt{e} \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{e^{-4}}\right) \quad ; \quad \ln(e + e^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

Proposition de solution

$$4 \ln \sqrt{e} = 4 \left(\frac{1}{2} \ln e \right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^{-4}}\right) = -\ln e^{-4} = -(-4) = 4$$

$$\begin{aligned} \ln(e + e^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) &= \ln(e(1 + e)) - \ln\left(\frac{e + 1}{e}\right) \\ &= \ln e + \ln(1 + e) - [\ln(e + 1) - \ln e] \\ &= \ln e + \ln(1 + e) - \ln(e + 1) + \ln e \\ &= 2 \ln e \\ &= 2 \quad , \quad \text{car } \ln e = 1 \end{aligned}$$

• Limites de référence

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln x = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

✪ Uniquement A1

Cas de la limite d'une fonction f du type $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

On calcule d'abord la limite de la fonction $ax^2 + bx + c$

- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve $+\infty$ alors la limite de $\ln(ax^2 + bx + c)$ donne aussi $+\infty$
- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve 0 alors la limite de $\ln(ax^2 + bx + c)$ donne $-\infty$
- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve un nombre **réel positif** l alors la limite de $\ln(ax^2 + bx + c)$ donne $\ln(l)$

Exercice résolu

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (2x - 1 + \ln x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + \ln x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + 2 + \frac{\ln x}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x}$$

✿ **Uniquement A1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x - 3) \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln(2x^2 + 5x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln(-x^2 + 7x - 1)$$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (2x - 1 + \ln x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (2x - 1) + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln x \\ &= -1 + (-\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2 + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{\ln x}{x} \right) \right] \\ &= +\infty \times (-2) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + 2 + \frac{\ln x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= +\infty + 0 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 3 = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x - 3) = +\infty$

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} 2x^2 + 5x = 0$ alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln(2x^2 + 5x) = -\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 7x - 1) = 5$ alors $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(-x^2 + 7x - 1) = \ln 5$

• Ensemble de définition de fonctions composées avec ln

Soit a et b deux nombres réels.

La fonction $\ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$ mais pour déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type $(x) = \ln(ax + b)$, on pose $ax + b > 0$, puis on résout l'inéquation obtenue.

En d'autres termes :

- Si $f(x) = \ln(ax + b)$ alors $x \in D_f \Leftrightarrow ax + b > 0$

Remarque

Si la fonction f est de la forme $f(x) = \ln[u(x)]$ où $u(x)$ est une fonction, alors pour déterminer l'ensemble de définition de f , on pose $u(x) > 0$

- Si $u(x)$ est une **fonction polynôme de degré 2**, pour résoudre l'inéquation $u(x) > 0$, on peut utiliser le **discriminant**
- Si $u(x)$ est une **fonction rationnelle**, ne pas oublier de préciser que le dénominateur est différent de zéro ($\neq 0$), pour résoudre l'inéquation $u(x) > 0$ on peut utiliser un **tableau de signe**

Exercice résolu

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln(2x + 3) \quad ; \quad g(x) = \ln(1 - 5x) \quad ; \quad h(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x-2}\right)$$

$$p(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln(x + 1) \quad ; \quad k(x) = \ln(x + 3) - 5 \ln(-x)$$

Proposition de solution

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x > -3$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$D_f = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$x \in D_g \Leftrightarrow 1 - 5x > 0$$

$$\Leftrightarrow -5x > -1$$

$$\Leftrightarrow 5x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{5} \right[$$

$$D_g = \left] -\infty; \frac{1}{5} \right[$$

$$x \in D_h \Leftrightarrow \frac{1-x}{x-2} > 0 \quad \text{et} \quad x-2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x-2} > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2$$

Utilisons un tableau de signe pour résoudre l'inéquation $\frac{1-x}{x-2} > 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$1-x$	+	-	-	-
$x-2$	-	-	+	+
$\frac{1-x}{x-2}$	-	+	-	-

$$\text{Donc } \frac{1-x}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in]1;2[$$

$$\text{Par conséquent } x \in D_h \Leftrightarrow x \in]1;2[\quad \text{et} \quad x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]1;2[$$

$$D_h =]1;2[$$

$$x \in D_p \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$$

$$D_p =]-1;0[\cup]0;+\infty[$$

$$x \in D_k \Leftrightarrow x+3 > 0 \quad \text{et} \quad -x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -3 \quad \text{et} \quad x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-3;0[$$

$$D_k =]-3;0[$$

Etude de la fonction $x \rightarrow \ln x$

- **Ensemble de définition**

$$x \in D_{\ln x} \Leftrightarrow x > 0 \\ \Leftrightarrow x \in] 0 ; +\infty[$$

$$D_{\ln x} =] 0 ; +\infty[$$

- **Limites aux bornes de $D_{\ln x}$**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

- **Fonction dérivée**

$$\forall x \in] 0 ; +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- **Sens de variation et tableau de variation**

(1) Sens de variation

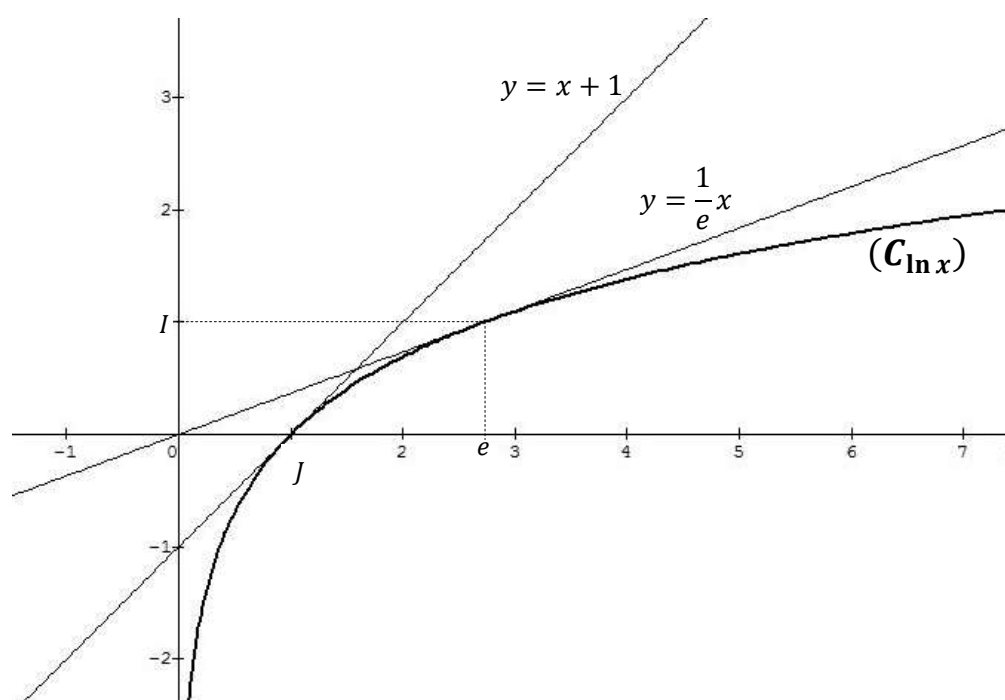
$\forall x \in] 0 ; +\infty[, (\ln x)' > 0 \Rightarrow$ La fonction $x \rightarrow \ln x$ est strictement croissante sur $] 0 ; +\infty[$

(2) Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

La fonction $x \rightarrow \ln x$ est continue et strictement croissante sur $] 0 ; +\infty[$

- Courbe représentative



Remarque : Signe de $\ln x$ suivant les valeurs de x $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]0;1[; \ln x < 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[; \ln x > 0 \end{array} \right.$

On déduit des variations de la fonction logarithme népérien (\ln) que pour tous nombres strictement positifs a et b , on a :

$$\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

$$\ln a > \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a > b$$

$$\text{De plus } \ln a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

$$\ln a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = e$$

• **Equations et inéquations avec la fonction logarithme népérien**

a- Résolution d'une équation avec la fonction logarithme népérien

Proposition de méthode

- (1) Détermination de l'ensemble de validité
- (2) Mettre si possible l'équation sous la forme $\ln a = \ln b$
- (3) Utiliser la propriété $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (afin d'obtenir une équation équivalente)
- (4) Résoudre l'équation équivalente obtenue
- (5) Vérifier que la solution (ou les solutions) de l'équation équivalente appartient (ou appartiennent) à l'ensemble de validité.

Remarque

* Pour tout $x \in] 0 ; +\infty[$; $\ln^2 x = (\ln x)^2$; $\ln^3 x = (\ln x)^3$

* Pour les équations du type :

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 3 \ln x + 10 = 0$$

Après avoir déterminé l'ensemble de validité, on pose $X = \ln x$ et on obtient une équation du second degré ou de degré 3 (selon le cas)

Exercice résolu

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

a) $\ln(4x - 1) = \ln(-x + 3)$ b) $\ln(x + 2) = \ln(-2x - 1)$ c) $\ln(x - 3) = 0$

d) $-6 + 2 \ln(x - 1) = 0$

Proposition de solution

• $\ln(4x - 1) = \ln(-x + 3)$

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow 4x - 1 > 0 \quad \text{et} \quad -x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x > 1 \quad \text{et} \quad -x > -3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x < 3$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{4} ; 3 \right[$$

$$E_V = \left] \frac{1}{4} ; 3 \right[$$

- Résolution de l'équation $\ln(4x - 1) = \ln(-x + 3)$

$$\ln(4x - 1) = \ln(-x + 3) \Leftrightarrow 4x - 1 = -x + 3$$

$$\Leftrightarrow 4x + x = 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

- Ensemble de solution

$$\text{Comme } \frac{4}{5} \in E_V \text{ alors } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

• **$\ln(x + 2) = \ln(-2x - 1)$**

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow x + 2 > 0 \quad \text{et} \quad -2x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2 \quad \text{et} \quad -2x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > -2 \quad \text{et} \quad x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -2 ; -\frac{1}{2} \right[$$

$$E_V = \left] -2 ; -\frac{1}{2} \right[$$

- Résolution de l'équation $\ln(x + 2) = \ln(-2x - 1)$

$$\ln(x + 2) = \ln(-2x - 1) \Leftrightarrow x + 2 = -2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2x = -1 - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

- Ensemble de solution

Comme $-1 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

- **$\ln(x - 3) = 0$**

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$

$$E_V =]3; +\infty[$$

- Résolution de l'équation $\ln(x - 3) = 0$

$$\ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 3) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 3$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

- Ensemble de solution

Comme $4 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{4\}$

- **$-6 + 2 \ln(x - 1) = 0$**

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

$$E_V =]1; +\infty[$$

- Résolution de l'équation $-6 + 2 \ln(x - 1) = 0$

$$-6 + 2 \ln(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x - 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 1) = \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = e^3$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + e^3$$

- Ensemble de solution

Comme $(1 + e^3) \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{1 + e^3\}$

Exercice résolu

1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

2- a) Vérifier que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5\ln x - 6 = 0$

Proposition de solution

1- a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 1) &= x^2 + x - 2x - 2 \\ &= x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

- Ensemble de validité

$$x \in E_V \Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$E_V =]0; +\infty[$$

- Résolution de l'équation $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Posons $X = \ln x$; l'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$

D'après la question 1-a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$$\text{donc } X^2 - X - 2 = 0 \Rightarrow (X - 2)(X + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\ln x - 2)(\ln x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 2 \quad \text{ou} \quad \ln x = -1$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln e^2 \quad \text{ou} \quad \ln x = \ln e^{-1}$$

$$\Rightarrow x = e^2 \quad \text{ou} \quad x = e^{-1}$$

Comme $e^{-1} \in E_V$ et $e^2 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ e^{-1} ; e^2 \}$

2- a) Vérifions que $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{aligned} (-x + 1)(x + 2)(x - 3) &= (-x^2 - 2x + x + 2)(x - 3) \\ &= (-x^2 - x + 2)(x - 3) \\ &= -x^3 + 3x^2 - x^2 + 3x + 2x - 6 \\ &= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \end{aligned}$$

On en déduit que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5\ln x - 6 = 0$

- Ensemble de validité

$$\begin{aligned} x \in E_V &\Leftrightarrow x > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]0 ; +\infty [\end{aligned}$$

$$E_V =]0 ; +\infty [$$

- Résolution de l'équation $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5\ln x - 6 = 0$

Posons $X = \ln x$; l'équation devient $-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 = 0$

D'après la question 2-a) : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 = 0 \Rightarrow (-X + 1)(X + 2)(X - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (-\ln x + 1)(\ln x + 2)(\ln x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -\ln x + 1 = 0 \text{ ou } \ln x + 2 = 0 \text{ ou } \ln x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow -\ln x = -1 \text{ ou } \ln x = -2 \text{ ou } \ln x = 3$$

$$\Rightarrow \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = -2 \text{ ou } \ln x = 3$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln e^1 \text{ ou } \ln x = \ln e^{-2} \text{ ou } \ln x = \ln e^3$$

$$\Rightarrow x = e \text{ ou } x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3$$

Comme $e \in E_V$, $e^{-2} \in E_V$ et $e^3 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ e ; e^{-2} ; e^3 \}$

b- Résolution d'une inéquation avec la fonction logarithme népérien**Proposition de méthode**

- (1) Détermination de l'ensemble de validité
- (2) Mettre si possible l'inéquation sous la forme $\ln a > \ln b$
- (3) Utiliser la propriété $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ (afin d'obtenir une inéquation équivalente)
- (4) Résoudre l'inéquation équivalente obtenue
- (5) Vérifier que la solution de l'inéquation équivalente est incluse dans l'ensemble de validité.

Remarque

* Pour les inéquations du type :

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 < 0 \quad \text{ou} \quad (\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 3 \ln x + 10 \geq 0$$

Après avoir déterminé l'ensemble de validité, on pose $X = \ln x$ et on obtient une inéquation du second degré ou de degré 3 (selon le cas)

On peut *utiliser un tableau de signe* dans certains cas

Exercice résolu

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

$$\ln(-x + 2) < \ln(x + 3) \quad ; \quad \ln(x + 4) > 0 \quad ; \quad \ln(-x + 3) \leq 1$$

$$\ln(2x + 5) \leq \ln 2 + \ln(-x)$$

Proposition de solution

Exercice 47

- $\ln(-x + 2) < \ln(x + 3)$

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow -x + 2 > 0 \quad \text{et} \quad x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x > -2 \quad \text{et} \quad x > -3$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \quad \text{et} \quad x > -3$$

$$\Leftrightarrow x \in] -3 ; 2 [$$

$$E_V =] -3 ; 2 [$$

- Résolution de l'inéquation $\ln(-x + 2) < \ln(x + 3)$

$$\begin{aligned} \ln(-x + 2) < \ln(x + 3) &\Leftrightarrow -x + 2 < x + 3 \\ &\Leftrightarrow -x - x < 3 - 2 \\ &\Leftrightarrow -2x < 1 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\\ &= \left] -\frac{1}{2}; 2 \right[\end{aligned}$$

• $\ln(x + 4) > 0$

- Ensemble de validité E_V

$$\begin{aligned} x \in E_V &\Leftrightarrow x + 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -4 \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -4; +\infty \right[\end{aligned}$$

$$E_V = \left] -4; +\infty \right[$$

- Résolution de l'inéquation $\ln(x + 4) > 0$

$$\begin{aligned} \ln(x + 4) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x + 4) > \ln 1 \\ &\Leftrightarrow x + 4 > 1 \\ &\Leftrightarrow x > 1 - 4 \\ &\Leftrightarrow x > -3 \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -3; +\infty \right[\end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap] -3 ; +\infty [\\ &=] -3 ; +\infty [\end{aligned}$$

- $\ln(-x + 3) \leq 1$

- Ensemble de validité E_V

$$\begin{aligned} x \in E_V &\Leftrightarrow -x + 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow -x > -3 \\ &\Leftrightarrow x < 3 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; 3 [\end{aligned}$$

$$E_V =]-\infty; 3 [$$

- Résolution de l'inéquation $\ln(-x + 3) \leq 1$

$$\begin{aligned} \ln(-x + 3) \leq 1 &\Leftrightarrow \ln(-x + 3) \leq \ln e \\ &\Leftrightarrow -x + 3 \leq e \\ &\Leftrightarrow -x \leq e - 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq -(e - 3) \\ &\Leftrightarrow x \geq 3 - e \\ &\Leftrightarrow x \in [3 - e ; +\infty [\end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap [3 - e ; +\infty [\\ &= [3 - e ; 3 [\end{aligned}$$

- $\ln(2x + 5) \leq \ln 2 + \ln(-x)$

- Ensemble de validité E_V

$$x \in E_V \Leftrightarrow 2x + 5 > 0 \quad \text{et} \quad -x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x > -5 \quad \text{et} \quad x < 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{5}{2}; 0 \right[$$

$$E_V = \left] -\frac{5}{2}; 0 \right[$$

- Résolution de l'inéquation $\ln(2x + 5) \leq \ln 2 + \ln(-x)$

$$\ln(2x + 5) \leq \ln 2 + \ln(-x) \Leftrightarrow \ln(2x + 5) \leq \ln[2 \times (-x)]$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x + 5) \leq \ln(-2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 \leq -2x$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq -5$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{5}{4} \right]$$

- Ensemble de solution

$$S_{\mathbb{R}} = E_V \cap \left] -\infty; -\frac{5}{4} \right]$$

$$= \left] -\frac{5}{2}; -\frac{5}{4} \right]$$

Exercice résolu

1- a) Vérifier que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5 \ln x - 6 > 0$

Proposition de solution

1- a) Vérifions que $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$(-x + 1)(x + 2)(x - 3) = (-x^2 - 2x + x + 2)(x - 3)$$

$$= (-x^2 - x + 2)(x - 3)$$

$$= -x^3 + 3x^2 - x^2 + 3x + 2x - 6$$

$$= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

On en déduit que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5 \ln x - 6 > 0$

- Ensemble de validité

$$x \in E_V \Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty [$$

$$E_V =]0; +\infty [$$

- Résolution de l'inéquation $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5 \ln x - 6 > 0$

RemarqueLa méthode consiste à factoriser $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5 \ln x - 6$; puis à utiliser un tableau de signe

Posons $X = \ln x$; l'inéquation devient $-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 > 0$

D'après la question 1-a) : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 > 0 \Rightarrow (-X + 1)(X + 2)(X - 3) > 0$$

$$\Rightarrow (-\ln x + 1)(\ln x + 2)(\ln x - 3) > 0$$

Tableau de signe de $(-\ln x + 1)(\ln x + 2)(\ln x - 3)$ suivants les valeurs de x ;
avec $x \in E_V$

x	0	e^{-2}	e	e^3	$+\infty$
$-\ln x + 1$	+	+	-	-	-
$\ln x + 2$	-	+	+	+	+
$\ln x - 3$	-	-	-	+	+
$-\ln^3 x + 2\ln^2 x + 5\ln x - 6$	+	-	+	-	-

On déduit du tableau ci-dessus que :

$$(-\ln x + 1)(\ln x + 2)(\ln x - 3) > 0 \Rightarrow x \in]0; e^{-2} [\cup] e; e^3 [$$

On conclut donc que : $S_{\mathbb{R}} =]0; e^{-2} [\cup] e; e^3 [$

Exercice résolu

1- a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E_1) : $2x^2 - 7x + 6 = 0$

b) En déduire les solutions de l'équation (E_2) : $2(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$

2- On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

a) Vérifier que $P(-1) = 0$

b) Déterminer les réels a , b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$

d) Déduire des résultats précédents les solutions de l'équation :

$$(E_3) : 2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$$

Proposition de solution

1- a) Résolvons l'équation (E_1) : $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad , \quad \text{avec } a = 2 \quad , \quad b = -7 \quad \text{et } c = 6$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6$$

$$= 49 - 48$$

$$= 1$$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation (E_1) admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - 1}{2 \times 2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-(-7) + 1}{2 \times 2}$$

$$x_1 = \frac{7 - 1}{4} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{7 + 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{6}{4} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{8}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = 2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3}{2}; 2 \right\}$$

b) Résolvons l'équation (E_2) : $2(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$

Ensemble de validité

$$x \in E_V \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc } E_V =] 0 ; +\infty[$$

Résolution de l'équation (E_2) : $2(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$

Posons $X = \ln x$

L'équation devient : $2X^2 - 7X + 6 = 0$

D'après la question 1-a) $2X^2 - 7X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad X = 2$

$$\text{donc } \ln x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \ln x = 2$$

$$x = e^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ e^{\frac{3}{2}} ; e^2 \right\}$$

2- a) Vérifions que $P(-1) = 0$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - (-1) + 6 \\ &= -2 - 5 + 1 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque

$P(-1) = 0$ signifie que -1 est une racine (ou un zéro) du polynôme P

b) Déterminons les réels a , b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ par la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 & x + 1 \\ - \underline{2x^3 + 2x^2} & \hline -7x^2 - x & 2x^2 - 7x + 6 \\ - \underline{-7x^2 - 7x} & \\ 6x + 6 & \\ - \underline{6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Le quotient de la division euclidienne est : $2x^2 - 7x + 6$

donc $a = 2$, $b = -7$ et $c = 6$

On en déduit que $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 7x + 6)$

c) Résolvons l'équation $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ -1 ; \frac{3}{2} ; 2 \right\}$$

d) Déterminons les solutions de l'équation $(E_3) : 2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$

Ensemble de validité

$$x \in E_V \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc } E_V =] 0 ; +\infty[$$

Résolution de l'équation $(E_3) : 2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$

Posons $X = \ln x$

L'équation devient : $2X^3 - 5X^2 - X + 6 = 0$

D'après la question 2-c)

$$2X^3 - 5X^2 - X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = \frac{3}{2} \text{ ou } X = 2$$

$$\text{donc } \ln x = -1 \text{ ou } \ln x = \frac{3}{2} \text{ ou } \ln x = 2$$

$$x = e^{-1} \text{ ou } x = e^{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = e^2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ e^{-1} ; e^{\frac{3}{2}} ; e^2 \right\}$$

c- Equations et Inéquations faisant intervenir un polynôme de degré 2 ou 3

Exercices proposés**Exercice 1**

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - 6x + 8 = 0$
- 2) Utiliser les résultats de la question précédente pour résoudre dans \mathbb{R} l'équation :
 $(\ln x)^2 - 6 \ln x + 8 = 0$

Exercice 2

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - 4x - 5 = 0$
- 2) Justifier que 2 est une solution de l'équation : (E) : $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$
- 3) Vérifier que pour tout nombre réel x ,
 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x - 2)(x^2 - 4x - 5)$
- 4) En utilisant la question 3 ; justifier que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; 2 ; 5\}$
- 5) Utiliser les résultats des questions précédentes pour résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes:
 - a- $(\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 3 \ln x + 10 = 0$
 - b- $(\ln x)^3 - 3 \ln x \geq 6(\ln x)^2 + 10$ (*uniquement A1*)

Exercice 3

On donne $A = (1 - x)(x - 2)(x + 3)$

- 1) Développer, réduire et ordonner A
- 2) On donne $P(x) = -x^3 + 7x - 6$
 - a- Calculer $P(2)$
 - b- Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
 - c- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $-x^2 - 2x + 3 = 0$
- 3) Dédire de la question 2 les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $P(x) = 0$
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} :
 - a- L'équation $-(\ln x)^3 + 7 \ln x - 6 = 0$
 - b- L'inéquation $\ln x + \ln(x^2 + 8) \geq \ln 3 + \ln(5x - 2)$ (*uniquement A1*)

- **Dérivée de fonctions composées avec ln**

(1) Dérivée des fonctions du type $f(x) = \ln(ax + b)$ avec $a \neq 0$

La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(ax + b)$ est la fonction $f'(x) = \frac{a}{ax + b}$

(2) Soit u une fonction polynôme de degré 2 (polynôme du second degré)

La dérivée de la fonction $f(x) = \ln[u(x)]$ est la fonction $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice résolu

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$$f(x) = \ln(3x + 4) \quad ; \quad g(x) = \ln(-2x + 1) \quad ; \quad h(x) = 2 \ln(2 - 5x)$$

$$p(x) = \ln(x^2 - x - 1) \quad ; \quad k(x) = \ln(-3x^2 + 6x - 5)$$

Proposition de solution

$$f(x) = \ln(3x + 4) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{3x + 4}$$

$$g(x) = \ln(-2x + 1) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{-2}{-2x + 1}$$

$$h(x) = 2 \ln(2 - 5x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2 \times \frac{-5}{2 - 5x}$$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = \frac{-10}{2 - 5x}$$

$$p(x) = \ln(x^2 - x - 1) \quad \Rightarrow \quad p'(x) = \frac{(x^2 - x - 1)'}{x^2 - x - 1}$$

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1}$$

$$k(x) = \ln(-3x^2 + 6x - 5) \quad \Rightarrow \quad k'(x) = \frac{(-3x^2 + 6x - 5)'}{-3x^2 + 6x - 5}$$

$$\Rightarrow k'(x) = \frac{-6x + 6}{-3x^2 + 6x - 5}$$

• **Primitives de fonctions composées avec ln** (*uniquement A1*)

Primitives des fonctions du type $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ avec $a \neq 0$

Une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ est la fonction $F(x) = \frac{1}{a} \times \ln|ax + b| + c$
avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice résolu

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants,

a) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$; $I = [0 ; +\infty[$

b) $f(x) = \frac{2}{-5x + 1}$; $I = [1 ; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{-4}{1 - x}$; $I =]-\infty ; 1[$

Proposition de solution

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2x+3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \times \ln|2x+3| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ est :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2}{-5x+1} \Rightarrow f(x) = 2 \times \frac{1}{-5x+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = 2 \times \frac{1}{-5} \times \ln|-5x+1| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ est :

$$F(x) = -\frac{2}{5} \ln|-5x+1| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{-4}{1-x} \Rightarrow f(x) = -4 \times \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow F(x) = -2 \times \frac{1}{-1} \times \ln|1-x| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1[$ est :

$$F(x) = 2 \ln|1-x| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

II- FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

• Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne la fonction notée $\exp(x)$ ou e^x qui est la fonction réciproque de la fonction $\ln x$.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow]0; +\infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

• Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne (e^x) est \mathbb{R}
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in]0; +\infty[; e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

• Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$1) e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$2) e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$3) e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$4) (e^a)^n = e^{n \times a}$$

Remarque

$$e^1 = e \quad \text{et} \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Exercice résolu

Ecrire plus simplement les nombres suivants

$$e^{\ln 3 + \ln 5} \quad ; \quad e^{\frac{1}{2} \ln 4} \quad ; \quad e^{1 + \ln 5} \quad ; \quad e^{\frac{1}{2} \ln 16} \times e^{\ln 3} \quad ; \quad \ln(\sqrt{e^5})$$

Proposition de solution

$$e^{\ln 3 + \ln 5} = e^{\ln 3} \times e^{\ln 5} = 3 \times 5 = 15$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln 4} = e^{\ln \sqrt{4}} = e^{\ln 2} = 2$$

$$e^{1 + \ln 5} = e^1 \times e^{\ln 5} = e \times 5 = 5e$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln 16} \times e^{\ln 3} = e^{\ln \sqrt{16}} \times 3 = e^{\ln 4} \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

$$\ln(\sqrt{e^5}) = \frac{1}{2} \ln e^5 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

- **Limites de référence**

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Astuce

Les deux limites de référence en $-\infty$ donnent 0

Les deux limites de référence en $+\infty$ donnent $+\infty$

- **Uniquement A1**

Cas de la limite d'une fonction f du type $f(x) = e^{(ax^2+bx+c)}$

On calcule d'abord la limite de la fonction $ax^2 + bx + c$

- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve $+\infty$ alors la limite de $e^{(ax^2+bx+c)}$ donne aussi $+\infty$
- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve $-\infty$ alors la limite de $e^{(ax^2+bx+c)}$ donne 0
- Si on calcule la limite de $ax^2 + bx + c$ et qu'on trouve un nombre réel l alors la limite de $e^{(ax^2+bx+c)}$ donne e^l

Exercice résolu

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 3x)e^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2e^x}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x + 1}$$

❁ **Uniquement A1**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(3x^2 - x + 1)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-x^2 + 2)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} e^{(x^2 - 4x + 5)}$$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^x - e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 3x)e^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 3x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \\ &= -\infty \times (+\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + e^x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= -\infty \times [1 - (+\infty)]$$

$$= -\infty \times (-\infty)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2e^x}{x} \right)$$

$$= 1 - (+\infty)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= +\infty \times 1$$

$$= +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 1) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(3x^2 - x + 1)} = +\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-x^2 + 2)} = 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 5) = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow 1} e^{(x^2 - 4x + 5)} = e^2$

• Ensemble de définition de fonctions composées avec e^x

En classe de Terminale A , les fonctions composées avec e^x sont de la forme :

$$(1) \quad f(x) = (ax + b)e^x \quad \text{ou} \quad f(x) = ax + b + e^x$$

Or ces deux types de fonctions ont pour ensemble de définition \mathbb{R}

$$(2) \quad f(x) = \frac{e^x}{ax + b}$$

Pour déterminer l'ensemble de définition de ce type de fonction, on pose : $ax + b \neq 0$ (le dénominateur différent de zéro)

Exercice résolu

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = (2x - 1)e^x \quad ; \quad g(x) = -x + 1 + e^x$$

$$h(x) = \frac{e^x}{-x + 1} \quad ; \quad k(x) = \frac{-5e^x}{3x + 2}$$

Proposition de solution

- $D_f = \mathbb{R}$ (la fonction f est de la forme $(ax + b)e^x$)
- $D_g = \mathbb{R}$ (la fonction g est de la forme $ax + b + e^x$)
- la fonction h est de la forme $\frac{e^x}{ax + b}$

$$x \in D_h \Leftrightarrow -x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$$

- la fonction k est de la forme $\frac{e^x}{ax + b}$

$$x \in D_k \Leftrightarrow 3x + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}$$

$$D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Etude de la fonction $x \rightarrow e^x$

• Ensemble de définition

$$D_{e^x} = \mathbb{R}$$

• Limites aux bornes de D_{e^x}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

• Fonction dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$$

• Sens de variation et tableau de variation

(1) Sens de variation

$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' > 0 \Rightarrow$ La fonction $x \rightarrow e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}

(2) Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$

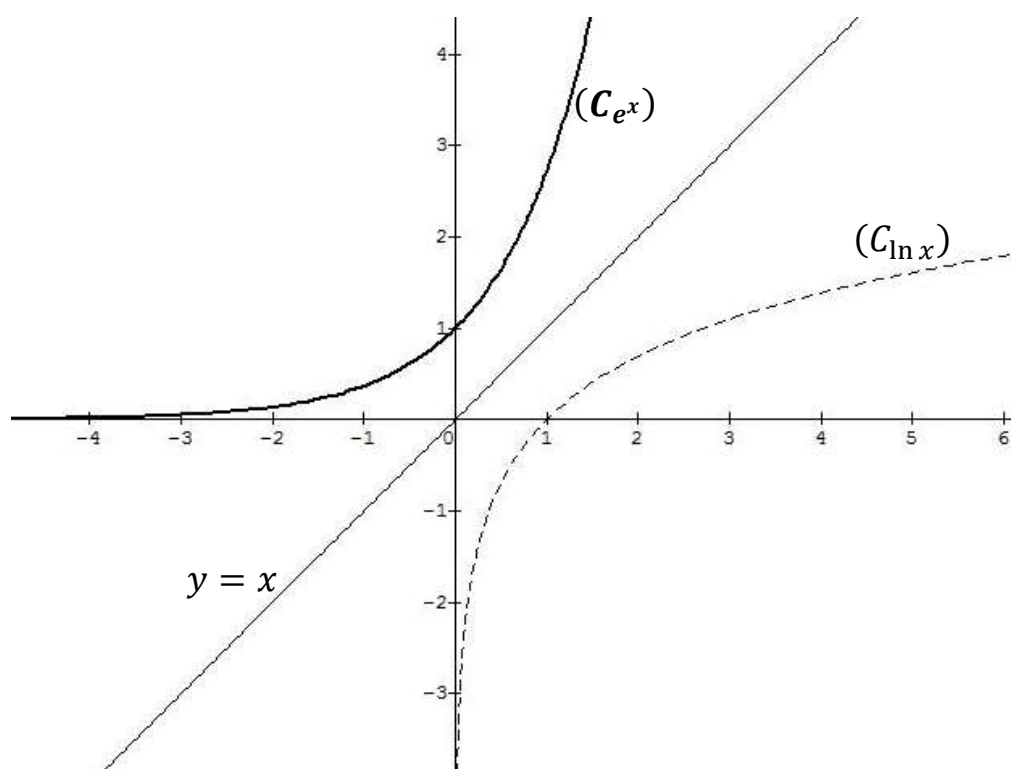
La fonction $x \rightarrow e^x$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} ,

• Courbe représentative

La courbe de la fonction $x \rightarrow e^x$ est *le symétrique par rapport à la première bissectrice* de la courbe de la fonction $x \rightarrow \ln x$

Remarque :

La première bissectrice est la droite d'équation $y = x$



❖ On déduit des représentations graphiques ci-dessus que :

Pour tout nombre réel strictement positif x ($x > 0$) on a :

$$\ln x < x < e^x$$

On déduit des variations de la fonction exponentielle népérienne (e^x) que pour tous nombres réels a et b , on a :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

De plus $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$

$$e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$$

$$e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$$

- **Equations et inéquations avec la fonction exponentielle népérienne**

- a- **Résolution d'une équation avec la fonction exponentielle népérienne**

Proposition de méthode

- (1) Détermination de l'ensemble de validité
- (2) Mettre si possible l'équation sous la forme $e^a = e^b$
- (3) Utiliser la propriété $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ afin d'obtenir une équation équivalente
- (4) Résoudre l'équation équivalente obtenue
- (5) Vérifier que la solution (ou les solutions) de l'équation équivalente appartient (ou appartiennent) à l'ensemble de validité.

Remarque

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(e^x)^2 = e^{2x}$; $(e^x)^3 = e^{3x}$

* Pour les équations du type :

$$(e^x)^2 + e^x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 3e^x + 10 = 0$$

Après avoir déterminé l'ensemble de validité, on pose $X = e^x$ avec $X > 0$

et on obtient une équation du second degré ou de degré 3 (selon le cas)

Exercice d'application 57

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

$$e^{2x+1} = e^{-x+3} \quad ; \quad e^{4x-1} = 1 \quad ; \quad e^{2-x} = -3 \quad ; \quad e^{x^2+3} = e^{3x+1}$$

Proposition de solution

- $e^{2x+1} = e^{-x+3}$
- Ensemble de validité E_V
 $E_V = \mathbb{R}$

- Résolution de l'équation $e^{2x+1} = e^{-x+3}$

$$e^{2x+1} = e^{-x+3} \Leftrightarrow 2x + 1 = -x + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

- Ensemble de solution

Comme $\frac{2}{3} \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

• $e^{4x-1} = 1$

- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'équation $e^{4x-1} = 1$

$$e^{4x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{4x-1} = e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

- Ensemble de solution

Comme $\frac{1}{4} \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$

- $e^{2-x} = -3$

- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'équation $e^{2-x} = -3$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (e^x est strictement positif)
or $-3 < 0$ (-3 est strictement négatif)

Un nombre positif strictement ne peut être égal à un nombre strictement négatif,
on conclut donc que l'équation $e^{2-x} = -3$ n'admet pas de solution.

- Ensemble de solution

$$S_{\mathbb{R}} = \{ \}$$

- $e^{x^2+3} = e^{3x+1}$

- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'équation $e^{x^2+3} = e^{3x+1}$

$$e^{x^2+3} = e^{3x+1} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Résolvons l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ à l'aide du discriminant
 $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= 9 - 8$$

$$= 1$$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} e^{x^2+3} = e^{3x+1} &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

- Ensemble de solution

Comme $1 \in E_V$ et $2 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ 1 ; 2 \}$

Exercice résolu

1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

2- a) Vérifier que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $-e^{3x} + 2e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

Proposition de solution

1- a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$$(x - 2)(x + 1) = x^2 + x - 2x - 2$$

$$= x^2 - x - 2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

- Ensemble de validité

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'équation $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

Posons $X = e^x$ avec $X > 0$; l'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$

D'après la question 1-a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$$\text{donc } X^2 - X - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (X - 2)(X + 1) = 0$$

$$\Rightarrow X - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad X + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X = 2 \quad \text{ou} \quad X = -1$$

$$\Rightarrow X = 2$$

$$\Rightarrow e^x = 2$$

$$\Rightarrow x = \ln 2$$

Impossible car
 $X > 0$

Comme $\ln 2 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ \ln 2 \}$

2- a) Vérifions que $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$(-x + 1)(x + 2)(x - 3) = (-x^2 - 2x + x + 2)(x - 3)$$

$$= (-x^2 - x + 2)(x - 3)$$

$$= -x^3 + 3x^2 - x^2 + 3x + 2x - 6$$

$$= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

On en déduit que : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $-e^{3x} + 2e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

- Ensemble de validité

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'équation $-e^{3x} + 2e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

Posons $X = e^x$; l'équation devient $-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 = 0$

D'après la question 2-a) : $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (-x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$-X^3 + 2X^2 + 5X - 6 = 0 \Rightarrow (-X + 1)(X + 2)(X - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -X + 1 = 0 \text{ ou } X + 2 = 0 \text{ ou } X - 3 = 0$$

$$\Rightarrow -X = -1 \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 3$$

$$\Rightarrow X = 1 \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 3$$

$$\Rightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 1 = 0 \text{ ou } x = \ln 3$$

Impossible car
 $X > 0$

Comme $0 \in E_V$ et $\ln 3 \in E_V$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ 0 ; \ln 3 \}$

b- Résolution d'une inéquation avec la fonction exponentielle népérienne

Proposition de méthode

- (1) Détermination de l'ensemble de validité
- (2) Mettre si possible l'inéquation sous la forme $e^a > e^b$
- (3) Utiliser la propriété $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
afin d'obtenir une inéquation équivalente
- (4) Résoudre l'inéquation équivalente obtenue
- (5) Vérifier que la solution de l'inéquation équivalente est incluse dans l'ensemble de validité.

Remarque

* Pour les inéquations du type :

$$(e^x)^2 + e^x - 6 \leq 0 \quad \text{ou} \quad (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 3e^x + 10 > 0$$

Après avoir déterminé l'ensemble de validité, on pose $X = e^x$ avec $X > 0$

et on obtient une inéquation du second degré ou de degré 3 (selon le cas)

On peut *utiliser un tableau de signe* dans certains cas**Exercice résolu**Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

$$e^{4x-1} \leq e^{2-x} \quad ; \quad e^{x+2} \geq 2 \quad ; \quad e^{-x} > e^{3x+5}$$

Proposition de solution

- $e^{4x-1} \leq e^{2-x}$
- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'inéquation $e^{4x-1} \leq e^{2-x}$

$$\begin{aligned} e^{4x-1} \leq e^{2-x} &\Leftrightarrow 4x - 1 \leq 2 - x \\ &\Leftrightarrow 4x + x \leq 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 5x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right] \end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right] \\ &= \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right] \end{aligned}$$

• $e^{x+2} \geq 2$

- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'inéquation $e^{x+2} \geq 2$

$$\begin{aligned} e^{x+2} \geq 2 &\Leftrightarrow e^{x+2} \geq e^{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow x + 2 \geq \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x \geq -2 + \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2 + \ln 2 ; +\infty [\end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap [-2 + \ln 2 ; +\infty [\\ &= [-2 + \ln 2 ; +\infty [\end{aligned}$$

- $e^{-x} > e^{3x+5}$

- Ensemble de validité E_V

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'inéquation $e^{-x} > e^{3x+5}$

$$\begin{aligned} e^{-x} > e^{3x+5} &\Leftrightarrow -x > 3x + 5 \\ &\Leftrightarrow -x - 3x > 5 \\ &\Leftrightarrow -4x > 5 \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; -\frac{5}{4} \right[\end{aligned}$$

- Ensemble de solution

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}} &= E_V \cap \left] -\infty ; -\frac{5}{4} \right[\\ &= \left] -\infty ; -\frac{5}{4} \right[\end{aligned}$$

Exercice résolu

- 1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(e^x)^2 - 4e^x + 3 > 0$
- 2- a) Vérifier que : $2x^3 - 2x^2 - 20x - 16 = 2(x + 1)(x + 2)(x - 4)$
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2e^{3x} - 2e^{2x} - 20e^x - 16 \leq 0$

Proposition de solution

1- a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

$$\begin{aligned}(x - 3)(x - 1) &= x^2 - x - 3x + 3 \\ &= x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $(e^x)^2 - 4e^x + 3 > 0$

- Ensemble de validité

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'inéquation $(e^x)^2 - 4e^x + 3 > 0$

Posons $X = e^x$ avec $X > 0$; l'inéquation devient $X^2 - 4X + 3 > 0$

D'après la question 1-a) : $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

$$\begin{aligned}X^2 - 4X + 3 > 0 &\Rightarrow (X - 3)(X - 1) > 0 \\ &\Rightarrow (e^x - 3)(e^x - 1) > 0\end{aligned}$$

Tableau de signe de $(e^x - 3)(e^x - 1)$ suivant les valeurs de x ; avec $x \in E_V$

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$e^x - 3$	-	-	+	+
$e^x - 1$	-	+	+	+
$(e^x)^2 - 4e^x + 3$	+	-	+	+

On déduit du tableau ci-dessus que :

$$(e^x - 3)(e^x - 1) > 0 \Rightarrow x \in]-\infty ; 0 [\cup] \ln 3 ; +\infty [$$

Comme $]-\infty ; 0 [\cup] \ln 3 ; +\infty [\subset E_V$

On conclut donc que : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 0 [\cup] \ln 3 ; +\infty [$

2- a) Vérifions que $2x^3 - 2x^2 - 20x - 16 = 2(x + 1)(x + 2)(x - 4)$

$$\begin{aligned} 2(x + 1)(x + 2)(x - 4) &= 2(x^2 + 2x + x + 2)(x - 4) \\ &= 2(x^2 + 3x + 2)(x - 4) \\ &= (2x^2 + 6x + 4)(x - 4) \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 6x^2 - 24x + 4x - 16 \\ &= 2x^3 - 2x^2 - 20x - 16 \end{aligned}$$

On en déduit que : $2x^3 - 2x^2 - 20x - 16 = 2(x + 1)(x + 2)(x - 4)$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $2e^{3x} - 2e^{2x} - 20e^x - 16 \leq 0$

- Ensemble de validité

$$E_V = \mathbb{R}$$

- Résolution de l'inéquation $2e^{3x} - 2e^{2x} - 20e^x - 16 \leq 0$

Posons $X = e^x$ avec $X > 0$; l'inéquation devient $2X^3 - 2X^2 - 20X - 16 \leq 0$

D'après la question 1-a) : $2x^3 - 2x^2 - 20x - 16 = 2(x+1)(x+2)(x-4)$

$$2X^3 - 2X^2 - 20X - 16 \leq 0 \Rightarrow 2(X+1)(X+2)(X-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x - 4) \leq 0$$

Car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(e^x + 1) > 0$ et $e^x + 2 > 0$ donc le signe de

$2(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x - 4)$ dépend du signe de $e^x - 4$

$$2X^3 - 2X^2 - 20X - 16 \leq 0 \Rightarrow e^x - 4 \leq 0$$

Tableau de signe de $2(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x - 4)$ suivants les valeurs de x ; avec $x \in E_V$

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$e^x - 4$	-		+
$2(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x - 4)$	-		+

On déduit du tableau ci-dessus que :

$$2(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x - 4) \leq 0 \Rightarrow x \in]-\infty ; \ln 4]$$

Comme $]-\infty ; \ln 4] \subset E_V$

On conclut donc que : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; \ln 4]$

c- Equations et Inéquations faisant intervenir un polynôme de degré 2 ou 3**Exercices proposés****Exercice 1**

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$
- 2) Utiliser les résultats de la question précédente pour résoudre dans \mathbb{R} l'équation :
 $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Exercice 2

On donne $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$

- 1) Justifier que -2 est une solution de l'équation : $P(x) = 0$
- 2) Vérifier que pour tout nombre réel x ,
$$-x^3 - 4x^2 - x + 6 = (x + 2)(-x^2 - 2x + 3)$$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $-x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$
En déduire le signe de $P(x)$
- 4) Utiliser les résultats des questions précédentes pour résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes:
 - a - $-e^{3x} - 4e^{2x} - e^x + 6 = 0$
 - b- $-e^{3x} + e^{2x} < 5e^{2x} + e^x - 6$ (*uniquement A1*)

- **Dérivée de fonctions composées avec e^x**

Dérivée des fonctions du type $f(x) = e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$

La dérivée de la fonction $f(x) = e^{ax+b}$ est la fonction $f'(x) = a \times e^{ax+b}$

✪ **uniquement A1**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R}

La dérivée de la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est la fonction $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exercice résolu

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes

a) $f(x) = e^{2x+5}$ b) $g(x) = 4x - 1 + e^{-x+2}$ c) $h(x) = -2e^{5x^2-3x+7}$

d) $k(x) = \frac{e^{3x-1}}{2x+1}$ e) $p(x) = (-5x+2)e^x$

Proposition de solution

a) $f(x) = e^{2x+5} \Rightarrow f'(x) = 2 \times e^{2x+5}$
 $\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x+5}$

b) $g(x) = 4x - 1 + e^{-x+2} \Rightarrow g'(x) = 4 + (-1) \times e^{2x+5}$
 $\Rightarrow g'(x) = 4 - e^{2x+5}$

c) $h(x) = -2e^{5x^2-3x+7} \Rightarrow h'(x) = -2 \times (5x^2 - 3x + 7)' \times e^{5x^2-3x+7}$
 $\Rightarrow h'(x) = -2 \times (10x - 3)e^{5x^2-3x+7}$
 $\Rightarrow h'(x) = (-20x + 6)e^{5x^2-3x+7}$

d) La fonction k est de la forme $\frac{u}{v}$

$$\begin{aligned}
 k(x) = \frac{e^{3x-1}}{2x+1} &\Rightarrow k'(x) = \left(\frac{e^{3x-1}}{2x+1} \right)' \\
 &\Rightarrow k'(x) = \frac{(e^{3x-1})' \times (2x+1) - (2x+1)' \times e^{3x-1}}{(2x+1)^2} \\
 &\Rightarrow k'(x) = \frac{3e^{3x-1} \times (2x+1) - 2 \times e^{3x-1}}{(2x+1)^2} \\
 &\Rightarrow k'(x) = \frac{e^{3x-1} \times (6x+3) - 2 \times e^{3x-1}}{(2x+1)^2} \\
 &\Rightarrow k'(x) = \frac{(6x+3-2)e^{3x-1}}{(2x+1)^2} \\
 &\Rightarrow k'(x) = \frac{(6x+1)e^{3x-1}}{(2x+1)^2}
 \end{aligned}$$

e) La fonction p est de la forme uv

$$\begin{aligned}
 p(x) = (-5x+2)e^x &\Rightarrow p'(x) = (-5x+2)' \times e^x + (e^x)' \times (-5x+2) \\
 &\Rightarrow p'(x) = -5 \times e^x + e^x \times (-5x+2) \\
 &\Rightarrow p'(x) = (-5 + (-5x+2))e^x \\
 &\Rightarrow p'(x) = (-5x-3)e^x
 \end{aligned}$$

- **Primitives de fonctions composées avec e^x (uniquement A1)**

Primitives des fonctions du type $f(x) = e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$

Une primitive de la fonction $f(x) = e^{ax+b}$ est la fonction $F(x) = \frac{1}{a} \times e^{ax+b}$

Exercice résolu

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

a) $f(x) = e^{3x-1}$ b) $g(x) = -2e^{-x+5}$ c) $h(x) = -5x + 3 - e^{-2x+4}$

Proposition de solution

a) Une primitive de la fonction f est la fonction $F(x) = \frac{1}{3} \times e^{3x-1} + c$; $c \in \mathbb{R}$

b) Une primitive de la fonction g est la fonction

$$G(x) = -2 \times \frac{1}{(-1)} \times e^{-x+5} + c ; c \in \mathbb{R}$$

$$= 2e^{-x+5} + c ; c \in \mathbb{R}$$

c) Une primitive de la fonction h est la fonction

$$H(x) = -5 \times \frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{1}{(-2)} \times e^{-2x+4} + c ; c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{5}{2} x^2 + 3x + \frac{1}{2} e^{-2x+4} + c ; c \in \mathbb{R}$$

Chapitre 4 : SUITES NUMERIQUES

• Définition

On appelle suite numérique toute fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{R} .

On la note souvent : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$; U_n ; V_n ; ...

• Vocabulaire

U_n est appelé *terme général* (ou *terme de rang n*) de la suite

Les suites numériques sont généralement définies à l'aide de deux formules :

(1) formule explicite

Elle permet d'exprimer U_n en fonction de n

Exemple

$$U_n = 2n - 3 \quad ; \quad U_n = n^2 + 3n - 1 \quad ; \quad \dots$$

(2) formule de récurrence

Elle donne la valeur du premier terme de la suite et une relation liant U_{n+1} et U_n

Exemple

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 3}{U_n - 1} \end{cases} \quad ; \quad \dots$$

Attention : Le premier terme d'une suite numérique U_n n'est pas obligatoirement U_0

• Calcul des termes d'une suite numérique

1^{er} cas : Suite définie par une formule explicite

L'expression de U_n étant connue, pour déterminer les expressions des autres termes de la suite en fonction de n , on ne fait que remplacer n par l'indice du terme concerné.

Par exemple :

- pour déterminer l'expression de U_{n+1} en fonction de n , on remplace dans l'expression de U_n le n par $n + 1$
- pour déterminer l'expression de U_{2n-5} en fonction de n , on remplace dans l'expression de U_n le n par $2n - 5$

Exercice résolu

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = 3n + 1$.

Déterminer les termes U_{n+1} , U_{n-2} et U_{2n-3} en fonction de n

Proposition de solution

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3n + 1$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 3(n+1) + 1 \\ &= 3n + 3 + 1 \\ &= 3n + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n-2} &= 3(n-2) + 1 \\ &= 3n - 6 + 1 \\ &= 3n - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2n-3} &= 3(2n-3) + 1 \\ &= 6n - 9 + 1 \\ &= 6n - 8 \end{aligned}$$

2^{ème} cas : Suite définie par une formule de récurrence (relation liant U_{n+1} et U_n)

Dans le cas des suites définies par une formule de récurrence, de manière générale,

l'élève remarquera que les termes U_{n+1} et U_n sont deux termes consécutifs

Autrement dit pour déterminer l'expression d'un autre terme de la suite, il ne faut pas oublier qu'il est lié au terme précédent

Exemple

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \end{cases}$$

La relation exprimant U_{n+1} en fonction de U_n est donnée par : $U_{n+1} = 5U_n - 2$

- Si l'indice du terme à gauche est 5 alors celui de droite sera 4 ($U_5 = 5U_4 - 2$)
- Si l'indice du terme à gauche est 8 alors celui de droite sera 7 ($U_8 = 5U_7 - 2$)
- Si l'indice du terme à gauche est p alors celui de droite sera $p - 1$
($U_p = 5U_{p-1} - 2$)
- Si l'indice du terme à gauche est $n + 4$ alors celui de droite sera $n + 3$
($U_{n+4} = 5U_{n+3} - 2$) car $(n + 4) - 1 = n + 4 - 1 = n + 3$
- Ainsi de suite

Exercice résolu

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$$

Déterminer les termes U_{n+2} , U_{n+8} et U_{n-3}

Proposition de solution

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n - 1$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= 2U_{(n+2)-1} - 1 \\ &= 2U_{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+8} &= 2U_{(n+8)-1} - 1 \\ &= 2U_{n+7} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n-3} &= 2U_{(n-3)-1} - 1 \\ &= 2U_{n-4} - 1 \end{aligned}$$

1- Représentation graphique sur l'axe des ordonnées des termes d'une suite numérique

le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

a) Suites définies par une formule explicite

Pour les suites définies par une formule explicite, on procède comme en classe de 2^{nde} pour la détermination de l'image d'un nombre par une fonction.

En d'autres termes, pour représenter par exemple U_4 sur l'axe des ordonnées :

- (1) On trace une droite verticale passant par 4
- (2) Cette droite coupe la courbe en un point
- (3) On trace une droite horizontale passant par ce point et qui coupe aussi l'axe des ordonnées en un autre point qui est U_4

Application

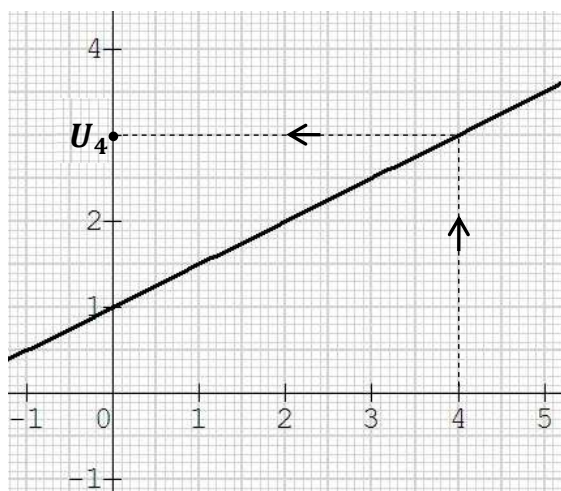
Déterminer graphiquement sur l'axe des ordonnées le terme U_4 , de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{2}n + 1$

Remarque

La courbe tracée est obtenue à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
C'est-à-dire qu'on remplace U_n par $f(x)$ et n par x

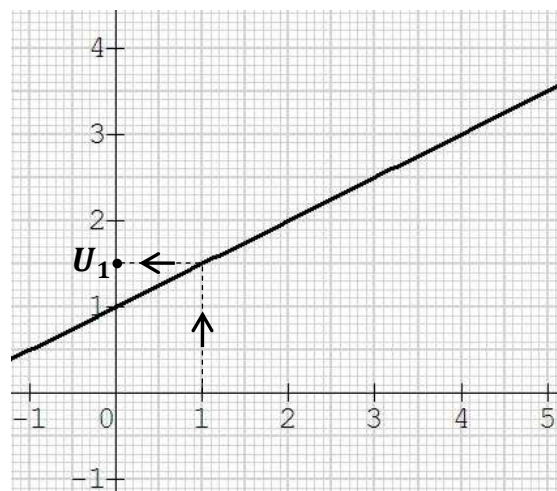
$(U_n = f(n)$ où f est la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$)

$$\begin{array}{ccc} U_n = \frac{1}{2}n + 1 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) = \frac{1}{2}x + 1 & & \end{array}$$



On déduit du graphique ci-dessus
que $U_4 = 3$

Autre exemple
Déterminer graphiquement U_1



Graphiquement $U_1 = 1,5$

b) Suites définies par une relation formule de récurrence

(relation liant U_{n+1} et U_n)

Pour les suites définies par une formule de récurrence, on utilise une droite spéciale appelée "*la première bissectrice*" dont l'équation est $y = x$

La *première bissectrice* permet de « ramener » un élément de l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses

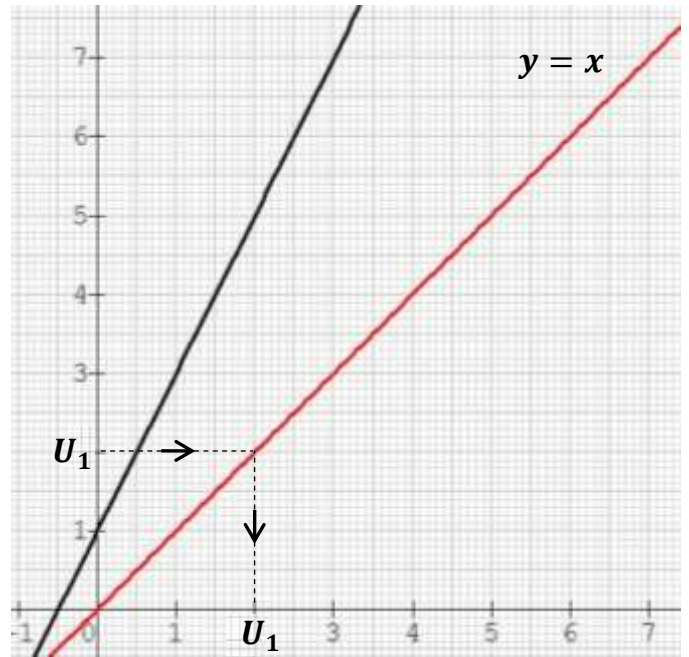
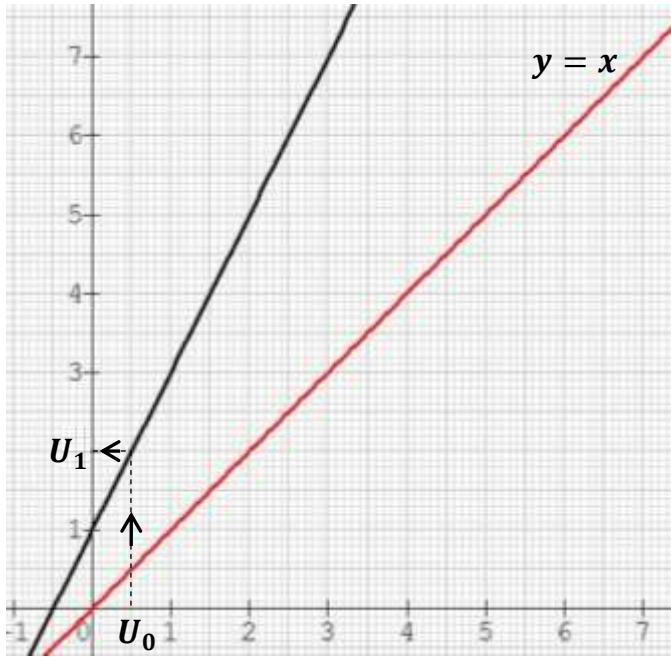
Le premier terme de la suite est toujours donné et U_{n+1} est l'image de U_n par la fonction dont la courbe est donnée.

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

On remplace U_{n+1} par $f(x)$ et U_n par x

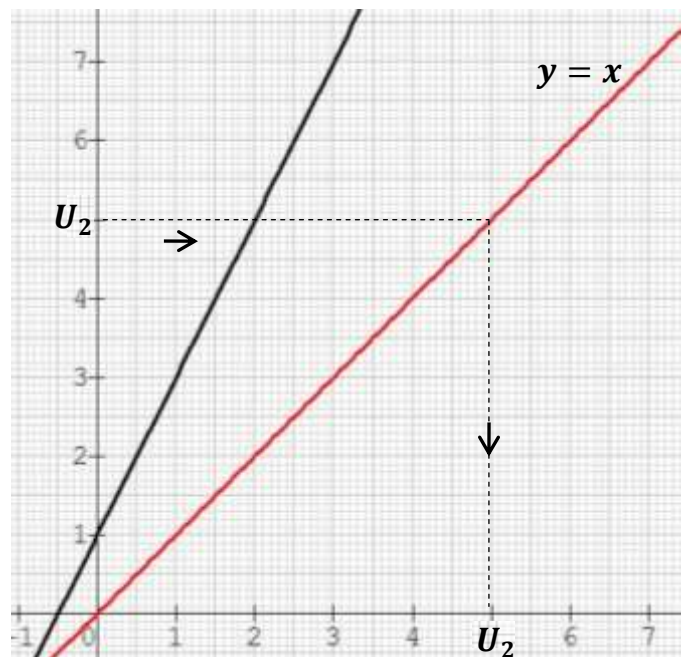
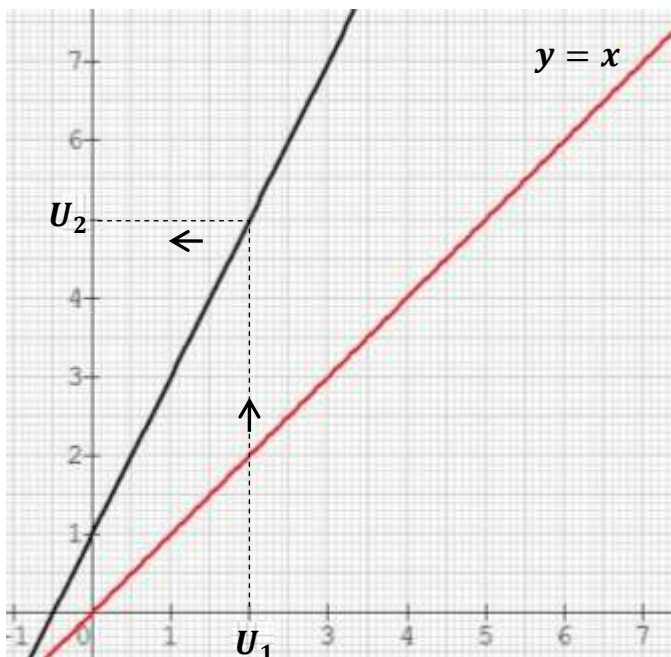
$$U_{n+1} = 2U_n + 1$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ f(x) = 2x + 1 \end{array}$$



Pour déterminer U_1 , image de U_0 , on utilise la même technique que pour les suites définies par une formule explicite

On utilise la première bissectrice pour ramener U_1 sur l'axe des abscisses



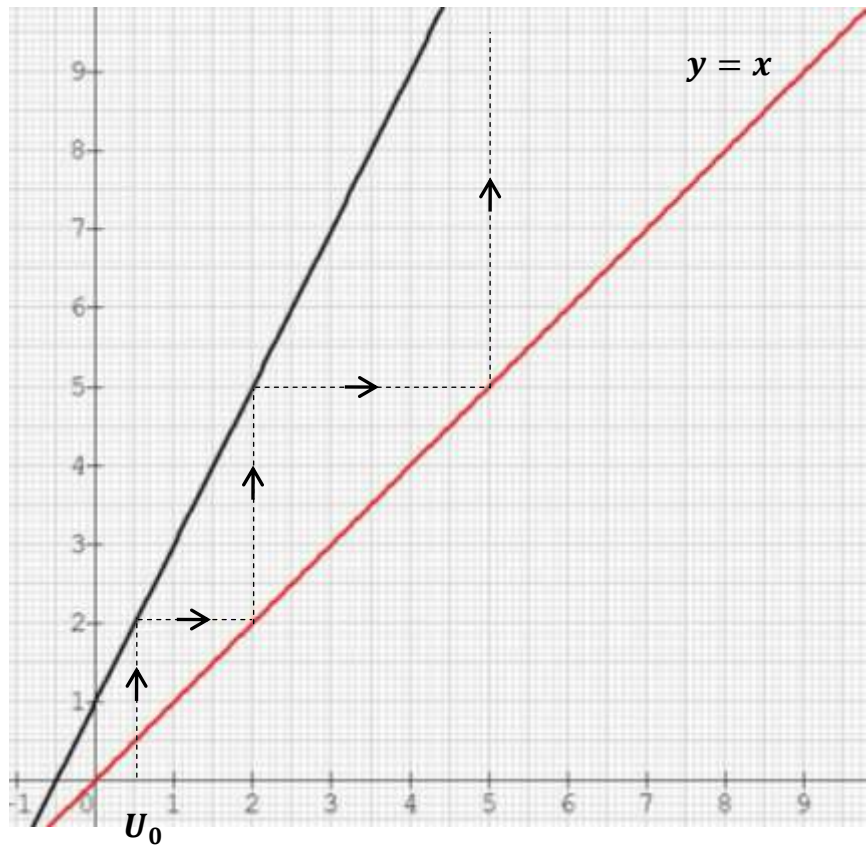
Pour déterminer U_2 , image de U_1 , on utilise la même technique que pour les suites définies par une formule explicite

On utilise la première bissectrice pour ramener U_2 sur l'axe des abscisses

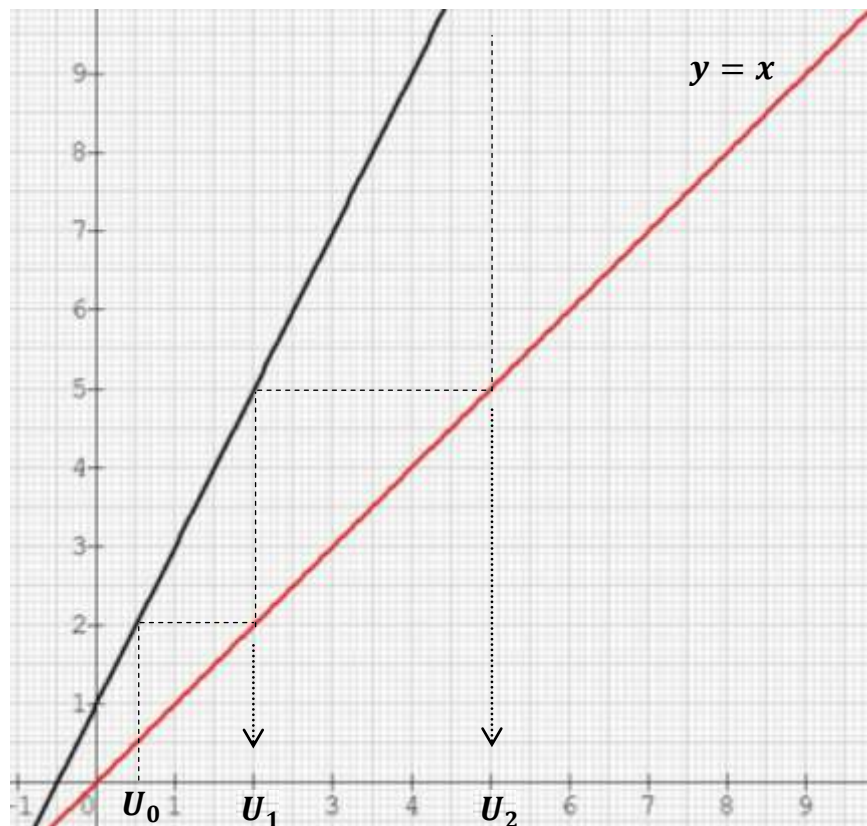
Ainsi de suite ...

Autre méthode (ou *évolution en escalier*)**Etape 1**

Construction de l'escalier

**Etape 2**

Positionnement des termes de la suite



- **Sens de variation d'une suite**

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (U_n) on procède par étapes :

- On détermine l'expression de U_{n+1} (si ce terme n'est pas connu)
- On détermine l'expression de la différence : $U_{n+1} - U_n$
- On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$
 - ✓ Si $U_{n+1} - U_n$ est positif ($U_{n+1} - U_n > 0$) alors la suite (U_n) est **croissante**
 - ✓ Si $U_{n+1} - U_n$ est négatif ($U_{n+1} - U_n < 0$) alors la suite (U_n) est **décroissante**
 - ✓ Si $U_{n+1} - U_n$ est nul ($U_{n+1} - U_n = 0$) alors la suite (U_n) est **constante**

Exercice résolu

Etudier les variations des suites suivantes

a) $U_n = 2n + 1$

b) $V_n = 4 - 5n$

c) $U_{n+1} = U_n + 3$

Proposition de solution

a) $U_n = 2n + 1$

- Déterminons l'expression de U_{n+1}

$$U_{n+1} = 2(n+1) + 1 \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} = 2n + 2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} = 2n + 3$$

- Déterminons le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = 2n + 3 - (2n + 1)$$

$$= 2n + 3 - 2n - 1$$

$$= 2$$

Comme $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite U_n est croissante

b) $V_n = 4 - 5n$

- Déterminons l'expression de V_{n+1}

$$V_{n+1} = 4 - 5(n+1) \quad \Rightarrow \quad V_{n+1} = 4 - 5n - 5$$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = -1 - 5n$$

- Déterminons le signe de $V_{n+1} - V_n$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= -1 - 5n - (4 - 5n) \\ &= -1 - 5n - 4 + 5n \\ &= -5 \end{aligned}$$

Comme $V_{n+1} - V_n < 0$ alors la suite V_n est décroissante

c) $U_{n+1} = U_n + 3$

$$U_{n+1} = U_n + 3 \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} - U_n = 3$$

Comme $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite U_n est croissante

Autre méthode

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (U_n + 3) - U_n \\ &= U_n + 3 - U_n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Comme $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite U_n est croissante

Limite d'une suite

La limite d'une suite *se calcule toujours en* $+\infty$; et on utilise en général les mêmes propriétés que pour le calcul de limites des fonctions

Remarque

Pour le calcul de limite des suites, l'élève peut, au brouillon, remplacer n par x

$$U_n = 3n - 1 \quad \text{et} \quad V_n = \frac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1} \right)$$

L'élève doit revoir les propriétés concernant le calcul de limite à l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

Propriété

Lorsqu'un nombre réel a est strictement compris entre -1 et 1 , c'est-à-dire $-1 < a < 1$ alors

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad ; \quad \left(\text{car } \frac{2}{5} = 0,4 \quad \text{donc } -1 < \frac{2}{5} < 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad ; \quad \left(\text{car } -\frac{1}{3} = -0,33 \quad \text{donc } -1 < -\frac{1}{3} < 1 \right)$$

Exercice résolu

Calculer la limite des suites suivantes

a) $U_n = 3n - 1$

b) $V_n = \frac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 - 1}$

c) $W_n = -5n^2 + n + 8$

d) $S_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 - 1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5n^2 + n + 8) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5n^2) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n &= 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Convergence d'une suite numérique

On dit qu'une suite numérique est **convergente** lorsque sa limite est finie .

En d'autres termes une suite numérique est **convergente** lorsque sa limite est égale à un nombre réel.

Toute suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** .

Suites arithmétiques - Suites géométriques

(1) Comment déterminer le nombre de termes dans une somme de termes consécutifs ?

Nombre de termes = (indice du dernier terme – indice du premier terme) + 1

Exemple

Déterminer le nombre de termes dans les sommes suivantes :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12}$$

$$T_n = U_7 + U_8 + U_9 + \dots + U_{47}$$

$$R_n = U_{18} + U_{19} + U_{20} + \dots + U_{231}$$

Remarque

Lorsque qu'une somme contient plusieurs termes et qu'on ne peut pas tous les représenter , on peut remplacer certains par des pointillés (+ ... +)

- Nombre de termes de la somme S_n

L'indice du dernier terme est 12

L'indice de premier terme est 0

Le nombre de termes de la somme S_n est : $(12 - 0) + 1 = \mathbf{13}$

- Nombre de termes de la somme T_n

L'indice du dernier terme est 47

L'indice de premier terme est 7

Le nombre de termes de la somme S_n est : $(47 - 7) + 1 = \mathbf{41}$

- Nombre de termes de la somme R_n

L'indice du dernier terme est 231

L'indice de premier terme est 18

Le nombre de termes de la somme S_n est : $(231 - 18) + 1 = \mathbf{214}$

(2) Suites arithmétiques**✓ Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?**

Une suite numérique (U_n) est *arithmétique* si $U_{n+1} - U_n = r = \text{constante}$

Cette constante r est appelée la *raison*

(en d'autres termes une suite numérique est arithmétique lorsque la différence entre U_{n+1} et U_n donne un résultat qui ne contient pas n)

Exercice résolu

Montrer que les suites $U_n = 5n + 2$ et $V_n = 1 - 2n$ sont arithmétiques et donner la raison de chaque suite.

Proposition de solution

$$U_n = 5n + 2$$

Déterminons l'expression de U_{n+1}

$$\begin{aligned} U_n = 5n + 2 &\Rightarrow U_{n+1} = 5(n+1) + 2 \\ &\Rightarrow U_{n+1} = 5n + 5 + 2 \\ &\Rightarrow U_{n+1} = 5n + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 5n + 7 - (5n + 2) \\ &= 5n + 7 - 5n - 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

On déduit donc que la suite U_n est une suite arithmétique de raison 5

$$V_n = 1 - 2n$$

Déterminons l'expression de V_{n+1}

$$\begin{aligned} V_n = 1 - 2n &\Rightarrow V_{n+1} = 1 - 2(n+1) \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 1 - 2n - 2 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = -2n - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= -2n - 1 - (1 - 2n) \\ &= -2n - 1 - 1 + 2n \\ &= -2 \end{aligned}$$

On déduit donc que la suite V_n est une suite arithmétique de raison -2

✓ **Expression d'une suite arithmétique en fonction de n**

Soit n et p deux nombres entiers naturels

La relation qui lie deux termes quelconques U_n et U_p d'une suite arithmétique de raison r est : $U_n = U_p + (n - p) \times r$

Cas particuliers

Pour $p = 0$ la relation ci-dessus devient $U_n = U_0 + n \times r$

Pour $p = 1$ la relation ci-dessus devient $U_n = U_1 + (n - 1) \times r$

✓ **Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique**

$$S_n = (\text{nombre de termes de la somme}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Applications

$$\blacksquare S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

La somme S a $(n + 1)$ termes dont le premier est U_0 et le dernier U_n

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n + 1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$$

$$\blacksquare S' = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

La somme S' a n termes dont le premier est U_1 et le dernier U_n

$$\text{On en déduit que : } S' = U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}$$

✓ Tableau récapitulatif des suites arithmétiques

	Suite arithmétique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ ou $U_{n+1} - U_n = r$
	r est appelé la <i>raison</i>
Relation entre deux termes U_n et U_p	$U_n = U_p + (n - p) \times r$
Expression de U_n en fonction de n	Si le premier terme est U_0 alors $U_n = U_0 + n \times r$ Si le premier terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n - 1) \times r$
Somme de termes consécutifs	Si le premier terme est U_0 alors $U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n + 1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$ Si le premier terme est U_1 alors $U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}$
Convergence	La suite est convergente si $r = 0$
Sens de variation	Si $r > 0$ alors (U_n) est <i>strictement croissante</i> Si $r < 0$ alors (U_n) est <i>strictement décroissante</i> Si $r = 0$ alors (U_n) est <i>constante</i>

Exercice résolu

Soit (U_n) une suite arithmétique.

Dans chacun des cas suivants déterminer la raison de la suite (U_n) .

a) $U_3 = 32$ et $U_{12} = 5$

b) $U_{11} = -3$ et $U_{41} = 3$

Proposition de solution

$$U_n = U_p + (n - p) \times r$$

a) $U_{12} = U_3 + (12 - 3) \times r \Rightarrow 5 = 32 + 9r$

$$\Rightarrow 9r = 5 - 32$$

$$\Rightarrow 9r = -27$$

$$\Rightarrow r = -\frac{27}{9}$$

$$\Rightarrow r = -3$$

b) $U_{41} = U_{11} + (41 - 11) \times r \Rightarrow 3 = -3 + 30r$

$$\Rightarrow 30r = 3 + 3$$

$$\Rightarrow 30r = 6$$

$$\Rightarrow r = \frac{6}{30}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

Exercice résolu

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

a) Sachant que $U_2 = 8$ et $r = 3$, calculer U_{15}

b) Sachant que $U_{19} = -1$ et $r = -2$, calculer U_5

Proposition de solution

$$U_n = U_p + (n - p) \times r$$

$$\begin{aligned} \text{a) } U_{15} &= U_2 + (15 - 2) \times 3 &\Rightarrow U_{15} &= 8 + 13 \times 3 \\ & &\Rightarrow U_{15} &= 8 + 39 \\ & &\Rightarrow U_{15} &= 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } U_5 &= U_{19} + (5 - 19) \times 5 &\Rightarrow U_5 &= -1 + (-14) \times 5 \\ & &\Rightarrow U_5 &= -1 - 70 \\ & &\Rightarrow U_{15} &= -71 \end{aligned}$$

Exercice résolu

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$.

- Sachant que le premier terme de la suite est $U_0 = -3$, exprimer U_n en fonction de n
- Sachant que le premier terme de la suite est $U_1 = 5$, exprimer U_n en fonction de n

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) } U_n &= U_0 + n \times r &\Rightarrow U_n &= -3 + n \times 2 \\ & &\Rightarrow U_n &= -3 + 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } U_n &= U_1 + (n - 1) \times r &\Rightarrow U_n &= 5 + (n - 1) \times 2 \\ & &\Rightarrow U_n &= 5 + 2n - 2 \\ & &\Rightarrow U_n &= 3 + 2n \end{aligned}$$

Exercice résolu

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $U_0 = 4$
 - Exprimer U_n en fonction de n
 - Calculer la somme S_n définie par : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$
- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $U_1 = 0$
 - Exprimer U_n en fonction de n
 - Calculer la somme S'_n définie par : $S'_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) (1) } U_n = U_0 + n \times r &\Rightarrow U_n = 4 + n \times (-1) \\ &\Rightarrow U_n = 4 - n \end{aligned}$$

(2) S_n est la somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme U_0 et de dernier terme U_n

$$\begin{aligned} S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n &= (n + 1) \times \frac{U_0 + U_n}{2} \\ &= (n + 1) \times \frac{4 + (4 - n)}{2} \\ &= (n + 1) \times \frac{-n}{2} \\ &= -\frac{n(n + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) (1) } U_n = U_1 + (n - 1) \times r &\Rightarrow U_n = 0 + (n - 1) \times 7 \\ &\Rightarrow U_n = 7n - 7 \end{aligned}$$

(2) S'_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme U_1 et de dernier terme U_n

$$\begin{aligned} S'_n = U_1 + \dots + U_n &= n \times \frac{U_1 + U_n}{2} \\ &= n \times \frac{0 + (7n - 7)}{2} \\ &= n \times \frac{7n - 7}{2} \\ &= \frac{n(7n - 7)}{2} \end{aligned}$$

(3) Suites géométriques**✓ Comment montrer qu'une suite est géométrique ?**

Une suite numérique (U_n) est géométrique si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = \text{constante}$

Cette constante q est appelée la *raison*

(en d'autres termes une suite numérique est géométrique lorsque le quotient de U_{n+1} par U_n donne un résultat qui ne contient pas n)

Exercice résolu

Montrer que la suite $U_n = 3^n$ est une suite géométrique puis déterminer sa raison

Proposition de solution

$$U_n = 3^n$$

Déterminons l'expression de U_{n+1}

$$U_n = 3^n \Rightarrow U_{n+1} = 3^{n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n}$$

$$= \frac{3^n \times 3}{3^n}$$

$$= 3$$

On déduit donc que la suite U_n est une suite géométrique de raison 3

✓ Expression d'une suite géométrique en fonction de n

Soit n et p deux nombres entiers naturels

La relation qui lie deux termes quelconques U_n et U_p d'une suite géométrique de raison q est :

$$U_n = q^{n-p} \times U_p$$

Cas particuliers

Pour $p = 0$ la relation ci-dessus devient $U_n = q^n \times U_0$

Pour $p = 1$ la relation ci-dessus devient $U_n = q^{n-1} \times U_1$

✓ Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

$$S_n = (\text{premier terme de la somme}) \times \frac{(\text{raison})^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1} ; \text{raison} \neq 1$$

Applications

Soit U_n une suite géométrique de raison q

$$\blacksquare S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

La somme S_1 a $(n + 1)$ termes d'une suite géométrique dont le premier est U_0

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\blacksquare S_2 = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

La somme S_2 a n termes d'une suite géométrique dont le premier est U_1

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

✓ Tableau récapitulatif des suites géométriques

	Suite géométrique
Définition	$V_{n+1} = q \times V_n$ ou $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$
	q est appelé la <i>raison</i>
Relation entre deux termes V_n et V_p	$V_n = q^{n-p} \times V_p$
Ecrire V_n en fonction de n	Si le premier terme est V_0 alors $V_n = q^n \times V_0$ Si le premier terme est V_1 alors $V_n = q^{n-1} \times V_1$
Somme de termes consécutifs	Si le premier terme est V_0 alors $V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ Si le premier terme est V_1 alors $V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Convergence	Si $-1 < q \leq 1$ alors la suite est convergente Si $q = 1$ alors la suite est <i>constante et convergente</i>
Sens de variation	Si $q > 1$ alors (V_n) est <i>strictement croissante</i> Si $0 < q < 1$ alors (V_n) est <i>strictement décroissante</i>

Attention : si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Exercice résolu

Soit (V_n) une suite géométrique.

Dans chacun des cas suivants déterminer la raison de la suite (V_n) .

a) $V_2 = 2$ et $V_4 = 32$

b) $V_7 = 27$ et $V_8 = 9$

Proposition de solution

$$V_n = q^{n-p} \times V_p$$

a) $V_4 = q^{4-2} \times V_2 \Rightarrow V_4 = q^2 \times V_2$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{V_4}{V_2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{32}{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = 16$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow q = 4 \quad \text{ou} \quad q = -4$$

b) $V_8 = q^{8-7} \times V_7 \Rightarrow V_8 = q \times V_7$

$$\Rightarrow q = \frac{V_8}{V_7}$$

$$\Rightarrow q = \frac{9}{27}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

Exercice résolu

Soit (V_n) une suite géométrique de raison q .

a) Sachant que $V_3 = -2$ et $q = 2$, calculer V_6

b) Sachant que $V_{12} = 8$ et $q = \sqrt{3}$, calculer V_{10}

Proposition de solution

$$V_n = q^{n-p} \times V_p$$

$$\begin{aligned} \text{a) } V_6 &= q^{6-3} \times V_3 \Rightarrow V_6 = q^3 \times V_3 \\ &\Rightarrow V_6 = 2^3 \times (-2) \\ &\Rightarrow V_6 = 8 \times (-2) \\ &\Rightarrow V_6 = -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_{10} &= q^{10-12} \times V_{12} \Rightarrow V_{10} = q^{-2} \times V_{12} \\ &\Rightarrow V_{10} = \frac{1}{q^2} \times V_{12} \\ &\Rightarrow V_{10} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \times 8 \\ &\Rightarrow V_{10} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Exercice résolu

Soit (V_n) une suite géométrique de raison q .

- Sachant que le premier terme de la suite est $V_0 = 4$, exprimer V_n en fonction de n
- Sachant que le premier terme de la suite est $V_1 = -5$, exprimer V_n en fonction de n

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) } V_n &= q^n \times V_0 \Rightarrow V_n = (-2)^n \times 4 \\ &\Rightarrow V_n = 4 \times (-2)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_n &= q^{n-1} \times V_1 \Rightarrow V_n = (-2)^{n-1} \times (-5) \\ &\Rightarrow V_n = -5 \times (-2)^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice résolu

- a) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = -\frac{3}{4}$
- (1) Exprimer V_n en fonction de n
 - (2) Calculer la somme S_n définie par : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- b) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = -1$
- (1) Exprimer V_n en fonction de n
 - (2) Calculer la somme S'_n définie par : $S'_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Proposition de solution

$$\begin{aligned} \text{a) (1)} \quad V_n = q^n \times V_0 &\Rightarrow V_n = 2^n \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &\Rightarrow V_n = -\frac{3}{4} \times 2^n \end{aligned}$$

- (2) S_n est la somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme V_0

$$\begin{aligned} S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n &= V_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ &= -\frac{3}{4} \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= -\frac{3}{4} \times (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) (1)} \quad V_n = q^{n-1} \times V_1 &\Rightarrow V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times (-1) \\ &\Rightarrow V_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

- (2) S'_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$\begin{aligned} S'_n = V_1 + \dots + V_n &= V_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= -1 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \end{aligned}$$

$$= - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]$$

Exercice résolu

On considère la suite (U_n) définie par $U_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = 2U_n - 1$.

On définit pour tout entier naturel non nul n , une suite (V_n) par : $V_n = U_n - 1$

- Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2
- Exprimer V_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2^{n-1} + 1$

Proposition de solution

- Démontrons que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2

Remarque

Il suffit de montrer que $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2$

Déterminons l'expression de V_{n+1}

$$V_n = U_n - 1 \quad \Rightarrow \quad V_{n+1} = U_{n+1} - 1 \quad ; \quad \text{or } U_{n+1} = 2U_n - 1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = (2U_n - 1) - 1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 2U_n - 2$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2U_n - 2}{U_n - 1} \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2(U_n - 1)}{U_n - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = 2$$

On en déduit que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2

- Exprimons V_n en fonction de n

la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme V_1
 or $V_1 = U_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$$\text{donc } V_n = q^{n-1} \times V_1$$

$$V_n = 2^{n-1} \times 1 \quad \Rightarrow \quad V_n = 2^{n-1}$$

c) Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2^{n-1} + 1$

On sait que $V_n = U_n - 1$

$$V_n = U_n - 1 \quad \Rightarrow \quad U_n = V_n + 1 \quad ; \quad \text{or } V_n = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad U_n = 2^{n-1} + 1$$

Utilisation des suites numériques pour résoudre des problèmes de vie courante**Astuce**

Dans un exercice de suites numériques , les expressions ci-dessous orientent plutôt vers des *suites arithmétiques*

- Diminue de 5000 F chaque mois
- Versement mensuel qui augmente de 10000 F par rapport au versement précédent
- Intérêts simples de 8000 F par an
- Une épargne qui augmente 500 F de plus chaque mois
- etc ...

Par contre lorsqu'on utilise des expressions suivantes :

- Augmentation de 40%
- Réduction de 20%
- Diminuer du cinquième $\left(\frac{1}{5}\right)$ de sa valeur par mois
- Perdre 30% de sa valeur
- Intérêts composés de 5% par an
- etc ...

il s'agit de *suite géométrique* :

Dans un exercice de suite numérique, l'élève doit être capable de :

- Déterminer la *nature d'une suite* (suite arithmétique ou suite géométrique)
- Déterminer la *raison* d'une suite et si possible son *premier terme*
- Exprimer U_n *en fonction de n*
- Déterminer la *somme des termes consécutifs* ($U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$)

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Comment déterminer la nature d'une suite numérique	<p>On calcule la différence</p> $U_{n+1} - U_n$ <p>Si le résultat est un réel</p> $U_{n+1} - U_n = r$ <p>alors la suite est une suite arithmétique et le réel r est la raison de la suite</p>	<p>On calcule le quotient</p> $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ <p>Si le résultat est un réel</p> $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ <p>alors la suite est une suite géométrique et le réel q est la raison de la suite</p>
Expression de U_n en fonction de n	$U_n = U_k + (n - k)r$ <p>La valeur de k dépend de l'indice du 1^{er} terme de la suite</p> <p>Si le 1^{er} terme est U_0 alors</p> $U_n = U_0 + nr$ <p>Si le 1^{er} terme est U_1 alors</p> $U_n = U_1 + (n - 1)r$	$U_n = q^{n-k}U_k$ <p>La valeur de k dépend de l'indice du 1^{er} terme de la suite</p> <p>Si le 1^{er} terme est U_0 alors</p> $U_n = q^n U_0$ <p>Si le 1^{er} terme est U_1 alors</p> $U_n = q^{n-1} U_1$
Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite numérique	<p>Si le premier terme est U_0</p> $U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n + 1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$ <p>Si le premier terme est U_1</p> $U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \times \frac{U_0 + U_n}{2}$	<p>Si le premier terme est U_0</p> $U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ <p>Si le premier terme est U_1</p> $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice résolu

L'entreprise " Butterfly 2020 " propose deux contrats :

Contrat n°1

Le premier mois l'entreprise verse un salaire de 150.000 F , puis une augmentation de 20.000 F chaque mois

Contrat n°2

Le premier mois l'entreprise verse un salaire de 110.000 F, puis une augmentation de 10 % chaque mois

On désigne par : U_n le salaire du $n^{\text{ième}}$ mois avec le contrat n°1 avec $U_1 = 150.000 F$
 V_n le salaire du $n^{\text{ième}}$ mois avec le contrat n°2 avec $V_1 = 110.000 F$

Monsieur Chris , nouvel employé de *Butterfly 2020* , doit choisir un contrat d'embauche

1^{ère} partie : Avec le contrat n°1

- 1) Calculer U_2 , U_3 et U_4
- 2) Justifier que la suite U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison r
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$U_n = 150.000 + 20.000 (n - 1)$$
- 4) Calculer U_{12}
- 5) Calculer le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris

2^{ème} partie : Avec le contrat n°2

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant

Mois n	1	2	3
Salaire V_n			

- 2) Justifier que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison q
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $V_n = 110.000 \times (1,1)^{n-1}$
- 4) Calculer le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris

3^{ème} partie : Le choix du contrat

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le mois à partir duquel le contrat n°2 est plus intéressant que le contrat n°1 en ce qui concerne le contrat mensuel.

Proposition de solution**1^{ère} partie :**1) Calculons U_2 , U_3 et U_4 **Remarque**

Avec le contrat N°1 , le salaire augmente de 20.000 F chaque mois

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 + 20.000 \\ &= 150.000 + 20.000 \\ &= 170.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 + 20.000 \\ &= 170.000 + 20.000 \\ &= 190.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4 &= U_3 + 20.000 \\ &= 190.000 + 20.000 \\ &= 210.000 \end{aligned}$$

2) Justifions que la suite U_n est une suite arithmétique

$$U_{n+1} = U_n + 20.000 \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} - U_n = 20.000$$

Donc la suite U_n est une suite arithmétique de raison 20.0003) Démontrons que pour tout entier naturel non nul n ,

$$U_n = 150.000 + 20.000 (n - 1)$$

RemarqueOn demande simplement d'écrire U_n en fonction de n U_n est une suite arithmétique de raison $r = 20.000$ et de premier terme

$$U_1 = 150.000$$

$$U_n = U_1 + (n - 1) \times r$$

$$U_n = 150.000 + (n - 1) \times 20.000 \quad \Rightarrow \quad U_n = 150.000 + 20.000 (n - 1)$$

4) Calculons U_{12}

$$\begin{aligned} U_n &= 150.000 + 20.000 (n - 1) \Rightarrow U_{12} = 150.000 + 20.000 \times (12 - 1) \\ &\Rightarrow U_{12} = 150.000 + 20.000 \times 11 \\ &\Rightarrow U_{12} = 150.000 + 220.000 \\ &\Rightarrow U_{12} = 370.000 \end{aligned}$$

5) Calculons le salaire annuel S_{12} de la première année d'activité de Monsieur Chris

Remarque

le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris est égale à la somme des 12 premiers salaires de Monsieur Chris , c'est-à-dire la somme de 12 termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme $U_1 = 150.000$ et de dernier terme $U_{12} = 370.000$

$$\begin{aligned} S_{12} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12} \\ &= 12 \times \frac{U_1 + U_{12}}{2} \\ &= 12 \times \frac{150.000 + 370.000}{2} \\ &= 12 \times \frac{150.000 + 370.000}{2} \\ &= 3.120.000 \end{aligned}$$

Le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris est 3.120.000 F

2^{ème} partie

Remarque

Avec le contrat N°2 , le salaire augmente de 10% chaque mois

1) Calculons V_2 et V_3

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{10}{100} \times V_1 \\ &= 110.000 + 0,1 \times 110.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= 110.000 + 11.000 \\ &= 121.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2 + \frac{10}{100} \times V_2 \\ &= 121.000 + 0,1 \times 121.000 \\ &= 121.000 + 12.100 \\ &= 133.100 \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que :

Mois n	1	2	3
Salaire V_n	110.000	121.000	133.100

2) Justifions que la suite V_n est une suite géométrique

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n + \frac{10}{100} \times V_n \\ &= V_n + 0,1 \times V_n \\ &= V_n (1 + 0,1) \\ &= V_n \times 1,1 \\ &= 1,1 \times V_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite V_n est une suite géométrique de raison $q = 1,1$

3) Démontrons que pour tout entier naturel non nul n , $V_n = 110.000 \times (1,1)^{n-1}$

Remarque

On demande simplement d'écrire V_n en fonction de n

V_n est une suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme

$$V_1 = 110.000$$

$$\begin{aligned} V_n &= q^{n-1} \times V_1 \quad \Rightarrow \quad V_n = (1,1)^{n-1} \times 110.000 \\ &\quad \Rightarrow \quad V_n = 110.000 \times (1,1)^{n-1} \end{aligned}$$

4) Calculons le salaire annuel S'_{12} de la première année d'activité de Monsieur Chris

Remarque

le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris est égale à la somme des 12 premiers salaires de Monsieur Chris , c'est-à-dire la somme de 12 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme

$$V_1 = 110.000$$

$$S'_{12} = (\text{premier terme de la somme}) \times \frac{(\text{raison})^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

$$S'_{12} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{12}$$

$$= V_1 \times \frac{(1,1)^{12} - 1}{1,1 - 1}$$

$$= 110.000 \times \frac{(1,1)^{12} - 1}{0,1}$$

$$= \frac{110.000}{0,1} \times [(1,1)^{12} - 1]$$

$$= 1.100.000 \times [(1,1)^{12} - 1]$$

$$= 2352271,2143931$$

Le salaire annuel de la première année d'activité de Monsieur Chris est 2352271 F

3^{ème} partie

Déterminons la plus petite valeur de n pour laquelle $V_n > U_n$

$$U_{12} = 370.000 \quad \text{et} \quad V_{12} = 110.000 \times (1,1)^{12-1} = 313.842,83$$

Donc $U_{12} > V_{12}$ par conséquent le tableau de comparaison de salaires peut commencer après le 12^{ème} mois

Mois n	13	14	15	16
Salaire U_n	390.000	410.000	430.000	450.000
Salaire V_n	345.227,12	379.749,83	417.724,81	459.497,29

C'est à partir du 16^{ème} mois que le contrat n°2 devient plus intéressant que le contrat n°1 en ce qui concerne le contrat mensuel

Exercice résolu

Une vendeuse de légumes place la somme de 100.000 F le 1^{er} Janvier 2010 à la mutuelle "Wariko" aux taux d'intérêts composés de 5% par an. Soit C_n le capital de cette dame au 1^{er} Janvier de l'année 2010 + n .

- 1- Calculer C_1 , C_2 et C_3
- 2- a) Calculer, pour tout entier naturel n , C_{n+1} en fonction de C_n
b) En déduire l'expression de C_n en fonction de n
- 3- L'objectif de cette dame est d'acheter une cantine pour protéger ses légumes contre les insectes. Cette cantine coute 200.000 F au marché. En quelle année pourra-t-elle disposer d'une somme suffisante si elle ne compte que sur ce placement ?

Proposition de solution**Remarque**

Le capital initial de la vendeuse de légumes est $C_0 = 100000$ F

- 1) Calculons C_1 , C_2 et C_3

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + \frac{5}{100} \times C_0 \\ &= 100000 + 0,05 \times 100000 \\ &= 100000 + 5000 \\ &= 105000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + \frac{5}{100} \times C_1 \\ &= 105000 + 0,05 \times 105000 \\ &= 105000 + 5250 \\ &= 110250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + \frac{5}{100} \times C_2 \\ &= 110250 + 0,05 \times 110250 \\ &= 110250 + 5512,5 \\ &= 115762,5 \end{aligned}$$

2) a- Calculons pour tout entier naturel n , C_{n+1} en fonction de C_n

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + \frac{5}{100} \times C_n \\ &= C_n + 0,05 \times C_n \\ &= C_n(1 + 0,05) \\ &= 1,05 \times C_n \end{aligned}$$

b- Déterminons l'expression de C_n en fonction de n

Comme pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 1,05 \times C_n$ alors la suite C_n est une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme C_0

$$\begin{aligned} C_n = q^n \times C_0 &\Rightarrow C_n = (1,05)^n \times C_0 \\ &\Rightarrow C_n = (1,05)^n \times 100.000 \\ &\Rightarrow C_n = 100.000 \times (1,05)^n \end{aligned}$$

3) Déterminons le nombre d'années pour que la vendeuse de légumes dispose d'une somme suffisante pour acheter une cantine qui coûte 200.000 F .

$$\begin{aligned} C_n \geq 200.000 &\Rightarrow 100.000 \times (1,05)^n \geq 200.000 \\ &\Rightarrow (1,05)^n \geq \frac{200.000}{100.000} \\ &\Rightarrow (1,05)^n \geq 2 \\ &\Rightarrow \ln[(1,05)^n] \geq \ln 2 \\ &\Rightarrow n \times \ln(1,05) \geq \ln 2 \\ &\Rightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1,05)} \\ &\Rightarrow n \geq 14,2 \\ &\Rightarrow n = 15 \end{aligned}$$

Il faut 15 années d'épargne à la vendeuse pour acheter la cantine ; c'est donc en 2025 que la vendeuse pourra acheter la cantine

Exercice résolu (BAC 2012)

Une coopérative de vendeuses de vivriers veut acheter un camion pour transporter ses produits. Un vendeur de véhicules lui propose un camion aux conditions suivantes :

- Payer en 36 mensualités et ce, à partir du premier mois suivant celui de la livraison
 - Payer 1600000 francs CFA comme première mensualité puis payer 40000 francs CFA de moins que la mensualité du mois précédent et ceci pendant les 35 autres mois.
- 1) On désigne par T_n la mensualité du $n^{\text{ième}}$ mois ($1 \leq n \leq 36$)
 - a- Calculer la deuxième mensualité
 - b- Justifier que la suite (T_n) est une suite arithmétique ; préciser le premier terme et la raison
 - c- Quel est le sens de variation de la suite (T_n) ?
 - 2) a- Démontrer que $T_n = 1640000 - 40000n$
 - b- Calculer T_6 et T_{36}
 - 3) Calculer le montant total que la coopérative doit déboursier pour acquérir le camion

Proposition de solution

- 1) a- Calculons la deuxième mensualité

Remarque

La première mensualité est $T_1 = 1.600.000 F$

$$\begin{aligned} T_2 = T_1 - 40.000 &\quad \Rightarrow \quad T_2 = 1.600.000 - 40.000 \\ &\quad \Rightarrow \quad T_2 = 1.560.000 \end{aligned}$$

- b- Justifions que la suite (T_n) est une suite arithmétique

Pour tout entier naturel n tel que $1 \leq n \leq 36$, on a :

$$T_{n+1} = T_n - 40.000 \quad \Rightarrow \quad T_{n+1} - T_n = -40.000$$

Donc la suite (T_n) est une suite arithmétique de premier terme $T_1 = 1.600.000$ et de raison $r = -40.000$

- c- Déterminons le sens de variation de la suite (T_n)

Comme la raison de la suite arithmétique (T_n) est négative alors elle est décroissante

2) a- Démontrons que $T_n = 1640000 - 40000n$

Remarque

On demande simplement d'écrire T_n en fonction de n

La suite (T_n) est une suite arithmétique de premier terme $T_1 = 1600000$ et de raison -40000 donc :

$$\begin{aligned} T_n &= T_1 + (n - 1) \times r \quad \Rightarrow \quad T_n = 1600000 + (n - 1) \times (-40.000) \\ &\Rightarrow \quad T_n = 1.600.000 - 40.000n + 40.000 \\ &\Rightarrow \quad T_n = 1.640.000 - 40.000n \end{aligned}$$

b- Calculons T_6 et T_{36}

On sait que $T_n = 1.640.000 - 40.000n$

Pour $n = 6$ on a :

$$\begin{aligned} T_6 &= 1.640.000 - 40.000 \times 6 \quad \Rightarrow \quad T_6 = 1.640.000 - 240.000 \\ &\Rightarrow \quad T_6 = 1.400.000 \end{aligned}$$

Pour $n = 36$ on a :

$$\begin{aligned} T_{36} &= 1.640.000 - 40.000 \times 36 \quad \Rightarrow \quad T_{36} = 1.640.000 - 1440.000 \\ &\Rightarrow \quad T_{36} = 200.000 \end{aligned}$$

3) Calculons le montant total que la coopérative doit déboursier pour acquérir le camion

Le prix du camion est égale à la somme des 36 mensualités ; en d'autres termes le prix du camion est égale à la somme de 36 termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme $T_1 = 1.600.000$ et de dernier terme

$$T_{36} = 200.000$$

Soit S le prix du camion

$$\left(S = (\text{nombre de termes de la somme}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right)$$

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{35} + T_{36}$$

$$= 36 \times \frac{T_1 + T_{36}}{2}$$

$$= 36 \times \frac{1.600.000 + 200.000}{2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 36 \times \frac{1.800.000}{2} \\
 &= 36 \times 900.000 \\
 &= 32.400.000
 \end{aligned}$$

Le montant total que la coopérative doit déboursier pour acquérir le camion est de 32.400.000 F

Exercice résolu (BAC 2013)

« Mangoua et Fils » est une PME (Petite et Moyenne Entreprise) spécialisée dans la distribution des journaux à domicile. Les dirigeants de cette PME estiment que le nombre d'abonnés est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 10\,000 \\ a_{n+1} = 0,8a_n + 5\,000 \end{cases}$$

Où a_0 désigne le nombre d'abonnés à la création de la PME et a_n le nombre total d'abonnés au terme de n années d'exercice.

- 1- Calculer le nombre d'abonnés de la PME au terme de la première année d'exercice.
- 2- Soit (b_n) la suite définie par : $b_n = 25\,000 - a_n$, pour tout entier naturel n
 - a) Calculer b_0 et b_1
 - b) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 15 000 .
 - c) Exprimer b_n en fonction de n
 - d) En déduire que : $a_n = 25000 - 15000 \times (0,8)^n$
- 3- Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

Proposition de solution

- 1- Calculons le nombre d'abonnés de la PME au terme de la première année d'exercice

$$a_1 = 0,8a_0 + 5\,000 \quad ; \quad \text{avec} \quad a_0 = 10\,000$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,8 \times 10\,000 + 5\,000 \\
 &= 8\,000 + 5\,000 \\
 &= 13\,000
 \end{aligned}$$

Le nombre d'abonnés de la PME au terme de la première année d'exercice est de 13 000

2- a) Calculons b_0 et b_1

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 25\,000 - a_0 \\
 &= 25\,000 - 10\,000 \\
 &= 15\,000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 25\,000 - a_1 \\
 &= 25\,000 - 13\,000 \\
 &= 12\,000
 \end{aligned}$$

b) Démontrons que (b_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 15 000

Déterminons l'expression de b_{n+1}

$$\begin{aligned}
 b_n = 25\,000 - a_n &\implies b_{n+1} = 25\,000 - a_{n+1} \\
 &\implies b_{n+1} = 25\,000 - (0,8a_n + 5\,000) \\
 &\implies b_{n+1} = 25\,000 - 0,8a_n - 5\,000 \\
 &\implies b_{n+1} = 20\,000 - 0,8a_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{20\,000 - 0,8a_n}{25\,000 - a_n} \\
 &= \frac{0,8 \left(\frac{20\,000}{0,8} - a_n \right)}{25\,000 - a_n} \\
 &= \frac{0,8(25\,000 - a_n)}{25\,000 - a_n} \\
 &= 0,8
 \end{aligned}$$

On conclut donc que (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

De plus son premier terme est $b_0 = 15\,000$ car

$$b_0 = 25\,000 - a_0 = 25\,000 - 10\,000 = 15\,000$$

c) Exprimons b_n en fonction de n

$$b_n = q^n \times b_0 \Rightarrow b_n = (0,8)^n \times 15\,000$$

$$\Rightarrow b_n = 15\,000 \times (0,8)^n$$

d) Montrons que $a_n = 25\,000 - 15\,000 \times (0,8)^n$

$$\text{On sait que } b_n = 25\,000 - a_n \text{ et } b_n = 15\,000 \times (0,8)^n$$

$$\text{donc } 25\,000 - a_n = 15\,000 \times (0,8)^n \Rightarrow -a_n = 15\,000 \times (0,8)^n - 25\,000$$

$$\Rightarrow a_n = -15\,000 \times (0,8)^n + 25\,000$$

$$\Rightarrow a_n = 25\,000 - 15\,000 \times (0,8)^n$$

3) Déterminons le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

Remarque

On demande de déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour que $a_n > 22\,000$

$$a_n > 22\,000 \Rightarrow 25\,000 - 15\,000 \times (0,8)^n > 22\,000$$

$$\Rightarrow -15\,000 \times (0,8)^n > 22\,000 - 25\,000$$

$$\Rightarrow -15\,000 \times (0,8)^n > -3\,000$$

$$\Rightarrow 15\,000 \times (0,8)^n < 3\,000$$

$$\Rightarrow (0,8)^n < \frac{3\,000}{15\,000}$$

$$\Rightarrow (0,8)^n < 0,2$$

$$\Rightarrow \ln[(0,8)^n] < \ln(0,2)$$

$$\Rightarrow n \times \ln(0,8) < \ln(0,2)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}$$

$$\Rightarrow n > 7,21$$

$$\Rightarrow n = 8$$

L'inégalité change de sens
car $\ln(0,8)$ est négatif

Il faut donc 8 années pour que le nombre d'abonnés de la PME « Mangoua et Fils » dépasse 22 000

Exercice résolu (BAC 2017)

En 2014 , la foire gastronomique d'une commune a enregistré 6 000 visiteurs . Une étude montre que chaque année , 80% des visiteurs de l'année précédente reviennent tandis que 2 000 nouveaux visiteurs sont enregistrés.

On note U_0 le nombre de visiteurs en 2014 et U_n le nombre de visiteurs en 2014 + n ($n \in \mathbb{N}$)

1- Justifie qu'en 2015 le nombre de visiteurs U_1 est 6 800

2- Calcule le nombre de visiteurs en 2016

3- On admet que , pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = (0,8) \times U_n + 2 000$

On pose , pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - 10 000$

a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $-4 000$

b) Exprime , pour tout entier naturel n , V_n en fonction de n

c) Justifie que , pour tout entier naturel n , $U_n = 10 000 - 4 000 \times (0,8)^n$

4- a) Détermine le plus petit nombre entier naturel n pour lequel :

$$10 000 - 4 000 \times (0,8)^n > 9 000$$

b) Détermine l'année à partir de laquelle le nombre de visiteurs dépassera 9 000

Proposition de solution

1- Justifions qu'en 2015 le nombre de visiteurs U_1 est 6 800

En 2015 les visiteurs de la foire gastronomique sont composés de 80% des 6000 visiteurs de 2014 et des 2000 nouveaux visiteurs :

$$\begin{aligned} U_1 &= 80\% \times 6000 + 2000 \\ &= 0,8 \times 6000 + 2000 \\ &= 4800 + 2000 \\ &= 6800 \end{aligned}$$

Remarque

Comme $U_0 = 6000$, on peut écrire $U_1 = 80\% \times U_0 + 2000$

2- Calculons le nombre de visiteurs en 2016

En 2016 les visiteurs de la foire gastronomique sont composés de 80% des 6800 visiteurs de 2015 et des 2000 nouveaux visiteurs :

$$\begin{aligned} U_2 &= 80\% \times 6800 + 2000 & (U_2 = 80\% \times U_1 + 2000) \\ &= 0,8 \times 6800 + 2000 \\ &= 7440 \end{aligned}$$

3- a) Démontrons que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $-4\ 000$

$$\begin{aligned} V_n &= U_n - 10\ 000 \quad , \quad \text{donc} \quad V_{n+1} = U_{n+1} - 10\ 000 \\ &= (0,8) \times U_n + 2\ 000 - 10\ 000 \\ &= (0,8) \times U_n - 8\ 000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{(0,8) \times U_n - 8\ 000}{U_n - 10\ 000} \\ &= \frac{0,8 \left(U_n - \frac{8\ 000}{0,8} \right)}{U_n - 10\ 000} \\ &= \frac{0,8(U_n - 10\ 000)}{U_n - 10\ 000} \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 - 10\ 000 \\ &= 6000 - 10000 \\ &= -4000 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $-4\ 000$

b) Exprimons V_n en fonction de n

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $-4\ 000$

Donc $V_n = q^n \times V_0 = (0,8)^n \times (-4000)$

$$V_n = -4000 \times (0,8)^n$$

c) Justifions que $U_n = 10\,000 - 4\,000 \times (0,8)^n$

On sait que $V_n = U_n - 10\,000$

Donc $U_n = V_n + 10\,000$

$$= -4000 \times (0,8)^n + 10\,000$$

$$= 10\,000 - 4000 \times (0,8)^n$$

4- a) Déterminons le plus petit nombre entier naturel n pour lequel :

$$10\,000 - 4\,000 \times (0,8)^n > 9\,000$$

$$10\,000 - 4\,000 \times (0,8)^n > 9\,000 \quad \Rightarrow \quad -4\,000 \times (0,8)^n > 9\,000 - 10\,000$$

$$\Rightarrow \quad -4\,000 \times (0,8)^n > -1000$$

$$\Rightarrow \quad (0,8)^n < \frac{-1000}{-4000}$$

$$\Rightarrow \quad (0,8)^n < 0,25$$

$$\Rightarrow \quad \ln((0,8)^n) < \ln(0,25)$$

$$\Rightarrow \quad n \times \ln(0,8) < \ln(0,25)$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)}$$

$$\Rightarrow \quad n > 6,21$$

Donc le plus petit nombre entier naturel n pour lequel :

$$10\,000 - 4\,000 \times (0,8)^n > 9\,000 \quad \text{est } 7$$

b) Déterminons l'année à partir de laquelle le nombre de visiteurs dépassera 9 000

$$U_n > 9000 \quad \Rightarrow \quad 10\,000 - 4\,000 \times (0,8)^n > 9\,000$$

D'après la question précédente, il faut 7 années pour que le nombre de visiteurs dépasse 9000

Donc $2014 + 7 = 2021$

C'est à partir de 2021 que le nombre de visiteurs dépassera 9000