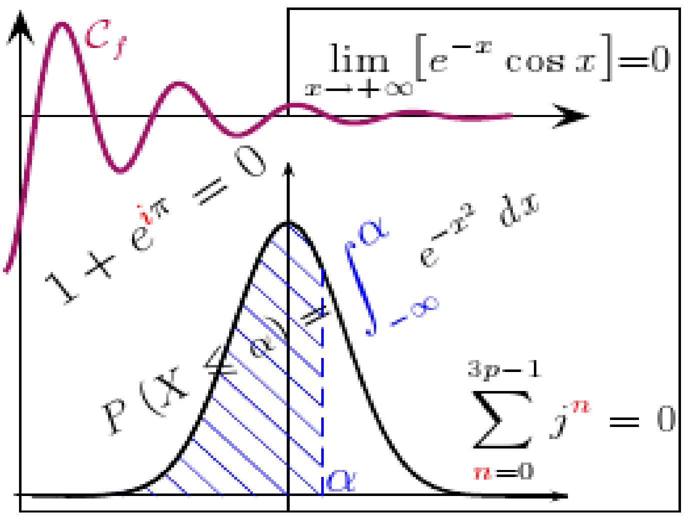
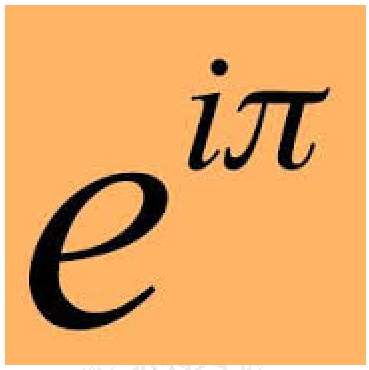
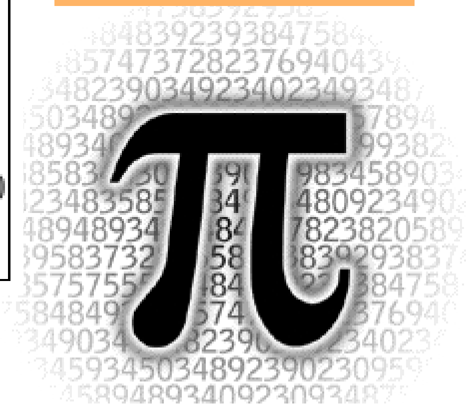
ANNABAC

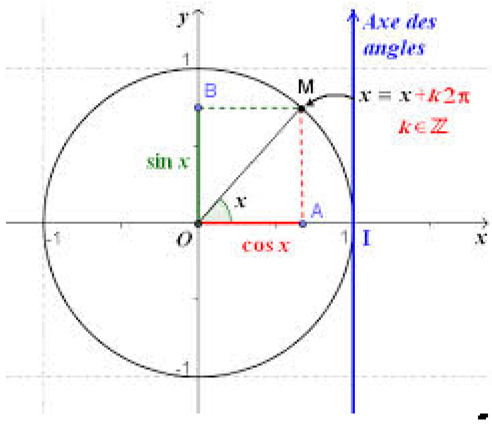
Mathematique

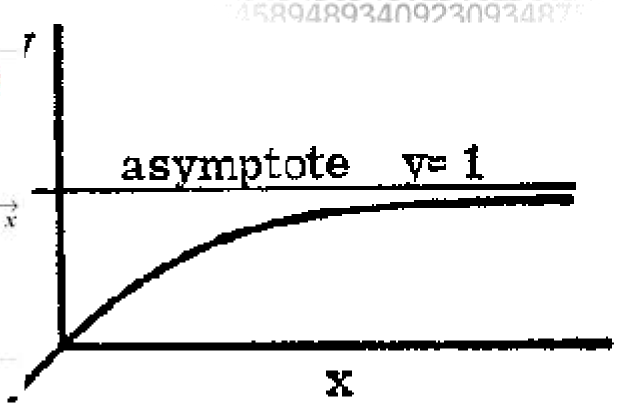
T^{le} S$_2$











Aboubakry sow

A MERY

Année 2016

SOMMAIRE

A- LIMITES

Soit f une fonction numérique définie sur D_f, de courbe représentative C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

I Limites des fonctions de référence

Fonction	Limite en -∞	Limite en 0	Limite en +∞
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$	0
$\sqrt{x}$	N'existe pas	0	$+\infty$
sin(x) cos(x)	N'existe pas	0 1	N'existe pas

II Opérations sur les limites

1. Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indéterminé**

2. Limite d'un produit

Limite de f	Limite de g	Limite de f x g
L	L'	L x L'
L	∞	∞ (signe à voir)
∞	∞	∞ (signe à voir)
0	∞	**Indéterminé**

3. Limite d'un quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
L	L'	L / L'
L	∞	0
∞	L	∞ (signe à voir)
∞	∞	**Indéterminé**
1	0	∞
∞	0	∞ (signe à voir)
0	0	**Indéterminé**

4. Autres limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

NB : si f est dérivable en x_0 alors $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Remarques :

- Il y a des fonctions qui n'ont pas de limite en x_0 comme la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0.
- Il y a des fonctions qui n'ont pas de limite au voisinage de $+\infty$ comme la fonction sin.

THEOREMES

Limite de la composée de deux fonctions :Théorème 1 :

Soient f et g deux fonctions, a, L et L ' trois nombres réels (pouvant être éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$). Si l'on a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\\ \lim\limits_{t\to L}g(t)=L'\end{cases}$,

alors : $\lim\limits_{x\to a}g[f(x)]=L'$.

Théorèmes de comparaison

Théorème 2 :

Soient f, g et h trois fonctions. On suppose que pour toutes les valeurs de x assez grandes, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarques :

- *Ce théorème reste valable au voisinage de $-\infty$ ou d'un réel x_0.*
- *Il est souvent appelé théorème des gendarmes.*

Théorème 3 :

Soient f et g deux fonctions.

- On suppose que pour toutes les valeurs de x assez grandes, on a : $f(x) \geq g(x)$. si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- On suppose que pour toutes les valeurs de x assez grandes, on a : $f(x) \leq g(x)$. si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : Ce théorème reste valable au voisinage de $-\infty$ ou d'un réel x_0.

Théorème 4 :

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$(ou en $-\infty$) est égale à la limite de son terme de plus haut degré en $+\infty$(ou en $-\infty$).
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$(ou en $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur en $+\infty$(ou en $-\infty$)

Théorème 5 : ***Limite d'une composée de fonctions***

a, b et l désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$.

III **BRANCHES INFINIES D'UNE COURBE**

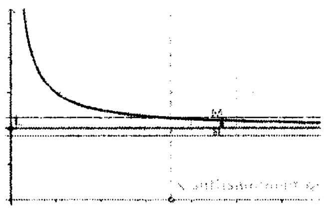
Propriété 1 :

La droite (D) d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative C_f de la fonction f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $(b \in IR)$.

Exemple :

*Considérons maintenant la fonction f dont la courbe représentative est :Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **f(x)** se rapproche de plus en plus de 2. On dit alors que **f(x)** tend vers 2. Ou que la **limite** de la fonction f lorsque **x** tend vers $+\infty$ est égale à 2. Ce que l'on résume par :*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2}$$



Définition et propriété équivalentes pour une limite en $-\infty$.

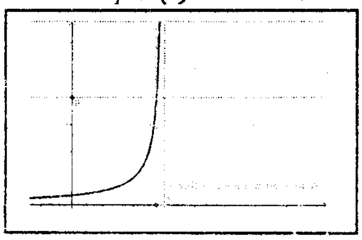
Propriété 2 :

La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative C_f de la fonction f si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Exemple 1 :

considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]3; +\infty[$ dont la courbe représentative est :

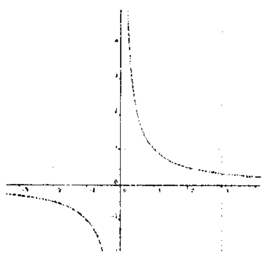
*Lorsque **x** se rapproche de 3, **f(x)** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête. On dit alors que **f(x)** tend vers $+\infty$. Ou que la **limite** de lafonction f lorsque **x** tend vers 3 est égale à $+\infty$. Ce que l'on résume par :*



Exemple2 : *Dans ce qui suit, f désignera la fonction inverse.*

Ainsi pour tout x : $f(x) = \frac{1}{x}$ La fonction inverse f est définie sur l'intervalle $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. On a alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

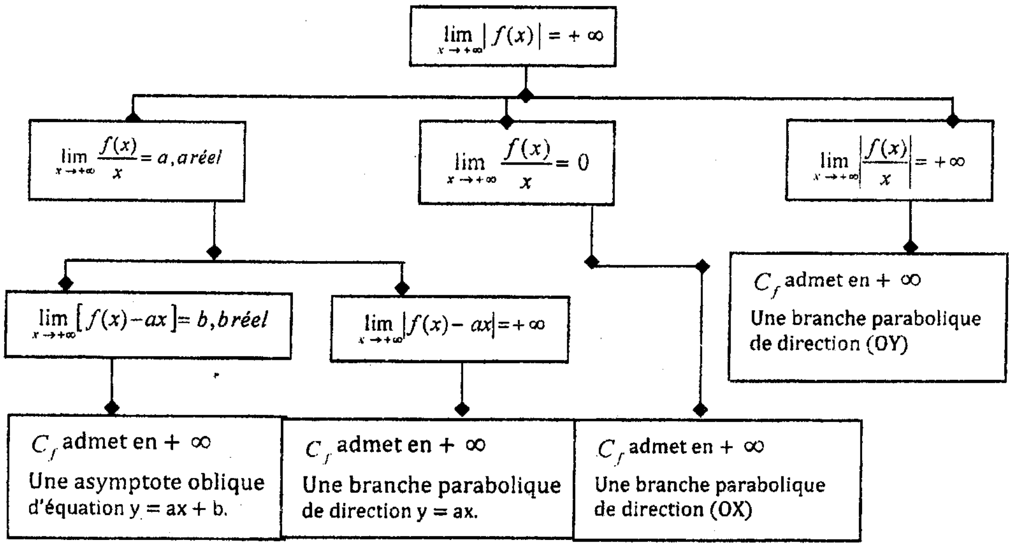


Asymptote oblique, asymptote courbe.

(C) étant la courbe représentative de la fonction f.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$ alors (C) a pour asymptote la droite d'équation $y=ax+b$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-g(x)=0$ alors (C) a pour asymptote la courbe représentative de g.

Organigramme d'étude d'une branche infinie à l'infini



FICHE METHODE : CALCUL DE LIMITES

Comment calculer une limite à l'infini ?

☆ Appliquer les théorèmes des opérations sur les limites, et les limites des fonctions usuelles.

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2+2x-7 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^4+\frac{2}{5}x^2 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{3x+5}$$

☆ *Théorèmes de comparaison*. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2}$

☆ *Limite d'une fonction composée*. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2}{5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x^5}$

☆ *Si on obtient une forme indéterminée* (« $\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ ») pour :

1. *une fonction polynôme de degré n :*
   Chercher la limite de son terme du plus haut degré. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2+5x+4$
2. *une fonction rationnelle :*

Chercher la limite du rapport de ses termes du plus haut degré.(après simplification) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x+7}{3x^2+4x-3}$

3. *une fonction irrationnelle :*

Multiplier et diviser par l'expression conjuguée. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ Ou Mettre le monôme de plus haut degré en facteur $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+3x}$

Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ? $\lim\limits_{x\to a^+}$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}$

Calculer la valeur prise par le numérateur.

1. Si elle est différente de 0, la limite est infinie. Etudier alors le signe du dénominateur. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x+5}{2-x}$
2. Si elle est nulle,
   - factoriser numérateur et dénominateur puis simplifier. $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^3-10x^2+x+6}{2x^2-x-15}$
   - Ou - Utiliser le nombre dérivé. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}$

Levons l'indétermination :

$\frac{4x-1}{2x+3} = \frac{x}{x} \times \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right) = 4$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right) = 2$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4}{2} = 2$. Et donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+3} = 2$.

- Par ailleurs, $\lim_{X\to 2}\sqrt{X} = \sqrt{2}$. Comme limite de fonctions composées, on a $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}} = \sqrt{2}$.

<u>Méthode :</u> **Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement**

Calculer : 1) $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cos x}{x^2+1}$

<u>Résolution</u>

1) $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x, $-1 \leq \sin x$ donc $x-1 \leq x+\sin x$.

Or $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout $x < 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x \leq x\cos x \leq -x$.

Et donc $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq -\frac{x}{x^2+1}$

Ou encore $\frac{x}{x^2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq -\frac{x}{x^2+1} \leq -\frac{x}{x^2}$

Soit $\frac{1}{x} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq -\frac{1}{x}$

Or $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$.

B- CONTINUITE

I- <u>CONTINUITE EN UN POINT x_0</u>

<u>1. Définition</u> :

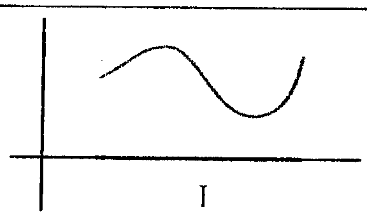
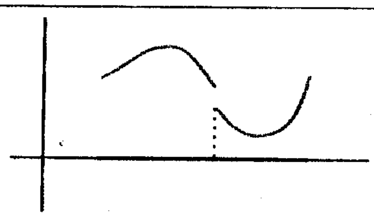
f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Théorème</u> :

La fonction est continue en x_0 si et seulement si elle à gauche et à droite en x_0

<u>Remarque</u>

- Dire que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ revient aussi à dire que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Graphiquement, on reconnaît qu'une fonction f est continue sur I lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille.	*Une fonction n'est pas continue en un point a lorsque la courbe a une discontinuité en a, elle fait un "saut".*
 I	 I

2. Prolongement par continuité

Définition :

f est une fonction non définie en x_0 et admettant une limite L en x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in IR$) alors la fonction f est prolongeable par continuité en x_0. La fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x), \text{ pour } x \in D_f \text{ et } x \neq x_0 \\ g(x_0) = L \end{cases}$ est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

II- CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

1. Définition :

Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle I, on dit que **f est continue sur** I si f est continue en tout point x_0 de I.

2. Définition :

Les réels a et b sont finis ou infinies

- Soit f définie sur $]a; b[$ on dit que f est continue sur $]a; b[$ si elle est continue en tout point de sur $]a; b[$
- Soit f définie sur $[a, b]$ on dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue en tout point de$]a; b[$, continue à droite de a et à gauche de b

Graphiquement, *cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.*

3. Théorème :

- **P1** : Toute fonction polynôme est continue sur IR.
- **P2** : Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- **P3** : Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur IR.
- **P4** : La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

4. Opérations :

Soient f *et* g continue sur I

- $f + g$ est continue sur I
- fXg est continue sur I
- $\frac{f}{g}$ est continue sur I si g ne s'annule pas sur I
- **Si** f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

Continuité et Composé de fonction

Théorème

Si f est continue sur I et g continue sur J *si* $g(I) \subset J$ alors gof est continue sur I

III- L'IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

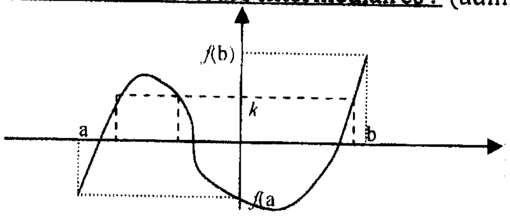
Théorème 1

L'image d'un intervalle I par une fonction f continue est un intervalle $J = f(I)$

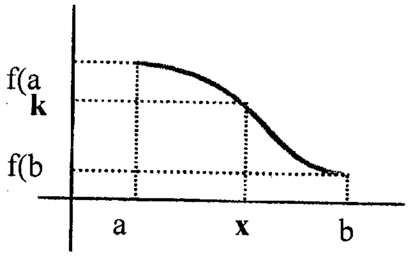
Théorème 2

L'intervalle I	f(I)	
	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$[a ; b]$	$[f(a) ; f(b)]$	$[f(b) ; f(a)]$
$[a ; b[$	$[f(a) ; \lim\limits_{b} f[$	$]\lim\limits_{b} f ; f(a)]$
$]a ; b]$	$]\lim\limits_{a} f ; f(b)]$	$[f(b) ; \lim\limits_{a} f[$
$]a ; b[$	$]\lim\limits_{a} f ; \lim\limits_{b} f[$	$]\lim\limits_{b} f ; \lim\limits_{a} f[$

1. **Théorème des Valeurs Intermédiaires :** (admis)



- Si la fonction f est définie et continue sur un intervalle I, si a et b sont deux valeurs de I et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$; alors il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$.



- Si la fonction f **est continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **l'équation $f(x) = k$ a une solution unique** dans $[a\,;\,b]$.

Corollaire1

- *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire c'est-à-dire si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel α compris entre a et b solution de l'équation $f(x) = 0$*
- *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire c'est-à-dire si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un unique réel α compris entre a et b solution de l'équation $f(x) = 0$*

Application : *approximation des solutions d'une équation.*
Diverses méthodes : *par balayage (tableur) ou par dichotomie ;*

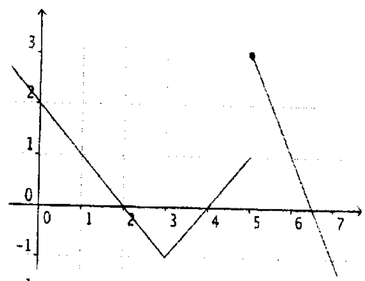
2. **Théorème de la bijection** :

Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I vers un intervalle J= f(I)
Elle admet une bijection réciproque notée f^{-1} qui est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que f.
Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x dans un repère orthonormé

NB

- On dit que f est une bijection de I sur J si pour tout y de J , il existe un unique x de I tel que f(x) = y. *(tout élément de J admet un unique antécédent dans I)*
- La fonction qui a y de J associe son unique antécédent x de I est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction



On considère la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \le x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \ge 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur IR ?
Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur IR.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$.
Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :
- $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(-x+2) = -3+2 = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-4) = 3-4 = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = f(3)$ donc la fonction f est continue en 3.

- $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}(x-4) = 5-4 = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}(-2x+13) = -2\times5+13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) $f(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$ $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ Donc, pour tout x de $\left[2;+\infty\right[$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$ .alors elle réalise une bijection de $\left[2;+\infty\right[$ vers $[-2; +\infty[$ or $0 \in [-2; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[2;+\infty\right[$.

2) $f(2.73)\times f(2.74) < 0$ alors $2.73 < \alpha < 2.74$

DERIVATION

I- *DERIVABILITE en un point x_0*

1. Nombre dérivé

a- Définition :

Dire que la fonction f est **dérivable** en x_0 signifie que la limite lorsque x tend vers x_0 du quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **existe** et qu'elle est ***finie***.

Lorsque c'est le cas, elle porte l'appellation de **nombre dérivé** de la fonction f en x_0.

Il est noté $f'(x_0)$. Autrement écrit : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

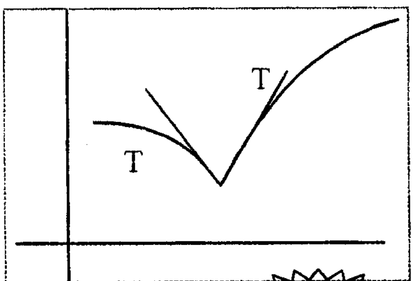
b- Tangente

Définition :

La courbe représentative de f a pour tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ la droite (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$. *(T) a pour équation* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. ***Cas particulier*:** Si $f'(x_0) = 0$, (T) est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Remarques :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un nombre réel l, on dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 et que l est le nombre dérivé à droite de f en x_0 noté $f_d'(x_0)$. La courbe représentative de f a alors une ***demi-tangente*** de coefficient directeur l en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ (Propriété similaire avec une limite à gauche et un nombre dérivé à gauche)
- ***Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0, il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en x_0 et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux.***
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ on dit que f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe représentative de f a alors une ***tangente verticale*** au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$.
- Soient l *et* l' deux nombres réels différents si $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'$ f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe représentative de f *admet deux* ***demi-tangentes au point d'abscisse x_0***. Une demi-tangente à droite de coefficient directeur $f_d'(x_0) = l$ et une demi-tangente à gauche de coefficient directeur $f_g'(x_0) = l'$



c. Propriété

Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. (La réciproque est fausse) ***Application*** : toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

II- FONCTION DERIVEE

1. **Définition :**

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. L'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée **fonction dérivée** de f. La fonction dérivée de f est notée f '.

Remarque:

- Si la fonction f ' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f ' sera notée f'' ou $f^{(2)}$, on l'appelle dérivée seconde de f.
- On peut ainsi, par itérations, définir si elle existe la dérivée d'ordre n de f que l'on notera $f^{(n)}$.

2. **Théorème** :

- **P1** : Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
- **P2** : Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- **P3** : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur IR.
- **P4** : La fonction racine carrée est continue sur$]0;\ +\infty[$
- **P5** : La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.
- **P6** : Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Les fonctions $f+g$; fg , $\frac{f}{g}(g \neq 0)$; $f^n(n \in IN^*)$; $\sqrt{f}$ $(f > 0$ et $\alpha f + \beta g$ avec $\alpha \in IR$ et $\beta \in IR$, sont dérivables sur I.
- **P7** : Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J si $f(I) \subset J$ alors gof est dérivable sur I.

III- DERIVEES DES FONCTIONS USUELLES & OPERATIONS SUR LES DERIVEES

1- Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = c \in IR$	$f'(x) = 0$	IR
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	IR
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	IR
$f(x) = x^n\ n \in IR^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	IR
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$IR_+^* =]0;\ +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	IR^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}\ n \in IN^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	IR^*
$f(x) = sinx$	$f'(x) = cosx$	IR
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -sinx$	IR
$f(x) = tanx$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$	$IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2- Opérations sur les dérivées

Soient U et V deux fonction dérivable de dérivées respectives U' et V'

Fonction	Dérivée
λu	$\lambda u'$
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$

$\frac{1}{u^n}$ $n \in IN$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$v(u(x))$	$u'(x).v'(u(x))$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\text{Cos}(u)$	$-u'\sin(u)$
$\text{Sin}(u)$	$U\cos(u)$

IV- DERIVEE ET APPLICATIONS

1- Variation

Théorème (rappel)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

2- Extrémum :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum en x_0.

3- Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un point d'inflexion en x_0. Dans ce cas la courbe de f traverse sa tangente en x_0 en changeant de concavité.

4- Inégalité des accroissements finis

Théorème1

S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f' \leq M$ sur I, alors pour tous réels a et b de I avec $a \leq b$: $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Preuve

✓ En effet, notons g la fonction définie sur I par : $g(x) = Mx - f(x)$. Alors g est dérivable et pour tout réel x de I, $g'(x) = M - f'(x)$; et de l'hypothèse $f'(x) \leq M$, on déduit que $g'(x) \geq 0$. Ainsi la fonction g est croissante sur I ; $a \leq b$, on déduit que $g(a) \leq g(b)$, c'est-à-dire : $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$. Donc $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
Nous démontrerons de même l'inégalité $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ en utilisant la fonction h définie sur I par $h(x) = mx - f(x)$.

Théorème2

Si $|f'| \leq M$ sur un intervalle I, alors quels que soient a et b dans I, avec $a \leq b$: $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Preuve

✓ En effet, l'hypothèse $|f'| \leq M$ est équivalente à : $-M \leq f' \leq M$. Nous en déduisons, d'après le théorème1 précédent Pour $a \leq b, -M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
Pour $a \geq b, -M(a-b) \leq f(a) - f(b) \leq M(a-b)$ D'où le résultat annoncé.

5- Dérivation de la bijection réciproque

Théorème

Soit f une **bijection** dérivable d'un intervalle I sur un intervalle J. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'of^{-1}(y_0)}$

Preuve

✓ Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$ et $f(x_0) = y_0$, pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$ $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

$\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'of^{-1}(y_0)}$. Puis que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ .Ce qui prouve que la réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'of^{-1}(y_0)}$

Remarque :
Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est alors dérivable sur $J = f(I)$ et : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$

ETUDE DE FONCTIONS

I- PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

Pour étudier une fonction nous pouvons sauf indication contraire adopter le plan suivant :

1. Déterminer le domaine de définition (Ecrire le domaine sous forme intervalle ou de réunion d'intervalles)
2. Etudier la parité et la périodicité si nécessaire
3. Limites aux bornes de son domaine de définition et En déduire si possible les asymptotes
4. Etudier les variations (Déterminer la Dérivée de la fonction puis étudier le signe de la dérivée en déduire le sens de variation de la fonction et en fin dresser le tableau de variation)
5. Représentation graphique de la courbe de la fonction

NB

- Préciser si possible les éléments de symétrie
- Points d'intersection avec les axes
- Tangentes particulières à la courbe

Méthode : **Etude d'une fonction composée**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{3x+1}}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.
3) Etudier la dérivabilité de f.
4) Etudier les variations de f.
5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C.
6) Vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

Résolution

1) La fonction racine carrée est définie sur $\left[0;+\infty\right[$ donc la fonction f est définie pour $\dfrac{2x}{3x+1} \geq 0$. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		-	|	-	0	+	
$3x+1$		-	0	+	|	+	
$\dfrac{2x}{3x+1}$		+	||	-	0	+	

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right[\cup \left[0;+\infty\right[$.

2) - Recherche des limites à l'infini :
La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.
Levons l'indétermination :

$\dfrac{2x}{3x+1} = \dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right) = 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x+1} = \dfrac{2}{3}$. De plus $\lim\limits_{X\to\frac{2}{3}} \sqrt{X} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ainsi la droite d'équation $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$:

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} (3x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} 2x = -\frac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3}}} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$. En effet, pour $x < -\frac{1}{3}$, $3x+1<0$. De plus $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3}}} f(x) = +\infty$. Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C.

3) $x \mapsto \frac{2x}{3x+1}$ est strictement positive et dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$. Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$. Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\sqrt{\frac{2h}{3h+1}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2h}{3h+1}}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \sqrt{\frac{1}{h^2} \times \frac{2h}{3h+1}}$$

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \sqrt{\frac{2}{3h^2+h}}$$

$$= +\infty$$

4) Pour tout réel x de $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$, on pose $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$.

$$u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(3x+1)^2}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3x+1}}{(3x+1)^2\sqrt{2x}}.$$

Et donc $f'(x) > 0$.

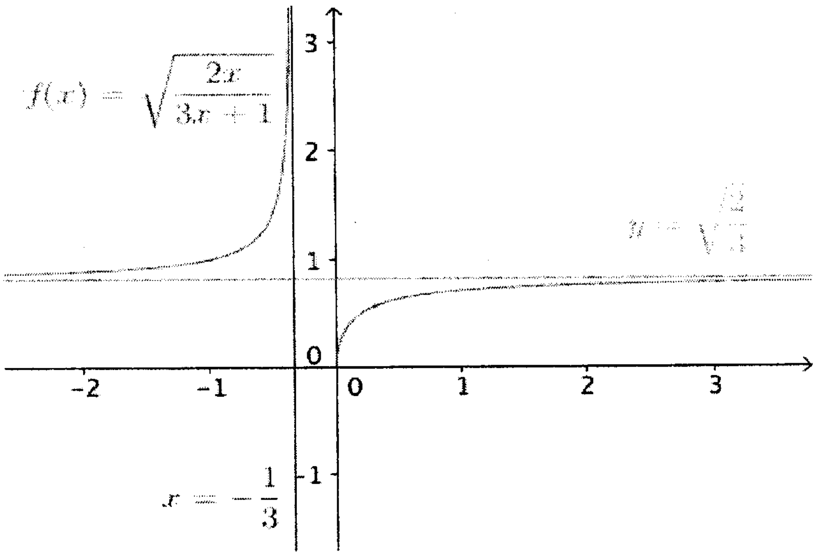
Par conséquent la fonction f est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]0; +\infty\right[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	//////////////////////////////	+	
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \nearrow +\infty$	//////////////////////////////	$0 \nearrow \sqrt{\frac{2}{3}}$	

$f(0) = 0$

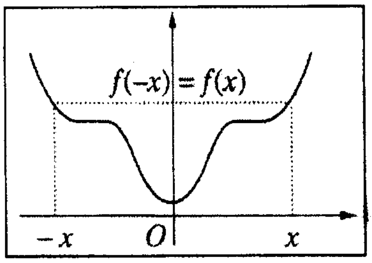
5)



II- PARITE

1. Fonction paire

Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de R est **paire si** :D est symétrique par rapport à O c'est à dire ∀ x ∈ D alors (- x) ∈ D et ∀ x ∈ D , f (-x) = f (x)



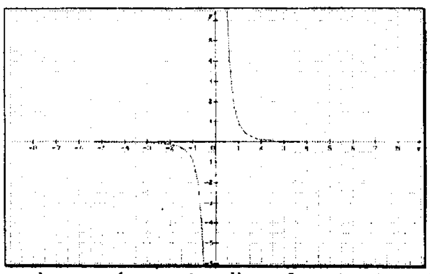
Remarque :

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet $(O, \vec{j})$ comme **axe de symétrie**. Par conséquent, il suffit d'étudier f sur D ∩ R ⁺ et de compléter la représentation graphique en faisant une symétrie orthogonale par rapport à (Oy).

2. Fonction impaire

Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de R est **impaire si** : D est symétrique par rapport à O c'est-à-dire ∀ x ∈ D, (- x) ∈ D et ∀ x ∈ D , f (- x) = - f (x)

Exemple : Courbe représentative de la fonction f : $x \mapsto \frac{1}{x^3}$



Remarque : ***Graphiquement***, la courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet le point O comme **centre de symétrie**. Par conséquent, il suffit d'étudier f sur D ∩ R ⁺ et de compléter la représentation graphique en faisant une symétrie par rapport à O.

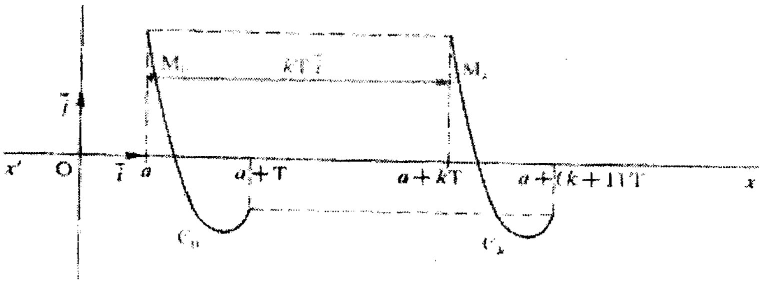
III- PERIODICITE

Une fonction f définie sur un ensemble D est **périodique** si et seulement si il existe un réel T strictement positif tel que : ∀ x ∈ D ⇔ (x + T) ∈ D et f (x + T) = f (x)

NB

$\forall x \in D, \forall k \in \mathbb{Z},\ x + kT \in D$ et $f(x + kT) = f(x)$.

On en déduit que si f est périodique, de période T, tout réel de la forme nT ($n \in \mathbb{Z}$) est aussi une période de f, mais on a toujours intérêt à) utiliser la plus petite période.



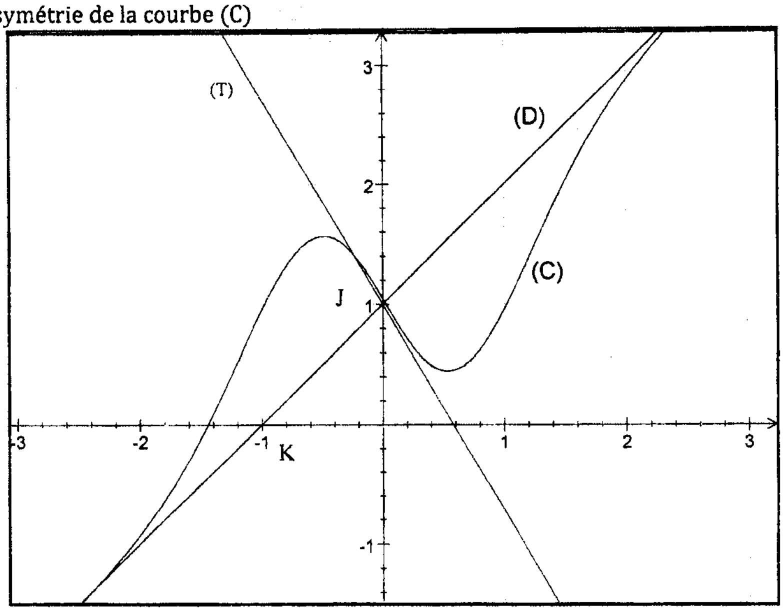
IV- **ELEMENTS DE SYMETRIE**

1- **Centre de symétrie**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C la courbe représentative. On dit que **I (a; b)** est centre de symétrie de C si et seulement si $\forall x \in D$, $a - x \in D$, $a + x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a - x) + f(a + x) = 2b$. On dit aussi que **C est symétrique par rapport à I (a; b).**

Illustration

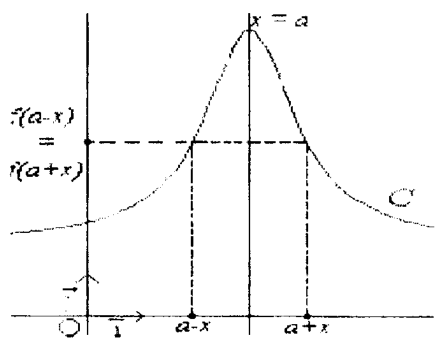
le point J(0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C)



2- **Axe de symétrie**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et **C** la courbe représentative. On dit que la droite Δ d'équation **x = a** est axe de symétrie à **C** si et seulement si $\forall x \in D$, $a - x \in D$, $a + x \in D$, $2a - x \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a - x) = f(a + x)$.

Illustration



V- INTERSECTION AVEC LES AXES DU REPERE

- **Intersection avec l'axe des abscisses**

Soit f une fonction et C la courbe représentative de f.

Un Point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ *est un point d'intersection de C et l'axe des abscisses si et seulement si* $y_A = 0$ *et* $f(x_A) = 0$ (résoudre $f(x) = 0$)

- **Intersection avec l'axe des ordonnées**

Le point $B\begin{pmatrix}0\\f(0)\end{pmatrix}$ s'il existe est le point d'intersection de C et avec l'axe des ordonnées.

LIMITES -CONTINUITE - DERIVABILITE

Exercices corrigés

Exercice 1:

1. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-4}{1-x^2}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-4}{1-x^2}$, c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+3}-3x$,

d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$.

2. Sachant que $0 \le f(x)-1 \le |2\sin 3x|$ sur l'intervalle] 1 ; 10[déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$.

Exercice 2:

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

b. Etudier la dérivabilité de *f* en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

:. Montrer que *f* est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x < 1$.

l. Dresser le tableau de variation de *f*.

·. Représenter graphiquement la fonction *f*.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$.

. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1$.

onner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') : $8u^3 - 6u - 1 = 0$.

Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i = \frac{3}{2}(x_i - \frac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de $[0\,;\pi]$ tel que $u_i = \cos\theta_i$.

Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel.

ɪn rappelle que $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ et $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans $[0\,;\pi]$ et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 3:

A. Soit *f* la fonction définie sur $IR - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$.

1. Pour tout x réel différent de -2, trouver trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.

2. Etudier les variations de *f* et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal.

3. Montrer que si (C) admet un centre de symétrie, alors on peut déterminer son abscisse. Démontrer que (C) admet un centre de symétrie.

B. Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$.

1. Pour tout réel t, montrer que $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$. Expliquer comment l'étude des variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ.

2. a. On pose $a = \sqrt{3} - 2$. Justifier l'existence et l'unicité de $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(t_0) = a$.

b. En utilisant φ comme composée de fonctions, étudier les variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;t_0\right]$ puis sur $\left[t_0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Soit φ' la dérivée de φ. Pour tout nombre réel t, prouver l'égalité : $\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t$. Retrouver alors les valeurs pour lesquelles $\varphi'(t)$ s'annule sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

d. Tracer la courbe représentative de φ sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4:

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2+1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2+1}$; α et β étant deux réels que l'on déterminera.
2. Etudier les variations de f. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).
4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

Exercice 5:

Pour chacune des fonctions suivantes :
- Expliciter l'ensemble de définition
- Déterminer le domaine de dérivabilité.
- Calculer la dérivée.
- Déterminer le sens de variation de f.
  a) f définie de IR dans IR par $f(x) = 2x(1-3x^2)^3$.
  b) f définie de IR dans IR par $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{x-1}$
  c) f définie de IR dans IR par $f(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$.

CORRECTION

Exercice 1:

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-4}{1-x^2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-4) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(1-x^2) = 0^-$;

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-x} = 0^-$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+3}-3x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{9x^2+3}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+3-9x^2}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)} = 0^+$.

d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2}{6} \times \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$. On pose

$f(x) = \sin x$, on a $\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}} = f'(\frac{\pi}{6})$

car f est dérivable en $\frac{\pi}{6}$. $f'(x) = \cos x$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi} = \dfrac{1}{3} f'(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

e. $0 \le f(x) - 1 \le |2\sin 3x|$: par passage à la limite, qui conserve l'ordre, on a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} 0 \le \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (f(x)-1) \le \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} |2\sin 3x|,$$

et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} (f(x)-1) = 0$

puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} |2\sin 3x| = 0$. On conclut donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = 1$.

Exercice 2:

1. a. $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $D_f =]-\infty ; 1]$.

b. $\lim\limits_{h\to0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \dfrac{(1+h)\sqrt{-h}}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \dfrac{(1+h)(-\cancel{h})}{\cancel{h}\sqrt{-h}} = -\infty$.

Donc pas dérivable, tangente verticale en 1.

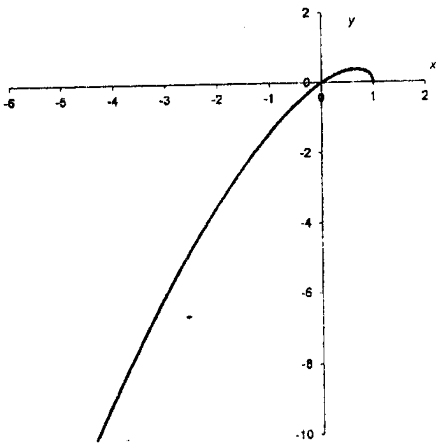
c. f est un produit de fonctions dérivables donc dérivable.

$f'(x) = \sqrt{1-x} + x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

d. $f(2/3) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

x	$-\infty$		$2/3$		1
f'		$+$	0	$-$	ǁ
f	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

La limite en $-\infty$ est évidemment $-\infty$.



2. a. Comme f est strictement croissante dans $]-\infty ; 0]$ et que l'ensemble des images est également $]-\infty ; 0]$, on est sûr que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ a une seule solution x_1 dans l'intervalle de départ $]-\infty ; 0]$. Après il faut calculer

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}} < \dfrac{-1}{3\sqrt{3}} = f(x_1) < f(0) = 0$ ce qui justifie l'encadrement de x_1.

b. Entre 0 et 1, f est croissante puis décroissante et est toujours positive. Son maximum est $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ qui est supérieur à $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; il existe donc bien deux valeurs de x dans $[0 ; 1]$ pour lesquelles

$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$; de plus ces deux valeurs encadrent l'abscisse du maximum de *f*, soit 2/3. A la calculatrice on a $\frac{1}{3\sqrt{3}}=0{,}19245009$ et $f(0{,}217)=0{,}19201741$, $f(0{,}218)=0{,}19277907$; ces deux valeurs encadrent x_1.

3. a. $u=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})\Leftrightarrow \frac{2}{3}u+\frac{1}{3}=x$; par ailleurs si on élève au carré :

$$\left|x\sqrt{1-x}\right|=\frac{1}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x^2(1-x)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\left(\frac{2u+1}{3}\right)^2\left(1-\frac{2u+1}{3}\right)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 8u^3-6u-1=0$$

b. $u_i=\frac{3}{2}(x_i-\frac{1}{3})$. Pour que $u_i=\cos\theta_i$, il faut et il suffit que

$$-1\le u_i\le 1\Leftrightarrow -\frac{2}{3}.-1+\frac{1}{3}\ge -\frac{2}{3}u_i+\frac{1}{3}\ge -\frac{2}{3}.1+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1\ge x_i\ge -\frac{1}{3}.$$

C'est bien le cas donc il existe un unique réel θ_i^{*} de $[0\,;\pi]$ tel que $u_i=\cos\theta_i$.

c. On calcule avec les formules d'addition :

$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos$$

d. On pose donc $u=\cos\theta$ dans (E') :

$$8u^3-6u-1=0\Leftrightarrow 8\cos^3\theta-6\cos\theta-1=0\Leftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1\Leftrightarrow\cos 3\theta=\frac{1}{2}$$

Les solutions de $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$ sont

$3\theta=\pm\frac{\pi}{3}(2\pi)\Leftrightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{9}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. On ne garde que 3 des solutions (par ex. les positives), ce qui donne

$\theta_1=\frac{\pi}{9},\theta_2=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{9},\theta_3=\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}=\frac{13\pi}{9}$ d'où en remontant les solutions exactes :

$x_1=\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3},x_2=\frac{2}{3}\cos\frac{7\pi}{9}+\frac{1}{3},x_3=\frac{2}{3}\cos\frac{13\pi}{9}+\frac{1}{3}$. Il peut être judicieux de vérifier à la calculatrice...

Exercice 3:

A. 1.

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\2a+b=0\\2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\\b=2\\c=-3\end{cases}$$

Donc $f(x)=-x+2-\frac{3}{x+2}$ (on utilise cette écriture de *f* par la suite).

2..

$$f'(x)=-1+0-\frac{-3}{(x+2)^2}=\frac{3-(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}-2-x\right)\left(\sqrt{3}+2+x\right)}{(x+2)^2}$$

Asymptote : $y=-x+2$, etc.

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f	$+\infty$ ↘	$4+2\sqrt{3}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$4-2\sqrt{3}$	↘ $-\infty$

3. Le centre de symétrie de (C) s'il existe est au milieu des extrema, soit en $A(-2\,;4)$. Montrons que A est bien centre de symétrie :

$$f(-2+x)+f(-2-x)=4-x-\frac{3}{x}+4+x+\frac{3}{x}=8\Rightarrow\frac{f(-2+x)+f(-2-x)}{2}=4$$

, c'est bon.

B. 1. On sait que $\sin(\pi-t)=\sin t$ donc $\varphi(\pi-t)=\varphi(t)$. Si on sait tracer φ pour $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ alors on sait le faire pour

$-\frac{\pi}{2}\le\pi-t\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\pi-\frac{\pi}{2}\le -t\le-\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{3\pi}{2}\ge t\ge\frac{\pi}{2}$, on sait donc le faire entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, soit sur un intervalle de longueur 2π. Or sin a pour période 2π, on sait alors tracer φ sur □ .

2. a. Il est immédiat que $-1<a<1$, il existe donc une unique valeur t_0 de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ qui a pour image *a* par sin (lire sur le cercle trigonométrique).

b. Pour $-\frac{\pi}{2}\le t\le t_0$, comme sin est croissante, on a

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le\sin t\le\sin t_0\Leftrightarrow-1\le\sin t\le a=\sqrt{3}-2$. Comme $\varphi(t)=f(\sin t)$, que sin est croissante et que *f* est croissante entre -1 et *a*, on a φ croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};t_0\right]$.

Sur $\left[t_0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, sin reste croissante mais *f* est décroissante donc φ est décroissante.

c. On peut faire un calcul direct :

soit $\varphi'(t)=\cos t\frac{-1-4\sin t-\sin^2 t}{(2+\sin t)^2}$, soit $\varphi'(t)=\cos t f'(\sin t)$.

On peut également utiliser la dérivation des fonctions composées auquel cas le résultat est immédiat :

$\varphi'(t)=(\sin t)'f'(\sin t)=\cos t f'(\sin t)$. Sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ est positif, le signe est donc celui de *f*, ce qui redonne bien les résultats précédents.

Exercice 4:

Partie A

$\varphi(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ est tangente en I si $\varphi(0)=3$ et $\varphi'(0)=4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0) = b = 3$ et

$$\varphi'(x) = \frac{(6x+a)(x^2+1) - 2x(3x^2+ax+3)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = a = 4.$$

Partie B

1.

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1} = \frac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1} = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}{x^2+1} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 4.$$

2. $f'(x) = \dfrac{4(x^2+1) - 4x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ d'où les racines -1 et

1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

A l'infini $\dfrac{4x}{x^2+1} \approx \dfrac{4x}{x^2} = \dfrac{4}{x}$ qui tend vers 0 donc f tend vers 3, asymptote horizontale $y = 3$.

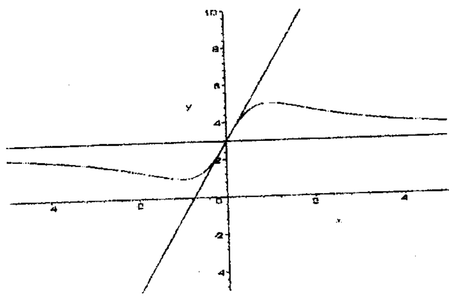
3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$. On fait le signe de

$$f(x) - (4x+3) = 3 + \frac{4x}{x^2+1} - 4x - 3 = \frac{4x - 4x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-4x^3}{x^2+1}$$

qui est du signe de $-x$, soit (C) est au dessus de (T) pour $x \le 0$ et en-dessous pour $x \ge 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u, v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(u+x) + f(u-x) = 2v$; ici ça donne :

$$f(x) + f(-x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1} + 3 - \frac{4x}{x^2+1} = 6 = 2.3 \text{ , ok !}$$

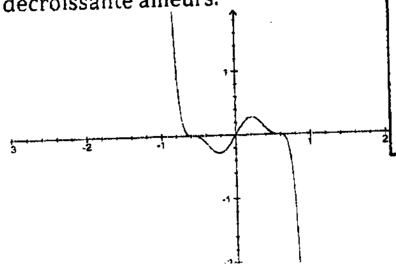


Exercice 5:

a. $f(x) = 2x(1-3x^2)^3$. f est définie et dérivable sur IR comme fonction polynôme.

$$f'(x) = 2(1-3x^2)^3 + 2x \times 3 \times (-6x) \times (1-3x^2)^2 = 2(1-3x^2)^2(1-3x^2-18x^2)$$
$$= 2(1-3x^2)^2(1-21x^2) = 2(1-3x^2)^2(1-\sqrt{21}x)(1+\sqrt{21}x)$$

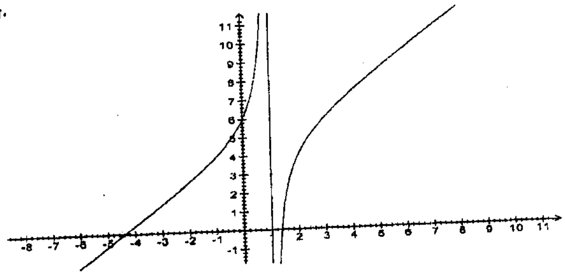
f' est positive sur $[-\frac{1}{\sqrt{21}} ; \frac{1}{\sqrt{21}}]$, donc f y est croissante. Elle est décroissante ailleurs.



b. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-6}{x-1}$.
f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur IR\{1}.

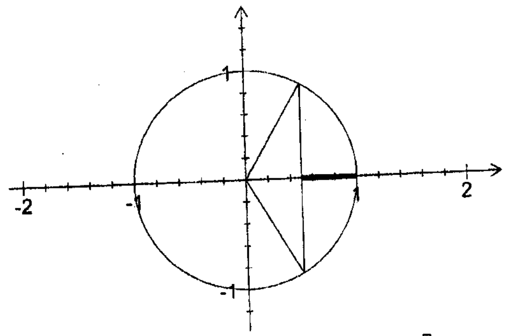
$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x-6)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+6}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$

Le numérateur est un polynôme du second degré qui ne s'annule jamais ($\Delta<0$) et le dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement positive et la fonction f strictement croissante sur IR\{1}.



c. $f(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$. Il faut étudier le signe de $2\cos x - 1$.

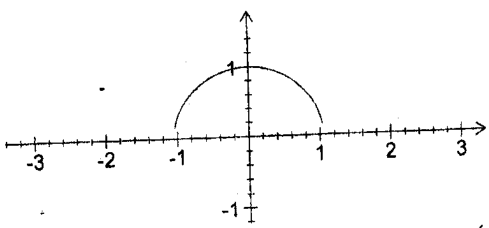
$$2\cos x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow 2\cos x \ge 1 \Leftrightarrow \cos x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x \ge -\frac{\pi}{3} + 2k\pi) et (x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi).$$



f est donc définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$ dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right[$.

$$f(x) = \sqrt{2\cos x - 1} = (2\cos x - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (-2\sin x)(2\cos x - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{2\cos x - 1}}$$



Pour $x \in]-\pi/3 ; 0]$, la dérivée est positive (sin x est négatif) donc f est croissante, et pour $x \in [0 ; \pi/3]$, f est décroissante.

LIMITES -CONTINUITE – DERIVABILITE

Exercices non corrigés

Exercice 1 :

1°/ Déterminer, si elle existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}}\ ;\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin at}{\sin t},\ a\in IN;\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{1-\sqrt{x+1}}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^3+x^2}\ ;\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+3}}{x-2}\right);\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x\tan x}\right);\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin^2 x-\cos x+1}{x^2}\right);\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$$

Exercice 2 :

Déterminer, si elle existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right);$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}\right);\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}\right);\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}\right)$$

$$;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right);\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$$

Exercice 3 :

Déterminer, si elle existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+4x\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x^3+1}}\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right);\ \lim_{x\to-\infty}\frac{E(x)}{1+x^2};$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right);\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x-1}\right);$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-\sqrt{|x|}}{3x+2}\right);\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{2x^2-5x+1}\right);\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

Exercice 4 :

Déterminer, si elle existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+\sin x}{2-\sin x}\right);\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3+2\sin x}\right);\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+\sin x}{x}\right).$$

2°/ Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation $y = ax + b$ soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+4}-\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5 :

1°/

a) Démontrer que pour $x>0$ on a :

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

b) En déduire alors que : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$

2°/ Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}\right)$;

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$; c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2}\right)$

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1-x-3x^3)\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x^2}{1+x}\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{1-2x^2}\ ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$$

$$;\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x-2}-2x+1\right);\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{\cos 2x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{x}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\ (\alpha\in IR)\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}\ ;$$

Exercice 7 :

1°/ Déterminer, si possible ; les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x}}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+3}-2x-1\right)\ \text{et}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+3}-2x-1\right)$$

2°/ On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-2} & \text{si}\quad x\geq 2\\ f(x)=x^2+ax+1 & \text{si}\quad x<2\end{cases}\quad \text{où } a\in IR$$

a) Déterminer, si possible, la limite à gauche et la limite à droite de f en 2.

b) Déterminer alors, si possible, la valeur de a pour que f soit continue en 2.

Exercice 8 :

Soient a et b deux réels, on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x} & \forall x\in[0,\ 1]\\ f(x)=a(x^2-1)+b(x-1)+2 & \forall x>1\end{cases}$$

1. f est elle continue sur IR+ ?
2. Donner une relation nécessaire et suffisante entre a et b pour que soit dérivable en 1. Exprimer alors b en fonction de a.
3. On suppose que f est dérivable en 1
   a) Etudier, suivant les valeurs de a, le sens de variations de f.
   b) Comment faut – il choisir a pour que f s'annule en un point de $[1;+\infty[$
   c) Représenter f pour a=-1

Exercice 9 :

Soit la fonction f de IR vers IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur D_f.
2) Montrer que f est dérivable en 0, et préciser la tangente à (C_f) en A $(0\,;\,\frac{1}{2})$.

Exercice 10 :

Soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|\times|x-2|}{x(x^2-x-2)} si\; x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f sur D_f.
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0^+ ?

Exercice 11 :

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{2x-6} & \text{si } x \neq 3 \\ g(x) = l & \text{si } x = 3 \end{cases}$

a. Déterminer Dg.

b. Pour quelle valeur de l g est-elle continue en IR ?

Exercice 12 :

h est la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

a. Déterminer Dh.

b. Montrer que h admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$

c. Définir ce prolongement.

Exercice 13 :

Soient a et b deux réels et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + 6x - 5 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{b}{x} - x \quad\quad \text{si } x \succ 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur 1.

Exercice 14 :

Soit la fonction définie sur IR par :

$f(x) = |x-1| + |x^2 - 3x + 2|$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur IR.
2) Préciser la position de (C_f) par rapport à ses demi – tangentes au voisinage de A(1 ; 0) et B(2 ; 1).

Exercice 15 :

Soit $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

1. Déterminer D_f. Préciser les asymptotes à C_f.

2. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

3. Calculer $f'(x)$.

Exercice 16 :

Soit $f(x) = 2x\sqrt{|1-x^2|}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1.
2. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 17 :

Soit $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans IR.
2. Déterminer une valeur approché de α à 10^{-2} près.
3. Mêmes questions pour : $g(x) = -2x^3 - 7x + 4$ et $h(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$.
4. Démontrer que l'équation $1 + 4\cos x = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right[$.

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1) Démontrer que f est bornée.
2) Etudier la parité de f.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
4) Démontrer que f définit une bijection de IR sur] -1, 1[.

Exercice 19 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction rationnelle f définie : $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative C_f de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation $y = 4x + 3$.
2. Pour les valeurs de a et b trouvées à la 1ère question, démontrer que : pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$.
3. Etudier les variations de f.
4. Démontrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de C_f.
5. Tracer C_f et la tangente au point I.

Exercice 20 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers J à préciser.
2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f. Et tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 21 :

1°/ Soit la fonction g définie par $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que sur $[0;+\infty[$, l'équation g(x)=0 admet une solution unique α.

c) Montrer que par contre que l'équation n'admet pas de solutions dans $]-\infty;0[$.

d) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x

2°/ On considère sur l'intervalle $I =]-1;+\infty[$ la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. (unité 4cm)

a) En utilisant les résultats du 1°/, étudier les variations de f.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) Etudier les positions relatives de (T) et (C) sur I. Que représente le point d'abscisse 0 pour (C) ? Retrouver ce résultat par le calcul.

3°/

a) Justifier que α est compris entre 0,6 et 0,61.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

c) En déduire que $1,7 \le f(\alpha) \le 1,9$.

1°/

a) Démontrer que (C) admet des asymptotes

b) Représenter dans le même repère les courbes (C) ; (T) et les asymptotes à (C).

Exercice 22 :

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$, (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Etudier g , puis montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Déterminer α à 10^{-2} près
2. Déterminer le signe de g sur IR

Partie B

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
2. Calculer f'(x) puis montrer que $f'(x) = \dfrac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variations de f
3.

a) Montrer qu'on peut écrire $f(x) = ax + b + \dfrac{x+2}{x^2-1}$ $\forall x \in D_f$

b) En déduire les asymptotes de (C) au voisinage de l'infini

c) Etudier les positons relative de (C) et la droite (D) : $y = x + 2$

Partie C

1. déterminer l'abscisse des points de *(C)* où la tangente est parallèle à la droite (D) : $y = x + 2$
2. Déterminer une équation cartésienne de chacune de ces tangentes et les représenter
3. En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$

Exercice 23:

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x - b & si\ x < 2 \\ f(x) = \dfrac{2ax + b}{x-1} & si\ x > 2 \\ f(2) = b \end{cases}$$

1°) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue sur IR.

2°) Etudier alors la dérivabilité de f en 2.

Exercice 24:

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

a) Démontrer que $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[$ on a : $\dfrac{x}{3} \le f(x) \le x$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en 0 ; on donne :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{2x+3} & si\ x \ge 0 \\ f(x) = x^2 + x + a & si\ x < 0 \end{cases}$$

Exercice 25 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ définie sur $]1;+\infty[$.

1. Prouver que l'équation f(x)=0 admet une seule solution $\alpha \in]1;2[$
2. Montrer que l'équation f(x)=0 a même ensemble des solutions que l'équation $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$
3. Soit $g : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Déterminer son domaine de définition

b) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[$ on a $|g'x)| \le \dfrac{1}{2}$

En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$ $|g(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 26 :

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \sin^2(x) + \cos x$

1°/ En étudiant la parité et la périodicité de f, justifier le choix de $[0,\pi]$ comme intervalle d'étude.

2°/ Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$ puis tracer la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$.

3°/ Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}]$ une solution unique dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 27 :

Soit $f : x \mapsto \cos^2 x \sin 2x$

1. Montrer qu'il est possible de réduire l'ensemble d'étude à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. Etudier puis représenter f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 28 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

1) Etablir un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$.

Démontrer que : $\frac{1}{12} \leq \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Exercice 29 :

f est la fonction de I vers IR définie par :

$f(x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 1$

1) a. Linéariser $\sin^4 x$, $\sin^2 x$ et $\sin x\cos x$.

b. Vérifier que $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.

c. Justifier le choix de l'intervalle $[0, \pi]$ comme intervalle d'étude de f.

2) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4\cos 2x(1-2\sin 2x)$.

Résoudre dans IR l'équation $f'(x) = 0$. Déduire le tableau de variation de f.

3) Tracer l'arc Cf sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 30 :

Le but de cet exercice est de résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation :

$1-\frac{1}{2}x+\cos x=0$ (x est en radians).

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = 1-\frac{1}{2}x+\cos x$; on considère par Γ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(0, i, j)$ unité 2 cm.

1) Etudier le sens de variation de f.
2) Déterminer chacune des équations des tangentes D_1 et D_2 à la courbe Γ aux points d'abscisses respectives 0 et 4.
3) Tracer Γ ainsi que les deux tangentes D_1 et D_2.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution x_0 dans l'intervalle $[0, \pi]$.
5) Démontrer que $x_0 \in [1,7 ; 1,8]$.
6) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de x_0.

Exercice 31 :

Soit la fonction numérique f définie par :

$f(x) = 1-8\cos x - 4\cos 2x$.

1. a) Démontrer que f est périodique de période 2π.

b) Etudier la parité de f.

c) En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0,\pi]$ et expliquer comment on complétera la représentation graphique de f sur $[0,\pi]$ pour obtenir celle de f sur IR.

2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que :

$f'(x) = 8\sin x(1+2\cos x)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f pour $x \in [0,\pi]$.

3. a) vérifier que, pour tout x, $f(x) = -8\cos^2 x - 8\cos x + 5$

b) En déduire la résolution par le calcul de l'équation $f(x) = -1$ dans IR.

PROBLEME 1 :

Partie A : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité 1cm)

1°/ Déterminer le domaine de définition de f puis déterminer les réels a ; b et c vérifiant : $f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2}$.

2°/

a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Démontrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour (C).

c) Déterminer les branches infinies de (C).

d) Tracer (C).

PROBLEME 2 :

On considère la fonction g telle que : $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-2} & \text{si } x \succ 1 \\ \sqrt{|x^2-x|} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1 et en 0.
2. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Soit h la restriction de g à $]-\infty, 0[$. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ vers un intervalle J à préciser.
4. Soit h^{-1} la réciproque de h. h^{-1} Est- elle dérivable sur J ? Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
5. Calculer $h(-1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2})$
6. Exprimer $h^{-1}(x)$.

PROBLEME 3 :

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+2} & \text{si } x \succ 1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité en 1, puis interpréter graphiquement.
2. Etudier les variations de f.
3. Construire C_f.
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$ Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
5. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.
6. Déterminer de deux façons différentes $(g^{-1})'(x)$.
7. Construire $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_f.

PROBLEME 4 :

1°/ Soit g $g : x \mapsto 1-2\sqrt{x+1}$ définie sur $[-1;+\infty[$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire le signe de g.

2°/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+1} - x$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

b) Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x+1}}$.

c) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations

d) Montrer que 1,25 est le maximum de f.

3°/

a) Montrer que f réalise une bijection de [0 ;3] sur $[-1;1]$.

b) Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in [0;3]$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) Montrer que α est solution de l'équation $x+1 = x^2$. En déduire la valeur exacte de α.

PROBLEME 5 :

On considère la onction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1} \text{ si } x \le 1 \text{ et } x \ne -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+2} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1°/

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

b) f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter les résultats obtenus.

2°/

a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b) Montrer que (C_f) admet une asymptote verticale et deux asymptotes obliques que l'on précisera par leur équation cartésienne.

c) Préciser la position des asymptotes obliques par rapport à (C_f).

3°/

a) Etudier la dérivabilité de f puis calculer f'(x).

b) Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variations de f.

c) Construire (C_f) et ses droites remarquables

4°/ Soit g la restriction de f sur $I = [1;+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

b) g^{-1} est -elle dérivable sur J ?

c) Calculer $(g^{-1})(x)$ pour $x \in J$

d) Calculer de deux façons différentes $(g^{-1})'(x)$.

Construire la courbe de g^{-1} sur le même repère.

PROBLEME 6 :

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x + 3 - \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} \text{ si } x < 0 \\ g(x) = \sqrt{|1-x^2|} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$ et

(C) sa courbe représentative dans le plan muni $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1°/ Ecrire g(x) sans barres de valeur absolue.

2°/

a) Etudier la continuité de g en 0.

b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et 1. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

3°/

a) Montrer que la courbe représentative de g admet aux voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation cartésienne.

b) Etudier la nature de la branche infinie à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (D) par rapport à (C). On admet que (C) est en dessous de (D).

4°/

a) Montrer que g est dérivable puis préciser son domaine de dérivabilité.

b) Calculer g'(x).

c) Déterminer le signe de g'(x) puis dresser le tableau de variations de g.

5°/

Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α sur $]-\infty;0[$ et que $\alpha \in \left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[$.

Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Résoudre sur $[0;1]$ l'équation g(x)=x puis interpréter graphiquement ce résultat.

6°/ Soit f la restriction de g sur l'intervalle $I =]-\infty;0]$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer f(-3) puis en déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse -1.

c) Déterminer la primitive de la fonction h définie sur $I =]-\infty;0]$ par h(x)=x+3-f(x).

PROBLEME 7 :

I°/ Etude graphique

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

1°/ Déterminer f(-1) ; f(2) et D_f

2°/ Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

3°/

a) f est elle dérivable en -1 et en 2.

b) Déterminer les variations de f sur $]-\infty;-1[$ et sur $]2;+\infty[$

II°/ Etude numérique

Dans cette partie on prend $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}$

1°/

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Ecrire f(x) sans les barres de valeurs absolues puis calculer les limites aux bornes de D_f.

c) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) $+\infty$ et dont on donnera une équation.

d) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D)

e) Préciser la nature de l'asymptote à C_f en $-\infty$

2°/

a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et 2 . Interpréter le résultat obtenu

b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

c) Démontrer qu'on a : $f'(x) > 0$ sur $]2;+\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[$

d) Résoudre l'inéquation $\sqrt{-x^2+x+2} \le 2x-1$ sur $]-1;2[$

e) Dresser le tableau de variations de f

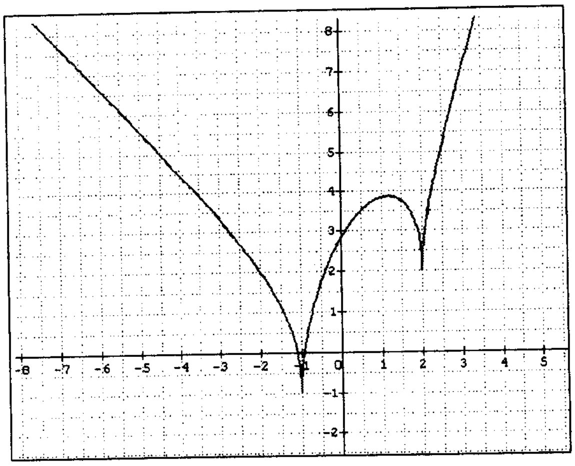
3°/ Soit g la restriction de f sur $I =]2;+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de I sur I.

b) En étudiant la fonction h définie par : $h(x) = x - g(x)$ montrer qu'il existe un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

c) Déterminer par le calcul la valeur exacte de α puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(\alpha)$ si possible.

d) Tracer dans le même repère (C_g) et ($C_{g^{-1}}$)



PROBLEME 8 :

Soit la fonction numérique f : IR → IR telle que :

$$f(x)=\begin{cases} -x+2-\dfrac{2x}{x^2+1} & ; \quad si \quad x \leq 1 \\ x-1-3\sqrt{x^2-1}; & si \quad x \succ 1 \end{cases}$$

PARTIE A

1. Justifier que D_f = IR.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
   a) Montrer que la courbe (C_f) admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) à préciser.
   b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2)
4.
   a) Calculer f '(x) dans les intervalles où f est dérivable (Justifier l'existence de ces dérivées).
   b) Etablir le tableau de variations de f.
   c) Tracer (C_f) et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

PARTIE B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1]$.

1. Montrer que g est bijective de $]-\infty;1]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que l'équation g(x) = x admet une unique solution β et on a : $\dfrac{1}{3} < \beta < \dfrac{3}{4}$.
3. a) Etudier la dérivabilité de g^{-1}.
   b) Calculer $(g^{-1})'(2)$.
   c) Construire ($C_{g^{-1}}$) dans le repère précédent.
   d) Montrer que g admet une primitive sur $]-\infty;1]$ puis déterminer sa primitive qui s'annule en 0

PROBLEME 9 :

1. Soit $g : x \mapsto 2x - \sqrt{1+x^2}$
   a) Etudier les variations de g
   b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α que l'on déterminera
   c) En déduire le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.
2. Soient $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$, (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, $(D): y = x$ et $(\Delta): y = -3x$
   a) Etudier les limites de f en $\pm\infty$
   b) Calculer f'(x) puis montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire les variations de f
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$. Que peut-on déduire ?
   d) Montrer que $(D): y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
   e) Etudier les positions relatives de $(D): y = x$ et $(\Delta): y = -3x$ par rapport à (C)
   f) Tracer dans le même repère $(D): y = x$, $(\Delta): y = -3x$ et (C)

PROBLEME 10 :

Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{|x^2-1|}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en −1 et 1
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Démontrer que (C) admet deux asymptotes (Δ) et (Δ') que l'on déterminera
4. Calculer f'(x) puis déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.

Construire (C), (Δ) et (Δ') ainsi que les tangentes aux points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2\sin 2x}{1+\cos x}$

1. Montrer qu'on peut réduire l'ensemble d'étude à l'intervalle E= $[0;\pi]$
2. montrer que f est dérivable sur E. Calculer f'(x)
3.
   a. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;\pi[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   b. Montrer que $\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Calculer $\sin\alpha$ et $f(\alpha)$
   c. Etudier la signe de f'(x) sur E
   d. Dresser le tableau de variations de f
   e. Montrer que pour tout entier relatif k $f'(\alpha + k\pi) = 0$
4. Montrer que les droites d'équation $(\Delta_n): x = (2n+1)\pi$ sont asymptotes à la courbe représentative de f
5.
   a. Construire la courbe représentative de g restriction de f sur E
   b. Dites par quelles transformations géométriques on obtient le reste de la courbe de g

PROBLEME 11 :

A) Soit l'application l définie sur IR+ par $l(x) = x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$ et (Σ) la courbe représentative de l dans un repère orthogonal (O, I, J) avec OI = OJ = 2 cm

1) Etudier la dérivabilité de l en zéro.

2) a) Chercher le nombre dérivé l'(x) en x, $x \in IR_+^*$

b) Chercher une équation de la tangente T à (Σ) au point d'abscisse 1

c) Dresser le tableau de variation de l

3) Tracer T et (Σ)

4) En déduire le signe de k(x) = $x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - (4x-2)$ pour x ∈ IR+.

B) Soit l'application f définie sur IR_+^* par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-x} & \text{pour } x \neq 1. \\ f(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Soit Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O', I',J') avec O'I' = O'J' = 1 cm.

1) a. Etudier la limite de f en 0, en $+\infty$

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) Montrer que f est continue en 1

3) Montrer que l'équation f(x) = x, $x \in IR_+^*$ admet une solution α ayant pour valeur approchée 1,3. On notera A le point de Cf d'abscisse α .

4) a. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{k(x)}{2(x^2-x)^2}$ pour $x \in IR_+^* - \{1\}$.

On admet que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{9}{8}$

b. En déduire que f est une bijection de IR_+^* sur un intervalle que l'on précisera

c. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $\dfrac{3}{2}$ et préciser $(f^{-1})'(\dfrac{3}{2})$.

5) Tracer Cf puis la représentation de f^{-1} dans le repère (O', I',J')

PROBLEME 12 :

Soit f l'application numérique définie sur IR* par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2-3x+2|} & si\ \ x \geq 1 \\ f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x} & si\ \ x \neq 0\ et\ \ x \prec 1 \end{cases}$$

1) Préciser les limites de f aux bornes de IR*. En déduire que (Cf), dans un repère orthonormé, possède une asymptote verticale. Etudier le comportement asymptotique de f aux infinis. Conclure.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 2. Etudier les variations de f dans un tableau.

Construire (Cf).

3) Soit g la restriction de f sur $[1, \dfrac{3}{2}]$. Prouver que g est une bijection de $[1, \dfrac{3}{2}]$ vers J que l'on précisera. g^{-1} est – elle dérivable sur J ?

Construire (Γ) la courbe de g^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 13 :

A- Soit $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{2}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unités graphiques 2cm : abscisses ; 1 cm ordonnées)

1. Etudier les variations de f
2. Soit $(\Gamma): y = x^2 + 1$

a) Montrer que (C) et (Γ) sont deux courbes asymptotes

b) Etudier leurs positions relatives l'une de l'autre.

3. Résoudre dans 3 l'inéquation $f(x) \geq 0$
4. Tracer (C) et (Γ) dans le même repère

B- Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations (en plus des limites aux bornes de D_g)
2.

a) Soit $x > -1$ montrer que $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 2}{x(x+1)}}$. En déduire que g n'est pas dérivable en –1

b) Déterminer les branches infinies de $(C'): y = g(x)$

c) Tracer dans le repère la courbe (C')

PROBLEME 14 :

1. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ et $g(x) = x - \sin x$

a. Etudier les variations de f et g sur $[0;+\infty[$

b. En déduire que $\forall x \geq 0$ on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

2. Soient $h : x \mapsto x^4$, a et b deux réels tel s que a<b

a. Montrer que $\forall x \in [a;b]$ on a $4a^3 \leq h'(x) \leq 4b^3$

b. en déduire que $\forall x \in [a;b]$ on a $4a^3(b-a) \leq b^4 - a^4 \leq 4b^3(b-a)$

3. soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$

PROBLEME 15 :

A) Soit f la fonction donnée par $f(x) = 2x\sqrt{|1-x^2|}$

1) Ecrire f sans barres de valeur absolue. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et -1 puis interpréter graphiquement les résultats

3) Calculer f'(x) sur les intervalles où f est dérivable puis établir le tableau de variation de f

B) On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \in]-\infty,0] \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0. Montrer que g est continu sur R

2) Etudier les branches infinies et la position de la courbe de g par rapport aux asymptotes éventuelles

3) Dresser le tableau de variation de g en utilisant les résultats du A)

4) Tracer les droites remarquables et la courbe de g dans un repère orthonormé (unité 2cm)

5) Soit h la restriction de g à $]-\infty, 0]$

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h-1 dont on précisera le domaine de définition, l'ensemble de dérivabilité et les variations

b) Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$

c) Déterminer l'expression explicite $h^{-1}(x)$ sur $]-\infty, 0]$.

Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère précédent

PROBLEME 16 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}$ et

(C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

1.
a. Déterminer D_f
b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f. En déduire les branches infies de (C_f)
c. Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 1 . g est il dérivable en 1 ?
2.
a. Calculer la dérivée de f puis montrer que :
$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2+x+2}-3x-5}{2\sqrt{x^2+x+2}\left(x+1-\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}.$$
b. Dresser le tableau de variations de f
3. Soit h la restriction de f sur $]1;+\infty[$.
a. Montrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
b. Montrer que h^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(h^{-1})'(5)$.

PROBLEME 17 :

On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+3} & si \quad x>1\\ -2\sqrt{1-x|x|} & si \quad x\le 1\end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue
2) Etudier la continuité de f en 1 et la continuité de sur son en ensemble de définition
3) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 0
4) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition
5) Calculer la fonction dérivée f ' de f
6) Montrer que la courbe (Cf) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$
7) Etudier les positions relatives de (Cf) par rapport à la droite (D)
8) Tracer la courbe (Cf) et (D).

PRIMITIVES ET *CALCUL INTEGRAL*

A- PRIMITIVES

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F'=f$ sur I.

2. Théorèmes

Théorème1
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
Théorème2
Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Alors F et G diffèrent d'une constante : $F(x)=G(x)+c$ $(c\in IR)$ pour tout $x\in I$.

Primitive définie par une condition initiale
Théorème3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0\in I$ et $y_0\in IR$. Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $F(x_0)=y_0$

3. Tableau des primitives usuelles et Opération sur les primitives

Primitives usuelles			*Opération sur les primitives*	
Fonction	*Primitive*	*Intervalle*	*Fonction*	*Primitive*
$f(x)=k(constante)$	$F(x)=kx+c$	IR	$U'+V'$	$U+V$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$	IR	kU'	kU
$f(x)=ax+b$	$F(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$	IR	$U'V+V'U$	UV
$f(x)=x^n$ $(n\in IN$ et $n\neq 1)$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	IR	$U'U$	$\frac{1}{2}U^2$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$	$U'U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c$	IR*	$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$

$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $(n \in IN$ et $n \neq 1)$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	IR*	$\frac{U'}{U}$	$\ln\lvert U\rvert$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$	IR	$\frac{U'}{U^n}$	$\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$	IR	$U'\sin U$	$-CosU$
$f(x)=1+\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2};\ +\frac{\pi}{2}\right[(\pi)$	$U'\cos U$	$SinU$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c$	IR	$U'e^U$	e^U

Méthode : **Recherche de primitives**

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $I=IR$

b) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $I=IR$

c) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}$ sur $I=]0;+\infty[$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=IR$

e) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur $I=IR$

f) $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ sur $I=IR$

Résolution

a) $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

b) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}$ donc $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}=3x^2-3x^{-3}$ donc $F(x)=x^3-3\times\frac{1}{-2}x^{-2}=x^3+\frac{3}{2x^2}$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ donc $F(x)=\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+\cos(3x-1)$

f) $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+2}$ donc $F(x)=\frac{3}{2}\ln(x^2+2)$

Basique

Soit la fonction f, définie par $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$. Déterminer sur IR la primitive F de f telle que $F(\frac{3\pi}{2}) = 0$.

Correction

$f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8).\cos x = \cos x.\sin^2 x - 3\cos x.\sin x + 8\cos x$;

$u(x) = \sin^3 x$, $u'(x) = 3\cos x\sin^2 x$, $v(x) = \sin^2 x$, $v'(x) = 2\cos x\sin x$, $w(x) = \sin x$, $w'(x) = \cos x$.

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\times\sin^2 x+8\times\sin x+k$.

$F(\frac{3\pi}{2})=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^3\frac{3\pi}{2}-\frac{3}{2}\times\sin^2\frac{3\pi}{2}+8\times\sin\frac{3\pi}{2}+k=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-8+k=0 \Leftrightarrow k=\frac{2+9+48}{6}=\frac{59}{6}$.

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+\frac{59}{6}$.

B-CALCUL INTEGRAL

I- GENERALITE

1. **Définition**

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. soient a et b deux réels dans I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle une intégrale de a à b le nombre réel noté $\int_a^b f(t)\,dt$ et défini par : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Notation: $\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$ qui se lit : "F(t) pris entre a et b".

Exemple
Calculer chacune des intégrales suivantes :
a) $\int_0^3 (t+4)\,dt$; b) $\int_{-1}^1 (2t^2 - 1)\,dt$; c) $\int_1^2 \frac{3dt}{\sqrt{t}}$; d) $\int_0^p \sin x\,dx$; e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; f) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$, g) $\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}\,dx$

Théorème
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si $a \in I$, la fonction F définie sur I par :
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

2. **Propriétés**

f et g étant deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b et c étant trois éléments de I et λ un réel, on a :

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$; $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$
- Soient f et g des fonctions continues sur [a ; b].
  - Si $a \le b$ et si pour tout x de [a ; b] on a $f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$
  - Si $a \le b$ et si pour tout x de [a ; b] on a f(x) £ g(x), alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration
On considère F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I

- $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0$
- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)
- F étant une primitive de f et G une primitive de g, on sait que F + G est une primitive de f + g. On a alors :
  $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$
  donc $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- F étant une primitive de f, on sait que λF est une primitive de λf. On a alors :
  $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a) = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda[F(b) - F(a)] = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer : $A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right) dx$ $\quad B = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$

$$A=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$$
$$=\left[x^3+2x^2-5x\right]_2^5$$
$$=5^3+2\times5^2-5\times5-\left(2^3+2\times2^2-5\times2\right)$$
$$=125+50-25-\left(8+8-10\right)$$
$$=144$$

$$B=\int_{-1}^1 e^{-2x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{1}{-2}e^{-2\times1}-\frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$$

$$C=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}dx$$
$$=\left[\ln\left(e^x+3\right)\right]_0^1$$
$$=\ln\left(e^1+3\right)-\ln\left(e^0+3\right)$$
$$=\ln\left(e+3\right)-\ln 4$$
$$=\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$$

__Propriétés :__ Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx=0$; b) $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$; c) $\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0$

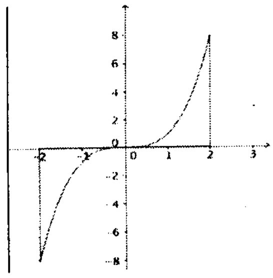
d) $\int_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-\left(F(b)-F(a)\right)=-\int_a^b f(x)dx$

__Remarque :__

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{4}\times(-2)^4=4-4=0\cdot$$



__Méthode :__ **Calculer une intégrale en appliquant la linéarité**

On pose : $A=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$ et $B=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A+B$ et $A-B$. b) En déduire A et B.

__Résolution__

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A+B=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x\right)dx+\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}1dx$$
$$=\left[x\right]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi-0$$
$$=2\pi$$

$$A-B=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x\right)dx-\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos 2x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\left(2\times2\pi\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\times0\right)=0$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases}A+B=2\pi\\A-B=0\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}2A=2\pi\\A=B\end{cases}\text{ soit : }A=B=\pi.$$

__Méthode :__ **Encadrer une intégrale**

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0\le e^{x^2}\le e^x$. b) En déduire que $0\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e-1$.

__Résolution__

a) Sur [0 ; 1], $x^2\le x$. Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur IR, on a $0\le e^{x^2}\le e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le\int_0^1 e^x dx$.

$\int_0^1 0\,dx=0$ et $\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$ D'où $0\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e-1$

3. __Signe de l'intégrale__

$f>0$ et $a<b$	$f>0$ et $a>b$	$f<0$ et $a<b$	$f<0$ et $a>b$
$\int_a^b f(t)\,dt>0$	$\int_a^b f(t)\,dt<0$	$\int_a^b f(t)\,dt<0$	$\int_a^b f(t)\,dt>0$

4. La valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] ($a \leq b$).

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

5. Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur [a ; b] (avec $a < b$).

S'il existe des constantes m et M telles que pour tout x de [a ; b] on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

- Si, pour tout x de I, $|f(x)| < M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < M|b-a|$.

II- INTEGRATION PAR PARTIES

Propriété *(intégration par parties)*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux éléments de I.

On a : $\int_a^b u(t).v'(t)dt = \left[u(t).v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\,dt$

Démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. La formule de dérivation d'un produit permet d'écrire $(uv)' = u'v + uv'$. On en déduit que pour tout $t \in I$, on a $(u\,v')(t) = (uv)'(t) - (u'v)(t)$
Les fonctions étant continues, on a alors pour $a \in I$ et pour $b \in I$

$$\int_a^b (u\,v')(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b (u'v)(t)dt \text{ donc } \int_a^b u(t).v'(t)dt = \left[u(t).v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\,dt$$

Exemple

Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$, posons $u(x) = x$ $v'(x) = \cos x$

$u'(x) = 1$ $v(x) = \sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{p}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{p}{2}} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{p}{2}} = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{p}{2}}$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0\sin 0 + \cos 0)$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$

Applications :

Calculer $I = \int_1^2 x\ln x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$.

Exercice

Pour tout entier naturel *n*, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. Calculer I_0 et J_0

2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de *n*.
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand *n* tend vers $+\infty$.

Résolution

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Résolution

Il faut faire une double intégration par parties :

On pose d'abord : u (x) = 2x² – 1 et v ' (x) = cos 3x d'où : u ' (x) = 4x et v (x) = $\frac{1}{3}$ sin 3x .

D'où : $I = \left[\frac{1}{3}(2x^2-1)\sin 3x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx = -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx$.

Intégrons une deuxième fois par parties en posant : u (x) = $\frac{4}{3}$x et v ' (x) = sin 3x d'où : u ' (x) = $\frac{4}{3}$ et v(x) = $-\frac{1}{3}$ cos 3x .

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx = \left[-\frac{4}{9}x\cos 3x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \frac{4}{9}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos 3x dx = \frac{4}{9}\pi + \frac{4\pi}{27}$. Donc finalement : $I = -\frac{4}{9}\pi - \frac{4\pi}{27}$

Exercice 2 : *BAC S2 2006 2ème groupe:*

1°) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

2°) a) Calculer $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$;

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)}dx$. (On remarquera que : $\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$)

Résolution

1°) On trouve facilement après réduction au même dénominateur du second membre et idntification des numérateurs : a = 1 ; b = – 1 .

2°) a) $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^e\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^e = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$.

b) On pose : u (x) = ln x et v ' (x) = $\frac{1}{(1+x)^2}$. En utilisant la remarque de l'énoncé, on en déduit que : u ' (x) = $\frac{1}{x}$ et v (x) = $-\frac{1}{1+x}$.

D'où : $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)}dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$. Cette dernière intégrale ayant déjà été calculée au 1°, on trouve finalement :

$I = -\frac{1}{1+e} + 1 - \ln(e+1) + \ln 2.$

PRIMITIVE et CALCUL INTEGRAL
Exercices corrigés

Exercice 1:

Calcul de primitives

a. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; b. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur]1 ; +∞[.

c. $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$ sur IR+*.

Exercice 2:

Soit la fonction *f*, définie par $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$.

Déterminer sur IR la primitive *F* de *f* telle que $F(\frac{3\pi}{2}) = 0$.

Exercice 3:

1. Montrer que $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x^2+2x+1) + 1$.
2. En déduire une primitive de la fonction *f* définie par

$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{x^2 + 2x + 1}$ sur]–∞ ; –1[.

Exercice 4:

A. Calculer $F(x) = \int x e^x dx$. ; B. Calculer $F(x) = \int x e^{ax} dx$.

Exercice 5:

Calculer $F(x) = \int \ln^3 x \, dx$.\

Exercice 6:

Calculer $F(x) = \int \frac{x^6}{x^4-1}dx$.

Exercice 7:

1. Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par :

$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels *a*, *b* et *c* tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive *G* de *g* sur l'intervalle]1 ; +∞[.

2. Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par :

$f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive *F* de *f* sur l'intervalle]1 ; +∞[.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$ avec *p* et *q* rationnels.

2. On pose par exemple $\begin{cases} u = e^{-nx} \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -ne^{-nx} \\ v = -\cos x \end{cases}$ d'où

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx = \left[-e^{-nx} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx} \cos x dx = 1 - nJ_n \Leftrightarrow I_n + nJ_n = 1$. On procède de même pour la deuxième intégrale.

3. On résoud facilement le système : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -n^2 I_n + nJ_n = ne^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)I_n = 1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow I_n = \dfrac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$ puis

$\begin{cases} nI_n + n^2 J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow J_n = \dfrac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$.

4. L'exponentielle l'emporte toujours, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \dfrac{1-0}{1+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$.

Remarque

La formule de dérivation par parties est basée sur la propriété des dérivées : $[u\,v]' = u'v + uv'$

Elle pourra être retenue de façon abrégée sous la forme $\int u'v = [u\,v] - \int uv'$ ou $\int uv' = [u\,v] - \int u'v$

Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première. Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v'.

On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties

Exemples

Exercice 1

En effectuant une intégration par parties, calculer :

$\int_0^p x \sin x\, dx$ $\qquad \int_1^2 x \ln x\, dx$ $\qquad \int_0^1 (2x+1)\, e^x\, dx$

$\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2} dx$ $\qquad \int_1^x \ln t\, dt \quad (x > 0)$ $\qquad \int_2^{\frac{1}{2}} (x^3+1) \ln x\, dx$

Exercice 2

En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer :

$\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-x} dx$ $\qquad \int_{-p}^0 x^2 \sin 2x\, dx$ $\qquad \int_0^\pi e^{2x} \sin x\, dx$

Exercice 3

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \sin^2 x\, dx$

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeurs de I et de J.

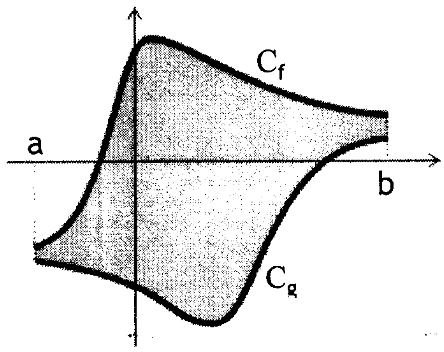
III- APPLICATION DU CALCUL INTEGRAL

1. Calcul d'aires de surfaces planes :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] (a < b) telles que, pour tout $x \in [a\,;b]$: $g(x) < f(x)$.

L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et de g et les droites d'équation x = a et x = b, c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant { $a \le x \le b$; $g(x) \le y \le f(x)$ } est donnée en unités d'aires par :

$$\left(\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \right) u.a \text{ où } u.a = |\vec{\imath}||\vec{\jmath}| \text{ unité d'aire}$$



***Exercice 1 :** BAC S2 2002 2*

Exercice 1 : BAC S2 2002 2ème groupe

Calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2x^2 - 1) \cos 3x dx$.

Exercice 8:

1. Déterminer les réels *a*, *b*, *c* tels que pour tout *u* différent de $\frac{1}{2}$,

$$\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}.$$

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$.

Exercice 9:

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses...) ?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}$.

c) $\int_1^{e}\ln t\,dt=1$. ; d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=1$. e) $\int_0^1 te^t dt=1$.

Exercice 10:

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire *A* du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note *M* et *N* les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, *P* et *Q* leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que *f* est positive sur $[1\,;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (*MN*) est $2\ln 2$.

c. Soit *E* le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point *E* est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (*MN*).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point *E*. montrer qu'une équationde (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $[1\,;2]$ par

$$g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right].$$

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout *x* de $[1\,;2]$.

b. Etudier les variations de *g* sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient *M'* et *N'* les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (*MN*) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points *M'* et *N'* ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes *MNQP* et *M'N'QP*.

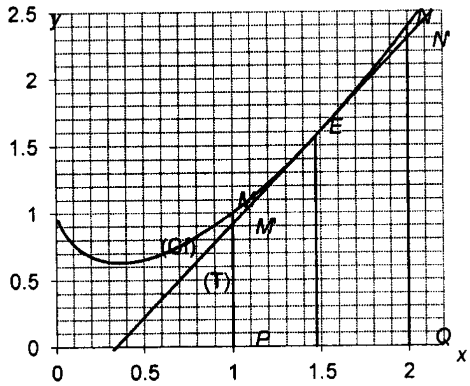
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de *A* d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de *A*.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2. En déduire la valeur exacte de *A*.



CORRECTION

Exercice 1:

a. $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^3(x)}=\frac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-2}\times(-2)u'(x)u^{-3}(x)$,

$u(x)=x^2+2x$, $n-1=-3$, $n=-2$,

$$F(x)=-\frac{1}{4}(x^2+2x)^{-2}=-\frac{1}{4(x^2+2x)^2}.$$

b. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-1$,

$F(x)=\frac{1}{2}\ln u(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+k$.

c. $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}=x-1+\frac{1}{x}\times\ln x=x-1+\frac{1}{2}\times 2u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$,

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}u^2(x)=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+k.$$

Exercice 2:

$f(x)=(\sin^2 x-3\sin x+8).\cos x=\cos x\times\sin^2 x-3\cos x\times\sin x+8\cos x$;

$u(x)=\sin^3 x$, $u'(x)=3\cos x\sin^2 x$, $v(x)=\sin^2 x$, $v'(x)=2\cos x\sin x$, $w(x)=\sin x$, $w'(x)=\cos x$.

$$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\times\sin^2 x+8\times\sin x+k.$$

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\sin^3\frac{3\pi}{2}-\frac{3}{2}\times\sin^2\frac{3\pi}{2}+8\times\sin\frac{3\pi}{2}+k=0\Leftrightarrow-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-8+k=0\Leftrightarrow k=\frac{2+9+48}{6}=\frac{59}{6}.$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+\frac{59}{6}.$$

Exercice 3:

$$f(x)=\frac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}=\frac{(x+3)(x^2+2x+1)+1}{x^2+2x+1}=x+3+\frac{1}{x^2+2x+1}=x+3+\frac{1}{(x+1)^2}$$

. $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x+1}$.

Exercice 4:

A. $f:x \to f':1;\ g':e^x \to g:e^x \Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

donc $F(x) = e^x(x-1)$.

B.

$f:x \to f':1;\ g':e^{ax} \to g:\frac{e^{ax}}{a} \Rightarrow F(x) = \frac{xe^x}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}dx = \frac{xe^x}{a} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$

donc $F(x) = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$.

Exercice 5:

$f:\ln^3 x \to f':\frac{3\ln^2 x}{x};\ g':1 \to g:x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - \int x\frac{3\ln^2 x}{x}dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x\,dx$

; on recommence :

$f:\ln^2 x \to f':\frac{2\ln x}{x};\ g':1 \to g:x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\int \ln x\,dx$

; encore une fois :

$f:\ln x \to f':\frac{1}{x};\ g':1 \to g:x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6\int dx$

et finalement $F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x$.

Exercice 6:

$F(x) = \int \frac{x^6}{x^4-1}dx = \int x^2 dx + \int \frac{x^2}{x^4-1}dx = \int x^2 dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}d$

d'où $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

Exercice 7:

1. $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

.a.

$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$

d'où on tire par identification :

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c-b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ c-b=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ c=1/2 \\ a=-1 \end{cases}$. On a donc

$g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$.

b.

$\int g(x)dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| \Rightarrow G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$

(ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\int u'u^n dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u = x^2-1$ et $n=-2$:

$\int f(x)dx = \frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x^2-1}$.

3. A première vue (et même à seconde vue) il faut intégrer par parties :

$u = \ln x,\ v' = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{-1}{x^2-1}$,

ce qui donne

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx = \left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$= -\frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 2 + \left(-\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 = -\frac{13}{8}\ln 3 + \frac{17}{6}\ln 2$$

Exercice 8:

1.

$\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1} = \frac{2au^2 - au + 2bu - b + c}{2u-1} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2b-a=0 \\ c-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=1/4 \\ c=-3/4 \end{cases} \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} - \frac{3/4}{2u-1}$

.

2. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)$

soit $\frac{3}{8}\ln 3$.

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u = \sin x$:

$f(u) = \frac{u^2-1}{2u-1} \Rightarrow f(\sin x) = \frac{\sin^2 x - 1}{2\sin x - 1} = \frac{\cos^2 x}{1 - 2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x) = (\cos x)F'(\sin x)$ où F est une primitive de f.

Or on a à intégrer

$\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} = \cos x\left[\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}\right] = \cos x\left[\frac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx = \left[\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{8}\ln|2\sin x - 1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = \frac{3}{8}\ln 2$$

.

Exercice 9:

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^{e}\ln t\,dt = [t\ln t - t]_1^e = 1$.

d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 - 1 = 1$.

e) **Vrai** : Intégration par parties, $\int_0^1 te^t dt = \left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 1$.

Exercice 10

Partie A

1. a. $\ln x > 0$ sur $[1\,;2]$ donc f est positive sur $[1\,;2]$.

b. M a pour coordonnées $(1;1)$, $N(2;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (MN) est
$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-2\ln 2}{-1} = 2\ln 2$.

c. La dérivée de f est : $f'(x) = \ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (MN) lorsque
$\ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2 = \frac{4}{e}$.

d.
$$y = 2\ln 2\left(x-\frac{4}{e}\right)+\left(1+\frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right) = (2\ln 2)x - 2\ln 2\times\frac{4}{e}+1+\frac{4}{e}\ln 4-\frac{4}{e} = (2\ln 2)x+1-\frac{4}{e}$$
($\ln 4 = 2\ln 2$).

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par
$g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e}+1\right]$.

a. $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1+\ln x - \ln 4 = 1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

b. $g'(x) = 1+\ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}$.

Lorsque $x = \frac{4}{e}$, g est nulle ; donc décroissante jusqu'à $\frac{4}{e}$ puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion $g(x) \geq 0$ et (C_f) est au-dessus de (T).

3. a. Il nous faut les ordonnées de M et N :
$y_{M'} = (2\ln 2)+1-\frac{4}{e}$, $y_{N'} = (4\ln 2)+1-\frac{4}{e}$.

Aire de $MNQP$: $\frac{(PM+QN)}{2}\times PQ = \frac{(y_M+y_n)}{2}\times 1 = 1+\ln 2 \approx 1{,}693$;

aire de $MNQP$:
$\frac{(PM'+QN')}{2}\times PQ = \frac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1 = 3\ln 2 + 1 - \frac{4}{e} \approx 1{,}608$
;

b. L'aire A est comprise entre ces deux valeurs : 1,6 à 10^{-1} près.

Partie B

1. On pose $u' = x$, $v = \ln x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$, $v' = \frac{1}{x}$ d'où
$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0{,}636$$

2. $A = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 1dx + \int_1^2 x\ln x dx = 1+2\ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}+2\ln 2 \approx 1{,}636$.

PRIMITIVE
Exercices non corrigés

Exercice 1:

On pose $f(x) = \frac{3}{2}\cos^3(2x)\sin x$.

1°/ Linéariser f(x).

2°/ En déduire la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$

Exercice 2:

1) Dans les cas suivants déterminer une primitive de f sur l'intervalle K:

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$; $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $k =]0,+\infty]$;

$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}$, *sur* $]0,\pi[$ $f(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$;

$f(x) = \sin^3 x\cos x$; $f(x) = \frac{x^3-x^2+8x+8}{(x-2)^2}$, $k = IR - \{2\}$

$f(x) = (x-2)\sqrt{x}$, $k =]0,+\infty[$; $f(x) = \cos^4 x$; $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

2) On donne $f(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$

a) Trouver les réels a et b tels que pour tout $x \neq \frac{-1}{2}$

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$$

b) Déterminer une primitive de f sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

3) Soient les fonctions numériques f et g définies par :
$f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ *et* $g(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

- Calculer g ' (x)
- En déduire une primitive de f sur IR.

Exercice 3:

Soit $f(x) = \sin^4 x$

1. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

2. En déduire la primitive F de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4:

Indiquer les intervalles sur lesquels on peut déterminer les primitives de f puis calculer ces primitives.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; b) $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$;

c) $f(x) = 3x(x^2+1)^2$; d) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^4}$;

e) $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$; f) $f(x) = \cos x\sin^2 x$; g) $f(x) = \cos^3 x$;

h) $f(x) = \sin x\sin 3x\sin 5x$

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sin^3 x - 3\sin x$.

1°) Etudier la parité et la périodicité de f.

2°) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. Que peut-on en déduire pour la courbe Cf de f.

3°) On note C_1 la courbe représentative de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Quelles transformations géométriques permettent de construire Cf à partir de C_1.

4°) Démontrer que pour tout réel x $f'(x)=-3\cos x\cos 2x$.

Donner le tableau de variations de f à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5°) Tracer Cf dans $[-2\pi;2\pi]$.

CALCUL INTEGRAL
Exercices non corrigés

Exercice 1:

Calculez les intégrales suivantes (la rédaction doit être détaillée ; vous pouvez cependant vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice) :

a) $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx$; b) $\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$; c) $\int_{1}^{e}\frac{\ln t}{t}dt$; d) $\int_{1}^{2}2e^{3x}dx$; e) $\int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx$; f) $\int_{1}^{2}(x+1)\ln x\,dx$; g) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$;

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}dx$; i) $\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx$; j) $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du$; k) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$; l) $\int_{0}^{2}3e^{2x}dx$; m) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; n) $\int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$; o) $\int_{1}^{e}\frac{\ln 2t}{t^2}dt$; p) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,e^{\sin x}dx$; q) $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt$; r) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}dx$ s) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)du$. t) $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$

u) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x\,dx$, v) $\int_{1}^{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Exercice 2:

1. Montrer grâce à la formule de duplication que pour tout réel x, $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$. En déduire une primitive sur IR de la fonction f: $x\to\cos^2 x$.
2. En utilisant la question 1. montrer que pour tout x, $\cos^4 x=\frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}$. En déduire une primitive sur IR de la fonction f^2.
3. Montrer que pour tout x, $\cos^3 x=\cos x-\cos x\sin^2 x$. En déduire une primitive sur IR de la fonction g: $x\to\cos^3 x$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive sur IR de la fonction h définie par $h(x)=2x\sin(3x)$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞ [par : $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$.

Pour tout $\alpha>1$, on considère l'intégrale : $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}f(x)\,dx$.

1. Interpréter géométriquement le nombre $I(\alpha)$.
2. Démontrer que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, on a : $e^{-x}\le f(x)\le xe^{-x}$.
3. En déduire pour tout $\alpha>1$ un encadrement de $I(\alpha)$.
4. Quelle est la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?
5. Déterminer la dérivée par rapport à α de I. Quel est son signe ? Dresser le tableau de variation de I.

Exercice 4:

1. Restitution organisée de connaissances
Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].
2. Soient les deux intégrales définies par $I=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$.

a. Démontrer que $I=-J$ et que $I=J+e^{\pi}+1$.
b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 5:

1. Calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Soit la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\frac{\pi}{4}$ et la courbe (C).
Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm³.

Exercice 6:

Soit la fonction $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Montrer que f existe sur $[1,+\infty[$; calculer sa dérivée $f'(x)$.
2. Déduisez en la valeur de $K=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
3. Pensez-vous pouvoir utiliser une méthode semblable pour calculer l'intégrale $K'=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$?

Exercice 7:

1. On pose $F(x) = ax^2\cos x + bx\sin x + c\cos x$ (a, b, et c sont trois constantes réelles). Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de $x^2\sin x$.
3. En déduire le calcul de $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Exercice 8:

On définit la suite d'intégrales :

$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$,..., $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ (n désigne un entier naturel).

1. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0. Pour tout entier n, calculer $I_n + I_{n+1}$.
2. Montrer sans calcul que la suite (I_n) est croissante.
3. Prouver que pour tout x de $[0 ; 1]$ $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$. En déduire un encadrement de I_n.
4. A partir de cet encadrement, déterminer la limite de I_n et celle de $\frac{I_n}{e^n}$.

Exercice 9:

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
b. En déduire la dérivée f' de f.
c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J + 2I = K$.
b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.
c. En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 10:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin^4 x$; $x \in$ IR.

1. Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$, puis $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et de $\cos 4x$.
2. Quelle est la forme générale des primitives de f sur IR ?
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

Exercice 11:

On désigne par n un nombre entier relatif différent de -1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t dt$ (on pourra effectuer une intégration par parties).
2. En déduire le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$.
3. Calculer $I_n(e) - J_n(e)$.
4. déterminer la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12:

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2.
3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1} \leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 13:

Montrer que : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1°/ Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+e^t)^2}$. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$

Exercice 14:

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 3\cos x \sin x)dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 2x dx$

Exercice 15:

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$, $J = \int (2x+1)\sin^2 x dx$.

1) Calculer I + J
2) Calculer I – J à l'aide d'une intégration par parties.
3) Déduire de 1) et 2) les valeurs de I et J.

Exercice 16:

On considère les deux intégrales suivantes

A= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ et B= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$

1°/ Calculer A+B et A-B .
2°/ En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 17:

On considère les intégrales suivantes :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin t)^n}{\cos t} dt$ où n ∈ IN* et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t} dt$.

1) a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin t)^n \cos t dt$.

b) En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

c) Calculer I_1 . En déduire I_3 et I_5 .

2) Soit f : $\left[0;\frac{\pi}{3}\right] \to IR$; $t \mapsto \ln\left[\tan(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\right]$.

Montrer que f est une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ de :

$$g:\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \to IR\ ,\ t \mapsto \frac{1}{\cos t}.$$

En déduire I_0 *puis* I_2 *et* I_4.

Exercice 18:

A l'aide d'une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\pi}(x-1)\sin 3x\,dx$, b) $\int_2^3(2x+1)\ln x\,dx$ c) $\int_0^2(2x+1)e^{2x}dx$

d) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$ e) $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ g) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ h) $\int_0^{\pi}x^2\cos x\,dx$ i) $\int_{-1}^0(1+x)^2e^{-x}dx$

j) $\int_1^0(3x^2-x+1)e^x dx$ k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin 2x\,dx$ l) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos 3x\,dx$

Exercice 19:

On pose pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^1\frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$.

1. a) Calculer I_1, puis I_0+I_1. En déduire I_0.
   b) Calculer I_2 et I_3.
2. a) Pour tout réel t de $[0,1]$, comparer e^{nt} et $e^{(n+1)t}$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (I_n)
3. A l'aide d'une intégration par partie, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 20:

Calculer les intégrales suivantes :

1°/ $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (poser t=cosu) ; $\int_0^x\frac{dt}{1+\sqrt{1+t}}$ (poser $z^2=1+t$)

2°/ $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^3}{\sqrt{1-t}}dt$ et $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}$ (poser t=tanu)

Exercice 21:

Soit n un entier naturel. On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

1°/ Montrer que pour tout x réel on $\sin^{n+2}x=\sin^n x-\cos^2 x\sin^n x$.

2°/ En déduire par une relation entre I_n et I_{n+2}

3°/ En déduire $\begin{cases} I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} & \forall n\geq 1 \\ I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} & \forall n\geq 1\end{cases}$

4°/ montrer que $I_{2n+1}=\frac{2\times 4\times\ldots\times 2n}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1}$ et

$$I_{2n}=\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n}\times\frac{\pi}{2}$$

5°/ montrer que $\forall n\in IN^*$ $I_n-I_{n+1}\geq 0$.

6°/ En déduire que $\frac{n-1}{n}I_{n-1}\leq I_n\leq I_{n-1}$ et que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\right)=1$

7°/ En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\times\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 22:

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$

1°/ Calculer I_0 ; I_1 et I_2

2°/ Trouver une formule de récurrence entre I_n et I_{n+1}

3°/ En déduire une expression de I_n en fonction de n

Exercice 23:

On donne $I=\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$

1°/ Montrer que : $\cos^4 x=\cos x(\cos x-\cos x\sin^2 x)$

2°/ Par une intégration par parties montrer que $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx-\frac{J}{3}$.

3°/ monter que $J=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx-\frac{I}{3}$.

4°/

a) Montrer que $I+J=\frac{3\pi}{4}$ et que $I-J=0$

b) Calculer alors I et J.

Exercice 24:

Soit la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx.$$

1) Calculer I_0+I_1 *et* I_1. En déduire la valeur de I_0.

2) Calculer I_n+I_{n+1} en fonction de n pour n $\neq 0$. En déduire les valeurs de I_2 *et* I_3.

3) Comparer e^{nx} *et* $e^{(n+1)x}$ lorsque x $\in[0;1]$. En déduire sans essayer de calculer I_n, que la suite (I_n) est croissante.

4) Montrer que ; pour tout réel x de $[0;1]$ $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{1+e^x}\leq\frac{1}{2}$.

En déduire un encadrement de I_n .(on calculera $\int_0^1 e^{nx}dx$), puis la limite de la suite (I_n).

Exercice 25:

On définit une suite (σ_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$\sigma_n=\int_0^n x^2e^{-x}\,dx.$

1) Montrer que (σ_n) est une suite croissante.
2) Calculer σ_n en fonction de n (On pourra effectuer deux intégrations par parties).

3) Déterminer la limite a de la suite (σ_n) .
4) Trouver, à l'aide d'une calculatrice, le plus petit entier n tel que $|\sigma_n - a| \leq 10^{-3}$

Exercice 26:

Soit n ∈ IN. On pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$.

1. Calculer u_0 *et* u_1 ; $u_n + u_{n+2}$.
2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
3. En utilisant la question 2, montrer par récurrence que :
$$u_{2p} = (-1)^p \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right] \quad (p \in IN^*)$$
4. Calculer u_{2p+1} $(p \in IN^*)$.
5. En déduire $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k}$

Exercice 27:

Soit, $f(x) = (1-x)e^x$.

1) Etudier les variations de f.
2) Ecrire les équations des tangentes T1 et T2 à C_f en $x_1 = -1$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$.
3) Tracer C_f, T1 et T2 dans un repère d'unité 4 cm.
4) Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
5) Calculer l'aire en cm2, de la surface plane limitée par les axes, la tangente T2 et C f.

Exercice 28:

1) Représenter graphiquement la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ dans un repère orthonormal du plan (unité : 2 cm).
2) On appelle (S) la surface limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations
x = -1 et x = 1, et V le volume obtenu par rotation de (S) autour de l'axe des abscisses.
Calculer le volume V en cm³.

Exercice 29:

Soit $(I_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par : $I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$

1°/ Calculer I_0

2°/ Démontrer que $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

3°/ Montrer que $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + .. + \frac{1}{2^n n!} + I_n$

En déduire que $\sqrt{e} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + .. + \frac{1}{2^n n!}\right)$.

Exercice 30:

On pose $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) Soit f la fonction définie de $]1; +\infty[$ dans IR par :
f(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Calculer la fonction dérivée de f. En déduire la valeur de I.

2) On pose J = $\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$. Démontrer que
J = $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx - I$.

Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

FONCTIONS LOGARITHMES

I- LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1- Définition

On appelle fonction logarithme népérien définie sur]0; +∞[dans IR la primitive de la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ et qui s'annule en 1. On la note *ln*

Conséquences

- La fonction *ln* est définie et dérivable sur]0; +∞[et ∀x ∈]0; +∞[$(lnx)' = \frac{1}{x}$
- $ln1 = 0$
- ln e = 1

NB

- ln (u) existe si et seulement si $\begin{cases} u \text{ existe} \\ et \\ u > 0 \end{cases}$
- ln|u| existe si et seulement si $\begin{cases} u \text{ existe} \\ et \\ u \neq 0 \end{cases}$

2- Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

P1: $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

P2: $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

P3: $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

P4: $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

P5 : Pour tout n ∈ $\mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$

P6 : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

P7 : $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$

<u>Méthode :</u> Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans IR l'équation suivante : $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

b) Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $\ln(6x-1) \geq 2$

<u>Résolution</u>

a) $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x)=\ln 1$

$\Leftrightarrow (x-3)(9-x)=1$

$\Leftrightarrow -x^2+12x-27=1$

$\Leftrightarrow -x^2+12x-28=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-12+\sqrt{32}}{-2}=6-2\sqrt{2}$ *et* $x=\frac{-12-\sqrt{32}}{-2}=6+2\sqrt{2}$

Les solutions sont donc $6-2\sqrt{2}$ et $6+2\sqrt{2}$.

b) $\ln(6x-1) \geq 2$

$\Leftrightarrow \ln(6x-1) \geq \ln e^2$

$\Leftrightarrow 6x-1 \geq e^2$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc $\left[\frac{e^2+1}{6};+\infty\right[$

3- <u>Etude de la fonction ln</u> : f(x) = ln x

- $D_f = \left]0;+\infty\right[$
- *Dérivée et variation* : $f'(x) = 1/x > 0$ *donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante de* $\left]0;+\infty\right[$.
- *Etude des limites :* $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ *donc la droite d'équation x= 0 est asymptote à la courbe.*
- *Autres limites* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

❖ $\forall \alpha > 0$ on a : $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$

$\forall \alpha > 0$ on a : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln x)^\alpha} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^\alpha}{x} = 0 \end{cases}$

❖

<u>Méthode :</u> Déterminer une limite

a) $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

<u>Résolution</u>

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ". Levons l'indétermination : $x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$. Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - \ln x) = +\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ". Levons l'indétermination :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ comme composée de limites.

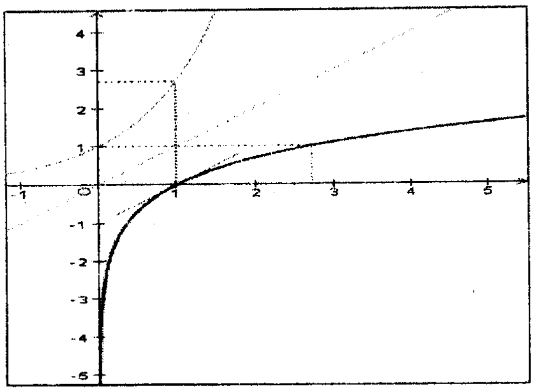
c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Levons l'indétermination :

$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$ Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$.

Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
ln'(x)		+		
lnx	$-\infty$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$
signe de lnx	-	0	+	

Allure de la courbe



- **Signe de lnx** : Pour $0 < x < 1$ $\ln x < 0$ et pour $x > 1$ $\ln x > 0$
- la fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ vers IR

4- **Composée avec la fonction ln**. $f(x) = \ln u(x)$

❖ Calcul de $\lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)]$

On calcule d'abord $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a$

- si $a = 0^+$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
- si $a = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
- si $a < 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)]$ *n'existe pas*
- $a \neq +\infty$ et $a > 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = \ln a$

❖ ***Dérivée de*** $f : x \mapsto \ln[u(x)]$

- *Ensemble de dérivabilité*: $J = \{x \in IR \,/\, u(x) > 0 \text{ et } u \text{ dérivable}\}$
- Dérivée : $f'(x) = (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

☆ **Méthode de résolution d'équations ou d'inéquations avec ln**

1. **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des ln :**

a. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation.*(si on a ln (u(x)), il faut que u(x) > 0)*

b. Utiliser les équivalences suivantes :

- $\begin{cases} x \in D \\ \ln(u(x)) = \ln(v(x)) \leftrightarrow u(x) = v(x) \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in D \\ \ln(u(x)) > \ln(v(x)) \leftrightarrow u(x) > v(x) \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in D \\ \ln(u(x)) \leq \ln(v(x)) \leftrightarrow u(x) \leq v(x) \end{cases}$

c. Résoudre l'équation ou inéquation $u(x)=v(x)$ ou $u(x) > v(x)$ ou $u(x) \leq v(x)$

d. Parmi les réponses trouvées, conserver les solutions appartenant à D.

Exemple : Résoudre dans IR : $\ln(x+5) + \ln(x-2) = \ln 8$ et $\ln(x-3) - \ln(x-1) < 2 \ln 3$

2. **Résolution d'équations ou d'inéquations avec des $(\ln x)^2$ ou $(\ln x)^3$:**

   a. Rechercher l'ensemble de définition D de l'équation. (si on a ln (x) ,il faut que $x > 0$)
   b. Poser le changement de variable $X = \ln(x)$
   c. Résoudre l'équation ou inéquation avec les X
   d. En déduire les solutions pour x, appartenant à D .

Exercice : Résoudre dans IR : $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]0;2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$ alors $f'(x) = \dfrac{2-2x}{2x-x^2}$.

Méthode : Etudier une fonction

On considère la fonction f définie sur $]-2;1[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudier la dérivabilité de la fonction f.
c) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
d) Tracer sa courbe représentative.

Résolution

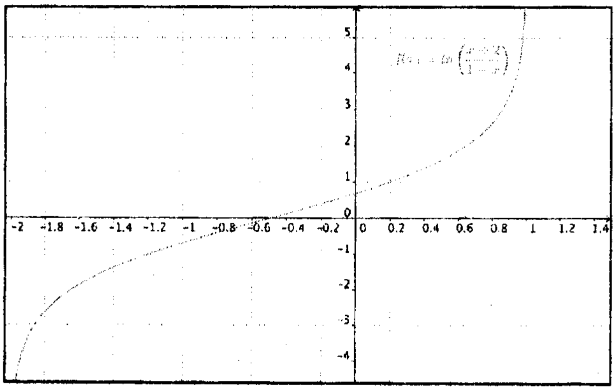
a) - $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} \dfrac{x+2}{1-x} = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ x>-2}} f(x) = -\infty$ comme composée de limites. ; $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \dfrac{x+2}{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$ comme composée de limites.

b) La fonction $u : x \mapsto \dfrac{x+2}{1-x}$ est strictement positive et dérivable sur $]-2;1[$ donc f est dérivable sur $]-2;1[$

c) $u'(x) = \dfrac{1\times(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \dfrac{3}{(1-x)^2}$ Donc $u'(x) > 0$.

La fonction u est donc strictement croissante sur $]-2;1[$, d'où : La fonction f est strictement croissante sur $]-2;1[$.

x	-2		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	



II- **FONCTIONS LOGARITHME DE BASE A**

1- **Définition** :

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, on appelle ***logarithme de base a*** la fonction notée $\log_a$ définie pour tout x strictement positif par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Remarques: on a alors $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ le logarithme de base e est le logarithme népérien.

2- **Propriétés** :

Pour tout $x > 0$: $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$ donc $\log_a(a^n) = n$

Pour tout $x > 0$ et $y > 0$ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

3- *fonction logarithme décimal*

a- **Définition** : On appelle *fonction logarithme décimal*, la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

b- **Propriétés** :

- $\log(10) = 1$, $\log 1 = 0$; la fonction log est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (car $\ln(10) > 0$).
- Pour a, b réels strictement positifs et p entier quelconque on a :
  $\text{Log}(ab) = \log(a) + \log(b)$; $\log(a^p) = p\log(a)$; $\log(10^p) = p$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercices corrigés

Exercice 1 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5$.
2. $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
3. $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$.

Exercice 2 :

Vrai ou Faux

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

a. On a D = $]0, +\infty[$.
b. La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.
c. Pour tout $x \in$ D, on a : $f(x) < \dfrac{x}{2}$.
d. Pour tout $x \in$ D, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x(\ln x)^2}$.

Exercice 3 :

1. Soit $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x^2 - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}}{x-1}$; calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{ex+3}{x+5}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+3}{e^x}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x + 1}{2x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6)$.
2. Résoudre l'inéquation : $e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e$.
3. Résoudre dans IR² le système : $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$.
4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$.
5. Résoudre : $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$.
6. Résoudre : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

Exercice 5 :

1. La fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par
$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.
En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.
2. La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par
$f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$.
a. Démonstration de cours : au choix
- démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
ou bien
- démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X = \sqrt{x}$).
c. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives.
construire C et Δ.

Exercice 6 :

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par
$f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$ sur $]0 ; 3[$.
2. a. Déterminer toutes les primitives de la fonction h définie par :
$h(x) = \dfrac{4x}{(3x^2+2)^3}$.
b. Déterminer la primitive de h qui s'annule en 10.
4. Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes qui réponde à la condition posée :
a. $f(x) = \dfrac{x + 0,5}{x^2 + x + 1}$ et $F(1) = 0$.
b. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x.\cos x}$ et $F(2) = 1$.
4. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$
5. Trouver une primitive de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$.
6. a. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
En déduire l'ensemble des primitives F de f.
b. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 7 :

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. Montrer que f est définie et dérivable sur IR et déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.
b. Déterminer la fonction dérivée g' de g (on pourra utiliser la question 1.).
c. Etudier le signe de g'.
d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
e. Dresser le tableau des variations de g.
f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au poiint d'abscisse 1.

Exercice 8 :

Dérivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur IR+ : $\ln(1+x)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x\geq 0$, alors $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout x strictement positif on a $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$
d. On désigne par C la représentation graphique de f. Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C.

Exercice 9 :

Logarithme+ expo+ acc finis

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x^2+2+2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\ ;+\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
c. Montrer que la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.
d. Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ.
e. Tracer (C), Δ et T dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

3. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par Δ, la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\dfrac{1}{2}\leq x_0\leq 1$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0. On désigne par h la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x)=x$.

2. On note I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.

3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h.
b. Étudier les variations de h' sur I.
c. En déduire que, pour tout x de I, on a $|h'(x)|\leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=h(u_n)$ pour tout entier naturel n de IN.

a. Montrer par récurrence que, pour tout n de IN : $\dfrac{1}{2}\leq u_n\leq 1$.
b En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\leq e^{-1/2}|u_n-\alpha|$.
c. En déduire que, pour tout n de IN : $|u_n-x_0|\leq\dfrac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}}$.

5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n\geq n_0$, on ait : $\dfrac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}}<10^{-2}$.

b. Montrer que : $|u_{n_0}-x_0|\leq 10^{-2}$. Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 10 :

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et d'en déterminer une primitive.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0{,}72\ ;-0{,}71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1\ ;+\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D=]-1\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.
a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Sens de variation de g
a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0{,}715$.
3. Tableau et représentation graphique de g.
a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).
4. Calcul d'une primitive de g:
Soit h la fonction définie sur D par : $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.
a. Déterminer des fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h.
b. Après avoir vérifié que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$.
c. Déduire des questions précédentes, une primitive de g.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm). Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :
$g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2+1}$.
1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
2. Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Déterminer la limite de g en 0.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie B : Etude de la fonction f
1. a. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X = \dfrac{1}{x^2}$).
b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
2. Etude de f en 0
a. Montrer que $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Que peut-on en conclure ?
b. Etudier la dérivabilité de f en 0.
c. Préciser la tangente à la courbe de f au point O.
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Donner l'allure de (C).

Exercice 12 :

Partie A
On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par
$g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.
1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$. Étudier son signe sur $]0 ; +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0 ; +\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).
3. En déduire que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B
Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+1$ est asymptote à la courbe C.
d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0 ; +\infty[$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
b. Vérifier que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.
3. Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C (version 1)
1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par
$F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ (on donnera la valeur exacte).
3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm², puis en donner la valeur arrondie en cm², au mm² près.

Partie C
1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à C parallèle à Δ, préciser les coordonnées du point de contact J et l'équation de cette tangente T. Tracer T dans le repère précédent.
2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. M et N sont les points d'abscisse x situés respectivement sur C et sur Δ.
a. Préciser, en fonction de x, la valeur de la distance MN.
b. Etudier sur $[1 ; +\infty[$ les variations de la fonction h définie sur $[1 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}$.

c. Déduire des questions précédentes que la distance MN est maximale lorsque M est en J et préciser la valeur de cette distance maximale.

Exercice 13 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$.

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. a. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x)=0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x)>0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm sur chaque axe.)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Restitution organisée des connaissances :

Démontrer que la fonction h, définie par $h: x\mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$ (attention on ne demande pas simplement de le vérifier...)

2. On pose $I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}\ln x\,dx$ et $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}(\ln x)^2\,dx$.

a. Calculer I_1.

b. Montrer que $I_2=\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{e}$.

c. Calculer $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}f(x)\,dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $\frac{1}{e}\le x\le e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x)\le y\le 0$.

CORRECTION

Exercice 1 :

1. $f'(x)=2\frac{1}{x}\times\ln x-6\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-6}{x}$.

2. $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2x+\ln(x+1)-\ln x\Rightarrow$

$$f'(x)=2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{2x(x+1)+x-x-1}{x}=\frac{2x^2+2x-1}{x}=2x+2-\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x(x+1)}.$$

3. $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$,

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{x-2x\ln x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{1-2\ln x-x}{x^3}$$

Exercice 2 :

a. Faux : On doit avoir $\sqrt{x}\neq 1$ et $x>0$ donc D= $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty-\frac{1}{+\infty}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\frac{x}{2}=0$ donc $y=\frac{x}{2}$ est asymptote de C.

c. Faux : $f(x)<\frac{x}{2}$ si $-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}<0$, soit $\ln(\sqrt{x})>0$ donc quand $\sqrt{x}>1\Rightarrow x>1$.

d. Vrai : Rappelons que $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u}$ et remarquons que $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{\ln x}$; nous avons donc

$$f'(x)=\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1/x}{(\ln x)^2}\right)=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right).$$

Exercice 3 :

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ avec

$$\begin{cases}f(x)=\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})\\ f(1)=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

On calcule donc $f'(x)=-2\pi x\sin(\pi x^2-\frac{\pi}{3})$ d'où

$$f'(1)=-2\pi\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=-2\pi\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi\sqrt{3}}{2}=-\pi\sqrt{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ex+3}{x+5}=e\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right)=\ln e=1$.

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+3}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+3)-\ln e^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x^2+\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)-x\right]$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to0+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ d'après le cours.

Exercice 4:

1. Domaine de définition : $D_1 = \left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$,

par ailleurs $2x-6>0$ si et seulement si $x>3$. On a donc

$$D_f = D_1 \cap]3\,;+\infty[= \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[\text{ car } \frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56.$$

Pour la résolution : $\ln a = \ln b$ équivaut à $a=b$ donc, l'équation devient : $x^2-3x-2=2x-6$ ou encore $x^2-5x+4=0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais seule 4 est valable.

2. Domaine de définition : il faut que $x>0$, soit $D_f =]0\,;+\infty[$.

$$e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e \Leftrightarrow e^{-2\ln x+1} > 2e \Leftrightarrow -2\ln x+1 > \ln(2e) \Leftrightarrow -2\ln x > \ln 2+\ln e-1 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{\ln 2}{2}}$$

. On peut simplifier un peu : $e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

finalement $S = \left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

3. $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x+y=2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\frac{x}{y} = \ln e \\ x+y=2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ye \\ ye+y=2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2e}{1+e} \\ x=\frac{2e^2}{1+e} \end{cases}$. Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

4. Attention à l'ensemble de définition :

$1+x>0,\ 1-x>0,\ 2x>0 \Rightarrow x>-1,\ x<1,\ x>0 \Rightarrow x \in]0\,;1[$.

On a alors

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}-\frac{2x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur]0 ; 1[, la solution est donc l'intervalle]0 ; 1[.

5. $1+\ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3)$: il faut que $x>-3$ et que $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3) > 0$ (à l'extérieur des racines) donc $D =]-3\,;+\infty[$.

$1+\ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3) \Leftrightarrow \ln e + \ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3) \Leftrightarrow \ln e(x+3) = \ln(x^2+2x-3) \Leftrightarrow e(x+3) = x^2+2x-3$.

ln est une bijection : $x^2+(2-e)x-3(1+e)=0$,

$\Delta = (2-e)^2+12(1+e) = 4-4e+e^2+12+12e = e^2+8e+16 = (e+4)^2$.

$x = \frac{-(2-e)\pm(e+4)}{2}$, $x_1=-3 \notin D$ ou $x_2 = e+1 \in D$. $S = \{e+1\}$.

6. $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x)$

Il faut que $x^2-4e^2>0$ et que $3x>0$ i.e. $x>0$ et $x^2>4e^2$ c'est-à-dire ($x>0$) et ($x>2e$ ou $x<-2e$).

$D =]2e\,;+\infty[$.

$\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2-4e^2) < \ln e+\ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2-4e^2) < \ln(3ex) \Leftrightarrow x^2-4e^2 < 3ex \Leftrightarrow$

(E) $x^2-3ex-4e^2<0$.

$\Delta = 9e^2+16e^2 = 25e^2 = (5e)^2$, $x = \frac{3e\pm 5e}{2}$; (E) $\Leftrightarrow -e<x<4e$. $S =]2e\,;4e[$.

Exercice 5 :

1. $g'(x) = 2\sqrt{x}+2x\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\frac{1}{x} = \frac{4x+2x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x} = \frac{3x}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x} = 3\frac{x^2-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

On a alors $x^2-\sqrt{x}\ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 \ge x \Leftrightarrow x(x^3-1)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$ car x est positif.

Conclusion g est décroissante avant 1, croissante après ; on a un minimum en 1 qui vaut $g(1)=2+0+6=8$ et est positif. Finalement $g(x)$ est toujours positive.

2. $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$

a. No comment.

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, si on pose $X=\sqrt{x}$, cela nous donne

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X^2}{X} = \lim_{X\to+\infty}2\frac{\ln X}{X} = 0.$$

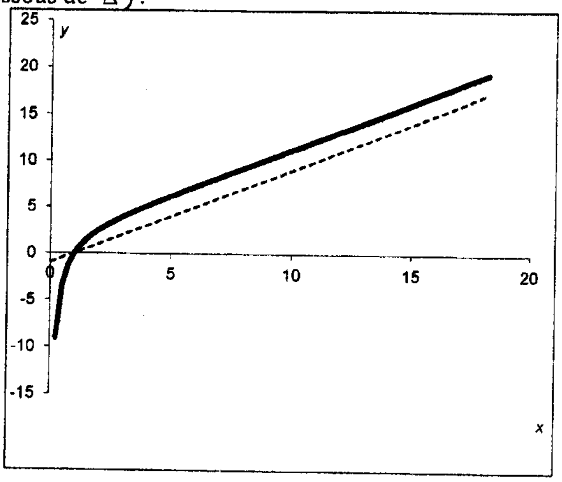
En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\infty$ ainsi que f.

c.

$$f'(x) = 3\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}+1 = 3\frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}+\frac{x}{x} = \frac{\frac{3(2-\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{6-3\ln x+2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

Donc f' est du signe de g et donc toujours positive, f est donc croissante.

3. On a $f(x)-(x-1) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 à l'infini et qui est positif (C au-dessus de Δ) lorsque $x>1$, négatif lorsque $x<1$ (C en dessous de Δ).



Exercice 6 :

1. $f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = \frac{3+x}{3-x}$

$$u'(x) = \frac{1\times(3-x)-(-1)\times(3+x)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+3+x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

d'où $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{6}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{3+x} = \frac{6}{(3-x)(3+x)}$.

2. a. $h(x) = \frac{4x}{(3x^2+2)^3} = \frac{4}{6}\times\frac{6x}{(3x^2+2)^3} = \frac{2}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{3}u'(x)u(x)^{-3}$

avec $u(x) = 3x^2+2$ et $n-1=-3 \Rightarrow n=-2$.

$$H(x) = \frac{2}{3}\times\frac{u(x)^{-2}}{-2}+K = -\frac{1}{3u(x)^2}+K = -\frac{1}{3(3x^2+2)^2}+K \quad (K \text{ réel}).$$

b. $H(10)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3(3\times 10^2+2)^2}+K=0 \Leftrightarrow K=\dfrac{1}{3\times 302^2}=\dfrac{1}{273612}$ d'où

$H(x)=-\dfrac{1}{3(3x^2+2)^2}+\dfrac{1}{273612}$.

4. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$:

$f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ et

$u'(x)=\dfrac{-1\times(x+1)-(1-x)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1-1+x}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$;

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{\frac{1-x}{x+1}}=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{1-x}=\frac{-2}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{(1+x)(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

5. $f(x)=\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$.

Soit $u(x)=x^2+2x$, on a : $u'(x)=2x+2=2(x+1)$ et

$$f(x)=\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u^3(x)}=\frac{1}{2}u'(x)\times u^{-3}(x)$$

qui est de la forme $\dfrac{1}{2}u'(x)\times u^{n-1}(x)$ avec $n-1=-3$, ou $n=-2$.

Les primitives de telles fonctions sont de la forme :

$F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^n(x)}{n}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(x^2+2x)^{-2}}{-2}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x^2+2x)^2}$ (+ constante...).

6. a. Dérivons $u(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}$, $u'(x)=\dfrac{1}{2}.2.\dfrac{1}{x}.\ln x=\dfrac{\ln x}{x}$ donc u est bien une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$.

Toutes les primitives sont alors de la forme $u(x)+K$.

b. $u(1)+K=0 \Leftrightarrow K=-u(1)=-\dfrac{(\ln 1)^2}{2}=0$.

$\Delta=9e^2+16e^2=25e^2=(5e)^2$, $x=\dfrac{3e\pm 5e}{2}$; (E) $\Leftrightarrow$ $-e<x<4e$. S =]2e ; 4e[.

Exercice 7 :

1. f est un quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue et dérivable sur IR.

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

2. a. $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln^2 x+\ln x+1}=f(\ln x)$ donc, comme f est définie sur IR, g est définie sur $]0\,;+\infty[$.

b. $(f\circ g)'=g'\times(f'\circ g)$.

$$g'(x)=\frac{1}{x}f'(\ln x)=\frac{1}{x}\left[\frac{-\ln^2 x+1}{\left(\ln^2 x+\ln x+1\right)}\right].$$

c. Le signe de g' dépend de celui de $1-\ln^2 x=(1-\ln x)(1+\ln x)$.

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1-\ln x$		+		+	0	−	
$1+\ln x$		−	0	+		+	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	0	↘	−1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

d. En $+\infty$ g se comporte comme les termes de plus haut degré en ln, soit $\dfrac{\ln x}{\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln x}\to\dfrac{1}{+\infty}=0$; en 0 c'est pareil car $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc encore 0 comme limite.

f. Tangente au point d'abscisse 1 : $y=x-1$.

Exercice 8 :

1. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$; f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, or le cours donne justement la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. a.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\left(1-x+x^2\right)=\frac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x}=\frac{-x^3}{1+x}\le 0$$

. Donc g est décroissante et comme $g(0)=0$, on a également $g(x)\le 0$, soit $\ln(1+x)\le\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. On prend

$$k(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow k'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\ge 0$$

et $k(0)=0$ donc $k(x)\ge 0$, soit $\ln(1+x)\ge x-\dfrac{x^2}{2}$.

c.

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ge\ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ge\ln(1+x)-x\ge-\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\ge\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}$$

f dérivable en zéro : on calcule

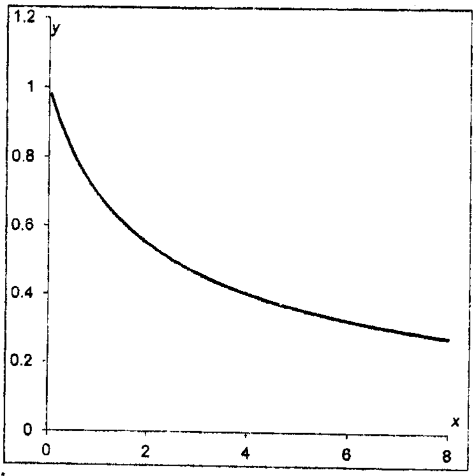
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$; or le résultat précédent montre que cette limite est précisément $-\dfrac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

3. a. $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$,

$h'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}\le 0$; on a $h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x)\le 0$.

b. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}\le 0$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\,\square\,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.



Exercice 9 :

Partie A

1. a. $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2}{x}(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	
$g(x)$				$\searrow$	3	$\nearrow$	

$g(1)=1^2+2-2\times 0=3$.

b. 3 est un minimum de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction g est positive quel que soit x.

2. a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\frac{2\ln x}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim\limits_{X\to+\infty}(-X\ln X)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{2\ln x}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty} x+2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

b. $f'(x)=1+\frac{2\times\frac{1}{x}\times x-2\ln x\times 1}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ du signe de $g(x)$, c'est à dire positif !

f est donc strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

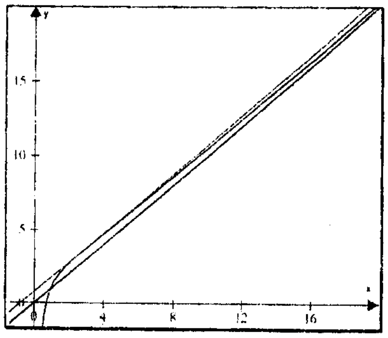
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

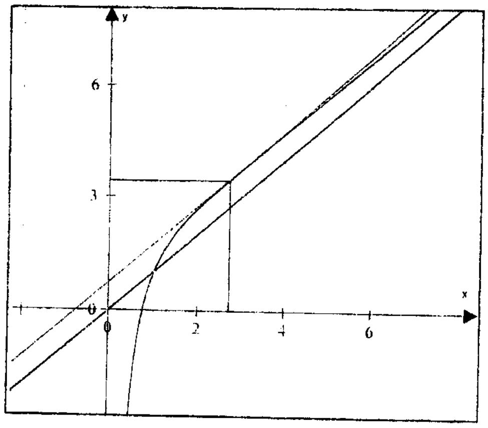
c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0^+$, donc la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe. Lorsque $x<1$ la courbe est en dessous de Δ, lorsque $x>1$, la courbe est au-dessus.

d. (C) admet en A une tangente de coefficient directeur 1 ssi $f'(x_A)=1$:

$f'(x_A)=1\Leftrightarrow\frac{g(x_A)}{x_A^2}=1\Leftrightarrow x_A^2+2-2\ln x_A=x_A^2\Leftrightarrow 2-2\ln x_A=0\Leftrightarrow 2\ln x_A=2\Leftrightarrow\ln x_A=1\Leftrightarrow x_A=e$

; $f(x_A)=f(e)=e+\frac{2\ln e}{e}=e+\frac{2}{e}\approx 3{,}45$.





3. Il faut calculer $\int_1^e (f(x)-x)dx=2\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$; or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln x$, donc on a quelque chose de la forme $u'.u$ dont une primitive est $\frac{1}{2}u^2$:

$$\int_1^e (f(x)-x)dx=2\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=2\left[\frac{1}{2}-0\right]=1$$

4. La fonction f est continue, strictement croissante, sur $]0\ ;\ +\infty[$, c'est donc une bijection de $]0\ ;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe bien une valeur x_0 appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ telle que $f(x_0)=0$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-4\ln 2<0$ et $f(1)=1+\frac{2\ln 1}{1}=1>0$ donc $\frac{1}{2}\le x_0\le 1$.

Exercice 10 :

Partie A

$f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$, $D_f=]-1\ ;+\infty[$.

1. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : en effet, $u: x\mapsto\frac{x}{x+1}$ est dérivable sur D_f et $v: x\mapsto x+1=y\mapsto -2\ln y$ est dérivable sur D_f. $f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-2\frac{1}{x+1}=\frac{1-2(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{-2x-1}{(x+1)^2}$.

2. $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow -2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1/2)$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>1}}\dfrac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{X\to0}X\ln X=0^-$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln(x+1)=-\infty$.

$f(-1/2)=\dfrac{-1/2}{1/2}-2\ln\dfrac{1}{2}=-1+2\ln 2\approx 0,39$, $f(0)=0$.

3. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;-1/2[$ et $f(x)$ change de signe sur cet intervalle ; il existe donc un nombre α de $]-1\,;-1/2[$ tel que $f(\alpha)=0$. $f(-0,71)\approx 0,027$ et $f(-0,72)\approx -0,025$ donc $-0,72<\alpha<-0,71$.

Signe de $f(x)$:

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$

Partie B $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$, $D=]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

1. a. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)}\times\dfrac{x+1}{x^2}=0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

2. a. $g'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+1}\times x^2-\ln(x+1)\times 2x}{x^4}=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x^3}$.

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$
x^3	‖	$-$		$-$		$+$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$

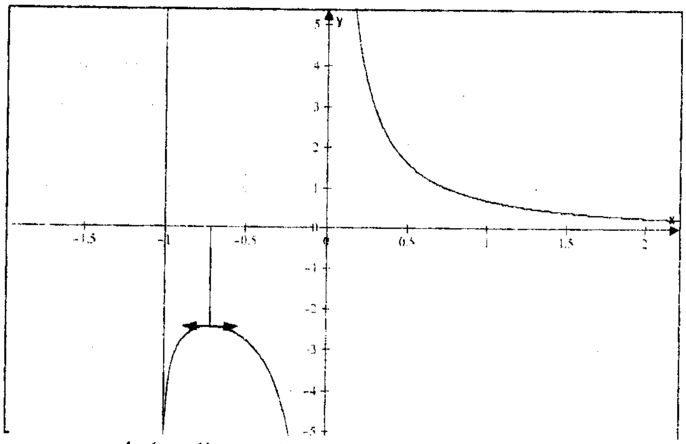
b. $g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$; or on sait que $f(\alpha)=0$ donc

$\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0\Leftrightarrow\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$.

On déduit que

$g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\approx-2,455$.

x	-1		α		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	↗		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0



4. a. $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

$u=\ln(x+1)$, $u'=\dfrac{1}{x+1}$, $v'=\dfrac{1}{x^2}$, $v=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow h=uv'+u'v$.

La fonction $uv=-\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ est une primitive de h.

b. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$ donc la fonction

$\ln(x)-\ln(x+1)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$. c. Une primitive de la fonction $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=h(x)+\dfrac{1}{x(x+1)}$ est

$-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\ln x-\ln(x+1)$.

Exercice 11:

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\dfrac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x)=\frac{\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x(x^2+1)}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2+1)+4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

b. Le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : si $0<x<1$, $g'(x)$ est négatif ; si $x>1$, $g'(x)$ est positif.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

3. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ avec $X=1+\dfrac{1}{x^2}$ et

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x^2+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to0}g(x)=+\infty$.

4. a.

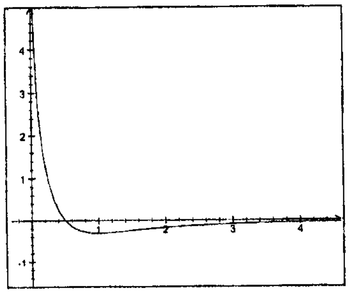
x	0		1		+∞
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	+∞	↘	−0,3	↗	0 0

$g(1)=\ln(1+\frac{1}{1^2})-\frac{2}{1^2+1}=\ln 2-1\approx -0,3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur]0 ; 1], de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha>0$ telle que $g(\alpha)=0$.

On a $g(0,5)\approx 0,009438$ et $g(0,6)\approx -0,141452$ donc $g(0,5)>0=g(\alpha)>g(0,6)$ et comme g est décroissante, $0,5<\alpha<0,6$.

5. Pour $0<x<\alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x>\alpha$ alors $g(x)$ est négatif.



1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ (cours).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. $f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x^2})$,

$$f'(x)=1.\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\ln(1+\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x^2+1}=g(x)$$

x	0		α		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	0

3. a. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x\ln(x^2+1)-x\ln x^2\right)$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+1)=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x^2+1)=\ln 1=0$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -x\ln x^2=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} +\frac{2\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{2\ln X}{X}=0^-$$

avec $X=\frac{1}{x}$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

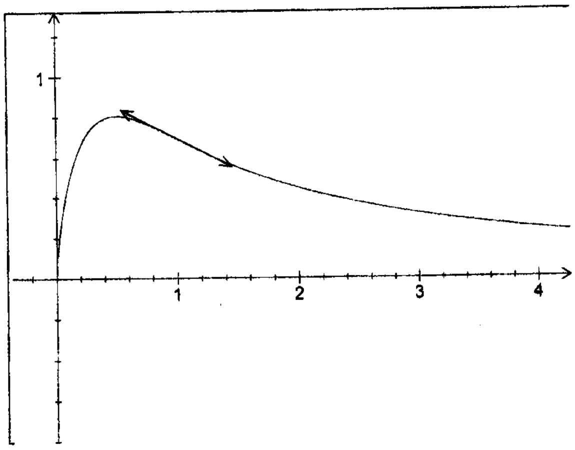
c. La tangente en 0 à f est verticale. Son équation est $x=0$.

4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$: $f(1)=1\ln(1+\frac{1}{1^2})=\ln 2$,

$f'(1)=g(1)=\ln 2-1$ d'où

$y=(\ln 2-1)(x-1)+\ln 2 \Leftrightarrow y=(\ln 2-1)x+1$.

5.



Remarque :
On a vu dans la partie A que $g'(1)=0$, or $g'(1)=f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x=1$.

Exercice 12 :

Partie A

1. $g(x)=-2x^2-1+\ln x$,

$g'(x)=-4x+\frac{1}{x}=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur]0 ; +∞[seul le terme $1-2x$ change de signe : positif avant 1/2, négatif après 1/2.

2.

x	0		1/2		+∞
$g'(x)$		+		−	
$g(x)$		↗	$\frac{3}{2}-\ln 2$	↘	

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\ln 2<0$.

Partie B

1. a. $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Conclusion, *f* tend vers $+\infty$ quand *x* tend vers 0 ; la droite $x=0$ est asymptote de C.

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand *x* tend vers $+\infty$ donc *f* tend vers $-\infty$ car $-x+1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x)-(-x+1)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+x-1=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

donc la droite Δ $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C.

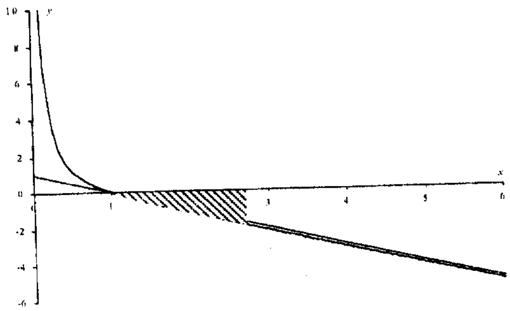
d. Lorsque $x>1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}<0$ car $\ln x>0$. Donc sur $[1\,;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0\,;1]$ C est en dessous de Δ.

2. a. b. c. $f'(x)=-1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$. Donc *f* est négative et *f* décroissante.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$

d. $f(1)=0$: lorsque *x* est inférieur à 1, $f(x)>f(1)=0$ car *f* est décroissante. Lorsque x est supérieur à 1, $f(x)<f(1)=0$.

3.



Partie C (version 1)

1. $F(x)=-\frac{1}{2}(2x)+1-\frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=f(x)$:

F est une primitive de *f*.

2.

$$I=\int_1^e f(x)\,dx=F(e)-F(1)=\left[-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{4}(\ln e)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}1^2+1-\frac{1}{4}(\ln 1)^2\right]=-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{4}\approx-1{,}726$$

3. b. L'unité d'aire est $1\text{ cm}\times 2\text{ cm}=2\text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l'intégrale multipliée par l'unité d'aire, ce qui nous fait $e^2-2e+\frac{3}{2}$, soit environ 3,45 cm² au mm² près.

Partie C

1. Pour avoir une tangente parallèle à Δ, il faut trouver *x* tel que $f'(x)=-1$, soit $\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=-1\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

L'ordonnée est alors $f(e)=-e+1-\frac{1}{2e}$; l'équation de T est

$y=-x+e-e+1-\frac{1}{2e}=-x+1-\frac{1}{2e}$.

2. a. Comme C est en dessous de Δ, on a

$MN=(-x+1)-f(x)=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=h(x)$.

b. $h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-\ln x}{x^2}$ qui change de signe en $x=e$; la distance *MN* est maximale lorsque *M* est en *J* et cette distance vaut

$h(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$.

Exercice 13 :

Partie A $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$.

1. a. $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2=0$: on pose $X=\ln x$ d'où

$-3-X+2X^2=0\Rightarrow X_1=-1,\ X_2=\frac{3}{2}$ d'où $x=e^{-1}$ ou $x=e^{\frac{3}{2}}$.

b.

$$-3-X+2X^2>0\Leftrightarrow X=\ln x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left]0;e^{-1}\right[\cup\left]e^{\frac{3}{2}};+\infty\right[$$

2. a. Toujours avec $X=\ln x$, lorsque *x* tend vers 0, *X* tend vers $-\infty$ donc $-3-X+2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$; lorsque *x* tend vers $+\infty$, *X* tend vers $+\infty$ donc $-3-X+2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$.

b. $f'(x)=-\frac{1}{x}+2\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x=\frac{-1+4\ln x}{x}$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercices non corrigés

Exercice 1 :

On pose $P(X)=2X^3+7X^2+2X-3$.

a. Calculer $P(-1)$, en déduire une factorisation de *P*.

b. Résoudre dans IR l'équation $P(X)=0$.

c. En déduire la résolution dans IR de :

$2x^6+7x^4+2x^2-3=0$

$2\ln^3 x+7\ln^2 x+2\ln x-3=0$

$\ln(2x+3)+\ln(x^2+2x+2)=\ln(8x+9)$

Exercice 2 :

Soit $P(x)=3x^3-9x^2-39x+45$

1°/
a. Vérifier que 5 est une racine de P(x)
b. Résoudre dans IR l'équation P(x)=0
c. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$

2°/ En déduire les solutions dans IR de :

a. $\ln\left(\dfrac{3x^3+45}{x}\right) = \ln(9x+39)$.

b. $3(\ln)^3 - 9(\ln x)^2 - 39\ln x + 45 \leq 0$

Exercice 3 :

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1°/
a) Vérifier que – 1 est racine de P(x).
b) Factoriser alors P(x).
c) En déduire les solutions dans IR de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

2°/ En utilisant les résultats de 1°/, résoudre dans IR

a) $2\ln^3 x - \ln^2 x - 5\ln x - 2 = 0$

$2\ln^3 x - \ln^2 x - 5\ln x - 2 > 0$

Exercice 4 :

Déterminer le domaine de définition et les limites aux bornes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $g(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; $h(x) = \ln x + 3\ln(4-x)$;

$f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$; $g(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{\ln x}$;

$h(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

b) $f(x) = \ln|2x+1|$; $g(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$,

$h(x) = \ln|-3x^2 + 5x + 2|$

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes si elles existent.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 2x - \ln x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[x + \ln(x^2+1)]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}(x - \ln x)$; $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x \cdot \ln x)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\left[x(\ln x)^2\right]$ et $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x}{x-2}\ln(x-1)\right]$

Exercice 6 :

A- Résoudre dans IR les équations suivantes
a) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$;
b) $\ln(x^2 - x - 1) = 0$; $\ln(x+3) - \ln(x-5) = \ln 15$
c) $\ln(2x+8) - \ln(3x+2) = \ln(x+1)$;
d) $3\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$; $\ln^2 x + (1 - 2\ln 2)\ln x - 2\ln = 0$
e) $2\ln^3(x+1) - 9\ln^2(x+1) - 2\ln(x+1) + 9 = 0$;

$\ln^3 x + 2\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$;

$2\ln^3\left(\dfrac{x}{x-2}\right) - 3\ln^2\left(\dfrac{x}{x-2}\right) - 3\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right) + 2 = 0$

Exercice 7 :

B- Résoudre dans IR les inéquations suivantes
a) $\ln(2x - e) > 1$;
b) $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$
c) $\ln(2x+3) < \ln(x+3)$
d) $\ln\dfrac{1}{x} > \ln x$; $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x} > 0$; $(1-\ln x)(2+\ln x) \leq 0$
e) $2\ln^3(x+1) - 9\ln^2(x+1) - 2\ln(x+1) + 9 < 0$
f) $-2\ln^3\left(\dfrac{x}{x-2}\right) - 3\ln^2\left(\dfrac{x}{x-2}\right) - 3\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right) + 2 \geq 0$

Exercice 8 :

Résoudre dans dans IRxIR :

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 2 - e \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ \ln x - \ln y = 2\ln\dfrac{4}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 2\ln y = \dfrac{20}{3} \end{cases}$

Exercice 9 :

Etudier les fonctions f ; g et h suivantes

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $g(x) = |\ln x|$ et $h(x) = x - \ln x$

b) $f(x) = x|\ln x|$; $g(x) = x^2 - 2\ln x$ et

$h(x) = \dfrac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$

c) $f(x) = -1 + \ln^2 x$; $g(x) = \sqrt{\ln x}$ et $h(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$;

$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $g(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; et $w(x) = \cos(\ln x)$

Exercice 10 :

1°/ Soit $f : x \mapsto -x + \dfrac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Déterminer D_f et préciser les branches infinies de (C)

2°/ On donne $g : x \mapsto -x^2 + 1 - \ln x$

a) calculer g(1)
b) étudier les variations de g puis en déduire le signe de g(x) en fonctions des valeurs de x
c) calculer f'(x)
d) Dresser le tableau de variations de f puis tracer (C).

Exercice 11 :

On donne $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)$

1°/ Déterminer le domaine de définition de f puis dresser le tableau de variations de f.

2°/ Déterminer si possible l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisse

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour x de $]-\infty;-1[$; on ait $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2. Déduisez-en la primitive F de f sur $]-\infty;-1[$ telle que F(-2) = 1.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^3-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour x de $]-\infty;1[$ on ait : $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$.
2. Déduisez en la primitive F de f sur $]-\infty;1[$ telle que $F(-1)=\ln 2$.

Exercice 14:

1. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2 & \text{si } x<1 \\ f(x)=\ln x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur IR
b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter ce résultat géométriquement.

2. Soit g la fonction définie par :
$\begin{cases} g(x)=3x^2+2x+1 & \text{si } x<0 \\ g(x)=x+1+\ln(x+1) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) démontrer que g est continue sur IR
b) étudier la dérivabilité de g sur IR

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2\sqrt{|\ln x|} & \forall x>0 \\ f(0)=0\end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2. Etudier f sur son domaine de définition

Exercice 16:

Soit $f: x\mapsto (x-1)\ln|x-1|-x\ln x$

1. Déterminer D_f
2. Etudier les variations de f
3. Soit g définie par : $\begin{cases} g(0)=g(1)=0 \\ g(x)=f(x) & \text{si } x\neq 0 \text{ et } x\neq 1\end{cases}$

a) Montrer que g est un prolongement par continuité de f
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et 1
c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
d) Etudier g puis représenter sa courbe représentative (C_g) dans un repère (unité graphique 2cm)

Exercice 17 :

1. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0\end{cases}$
   a) Etudier f sur son domaine de définition
   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
   c) Représenter f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
2. Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{-1+\ln x} & \text{si } x\neq 0 \\ g(0)=0\end{cases}$
   a) Déterminer D_g
   b) Soit (C') la courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Montrer que (C') est l'image de (C) par une homothétie que l'on précisera.

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-\dfrac{x^2\ln x}{1+x}$ si x>0 et f(0)=0

A-/ Soit $g: x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}+\ln x$

1. Etudier les variations de g puis montrer qu'il existe $\beta\in]0;1[$ tel que $g(\beta)=0$.
2. Vérifier que $0{,}54<\beta<0{,}55$

B-/

1. Montrer que f est continue en 0. est elle dérivable en 0 ?
2. Dresser son Tableau de variations
3. Construire la courbe représentative de la restriction de f sur $]0,1[$ (unités 10cm sur l'axe des abscisses et 20cm sur l'axe des ordonnées)

Exercice 19 :

Montrer que $\forall x>0$ on a : $\dfrac{1}{x+1}\leq \ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\leq\dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

Exercice 20:

Soit $f: x\mapsto \dfrac{x}{x^2-1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1. Montrer que f est impaire et étudier ses variations
2. Construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal.
3. calculer la dérivée de la fonction :
   $g: x\mapsto (x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$. En déduire la primitive F de f vérifiant $F(\sqrt{2})=0$

Exercice 21 :

Soit $f: x\mapsto \ln\sqrt{\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|}$

1. Montrer que f est impaire puis Construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal.
2. prouver la restriction de f sur $]-2,2[$ réalise une bijection de $]-2,2[$ sur IR

Exercice 22 :

Soit $f: x\mapsto \ln(\ln x)$

1. Déterminer son domaine de définition I.
2. sans calculer la dérivée montrer que f est strictement croissante sur I
3. Etudier les limites de f aux bornes de I
4. Montrer que f est une bijection. En déduire que $\exists\alpha\in IR$ tel que : $f(\alpha)+1=0$. En déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 23:

A- On considère la fonction $g: x\mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\ln^2(x)}-\dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x\neq 0 \\ g(0)=0\end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de g

2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

B- Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0
2. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition
3. montrer que f est dérivable puis calculer f '(x)
4. Etudier les variations de f

Exercice 24 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f
2. Soient M1 le point de rencontre de (C) avec l'axe des abscisses , M2 le point où la tangente passe par O et M3 le point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

a) Déterminer les abscisses x_1 ; x_2 et x_3 de points M1 ;M2 et M3 respectivement

b) Montrer que x_1 ; x_2 et x_3 sont en progression géométrique dont déterminera la raison.

Exercice 25 :

On considère les fonctions f et h définies par :

$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et $h(x) = \ln\dfrac{2x}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f puis construire sa courbe (2 cm).
2) Montrer que I(1 ;0) est un centre de symétrie de Cf.
3) Placer les points d'abscisses 0 et 2.
4) On désigne par g la fonction : $\begin{cases} g(x)=f(x) & si\ x<1 \\ g(1)=0 \\ g(x)=h(x) & si\ x>1 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1.

b) Etudier les variations de g .

c) Montrer que g réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

d) Déterminer $g^{-1}(-\frac{1}{2})$ puis $g^{-1\prime}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Pour x >0 expliciter $g^{-1}(x)$

Exercice 26 :

Soit $g(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1) Démontrer que g est impaire.
2) Etudier les variations de g.
3) Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion.
4) Tracer Cg.

Exercice 27 :

On donne $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$, $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ et $h(x) = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f , g et h
2. Calculer les limites de f , g et h aux bornes de leur domaine de dérivabilité
3. Calculer les dérivées de f , g et h.

Exercice 29 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite géométrique croissante de raison q et à termes positifs telle que : $\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$

1°/

a) Montrer que $\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_3 = 51 \end{cases}$

b) En déduire u_1 et u_3 puis la raison q.

2°/ Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\geq 1}$ puis étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

3°/ Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.

Problème 1:

Soit $I =]0;+\infty[$; f la fonction définie sur I par : $f(x) = (1+\ln x)^2 - 2x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité graphique est de 5cm.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduisez-vous pour la courbe (C_f) ?
2. Montrer que, pour tout x de I , on peut écrire : $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x} + 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\right]$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que ; pour tout $x \in I$, $f'(x)$ a le même signe que $\ln x - x + 1$.
4. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = \ln x - x + 1$.
   a) Etudier le sens de variation de g.
   b) Déduisez-en, pour tout $x \in I$, le signe de $g(x)$.
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C_f)

Problème 2:

On considère la fonction f telle que : $f(x) = x+1+\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f et les limites aux bornes de D_f ; n déduire les asymptotes.
2. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et en déduire les variations de ; établir le tableau de variation de f .

3. Montrer que le point $I(0,-1)$ est à la fois un centre de symétrie et un point d'inflexion de C_f, écrire une équation de la tengente d'inflexion.
4. Montrer que, l'équation que $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$.
5. Tracer dans un repère orthonormal (unité 1cm) La courbe C_f et la tangente d'inflexion.

Problème 3:

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{-1}{x^2 \ln x}$.

1. a) Déterminer le domaine de définition D_f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
   c) Préciser les équations des asymptotes éventuelles à C_f.
2. a) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
   b) dresser le tableau de variation de f.
3. Représenter C_f dans un repère orthonormè $(O,\vec{i},\vec{j})$
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=]1;+\infty[$.
   a) Démontrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
   b) Calculer $g(e)$ et $(g^{-1})'(1/2)$.
   c) Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ dans nouveau repère.

Problème 4:

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2} & si\ x \succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{x}{\ln x}$.
   a) Montrer que h est dérivable sur D_h puis calculer $h'(x)$.
   b) En déduire une primitive de f sur $]0,1[$.
   c) Montrer qu'il existe une fonction g définie sur D_h continue à droite en 0 et telle que $\forall x \in]0,1[\ g(x)=h(x)$.
   d) En déduire une primitive de f sur $[0;1]$.

Problème 5:

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{x+1}{x+2}-2\ln(x+2)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de f.
2. Calculer $f(-1)$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une notée α appartient à $]-1.72;-1.71[$.
3. Donner le signe de $f(x)$ pour $x \in]-2,+\infty[$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $]-2,-1[\cup]-1,+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{\ln(x+2)}{(x+1)^2}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
2. a) Calculer $g'(x)$ puis vérifier que $g'(x)=\frac{(x+1)f(x)}{(x+1)^4}$ pour tout $x \in]-2,-1[\cup]-1,+\infty[$.
   En déduire alors le signe de $g'(x)$.
   b) Montrer que $g(\alpha)=\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha=-1{,}715$.
3. a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormal unité 2cm.

Problème 6:

1. Etudier les variations de la fonction P définie sur R par : $P(x)=x^2-6x+5$.
2. Soit f la fonction définie sur IR_+^* par :
   $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.
   a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f.
   c) Calculer la dérivée seconde f'' de f. Pour quelles valeurs x_0 de x l'égalité $f''(x)=0$ est-elle vérifiée ? Déterminer une équation cartésienne de la tangente D à la courbe Γ de f au point M₀ d'abscisse x_0.
3. On considère la fonction g définie sur]0 ; $+\infty$[par :
   $g(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5-\frac{2}{e^4}x+5$.
   a) Calculer les dérivées premières et secondes de g.
   b) Etudier le sens de variations de g ' et en déduire le signe de g ' (x).
   c) Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de g (x).
   d) Déterminer la position de Γ et D.
4. Construire la courbe Γ (on prendra 1mm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).On construira les points d'abscisses e^n, n entier ; la droite D et on précisera son point d'intersection T avec l'axe des ordonnées.
5. Résoudre graphiquement $f(x)>0$ et $f(x)\leq -3$.

Problème 7: (BAC S2, 2003)

A. On considère la fonction u :

$$[0;+\infty[\to IR$$
$$x\mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de u. Calculer u(0) et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)$.

2) Etudier les variations de u.
Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall\ x\in[0;1[,\ u(x)\geq 0.$

b) $\forall\ x\in]1;+\infty[,\ u(x)<0.$

B. Soit g la fonction définie par

$$g:[0;+\infty[\to IR$$
$$x\mapsto x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$$

1) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

) Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=1.$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$. Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α appartenant à $]0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3) Tracer la courbe Cg de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

C. Soit $f:[0;1[\to IR$, la fonction définie par

$$f(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que

$f'(x)=g(x),\forall\, x\in[0;1[.$

Problème 8:

Soit $f(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^3}$

Première partie : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit $g:x\mapsto x+1-3x\ln x$

1. Etudier les variations de g puis déterminer ses limites aux bornes de son domaine de définition
2. Dresser son tableau de variations
3. Montrer que $\exists!\alpha\in[1;2]\ /\ g(\alpha)=0$. Montrer que $1{,}69<\alpha<1{,}7$

Deuxième partie : Etude de f

1.
   a) Etudier la limite de f en 0+
   b) Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[\ \ 0\leq f(x)\leq\frac{\ln x}{x^3}$
   c) Préciser les asymptotes à (C), courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2.
   a) Montrer que f est dérivable puis calculer $f'(x)$
   b) En déduire le tableau de variations de f
   c) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{3\alpha(\alpha+1)^2}$. En déduire un encadrement de f(α) à 10-2 près

3.
   a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
   b) Tracer dans le même repère (T) et (C)

Problème 9:

1ère partie : Soit $g:x\mapsto 4x^3+x^2+1$

1°/ Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

2°/ Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans 3 et que $\alpha\in\left]-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right[$. Donner une valeur approchée de α.

3°/ Déterminer le signe de g sur IR.

2ème partie : Soit $f:x\mapsto 2\ln(x^2+1)-\frac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1°/ Déterminer D_f puis montrer que f est continue et dérivable.

2°/ Calculer f '(x) puis exprimer f '(x) en fonction de g(x).

3°/ Donner un encadrement une valeur approchée de f(α).

4°/

a°/ Calculer les limites de f.

b°/ Montrer que pour x non nul on a :

$$\ln(x^2+1)=2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

c°/ Déterminer les branches infinies de (C)

5°/ Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$.

a°/ Montrer que h est une bijection.

b°/ Démontrer que h^{-1} est dérivable.

Problème 10:

Le Plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 5cm)

A- Soit g 'application de $]0,+\infty[$ dans IR définie par :

$$g(x)=x\ln x.$$

1. Etudier les variations de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
3. Tracer la courbe représentative C_g de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On précisera l'allure de C_g au voisinage de l'origine.

B- On considère maintenant l'application f de $[0,+\infty[$ dans IR définie par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=|x\ln x| \text{ si } x\neq 0\end{cases}$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C_f dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2. Démontrer qu'il existe un rée unique α appartenant à l'intervalle $]1,e[$ tel que $f(\alpha)=\frac{1}{e}$. Placer le point correspondant sur la courbe C_f.
3. Donner l'aide de la calculatrice, une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

C- On définit la suite numérique (u_n) par son premier terme u_0 ($u_0 \succ 0$ et $x \neq 1$), et pour tout n, par $u_{n+1}=f(u_n)$, où f désigne l'application définie au B.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire ?
2. On choisit $u_0 \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$. Démontrer que :
   a) $\forall n \in IN,\ 0 \prec u_n \prec \frac{1}{e}$.
   b) La suite (u_n) est strictement croissante.
   c) La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$
3. On choisit maintenant $u_0 \in \left]\frac{1}{e},1\right[$. Montrer que $u_1 \in \left]\frac{1}{e},1\right[$. La suite (u_n) est-elle convergent ?
4. a) Pour $u_0 \succ e$ montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   b) Montrer que, pour tout x supérieur à e. On a $f'(x) \geq 2$.
   c) En déduire que $u_{n+1}-u_n \geq 2(u_n-u_{n-1})$.
   d) Montrer que $u_{n+1}-u_n \geq 2^n(u_1-u_0)$.
   e) Montrer que $u_{n+1} \geq u_0+(u_1-u_0)(2^{n+1}-1)$. EN déduire la nature de la suite (u_n).
5. Que dire de la suite (u_n) si on choisit $u_0=\alpha$, α étant la valeur introduite au B (question 3)

Problème 11:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, i, j) avec unité 1 cm

1) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $x \mapsto \ln(\cos x)$
   a) Etudiez la parité de f.
   b) Etudiez les variations de f ainsi que les limites aux bornes de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   c) Tracez la courbe (C) de f.
2) a) résolvez dans IR $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$.
   b) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right[$ par : $x \mapsto \ln\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)$ et (Γ) sa courbe. Montrer que (Γ) se déduit de (C) par une transformation simple à trouver.
   c) Tracez la courbe (Γ) dans le même repère que (C).

Problème 12:

Partie A

On considère la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln^2(x)}-\frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de g

2°/ Etudier les variations de g. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

Partie B

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=-\frac{x}{\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0. En déduire l'existence d'une démie-tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

2°/ Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition

3°/ Montrer que f est dérivable puis calculer f '(x). Comparer f'(x) et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.

4°/ Déterminer l'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse e^2.

5°/ Soit M le point de (C_f) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse. On pose $\varphi(x)=\overline{NM}$.

a. Montrer que $\varphi(x)=f(x)+\frac{x+e^2}{4}$

b. Déduire du A) le tableau de variations de φ' puis le signe de φ' sur $]1;+\infty[$.

c. En déduire le signe de φ(x) sur $]1;+\infty[$ et la position de (D) par rapport à (C_f) pour les point d'abscisses x appartenant à $]1;+\infty[$.

6°/ Représenter dans un repère orthonormé la courbe (C_f)et la droite (D) (unité graphique 2cm).

Partie C :

On revient à la fonction g du A) . On note (Γ) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=e et x=e².

Problème 13:

f est la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de]]0 ; +∞ [, $f'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2. La fonction φ est définie sur]0 ; +∞ [par $\varphi(x)=x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β. Etudier le signe de φ.
3. En déduire les variations de f, étudier les limites de f en 0 et +∞.
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite (α_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n>0$, $f(e^n)<n$. En déduire que $\alpha_n>e^n$ et la limite de (α_n)
6. Prouver que la relation $f(\alpha_n)=n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}$.

En déduire la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$.

Problème 7: (BAC S2, 2003)

A. On considère la fonction u :

$$[0;+\infty[\to IR$$
$$x\mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de u. Calculer u(0) et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)$.

2) Etudier les variations de u.
Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall\ x\in[0;1[,\ u(x)\geq 0.$

b) $\forall\ x\in]1;+\infty[,\ u(x)<0.$

B. Soit g la fonction définie par

$$g:[0;+\infty[\to IR$$
$$x\mapsto x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$$

1) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

) Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=1.$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$. Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α appartenant à $]0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3) Tracer la courbe Cg de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

C. Soit $f:[0;1[\to IR$, la fonction définie par

$$f(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que

$$f'(x)=g(x),\forall x\in[0;1[.$$

Problème 8:

Soit $f(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^3}$

Première partie : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit $g:x\mapsto x+1-3x\ln x$

1. Etudier les variations de g puis déterminer ses limites aux bornes de son domaine de définition
2. Dresser son tableau de variations
3. Montrer que $\exists!\alpha\in[1;2]\ /\ g(\alpha)=0$. Montrer que $1{,}69<\alpha<1{,}7$

Deuxième partie : Etude de f

1.

a) Etudier la limite de f en 0+

b) Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[\ \ 0\leq f(x)\leq\frac{\ln x}{x^3}$

c) Préciser les asymptotes à (C), courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec i;\vec j)$

2.

a) Montrer que f est dérivable puis calculer $f'(x)$

b) En déduire le tableau de variations de f

c) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{3\alpha(\alpha+1)^2}$. En déduire un encadrement de f(α) à 10-2 près

3.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer dans le même repère (T) et (C)

Problème 9:

1ère partie : Soit $g:x\mapsto 4x^3+x^2+1$

1°/ Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

2°/ Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans 3 et que $\alpha\in\left]-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right[$. Donner une valeur approchée de α.

3°/ Déterminer le signe de g sur IR.

2ème partie : Soit $f:x\mapsto 2\ln(x^2+1)-\frac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec u;\vec v)$.

1°/ Déterminer D_f puis montrer que f est continue et dérivable.

2°/ Calculer f '(x) puis exprimer f '(x) en fonction de g(x).

3°/ Donner un encadrement une valeur approchée de f(α).

4°/

a°/ Calculer les limites de f.

b°/ Montrer que pour x non nul on a :

$$\ln(x^2+1)=2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

c°/ Déterminer les branches infinies de (C)

5°/ Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$.

a°/ Montrer que h est une bijection.

b°/ Démontrer que h^{-1} est dérivable.

Problème 10:

Le Plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec i;\vec j)$. (unité 5cm)

A- Soit g 'application de $]0,+\infty[$ dans IR définie par : $g(x)=x\ln x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
3. Tracer la courbe représentative C_g de g dans le repère $(O;\vec i;\vec j)$. On précisera l'allure de C_g au voisinage de l'origine.

B- On considère maintenant l'application f de $[0,+\infty[$ dans IR définie par : $\begin{cases}f(0)=0\\ f(x)=|x\ln x|\ \text{si}\ x\neq 0\end{cases}$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C_f dans le même repère $(O;\vec i;\vec j)$.

2. Démontrer qu'il existe un rée unique α appartenant à l'intervalle $]1,e[$ tel que $f(\alpha)=\frac{1}{e}$. Placer le point correspondant sur la courbe C_f.
3. Donner l'aide de la calculatrice, une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

C- On définit la suite numérique (u_n) par son premier terme u_0 ($u_0 \succ 0$ et $x \neq 1$), et pour tout n, par $u_{n+1}=f(u_n)$, où f désigne l'application définie au B.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire ?
2. On choisit $u_0 \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$. Démontrer que :

   a) $\forall n \in IN,\ 0 \prec u_n \prec \frac{1}{e}$.

   b) La suite (u_n) est strictement croissante.

   c) La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$
3. On choisit maintenant $u_0 \in \left]\frac{1}{e},1\right[$. Montrer que $u_1 \in \left]\frac{1}{e},1\right[$. La suite (u_n) est-elle convergent ?
4. a) Pour $u_0 \succ e$ montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

   b) Montrer que, pour tout x supérieur à e. On a $f'(x)\geq 2$.

   c) En déduire que $u_{n+1}-u_n \geq 2(u_n-u_{n-1})$.

   d) Montrer que $u_{n+1}-u_n \geq 2^n(u_1-u_0)$.

   e) Montrer que $u_{n+1}\geq u_0+(u_1-u_0)(2^{n+1}-1)$. EN déduire la nature de la suite (u_n).
5. Que dire de la suite (u_n) si on choisit $u_0=\alpha$, α étant la valeur introduite au B (question 3)

Problème 11:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, i, j) avec unité 1 cm

1) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $x \longmapsto \ln(\cos x)$

a) Etudiez la parité de f.

b) Etudiez les variations de f ainsi que les limites aux bornes de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Tracez la courbe (C) de f.

2) a) résolvez dans IR $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$.

b) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right[$ par : $x \longmapsto \ln\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)$ et (Γ) sa courbe. Montrer que (Γ) se déduit de (C) par une transformation simple à trouver.

c) Tracez la courbe (Γ) dans le même repère que (C).

Problème 12:

Partie A

On considère la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln^2(x)}-\frac{1}{\ln x} & \text{si } x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de g

2°/ Etudier les variations de g. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

Partie B

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=-\frac{x}{\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0. En déduire l'existence d'une démie-tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

2°/ Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition

3°/ Montrer que f est dérivable puis calculer f '(x). Comparer f'(x) et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.

4°/ Déterminer l'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse e^2.

5°/ Soit M le point de (C_f) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse. On pose $\varphi(x)=\overline{NM}$.

a. Montrer que $\varphi(x)=f(x)+\frac{x+e^2}{4}$

b. Déduire du A) le tableau de variations de φ' puis le signe de φ' sur $]1;+\infty[$.

c. En déduire le signe de φ(x) sur $]1;+\infty[$ et la position de (D) par rapport à (C_f) pour les point d'abscisses x appartenant à $]1;+\infty[$.

6°/ Représenter dans un repère orthonormé la courbe (C_f)et la droite (D) (unité graphique 2cm).

Partie C :

On revient à la fonction g du A) . On note (Γ) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e$ et $x=e^2$.

Problème 13:

f est la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de]]0 ; +∞ [, $f'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2. La fonction φ est définie sur]0 ; +∞ [par $\varphi(x)=x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β. Etudier le signe de φ.
3. En déduire les variations de f, étudier les limites de f en 0 et +∞ .
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite (α_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n>0$, $f(e^n)<n$. En déduire que $\alpha_n>e^n$ et la limite de (α_n)
6. Prouver que la relation $f(\alpha_n)=n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}$.

En déduire la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$.

Problème 14:

Première partie

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\ ;\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\dfrac{x+2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue en 0.
b. f est-elle dérivable en 0 ?
c. On pose $h = \dfrac{2}{x}$ avec $(x > 0)$. trouver la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
2. a. Pour $x > 0$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f''(x) = -\dfrac{4}{x(x+2)^2}$.
b. Etudier le sens de variation de $f'(x)$ et trouver la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire le signe de $f'(x)$.
c. Dresser le tableau de variations de $f(x)$.
3. On appelle C la courbe représentative de $f(x)$ (unités : 4 cm). Tracer C en indiquant la tangente en O et au point A d'abscisse 2.
4. Soit u la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ et H sa représentation graphique dans le même repère que C.
a. Dresser le tableau de variation de u et vérifier que pour tout $x>0$ on a $f(x) - u(x) = xf'(x)$. En déduire la position relative de C et H. Tracer H en indiquant le point B d'abscisse 2.
b. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à C au point d'abscisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $u(\lambda)$. En déduire à l'aide du tracé de H la construction de la tangente à C au point d'abscisse λ. Indiquer la construction ainsi de la tangente à C au point A.

Deuxième partie

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g, définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ et possédant la propriété suivante P : $g(x) - xg'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$. g étant définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ on pose $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si $G'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire l'ensemble (E).

Problème 15:

On désigne par a un réel de l'intervalle $]0\ ;\pi[$ et on considère la famille de fonctions numériques f_a définies par

$$f_a(x) = \ln\left(x^2 - 2x\cos a + 1\right).$$

On appelle C_a la représentation graphique de fa dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrez que l'ensemble de définition de f_a est IR.
2. Déterminez les limites de f_a en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrez que la droite d'équation $x = \cos a$ est axe de symétrie de C_a.
4. a et a' étant deux réels distincts, montrez que C_a et $C_{a'}$ sont sécantes en un unique point que l'on précisera.
5. Calculez $f_a'(x)$ et déduisez-en son sens de variation.
6. Donnez l'allure des courbes C_a.

Problème 16:

Soit f la fonction définie sur $D = IR - \{3\}$ par $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm).

1. a. Vérifier que si $x \in D$ alors $f'(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.
b. Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.
c. Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3.
2. a. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty\ ;3[$ pour une seule valeur α. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;3[$.
b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3\ ;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à C.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe C.

Problème 17:

Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2},$$

puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne par C la représentation graphique de f.

I. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

1. a. Étudier le sens de variation de g.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\ ;+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout x de $[2\ ;3]$, on a $g(x) < \dfrac{1}{2}$.

II. Etude de f

1. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x = \dfrac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.
3. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x) = g(x)$).
4. a. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$).
b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer dans le repère $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ, la courbe C et la droite D d'équation $y = x$

FONCTIONS EXPONENTIELLES

I- FONCTION EXPONENTIELLE

1. Définition

La fonction exponentielle notée Exp est bijection réciproque de la fonction logarithme népérien

Conséquences :

- La fonction exp est définie de IR vers $]0;+\infty[$
- $\text{Exp}(0)=1$
- Pour tout $x \in IR$, $exp(x) > 0$.
- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur IR.
- Pour tout $x \in IR$, $\ln(\exp(x)) = x$
- Pour tout $x \in IR_+^*$, $\exp(\ln x) = x$

Notation

Pour tout $x \in IR$ on note exp(x) par e^x. Et on a :

- Pour tout $x \in IR$ $e^x > 0$
- Pour tout $x \in IR$ $\ln(e^x) = x$
- Pour tout $x \in IR_+^*$, $e^{\ln x} = x$

2. Propriétés

Soient a et b deux réels, on a :

P1: $e^{a+b} = e^a.e^b$;

P2: $e^b > 0$;

P3: $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$;

P4: $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

P5: Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

P6 : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

P7 : $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans IR l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$. ; b) Résoudre dans IR l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Résolution

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \quad ou \quad x = 1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

3. Etude de la fonction Exponentielle $f(x) = e^x$

- $D_f =$ IR
- *Dérivée et variation*

La fonction exponentielle est dérivable sur IR et $\forall\, x \in IR$ $(e^x)' = e^x > 0$. La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR

- *Etude des limites :*

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\forall \alpha > 0 \quad \text{on a :} \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha}e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty \end{cases}$$

$$\forall \alpha > 0 \ \text{on a :} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

<u>Méthode :</u> Calculer des limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{-3x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+x}{e^{x}-x^{2}}$

<u>Résolution</u>

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{-3x}\right) = +\infty$

b) $\dfrac{e^{x}+x}{e^{x}-x^{2}} = \dfrac{e^{x}}{e^{x}} \times \dfrac{1+\frac{x}{e^{x}}}{1-\frac{x^{2}}{e^{x}}} = \dfrac{1+\frac{x}{e^{x}}}{1-\frac{x^{2}}{e^{x}}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{e^{x}} = 0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{x}{e^{x}}}{1-\frac{x^{2}}{e^{x}}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+x}{e^{x}-x^{2}} = 1$.

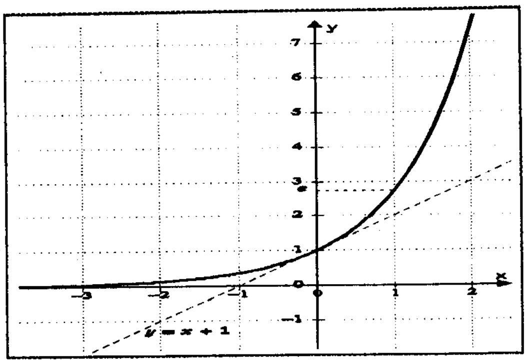
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^{1} = e$

c) Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ". Levons l'indétermination :

- **<u>Tableau de variation</u>**

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$(\exp x)'$	$+$
$\exp x$	$0 \nearrow +\infty$

<u>Allure de la courbe</u>



4. **<u>Composée avec la fonction exponentielle $f(x) = e^{u(x)}$</u>**

- $e^{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x)$ existe (c'est-à-dire $D_f = D_u$
- **limite de $e^{u(x)}$**

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} e^{x} = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = l'$

- **Dérivée :** La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est continue et dérivable sur l'ensemble de dérivabilité de u $\quad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

<u>Méthode :</u> Etudier une fonction

Soit *f* la fonction définie sur IR par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Etudier les limites de *f* à l'infini.
b) Calculer la dérivée de la fonction *f*.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction *f*.

<u>Résolution</u>

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\times\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right) = 0$

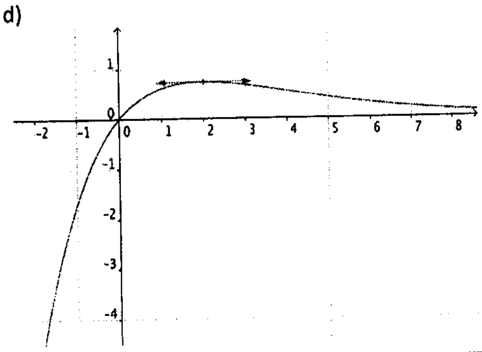
b) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1-\dfrac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

c) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\dfrac{x}{2}$. $f$est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

d)



Exercice

Soient $f$et $g$les fonctions définies de]0 ; +∞[dans IR par : $f(x)=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$ et $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$.

a. Démontrer que $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$

b. Factoriser $g(x)$.

c. Déterminer le signe de la dérivée de f.

Correction

a. $2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x+\frac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

$2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}=2+\frac{-e^x+1+2e^x}{2(e^x-1)}=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$;

b. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$, $X=e^x$, $\Delta=5^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2$, $X=\frac{5\pm3}{4}$, $X_1=e^{x_1}=2$, $X_2=e^{x_2}=\frac{1}{2}$, $g(x)=2(e^x-2)(e^x-\frac{1}{2})$.

c. $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$, $f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ est donc du signe de $g(x)$ et $f$est donc négative entre ln 2 et – ln 2, positive ailleurs.

II- LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

1. Définition :

On appelle fonction exponentielle de base a , a réel strictement positif, la fonction f définie par : **f(x) =** $a^x = e^{x\ln a}$ pour x réel quelconque. Si a = 1, f(x) = 1 fonction constante.

2. Propriétés :

- Pour tout réel x : $\ln(a^x) = x\ln(a)$
- Pour tous réels x et y : $a^x \times a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$; $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$
- Pour tout réel x on a : $f'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a} = (\ln a)\, a^x$

3. Variation, allure de la courbe

Si $0<a<1$ alors $\ln a<0$	Si $a>1$ alors $\ln a>0$
• $f'<0$, la fonction exponentielle de base a est donc strictement décroissante sur IR. • *Limites* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=+\infty$	• $f'>0$, la fonction exponentielle de base a est donc strictement croissante sur IR • *Limites* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=0$

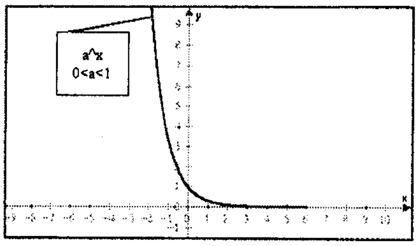
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$$

- *Tableau de variation*

x	0	$+\infty$
$(a^x)'$	-	
a^x	$+\infty$ ↘	0

- La droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

- **Allure**



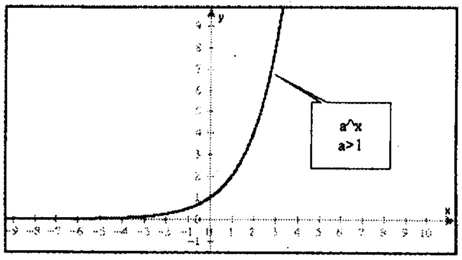
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

- *Tableau de variation*

x	0	$+\infty$
$(a^x)'$	+	
a^x	0 ↗	$+\infty$

- La droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $-\infty$.

- **Allure**



FONCTION EXPONENTIELLE
Exercices corrigés

Exercice 1:

Vrai ou Faux

Soit f la fonction définie sur IR_+^* par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$ et C sa courbe représentative.

a. f est une bijection de IR_+^* sur $\left[\dfrac{e^3}{27};+\infty\right[$.

b. La droite (Δ) d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe C

c. C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse $x = 3$.

d. La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=-2ex-e$.

Exercice 2:

Vrai ou Faux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}-\dfrac{x}{2}$ et C sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. La droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$ est asymptote à C.

c. f est décroissante sur IR.

d. L'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur IR.

Exercice 3:

Vrai ou Faux

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$ et C sa courbe représentative.

a. f est définie et dérivable sur IR, et pour tout x réel on a : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

c. L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution réelle.

d. La droite D d'équation $y=1+x$ est asymptote à C.

Exercice 4:

Démontrer que quel que soit le réel x on a : $\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x$

.

Exercice 5:

Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} 2^x-3^y=5 \\ 3\times 2^x+3^y=24 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \ln x+\ln y=-2\ln 4 \\ e^x e^y=\dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Exercice 6:

Soient f et g les fonctions définies de $]0\,;+\infty[$ dans IR par :

$$f(x)=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} \quad \text{et} \quad g(x)=2e^{2x}-5e^x+2.$$

a. Démontrer que $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$

b. Factoriser $g(x)$.

c. Déterminer le signe de la dérivée de f.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à C.

c. Étudier la position relative de C et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=xe^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$.

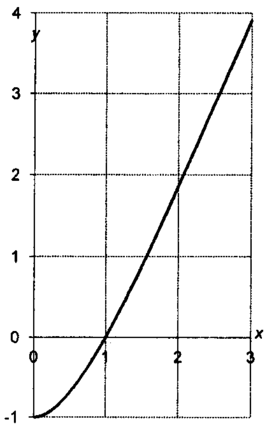
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur IR. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 9:

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$. En déduire les variations de g.

2. Montrer que :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.

b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x)=2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle $[-2\,;-1]$.

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Exercice 10:

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$$

le symbole ln désignant le logarithme népérien.

1. Montrer que $e^{2x}-e^x+1$ est strictement positif pour tout réel x. Étudier les variations de la fonction f.

Soit (C) la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction f.

2. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

3. Vérifier que $f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ et montrer que $f(x)-2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire l'asymptote correspondante de (C).

4. Construire la courbe (C) (on précisera la tangente au point de (C) d'ordonnée nulle).

5. Déterminer, en utilisant la courbe (C), le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x : $e^{2x}-e^x+1=\frac{7}{8}$

a. par le calcul,

b. en utilisant la courbe (C).

Exercice 11:

Soit f l'application de $]0\,;+\infty[$ dans IR définie par $f(x)=2x+\frac{1}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$, et g l'application de IR dans IR définie par $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$.

2. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on

a $f(x)=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$.

3. Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B : Etude de f

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.

b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f.

4. Réprésenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

5. a. Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y=2x+m$.

b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\frac{e^x}{e^x-1}$.

2. En déduire, en utilisant A.2., les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de $f(x)-(2x+\frac{1}{2})$.

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équation $x=\ln 2$ et $x=\ln 4$.

Exercice 12:

Dans tout le problème $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan P. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Etude de f.

a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b. Préciser les équations des asymptotes.

2. Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f. Préciser $f(0)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x=0$; on note T_0 cette tangente.

4. Courbe :

a. Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x)+f(-x)$.

b. Quelle propriété de symétrie peut on déduire de la question précédente ?

c. Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0.

Partie B

1. a. Soit $u(x)=1+e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.

b. En déduire la primitive F de f qui prend la valeur $-\ln 2$ en $x=0$.

2. a. On pose $A=\int_0^1 f(x)dx$. Calculer A.

b. Déterminer le réel c tel que $A=\ln c$.

3. Pour tout entier naturel n non nul on pose $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx$

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 13:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=4\frac{e^x}{e^x+1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

(unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C.

2. Etudier les variations de f et en dresser son tableau de variations.

3. Démontrer que le point d'intersection A de C et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour C.

4. Donner une équation de la tangente à C en A.

5. Tracer sur un même graphique : C, sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

B. Sa dérivée

On considère la fonction f', dérivée de f. On note C' sa courbe dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. En utilisant le fait que C admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.

2. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C'.

3. Montrer que $f''(x)=4\frac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$; étudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.

4. Tracer C' sur le même graphique que C.

5. Justifier la position de C' par rapport à C.

C. Une de ses primitives

1. a. Justifier que f admet des primitives sur IR.

1. b. Soit F, la primitive de f sur IR qui s'annule pour $x=0$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).

Quel est le sens de variation de F?

2. Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.

3. a. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une propriété de la courbe Γ.

3. b Démontrer que la droite Δ d'équation $y=4x-4\ln 2$ est asymptote à Γ.

4. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5. Tracer Γ et ses asymptotes sur une autre feuille de papier millimétré.

CORRECTION

Exercice 1

a. **Faux** : La fonction f est dérivable sur IR_+^* et

$f'(x)=\frac{e^x(x-3)}{x^4}$, or pour $x\in[3,+\infty[$, $f'(x)\geq 0$ car $e^x>0$ et $x^4>0$ et pour $x\in]0,3[$ $f'(x)<0$. f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle ne réalise donc pas une bijection.

b. **Faux** : Si la droite Δ d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C alors f doit être paire dans le repère $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $I(3,0)$. Posons $\begin{cases} y=Y \\ x=X+3\end{cases}$ alors

$Y=f(X)=\frac{e^{X+3}}{(X+3)^3}\neq f(-X)=\frac{e^{-X+3}}{(-X+3)^3}$. Donc f n'est pas paire dans le repère $\left(I\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $I(3,0)$.

c. **Vrai** : $f'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}=0$ pour $x=3$ car $e^x>0$ donc C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse $x=3$.

d. **Faux** : La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)=-2ex+3e$.

Exercice 2:

a. **Faux** :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x(x^2+1)}-\frac{x}{2}=-\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x(x^2+1)}=0$$

.

b. **Vrai** : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}=0$ donc la droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$ est asymptote à C en $+\infty$ et elle est située au dessus de C car $\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}>0$.

c. **Vrai** : La fonction f est dérivable sur ℝ ;

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x^2+1)-e^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2} \text{ soit}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2} \text{ qui est}$$

toujours strictement négative car somme de deux termes strictement négatifs. f est décroissante sur ℝ.

d. **Vrai** : La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur ℝ, $f(0)=1$ positif et $f(1)=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{1}{2}$ donc négatif. f est donc bijective et il existe un unique réel $\alpha\in\,]0\,;1[$ solution de l'équation $f(x)=0$.

Exercice 3:

a. **Faux** : $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}<0$

.

b. **Vrai** : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\ln 1=0$.

c. **Vrai** : D'après a. $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante et d'après b) f tend vers 0 en $-\infty$ donc $f<0$ sur ℝ et l'équation n'a pas de solution réelle dans $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

.

d. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)}=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln e^x(e^{-x}+1)=\lim_{x\to+\infty}x+\ln(e^{-x}+1)$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(1+e^x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x-\ln(e^{-x}+1)=-\infty$ et pour finir $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(1+x)=-\infty$.

Conclusion : la droite D d'équation $y=x+1$ n'est pas asymptote à $f(x)$ mais la droite d'équation $y=1-x$ est asymptote à $f(x)$.

Exercice 4:

$\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^x+1}{1+e^{-x}}=x\Leftrightarrow\dfrac{e^x+1}{1+e^{-x}}=e^x\Leftrightarrow e^x$

$\Leftrightarrow e^x+1=e^x+1$.

Exercice 5:

$\begin{cases}2^x-3^y=-1\\3\times2^x+3^y=33\end{cases}\Rightarrow 4\times2^x=32,\ 2^x=8,\ x=3,$

$\begin{cases}x=3\\8-3^y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\3^y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}, S=\{(3\,;2)\}.$

$\begin{cases}\ln x+\ln y=-2\ln 4\\ e^x.e^y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln xy=\ln 4^{-2}\\ e^{x+y}=e^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$, soit $\begin{cases}xy=\dfrac{1}{16}\\ x+y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Soit à résoudre l'équation : $X^2-SX+P=0$,

$X^2+\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{16}=0\Leftrightarrow(X+\dfrac{1}{4})^2=0\Leftrightarrow X=-\dfrac{1}{4}=x=y$.

Or, bien évidemment, les valeurs négatives sont exclues car ln n'est pas définie sur IR. donc $S=\varnothing$.

Exercice 6:

a. $2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}=2x+\dfrac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}=2x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

$2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=2+\dfrac{-e^x+1+2e^x}{2(e^x-1)}=2x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$;

b. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2,\ X=e^x$,

$\Delta=5^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2,\ X=\dfrac{5\pm3}{4}$,

$X_1=e^{x_1}=2$

$X_2=e^{x_2}=\dfrac{1}{2}$,

$g(x)=2(e^x-2)(e^x-\dfrac{1}{2})$.

c. $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}$,

$f'(x)=2-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

est donc du signe de $g(x)$ et f est donc négative entre ln 2 et − ln 2, positive ailleurs.

Exercice 7:

1. a. En $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ et $2-e^{-x}$ tend vers 2 car e^{-x} tend vers 0 ; f a pour limite $+\infty$.

b. $f(x)-(2x-2)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)-2(x-1)=(x-1)(-e^{-x})$

: avec les croissances comparées, e^{-x} emmène tout le monde vers 0, la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est bien asymptote à C.

c. Signe de $f(x)-(2x-2)=-(x-1)e^{-x}$: lorsque $x\le1$ c'est positif, donc C est au-dessus de Δ ; lorsque $x\ge1$ c'est négatif, donc C est en dessous de Δ.

3. a. $f'(x)=(x-1)'\left(2-e^{-x}\right)+(x-1)\left(2-e^{-x}\right)'=2-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=2-2e^{-x}+xe^{-x}$

d'où $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. Comme x est positif, $xe^{-x} > 0$ et
$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow e^{-x} < e^{0} = 1 \Rightarrow e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$
donc f est positive.
c. $f'(0) = 0 + 2(1-1) = 0$.

2. Comme $x \geq 1$ il faut calculer $-\int_1^3 -(x-1)e^{-x}\,dx$: on pose

$\begin{cases} u = x-1 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x}\,dx = -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]$$

Comme l'unité d'aire est de 2 cm x 2 cm, soit 4 cm², on a donc
$\left(e^{-1} - 3e^{-3}\right)4 \approx 0,87 \text{ cm}^2$.

3. a. La tangente à C est parallèle à Δ lorsque $f'(x) = 2$: mêmes coefficients directeurs ; on a donc
$f'(x) = xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 2$
. Le point A a pour coordonnées 2 et
$f(2) = (2-1)\left(2 - e^{-2}\right) = 2 - e^{-2}$.

b. La distance du point A à la droite $ax + by + c = 0$ est
$\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; ici Δ a pour équation cartésienne
$2x - y - 2 = 0$ d'où notre distance est
$\dfrac{|2.2 - (2 - e^{-2}) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$, soit en cm : $2\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$.

x	0		$+\infty$
f'	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 8:

Partie A

1. $g'(x) = e^x - 1$ est positive lorsque $x \geq 0$;
$g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$: comme g est décroissante avant 0 et croissante après, g est toujours positive.

2. Comme $g(x) \geq 0$, on a $e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$ (ceci montre que f est définie sur IR).

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$.

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y = -1$ et une autre en $+\infty$: $y = 0$.

2. a. $f'(x) = \dfrac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$.

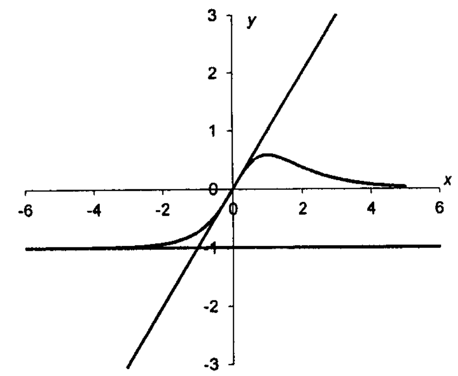
b. f est du signe de $1 - x$.

3. a. $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

b.
$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$$
. Comme g est positive, ainsi que $e^x - x$, $f(x) - x$ est du signe de $-x$, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

4.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0



Exercice 9:

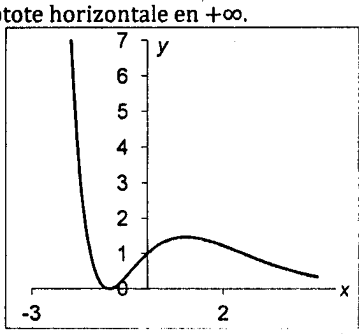
$g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1.
$g'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x}) = (x+1)e^{-x}(2 - x - 1) = (x+1)(1-x)e^{-x}$
.

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 e^{X} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^{X} = 0$.

C a une asymptote horizontale en $+\infty$.



4. a. Si $k < 0$, pas de solutions ; si $k = 0$, une seule solution : $x = -1$, si $0 < k < 4/e$, 3 solutions, si $k = 4/e$: deux solutions dont $x = 1$, enfin si $k > 4/e$, une seule solution.

b. Si $x > -1$, $f(x)$ est toujours inférieur ou égal à $4/e$ (<2), donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[1 ; +\infty[$. Lorsque $x < -1$, f est continue monotone strictement croissante de $]-\infty\,;-1[$ vers $]0\,;+\infty[$. Comme 2 est dans cet intervalle, il existe une seule valeur de x pour laquelle $f(x)=2$. Calculons $f(-2)=7{,}39$ et $f(-1)=0$; comme $0<2<7{,}39$ on a $-2<\alpha<-1$.

c. Nous savons que

$$f(\alpha)=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2=2e^{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\\ \alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\end{cases}$$

; comme $\alpha<-1$ on choisit la racine négative, soit

$$\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Exercice 10:

1. $e^{2x}-e^x+1=X^2-X+1$ en posant $X=e^x$. On a alors $\Delta=-3<0$ donc le trinômes est positif ainsi que $e^{2x}-e^x+1$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}=\frac{e^x(2e^x-1)}{e^{2x}-e^x+1}$$ donc f est du signe de $2e^x-1$.

Ce terme est positif lorsque $e^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\ln 2$.

Par ailleurs $f(-\ln 2)=\ln\left(e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=\ln\frac{3}{4}$.

2. En $-\infty$ c'est facile car e^{2x} et e^x tendent vers 0. On a donc f qui tend vers $\ln 1=0$. En $+\infty$ $e^{2x}-e^x+1$ se comporte comme e^{2x} et tend donc vers $+\infty$.

3.

$$f(x)-2x=\ln(e^{2x}-e^x+1)-\ln(e^{2x})=\ln\left(\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}}\right)=\ln[(e^{2x}-e^x+1)e^{-2x}]=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$$

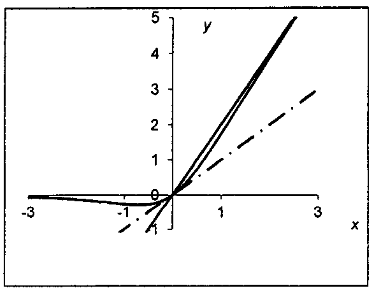
Les termes e^{-2x} et e^{-x} tendent vers 0 à l'infini, donc $f(x)-2x$ tend vers $\ln 1=0$. La droite $y=2x$ est donc asymptote de (C).

4. La tangente en 0 est $(y=x)$. Figure à la fin.

5. L'équation $e^{2x}-e^x+1=\frac{7}{8}$ est équivalente à $f(x)=\ln(7/8)$. Comme $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<1$, on a $\ln\frac{3}{4}<\ln\frac{7}{8}<0$, il y a donc deux solutions. Par le calcul on pose $X=e^x$, ce qui donne l'équation $X^2-X+1-\frac{7}{8}=0 \Leftrightarrow X^2-X+\frac{1}{8}=0$,

$\Delta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ d'où les racines $X_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_1=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et

$X_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}>0 \Rightarrow x_1=\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.



Exercice 11:

Partie A : Il suffit de « partir de l'expression de droite » dans chaque cas, les résultats sont immédiats.

Partie B :

1. Pour $x>0$, $e^x>1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x-1=0$; comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x+1=2$ on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$ et comme $2x$ tend vers 0, f tend vers $+\infty$ en 0^+. En $+\infty$ numérateur et dénominateur sont équivalents à e^x donc le quotient tend vers 1 et f tend vers $+\infty$ en se comportant comme $2x+\frac{1}{2}.1=2x+\frac{1}{2}$.

2. a. $f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e^x-1}$ tend évidemment vers 0 à l'infini donc asymptote.

b. $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

3. f est la somme de deux fonctions dérivables et est donc dérivable. On dérive à partir de $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$:

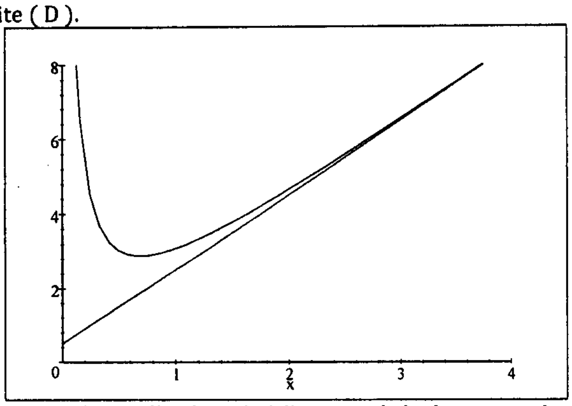
$$f'(x)=2+\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-3e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

f est donc du signe de $(e^x-2)(2e^x-1)$, or

$e^x-2>0 \Leftrightarrow x>\ln 2$ et $2e^x-1>0 \Leftrightarrow x>\ln 1/2=-\ln 2$.

x	0		ln2		$+\infty$
e^x-2		$-$	0	$+$	
$2e^x-1$		$+$		$+$	
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\ln 2)$	↗	$+\infty$

4. (C) admet deux asymptotes : la droite d'équation $(x=0)$ et la droite (D).



5. a. m représente l'ordonnée à l'origine de la droite, ces droites sont toutes parallèles.

Si $m<\frac{1}{2}$, la droite (D_m) est parallèle à (D) et située sous (D) donc elle ne coupe pas (C) ; si $m=\frac{1}{2}$ on voit que (D) ne coupe pas (C), c'est l'asymptote ; si $m>\frac{1}{2}$, il semble que la droite (D_m) coupe (C) en un seul point.

b.

$$M(x,y)\in(D_m)\cap(C) \Leftrightarrow 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x+m \Leftrightarrow \frac{1}{e^x-1}=m-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x-1=\frac{2}{2m-1} \Leftrightarrow e^x=\frac{2m+1}{2m-1}$$

Donc il faut $\dfrac{2m+1}{2m-1}>0 \Leftrightarrow m\in\left[-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[+\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right]$ et

comme x doit être positif :

$$x=\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{2m-1}>1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-2m+1}{2m-1}>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$$

Partie C

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx=\ln\left(e^x-1\right)+K$ car $e^x-1>0$.

2.

$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{e^x}{e^x-1}-1 \Rightarrow \int f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=\ln(e^x-1)-x+K$$

.

3. Comme (C) est au-dessus de (D), l'aire cherchée vaut

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=\Big[\ln(e^x-1)-x\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}=\ln 3-\ln 4-\ln 1+\ln 2=\ln 3-\ln 2$$

.

Exercice 12:

Partie A

1. a. Remarquons de suite que

$f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\dfrac{e^x}{e^x}=\dfrac{1}{e^x+1}$ donc la limite en $+\infty$

est $\dfrac{1}{+\infty}=0$ et la limite en $-\infty$ est $\dfrac{1}{0+1}=1$.

$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$-$	0	$+$
0 ↘	$\ln(3/4)$	↗ $+\infty$

b. Les asymptotes sont $y=0$ en $+\infty$ et $y=1$ en $-\infty$.

2.

$$f'(x)=-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

qui est évidemment strictement négative.

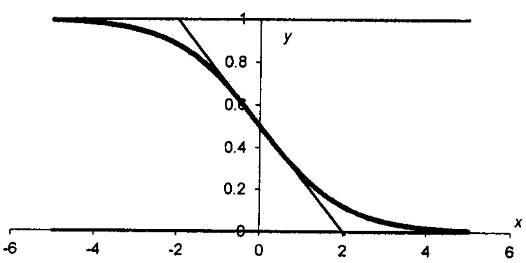
$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

4. a. $f(x)+f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^{-x}+1+e^x+1}{(1+e^{-x})(1+e^x)}=\dfrac{2+e^{-x}+e^x}{1+e^{-x}+e^x+1}=1$

b. Le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C.

c.



Partie B

1. a. $u(x)=1+e^{-x}$. $u'(x)=-e^{-x}$.

b. On remarque que $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{-u'}{u}$ donc les primitives de f sont de la forme

$$F(x)=-\ln|u|+K=-\ln\left(1+e^{-x}\right)+K.$$

En 0, on a $F(0)-\ln 2=-\ln(1+1)+K \Rightarrow K=0$.

2. a. & b.

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\Big[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\Big]_0^1=-\ln\left(1+e^{-1}\right)+\ln\left(1+e^0\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=\ln\frac{2e}{e+1}$$

.

3.

$$v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx=-\ln\left(1+e^{-1+\frac{1}{n}}\right)+\ln\left(1+e^{-\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln\left(1+e^{-1+0}\right)+\ln\left(1+e^0\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=A$$

On pouvait s'attendre au résultat car

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 13:

A. La fonction f

1. $\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=4$,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

La courbe C admet donc deux asymptotes horizontales : la droite d'équation $y=4$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y=0$ en $-\infty$.

2. $x\mapsto e^x$ est définie et dérivable sur IR ; $x\mapsto e^x+1$ est définie et dérivable sur IR et n'est jamais nulle. Donc f est dérivable sur IR, et

$f'(x)=4\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x.e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$: $f(x)>0$ pour tout x réel, donc f est strictement croissante sur IR.

Tableau de variations de f:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 4

3. $x_A=0$ et $y_A=f(0)=2$: pour montrer que le point A est centre de symétrie de C, montrons que, pour tout x réel, * $x_A-x\in D_f$ et $x_A+x\in D_f$: vrai car $D_f=R$

* $f(x_A-x)+f(x_A+x)=2y_A$

$$f(-x)+f(x)=4\frac{e^x}{e^x+1}+4\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=4\left(\frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\right)=4\frac{e^x+e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}+2}=4$$

C.Q.F.D.

4. $f'(0)=1$: l'équation de la tangente à C en A est donc : $y-2=1(x-0)$ soit : $y=x+2$.

B. Sa dérivée

1. f est définie sur IR. De plus, on sait que pour tout x réel, $f(-x)+f(x)=4$, soit en dérivant :

$-f'(x)+f'(x)=0 \Rightarrow f'(-x)=f'(x)$: f est une fonction paire.

2. $f'(x)=4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=4\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$;

de plus, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$: C' admet donc une asymptote horizontale, d'équation $y=0$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. $f'''(x)=4\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)^2-e^x\times 2e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=4\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\times 2e^x}{(e^x+1)^3}$,

$f''(x)=4\dfrac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}$.

$f'(x)$ est du signe de e^x-e^{2x} :

$e^x-e^{2x}>0 \Leftrightarrow e^x>e^{2x} \Leftrightarrow x>2x \Leftrightarrow 0>x$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

5. Il semble que C se trouve au-dessus de C'. Pour le montrer, étudions le signe de $f(x)-f'(x)$:

$f(x)-f'(x)=4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)}-4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=4\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x}{(e^x+1)^2}=4\dfrac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$;

$f(x)-f'(x)>0$ donc C est au-dessus de C'.

C. Une de ses primitives

1. a. f est dérivable sur IR, donc elle admet une infinité de primitives.

1. b. Soit F une primitive de f sur IR. f est sa dérivée, et $f(x)>0$ pour tout x réel donc <u>F est une fonction strictement croissante sur IR</u>

2. On reconnaît dans l'écriture de $f(x)$ le modèle : $f(x) = 4\dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

avec $u(x)=e^x+1$

Les primitives F de f sur IR sont donc de la forme :

$F(x)=4\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)+K,\ K\in\square$. Or, pour tout x réel,

$e^x+1>0$ donc $F(x)=4\ln\left(e^x+1\right)+K,\ K\in\square$.

De plus, $F(0)=0$ donc : $4\ln(2)+K=0$; c'est à dire $K=-4\ln$

2. Il vient donc : $F(x)=4\ln(e^x+1)-4\ln 2$.

3.a. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-4\ln 2$. Γ admet donc une asymptote horizontale, d'équation $y=-4\ln 2$, en $-\infty$.

3.b. Etude de l'asymptote oblique en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)-(4x-4\ln 2))=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\ln(e^x+1)-4\ln 2-4x+4\ln 2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\ln(e^x(1+e^{-x}))-4x)$

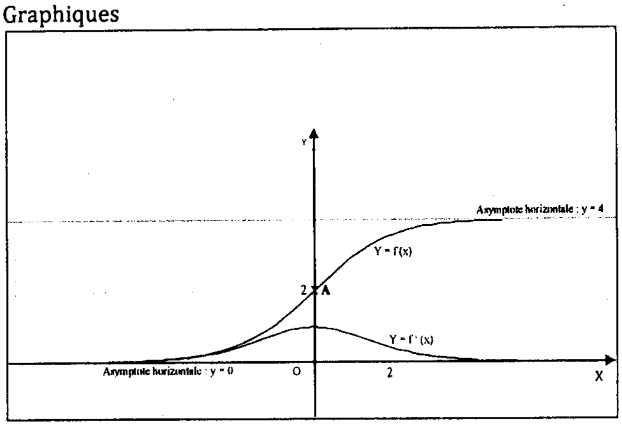
$=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+4\ln(1+e^{-x})-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\ln(1+e^{-x}))=0$

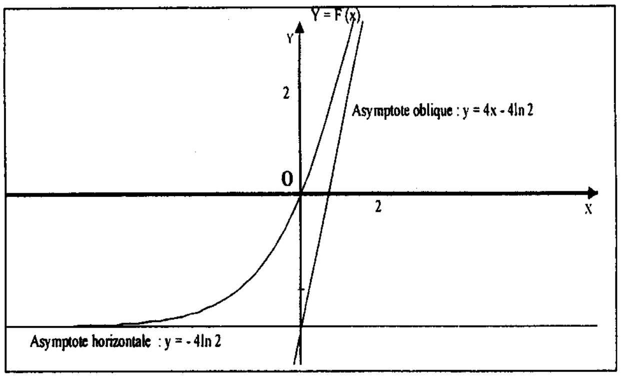
Γ admet donc une asymptote oblique, d'équation $y=4x-4\ln 2$, en $+\infty$.

4. Tableau de variations de F:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	
$F(x)$	$-4\ln 2 \nearrow$	$+\infty$

Graphiques





FONCTION EXPONENTIELLE
Exercices non corrigés

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1. a) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3-1}$; b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{e^{2x^2}}{x^4+1}$; c) $\lim\limits_{0}xe^{\frac{1}{x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-e^x\right)$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(5-3x\right)e^{2x}$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3e^x-1}{5e^x-2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{e^{2x}+5e^x-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}\right)$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-2}\right)\right)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-e^x\right)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{e^{3x}}{5x-1}\right)$,

$\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x-2\right)e^{\frac{1}{x-1}}\right]$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x-2\right)e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

3. calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(2^x\ln x\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}\right)$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x3^{-x}e^x\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(e^{-x^2}\right)$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right)$

Exercice 2:

Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 5\sqrt{2} \end{cases}$ et

e) $\begin{cases} 8^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 3^x \cdot 27^y = 9^{y-1} \end{cases}$

Exercice 3:

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1. a) $e^{2x+1} - \dfrac{e}{e^{2x+1}} = e - 1$, b) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$,c) $e^{2x} = 3e^x$,d) $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$,e) $\dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 2$

   f) $\dfrac{e^{2x} + e^x - 4}{3e^x - 2} = 1$

2. a) $(e^{-x} - 1)(e^{2x} - 3) < 0$, b) $e^{-3x} < e^{x-7}$, c) $\dfrac{e^x - 2e^{3x}}{1 - 3e^{2-x}} \geq 2$, d),

Exercice 4:

On considère la fonction f : $x \mapsto \begin{cases} f(x) = xe^x \ si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\ln x \ si\ x > 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2. Montrer que f est dérivable et calculer f'(x)

Exercice 5:

Soit $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = (1 - e^{-x})\ln x \end{cases}$ et $g(x) = \ln(1 + x + e^{-x})$

1. Déterminer D_f et D_g
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f et g.
3. calculer les limites de f et g aux bornes de leur domaine de définition
4. calculer f'(x) et g'(x)

Exercice 6:

1. Soit $\varphi : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$

a) Etudier les variations de φ

b) En déduire le signe de φ(x) suivant les valeurs de x

2. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \ \forall x \neq 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

b) Etudier les variations de f

c) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

i.Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right]$

ii.Conclure puis tracer (C)

Exercice 7:

A-

1. Soit $g : x \mapsto x + 1 - \ln x$
   a. Etudier les variations de g
   b. En déduire le signe de g(x) en fonction de x
2. Soit $h : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln x$. Etudier les variations de h puis tracer sa courbe représentative

B-

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x = x^{1+\frac{1}{x}} \ si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2. a) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Démontrer que $\forall x > 0$ et $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x) - x}{\ln x} = \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{1}{x}\ln x}$

   b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ admet elle une limite en $+\infty$?
3. Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur lui-même.
4. a) Montrer que $f''(1) = 0$

   b) Tracer la courbe représentative de f et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1. (Considéré comme point d'inflexion).

Exercice 8:

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{\ln x}{x-1}} \\ f(1) = e \end{cases}$

1. déterminer le domaine de définition de f
2. montrer que f est continue en 1
3. déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
4. montrer que f est dérivable puis calculer f'(x)

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur IR, Expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variation de f et tracer dans un repère orthonormé C_f.
3. Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle à expliciter.
4. Soit f^{-1} sa bijection réciproque, En quel point sa réciproque est-elle dérivable ?
5. Calculer $(f^{-1})'(0)$; $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6. Soit $y \in f(IR)$. Déterminer son antécédent par f. En déduire f^{-1}.
7. Tracer dans le même repère $C_{f^{-1}}$.

Exercice 10:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\ln|2e^x - 1|$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier les variations de f.

3. Déterminer $\lim_{x \to -\infty}(f(x)-x)$ et $\lim_{x \to +\infty}(f(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln 2)$.
4. Tracer la courbe représentative C_f et ses asymptotes.

Exercice 11:

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2+\frac{4}{e^x+1}$.

1. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x)=x+2-\frac{4}{1+e^{-x}}$.
2. Vérifier alors que C_f admet deux asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. Préciser les positions relatives.
3. Etudier les variations de f puis construire C_f.

Exercice 12:

Soit f une fonction définie par : $f(x)=x^2-2x+2xe^{-x}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2-2x$.
   Montrer au voisinage de $+\infty$, C_f et C_g sont asymptotes. Préciser leur position relative.
3. Vérifier que l'équation $f(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]1.5;1.6[$.

Exercice 13:

1. Etudier les variations de g définie par : $g(x)=\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1$.
   Et en déduire le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Etudier les limites quand x tend vers $\pm\infty$ de $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$. Conclure.
d) Construire C_f.

Exercice 14:

Soit f La fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=e^{-\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue sur IR.
2. Démontrer que f est dérivable $\forall x \neq 0$. Calculer alors $f'(x)$.
3. Etudier alors la dérivabilité de f en 0.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Construire C_f dans un repère orthonormal

Problème 1

Soit f une fonction définie par : $f(x)=x+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition D_f.
3. a) Montrer que la droite D_1 d'équation : $y=x$ est une asymptote à la courbe représentative C_f de f.
   Préciser la position relative de C_f par rapport à D_1.
   b) Calculer $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-(x+\frac{1}{2})\right]$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique D_2 à C_f.
   Donner une équation de D_2 ; ainsi que la position de C_f par rapport à cette asymptote.
4. Montrer que le point $I(\ln 2;\ln 2+\frac{1}{4})$ est centre de symétrie de C_f.
5. a) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer f'.
   b) Montrer que pour tout $x \in D_f$,
   $f'(x)=\frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$.
   c) Etudier les sens de variation de f sur D_f.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
6. Construire C_f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
7. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ 0]$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;\ 0]$ vers un intervalle J à préciser.
   b) Calculer $g(0)$.
   c) Soit g^{-1} sa bijection réciproque. Etudier la dérivabilité de g^{-1} en $-\frac{1}{2}$.

Problème 2

On se propose d'étudier la suite u, définie par :

$u_0=\frac{1}{2}$; $\quad u_n=\frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.

1. Soit f la fonction de l'intervalle $[0;\ 1]$ dans IR définie par : $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a) Calculez f '(x) ; f ''(x).
b) Etudiez le sens de variation de f. Quelle est l'image du segment $[0;\ 1]$ par f ?

c) Démontrez que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$

$\frac{1}{4} \le f'(x) < \frac{2}{3}$.

d) Etablissez que l'équation f(x) = x admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$.

2. a) Prouvez que si la suite u admet une limite L, alors f(L) = L.
b) En utilisant le 1.c), démontrez que, pour tout naturel n:

$0 \le \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \le \frac{2}{3}$.

Déduisez – en que la suite u converge vers L et déterminez un naturel n_0 tel que si $n \ge n_0$ alors $|u_n - L| \le 10^{-3}$.

Problème 3

Partie A

Soit $f : x \mapsto (1+x)(1+e^{1-x})$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Soit $g : x \mapsto 1 - xe^{1-x}$
   a. Etudier les variations de g. En déduire le signe de g.
2. a. Etudier les limites de f en $\pm\infty$.
   b. Etudier les branches infinies de (C)
   c. Etudier les variations de f puis montrer que f admet une réciproque f^{-1}. Est elle dérivable en 4 ?
   d. Etudier la position relative de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
   e. Construire dans le même repère les courbes (C) , (C') et $(\Delta): y = x - 1$ et $(\Delta'): y = x + 1$

Partie B

1. a. Montrer que $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \ln(-x-1) - x + 1 = 0 \end{cases}$

   b. Etudier la fonction $h : x \mapsto \ln(-x-1) - x + 1$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique qu'on notera α dans IR
2. a. Comparer f(x) et x pour x=-2 puis x=-1. En déduire que $\forall x \in [-2;-1]$ on a $-2 \le f^{-1}(x) \le -1$

b. Déduire des questions précédentes que $\forall x \in [-2;-1]$ on a $\frac{1}{1+2e^2} \le (f^{-1})'(x) \le \frac{1}{1+e^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in [-2;-1]$ on a $|f^{-1}(x) - \alpha| \le \frac{1}{1+e^2}|x - \alpha|$.

d. Soit $(u_n)_{n\ge0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = f^{-1}(u_{n-1}) \quad \forall n \ge 0 \end{cases}$

i. Montrer que $\forall n \ge 0$ on a $u_n \in [-1;-2]$

ii. En déduire alors que $\forall n \ge 0$ $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha|$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Problème 4

Soit f l'application de $]0 ; +\infty[$ dans IR définie par $f(x) = 2x + \frac{1}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$, et g l'application de IR dans IR définie par $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$.
2. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$ on a $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B : Etude de f

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.
   b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3. Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f.
4. Représenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)
5. a. Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$.
   b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$.
2. En déduire, en utilisant A.2., les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de $f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$.

Problème 5

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 4\frac{e^x}{e^x + 1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ .En déduire les droites asymptotes à C.
2. Etudier les variations de f et en dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que le point d'intersection A de C et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour C.
4. Donner une équation de la tangente à C en A.
5. Tracer sur un même graphique : C, sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

B. Sa dérivée

On considère la fonction f', dérivée de f. On note C' sa courbe dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant le fait que C admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C'.
3. Montrer que $f''(x) = 4\frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$; étudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
4. Tracer C' sur le même graphique que C.

5. Justifier la position de C' par rapport à C.

C. Une de ses primitives

1. a. Justifier que f admet des primitives sur IR.

1. b. Soit F, la primitive de f sur IR qui s'annule pour $x = 0$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal ($O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).

Quel est le sens de variation de F?

2. Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.

3. a. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une propriété de la courbe Γ.

3. b Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 4x - 4\ln 2$ est asymptote à Γ.

4. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5. Tracer Γ et ses asymptotes sur une autre feuille de papier millimétré.

Problème 6

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique (partie B) s'appuyant sur l'étude d'une fonction auxiliaire (partie A). On calculera enfin une aire (partie C). On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats.

PARTIE A

1°) Soient a, b et c des nombres réels.

On définit une fonction g sur R par $g(x) = (ax + b)\,e^{-x} + c$

On note g' la fonction dérivée de g.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$				+			0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

En utilisant les données numériques de ce tableau, établir que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$. Ainsi pour la suite du problème : $g(x) = (2x - 1)\,e^{-x} + 2$.

2°) a) Montrer que l'équation admet une solution unique dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. On note α cette solution.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3°) Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à IR.

PARTIE B

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = 2x + 1 - x\,e^{-x}$

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).

2) a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = g(x)$

b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur R.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormal on appelle C la représentation graphique de f et D la droite d'équation $y = 2x + 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)]$

b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Etudier la position de C par rapport à D.

d) Tracer D et C dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On prendra pour unité graphique 2 cm.

PARTIE C

Soient H la fonction définie sur R par $H(x) = -e^{-x}(1 + x)$ et h la fonction définie sur R par $h(x) = x\,e^{-x}$

1) Montrer que la fonction H est une primitive sur R de la fonction h.

2) Hachurer sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe C, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3) Calculer l'aire S en cm² du domaine hachuré.

Problème 7

Partie A :

On considère la fonction : $\varphi : x \mapsto e^x + x + 1$.

1°/ Etudier les variations de φ et déterminer ses limites aux bornes.

2°/ Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α et que : $\alpha \in \left]-1{,}28;-1{,}27\right[$.

3°/ En déduire le signe de φ.

Partie B :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

1°/

a) Montre que f est définie, continue et dérivable sur IR.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

c) Montrer qu la droite d'équation y=x est une asymptote à (C) et étudier sa position par rapport à (C).

2°/

a) Montrer que f est dérivable sur IR.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}$; en déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3°/ Montrer $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4°/ Soit (T) la tangent à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T) puis étudier sa position par rapport à (C).

5°/ Tracer (C) ; (T) et (D) dans le même repère.

Partie C :

On désigne par g la fonction définie par $g(x) = \ln(e^x + 1)$; (Γ) sa courbe ; $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}0\\\ln 2\end{pmatrix}$ et B le point de (Γ) d'abscisse 1.

1°/ Déterminer l'ordonnée de B.

2°/ Etudier les variations de g.

3°/ Donner une équation de la tangent à (Γ) à A.

4°/ On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB].

a) Donner une équation cartésienne de (IB)

b) Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.

Problème 8

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty\ ;1[$ par

$f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie 1

1. a. Soit $X=\dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité $f(x)=\dfrac{e}{2}X^2e^X$. En déduire la limite de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
c. En déduire une asymptote à la courbe (Γ).
2. a. Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty\ ;1[$ par $v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Calculer $v'(x)$.
b. Démontrer que $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
c. Etudier les variations de f.
d. Tracer la courbe (Γ).

Partie 2

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty\ ;1[$.
2. Soit α un réel tel que $0<\alpha<1$. Déterminer $g(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x)dx$.
3. Quelle est la limite de g lorsque α tend vers 1 ?
4. Quelle est l'aire en cm² du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=-\alpha$?

Partie 3

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1. On notera β l'autre solution.
b. Donner un encadrement de β de largeur 10^{-2}.
2. Soit a un élément de $]-\infty\ ;1[$. Déterminer graphiquement en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=f(a)$.

Problème 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère l'équation différentielle : $y''+2y'+y=2e^{-x}$ (E)
1. Déterminer le réel a tel que la fonction y_0 définie sur IR par $y_0(x)=ax^2e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).
2. Démontrer que y, fonction numérique deux fois dérivable sur IR, est solution sur IR de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z=y-y_0$ est solution de l'équation différentielle (E_1) : $z''+2z'+z=0$.
3. On admet que les solutions de (E_1) sont de la forme $z=(\alpha x+\beta)e^{-x}$: faire la vérification.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ passe par le point de coordonnées $(-1\ ;0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.
1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. On se propose dans cette question d'étudier la position de (C) par rapport à (T).
a. On pose $k(x)=x+1-e^x$.
Calculer $k'(x)$; en déduire le sens de variation de k et son signe.
b. En déduire la position de (C) par rapport à (T).
4. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer (T) et (C) dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

x	-2	-0,5	-0,25	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.
5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n=4\int_n^{n+1}f(t)dt$.
a. Représenter u_3 sur le graphique précédent.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $4f(n+1)\le u_n\le 4f(n)$. En déduire le sens de variation de (u_n).
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Problème 10

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.
1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$. En déduire les variations de g.
2. Montrer que :
a. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.
b. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.
3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 3.
4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.
b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x)=2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle [- 2 ; - 1].
c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle I = [- 2 ; - 1] par : $f(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.
1. Étude de f
a. Étudier les variations de f sur I.
b. En déduire que, pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I.
c. Montrer que, pour tout élément x de I, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.
d. On rappelle que $f(\alpha)=\alpha$. En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout élément x de I, on a : $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

2. Approximation de α à l'aide d'une suite
Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = -\frac{3}{2}$.
a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
c. Prouver que la suite (u_n) converge, préciser sa limite et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer u_{n_0}.

Problème 11

A. On désigne par f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3. Tracer la courbe C.
B. Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur IR* par $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right|$.
On note G la courbe représentative de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démonter que pour tout x réel strictement positif,
$g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.
Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.
4. Démontrer que pour tout x réel strictement négatif :
$g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.
Montrer que la droite d d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.
5. Construire G, D et d (on utilisera un graphique différent de celui de la partie A).

Problème 12

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.
1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,27 ; 1,28] ; on note a cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty ; 0[$. Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0 ; a[$ et $g(x) < 0$ sur $]a ; +\infty[$.
B. Étude de la fonction f
f est définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour C_f.
c. Étudier la position de C_f par rapport à (d).
3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie A.
b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(a) = pa + q$.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe C_f dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse a.
C. Encadrements d'aires
Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.
1. Faire apparaître D_5 sur la figure.
2. Démontrer que pour tout x, tel que $x \geq 2$, on a :
$\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x + 1} \leq xe^{-x}$.
3. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x}\,dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n.
5. On admet que A_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

Problème 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).
Partie A - Étude d'une fonction
f est la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant IR, $-1 < f(x) < 1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur IR.
5. a. α étant un nombre appartenant à $]-1 ; 1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.
b. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.
Partie B - Tangentes à la courbe
1. Déterminer une équation de la tangente T_1 à Γ au point d'abscisse 0.

2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\int_0^x f'(t)dt$, puis justifier que $0 \le f(x) \le x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et T_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente T_2 à Γ au point A d'ordonnée $\frac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées : $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right); 1\right)$.
6. Tracer Γ, T_1 et T_2. On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm² de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$? Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\int_0^1 [f(x)]^2\, dx$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 \left(1 - [f(x)]^2\right) dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$. En déduire $\int_0^1 x[f(x)]^2\, dx$.

Problème 14

Soit g la fonction numérique définie sur IR par

$g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$,

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de IR.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction numérique définie sur IR par

$f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
2. En posant $X = 1 + 2e^x$, montrer que $f(x) = \frac{4X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$
3. En posant $h = 2e^x$, calculer la limite de f en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
b. Tracez la courbe C et la tangente T.

Problème 14

On appelle f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = xe^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0.
4. Etudier les variations de f.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f (on sera amené à poser $x = \frac{1}{t}$).
6. Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 3 cm.

PROBLEMES DE SYNTHESE

Problème 1

Soit f la fonction définie sur $IR - \{1\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; \quad 0[\end{cases}$$

PARTIE A :

1. Etudier la continuité de f au point d'abscisse 0.
2. Pour tout $x \in]0;\ 1[$.
   a) Montrer que $\forall x \in]0;\ 1[;\ |x - 1| = 1 - x$ et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$
   b) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 0.
   c) En déduire les tangentes à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Montrer que $\forall x \in]-\infty;\ 0[; f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
4. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
5. En déduire les équations des asymptotes à la courbe C_f de f.
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in IR - \{0;1\}$.
7. Etudier les variations de f.
8. Tracer la courbe C_f. Unité : 2cm)

PARTIE B

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I =]1;\ +\infty[$.

1. Montrer que la fonction g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à préciser. Soit g^{-1} sa bijection réciproque.

2. Montrer que : l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution $\alpha \in]1;\ +\infty[$.
3. Montrer que : $\forall x \in J; g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.
4. Tracer la courbe $C_{g^{-1}}$.
5. Déterminer l'aire du domaine :
$$(\Delta) = \{M(x;y); -\ln 7 \le x \le -1; 0 \le y \le g^{-1}(x)\}$$

Problème 2

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1+x) \ \ si\ x \ge 0 \\ f(x) = x + 2\ln 2 - \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} - \ln(1+e^x) \ \ si\ \ x \le 0 \end{cases}$$ et Cf

sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I) On pose $h(x) = \dfrac{x}{1+x} + \ln(1+x)$.
1) Etudier les variations de h sur Dh.
2) Calculer h(0) et en déduire le signe de h(x).

II) 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter ce résultat.
2) a) Etudier la nature de la branche infinie de Cf en $+\infty$.
b) Montrer que (D) : y = x + 2ln2 – 1 est une asymptote à Cf en $-\infty$.
c) Etudier la position de Cf par rapport à (D) sur $]-\infty ; 0[$.
3) a) Calculer f ' (x) sur $[0, +\infty[$ et préciser son signe à l'aide de celui de h(x).
b) Montrer que sur $]-\infty ; 0[$ $f'(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.
4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5) Tracer Cf.

III) 1) Montrer que f réalise une bijection de Dh vers un intervalle J que l'on précisera.
2) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.
3) Calculer f(1) puis déterminer $(f^{-1})'(\ln 2)$.
4) Construire Cf^{-1} la courbe représentative de f^{-1}

Problème 3

Soit f l'application de IR vers IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \quad si\ x < 0 \\ f(x) = x^2\ln x \quad si\ x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.
2) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Calculer $f'(x)$, on précisera l'ensemble de dérivabilité de f
c) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Etudier les branches infinies de la courbe Cf.
4) Tracer soigneusement la courbe Cf(unité graphique 4 cm).
5) α étant un réel tel que $0 < \alpha \le 1$; calculer en cm² l'aire $a(\alpha)$ de l'ensemble des Points M (x, y) tels que : $\alpha \le x \le 1$ et $f(x) \le y \le 0$.
6) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} a(\alpha)$ et interpréter le résultat obtenu.

Problème 4

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} \ \ si\ x \ge 0 \\ f(x) = x^2\ln x^2 \ \ si\ x \prec 0 \end{cases}$

Partie A

1. Soit g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. Déterminer alors le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

Partie B

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Vérifier que $\forall x \ge 0$ $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur IR_+.
3. Dresser le tableau de variation de f sur IR.
4. Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.
5. Déterminer une équation de la tangente en $\ln 2$

Problème 5

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| si x \in]-\infty, -1[\cup]-1; 0[\\ f(x) = x^2e^{-x} \quad si\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé unité 2cm.

Partie A

1. Donner l'ensemble de définition de f. Calculer f(-2) et f(3).
2. Montrer que f est continue en 0.
3.
a. Etablir que la dérivée f ' de f a pour expression $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]-1; 0[$ et $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$ $si\ x \in [0;+\infty[$.
b. La fonction f est-elle dérivable en ? Justifier votre réponse.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution α comprise entre –1,6 et-1,5.

6.
a. Justifier que la droite (D) d'équation y=x est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
b. Etudier la position de (D) par rapport à (C) dans $]-\infty;0]-\{-1\}$.
7. Tracer (C), les asymptotes et les demi tangentes eau point d'absciise0 et les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

Partie B

Soit g la restriction de f à $[0;2]$.
1. Montrer que g définie une bijection de $[0;2]$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. On note g^{-1} la réciproque de g.
a. Montrer que l'équation $g^{-1}(x)=1$ admet une solution.
b. Montrer que $g^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)=1$.
3. On appelle (C') la courbe représentative de g^{-1}.Tracer (C') en utilisant la courbe (C) et une transformation à préciser. Placer tous les points remarquables.

Partie C

Soit λ un réel strictement positif. On pose $I(\lambda)=\int_0^\lambda f(t)dt$.
1. a. Interpréter graphiquement $I(\lambda)$.
b. En procédant par une intégration par parties calculer $I(\lambda)$
2. Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
3. On pose $\lambda=2$
a. Calculer I(2)
b. En déduire la valeur en cm^2 de l'aire délimitée par (C') et les droites d'équation y=0, x=0 et $x=\frac{4}{e^2}$.

Problème 6

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & si\ x<0 \\ f(x)=x^2\ln x & si\ x>0 \end{cases}$ et f(0)=0

1.
b) Etudier la continuité de f en 0.
c) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

2.
a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
b) Calculer f '(x), on précisera le domaine de dérivabilité de f.
c) Etudier le signe de f '(x) et établir le tableau de variations de f.

3.
a) Etudier les branches infinies de la courbe représentative de f.
b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 4cm).
c) α étant un réel tel que : $0<\alpha\leq 1$, calculer en cm^2 l'aire $q(\alpha)$ de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} \alpha\leq x\leq 1 \\ f(x)\leq y\leq 0 \end{cases}$ à l'aide d'une intégration par parties.
d) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} q(\alpha)$ et interpréter ce résultat.

4. Soit g la restriction de f sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.
a) Montrer que g admet une réciproque g^{-1}. Préciser son ensemble de définition J.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J
c) Représenter sur la même figure g^{-1}.

Problème 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x\ln|x|}{x+1}\ si\ x\in]-\infty,1]-\{-1\} \\ f(x)=(x^2-x)e^{\frac{1}{x-1}}\ si\ x\in]1;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

Partie A
1. Montrer que f est définie sur IR-{-1} et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.
2. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.. On pourra poser $X=\frac{1}{x-1}$
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1 puis interpréter ces résultats.
4. Etudier la nature des branches infinies.

Partie B
1. Soit $h(x)=\ln|x|+x+1$. Etudier les variations de h.
2. Montrer que l'équation h(x)=0 admet une unique solution α et vérifier que $0{,}27<\alpha<0{,}28$
3. Déterminer le signe de h(x) suivant les valeurs de x.
4.
a) Calculer f '(x) sur $]-\infty;1]-\{-1\}$.
b) Déterminer le signe de f '(x) sur $]-\infty;1]-\{-1\}$.
c) Calculer f '(x) sur $]1,+\infty[$
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Résoudre l'équation f(x)=0.
7. Tracer la courbe (C_f) (unité 1cm)

Partie C
1.
a) Déterminer les réels a et b pour que : $\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}$.
b) Donner alors une primitive de la fonction : $x\mapsto\frac{x}{x+1}$.
c) En intégrant deux fois par parties donner l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda>1$. Calculer alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

Problème 8

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ f(x) = x\ln(x+1) & si\ x \geq 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et (Δ) la première bissectrice.($(\Delta): y = x$)

1ère Partie :

1. Montrer que f est continue et dérivable IR.

a) Montrer que pour tout réel strictement négatif x on a : $f'(x) > 0$.

b) Etudier les variations de f' sur $[0;+\infty[$. Déduisez en que $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f.

2.

a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \to -\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = 1$ (Justifier votre réponse).

c) En déduire que (C) admet une asymptote (D) non parallèle aux axes que l'on précisera au voisinage de $-\infty$.

d) Déterminer les points de rencontre de (C) avec (Δ).

e) Construire (C) et tous ses éléments remarquables.

2ème Partie :

1. Soit $G : x \mapsto x^2\ln(x+1)$ définie sur $[0;+\infty[$. Montrer que G est dérivable puis calculer G'(x).

2.

a) Montrer que f admet sur $[0;+\infty[$ une primitive qu'on notera F.

b) Déterminer les réels a, b et c vérifiant :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

c) En intégrant par parties, déterminer alors la primitive de f sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.

4. Déterminer en unité d'aire l'aire définie par

$$\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tel que } 0 \leq x \leq e-1 ; f(x) \leq y \leq x \right\}$$

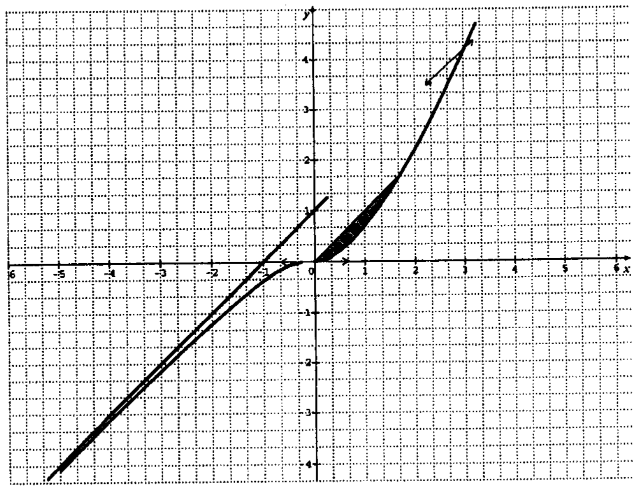
5.

a) Démontrer que f réalise une bijection 3 sur lui-même.

b) Soit f^{-1} la réciproque de f et (C') sa courbe.

b-1) Préciser les points en lesquels f^{-1} est dérivable et dites pourquoi.

b-2) Déduire de la question l'aire de la boucle délimitée par (C) et (C')



Problème 10

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = e^x - x - 1 & si\, x \geq 0 \\ f(x) = x\ln|x| & si\ x < 0 \end{cases}$$

1.

a) Déterminer D_f et les limites de f aux bornes de D_f.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2.

a) Calculer la dérivée de f puis dresser son tableau de variation.

b) Déterminer les branches infinies de (C_f) courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

c) Construire (C_f).

3. Soit a un réel strictement négatif.

a) Calculer $I(a) = \int_{-\frac{1}{e}}^{a} f(t)dt$ puis en déduire $\lim_{a \to 0^-} I(a)$

b) Calculer l'aire du domaine

$$\left\{ M(x;y) \text{ tel que} : -\frac{1}{e} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

Problème 11

Partie A

On considère la fonction g sur $]0;+\infty[$ définie par :

$$g(x) = \ln(x^2) + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$ (en 0 on pourra poser $X = \frac{1}{x}$ et mettre X en facteur)

2.
   a. soit g' la dérivée de g. Calculer g'(x)
   b. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

3.
   a. démontrer que l'équation g(x)=0 admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique noté α.
   b. Justifier l'encadrement $0{,}1 < \alpha < 1$.
   c. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près par excès de α.

4. Déduire de l'étude précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=e^{x}\left[\ln(x^{2})+\frac{2}{x}\right].$$

1.

a. Calculer $\lim\limits_{+\alpha} f$

b. Calculer la limite de f en 0(on pourra mettre $\frac{e^x}{x}$ en facteur)

2.

c. Calculer la dérivée de f

d. En déduire les sens de variations de f (on pourra utilisé les résultats du A))

1°/ Construire avec soins dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de f en prenant comme unités 4cm (axe de abscisses) et 0,5cm (axe des ordonnées).

3.Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=e^{x}\ln(x^{2})$$

Problème 11

I°/-

1.

a. Résoudre l'équation différentielle $y''-3y'+2y=0$

b. Donner la solution f vérifiant les conditions initiales f(0)= et f '(0)=0

2.On considère la fonction $g:x\mapsto e^{x}-e^{2x}$

a. Etudier les variations de g et construire sa courbe représentative (C_g) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 1cm.

b. A tout réel $\beta\mapsto(P_\beta)$ où (P_β) désigne l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases}\beta\le x\le 0\\ 0\le y\le g(x)\end{cases}$. Hachurer ce domaine ; calculer en cm^2 l'aire $A(\beta)$ de ce domaine et la limite de ce domaine lorsque $\beta\to-\infty$.

II°/ On considère la fonction $h:x\mapsto\left|e^{x}-e^{2x}\right|$ définie sur IR

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$. Justifier votre réponse.
2. Etudier la dérivabilité de h à droite puis à gauche de 0.
3. Faire l'étude complète de h puis construire sa courbe représentative (C_h) de h dans un second repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On représentera les demi tangentes en 0 à (C_h).

III°/ On considère la fonction $n:x\mapsto\ln\left|e^{x}-e^{2x}\right|$

1.

a. Préciser le domaine de définition de n.

b. Démontrer que $n(x)-2x=\ln(1-e^{-x})$ pour tout réel x>0.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x})$.

d. En déduire l'existence d'une asymptote oblique (Δ_1). On étudiera la position éventuelle de (Δ_1) et (C_h).

2.

a. Démontrer que pour tout réel x<0 ; $n(x)-x=\ln(1-e^{x})$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-e^{x})$, en déduire l'existence d'une asymptote (Δ_2) étudier sa position par rapport à (C_h).

3. Faire l'étude de n et construire $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

4. Montrer que la restriction φ de n à $]0;+\infty[$ admet une réciproque φ^{-1} et construire la courbe représentative de (C') dans le repère $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

SUITES NUMERIQUES

I- GENERALITE

1. Définition

Une suite est une fonction (Application) définie de IN ou d'une partie A de IN vers IR . L'image par la suite u de l'entier n est notée u_n au lieu de u(n). La suite elle-même est notée (u_n).

Remarque : *Ne pas confondre :*

- La suite (u_n) qui est une application ;
- Le terme de rang n, u_n qui est un réel ;
- $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, ensemble des valeurs de la suite.

2. Modes de définition d'une suite

❖ *Suite définie en fonction du rang n* : $u_n = f(n)$ (***définition explicite***).

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 5n + 3$. Alors :

$u_0 = 0^2 - (5 \times 0) + 3 = 3$; $u_1 = 1^2 - (5 \times 1) + 3 = -1$;

$u_2 = 2^2 - (5 \times 2) + 3 = -3$; $u_{10} = 10^2 - (5 \times 10) + 3 = 53$; $u_5 = 5^2 - (5 \times 5) + 3 = 3$.

❖ *Suite définie par une relation de récurrence* : $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée du premier terme u_0 (***relation de récurrence***) *.On peut alors calculer de proche en proche les termes de la suite : $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$; $u_3 = f(u_2)$; etc.......*

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -1$. Alors :

$u_1 = u_{0+1} = 2u_0 + 3 = 1$; $u_2 = u_{1+1} = 2u_1 + 3 = 5$; $u_3 = u_{2+1} = 2u_2 + 3 = 13$; etc...

3. Sens de variation d'une suite

Définition :

Soit $u_n)_{n \in A}$ une suite de nombres réels. On dit que :

La suite (u_n) est croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

La suite (u_n) est décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

La suite (u_n) est monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante (à partir du rang n_0).

La suite (u_n) est stationnaire lorsque $u_n = u_{n+1}$pour tout $n \geq n_0$.

(Constante si (u_n) est définie à partir du rang n_0).

N.B On définit la stricte croissance (ou décroissance) à l'aide de l'inégalité stricte $u_n < u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$).

Règle :

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on compare $\forall n$, u_n et u_{n+1} deux termes consécutifs. Pour cela, on peut étudier le signe de leur différence, ou, s'il s'agit de nombres strictement positifs, comparer

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$. Alors $u_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{2(n+1)+1} = \frac{n+3}{2n+3}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{2n+3} - \frac{n+2}{2n+1} = \frac{-3}{(2n+1)(2n+3)}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite étudiée est par conséquent décroissante.

Méthode : Etudier les variations d'une suite

1) Pour tout n de IN, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 4n + 4$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Résolution

On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) + 4 - n^2 - 4n - 4 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 4 - n^2 - 4n - 4 \\ &= 2n + 5 \end{aligned}$$

On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$: Or pour tout n entier $2n + 5 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n de IN, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

On commence par calculer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$.

Or $0 \leq n < n+2$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc $v_{n+1} - v_n < 0$. On en déduit que (v_n) est décroissante.

Propriété :

Soit une fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ et une suite numérique (u_n) définie sur IN par $u_n = f(n)$.

Si f est croissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est croissante.

- Si f est décroissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :

- f est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier n : comme $n+1>n$,

$f(n+1) \geq f(n)$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.

- Démonstration analogue pour la décroissance.

Méthode : Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Pour tout n de IN, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Résolution

On considère la fonction associée f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Ainsi $u_n = f(n)$.

Etudions les variations de f définie sur $\left[0;+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$. Pour tout x de $\left[0;+\infty\right[$, on a : $f'(x)<0$.

Donc f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.

4. **Suites bornées**

On dit que la suite $(u_n)_{n \in A}$ est :

- majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de A, $u_n \leq M$.
- minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de A, $u_n \geq m$
- bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Remarque :

La suite $(u_n)_{n \in A}$ est bornée s'il existe un couple (m, M) de réels tel que, pour tout n de A, on a : $m \leq u_n \leq M$.

5. **Suites périodiques**

Soit p un entier naturel non nul. On dit que la suite $(u_n)_{n \in A}$ est périodique de période p si, pour tout n de A, on a : $u_{n+p} = u_n$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $u_n = (-1)^n$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+2} = u_n$. Cette suite est donc périodique de période 2.

Exercice :

Montrer que le suite (u_n) est périodiques et déterminer leur période. Pour $n \in IN$ $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

Raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence : *pour démontrer une propriété P*

- Vérifier la propriété P à un rang particulier souvent au rang 0 ou 1(Initialisation),
- Puis on suppose que la propriété P est vraie au rang n,
- Et on démontre que la propriété est vraie au rang n+1 (Hérédité).

alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode : Mener un raisonnement par récurrence

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

Résolution

- **Initialisation :**

$u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k = (k+1)^2$.

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k+1 : $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$, par définition

$= (k+1)^2 + 2k + 3$, par hypothèse de récurrence

$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$

$= k^2 + 4k + 4$

$= (k+2)^2$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = (n+1)^2$.

II- SUITES ARITHMETIQUES

1. Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique si l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r : $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout indice n.
Ce nombre r s'appelle raison de la suite (u_n).

2. Expression du terme général

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors : $u_n = u_0 + nr$.
Si le premier terme est u_1, alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$
Cas général : $u_n = u_p + (n-p)r \quad (p \leq n)$

3. Somme de termes consécutifs

Pour toute suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0, on a :

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$
- $u_1 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$
- $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

NB:
Trois termes a; b et c sont en progression arithmétique si $a + c = 2b$ la raison de la suite arithmétique est $r = b - a = c - b$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Résolution

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et

$u_9 = u_0 + 9r = 19$.

On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

III- SUITES GEOMETRIQUES

1. Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre q appelé raison : pour tout $n \in IN$ $u_{n+1} = u_n \times q$.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par : $u_n = 4^{2n-1}$ est-elle géométrique ?

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{2(n+1)-1}}{4^{2n-1}} = \frac{4^{2n+1}}{4^{2n-1}} = 4^2 = 16$.

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 16.

(u_n) est une suite géométrique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 4^{2\times 0-1} = 0,25$.

2. **Expression du terme général**

Si la suite géométrique (u_n) a pour premier terme u_0 et pour raison q, alors : $u_n = u_0 \times q^n$

Si le premier terme est u_1, alors : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Cas général : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(p \leq n)$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Résolution

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = q^n \times u_0$

Ainsi $u_4 = q^4 \times u_0 = 8$ et $u_7 = q^7 \times u_0 = 512$. Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{q^7 \times u_0}{q^4 \times u_0} = q^3$ et $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64. Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$

Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$.

3. **Somme des premiers termes**

Pour toute suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$, on a :

- $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$
- $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

NB:

Trois termes a; b et c sont en progression géométriques si $ac = b^2$ la raison de la suite géométrique est $q = b/a = c/b$

IV- LIMITE D'UNE SUITE

La notion de limite en $+\infty$, déjà rencontrée à propos des fonctions, s'étend au cas des suites. On a les résultats suivants :

Théorème 1 : a) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$.

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

Théorème 2 :

Soit q un nombre réel.

☆ Si $q > 1$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

☆ Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Théorème 3 :

Les résultats concernant les opérations sur les limites de fonctions s'étendent aux limites de suites.

V- CONVERGENCE D'UNE SUITE

1. **Définition : suite convergente**

Une suite (u_n) qui a une limite réelle l est dite **convergente**. Elle est dite **divergente** dans les autres cas.

2. **Remarque** :

- Soit (u_n) une suite du type $u_n = f(n)$: Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.
- Les théorèmes vus en Première sur les limites de fonctions s'appliquent donc aux suites.
- En conséquence, on récupère dans ce cas tous les théorèmes sur les opérations algébriques ainsi que les théorèmes de comparaison, en particulier le théorème des "gendarmes".

Exercice1

1. Soit la suite u définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier n non nul par $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Correction

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{2-2/3} = \dfrac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0, w_n = \dfrac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, soit

$2 - u_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{2n+2-n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Tout va bien.

2. a. $v_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

b. $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{n-1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent

SUITES NUMERIQUES
Exercices corrigés

Exercice 1:

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in$ IN $u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n$.

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in$ IN, on a : $u_n = \dfrac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

Exercice 2:

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

a. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Quel que soit n entier naturel, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles.

c. M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.

d. Pour tout n entier naturel, $z_n = \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

Exercice 3:

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et } v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.
2. Justifier par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. a. Démontrer que quel que soit n de IN,
$(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \geq 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit n de IN*, $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
7. Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.
8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.

Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1er siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées

CORRECTION

Exercice 1:

a. **Faux** : Si la suite v_n est arithmétique, $v_{n+1} - v_n$ est constante :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - 2u_{n+1} + u_n = -\frac{5}{3}u_{n+1} + \frac{5}{3}u_n = -\frac{5}{3}v_n$$

;c'est donc faux, mais nous gagnons une information intéressante :

$v_{n+1} = -\frac{5}{3}v_n + v_n = -\frac{2}{3}v_n$; v_n est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1 - 0 = 1$ d'où $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

b. **Vrai** : Recommençons :

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = 0$$

donc c'est vrai. En plus on a $w_n = w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$.

c. **Vrai** : $\frac{3}{5}(w_n - v_n) = \frac{3}{5}\left(u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}u_n\right) = u_n$ Ok !

d. **Faux** : Remplaçons pour calculer u_n : $u_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

dont la limite est $\frac{3}{5}$.

Exercice 2:

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	V

a. On a $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Il nous faut calculer

$$(\overrightarrow{M_nO}, \overrightarrow{M_nM}_{n+1}) = \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{0 - z_n}\right) = \arg\frac{\frac{1+i}{2} - 1}{-1} = \arg\frac{1-i}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

, ainsi que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM}_{n+1}) = \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \arg\frac{1+i}{2} = \frac{\pi}{4}$. Le dernier angle vaut donc bien $\frac{\pi}{2}$ (on aurait pu calculer un seul angle mais ç'aurait été moins amusant...).

c. On a évidemment $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

donc M_n appartient à l'axe des abscisses si

$n\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4k\pi}{\pi} = 4k$.

d. Avec la réponse au c. et en remarquant que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on retrouve bien $z_n = \dfrac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

Exercice 3:

1. $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{7}{2}, v_1=\frac{u_1+v_0}{2}=\frac{15}{4}, u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{29}{8}, v_2=\frac{u_2+v_1}{2}=\frac{59}{16}$.

2. a. $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}=\frac{u_n+v_n-2u_n}{4}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$

b. $w_0=v_0-u_0=4-3=1$ donc $w_n=1.\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.

3. On a vu que $\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=w_{n+1}>0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n=v_n-u_n>0$ donc $u_n>v_n$; enfin

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}v_n-v_n=\frac{1}{2}(u_{n+1}-v_n)=\frac{1}{2}(\frac{u_n+v_n}{2}-v_n)=\frac{1}{4}(u_n-v_n)<0$

donc v_n est décroissante. Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant...).

4. a.

$t_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$

. On a donc $t_n=\frac{1}{3}(u_0+v_0)=\frac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(l+2l)\Rightarrow l=\frac{7}{3}$.

Exercice 4:

1. $v_0=\frac{7}{u_0}=\frac{7}{3}$; $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{3+\frac{7}{3}}{2}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$;

$v_1=\frac{7}{u_1}=\frac{7}{\frac{8}{3}}=\frac{21}{8}$; $u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2}=\frac{64+63}{48}=\frac{127}{48}$;

$v_2=\frac{7}{u_2}=\frac{7}{\frac{127}{48}}=\frac{336}{127}$; $u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2}=\frac{32257}{12192}\approx 2,64575$

; $v_3=\frac{7}{u_3}=\frac{7}{\frac{32257}{12192}}=\frac{85344}{32257}\approx 2,64575$.

Il semble que les suites tendent vers 2,64575... et que la convergence soit très rapide.

2. P_n : $u_n>0$ et $v_n>0$. P_0 : $u_0=3>0$ et $v_0=7/3>0$: P_0 est vérifiée.

Supposons P_n vraie : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}>0$ puisque u_n et v_n sont positifs, et bien sûr il en résulte que $v_{n+1}=\frac{7}{u_{n+1}}>0$. On a bien, quel que soit n de $\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

3. a.

$(u_n+v_n)^2-28=(u_n-v_n)^2\Leftrightarrow(u_n+v_n)^2-(u_n-v_n)^2=28\Leftrightarrow 2(2u_nv_n)=28\Leftrightarrow u_nv_n=7\Leftrightarrow v_n=\frac{7}{u_n}$

.

3. b. $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2=\frac{1}{4u_{n+1}}\left((u_n+v_n)^2-28\right)=\frac{1}{u_{n+1}}\left(\frac{(u_n+v_n)^2}{4}-7\right)$

$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(u_{n+1}{}^2-7\right)=u_{n+1}-\frac{7}{u_{n+1}}=u_{n+1}-v_{n+1}$.

3. c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1}-v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit n, c'est-à-dire en remplaçant $n+1$ par n, on a u_n-v_n positif pour $n\geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour $n=0$: $u_0-v_0=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}>0$.

On a bien $u_n-v_n>0$ ou encore $u_n>v_n$.

4. $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}<0$ car $v_n-u_n<0$; $v_{n+1}-v_n=\frac{7}{u_{n+1}}-\frac{7}{u_n}=\frac{7(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}u_n}>0$ car $u_{n+1}-u_n<0$ et $u_n>0$ quel que soit n. La suite (u_n) est bien décroissante et la suite (v_n) est croissante.

5. a. On sait que $u_n>v_n$ or la suite v_n est croissante, donc $v_n>v_1$, on a donc : $u_n>v_n>v_1=\frac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow 4u_{n+1}\geq 10\Leftrightarrow u_{n+1}\geq\frac{5}{2}$

. Or on sait que $u_n>\frac{21}{8}>\frac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété P_n :

$u_n-v_n\leq\frac{1}{10^{2^n-1}}$.

Vérifions P_0 : $u_0-v_0=\frac{2}{3}<\frac{1}{10^{2^0-1}}=1$, ok.

Démontrons P_{n+1} :

$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2=\frac{1}{10}\times\frac{1}{\left(10^{2^n-1}\right)^2}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10^{(2^n-1)\times 2}}=\frac{1}{10\times 10^{2^n\times 2}\times 10^{-2}}=\frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}$

.

5. d. On a $0\leq u_n-v_n\leq\frac{1}{10^{2^n-1}}$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{10^{2^n-1}}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ (gendarmes).

6. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite λ. Celle-ci vérifie la relation $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{7}{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}\Leftrightarrow l=\frac{7}{l}\Leftrightarrow l^2=7$; or $l>0$ donc $l=\sqrt{7}$.

7. $u_3-v_3\leq\frac{1}{10^{2^3-1}}=\frac{1}{10^{8-1}}=10^{-7}$: la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup...

On se trouve en présence d'une convergence dite *quadratique*.

8. Pour trouver $\sqrt{a}$, il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n=\frac{a}{u_n}$ puisque si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles ont même limite l telle que $l=\frac{a}{l}\Leftrightarrow l^2=a$. Les

démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.

L'algorithme présenté ici débouche sur bon nombre de problèmes dont certains sont très actuels : on l'utilise par exemple pour calculer les décimales de π, c'est l'algorithme de Brent et Salamin. Il s'agit essentiellement de l'algorithme de la *moyenne arithmético-géométrique* étudié par Lagrange puis par Gauss au 19ème siècle.

SUITES NUMERIQUES
Exercices non corrigés

Exercice 1:

A. Calculer les sommes suivantes :
In = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) (somme des n premiers entiers naturels impairs)
Pn = 2 + 4 + 6 + ... + 2n (somme des n premiers entiers naturels pairs)
B. La suite (u_0) est arithmétique de raison r = 8. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

Exercice 2:

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

a) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour n ≥ 1 ; b) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$).

Exercice 3:

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite de terme général $U_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$.

1. Démontrer que ∀ p ≥ 2, on a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.
2. Démontrer que ∀ $n \in IN^*$ on a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite bornée.

Exercice 4:

Soit (Un) la suite définie pour n ≥ 2 par :
Un = $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 2, on a : $\frac{1}{p^p} \leq \frac{1}{2^p}$
2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2^p}$.
3. En déduire que (Un) est bornée.

Exercice 5:

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \forall n \geq 0 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence sur n que (u_n) et (v_n) sont des suites strictement positives
2.
a) Calculer $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$ et en déduire que $\forall n \geq 0 \quad u_n \leq v_n$
b) Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
c) Démontrer par récurrence sur n que
$$\forall n \geq 0 \text{ on a } 0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$
d) que peut on dire des suites (u_n) et (v_n).Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 6:

A) On pose Sn = $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 *et* S_4.
2) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
3) Prouver que ∀ n ≥ 1 $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B) Une suite $(a)_{n\geq 0}$ arithmétique est telle que
$a_2 = 3$ *et* $a_5 = 1$.
1) Calculer sa raison et son premier terme.
2) Calculer S = $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{99}$.

C) Déterminer a et b, réels, tels que a, a+2b, 2a + b, soit une suite arithmétique, et $(a+1)^2$, $(ab+5)$, $(b+1)^2$ soit une suite géométrique.

Exercice 7:

On considère la suite $(U_n)_{n\in IN}$ de réels définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right) \text{ pour tout n} \geq 0.$$

1. Démontrer que ∀ n ; $U_n > 0$.
2. Soit $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$.Etablir une relation entre V_{n+1} et V_n
En déduire la limite de V_n puis celle de U_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 8:

Soit a un réel fixé et (U_n) la suite de réels définie par :
$U_0 = 0, U_1 = 1$ et $U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}$; (V_n) la suite définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1. Démontrer que (Vn) est une suite géométrique. Calculer Vn puis Un en fonction de a et de n.
2. Déterminer a pour que la suite (Un) soit convergente. Préciser alors sa limite.

Exercice 9:

On considère la suite (Un) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 6U_{n+1} - 5U_n \end{cases}$$

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4.
2. Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.
3. Déterminer deux réels A et B tels que : $U_n = A.5^n + B$.
4. En déduire U_{10}.

Exercice 10:

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$; (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \ ; V_0 = b \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

1. Démontrer que $\forall$ n $\in$ IN : $0 < U_n < V_n$.
2. Démontrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
3. Démontrer que $\forall$ n $\in$ IN ; $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

En déduire que $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$.En déduire que $(V_n - U_n)$ converge vers 0.

4. Soit L la limite commune aux deux suites (U_n) et (V_n) ; montrer que $U_nV_n = ab$ et en déduire L en fonction. de ab.

Exercice 11:

Etudier la convergence des suites :

a) $U_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+2)}$; b) $U_n = \frac{n^2 \cos n}{n^3 + 3n - 4}$; c) $U_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - (an + b)$;

d) $U_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$; e) $U_n = \frac{n - \cos n}{n + \sin n}$.

Exercice 12:

Soit la suite (Un) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.

1) Dans un plan rapporté à un r.o.n, représenter la fonction f(x) = $\sqrt{2+x}$ et les premiers termes de la suite (Un).

Quelle semble être la limite de la suite ?

2) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que , pour tout n, $U_n \in [0;2]$.

3) On considère la suite (Vn) définie par $V_n = 2 - U_n$

.a) Quel est le signe de Vn ?

b) Montrer que pour tout n , $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$, puis , à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $V_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) En déduire la limite de la suite (Vn) , puis la limite de la suite (Un).

Exercice 13:

Soit la suite (Un) définie par Uo = 1 et $U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n}$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Montrer que la suite (Un) est positive et croissante.
3) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$

   En déduire par récurrence. Que $U_n \succ 1 + \frac{n}{2}$.
4) la suite est elle convergente ?

Exercice 14:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

1. Exprimer un en fonction de n
2. On pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \forall n \geq 0$

a) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}$

b) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite l telle que $\begin{cases} l > 0 \\ l = 1 + \frac{1}{l} \end{cases}$. Déterminer alors l

NB : La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite suite de Fibonaci et l est appelé nombre d'or

Exercice 15:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique définie par :

$\begin{cases} u_0 ; u_1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \ \forall n \geq 0 \end{cases}$ où u_0 et u_1 sont des réels.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 3^n v_n$

a) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $v_n - v_{n-1}$. Exprimer alors $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_0 et v_1.

b) Exprimer alors vn puis un en fonction de n ;u_0 et u_1.

2. on suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{3}$

a) Que peut on dire des suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$?

b) Calculer alors $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

c) la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ admet t- elle une limite ?

Exercice 16:

Extrait du concours général TS- 2007

Soit U la suite définie par $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$, avec $U_1 = 1$ *et* $U_2 = 2$.

1 / Montrer que U est une suite positive et croissante.

2 / On définit la suite V par $V_n = U_n + 1$ pour tout n > 0.

Donner l'expression précise de V_n en fonction de n.

3 / Démontrer que :

(R1) : $(V_{2n})^2 = V_{2n-1} V_{2n+1} - 1$

(R2) : $(V_{2n+1})^2 = V_{2n} V_{2n+2} + 1$

4 / Déduire de la question 3 / la relation (R3) :

$(U_{2n+1} - U_{2n-1})^2 = U_{2n-1}U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1.}$

5 / Montrer que :

(R4) :

$(U_{2n+1} + U_{2n-1})^2 = 5U_{2n-1}U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1.}$

(R5) :

$= 5U_{2n-1}U_{2n+1} = (U_{2n+1} + U_{2n-1})(U_{2n-1} + U_{2n+1.} - 1).$

6 / A partir de (R5) démontrer que si U_{2n-1} est premier, alors il divise soit U_{2n+1}, soit $U_{2n+1} - 1$.

Exercice 17:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n $u_n \neq 2$.
2. On pose pour tout en entier n $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$

a. Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b. Exprimer $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en fonction de n.

3. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 18:

Soient $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer par récurrence sur n que : $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$
3. Montrer alors que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 19:

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites telles que $u_1 < v_1$ et pour tout entier naturel n $u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$ et $v_n = \dfrac{u_n + v_{n-1}}{2}$

1.

a. Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de $u_n - v_n$.

b. Déterminer la nature de la suite $(u_n - v_n)$. Exprimer alors $u_n - v_n$ en fonction de n.

c. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 20:

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite géométrique à termes positifs telle que :

$$\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$$

1. Déterminer cette suite.
2. Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\geq 1}$ puis étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.

Exercice 21:

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2}, \forall n \in IN \end{cases}$$

1/Montrer que $\forall n \in IN : 0 \leq U_n \leq 1$.

2/En déduire le sens de variation de $(U_n)_{n\in IN}$.

3/a)Montrer que $\forall n \in IN : |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$.

b) En déduire que $|U_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in IN$.

4/On pose : $V_n = \dfrac{1 + U_n}{2(1 - U_n)}$ $n \in IN$.

a)Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

Exercice 22:

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, \forall n \in IN \end{cases}$$

1/Calculer les trois premiers termes de la suite $(U_n)_{n\in IN}$

2/Montrer par récurrence, que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est croissante.

3/Montrer par récurrence, que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est bornée par 0 et 4.

Exercice 23:

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}U_n \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2. Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ?
2) On pose $V_n = k + U_n$; $k \in IR$.

a)Exprimer V_{n+1} en fonction V_n.

b) En déduire la valeur de k pour laquelle la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est géométrique

3) Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.

Exercice 24:

Démontrer que chacune des suites ci-dessous converge vers 0.

$u_n = \frac{1}{n+1}$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; $w_n = \frac{(-1)^n}{3n}$; $t_n = \frac{\cos n\pi}{n}$;

$s_n = \frac{n^2}{(n^2+2)\times 3^n}$.

Exercice 25:

Soit $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

a)Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
b) Établir que tous les termes de cette suite sont positifs.
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante.
d) Établir que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est bornée.
e) Démontrer que $\forall\, n \in IN^*$, $u_n < \frac{1}{2^n}$.

Exercice 26:

On donne $u_n = \frac{n-1}{n^2+n}$.

a)On pose $v_n = \frac{n-1}{n+1}$,

Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est majorée par 1 et est bornée.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers 0.

Exercice 27:

Soit (U_n) n∈IN la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 1,\ \forall\, n \in IN \end{cases}$

a)Calculer U_1, U_2, U_3.
b) Démontrer que cette suite est strictement croissante.
c) On pose $V_n = U_n - 2$.
c1) Démontrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.
c2) Calculer V_n en fonction de n.
d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente.

Exercice 28:

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$

1) Démontrer que tous les termes de cette suite sont positifs.
2) Si la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente, démontrer que sa limite l est solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$
3) Soit $(v_n)_{n\in IN}$ la suite telle que $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, $\forall n \in IN$.

Démontrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique convergente.

4)En déduire que $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 29:

On pose $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

1) Prouver que $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante et $(v_n)_{n\in IN}$ est décroissante.
2) Prouver que $u_n < v_n$ $\forall n \in IN$. En déduire que $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ sont convergentes.
3) Prouver que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 30:

Soit $(a_n)_{n\in IN}$ et $(b_n)_{n\in IN}$ deux suites définies par :

$a_0 = 2$; $b_0 = 4$; $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$

On pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.

Dans le plan rapporte a un repère on considère alors les points : $A_n(a_n, 0)$ et $B_n(b_n, 0)$.

1) Démontrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite stationnaire et en déduire que les segments $[A_nB_n]$ et $[A_{n+1}B_{n+1}]$ ont le même milieu I dont on précisera les coordonnées.
2) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique convergente. Que peut-on en déduire pour la distance $\lim_{n\to+\infty}(A_nB_n)$?
3) Exprimer a_n et b_n en fonction de n et démontrer que $(a_n)_{n\in IN}$ et $(b_n)_{n\in IN}$ convergent vers la même valeur.

Exercice 31:

Soit a, b, c réels fixés.
Démontrer que la suite de nombres réels $(a+x)$; $(b+x)$; $(c+x)$ est en progression arithmétique et géométrique si et seulement si $a = b = c$.

Exercice 32:

Soit a, b, c réels fixés.
Déterminer x pour que la suite de nombres réels $(a+x)$; $(b+x)$; $(c+x)$ soit en progression géométrique.

Exercice 33:

1/Démontrer que la suite u définie, pour tout entier n, par $u_n = 2n+1$ est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
2/Démontrer que la suite v définie, pour tout entier n, par $v_n = 3^{u_n}$ est une suite géométrique.

Exercice 34:

On donne $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}, \forall n \in IN \end{cases}$ et

$V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$.

1) Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique.
2) En déduire U_n et V_n en fonction de n.

Exercice 35:

On donne $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}, \forall n \in IN \end{cases}$ et

$\begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4}, \forall n \in IN \end{cases}$

1/On pose $W_n = V_n - U_n$.
Montrer que $(W_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique; puis exprimer $W_n = V_n - U_n$ en fonction de n.
2/Montrer $(U_n)_{n\in IN}$ que est une suite majorée par V_1 et $(V_n)_{n\in IN}$ est décroissante et minorée par U_1.
3/On pose $W_n = 3U_n + 8V_n$ Montrer que $(I_n)_{n\in IN}$ est constante
4/En déduire U_n et V_n en fonction de n.

Exercice 36:

On donne $\begin{cases} U_o = 2,\ U_1 = 3. \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 2U_{n-1}}{3}, \forall n \in IN \text{ et } V_n = U_n - U_{n-1} \end{cases}$

1) Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique; puis exprimer V_n en fonction de n.
2) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ en fonction de n.
3) En déduire U_n en fonction de n.

Exercice 37:

1°Soit $n \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2°Soit $n \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°Soit $n \geq 1$ et $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

a)Ecrire S_n a l'aide du symbole $\sum$.

b) Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k}$.

c) En déduire que $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 38:

Soit $n \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$; $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que $S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer alors que $(S_n)_{n\in IN}$ est bornée.
4. En déduire la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in IN}$ .Conclure.

Exercice 39:

Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$, définie pour tout $n \geq 1$, par : $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1. Etudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $0 \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$
3. En déduire que, pour tout $n \geq 4$, $0 \leq U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.
4. Calculer alors la limite de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.

Exercice 40:

Soit la fonction définie sur $I = [0;2]$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$

1. Montrer que I est stable par f.
2. Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \forall n \in IN \end{cases}$

Déterminer les limites éventuelles de $(u_n)_{n\in IN}$.

3/
a) Montrer que pour tout $n \geq 0, |u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
b) En déduire que $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
c) Déterminer alors la limite de $(u_n)_{n\in IN}$.

Exercice 41:

1) Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$
   a) Etudier les variations de f.
   b) Tracer (C_f) (unité 2 cm)
2) Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}}{2u_n - 1} \ \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que $u_n \geq 1$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

c) $(u_n)_{n\in IN}$ est-elle bornée ?

d) Déterminer une limite éventuelle de $(u_n)_{n\in IN}$.

3) Soit $v_n = \dfrac{1-u_n}{u_n}$

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

4) a)Déduire de 3)b) l'expression de u_n en fonction de n.

b) Calculer la limite de u_n.

Exercice 42:

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie, pour tout $n\geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$

1) Soit $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} \quad n \geq 1$

Exprimer S_n en fonction de n

2) En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in IN}$.

3) Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in IN}$.

Exercice 43:

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n.

1) $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique.

a) $u_0 = -6$, $r = \dfrac{3}{2}$ (raison r)

b) $u_3 = \dfrac{2}{3}$, $u_{11} = 0$.

c) $u_0 = 1$, et la somme des 101 termes est égale a 2.

2) $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.

a) $u_1 = 5$, $q = -\dfrac{1}{5}$ (raison r)

b) $u_3 = \dfrac{3}{14}$, $u_{10} = \dfrac{1}{15}$.

c) $q = 2$ et $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{12} = 24573$.

Exercice 44:

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad (a \geq 0) \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de a ; $(u_n)_{n\in IN}$ est-elle une suite croissante ?

2)

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est constante.

b) Établir que $\forall\ n \in IN^*$, $u_n < 5$. En déduire que $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite bornée.

3) On pose $u_0 = 1$.

a) Montrer par récurrence que, $\forall n \in IN$, $(u_{n+1} - u_n)$ a le même signe que $(u_1 - u_0)$

b) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in IN}$ .Conclure.

2. On pose $w_n = u_n - 3$

a) Établir que $\forall\ n \in IN^*$, $|w_n| < \dfrac{2}{3}|w_{n-1}|$.

b) En déduire que $|w_n| < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire l'expression la convergence de $(w_n)_{n\in IN}$ et de $(u_n)_{n\in IN}$.

3. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n; puis celle de u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de u_n.

Exercice 45:

Déterminer les couples (a, b) de réels satisfaisant aux conditions suivantes.

- $b+1$, $2a$, $2a+b$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- b, $2a$, $10a-4b$ sont en progression géométrique.

Exercice 46:

Trouver trois réels a, b et c en progression arithmétique,

sachant que : $\begin{cases} a+b+c = 33 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 365 \end{cases}$

Exercice 47:

Sur un livret de caisse d'Epargne, les intérêts obtenus chaque année s'ajoutent au capital et produisent a leur tour des intérêts. (On dit que le placement est a intérêts composes).

1) On dépose 10 000 Afro le 1er janvier 2000.

On suppose que le taux d'intérêts est de 5%.

Quel est le capital disponible aux 1ers janviers des années 2001, 2002 et 2003 ?

2) Généralisation

On note respectivement $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ les capitaux disponibles aux 1ers janviers 2001, 2002, 2003, ... (2000+ n).

a)Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

c) Retrouver les résultats du 1.

Exercice 48:

Trois nombres réels a, b, c sont en progression géométrique.

Calculer leurs valeurs sachant qu'ils vérifient le système :

$$\begin{cases} ac = 36 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases}$$

1 a)En considérant que S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique, donner une nouvelle expression de S_n.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{4}{11}$.

4. Conclure.

Exercice 49:

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Soit v la suite définie par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 Calculer u_1, u_2, u_3 et v_0, v_1, v_2, v_3.
2 Démontrer que la suite v est une suite géométrique.
3 En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
4 Quelle est la limite de u quand n tend vers $+\infty$. ?

Exercice 50:

On considère la suite u définie par $u_n = \frac{(1.01)^n}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer $u_1, u_2, u_3, u_5, u_{10}, u_{50}$. (a 10^{-3} près)
2) Etudier le sens de variation de la suite u.
3) A l'aide d'une calculatrice, calculer des valeurs approchées de $u_{99}, u_{100}, u_{101}, u_{1000}, u_{10000}$.

Exercice 51:

On considère les suites u, v définies par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$, et $v_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le sens de variation de la suite u. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) a/Déterminer des réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a + bu_n$.
b/En déduire le sens de variation de la suite v et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 52:

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1 Calculer u_2, u_3, u_4. Donner les résultats sous forme d'une fraction irréductible.
2 Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$.
3 En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

NOMBRES COMPLEXES

I- FORME ALGEBRIQUE

1. Définitions

- Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$
- Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bi$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$= ensemble des nombres complexes ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

- On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.

a est la **partie réelle** de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$

b est la **partie imaginaire** de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.

- Si $b = 0$ alors $z = a$ est un réel
- Si $a = 0$ alors $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur.**

Propriété

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a : $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a ; b) = (a' ; b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est appelé **plan complexe.**

- Au point M de coordonnées (a ; b) on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

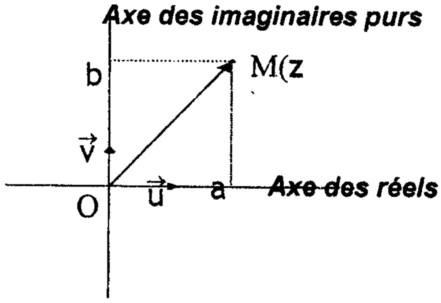
On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de M ou que M(a ; b) est l'image ponctuelle de $z = a + bi$.

- Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (a ; b) on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}$ (a ; b) est l'image vectorielle de $z = a + bi$.

- Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.
- Le point Q (-a ; -b), symétrique de M par rapport à O a pour affixe **- z**, **opposé de z.**
- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

- le barycentre G de (M ; α) et (M' ; β) a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$.



3. Opérations dans ℂ

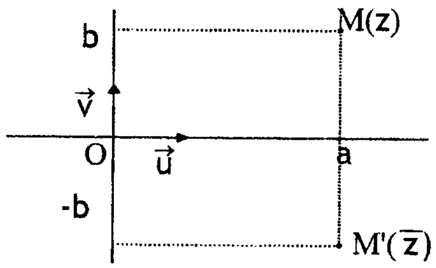
Pour $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$

- **Addition** : $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$
- **Produit** : $z z' = (a a' - b b') + i\,(a b' + b a')$
- **Inverse** : pour z non nul : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$
- **Quotient** : pour z' non nul : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$
- **Propriétés de i** : $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$.

4. Conjugué d'un nombre complexe

a. **Définition**

Soit z un nombre complexe de forme algébrique a + bi . On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - bi$



b. **Propriétés**

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z.\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si z' # 0 $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- z est réel ⇔ ***Erreur ! Signet non défini.*** = z ; z est imaginaire pur ⇔ $z = -\overline{z}$

Méthode : Déterminer un conjugué

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique. $z_1 = (2-i)(i-5)$; $z_2 = \dfrac{3+2i}{i}$

II- FORME TRIGONOMETRIQUE

1. Module d'un nombre complexe

Définition

Si le point M est l'image du complexe $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) dans le plan complexe. On appelle module de z ,noté $|z|$, la distance OM

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

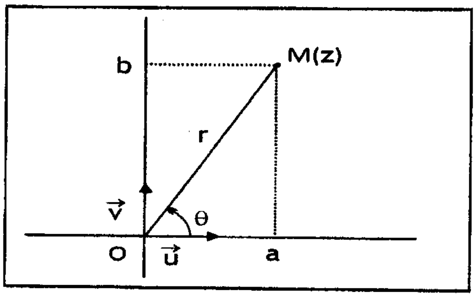
Propriétés :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|zz'| = |z|.|z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $|\overline{z}| = |z|$
- Pour z' non nul : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{\overline{z'}}{|z'|^2}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors $OM = |z|$ et $MM' = |z' - z|$
- Si $\vec{u}$ a pour affixe z, alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

2. **Argument d'un nombre complexe**

a. **Définition** :

Un argument du nombre complexe z **non nul** est une mesure de l'angle polaire du point M dans le plan complexe muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, c'est à dire une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$. Le réel 0 n'a pas d'argument. Le nombre complexe i a pour module 1 et pour argument $+\dfrac{\pi}{2}$



b. **Propriétés** :

- L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.
  Si θ est un argument de z, on notera $\arg z = \theta\ [2\pi]$ ou $\arg z = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
  On appelle argument principal de z l'argument de z appartenant à $]-\pi ; \pi]$.
- Tout réel positif a un argument égal à 0.
- Tout réel négatif a un argument égal à π.
- Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$ et tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$.
- Soit z nombre complexe non nul : $z = a + bi$, $|z| = r$ et $\arg z = \theta\ [2\pi]$

alors $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{Re(z)}{|z|} \ ;\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

- Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a $z = z' \Leftrightarrow \{ |z| = |z'|, \arg z = \arg z'\ [2\pi]$
- z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :
  - ☆ $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$; $\arg \dfrac{1}{z} = -\arg z\ [2\pi]$
  - ☆ $\arg \dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z'\ [2\pi]$; Pour n entier : $\arg(z^n) = n \arg z\ [2\pi]$
  - ☆ $\arg(\overline{z}) = -\arg z\ [2\pi]$; $\arg(-z) = \arg z + \pi\ [2\pi]$

3. **Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul**

a. **Définition**

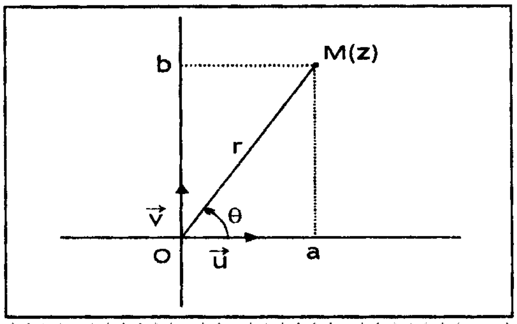
Soit z nombre complexe non nul : $z = a + bi$, $|z| = r$ et $\arg z = \theta\ [2\pi]$. La forme trigonométrique de z est :

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ **NB** : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$ si $z = a + ib$ alors $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.

Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors :

- ❖ $\overline{z} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$;

- $-z = |z|\,(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$



Propriété

Soient θ et θ' deux réels et soient z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' on a :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$;
- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$
- $\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ $[2\pi]$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; $\arg(z^n) = n\arg z$ $[2\pi]$
- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$; $\arg(\bar{z}) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$; $\arg(-z) = \arg z + \pi$; $[2\pi]$

Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

4. Formule exponentielle

Soit z nombre complexe non nul : z = a + bi, $|z|$ *le module de z* et arg z = θ [2π]. La forme exponentielle de z est : $z = |z|e^{i\theta}$ avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarque

$e^{i\theta} . e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Formule de MOIVRE : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Formules d'EULER :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$$

(L'utilisation des formules d'Euler permet de linéariser les polynômes trigonométriques)

Exemple

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

Correction

$$\cos 5x = \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \;;\quad \cos^2 5x = \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}) \;;\; \sin 3x = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$$

$$\cos^2 5x \sin 3x = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}) \times \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} = \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i7x} - e^{-i13x})$$

$$= \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{-i13x} - e^{i7x} + e^{-i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x} - e^{-i13x}}{2i} - \frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i} + 2\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 13x - \sin 7x + 2\sin 3x)$$

Exercice

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimer z^2 sous forme algébrique
b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
c. En déduire z sous forme exponentielle.

Correction

a. $z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^2(2-\sqrt{2})$

$=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}.$

b. $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

c. $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow|z^2|=|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2,\ \arg(z^2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow 2\arg(z)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow\arg(z)=-\frac{\pi}{8}[\pi]$

Sur $[-\pi\,;\pi[$, on aurait soit $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne $z=z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

III- RACINES N-IEMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n\in IN$ tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=1$ est une racine n-ième de l'unité.

Recherche des solutions sous forme trigonométrique $z=|z|e^{i\theta}$ de l'équation $z^n=1$.

$$z^n=1\Leftrightarrow z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\quad k\in\mathbb{Z}$$

NB :

- Pour trouver toutes les racines n-ièmes de l'unité on donne à k n *valeurs* consécutives par exemple $k\in[\![0;1;\dots\dots;n-1]\!]$
- La somme de toutes les racines n-ièmes de l'unité est nulle

$$S=1+e^{\frac{2i\pi}{n}}+e^{\frac{4i\pi}{n}}+\cdots\dots.+e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}=1+e^{\frac{2i\pi}{n}}+\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2+\cdots\dots+\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

$$S=\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)}=\frac{1-e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)}=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)}=\frac{1-1}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)}=0$$

2. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $n\in IN$ et Z *un nombre complexe quelconque*, tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=Z$ est appelé racine n-ième de Z.

Si $Z=0$ il y a une solution unique $z=0$

Si $Z\neq0$ et $\arg(Z)=\alpha$ et $\arg(z)=\theta$ on a : $z^n=Z\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

NB :

- Pour trouver toutes les racines n-ièmes de Z on donne à k n *valeurs* consécutives par exemple $k\in[\![0;1;\dots\dots;n-1]\!]$
- Si $Z\neq0$ alors l'équation $z^n=Z$ admet exactement n *racines distinctes*
- Si z_0 est une solution de l'équation $z^n=Z$ alors toutes solution z de l'équation est de la forme : $z=z_0e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$.

3. Racines carrées d'un nombre complexe $Z=a+ib$

Soit $\boldsymbol{Z=a+ib}$ un nombre complexe on appelle racines carrées de Z tout nombre complexe $z=x+iy$ *tel que* $z^2=Z$

$$z^2=a+ib\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\\2xy=b\end{cases}$$

IV- ÉQUATION DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS COMPLEXES

L'équation (E) : $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des nombres complexes (avec a # 0) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation.

Premier Cas *Δ est un nombre réel.*

- si $\Delta>0$, (E) admet les deux solutions distinctes : $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$, (E) admet les deux solutions distinctes,: $z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- si $\Delta=0$, (E) admet une solution double : $=z_0=\frac{-b}{2a}$

Deuxième Cas *Δ est un nombre complexe et $\Delta\notin IR$.*

Dans ce cas, si on pose $\Delta = \delta^2$ (avec $\delta = x + iy$ racine carrée de Δ), (E) admet les deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

V- UTILISATION EN GEOMETRIE

La notion de distance correspond au module - La notion d'angle à l'argument.
A, B, C et D étant quatre points distincts d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D dans $(O;\vec{u};\vec{v})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$,
- $AB = |z_B - z_A|$
- l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ a pour mesure $\arg(z_B - z_A)$ $[2\pi]$
- l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ a pour mesure $\arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- **Comment démontrer que trois points A, B et C sont alignés** :
  $\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ est un nombre réel $\Leftrightarrow$ l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est nul ou plat $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ $[\pi]$
- **Comment démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales** :
  $\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ **l'angle** $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATION

Translation :
Soit une translation de vecteur $\vec{U}$ d'affixe a ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$
donc $z' - z = a$ d'où ***l'expression complexe d'une translation est : $z' = z + a$***; où a est l'affixe du vecteur de translation.
Homothétie :
Soit une homothétie de rapport k et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que :
$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc $z' - \omega = k(z - \omega)$ d'où **l'expression complexe d'une homothétie est : $z' - \omega = k(z - \omega)$** ; où ω est l'affixe du centre et k le rapport de cette homothétie.
Rotation :
Soit une rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (affixe z') tel que : l'angle
$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ d'où ***l'expression complexe d'une rotation est : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$***; où ω est l'affixe du centre et θ l'angle de cette rotation.
L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z.e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel fixé, est la rotation de centre O et d'angle θ.
• Le cercle de centre A d'affixe z_A et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - z_A| = r$
Similitude directe :
Définition
Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel positif k et qui conserve les angles orientés. C'est la composée d'une homothétie et d'un déplacement (rotation ou translation).

- D'une manière générale l'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = az + b$
- Si le centre est le point Ω d'affixe ω, nous avons, $z' = az + b$ et $\omega = a.\omega + b$; par différence on obtient sans problème : $z' - \omega = a.(z - \omega)$
- Si M a pour image M' par la similitude S de centre Ω (d'affixe ω), de rapport k et d'angle θ ; géométriquement nous avons les résultats suivants :
  - $\Omega M = k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$
  - $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

Propriétés
P1 :

- Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors f^{-1} est une similitude directe de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
- Si f et f' sont deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ', alors la composée f' o f est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$. (Il en est de même pour la composée f o f')

P2 :
Une similitude directe qui n'est pas une translation a un point invariant (point fixe) unique.
Ce point est appelé centre de la similitude.

P3 :
Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation.
Soit Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f.
f est la composée de l'homothétie $h(\Omega;k)$ de centre Ω et de rapport k et de la rotation $r(\Omega;\theta)$ de centre Ω et d'angle θ.
Ces deux applications commutent, on peut écrire $f = h(\Omega;k) \circ r(\Omega;\theta) = r(\Omega;\theta) \circ h(\Omega;k)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de la similitude directe f.

Définition
Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω, son rapport k et son angle θ.
On dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
On notera $f = S(\Omega ; k ; \theta)$ (k est un réel strictement positif et θ un réel).

Cas particuliers
Soit $f = S(\Omega ; k ; \theta)$
- Si k = 1, la similitude f est une rotation. $f = S(\Omega ; 1 ; \theta) = r(\Omega;\theta)$.
- Si $\theta = 0\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport k. $f = S(\Omega ; k ; 0) = h(\Omega;k)$.
- Si $\theta = \pi\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport -k. $f = S(\Omega ; k ; \pi) = h(\Omega;-k)$.

P4 :

Soit f une similitude directe ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

- Si a = 1 et b = 0 alors f = id. Tous les points sont invariants par f.
- Si a = 1 et $b \neq 0$ alors f est une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{V}$ d'affixe b.
  f n'a aucun point invariant.
- Si $a \in IR$ et $a \neq 1$ alors f est une homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport
$k = a$.
- Si $a \in \mathbb{C}$ et $a \notin IR$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)$.
- Si $a \in \mathbb{C}$ et $a \notin IR$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$.

Remarque
Une similitude directe ayant au moins deux points invariants est nécessairement l'application identique.

Exercice1
Pour chacune des similitudes directes f, donner le rapport, l'angle et le centre éventuel.
1°) f d'écriture complexe $z' = -3z + 1 - 5i$.
2°) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - i$.
3°) f d'écriture complexe $z' = z + 1 + i$.

Exercice2
Soient A, B, C, D les points d'affixes : $z_A = -1 - i$; $z_B = i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 5 + i$
Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe transformant A en C et B en D.

Exercice 2 **BAC S2 1999 1er GROUPE**
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation (E) $z^3 + (3 - 2i)\,z^2 + (1 - 4i)\,z - 1 - 2i = 0$

1°) a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.
b) Achever la résolution de l'équation (E)

2°) Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs
$z_A = -1$; $z_B = -2 + i$; $z_C = i$.
a) Déterminer le module et argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

Résolution
1°) a) Soit a une solution réelle éventuelle de (E). On doit avoir :
$a^3 + (3-2i)\,a^2 + (1-4i)\,a - 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + a - 1 - i\,(2a^2 + 4a + 2) = 0$ on a $\begin{cases} a^3 + 3a^2 + a - 1 = 0 \\ 2a^2 + 4a + 2 = 0 \end{cases}$
En résolvant la seconde équation, on trouve que a = - 1, et la première équation est également satisfaite pour a = − 1. Ainsi la solution réelle est − 1.
b) Utilisons la méthode de Hörner pour factoriser le premier membre de (E).

	1	3 − 2i	1 − 4i	− 1 − 2i

-1		-1	$-2+2i$	$1+2i$
	1	$2-2i$	$-1-2i$	0

$(E) \Leftrightarrow (z+1)[z2+(2-2i)z-(1+2i)] = 0$. Le trinôme $z2+(2-2i)z-(1+2i)$ a pour discriminant: $\Delta' = (2-2i)^2+4(1)(1+2i) = 4$; d'où les racines : $z' = -2+i$ et $z'' = i$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{-1\,;\,-2+i\,;\,i\}$.

2°) a)

Erreur* ! *Signet non défini. = ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = i. Donc
Erreur* ! *Signet non défini. = 1 *et* *arg* ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = ***Erreur* ! *Signet non défini.***.

b) Les deux relations précédentes se traduisent géométriquement par : $AB = AC$ *et* (***Erreur* ! *Signet non défini.***, ***Erreur* ! *Signet non défini.***) = ***Erreur* ! *Signet non défini.***. Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A.

c) D'après a), ***Erreur* ! *Signet non défini.*** = $i \Longrightarrow zB - zA = e^{i\frac{\pi}{2}}(zC - zA) \Longrightarrow zC - zA) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(zB - zA)$. On déduit de cette écriture que la similitude de centre A, de rapport 1, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, transforme B en C. *C'est la rotation de centre A et d'angle* $--\frac{\pi}{2}$.

NOMBRES COMPLEXES

exercices corrigés

Exercice 1:

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	□Faux □ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	□Faux □ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	□Faux □ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	□Faux □ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	□Faux □ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	□Faux □ Vrai
Q3	Soit z un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si	y^2	□Faux □ Vrai
		$-y^2$	□Faux □ Vrai
	z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	$-z^2$	□Faux □ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	□Faux □ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in$ □	□Faux □ Vrai
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	□Faux □ Vrai

Exercice 2:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$, $-i$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe
$$z'=\frac{iz+10-2i}{z-2}.$$
a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer (C').

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z'-i|$ en fonction de z.

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Exercice 3:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm. On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB').

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a+bj^2+cj\right| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, $|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|$. Montrer que $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 4:

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.
2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b. Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

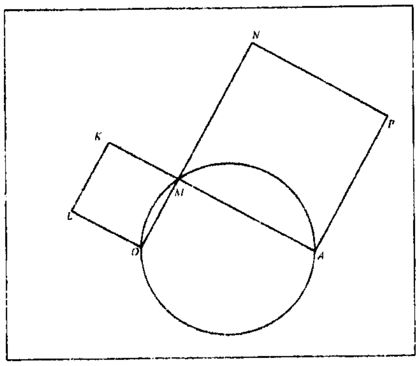
Exercice 5:

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle C et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C, on a $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$.

On admettra que l'on a également $n = (1-i)m + i$ et $k = (1+i)m$.

3. a. Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C.

b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.

4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 6:

Le plan complexe estmuni du repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1)=-2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg $(z'-1)$ et arg $(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p=-2+i\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q=-\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

Montrer que les points A, P et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P du point P par l'application f.

Exercice 7:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit le point A d'affixe $z_A=i$ et B le point d'affixe $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a. Déterminer une écriture complexe de r.

b. Montrer que l'affixe de C est $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

a. Montrer que l'affixe de D est $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. Placer le point D.

b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a. Déterminer une écriture complexe de h.

b. Montrer que l'affixe de E est $z_E=\sqrt{3}$. Placer le point E.

4. a. Calculer le rapport $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 8:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $\overline{z}-3iz-3+6i=0$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4-2i$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit le point D d'affixe $2i$.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que : $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+k\times2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z=2i+2e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}$.

4. A tout point M d'affixe $z\neq-2$, on associe le point M d'affixe z' telle que $z'=\frac{z-1}{\overline{z}+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$.

Exercice 9:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe : $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E=-i$. Déterminer l'affixe du point E image de E par f.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M'=M$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f?

Exercice 10:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a=3+5i$, $b=-4+2i$, $c=1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M d'affixe z' définie par $z'=(2-2i)z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a. Déterminer l'affixe du point B, image du point B par f.

b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z=x+iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M l'image de M par f.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y=2$.

4. On considère l'équation (E) : $x+3y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\ ;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\ ;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

Exercice 11:

a. On considère le nombre complexe $z=1-i\sqrt{3}$.

Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans C l'équation $z^3+8=0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle). En déduire les solutions dans C de l'équation $(iz-1)^3+8=0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 12:

On donne le nombre complexe $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimer z^2 sous forme algébrique

b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.

c. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 13:

On considère le polynôme P défini par :
$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z\in$ C, on ait $P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$.

2. Résoudre dans ℂ l'équation $P(z)=0$.

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=-i\sqrt{3}$, $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 14:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=4\sqrt{3}-4i$ et $b=4\sqrt{3}+4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O;-1)$, $(D;+1)$, $(B;+1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g=4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice 15:

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par
$$P(z)=z^3+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}.$$

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

c. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A=-7+5i$; $z_B=-7-5i$ et $z_I=i\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

c. Placer le point C d'affixe $z_C=1+i$.
Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.

d. Placer le point D d'affixe $z_D=1+11i$.
Calculer $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 16:

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=-\sqrt{3}+i$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}$.
Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle. Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm².

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.

2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A', B' et C' images par f de A, B et C?

3. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm² ?

Exercice 17:

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z: $z^2-2z+4=0$.
On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre. Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Montrer que les droites AB et AC sont perpendiculaires.

Exercice 18:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=1+i\sqrt{3}$ et $z_C=1-i\sqrt{3}$.

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
b. Placer les points A, B, et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
3. Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1. a. Résoudre dans C l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.
b. En déduire les points associés aux points B et C.
c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
2. a. Question de cours
Prérequis : le module d'un nombre complexe, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :
* pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$;
* pour tous nombres complexes z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.
c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Δ, où Δ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Exercice 19:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1+3i$ et $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.
Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distincte de z_A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.
1. Factoriser $z^2 - 3iz - 2$ en remarquant que $z = i$ en est une solution, puis résoudre l'équation
$$(E) : z^2 - 3iz - 2 = 0$$
2. Déterminer les affixes des points invariants par f. (*Un point est invariant lorsque $z = z'$*)
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O de rayon 1.
4. En posant $z = x + iy$, déterminer $\mathrm{Im}(z')$ en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5. a. Montrer que pour tout z différent de $-1+3i$ on a l'équivalence suivante :
$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)(\overline{z-z_C}) = \frac{5}{2}.$$
b. En déduire l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure (*on peut répondre à la question b en admettant le résultat de la question a*).

Exercice 20:

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

Exercice 21:

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i. Une transformation f associe à tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z^2}{i-z}$.
1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2. Etant donné un complexe z distinct de i, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.
a. Montrer que $x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.
b. En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs.
Dessiner l'ensemble E.
3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble F.

Exercice 22:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.
a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.
b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.
4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f?
(*La fonction f est appelée fonction de Joukowski et est utilisée en aéronautique pour étudier des profils d'aile*).

Exercice 23:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1-i$ et $c = 1+i$.
1. a. Mettre les affixes des points A, B et C sous forme trigonométrique. Les placer sur la figure.
b. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. a. On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe du point D image de C par r.
b. Soit (Γ) le cercle de diamètre $[BC]$.
Déterminer et construire l'image (Γ') du cercle (Γ) par la rotation r.

3. Soit M un point de (Γ) d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$ tel que $z=1+e^{i\theta}$.

b. Exprimer z' en fonction de θ.

c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d. Placer sur la figure le point M d'affixe $z=1+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image par la rotation r.

Exercice 24:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm. On pose $z_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier n, on pose $u_n=|z_n|$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Etablir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$. En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b. Pour tout entier naturel n, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$. On a ainsi $l_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_{n-1}A_n$.

Exprimer l_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (l_n) ?

Exercice 25:

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère trois points distincts A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

a. Interpréter géométriquement l'argument du quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$.

b. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

2. Placer sur une figure (unité graphique : 1 cm) les points A_1, B_1 et C_1 d'affixes respectives

$$a_1=2,\quad b_1=i\sqrt{3},\quad c_1=-4+3i\sqrt{3}.$$

Montrer, à l'aide de la propriété précédente, que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

3. On considère les points A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 tels que les quadrilatères $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$ soient des carrés directs.

a. Tracer les carrés $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.

b. Donner les affixes a_3 et b_3 des points A_3 et B_3 puis les affixes a_2 et b_2 des points A_2 et B_2.

c. À l'aide de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, calculer l'affixe c_3 de C_3 à l'aide de c_1.

d. En déduire que les points A_3, B_3 et C_3 sont alignés.

4. a. Déterminer le réel a tel que le barycentre du système $\{(O, a), (C_1, 1), (C_3, 1)\}$ soit C_2.

(Rappel : le barycentre G du système (A, α), (B, β),... est tel que $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+...=\vec{0}$)

b. Calculer l'affixe c_2 de C_2.

c. Montrer que les points A_2, B_2, C_2 sont alignés.

CORRECTION

Exercice 1:

Q 1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	Vrai : cours.
		Faux : bof...
		Vrai : cours.
Q 2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	Faux : $\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x$.
		Vrai : on a $\sin\theta=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=y$.
		Faux : $\dfrac{z-\bar{z}}{2}=\dfrac{1}{2}(x+iy-x+iy)=iy$.
Q 3	Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	Vrai : $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=\lvert i\rvert^2\lvert y\rvert^2=y^2$.
		Faux : $\lvert i\rvert^2=1\neq i^2=-1$.
		Vrai : comme z est imaginaire pur, on a $\lvert z\rvert^2=\lvert iy\rvert^2=y^2$ et $-z^2=-(iy)^2=y^2$.
Q 4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	Vrai : d'un côté on a $\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{\lvert b-c\rvert}{\lvert c-a\rvert}=\lvert i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}\Rightarrow BA=AC\sqrt{3}$; par ailleurs le triangle ABC est rectangle en A d'où $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 4AC^2=BC^2$.
		Faux : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\dfrac{c-a}{b-a}=\arg\dfrac{1}{i\sqrt{3}}=\arg\dfrac{-i}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\pi}{2}$
		Vrai : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(CA)\perp(AB)$.

Exercice 2:

I. 1. $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i-8+17i=0$.

2. Développement puis identification donnent

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$.

3. $z^2-8z+17=0$ a pour racines $4+i$ et $4-i$.

II. 1. Voir plus loin.

2. $R_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}: A \to S \Leftrightarrow s-\omega=i(a-\omega) \Leftrightarrow s=i(4+i-2)+2=1+2i$.

3. Il est assez évident sur la figure que (C) a pour centre Ω et pour rayon $OA=|2+i|=\sqrt{5}$. On vérifie aisément que

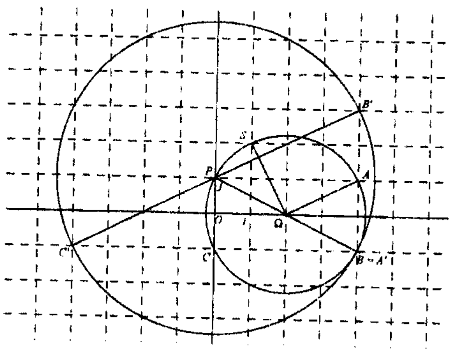
$\Omega B=\Omega C=\Omega S=\sqrt{5}$.

4. a. $z_{A'}=\dfrac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}=\dfrac{9+2i}{2+i}=\dfrac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{20-5i}{5}=4-i$

$z_{B'}=\dfrac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2}=\dfrac{11+2i}{2-i}=\dfrac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{20+15i}{5}=4+3i$

$z_{C'}=\dfrac{i(i)+10-2i}{i-2}=\dfrac{9-2i}{-2+i}=\dfrac{(9-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\dfrac{-20-5i}{5}=-4-i$

b. Il est immédiat que $PA'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}=PB'=PC'$.



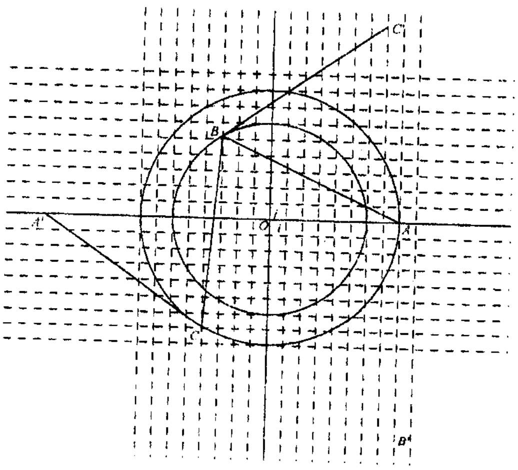
c. $|z'-i|=\left|\dfrac{iz+10-2i}{z-2}-i\right|=\left|\dfrac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right|=\left|\dfrac{10}{z-2}\right|=\dfrac{10}{|z-2|}$

d. M un point d'affixe z appartenant au cercle (C) est tel que

$|z-2|=\sqrt{5}$ d'où $|z'-i|=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$.

e. Donc si M appartient au cercle (C), M appartiendra au cercle de centre le point P d'affixe i, de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercice 3:



2. a. Notons au préalable que $b=6j=6e^{i\frac{2\pi}{3}}=6\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

et $c=8j^2=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}=8\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$a'-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)\Leftrightarrow a'=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\left(6e^{i\frac{2\pi}{3}}-8e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}+6e^{i\pi}-8e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$=8\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-6-8\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4-4i\sqrt{3}-6-4+4i\sqrt{3}=-14.$

b.

$b'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)\Leftrightarrow b'=8+e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8e^{-i\frac{2\pi}{3}}-8\right)=8+8e^{-i\frac{\pi}{3}}-8e^{i\frac{\pi}{3}}=8+4-4i\sqrt{3}-4-4i\sqrt{3}=8-8i\sqrt{3}=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$

.

On a alors $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)=\arg\dfrac{b'}{b}=\arg b'-\arg b=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}=-\pi$

donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et O est sur (BB').

c. A et A' sont sur (Ox) ; B, O et B' sont alignés, il suffit de montrer que C, O et C' sont alignés :

$c'=7+7i\sqrt{3}=14\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=14e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où

$\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}\right)=\arg\dfrac{c'}{c}=\arg c'-\arg c=\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\pi$, ok.

3. a. $OA+OB+OC=|a|+|b|+|c|=8+6+8=22$.

b. $j^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=1$,

$1+j+j^2=1-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$.

c.

$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj-z-zj^2-zj\right|=\left|a+bj^2+cj-(1+j+j^2)z\right|=22$

.

d. Utilisons $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$ avec $(a-z)$, $(b-z)j^2$ et $(c-z)j$:

$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|\le|a-z|+|b-z||j^2|+|c-z||j|=|a-z|+|b-z|+|c-z|=AM+BM+CM$

comme $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$,

cette valeur est le minimum de $MA+MB+MC$ et il est obtenu lorsque $z=0$, soit lorsque M est en O.

Exercice 4:

1. Avec $a=z$ et $b=2$ on a : $z^3-2^3=(z-2)(z^2+2z+4)$;

$\Delta=4-16=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ d'où les solutions $z_0=2$,

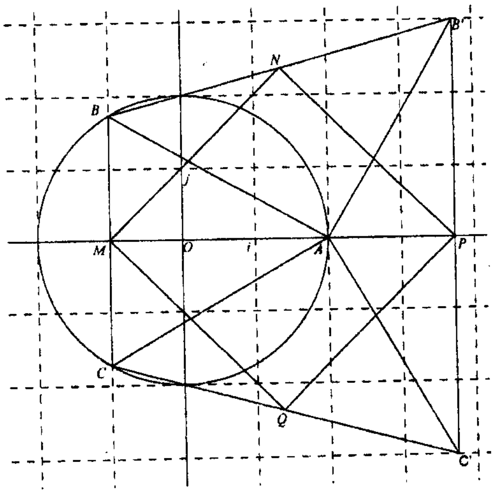
$z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

2. a. $a=2$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

b. $b'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)\Leftrightarrow b'=2-i\left(-1+i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}+3i$.

c. $c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)\Leftrightarrow c'=2+i\left(-1-i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}-3i$.

Qui est bien le conjugué de b'.



3. a. $n=\frac{b+b'}{2}=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)\right)$

et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i3\right)$. C'est pareil.

$n=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}c\Leftrightarrow\overline{ON}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\overline{OC}$, les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

b. M a pour affixe $\frac{b+c}{2}=-1$, q est le milieu de $[CC']$ et a pour affixe le conjugué de n (puisque c et c' sont les conjugués respectifs de b et b'), soit $q=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$. On a alors

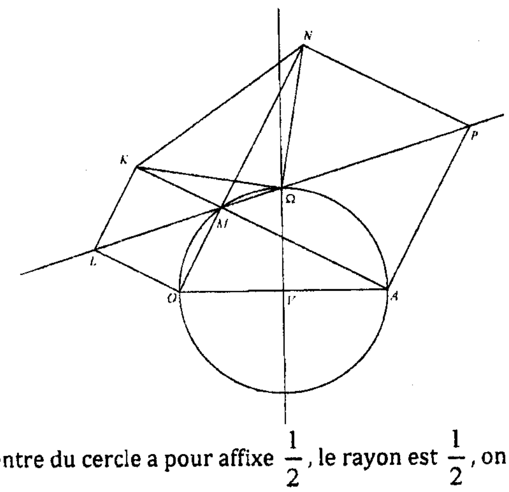
$n+1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ et

$i(q+1)=i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)+i=\frac{\sqrt{3}+3}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ d'où $n+1=i(q+1)$.

Le triangle MNQ est un triangle rectangle isocèle car le vecteur $\overline{MQ}$ a pour image le vecteur $\overline{MN}$ par la rotation r.

c. Comme Q est le symétrique de N par rapport à (Ox) et que M et P sont sur (Ox), les triangles MNP et MQP sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.

Exercice 5:



1. Le centre du cercle a pour affixe $\frac{1}{2}$, le rayon est $\frac{1}{2}$, on a donc $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2. L est l'image de M par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a donc $l=im$; de même P est l'image de M par la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a donc $p-1=e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-1)\Leftrightarrow p=-i(m-1)+1=-im+i+1$.

De la même manière on a $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3. a. Ω a pour affixe $\frac{p+l}{2}=\frac{-im+1+i+im}{2}=\frac{1+i}{2}$; comme m n'apparaît plus, Ω ne dépend pas de M.

b. On a évidemment $\left|\frac{1+i}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ donc Ω appartient au cercle C. Ω est à l'intersection de C et de la médiatrice de $[OA]$.

4. a. La symétrie de la figure par rapport à la droite (LMP) montre que $KN=OA=1$. Par le calcul on a

$KN=|n-k|=|(1-i)m+i-(1+i)m|=|i-2mi|=|2i|\left|\frac{1}{2}-m\right|=2.\frac{1}{2}=1$

.Il est inutile de faire le calcul...

b. Pour la même raison de symétrie, ΩNK est l'image de ΩOA et est donc isocèle rectangle.Ce coup-ci on ne fait pas le calcul...

5. Puisque ΩNK est isocèle rectangle, son côté est $\frac{1}{\sqrt{2}}KN=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\Omega N=\frac{\sqrt{2}}{2}$, N parcourt un cercle de centre Ω de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6:

1. $M=f(M)$, soit

$z=\frac{z-1}{z+1}\Leftrightarrow z^2+z=z-1\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=\pm i$.

2. a. $(z'-1)(z+1)=\left(\frac{z-1}{z+1}-1\right)(z+1)=\frac{\cancel{z}-1-\cancel{z}-1}{z+1}(z+1)=-2$.

b. En passant la relation précédente au module, on a :

$|z'-1||z+1|=|-2|\Leftrightarrow|z'-1|=\frac{2}{|z+1|}$; de même en passant à l'argument :

$\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\arg(-2)=\pi\Leftrightarrow\arg(z'-1)=\pi-\arg(z+1)$

Ceci se traduit par : $AM'=\frac{2}{BM}$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\pi-\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)$.

3. Si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors $BM=2$ d'où $AM'=\frac{2}{2}=1$ donc M appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. a. $p+1=-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. On a évidemment $|p+1|=2$ donc P appartient au cercle (C).

c. $q=-\bar{p}=-\left(-2-i\sqrt{3}\right)=2+i\sqrt{3}\Rightarrow q+1=3+i\sqrt{3}$; par ailleurs $\left(\vec{u};\overrightarrow{AP'}\right)=\pi-\left(\vec{u};\overrightarrow{BP}\right)=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ et $AP'=\frac{2}{2}=1$; donc

$p'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow p'+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(q+1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$.

d. La question est un peu débile puisqu'on a l'affixe de p' (peut-être une autre méthode était-elle attendue au 4. c. ?).

Exercice 7:

1. a. $z_A=i$; $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. $r:z\rightarrow z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

b. $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

d. Figure ci-dessous.

2. a.

$$z_D = \frac{1}{2-1+2}(2z_A - z_B + 2z_C) = \frac{1}{3}\left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b. Tous ces points sont sur le cercle trigonométrique car leur module est 1.

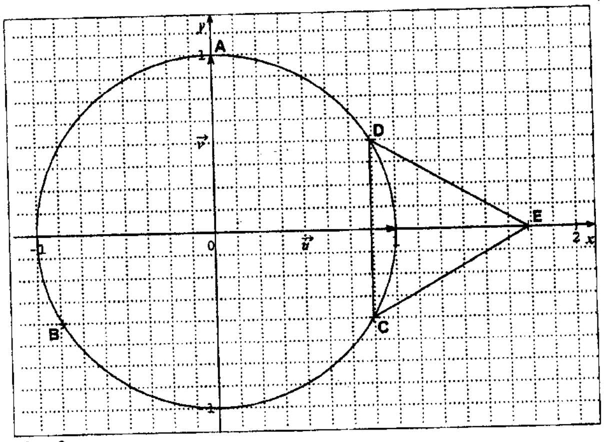
3. a. $h : z \to z' / z' - i = 2(z - i) \Leftrightarrow z' = 2z - i$.

b. $z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$.

4. a.

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b. Le triangle *CDE* est équilatéral : $CD = CE$ et $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3}$.



Exercice 8:

1.

$$\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-y - 3x + 6) = 0$$

, soit $\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y + 3 \\ 8y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{8}, x = \frac{-9 + 24}{8} = \frac{15}{8}$

et $z = \frac{15}{8} + i\frac{3}{8}$.

2. *OAB* est un triangle équilatéral de sens direct si A a pour image B par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$r : z \to z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}}(4 - 2i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 2i) = 2 + \sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3} - 1\right).$$

3. a. $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\vec{u} ; \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; il s'agit de la demi-droite faisant un angle de 45° avec l'horizontale, passant par *D* et orientée vers la droite.

b. $z = 2i + 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z - 2i| = 2$: il s'agit du cercle de rayon 2 et de centre *D*.

4. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |\bar{z} + 2| = |\overline{z + 2}| = |z + 2|$ car le module du conjugué est le même que celui de l'original. Il s'agit du cercle de diamètre *IJ* où *I* a pour affixe 1 et *J* a pour affixe -2 privé des points *I* et *J*.

Exercice 9:

$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. $z'_E = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = 0$.

2. $z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$.

3. a.

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1} = \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2} = \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2.$$

b. $\frac{M'B}{M'A} = \frac{|1 - z'|}{|-1 - z'|} = \left|\frac{z' - 1}{z' + 1}\right| = \left|\frac{z + 1}{z - 1}\right|^2 = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \arg\left(\frac{z' + 1}{z' - 1}\right) = 2\arg\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. *M* est un point de Δ :

$MA = MB \Rightarrow \frac{M'B}{M'A} = 1^2 = 1 \Leftrightarrow M'B = M'A$; *M'* est un point de Δ.

5. a. *M* appartient à Γ :

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi$ donc *M'* appartient à (*AB*).

b. Si *M* a pour affixe *Z*, où est *M*?

$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^2 - 2Zz + 1 = 0$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par *f*, qu'ils soient sur [*AB*] ou non.

Exercice 10:

1. $z' = (2 - 2i)z + 1$: similitude directe $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc rapport $2\sqrt{2}$, angle $-\frac{\pi}{4}$. Le centre est tel que

$\omega = (2 - 2i)\omega + 1 \Leftrightarrow \omega(-1 + 2i) = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{-1 - 2i}{5}$.

2. a. $b' = f(b) = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -8 + 8i + 4i + 4 + 1 = -3 + 12i$.

b. $\frac{b' - c}{a - c} = \frac{-3 + 12i - 1 - 4i}{3 + 5i - 1 - 4i} = \frac{-4 + 8i}{2 + i} = \frac{(-4 + 8i)(2 - i)}{5} = \frac{20i}{5} = 4i$

donc $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}\right) = \arg(4i) = \frac{\pi}{2}$.

3. $\overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(x' - 1) + y' - 4 = 2x' + y' - 6$.

Par ailleurs

$z' = (2 - 2i)z + 1 \Leftrightarrow x' + iy' = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2y + 1 + i(-2x + 2y)$

On remplace et on annule :

$2(2x + 2y + 1) - 2x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2$.

4. a. $(-4 ; 2)$ est une solution de (E) : $-4 + 3 \times 2 = 2$.

b.
$$\begin{cases}x+3y=2\\-4+3(2)=2\end{cases}\Rightarrow x+4+3(y-2)=0\Leftrightarrow 1(x+4)=3(2-y)\Rightarrow\begin{cases}x+4=3k\\2-y=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3k-4\\y=2-k\end{cases},k\in$$

c. $\begin{cases}-5\le 3k-4\le 5\\-5\le 2-k\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 3k\le 9\\-7\le -k\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1/3\le k\le 3\\-3\le k\le 7\end{cases}\Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$

d'où les quatre points : $(-4\,;2),(-1\,;1),(2\,;0),(5\,;-1)$.

Exercice 11:

a. $z=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$z^2=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-2-2i\sqrt{3}$, $z^3=8e^{-i\frac{3\pi}{3}}=-8$.

Comme on tourne à chaque fois de 60°, tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 +1 (comme 1, 4, 7, ...) seront sur la droite issue de O et passant par z, enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de O passant par z^2.

1992 est un multiple de 6 (3x332), on a

$z^{1992}=2^{1992}e^{-332i\pi}=2^{1992}$, et

$z^{1994}=2^{1994}e^{-i\frac{2\pi}{3}}=2^{1994}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b. $z^3+8=0$ a comme racine évidente -2 ; on factorise z + 2 : $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$ ce qui donne en développant et identifiant les coefficients : $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

Les autres racines sont alors : $z_1=1+i\sqrt{3}, z_2=1-i\sqrt{3}$.

Pour résoudre $(iz-1)^3+8=0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z=iz-1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z.

$Z=iz-1\Leftrightarrow iz=Z+1\Leftrightarrow z=\dfrac{Z+1}{i}=-iZ-i$ d'où les trois solutions : $z_0=-i(-2)-i=i$, $z_1=-i(1+i\sqrt{3})-i=\sqrt{3}-2i$ et $z_2=-i(1-i\sqrt{3})-i=-\sqrt{3}-2i$.

Exercice 12:

a.
$$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^2(2-\sqrt{2})$$
$$=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}.$$

b. $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

c.
$$z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow|z^2|=|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2,\arg(z^2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow 2\arg(z)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow\arg(z)=-\frac{\pi}{8}[\pi]$$

Sur $[-\pi\,;\pi[$, on aurait soit $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne $z=z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Exercice 13:

1. $P(i\sqrt{3})=9-6(-i3\sqrt{3})-72-i18\sqrt{3}+63=0$,

$P(-i\sqrt{3})=9-6(i3\sqrt{3})-72+i18\sqrt{3}+63=0$.

$P(z)=(z^2+3)(z^2+az+b)=z^4+az^3+(a+3b)z^2+3az+3b$

donc $a=-6$ et $b=21$, soit $P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$.

2. $z^2-6z+21$: $\Delta=36-84=-48=(i4\sqrt{3})^2$,

$z_1=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$.

$P(z)=0$ a pour racines $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ ainsi que z_1 et z_2.

3. Comme A et B d'un côté, C et D de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$, les triangles ABC et ABD ont mêmes cercles circonscrits, ils appartiennent donc au même cercle.

4. E, le symétrique de D par rapport à O a pour affixe $-z_D=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Le triangle BEC est donc équilatéral.

Exercice 14:

1. $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$: $\Delta=64.3-4.64=-64=(8i)^2$ d'où

$z_1=\dfrac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$ ou $z_2=4\sqrt{3}-4i$.

2. a. $a=4\sqrt{3}-4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b=4\sqrt{3}+4i$.

$b=4\sqrt{3}+4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. Il est immédiat que $OA=OB=8$;

$AB=|b-a|=\left|4\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}+4i\right|=|8i|=8$. OAB est équilatéral.

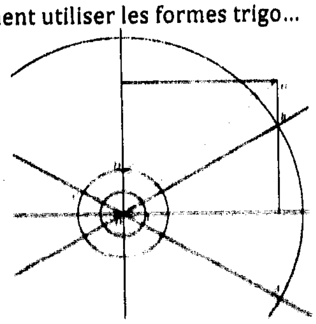
3.
$$r:z\to z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z\Rightarrow d=e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i)=e^{-i\frac{\pi}{3}}2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{6}}=2i$$

(on peut le faire évidemment en utilisant les coordonnées cartésiennes).

4. a. G: barycentre de $(O;-1)$, $(D;+1)$, $(B;+1)$ existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est

$$z_G=\frac{1}{-1+1+1}(-1.z_O+1.z_D+1.z_B)=d+b=2i+4\sqrt{3}+4i=4\sqrt{3}+6i$$

b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo...



c. C, D et G sont alignés : $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $d-c=2i-(-\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i$ et $\overrightarrow{DG}$ a pour affixe $g-d=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i=4(d-c)$ donc $\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{CD}$.

d. Appelons K le milieu de $[BD]$, alors G est le barycentre de $(O;-1)$, $(K;2)$ d'où $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{-1+2}\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OK}$, donc K est le milieu de $[OG]$. Mêmes milieux donc parallélogramme.

Exercice 15:

1. a. iy solution de l'équation $P(z)=0$, soit $P(iy)=0$, soit

$$-iy^3-\left(1-i\sqrt{2}\right)y^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)iy-74i\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left(y^2+\sqrt{2}y\right)+i\left(-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}\right)=0$$

Ceci donne le système $\begin{cases}y^2+\sqrt{2}y=0\\-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}=0\end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y=0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y=-\sqrt{2}$ qui convient.

b. $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+z+74\right)$.

c. $P(z)=0$: $z^2+z+74=0$, $\Delta=1-296=-295=i^2\times5\times59$ d'où les racines $z_1=i\sqrt{2}$, $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{295}}{2}$, $z_3=\dfrac{-1-i\sqrt{295}}{2}$.

2. b. $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i\sqrt{2}=-1+i$.

c. $ABCN$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NC}\Leftrightarrow z_N=z_A-z_B+z_C=7+5i-7+5i+1+i=1+11i$.

d. Calculer

$$Z=\frac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=\frac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i}=\frac{-8+4i}{8+16i}=\frac{(-2+i)(2-4i)}{4+16}=\frac{10i}{20}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

On a donc $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; comme $ABCD$ est un parallélogramme, c'est un losange.

Exercice 16:

Partie A

1.

$$\begin{cases}z_1\sqrt{3}-z_2=-2\\z_1-z_2\sqrt{3}=-2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_1\sqrt{3}-z_2=-2\\-z_1\sqrt{3}+z_2 3=2\sqrt{3}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z_2=-2+2i\sqrt{3}\\z_1\sqrt{3}-z_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_2=-1+i\sqrt{3}\\z_1=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}+i\end{cases}$$

2. $z_A=-\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et

$z_B=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc module 1 et argument $\dfrac{\pi}{6}$.

Le triangle ABO est isocèle en O puisque $|z_A|=|z_B|$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\dfrac{z_B}{z_A}=-\dfrac{\pi}{6}$.

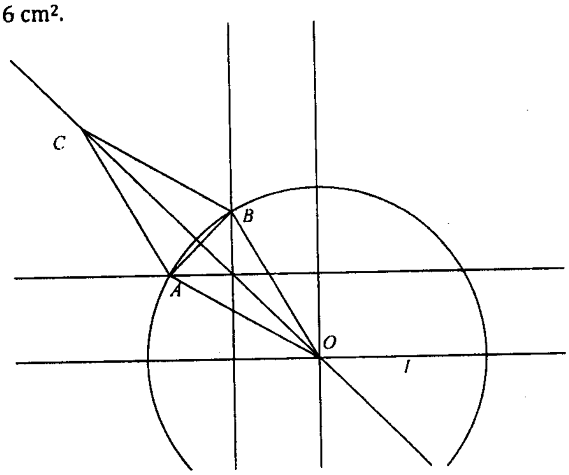
4. On doit avoir $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, soit

$$z_C-z_A=z_B-Z_O\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B=-1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)(-1+i)$$

L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{AB}{2}\times\frac{OC}{2}=\frac{1}{4}|z_B-z_A||z_C-z_O|$$
$$=\frac{1}{4}\left|-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\right|\left|\left(\sqrt{3}+1\right)(-1+i)\right|=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)|1+i|\left(\sqrt{3}+1\right)|-1+i|=\frac{1}{4}\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1,$$

soit 16 cm².



Partie B

1. $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$: rotation de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

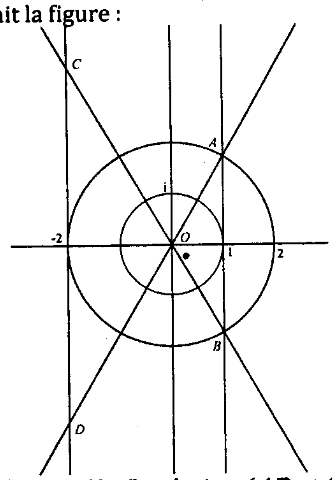
2. $z_{A'}=z_B$, $z_{B'}=2i$, $z_{C'}=\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

3. L'aire du triangle $A'B'C'$ est évidemment la même que celle de ABC...

Exercice 17:

1. $z^2-2z+4=0$: les racines sont $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$, dont le module est 2 et l'argument $\pi/3$ et $-\pi/3$. Pour les carrés on a $z_1^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2+2i\sqrt{3}$ et $z_2^2=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-2-2i\sqrt{3}$.

2. a. Comme on pouvait s'y attendre (enfin, des fois c'est différent...) les résultats du 1. se retrouvent comme affixes des points du 2. On fait la figure :



$ABCD$ est un trapèze isocèle (les droites (AB) et (CD) sont verticales donc parallèles ; les points A et B étant conjugués sont symétriques par rapport à (Ox), même chose pour C et D.

b. Avec les arguments c'est immédiat, sinon on utilise les vecteurs : par ex. $\overrightarrow{OC}=-2+2i\sqrt{3}=-2(1-i\sqrt{3})=-2\overrightarrow{OB}$. La symétrie par rapport à l'axe réel montre que les diagonales se coupent en O.

c. $\overrightarrow{AD} = -2-2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3} = -3-3i\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AC} = -2+2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3} = -3+i\sqrt{3}$. On peut faire le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix} = 9-9=0$. C'est bon.

Exercice 18:

A. 1. a. $z_B = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

A. 2. Quadrilatère $OABC$: il s'agit d'un losange.

A. 3. Δ est la médiatrice de $[OA]$: $|z| = |z-2| \Leftrightarrow OM = AM$.

B. 1. a. $z(z-2)=-4 \Leftrightarrow z^2-2z+4=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1+i\sqrt{3} = z_B \\ z_2 = 1-i\sqrt{3} = z_C \end{cases}$.

B. 1. b. On a donc $B' = B$ et $C' = C$.

B. 1. c. G a pour affixe $\frac{1}{3}(0+z_A+z_B) = \frac{2+1+i\sqrt{3}}{3} = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc G' a pour affixe

$$\frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2} = \frac{-12}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-12(-3-i\sqrt{3})}{9+3} = 3+i\sqrt{3}.$$

B. 2. a. Question de cours

On utilise $|z|^2 = z\overline{z}$ ainsi que les propriétés de $\overline{z}$.

*

$$|z_1 \times z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}\times z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\times|z_2|^2$$

* Comme $z\times\frac{1}{z} = 1$, on a : $\left|z\times\frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow |z|\times\left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

B. 2. b. $|z'-2| = \left|\frac{-4}{z-2}-2\right| = \left|\frac{-4-2z+4}{z-2}\right| = \frac{|-2z|}{|z-2|} = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

B. 2. c. On a $|z| = |z-2|$ et $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$ donc

$|z'-2| = \frac{2|z|}{|z|} = 2$ donc M' appartient au cercle de centre A, de rayon 2.

Exercice 19:

1. On remplace z par i, soit $-1+3-2=0$. Ok. $z = i$ est solution de (E) donc on factorise par $(z-i)$ et on obtient $z^2-3iz-2 = (z-i)(z-2i)$.

2. $M(z)$ est invariant, si et seulement si :

$$z = \frac{z+2}{z+1-3i} \Leftrightarrow z(z+1-3i) = z+2 \Leftrightarrow z^2+z-3iz = z+2 \Leftrightarrow z^2-3iz-2=0 \Leftrightarrow z=i \text{ ou } z=2i$$

Les points $M_1(i)$ et $M_2(2i)$ sont invariants par f.

3. Dire que M' appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1 est équivalent à écrire $|z'| = 1$.

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+2}{z+1-3i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+2| = |z+1-3i| \Leftrightarrow BM = AM$$

car $|z+2| = |z-(-2)| = |z-z_B| = BM$ et $|z+1-3i| = |z-(-1+3i)| = |z-z_A| = AM$.

Cela revient donc à chercher l'ensemble des points M tels que $BM = AM$, ce sont les points équidistants de A et de B, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$.

4.

$$z' = \frac{z+2}{z+1-3i} = \frac{x+iy+2}{x+iy+1-3i} = \frac{x+2+iy}{x+1+i(y-3)} = \frac{(x+2+iy)(x+1-i(y-3))}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$$= \frac{x^2+x-ix(y-3)+2x+2-2i(y-3)+ixy+iy+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$$= \frac{x^2+x+2x+2+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2} + i\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

Soit pour la partie imaginaire :

$$\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2} = \frac{-xy+3x-2y+6+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2} = \frac{3x-y+6}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

M' appartient à l'axe des abscisses, si et seulement si la partie imaginaire de z' est nulle, c'est-à-dire $3x-y+6=0$ (avec $(x;y) \neq (-1;3)$), ou encore M appartient à la droite d'équation $y = 3x+6$ privée du point de coordonnées $(-1;3)$.

5. a. Avant de commencer le calcul, il est impératif de se familiariser avec les valeurs z_C et $\overline{z_C}$.

$$z_C = -\frac{3-3i}{2} = \frac{-3+3i}{2} \text{ et } \overline{z_C} = -\frac{3+3i}{2} = \frac{-3-3i}{2}.$$

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z+2)(\overline{z}+1+3i) = -(\overline{z}+2)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+z(1+3i)+2\overline{z}+2(1+3i) = -z\overline{z}-\overline{z}(1-3i)-2z-2(1-3i)$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z(1+3i+2)+\overline{z}(2+1-3i)+2(1+3i+1-3i)=0$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z(3+3i)+\overline{z}(3-3i)+4=0 \Leftrightarrow z\overline{z}+z\left(\frac{3+3i}{2}\right)+\overline{z}\left(\frac{3-3i}{2}\right)+2=0$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\left(\frac{-3-3i}{2}\right)-\overline{z}\left(\frac{-3+3i}{2}\right)+2=0 \Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\overline{z_C}-\overline{z}\times z_C+2=0$$

Raisonnons avec le deuxième membre de l'équivalence de départ :

$$(z-z_C)(\overline{z-z_C}) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (z-z_C)(\overline{z}-\overline{z_C}) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\overline{z_C}-\overline{z}\times z_C+z_C\times\overline{z_C} = \frac{5}{2}$$

Il ne reste à montrer que $z_C\times\overline{z_C}-\frac{5}{2} = 2$: on peut calculer

$$z_C\times\overline{z_C} = |z_C|^2 = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{2} \text{ d'où}$$

l'égalité : $z_C\times\overline{z_C}-\frac{5}{2} = \frac{9}{2}-\frac{5}{2} = 2$.

b. On remarque que $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$ et donc que

$$\overline{z'} = \overline{\left(\frac{z+2}{z+1-3i}\right)} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z+1-3i}} = \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}.$$

$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i} \Leftrightarrow z' = -\overline{z'} \Leftrightarrow z'+\overline{z'} = 0 \Leftrightarrow x' = 0.$$

En effet, si $z' = x'+iy'$, alors $z'+\overline{z'} = x'+iy'+x'-iy' = 2x'$

L'équivalence devient donc :

z' est un imaginaire pur équivaut à $(z-z_C)(\overline{z-z_C}) = \frac{5}{2}$,

autrement dit

$$z_{\overrightarrow{CM}} \times \overline{z_{\overrightarrow{CM}}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left| z_{\overrightarrow{CM}} \right|^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left| z_{\overrightarrow{CM}} \right| = \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow CM = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

M appartient donc au cercle de centre C de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (privé de A). En effet

$$AC = \left| z_{\overrightarrow{AC}} \right| = \left| z_C - z_A \right| = \left| -\frac{3-3i}{2} + 1 - 3i \right| = \left| \frac{-3+3i+2-6i}{2} \right| = \left| \frac{-1-3i}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Exercice 20:

$$\cos 5x = \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}$$

$$\cos^2 5x = \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x})$$

$$\sin 3x = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}$$

$$\cos^2 5x \sin 3x = \frac{1}{4}(e^{i10x} + 2 + e^{-i10x}) \times \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} = \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i7x} - e^{-i13x})$$

$$= \frac{1}{8i}(e^{i13x} - e^{-i13x} - e^{i7x} + e^{-i7x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x} - e^{-i13x}}{2i} - \frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i} + 2\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 13x - \sin 7x + 2\sin 3x)$$

Exercice 21:

1. Soit $\Omega(\omega)$ un éventuel point invariant, on aurait :

$$\omega = \frac{\omega^2}{i-\omega} \Leftrightarrow \omega(i-\omega) = \omega^2 \Leftrightarrow (\omega = 0) \text{ ou } (i - \omega = \omega) \Leftrightarrow (\omega = 0) \text{ ou } \left(\omega = \frac{i}{2}\right)$$

.

2. a. On calcule...

$$z' = \frac{z^2}{i-z} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{(x+iy)^2}{i-(x+iy)} = \frac{x^2 + 2ixy - y^2}{-x + i(1-y)} = \frac{(x^2 + 2ixy - y^2)(-x - i(1-y))}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{-x^3 - 2ix^2y + xy^2 - ix^2(1-y) + 2xy(1-y) + iy^2(1-y)}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{-x(x^2 - y^2 - 2y + 2y^2)}{x^2 + (1-y)^2} + i\frac{-2x^2y - x^2(1-y) + y^2(1-y)}{x^2 + (1-y)^2}$$

Par identification, on obtient la réponse demandée.

b. L'ensemble des points dont l'image est sur l'axe des imaginaires purs ont leur abscisse x' nulle, c'est à dire

$$x' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2} = 0 \Leftrightarrow (x=0) \text{ ou } (x^2+y^2-2y=0) \Leftrightarrow (x=0) \text{ ou } (x^2+(y-1)^2=1)$$

L'ensemble des points M est donc l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ (sauf A) ainsi que les points du cercle de centre A de rayon 1.

3. $OM = |z_M - z_O| = |z|$, $AM = |z_M - z_A| = |z - i|$,

$OM' = |z_{M'} - z_O| = |z'|$.

On a $z' = \frac{z^2}{i-z}$, cette égalité reste vraie pour les modules :

$$|z'| = \left| \frac{z^2}{i-z} \right| = \frac{|z^2|}{|i-z|} = \frac{|z|^2}{|i-z|} \Leftrightarrow OM' = \frac{OM^2}{AM} \Leftrightarrow OM^2 = OM' \times AM$$

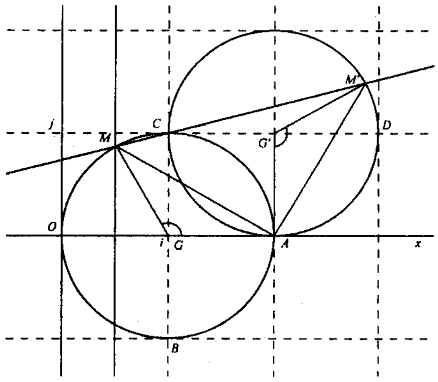
.

Si les points M et M' sont sur le même cercle de centre O, alors les longueurs OM et OM' sont égales.

Soit à résoudre l'équation :

$$OM^2 = OM' \times AM \Leftrightarrow OM^2 = OM \times AM \Leftrightarrow (OM = 0) \text{ ou } (OM = AM)$$

, c'est-à-dire si $M = O$ ou M est sur la médiatrice de $[OA]$. On constate que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}i\right)$ appartient bien à F.



Exercice 22:

1. $z'_E = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = 0$.

2. $z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$.

3. a. $$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1} = \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

b. $$\frac{M'B}{M'A} = \frac{|1 - z'|}{|-1 - z'|} = \left| \frac{z'-1}{z'+1} \right| = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 = \left(\frac{MB}{MA} \right)^2.$$

$$\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) = 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right).$$

4. M est un point de Δ : $MA = MB \Rightarrow \frac{M'B}{M'A} = 1^2 = 1 \Leftrightarrow M'B = M'A$; M' est un point de Δ.

5. a. M appartient à Γ :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \pm 2\frac{\pi}{2} = \pm\pi$$ donc M' appartient à (AB).

b. Si M' a pour affixe Z, où est M?

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^2 - 2Zz + 1 = 0$$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par f, qu'ils soient sur $[AB]$ ou non.

Exercice 23:

1. a. $a = 2 = 2e^{i2\pi}$, $b = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $c = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i-2}{1-i-2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i.$$

On a $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |-i| = 1 \Rightarrow AC = AB$ et

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. a. Comme $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$, l'angle de r est $-\frac{\pi}{2}$.

On applique la formule de la rotation :

$$z_D - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_C - z_A\right) \Leftrightarrow z_D = -i\left(1+i-2\right)+2 = 3+i.$$

b. Comme une rotation conserve les distances, le cercle (Γ) a pour image le cercle de diamètre $\left[r(B)r(C)\right] = [CD]$.

3. a. Le centre G de (Γ) est le point d'affixe 1 ; son rayon est 1.

On a donc pour M :

$$GM = 1 \Leftrightarrow |z-1| = 1 \Leftrightarrow z-1 = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = 1+e^{i\theta}$$

où θ est l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{GM}\right)$. θ varie de 0 à 2π mais ne prend pas la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour que M soit différent de C.

b. Comme on a $z'-2 = -i(z-2)$, cela donne :

$$z'-2 = -i\left(1+e^{i\theta}-2\right) \Leftrightarrow z' = -ie^{i\theta}+2+i.$$

c.

$$\frac{z'-c}{z-c} = \frac{-ie^{i\theta}+2+i-1-i}{1+e^{i\theta}-1-i} = \frac{1-ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-i} = \frac{\left(1-ie^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}+i\right)}{\left(e^{i\theta}-i\right)\left(e^{-i\theta}+i\right)} = \frac{e^{-i\theta}-i+i+e^{i\theta}}{1-ie^{-i\theta}+ie^{i\theta}+1} = \frac{2\cos\theta}{2+2\sin\theta}$$

qui est bien réel.

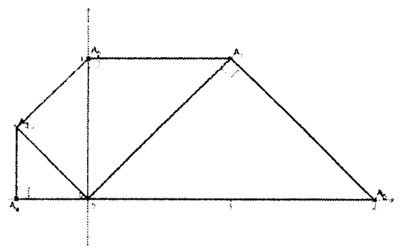
On a alors $\left(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CM'}\right) = 0[\pi]$ donc les points C, M et M sont alignés.

d. Pour placer le point M il suffit de prendre la médiatrice de $[OG]$ qui coupe (Γ) au point M d'affixe $z = 1+e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On construit son image M par la rotation r en traçant (CM) qui coupe (Γ') en M.

Exercice 24:

1. $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0 = \frac{1+i}{2}\times 2 = 1+i$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1 = i$;

$z_3 = \frac{1+i}{2}z_2 = \frac{-1+i}{2}$; $z_4 = \frac{1+i}{2}z_3 = -\frac{1}{2}$ donc z_4 est bien un nombre réel.



2. Pour tout entier n, $u_n = |z_n|$ donc

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{1+1}}{2}|z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n.$$

Ainsi, (u_n) est bien une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $u_n = u_0q^n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. A_n appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si

$$|z_n| \le 0{,}12 \Leftrightarrow u_n \le 0{,}1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le 0{,}05 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le \ln 0{,}05 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 0{,}05}{\ln 1/\sqrt{2}} \approx 8{,}6 \Rightarrow n_0 = 9$$

A partir du rang 9, tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

4. a. $$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}z_n - z_n}{\frac{1+i}{2}z_n} = \frac{\frac{1+i-2}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{-1+i}{i(-i+1)} = \frac{1}{-i} = i.$$

On en déduit que $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = |i| = 1$, or $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = \frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$

donc $\frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O} = 1 \Leftrightarrow A_{n+1}A_n = A_{n+1}O$ donc OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}. $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ or

$\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z}\right) = \left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)$ donc

$\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$: OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Conclusion OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en A_{n+1}.

b. Dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle et isocèle en A_{n+1}, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$2A_{n+1}A_n^{\,2} = OA_n^{\,2} \Leftrightarrow A_{n+1}A_n = \frac{OA_n}{\sqrt{2}} =$$

$\frac{u_n}{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$. Ainsi, $A_0A_1 = \sqrt{2}$, $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(l_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$l_n = \sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ car si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n = 0$ donc $l_n =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}-2$.

Exercice 25:

1. A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

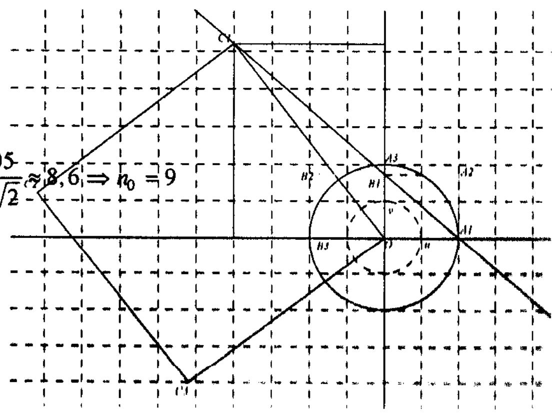
a. $\arg\frac{c-a}{b-a} = \arg(c-a)-\arg(b-a) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

b. A, B et C sont alignés :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0(\pi) \Leftrightarrow \arg\frac{c-a}{b-a} = 0(\pi) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

2. On calcule : $\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1} = \frac{-4+3i\sqrt{3}-2}{i\sqrt{3}-2} = \frac{-6+3i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}-2} = 3$ donc les points sont alignés.

3. a. $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.



b. $a_3 = 2 \Rightarrow a_2 = 2+2i$; $b_3 = -\sqrt{3} \Rightarrow b_2 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

c. $c_3 - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(c_1 - 0) \Leftrightarrow c_3 = ic_1 = i(-4 + i3\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} - 4i$;
on a alors
$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_3} \Leftrightarrow c_2 = c_1 + c_3 = -4 + i3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 4i = -4 - 3\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} - 4)$

d. On peut reprendre le calcul du début ou simplement dire que A_3, B_3 et C_3 sont les images de A_1, B_1 et C_1 par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$; comme ces points sont alignés leurs images le sont également.

4. a. On cherche a pour que $a\overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_3C_2} = \vec{0}$, or
$\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OC_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_2C_3} = \overrightarrow{OC_2} \Leftrightarrow -\overrightarrow{C_2O} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_2C_3} = \vec{0}$
Conclusion $a = -1$.

b. Déjà fait...

c. A_2, B_2, C_2 sont alignés : même calcul.

NOMBRES COMPLEXES
exercices non corrigés

Exercice 1 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1+i)(1-2i)$; $z_2 = (2i+1)(1+i)^2(3i-4)$; $z_3 = (5+4i)(3+7i)(2-3i)$
2. $z_1 = \dfrac{1+5i}{(3+6i)(1+2i)^3}$; $z_2 = (2-3i)(3i)$
3. $z_1 = \dfrac{1-i}{i}$; $z_2 = \dfrac{3-4i}{7+5i}$; $z_3 = \dfrac{1+2i}{1+i\sqrt{3}}$
4. $z_1 = (1+i)^{1993}$; $z_2 = (1+i)^8$; $z_3 = \left(\dfrac{2-i}{3+i}\right)^3$
5. $z_1 = (1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$; $z_2 = (\sqrt{2}+i)^4 - (2\sqrt{2}+3i)^2$

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants

a) $\begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - 3z' = i \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$; c) $\begin{cases} z - 2iz' = 5i \\ 2z - (1+i)z' = -2 + 6i \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1+i)z + (1-i)z' = 2 + i \\ 3z - 2iz' = 4 - i \end{cases}$

Exercice 3:

Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. Vérifier $j^3 - 1 = 0$, et déduisez-en $1 + j + j^2 = 0$. Prouver que $j^2 = \bar{j}$
2. Soit x, y et z des réels calculer
$(x + y + z)(x + yj + zj^2)(x + yj^2 + zj)$

Exercice 4:

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ le point d'affixe i. Soit l'application du plan dans lui même $F : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que : $z' = \dfrac{z^2}{i - z}$

1. Déterminer les points M tels que M=M'
2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x , y ;x' et y' sont des réels . Montrer que $x' = -\dfrac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$. En déduire l'ensemble des points M dont l'image M' est sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner le .
3. Trouver une relation simple entre OM ; AM et OM'. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un cercle de centre de centre O. Construire cet ensemble.
4. Dans cette partie on considère un point M situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. Soit G l'iso barycentre des points A ; M et M'.
   a) Calculer l'affixe z_g de G en fonction de z
   b) Monter que G est situé sur un cercle de centre O dont vous donnerez le rayon.
   c) Comparer les angles $(\vec{u};\overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ en déduire une construction de M

Exercice 5:

On pose $Z' = \dfrac{iz - 1}{2z - 4}$ où z est un complexe. Dans un ROND(o, u, v), unité 2cm , on considère les points M(z), M'(Z'), A(2) et B(-i)

1. Donner l'écriture algébrique de Z' en posant : $z = x + iy$ avec x et y réels.
2. En utilisant (1) déterminer puis construire l'ensemble des points M(z) tels que :
   a) Z' soit réel strictement positif.
   b) Z' soit imaginaire pure avec Im(Z')>0.
3. a) Exprimer OM' en fonction de MA et MB en déduire que si M' est sur le cercle de centre O et de rayon $1/2$, M appartient alors à une droite à préciser
   b) l'ensemble des points M(z) tel que $|Z'| = 1$.
4. a) Montrer que $(z' - \frac{1}{2}i)(z - 2) = -\frac{1}{2} + i$. On note C le point d'affixe $\frac{1}{2}i$.
   b) Donner une relation entre M'C et MA en déduire que si M' est sur le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{5}$, M appartient alors à un cercle à préciser

Exercice 7:

Soit A(-2), B(-1 + i).. A tout point M(z), $z \neq 2$ on associe le point M'(Z') avec $Z' = \dfrac{iz + i + 1}{z + 2}$.

1. Interpréter géométriquement le module et un argument de Z'.
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M(z) tels que $|Z'| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble (F) des points M(z) tels que : $\arg(Z') = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.

Caractériser analytiquement les ensembles (E) et (F) .

Exercice 8:

Le plan est muni du ROND (o, u, v) (unité: 3cm). Soient les points A(1), M(z) et M'(z') et la fonction : $f(z)=z'=\frac{z^2}{1-z}$

1) Déterminer les points invariants par f.
2) Soient: $z = x + iy$ et $z' = x + iy$ avec x, y, x' et y' réels
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y
b) En déduire l'ensemble des pts M(z) tels que $M'(z')\in(oy)$.
3) a) trouver une relation entre les longueurs OM, AM et AM'
c) En déduire l'ensemble F des points M(z) du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O.
4) Soient M(z) un point du cercle de centre A et de rayon 1/2 et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
a) calculer l'affixe de G en fonction de z
b) Démontrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Exercice 9:

Le plan et muni du ROND (O, u, v). On considère les points: A(2i), B (-i), C(5i), D(i/2), M(z), M'(z'), et la fonction :

$f(z) = z' = \frac{4iz+2}{5i-z}$ pour tout complexe z

1) Montrer que si $M\in(Oy)$ alors $M'\in(Oy)$.
2) Interpréter géométriquement $|z|$. En déduire que si M' sur le cercle de centre O et rayon 4 alors M appartient à une droite à préciser.

3) a) Pour $z\neq i$, montrer que $\frac{z'-2i}{z'+i}=2\frac{z-2i}{z+i}$

b) En déduire que si M, appartient à la médiatrice de [AB] alors M' appartient à un cercle à préciser.

4)a) montrer que pour $z\neq 5i$, on a $(z'+4i)(z-5i)=18$

b) En déduire l'image du cercle de centre C et de rayon 9 et de la demi-droite des points M tel que $(\vec{u},\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

Exercice 10:

On pose $Z=\frac{2z-i}{z-2i}$.

1.
a. Résoudre l'équation Z=z. Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
b. Calculer $z_1^4+z_2^4$
2. On considère dans le plan complexe le point M d'affixe z. Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ).

Exercice 11:

Soit une fonction de C dans C définie par $f(z)=2(1+i\sqrt{3})z+4\sqrt{3}-2i$

1. Montrer que f admet qu'un seul point invariant.
2. On note par Ω le point du plan complexe d'affixe z_0 tel que $f(z_0)=z_0$

Soit $f(z)=z'$ .Montrer que $z'-z_0=(2+2i\sqrt{3})(z-z_0)$

a) En déduire $\frac{M'\Omega}{M\Omega}$

Soit $F:P\to P$ définie $F:M(z)\mapsto M'(z')\Leftrightarrow z'=f(z)$. Montrer que l'image d'un cercle par F est un cercle.

Exercice 12:

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

1. $z_1=1-i\sqrt{3}$; $z_2=-1+i$; $z_3=-2$
2. $z_1=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$; $z_2=\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$; $z_3=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$; $z_4=\frac{2}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$
3. $z_1=\frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$; $z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; $z_3=-2(1+i)^6$
4. $z_1=1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}$; $z_2=(-1+i)^3e^{\frac{3i\pi}{4}}$
5. $z_1=(1-i\sqrt{3})$; $z_2=(-\sqrt{3}+i)$; $z_3=(-1-i)$
6. $z_2=1+i\tan\alpha$
7. $z_1=\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$; $z_2=1+e^{i\theta}$; $z_3=e^{i\theta}-1$

Exercice 13:

Soit $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$

1. Ecrivez sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$
2. Déduisez en $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$ puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométriques

Exercice 14:

1. Résoudre dans C^2 : $\begin{cases} z_1z_2=\frac{1}{2} \\ z_1+2z_2=\sqrt{3}\end{cases}$. Donner les solutions sous forme trigonométriques.
2. On donne pour n entier $S_1=1+\cos\theta+\cos2\theta+\dots+\cos(n\theta)$ et $S_2=\sin\theta+\sin2\theta+\dots+\sin(n\theta)$.
   a. Montrer que si $\theta\neq 2k\pi$ alors $S=S_1+iS_2=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$ et que $S=e^{in\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.
   b. En déduire les valeurs de S_1 et de S_2.

Exercice 15:

Déterminer les racines nièmes du nombre complexe z_0

a) $z_0=4\sqrt{2}(1+i)$, n=3
b) $z_0=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$, $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, n=3
c) $z_0=-8\sqrt{2}(1+i)$; n=4
d) $z_0=32i$, n=5

Exercice 15:

Résoudre dans C les équations suivantes :

1. a) $z^2 + 2z + 2 = 0$; b) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
2. a) $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$; b) $z^2 - (3+4i)z + 5 + i = 0$
3. a) $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$; b) $iz^2 - (-3+4i)z - 5 + i = 0$
4. a) $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$; b) $(1+i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$
5. $(1-i)z^2 - 2z - 11 + 3i = 0$; b) $z^2 - (5 - i\sqrt{3})z + 6 - 3i\sqrt{3} = 0$
6. $z^2 - 2\bar{z} = 0$

Exercice 16:

On considère l'équation

(E): $z^2 + 2(1-\cos\theta)z + 2(1-\cos\theta) = 0$ (où θ est un paramètre réel de l'intervalle $[0,2\pi]$).

1. Résoudre cette équation, on notera z_1 et z_2 les solutions.
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

Exercice 17:

1. On considère dans C l'équation (E) : $z^4 + (7+24i) = 0$
   a) Vérifier que $z_0 = 2-i$ est solution de (E).
   b) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité et en déduire l'ensemble des racines de (E)
2. Donner la nature de ABCD en justifiant.

Exercice 18:

A) Déterminer l'ensemble des points m d'affixe z pour lesquels on

1. a) $\left|z + \bar{z} - 1\right| = 4$, b) $\left|z - \bar{z} - 1 + i\right| = 9$;

2. a) $|z+5-2i| = |\bar{z}-2+i|$; b) $|z+1-2i| = |3z-9-3i|$;

c) $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 3 = 0$;et d) $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$

B- On considère dans le plan complexe l'application qui à tout point $M(z) \mapsto P(Z_P)$ tel que $Z_P = \dfrac{z+i}{z-i}$

1. En posant $z = x + iy$
   a) déterminer en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de Z_P
   b) en déduire alors une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que
      - Z_P est réel
      - Z_P est imaginaire pur
      - P appartient au cercle de centre $\Omega(1-2i)$ et rayon 2

C- Soit A le point d'affixe 2i et $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{2iz - 5}{z - 2i}$

1. Déterminer les points invariants par f
2. soit (D) l'axe des imaginaire purs privé de A. Montrer que f(D)= (D)
3. Démontrer que $|z-2i| \cdot |z'-2i| = 9$ .En déduire l'image du cercle (C) de centre A et de rayon r (r>0)
4. Déterminer r pour que f(C) = (C)
5. Déterminer l'ensemble des points M (z) tels que :

a) $arg\left(\dfrac{z-1}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; b) $\left|\dfrac{z-1}{z-2i}\right| = 2$

Exercice 19:

Soit $(E): z^2 - (5 - 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$

a) Résoudre dans C l'équation (E)
b) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions

Soit $\theta \in]0;\pi[$ on considère l'équation

(E'): $4(1-\sin\theta)z^2 - 2(1+\cos 2\theta)z + 1 + \sin\theta = 0$

a) Résoudre (E') dans C
b) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions suivant les valeurs de $\theta \in]0;\pi[$

Exercice 20:

On considère l'équation : $z^3 = 18 + 26i$ (*).

1. Montrer que $z_0 = 3 + i$ est racine de l'équation (*).
2. Montrer pour toute solution z de (*) le nombre complexe $Z = \dfrac{z}{z_0}$ est racine cubique de 1.
3. Résoudre $Z^3 = 1$ et en déduire toutes les solutions de (*).

Exercice 21

Soit C l'ensemble des nombres complexes

1. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la somme des racines n[ième] de l'unité est nulle.
2. En utilisant les résultats du 1) montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 22

1. a. Calculer le module et un argument de $\omega = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{4}$.
   b. En déduire ses racines carrées.
1. Résoudre dans C l'équation $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$
2. Soit z_1 la solution imaginaire pure et z_2 l'autre solution. Montrer que $\dfrac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = \omega$.
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit A, B et C les points d'affixes respectives 2i, z_1 et z_2. Préciser la nature du triangle ABC.

Exercice 23:

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

(E) : $z^4 - (2-i)z^3 - 3iz^2 + (4-i)z + 1 + 3i$

1. Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2. Déterminer les autres solutions de (E)
3. Soient A ; B ; C et D les images des solutions de (E)

a. On désigne par z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4 les solutions de (E). Montrer que $\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ est réel

b. Que peut on dire des points A ; B ; C et ?

c. Monter qu'il existe une similitude s et une seule qui transforme A en B et C en D. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 24:

1. Résoudre dans C les équations suivantes
   a) $z^2-2z+5=0$
   b) $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=1+\sqrt{3}+i$, $c=1+\sqrt{3}-i$ et $d=1-2i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b) Vérifier que $\frac{d-b}{a-b}=i\sqrt{3}$, en déduire la nature du triangle ABD.

c) Montrer que A, B, C, D sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

3. On considère l'équation
   (E) : $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$.

a) Résoudre (E)

b) Montrer que les points images des solutions sont sur (C).

Exercice 25:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de 1er terme $u_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de 1er terme $v_0=\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Soit z_n le nombre complexe de module u_n et d'argument v_n.

1. a. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
   b. En déduire z_n fonction de n.
2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de 1er terme $z_0=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

1. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ et M_n le point d'affixe z_n.

a. Déterminer la nature de la transformation qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.

b. Donner ses éléments caractéristiques.

2. Pour tout entier naturel n on pose $Z_n=z_0z_1\dots\dots\dots z_n$

a. Exprimer en fonction de n un argument de Z_n.

b. Démontrer que si n est impair alors Z_n est réel.

Exercice 26:

1. Déterminer le module et un argument de $z_0=-1+i$.
2. Résoudre dans ∀ l'équation : $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 27:

Soit F l'équation: $z^5=1$, dans C

1. Résoudre F, en donnant les solutions sous forme exponentielle.
2. Montrer que la somme des solutions de F est nulle, en déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de : $4x^2+2x+1=0$, en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.
4. Calculer $(-i)^5$ en déduire les solutions de F' : $z^5=-i$, puis montrer que la somme des solutions de F' est aussi nulle.

Exercice 28

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives $Z_1=1$; $Z_2=1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $Z_3=\frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

1)-a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes Z_2-Z_1 *et* Z_3-Z_1.

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 *en* A_3 et A_1 *en* A_1.

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne par M' d'affixe Z', l'image par S du point M d'affixe Z. Exprimer Z' en fonction de Z ; en déduire l'image, par S du point B d'affixe $1-4\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Exercice 29:

On pose $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles z^n est réel ; imaginaire pur.

Exercice 30:

1. Résoudre dans C l'équation $z^2-(4+2i)z+2+4i=0$.
2. Résoudre dans CxC le système :
$$(z,z')\in CxC\begin{cases}2z+3z'=12+3\sqrt{2}\\ z-z'=1-\sqrt{2}+5i\end{cases}$$
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct on considère les points A, B, C et D d'affixes respective $a=3+i$; $b=1+i$; $c=3+3i$ et $d=2+\sqrt{2}+2i$

a) Ecrire $\frac{a-b}{a-c}$ sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 31:

Soit $u=-\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer u^2 et u^4
2. Déterminer alors le module et un argument de u.
3. donner la forme algébrique et trigonométrique des racines carrées de u.
4. soit z un nombre complexe différent de 2. On pose $Z=\frac{u}{z-2}$ et $z=x+iy$ avec x et y des réels.
   a. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels $|Z|=1$.

Exercice 32:

Soit le $p(z)=\left(z^2-5z+8\right)^2+(4-z)^2$.

1. Résoudre dans C l'équation $\left(z^2-5z+8\right)+i(4-z)=0$.
2. Résoudre dans C l'équation p(z) = 0.
3. Soit x un réel, factoriser p(x) sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 33:

1. On pose $\alpha=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $A=\alpha+\alpha^4$ et $B=\alpha^2+\alpha^3$.
2. Montrer que $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$. En déduire que A et B sont les solutions de l'équation (E) : $X^2+X-1=0$.
3. Déterminer A en fonction de cos $(\frac{2\pi}{5})$.
4. Résoudre (E) puis en déduire la valeur de cos $(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 34:

Soit une fonction de C dans C définie par
$f(z)=2\left(1+i\sqrt{3}\right)z+4\sqrt{3}-2i$

3. Montrer que f admet qu'un seul point invariant.
4. On note par Ω le point du plan complexe d'affixe z_0 tel que $f(z_0)=z_0$ .Soit $f(z)=z'$.Montrer que $z'-z_0=\left(2+2i\sqrt{3}\right)(z-z_0)$

b) En déduire $\frac{M'\Omega}{M\Omega}$

Soit $F:P\to P$ définie $F:M(z)\mapsto M'(z')\Leftrightarrow z'=f(z)$. Montrer que l'image d'un cercle par F est un cercle.

Exercice 35:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, u, v). On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $Z_A=3+2i$, $Z_B=-3$, $Z_I=1-2i$.
   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z=\dfrac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}$
      Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?
   c. Calculer l'affixe Z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   d. Soit D le barycentre du système {(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 1) }, calculer l'affixe Z_D du point D.
   e. Montrer que ABCD est un carré.
2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :
   $$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$
3. On considère Γ_2 des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$.
   a. Montrer que B appartient à Γ_2.
   b. Déterminer et construire Γ_2.

Exercice 36:

Le plan et muni du ROND (O, u, v). On considère les points: A(2i), B (-i), C(5i), D(i/2), M(z), M'(z'), et la fonction :

$f(z)=z'=\dfrac{4iz+2}{5i-z}$ pour tout complexe z

3) Montrer que si $M\in(Oy)$ alors $M'\in(Oy)$.
4) Interpréter géométriquement $|z|$. En déduire que si M' sur le cercle de centre O et rayon 4 alors M appartient à une droite à préciser.

3) a) Pour $z\neq i$, montrer que $\dfrac{z'-2i}{z'+i}=2\dfrac{z-2i}{z+i}$

b) En déduire que si M, appartient à la médiatrice de [AB] alors M' appartient à un cercle à préciser.

4)a) montrer que pour $z\neq 5i$, on a $(z'+4i)(z-5i)=18$

b) En déduire l'image du cercle de centre C et de rayon 9 et de la demi-droite des points M tel que $(\vec{u},\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

Exercice 37:

1. Soit $\theta\in\left]0;\pi\right[$; on considère l'équation
$(E): 4(1-\sin\theta)z^2-2(1+\cos 2\theta)z+1+\sin\theta=0$

a) Résoudre dans C l'équation (E)
b) Déterminer le module et un argument des solutions de (E)
c) Déterminer les valeurs de $\theta\in\left]0;\pi\right[$ pour que OAB ; ;où A et B sont les images des solutions de (E) ; soit équilatéral.

1. Résoudre dans C l'équation suivantes : $\left|(1+i)z-3+3i\right|^2+\left|z-6\right|^2=54$

Exercice 38:

Soit θ désigne un nombre réel appartenant à [0,2π[.

1. Résoudre l'équation : $z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$. Donner chacune des solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Le plan étant rapporté à un ROND (o, u, v). On considère les points $A(z_1)$et $B(z_2)$. Déterminer θ tel que le triangle OAB, soit équilatéral.

Exercice 39:

Donner les racines carrées des nombres complexes suivants :
a) z=5-12i , b) z=-8i , c) z=7+24i et d) z=25

1. Résoudre dans C l'équation suivante (E) : $z^2-2iz-2=0$.
2. Soient z_1 et z_2 les solutions de (E) . Calculer $2z_1+3z_2$; $(z_1-z_2)^2$; z_1^8 et z_2^{10}.
3. Résoudre dans C l'équation $(2+i)z^2-(9+2i)z+5(3-i)=0$

Exercice 40:

4. On pose $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$
5. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles z^n est réel ; imaginaire pur.

Exercice 41:

Soit (E) : $z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0$

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle que l'on déterminera
2. Le plan complexe étant muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a , b et c solutions de l'équation (E). Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
3. On pose $r=\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$ et $Arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\theta[2\pi]$. On considère dans le plan l'application $f: M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z = zre^{i\theta}$
   a) Montrer que f(A)=A
   b) Montrer que A est l'unique point M vérifiant f(M)=M
   c) Déterminer la nature de f.

Exercice 42:

1. Résoudre dans C les équations suivantes :
   a) $z^3=2+2i$; $z^5=64(\sqrt{2}+i\sqrt{6})$
   b) $z^8=16(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i})$
   c) $z^2=-2\sqrt{3}+2i$
   d) $z^2=3-4i$
   e) $z^2=-1-2i\sqrt{6}$
2. Calculer $(2-i)^3$, en déduire les racines cubiques de $2-11i$.
3. Calculer $(3+2i)^3$, puis résoudre $z^3=-9+46i$.

Exercice 43:

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z_1=-16$; $z_2=17$; $z_3=-2$.

b) $z_1=7+24i$; $z_2=9+40i$; $z_3=1+i$.

c) $z_1=2i$; $z_2=-4i$; $z_3=-7i$.

Exercice 44:

1. Résoudre dans C l'équation suivante $z^4=1$.
2. En déduire les solutions dans C des équations suivantes :
   a. $\left[(\sqrt{3}-i)z+i\right]^4=1$
   b. $\left[(\sqrt{3}-i)z+i\right]^4=1+i$

Exercice 45:

Dans l'ensemble C des nombres complexes on considère l'équation (E): $z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$.

1.
   a. Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on précisera.
   b. Résoudre (E)
2. Dans le plan complexe, on désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $a=-1$, $b=-2+i$ et $c=i$.
3. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$.

a) En déduire la nature du triangle ABC.
b) Donner le centre et le rapport de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

Exercice 46:

4. Déterminer le module et un argument de $z_0=-1+i$.
5. Résoudre dans C l'équation : $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$.
6. En déduire $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 47:

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.
a) Résoudre dans C l'équation $z^2-2z+2=0$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.
b) En déduire les solutions dans de l'équation $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2. Soit A, B les points d'affixes respectives 1+i ; 1-i. Déterminer le centre de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

Exercice 48:

Soit $\alpha\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on donne

$P(z)=z^3-(i+2i\cos\alpha)z^2-(1+\cos\alpha)^2z+i(1+\cos^2\alpha)$. Soient a, b et c les racines de P (z).

1. **1ère méthode**
   a) Sans calculer a, b et c déterminer $a+b+c$; $ab+ac+bc$ et abc
   b) Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à $2i\cos\alpha$, déterminer a , b et c.
2. **2ème méthode**
   a) Montrer que P (z) admet une racine imaginaire pure que l'on précisera (sans utiliser les résultats du 1).
   b) Soit à la racine vérifiant $\mathrm{Re}(a)>0$. Déterminer le module de a et un argument de a en fonction de α.
3. Soit $Z=\dfrac{c-a}{b-a}$
   a) Déterminer le module de Z et un argument de Z en fonction de α
   b) Déterminer α pour que ABC soit équilatéral où A, B et C sont les points d'affixes respectives a, b et c.

Exercice 49:

Dans le plan complexe, on considère les points $M_n(z_n)$ avec $z_0=1$ et $z_{n+1}=(1+i\sqrt{3})z_n$; $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$
2. Donner la forme algébrique puis la forme trigonométrique de z_1, z_2 et z_3. Placer dans le plan les points M_0, M_1, M_2, et M_3.
3. Calculer les distance M_0M_1; M_1M_2 et M_2M_3
4. Soit $d_n=M_nM_{n+1}$. Montrer que d_n est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison
5. Calculer en fonction de n la longueur $S_n=M_0M_1 .. M_n$
6. Déterminer n tel que $S_n>10^6$

Exercice 50:

Résoudre : $(\sin^2\alpha)z^2(\sin 2\alpha)z+1+\cos^2\alpha=0$, $0<\alpha<\pi$. On note z' et z'' les solutions obtenues avec $\mathrm{Im}(z')>0$.

Vérifier que z'^2 et z''^2 ne dépend pas de α.
Le plan étant rapporté à ROND (O, u, v). On désigne par M' et M'' les points d'affixes z' et z''.

a) Déterminer α tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \\ M'M''=2\sqrt{2} \end{cases}$

b) α étant le réel trouvé en 3a) montrer que M'et M'' appartiennent au même cercle de centre O' dont on donnera le rayon.

Exercice 51:

Soit la suite (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$

1. Calculer z_1 *et* z_2.
2. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = z_n + 2$
   a. Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$.
   b. Exprimer z_n en fonction de n.
3. Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives :
   z_{n+1}, z_n, i *et* $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que : $\left(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

Exercice 52:

Soit (z_n) la suite définie par $\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$

1. a) Ecrire sous forme algébrique puis exponentielle z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

   b) On désigne par M_n l'image de z_n .Placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

   c) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en M_{n+1}(On pourra considérer $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$)

2. pour tout n $\in$ IN, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Justifier que $d_n \neq 0$.
   b) Montrer $(d_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.
   c) Interpréter géométriquement d_n.

Exprimer en fonction de n, la longueur Ln de la ligne (M_0,M_1,....,M_n).
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} Ln$.

Exercice 53:

Soit a $\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f_a l'application complexe qui au point M(z) associe le point M'(z') définie par :
$z' = (-1+i\tan a)z - i\tan a + 2$.

1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.
3) Soit h_a l'homothétie de centre le point Ω, d'affixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$. Donner une écriture de la rotation Γa telle que $f_a = \Gamma_a \circ h_a$.

Exercice 54:

On considère les suites numériques (U_n) *et* (V_n) définies par

$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = (1+i\sqrt{3})U_n + 3 \end{cases}$ et $V_n = U_n - i\sqrt{3}$.

1. Donner l'écriture trigonométrique de V_0.
2. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n. En déduire V_n puis U_n en fonction de n.Donner l'écriture trigonométrique de V_n.
3. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

   Soit $f : M(z) \mapsto M'(z') = f(M)$ avec $f(z) = z' = (1+i\sqrt{3})z + 3$.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de.
   b) Soit $f^n = fofofo....of$ (composée de f par elle-même n fois).
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de f^n.
   c) Soit $M_n = f^n(M)$. Exprimer z_n affixe de M_n en fonction de z.
   d) Soit $A_0(-1)$. Déterminer l'affixe de $A_n = f^n(A_0)$.
   Comparer le résultat obtenu à la valeur de U_n. Expliquer.

Exercice 55:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soit f : P $\to$ P
   M(z) $\to$ M'(z') / $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Soit la similitude plane directe g définie par :
   - le centre est le point A (1)
   - le rapport est $\sqrt{3}$
   - l'angle a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$.

   Calculer en fonction de l'affixe z du point m, l'affixe z' du point m' défini par m' = g(m).
3. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de : h = fog.
   b) Comparer fog et gof.
4. Soit h^{-1} la réciproque de h. Déterminer et construire l'image par h^{-1} du cercle C(O', 3) où O'(1- i $\sqrt{3}$).

Exercice 56:

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

1. a) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2z+2=0$. On donnera les solutions sous forme algébrique puis trigonométrique.

b) En déduire les solutions de l'équation :

$$(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0.$$

2) Soit les points A, B d'affixes respectives 1 + i ; 1 - i.

Déterminer le centre de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en B

Exercice 57:

1. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z)=z^3+(1-4i)z^2-(7+4i)z-3+4i.$$

a- Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure .

b- Résoudre dans C l'équation précédente. Soient z_1 et z_2 les deux autres solutions avec $\mathrm{Re}(z_1)>0$.

2) Calculer z_1^4 *et* z_2^4. Résoudre dans C l'équation : $z^4=z_1^4$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A (1 + 2i) ; B (-2 + i) ; C (-1- 2i).

a- Donner l'écriture complexe de la similitude transformant A en B et O en C.

b- On considère l'application R du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=e^{\frac{i\pi}{4}}z+(2-i)\left(1-e^{\frac{i\pi}{4}}\right).$$

Donner la nature de R et ses éléments caractéristiques.

c- Soit R' la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Donner l'écriture complexe de R o S o R'. Préciser sa nature et ses éléments.

Exercice 58:

__PARTIE A__

Soit a ∈ IR. On considère l'équation d'inconnue z ∈ C :

$$z^2+2z+a=0\ (E).$$

1- Pour quelles valeurs de a, les racines de (E) sont réelles ? Complexes ? Racines doubles ?

2- Exprimer, en fonction de a, les racines z_1 et z_2 de (E) dans le cas où a est tel que les racines soient complexes.

3- On pose a = 2. Donner l'expression de z_1 et z_2 :

3-1.Sous forme cartésienne

3-2.Sous forme exponentielle

__PARTIE B__

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ unité 2 cm.

On considère les points A, B d'affixes respectives - 1 + i et - 1 - i.

1- Déterminer le centre Ω de la rotation R, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

2- Soit F l'application complexe qui à tout point M(z) associe le point M '(z') défini par :

$$z'=\sqrt{2}\,z+2\sqrt{2}-2.$$

2-1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F.

2-2. Déterminer l'écriture complexe de FoR, sa nature et ses éléments caractéristiques.

2-3. On définie par A'= FoR (A). Déterminer l'affixe de A'.

Exercice 59:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note C le cercle de centre O et de rayon $R\geq 2$, et A le point de C d'affixe R. Etant donné un entier $n\geq 2$, on note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$. On considère la suite (M_k) de points de C définie par $M_0=A$ et la relation de récurrence $M_{k+1}=r(M_k)$ pour tout $k\geq 0$. On note z_k l'affixe de M_k.

1. a. Pour tout $k\geq 0$, exprimez z_{k+1} en fonction de z_k.

b. Déduisez en l'expression de z_k en fonction de k et n.

c. Comparer M_n et M_0.

2. a. Prouver que pour tout $k\geq 0$, $M_kM_{k+1}=2R\sin\dfrac{\pi}{n}$.

b. On note $L_n=M_0M_1+M_1M_2+.......+M_{n-1}M_n$. Le périmètre du polygone $M_0M_1....M_n$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers +∞. Interprétez géométriquement le résultat ainsi obtenu.

Exercice 60:

On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives -3i et i et la fonction f de C dans C définie par :

$$f(z)=\frac{z+3i}{i\bar{z}-1}.$$

Soient M, N et P les points d'affixes respectives z, $\bar{z}$ et f(z)

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Soient x, y, X et Y les réels tels que $z=x+iy$ et $f(z)=X+iY$
   a. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
   b. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels f(z) est imaginaire pur. Construire cet ensemble.
3. donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Arg}[f(z)]$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$
4. On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points E, F et G d'affixes respectives $z_0=\dfrac{1}{i-\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{z_0}$ et $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z_0.

a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{1}{z_0}$, $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ et z_0.

b) Construire ces points dans le plan.

Exercice 61:

On considère dans C l'équation

$z^3 - (4 + i\sqrt{3})z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{3} = 0$

1. Montrer que cette équation admet deux solutions réelles. (On notera α et β avec $\alpha<\beta$) et une solution imaginaire pure, notée ω.
2. Soit f l'application complexe telle que $f(z) = az + b$

a. Déterminer a et b pour que $f(\omega)=\omega$ et $f(\alpha)= \beta$

b. Calculer le module et l'argument de a

c. Déterminer la nature de $T : M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = az + b$

d. Déterminer l'image par T des Points $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et B d'affixe $-\sqrt{3} + 4i\sqrt{2}$

e. Déterminer la nature et construire l'image du cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ e t de rayon 2 par T.

Exercice 62:

On considère dans l'ensemble des nombres complexes C la transformation f de C dans C définie par $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$. On pose $z' = f(z)$ et on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On note I le point d'affixe i et A le point d'affixe 1+i et enfin F la transformation du plan définie $F : M(z) \mapsto M'(z')$

1. Déterminer $O' = F(O)$; $I' = F(I)$ et $A' = F(A)$. Construire O', I' et A'.
2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   a. Exprimer alors x' et y' en fonction de x et y.
   b. Soit $(D) : y = x\sqrt{3} + 1$. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que l'image M' d'affixe z' appartient à (D). Construire (D) et (E) dans le même repère.
3.
   a. Montrer que F admet un seul point invariant Ω d'affixe ω.
   b. Montrer que pour tout $M \neq \Omega$ on $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 + i\sqrt{3}$
   c. Soit $M \neq \Omega$ et $M(z) \mapsto M'(z')$ déterminer $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$
   d. En déduire la nature de F.

Exercice 63:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit l 'équation (E) $z^3 + 4z^2 2z - 28 = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

a. Déterminer deux réels α et β tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - (\bar{z})^2$.

a. On note respectivement x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z du point M. Montrer que M appartient à (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'.

On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H). Exprimer x et y en fonction de x' et y'. En utilisant la question (2-a), prouver que M' appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C'.

Exercice 64:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f ; g ; f^{-1} ; g^{-1} ; gof et fog.

1. $f : z' = z - 2i$, $g : z' = z + i$.
2. $f : z' = z - 1 + i$, $g : z' = z + 1 - i$.
3. $f : z' = z + 2i$, $g : z' = 2z + i$.
4. $f : z' = z + 1 - 4i$, $g : z' = -z + 2i$.
5. $f : z' = z - 1 - i$, $g : z' = -z + 3i$.
6. $f : z' = z - i$, $g : z' = (1+i)z + 1 - i$.
7. $f : z' = 2z + i$, $g : z' = 4z + 3 - 3i$.
8. $f : z' = 3z + 2i$, $g : z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
9. $f : z' = 2z + 1 - i$, $g : z' = (1-i)z - 1 - i$.
10. $f : z' = \frac{1}{2}z - 1 + i$, $g : z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.
11. $f : z' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}z$, $g : z' = iz + 1 + i$.
12. $f : z' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}z$, $g : z' = iz$.
13. $f : z' = -iz$, $g : z' = iz + 2$.
14. $f : z' = -iz + 1 + i$, $g : z' = (1 - i\sqrt{3})z$.
15. $f : z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z + 1 - i$, $g : z' = (1+i)z + i$.
16. $f : z' = (1+i\sqrt{3})z + 3 - 3i$, $g : z' = (1+i\sqrt{3})z - 1 - 2i$.

17. $f : z' = (1-i)z$, $g : z' = (1+i)z$.

18. $f : z' = (1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3}$, $g : z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

19. $f : z' = (1-i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}$, $g : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - i$.

20. $f : z' = -4iz + 1 - 4i$, $g : z' = \frac{1}{4}iz + 1 - 2i$.

Exercice 65:

1. On considère dans le plan complexe l'application

$$f : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ telle que : } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

a. Donner l'écriture complexe de f

b. Déterminer l'image du point A d'affixe $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f puis déterminer l'image de la droite $(D) : y = x$.

2. Soit θ un réel tel que : $0 \le \theta \le \pi$

   a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$.

   b. Déterminer θ pour que les points images des solutions de l'équation soient les sommets d'un hexagone régulier.

Exercice 66:

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$. On désigne par I ; J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que f(A)=J, f(B)=K et f(C)=I.

1. Montrer que les triangles ABC et IJK ont même centre de gravité G.
2. Montrer que si une telle similitude existe alors f(G)=G. Que peut on en déduire ?
3. Montrer que si g est une autre similitude qui transforme A en J et B en K alors nécessairement g(C)=I.
4. Déterminer alors les éléments caractéristiques de f.

Exercice 67:

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots\dots + \sin[(n-1)]x$ et $u = e^{ix}$

1. Exprimer S_n en fonction de u.
2. Montrer que $\sum_{p=0}^{n-1} u^p = 1 + u + u^2 + \dots\dots + u^{n-1} = \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$.
3. En déduire que $S_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

4. On prend dans cette partie $x = \frac{\pi}{n}$. Montrer alors que $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 68:

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots\dots + \sin[(n-1)]x$ et $u = e^{ix}$

5. Exprimer S_n en fonction de u.
6. Montrer que $\sum_{p=0}^{n-1} u^p = 1 + u + u^2 + \dots\dots + u^{n-1} = \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$.
7. En déduire que $S_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
8. On prend dans cette partie $x = \frac{\pi}{n}$. Montrer alors que $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 69:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre $A(1-i)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre O de rapport 4 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui laisse invariant le point $A(1-i)$ et qui transforme le point $B(3+i)$ au point $C(1+i)$.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme $A(1-i\sqrt{2})$ en $B(1-i\sqrt{3})$ et $C(1+\sqrt{6})$ en $D(-\sqrt{3}+i)$

Exercice 70:

Dans l'ensemble des nombres complexes on considère l'équation

(E): $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$.

1°/

a. Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on précisera.

b. Résoudre (E)

2°/ Dans le plan complexe ,on désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = -2 + i$ et $c = i$.

c) Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$.

d) En déduire la nature du triangle ABC.

e) Donner le centre et le rapport de la similitude plane directe f qui laisse invariant A et transforme B en C.

f) Donner l'expression analytique de f puis déterminer la nature et l'image de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$$

3°/ Soit (z_n) la suite définie par $\begin{cases} z_0 = -1 \text{ et } z_1 = i \\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - 2z_n \end{cases}$ (R)

a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation définie par : $q^2 - 2q + 2 = 0$.

b) Donner la forme algébrique de z_2 ; z_3.

c) Déterminer les réels a et b pour que : la suite (u_n) définie par $u_n = a(1-i)^n + b(1+i)^n$ vérifie la relation (R).

4°/ Soit n un entier supérieur ou égale à 2. On pose

$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots\dots + v_{n-1}$ avec $v_n = (1-i)^n + (1+i)^n$

a) Calculer v_0 ; v_1 etv_3.

b) Déterminer S_n en fonction de n.

Exercice 71:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

b. Interpreter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$.
Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M d'affixe z' tel que :
$z' = (1+2i)z - 2 - 4i$.

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
$z' - z = -2i(2 - i - z)$.

b. En déduire, pour tout point M différent du point ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 72:

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.
On suppose connus les résultats suivants :
- la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que :
$$s(A) = s'(A),\ s(B) = s'(B),\ s(C) = s'(C).$$
Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1 + i$, F d'affixe $2 + i$ et G d'affixe $3 + i$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.

c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S = \sigma \circ h$.

Exercice 73:

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$.

Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :
$$|(1+i)z - 3 + 3i|^2 + |z-6|^2 = 54.$$

1. Première méthode

a. En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de (C).

b. En déduire la nature de (C).

c. Construire (C).

2. Deuxième méthode

On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe
$$z_1 = (1 + i)z - 3 + 3i$$
et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z - 6$.

a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.

b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.

c. Calculer le rapport $\dfrac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\dfrac{TM}{OM_2}$.

d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par :
$2SM^2 + TM^2 = 54$.

e. Calculer l'affixe du barycentre G du système $\{(S, 2), (T, 1)\}$.

f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.

g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

Exercice 74:

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -4 - i$.

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-i}{2}z + \dfrac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'. Vérifier la relation :
$\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, lepoint A_{n+1}, est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_nA_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur IN par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. a. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle ΩA_nA_{n+1}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Exercice 75:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm).

On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r. Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant : $\left\{-3\,;-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

3. a. Déterminer $r(F)$.
b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?

4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.

a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
c. Déterminer l'écriture complexe de s'.

5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.
b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

A- DENOMBREMENT

I- ELEMENTS DE THEORIE DES ENSEMBLES

1. Généralités sur les ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets définis sans ambiguïté (c'est-à-dire que, pour tout objet, on peut dire si oui ou non il fait partie de E). On note $x \in E$ pour indiquer que l'objet x est un élément de l'ensemble E.

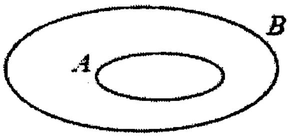
Un ensemble est dit **fini** si l'on peut compter ses éléments. Il est dit infini dans le cas contraire. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé **cardinal** de l'ensemble E et noté Card(E)

On peut définir un ensemble de deux façons :

a. En donnant la liste exhaustive de ses éléments.
b. En donnant une propriété caractéristique de ses éléments.

Exemple :
$E = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. On peut aussi dire que E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9. $2 \in E$. $3 \notin E$.

On dit qu'un ensemble A est un **sous-ensemble** ou une **partie** de l'ensemble B si tout élément de A est également élément de B.
On note $A \subset B$.



L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est un nouvel ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. Nous admettrons qu'il existe un seul ensemble qui ne contient aucun élément. Cet ensemble est appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$. On pose par convention $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

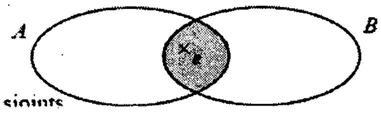
2. Construction de nouveaux ensembles à partir de parties d'un ensemble

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. On définit à partir de A et B les nouveaux ensembles suivants :

- **L'intersection** de A et B, noté $A \cap B$, comme étant l'ensemble des éléments communs à A et à B. $(e \in A \cap B) \Leftrightarrow (e \in A \text{ et } e \in B)$.

Remarques :

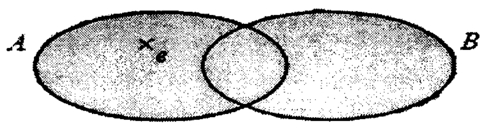
a. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.



(N.B. Sur la figure, $A \cap B$ est en gris)

b. On peut définir l'intersection de plusieurs (i.e de plus de deux) ensembles. Par exemple, $e \in (A \cap B \cap C) \Leftrightarrow (e \in A \text{ et } e \in B \text{ et } e \in C)$.

- L a réunion de A et B, notée $A \cup B$, comme étant l'ensemble des éléments qui sont dans A **ou** dans B. $(e \in A \cup B) \Leftrightarrow (e \in A \text{ ou } e \in B)$.

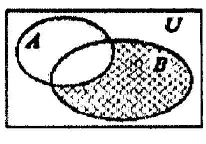


(N.B. Sur la figure, $A \cup B$ est en gris)

Remarque : On peut définir la réunion de plusieurs (i.e de plus de deux) ensembles. *Par exemple,* $e \in (A \cup B \cup C) \Leftrightarrow (e \in A \text{ ou } e \in B \text{ ou } e \in C)$.

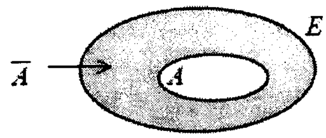
- la différence de A et B (pris dans cet ordre), notée $A \setminus B$, comme étant l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B. $(e \in A \setminus B) \Leftrightarrow (e \in A \text{ et } e \notin B)$.

- la différence symétrique de A et B, noté $A \Delta B$, comme étant l'ensemble des éléments qui sont dans **l'un et un seul** des ensembles A et B.
$[e \in (A \Delta B)] \Leftrightarrow [(e \in A \text{ et } e \notin B) \text{ ou } (e \in B \text{ et } e \notin A)]$.
En d'autres termes, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



(N.B. Sur la figure, $A \setminus B$ est en gris, $B \setminus A$ est hachuré, $A \Delta B$ est la réunion de la zone en gris et de la zone hachurée.)

- **le complémentaire de A dans E** comme étant l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $E \setminus A$, ou $\overline{A}$, ou encore $C_E A$.



- **le produit cartésien de A et B**, noté $A \times B$, comme étant l'ensemble de tous les couples de la forme (x,y), où x est un élément quelconque de A et y un élément quelconque de B. $A \times B = \{ (x\,;y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Exemples :

a. Si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$, alors $A \times B = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c, 1); (c, 2)\}$.

b. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des couples coordonnées des points $M(x,y)$ est le produit cartésien $R \times R$.

Remarques :

a. En général, $A \times B \neq B \times A$.

b. On peut définir le produit cartésien de plusieurs (i.e de plus de deux) ensembles : $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Par exemple $A \times B \times C = \{ (x,y,z) / x \in A \text{ et } y \in B \text{ et } z \in C\}$.Les éléments d'un produit cartésien à n éléments sont appelés **n-uplets**. En particulier, on peut définir le produit cartésien de n ensembles identiques, $A \times A \times \ldots \times A$ noté A^n. Dans l'exemple b) ci-dessus, $R \times R$ est également noté R^2.

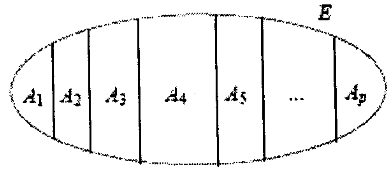
3. **Notion de partition**

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties d'un même ensemble E. On dit qu'elles constituent une **partition** de E si et seulement si :

a. Elles sont tous non vides : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \neq \emptyset$.

b. Elles sont disjointes deux à deux : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

c. Leur réunion est égale à E: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.



1

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E et noté Card (E).

4. **Propriétés de l'intersection et de la réunion**

a. **Idempotence** : Pour tout Ensemble A : $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$.

b. **Associativité** : Pour tous ensembles A, B et C : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

c. **Commutativité** : Pour tous ensembles A et B, $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

d. **Distributivité** : Pour tous ensembles A, B et C, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

e. **Formules de MORGAN** : Soient A et B deux parties d'un même Ensemble E. Alors : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

II- PRINCIPES DE DENOMBREMENT

1. **Le principe additif**

Nous admettrons la propriété suivante, appelée **Principe Additif** :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition d'un ensemble E, alors :

$$Card(E) = card(A_1) + Card(A_2) + \ldots + Card(A_n) = \sum_{i=1}^{i=n} Card(A_i).$$

Conséquences :

Soient A et B deux parties d'un même ensemble fini E. On a les relations suivantes :

- Si A et B sont disjoints (c'est-à-dire tels que ,alors **$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$**.
- Si A et B sont quelconques (c'est-à-dire pas nécessairement disjoints), alors : **$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$**.
- **$Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$**.

Exercice : Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

2. **Le principe multiplicatif**

Nous admettrons la propriété suivante, appelée **Principe Multiplicatif** :

Soient n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ donnés. Alors : $Card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = card(A_1) \times Card(A_2) \times \ldots \times Card(A_n)$

III- LES OUTILS DE DENOMBREMENT

1. **p-listes, arrangements et permutations**

a. **p-listes**

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}$.Une p-liste de E est un p-uplet d'éléments de E. C'est donc un élément du produit cartésien $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ (p facteurs) On appelle p-liste d'élément de E toute suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non.

Remarque :
On précise p-liste va "avec ordre et possibilité de répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués ci-dessous.

Théorème :
Soit E un ensemble de cardinal fini n. Alors le nombre des p-listes de E est $n^p = \underbrace{n \times n \times .... \times n}_{p\ fois}$.

b. **p-arrangements**

Définition
Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. Un p-arrangement est une suite ordonnée de P éléments de E deux à deux distincts on dit aussi qu' un p-arrangement est une p-liste d'éléments E **distincts deux à deux**.
Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple :
$E = \{a ; b ; c ; ... ; z\}$. Les listes suivantes : *b e a u*, *ma t i n*, *h i v e r* sont des arrangements de 4 et 5 éléments de E. Par contre, *a r r a n g e m e n t* n'est pas un arrangement de 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts.

Théorème
Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ .....\ (n-p+1)$
- Le nombre de permutations de E est : A_n^n

Remarque : A_n^p est le produit de p entiers consécutifs décroissant à partir de n.

Exemple :
$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$; $A_{2008}^4 = 2008 \times 2007 \times 2006 \times 2005 = 16\ 209\ 006\ 133\ 680$.

- A_n^n est le produit des n premiers entiers naturels non nuls : $A_n^n = 1 \times 2 \times .... \times n$.

Ce nombre est noté n ! (lire « factorielle n » et pas « n factorielle » !). On pose par convention que 0 ! = 1.

- On obtient le nombre A_n^p sur la plupart des calculatrices en utilisant la touche

nPr

c. **p-Combinaisons**

Définition
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Une p-combinaison (ou combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments

Exemple :
***Tirages simultanés* :**
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. Chaque tirage est une combinaison à 3 éléments de l'ensemble des 9 boules.

Théorème
Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Remarques :
- Les coefficients C_n^p sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant).
- Si p est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.
- On obtient le nombre C_n^p sur la plupart des calculatrices en utilisant la **nCr** touche

Interprétation importante : C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

***Exercices* :**
1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ?
2) Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").
a) Nombre de mains total
b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as
c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as
3) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.
4) Une urne contient 10 boules numérotées de 0, 1, ... ,9. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ?

Propriétés des coefficients binomiaux
- ***Symétrie* :** Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$.

En particulier, $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

- *__Formule de PASCAL__* Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \le p \le n-1$, on a : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

__Démonstration algébrique__ : $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)!(n-p)}{np!(n-p)!} + \dfrac{n(n-1)!p}{np!(n-p)!}$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!}\left[\frac{n-p}{n}+\frac{p}{n}\right] = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

__Triangle de PASCAL__

La formule de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

Les nombres C_n^p avec $0 \le p \le n$ sont donnés par le triangle de Pascal :

	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	…
n = 0	1								
n = 1	1	1							
n = 2	1	2	1						
n = 3	1	3	3	1					
n = 4	1	4	6	4	1				
n = 5	1	5	10	10	5	1			
n = 6	1	6	15	20	15	6	1		
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1	

__Formule du binôme de NEWTON__

__Théorème__

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul on a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

__Remarques__ :

A l'aide de cette formule et du triangle de PASCAL, on retrouve les identités remarquables. Ainsi,

Pour n = 2, on a: $(a + b)^2 = C_2^0\, a^2b^0 + C_2^1\, a^1b^0 + C_2^2\, a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Pour n = 3, on a: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; Pour n = 4, on a: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

B- PROBABILITE

Le hasard est une composante de la nature, il est donc nécessaire de trouver des objets mathématiques pour le modéliser, d'où la naissance de la théorie des probabilités. Cependant, il est à noter que le concept des probabilités est surtout connu par l'intermédiaire des jeux. Nous les utiliserons beaucoup pour introduire différentes notions.

I- __EXPERIENCE ET EVENEMENTS__

1. __Expérience :__

Le calcul des probabilités s'appuie sur les expériences aléatoires. Une expérience est dite aléatoire si

- On ne peut prédire le résultat avec certitude
- On peut décrire l'ensemble des résultats possibles

__Exemples :__

Lancer d'une pièce de monnaie

Le jet d'un dé

Le choix d'une ou de plusieurs boules d'une urne contenant des boules

2. __Evénement__

Tout résultat d'une expérience aléatoire est appelé une éventualité.

L'ensemble des éventualités est appelé univers, il est noté en général Ω.

Toute partie de Ω est appelé événement. Ainsi :

- Ω est appelé l'événement certain
- L'ensemble vide est appelé l'événement impossible
- Un événement réduit à un singleton est appelé un événement élémentaire.

3. __Evénements particuliers__

On considère une expérience d'univers Ω et deux événements A et B liés à elle. On appelle

- Evénement contraire de l'événement A, le sous ensemble complémentaire de A dans Ω. Il est noté $\overline{A}$.
- **Evénement « A ou B »**, l'ensemble $A \cup B$.
- **Evénement « A et B »**, l'ensemble $A \cap B$.
- **Evénements incompatibles**, deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$.

II- PROBABILITE D'UN EVENEMENT

1. Définition

Soit E une expérience d'univers Ω, et $\wp(\Omega)$ *l'ensemùbledes parties de* Ω. On appelle probabilité sur $\wp(\Omega)$ toute application P : $\wp(\Omega) \to [0;1]$ .vérifiant

- $p(\Omega) = 1$
- Pour des événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Conséquences :

- $P(\emptyset) = 0$
- La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

2. Propriétés

Soit A et B deux événements

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

ii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iv) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ ("croissance" de la probabilité).

Démonstration :

i) A et $\overline{A}$ sont disjoints $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$ d'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

ii) $A = (A \cap B) \cup (A - B))$ donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$ car $A \cap B$ *et* $A - B$ sont disjoints d'où $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

iii) $B = A \cap B \cup (B - A)$ donc $P(B) = P(A \cap B) + P(A-B)$ d'où le résultat.

iv) Si $A \subset B$ alors B est l'union disjointe de A et de $(B \setminus A)$ donc : $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ Et comme $P(B \setminus A) \geq 0$, on obtient bien : $P(A) \leq P(B)$.

3. Cas où les événements élémentaires sont équiprobables

Lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité : on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Lorsque qu'il y a **équiprobabilité**:

- la probabilité d'un événement élémentaire ϖ_i est $P(\varpi_i) = \dfrac{1}{card\Omega}$
- $P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Remarque : Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » ... indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemples

Exercice 1

On tire au hasard et simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) l'as de cœur ? b) un as et un seul ? c) deux as et deux seulement ; d) exactement trois as ; e) les quatre as ; f) au moins un as ?

II. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1. Définition :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω. A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté $P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{p(B)}$.

Exemples :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique". Alors : $P(A) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{32} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.

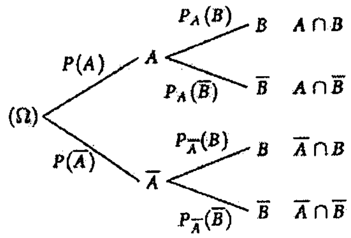
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".
Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"

Donc $R\cap G$ est l'événement "On tire une boule rouge marquée Gagné".Alors : $P(R)=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}=0{,}4$ et $P(R\cap G)=\dfrac{15}{50}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$.

Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est : $P_R(G)=\dfrac{P(R\cap G)}{P(R)}=\dfrac{0{,}3}{0{,}4}=\dfrac{3}{4}=0{,}75$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

Remarque : Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $p(A\cap B)=p(A/B)p(B)=p(B/A)p(A)$.



2. Formule des probabilités totales

a. Partition de l'univers

Définition : Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier supérieur ou égal à 2. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ;\ldots ; n\}$, $A_i \neq 0$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;\ldots n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

b. Formule des probabilités totales

Soient A1, A2, ..., An une **partition** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

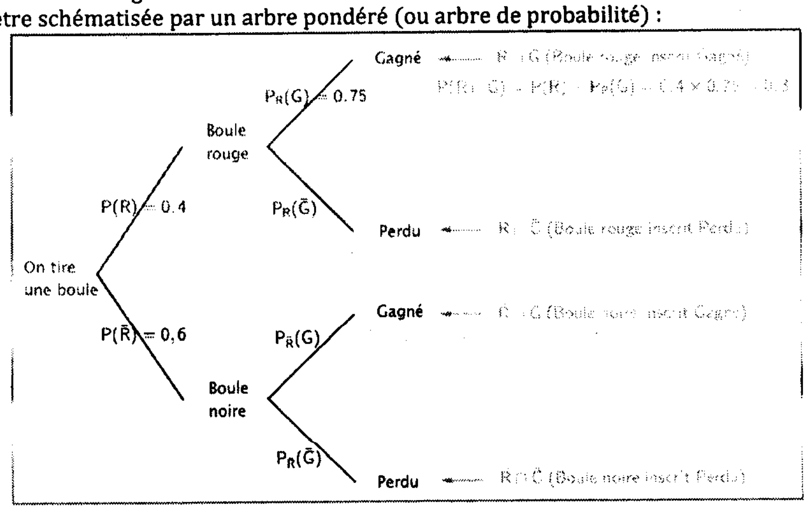
- *ALORS:* $p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+\ldots+p(B\cap A_N)$
- Ou $p(B)=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+\ldots\ldots+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$.

Démonstration : $B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_n)$,
Les événements $(B\cap A_1)$, $(B\cap A_2)$, ..., $(B\cap A_n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc la probabilité de leur réunion est la somme de chacun d'entre eux , on en déduit : $p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+\ldots+p(B\cap A_n)$.
et en utilisant que, pour tout i de $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $p(B\cap A_i)=p_{A_i}(B)\times p(A_i)$, on obtient :
$p(B)=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+\ldots\ldots+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$

Arbre pondéré

1) Exemple

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné. On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"
L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) **Règles**

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemples :

- A partir du nœud "On tire une boule", on a : $P(R)+P(\overline{R})=0,4+0,6=1$
- A partir du nœud "Boule rouge", on a : $P_R(\overline{G})=1-P_R(G)=1-0,75=0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

Règle 2 : La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

Exemple :

On considère la feuille $R\cap G$. On a : $P(R\cap G)=P(R)\times P_R(G)=0,4\times 0,75=0,3$

Règle 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune des ces "feuilles".

Exemple :

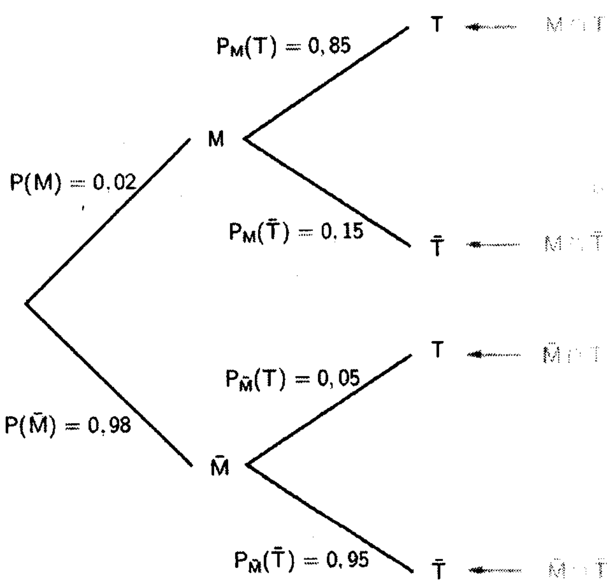
L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux feuilles $R\cap G$ et $\overline{R}\cap G$. On a : $P(R\cap G)=0,3$ et $P(\overline{R}\cap G)=\frac{9}{50}=0,18$ (Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)Donc $P(G)=P(R\cap G)+P(\overline{R}\cap G)=0,3+0,18=0,48$.

Méthode : Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».
Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Résolution



La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles $M\cap T$ et $\overline{M}\cap T$.

$P(T)=P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T)$ = 0,02 x 0,85 + 0,98 x 0,05 = 0,066.

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

c. **Indépendants**

Événements indépendants

Définition : A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(B)$.

Théorème : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :$p(A/B) = p(A)$ ou $p(B/A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Démonstration :- Par définition, les deux premières sont équivalentes

- si $p(A/B) = p(A)$ comme $p(A \cap B) = p(A/B)p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$
- si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, comme $p(B) \neq 0$, $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$ c'est-à-dire $p_B(A) = p(A)$

Remarque : Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

La notion d'indépendance dépend de la probabilité sur l'univers, celle d'incompatibilité est purement ensembliste.

Application aux expériences répétées

Soit une expérience d'univers Ω, P une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω. A est un événement lié à cette expérience.
Si on répète n fois de suite cette expérience, alors la probabilité de réaliser k fois l'événement A au cours des n répétitions est :
$C_n^p(P(A))^k(1-P(A))^{n-k}$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement "On tire un roi".
Soit T l'événement "On tire un trèfle".
Alors $R \cap T$ est l'événement "On tire le roi de trèfle".

On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$. Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$.

Les événements R et T sont donc indépendants. Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit M l'événement "L'individu a la maladie m".
Soit N l'événement "L'individu a la maladie n".
On suppose que les événements M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement E "L'individu a au moins une des deux maladies".

Résolution

$P(E) = P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) = P(M) + P(N) - P(M) \times P(N)$, car les événements M et N sont indépendants. $P(E) = 0{,}005 + 0{,}01 - 0{,}005 \times 0{,}01 = 0{,}01495$
La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 0,01495.

Propriété : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (exigible BAC) :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B \cap \overline{A})$$
$$= P(B) \times P_B(\overline{A})$$
$$= P(B) \times (1 - P_B(A)) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\overline{A})$$
car A et B **sont indépendants** Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exercice d'application

Une usine dispose de deux machines M_1 et M_2 qui fabriquent le même type de produit, la machine M_1 assure les deux tiers de la production avec 10% de produits défectueux, la machine M_2 fournit 5% de produits défectueux.

1. On tire au hasard un produit, quelle est la probabilité qu'il soit sans défaut ?
2. Un produit a été tiré, il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de M_1.

III- VARIABLE ALEATOIRE

1. Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, on appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans IR. On appelle ensemble image de Ω par X, l'ensemble des valeurs possibles de X on le note X(Ω).

2. **Définition d'événements**

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et X une variable aléatoire de Ω. Soit $k \in X(\Omega)$.
$(X = k)$ est l'ensemble des éventualités dont l'image par X est égale à k.
$(X > k)$ est l'ensemble des éventualités dont l'image par X est supérieure à k.

3. **Loi de probabilité**

Définition

Étant donné un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité p, on appelle variable aléatoire sur ▯, toute application X de Ω dans un ensemble ▯'.
Si on note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$, on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X (ou loi de probabilité transportée par X) l'application qui à tout élément x_i fait correspondre $p(X=x_i)$.

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_3)$	....	$P(X=x_n)$

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair."
On a donc : $A = \{2; 4; 6\}$.
On considère l'événement élémentaire E: "On obtient un 5".
On a donc : $E = \{5\}$.
On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 1F.
- Si le résultat est 1, on gagne 5F.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 2F.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs du gain algébrique 1, 5 ou -2.
On a donc : $X(1) = 5$, $X(2) = 1$, $X(3) = -2$, $X(4) = 1$, $X(5) = -2$, $X(6) = 1$
Pour une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité peut être résumée dans un tableau :

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

La variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est dite <u>discrète</u>.
Il existe des variables aléatoires qui prennent n'importe quelle valeur dans un intervalle de IR.

4. **Fonction de répartition**

On appelle fonction de répartition de la loi de probabilité de X, l'application F de IR vers [0; 1] définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

5. **Espérance mathématique, Variance, Ecart-type**

Définition

On considère un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité p et X une variable aléatoire numérique. On note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$.

- On appelle **espérance mathématique** de X (ou moyenne) le nombre réel :
$$E(X) = x_1.p(X=x_1) + x_2.p(X=x_2) + \cdots + x_n.p(X=x_n) \text{ c'est-à-dire : } E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i.p(X = x_i).$$
- On appelle **variance de X** le nombre réel (positif) :
$$V(X) = (x_1 - E(X))^2.p(X=x_1) + (x_2 - E(X))^2.p(X=x_2) + \cdots + (x_n - E(X))^2.p(X=x_n)$$
c'est-à-dire $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2.p(X = x_i)$ On a aussi $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2.p(X = x_i) - E(X)^2$
- On appelle **écart-type de X** le nombre réel (positif) : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi de probabilité
Dans le jeu de la « Méthode » du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.
Résolution
$$E(X) = \frac{21}{32}\times(-1)+\frac{7}{32}\times 2+\frac{3}{32}\times 5+\frac{1}{32}\times 7 = \frac{15}{32}.$$
L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50F.

Exercice d'application

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules. Soit X la variable aléatoire qui et à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

1. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
2. Déterminer et construire la fonction de répartition F de X

6. **Loi de Bernoulli**

a. **Définition** :

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$), de probabilités respectives p et 1 – p.

La loi de probabilité est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre p.

issue	S	$\overline{S}$
probabilité	p	1 – p

Exercice :

Une urne contient 70 boules rouges et 30 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne.
Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli.
On appelle succès « le tirage d'une boule rouge ». Donner la loi de probabilité.

b. **Loi binomiale**

Définitions :

a) Un *schéma de Bernoulli* est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques dans des conditions d'indépendance.
b) Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats, associe le nombre de succès.
c) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée *loi binomiale de paramètre n et p*. Cette loi est notée B (n ; p).

Propriétés :

a) Pour tout entier k, avec $0 \le k \le n$, $P(X = k) = C_n^p P^k (1-p)^{n-k}$.
b) *L'espérance mathématique* est $E(X) = np$ et *la variance* $V(X) = np(1-p)$.

DENOMBREMENT ET PROBABILITE
Exercices corrigés

NB : On note $C_n^k = \binom{n}{k}$

Exercice 1:

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*. Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;
B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.
1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ». Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 2:

Soient *A* et *B* deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1. Supposons que *A* et *B* soient incompatibles. Calculer $P(B)$.
2. Supposons que *A* et *B* soient indépendants. Calculer $P(B)$.
3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement *A* ne peut être réalisé que si l'événement *B* est réalisé.

Exercice 3:

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques *A*, *B*, *C*, on a :
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
2. Généraliser dans le cas de *n* événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Exercice 4:

Soient *A*, *B* et *C* des événements. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$.
3. On sait que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}3$, $P(B \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap C) = 0{,}1$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Exercice 5:

Trois coffres notés C_1, C_2, C_3 ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre C_1 contient 2 pièces d'or, C_2 2 pièces d'argent et C_3 une pièce d'or et une d'argent.
1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre C_2 ?
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent. Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

Exercice 6:

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que
- 1182 jouent à la loterie (A)
- 310 vont au casino (B)
- 190 jouent autant à la loterie qu'au casino.

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?
b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

Exercice 7:

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un nombre entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble des ces opérations constitue une épreuve.
1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".
2. a. Démontrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A peut s'écrire : $p(\mathrm{A})=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$
2. b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".
Calculer $p(B)$.
4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.
- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

4. a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
4.b. Déterminer la loi de probabilité de X.
4.c. Calculer l'espérance mathématique de X.
4.d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 8:

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.
1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2.
a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)
b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.
c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.
2. On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.
X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage.
Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 9:

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.
1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.
b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 10:

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :
Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.
On choisit un individu au hasard.
1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité
a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
c. qu'il ait un test positif ?
d. qu'il ait un test négatif ?
3. Calculer la probabilité
a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?
4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

Exercice 11:

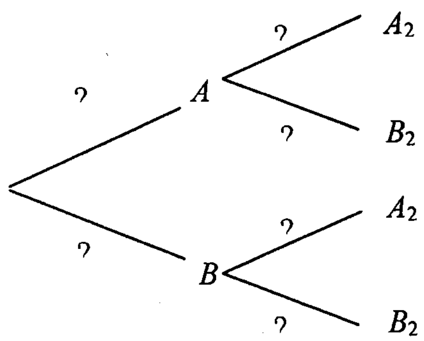
Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 jetons blancs marqués 0 ; 3 jetons rouges marqués 7 ; 2 jetons blancs marqués 2 ;1 jeton rouge marqué 5.
1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles.
2. On considère que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants :
A : "Les 4 numéros sont identiques."
B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."
C : "Tous les jetons sont blancs."
D : "Tous les jetons sont de la même couleur."
E : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."
a. Calculer la probabilité de B
b. Calculer la probabilité des événements A, C, D et E.
c. On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.
3. On établit la règle du jeu suivante :
Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 €.

Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 €.
Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 €.
Pour tous les autres tirages, il perd 5 €.

G est la variable aléatoire égale au gain du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

Exercice 12:

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».
1. a. Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.
b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :
$p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ et $p(A_1 \cap A_2)$.
c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \frac{8}{11}$.
2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 13:

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.
1. Soit les évènements suivants :
A « Les trois boules sont rouges. »
B « Les trois boules sont de lamême couleur. »
C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »
a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.
b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D « Tirer deux boules rouges. »
E « Tirer deux boules de la même couleur. »
a. Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.
b. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n.
Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 14:

Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires.
On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.
1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 5 boules noires ?
2. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15:

Dans une classe de trente élèves sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.
1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les événements P et T sont indépendants.
2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.
a. On appelle T_1 l'événement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $P(T_1)$.
b. On appelle T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire
$P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T_1})$.
c. Démonstration de cours : Démontrer que
$P(T_2) = P_{T_1}(T_2)P(T_1) + P_{\overline{T_1}}(T_2)P\left(\overline{T_1}\right)$. Calculer $P(T_2)$.
3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

CORRECTION

Exercice 1:

1. Comme A et B sont indépendants on a
$p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,02 \times 0,1$; on en déduit donc que
$p(C) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - 0,02 - 0,1 + (0,0.$
2. Il y a 0,02 − 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ; de même il y a 0,1 − 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc $p(D) = 0,018 + 0,098 = 0,116$.
3. X suit une loi binomiale $B(5 ; 0,882)$;
$p(E) = p(X \geq 4) = p(X=4) + p(X=5) = \binom{5}{4} 0,882^4 0,118^1 + \binom{5}{5} 0,882^5 0,118^0 \approx 0,891$

b. $p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$ d'où $p_B(A) = \dfrac{(4/7)\times(1/6)}{1/2} = \dfrac{4}{21}$.

c. De même on a : $p(\overline{A} / \overline{B}) \times p(\overline{B}) = p(\overline{A} \cap \overline{B})$ d'où $p(\overline{A} / \overline{B}) = \dfrac{(18/35)\times(5/6)}{1/2} = \dfrac{6}{7}$

3. Ensemble des valeurs de X: $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$:

$$E(X) = 1\times\frac{4}{7} + 2\times\frac{2}{7} + 3\times\frac{4}{35} + 4\times\frac{1}{35} = \frac{8}{35}$$

$E(X^2) = 1\times\dfrac{4}{7} + 2^2\times\dfrac{2}{7} + 3^2\times\dfrac{4}{35} + 4^2\times\dfrac{1}{35} = \dfrac{20}{7}$; var(X)= $\dfrac{20}{7} - \left(\dfrac{8}{35}\right)^2$; $\sigma(X) \approx 1,69$.

Exercice 9:

1. Avec un dé il y a deux multiples de 3 : 3 et 6 ; on a donc la probabilité $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et la probabilité $\dfrac{2}{3}$ de ne pas avoir de multiple de 3.

a. La probabilité d'obtenir une boule noire est alors

$$p(N) = p(\text{mult de}3)\times p_A(N) + p(\text{pas mult de}3)\times p_B(N) = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{4} = \frac{1}{3}$$

b. $p(R) = p(\text{mult de}3)\times p_A(R) + p(\text{pas mult de}3)\times p_B(R) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{12}$

$$p(V) = p(\text{mult de}3)\times p_A(V) + p(\text{pas mult de}3)\times p_B(V) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\times 0 = \frac{3}{12}$$

Le rouge est donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir.

c. La probabilité que la boule vienne de B sachant qu'elle est rouge est : $p_R(B) = \dfrac{p(B\cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{4}{5}$.

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. On a les possibilités suivantes : $N\overline{N}\overline{N}$, $\overline{N}N\overline{N}$, $\overline{N}\overline{N}N$; on ne remet pas la boule dans l'urne donc :

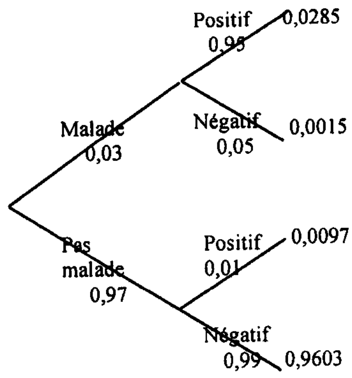
$$p(\overline{N}\overline{N}N) = p(\overline{N})p(\overline{N})p(N) = \frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6} = \frac{5}{28},$$

$p(\overline{N}NN) = p(\overline{N})p(N)p(N) = \dfrac{6}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{28}$, de même pour $p(N\overline{N}N)$; au total cela donne bien $\dfrac{1}{4}$.

c. Non, ce sont des probabilités identiques... $p(N) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 10:

k	1	2	3	4
p($X=k$)	$\dfrac{4\times 6!}{7!} = \dfrac{4}{7}$	$\dfrac{3\times 4\times 5!}{7!} = \dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4\times 3\times 2\times 4!}{7!} = \dfrac{4}{35}$	$\dfrac{3!\times 4!}{7!} = \dfrac{1}{35}$



1. Voir ci-contre.

2. On note M l'individu est malade et T le test est positif :

a. $P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T) = 0,03\times 0,95 = 0,0285$.

b. $P(\overline{M}\cap\overline{T}) = P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,97\times 0,99 = 0,9603$.

c. $P(T) = P(\overline{M}\cap T) + P(M\cap T) = 0,0097 + 0,0285 = 0,0382$.

d. $P(\overline{T}) = P(\overline{M}\cap\overline{T}) + P(M\cap\overline{T}) = 0,0015 + 0,9603 = 0,9618$.

3. a. $P_T(\overline{M}) = \dfrac{P(T\cap\overline{M})}{P(T)} = \dfrac{0,0097}{0,0382} \approx 0,25$: c'est énorme...

b. $P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{P(\overline{T}\cap M)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,0015}{0,9618} \approx 0,00155$: ouf... on a très peu de chances d'être malade sachant que le test est négatif, c'est rassurant.

Exercice 11:

1. Il y a $\dbinom{10}{4} = 210$ tirages distincts possibles.

2. a. $p(B) = \dfrac{\dbinom{2}{1}\times\dbinom{4}{3}}{210} = \dfrac{8}{210} = \dfrac{4}{105}$.

b. A n'est réalisé que lorsque les 4 jetons portent le numéro 0, il n'y a qu'une possibilité. $p(A) = \dfrac{1}{210}$.

Il y a 6 jetons blancs. La probabilité est donc : $p(C) = \dfrac{\dbinom{6}{4}}{210} = \dfrac{15}{210} = \dfrac{1}{14}$.

Les jetons peuvent être, soit tous blancs, soit tous rouges. Or il n'y a que 4 jetons rouges, donc une seule possibilité qu'ils soient tous rouges : $p(D) = p(C) + \dfrac{1}{210} = \dfrac{16}{210} = \dfrac{8}{105}$.

Au moins un jeton porte un numéro différent des autres. Le contraire est "tous les jetons ont le même numéro", qui n'est réalisé que pour le numéro 0. $p(E) = 1 - p(A) = \dfrac{209}{210}$.

c. C est réalisé, c'est-à-dire tous les jetons sont blancs. On rappelle que 4 d'entre eux ont le numéro 0 et deux d'entre eux, le numéro 2.

Pour que B soit réalisé, la probabilité est donc de

$p_C(B) = \dfrac{p(B\cap C)}{p(C)} = \dfrac{p(B)}{p(C)} = \dfrac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}} = \dfrac{8}{15}$, en effet on a

$p(B\cap C) = p(B)$ car on ne peut former 2000 qu'avec des jetons blancs.

Exercice 2:

1. A et B incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$

2. A et B indépendants :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)\Rightarrow\frac{4}{5}P(B)=\frac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$$

3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B,

$$P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}.$$

Exercice 3:

1. On prend par exemple $B\cup C=E$, soit

$P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)$,

$P(E)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ et

$A\cap E=(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow P(A\cap E)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C$

$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

donc en remplaçant on obtient la formule.

2. Même chose, par récurrence

Exercice 4:

1.

$$E_1\cap E_2=A\cap\bar B\cap\bar C\cap A\cap(B\cup C)=(A\cap\bar B\cap\bar C\cap B)\cup(A\cap\bar B\cap\bar C\cap C)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

2. $A\cap\bar B\cap\bar C=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ donc en appelant $K=B\cup C$, on a $E_1\cup E_2=\left(A\cap\bar K\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0{,}4+0{,}3-0{,}1=0{,}6$,

$P\left(\overline{B\cup C}\right)=0{,}4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0{,}6$.

En utilisant la formule de l'exo 9, on a

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0{,}6+0{,}4+0{,}3-0{,}1-0{,}1-0{,}2+0{,}05=0{,}95$;

par ailleurs

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0{,}95=0{,}6+0{,}6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0{,}25$

et enfin $P(E_1)=0{,}6-0{,}25=0{,}35$.

Exercice 5:

1.

$$P(A)=P_{C_1}(A)\times P(C_1)+P_{C_2}(A)\times P(C_2)+P_{C_3}(A)\times P(C_3)=0+1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2};$$

$$P_A(C_2)=\frac{P(A\cap C_2)}{P(A)}=\frac{P_{C_2}(A)\times P(C_2)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$ (ce qui était totalement évident...)

2. Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C_2, donc $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ (attention à l'indépendance, sinon on aurait quelque chose plus compliqué).

Exercice 6:

a. $P(A)=\frac{1182}{1500}=0{,}788$, $P(B)=\frac{310}{1500}=0{,}2067$,

$P(A\cap B)=\frac{190}{1500}=0{,}1267$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}868$.

b. Il y a 310 − 190 joueurs qui jouent uniquement au casino, soit $P(C)=\frac{120}{1500}=0{,}08$.

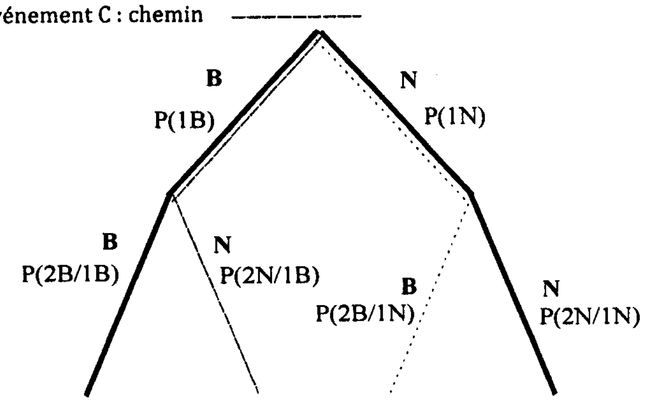
Exercice 7:

1.a. Arbre pondéré :

Evénement A : chemin ————

Evénement B : chemin ....

Evénement C : chemin ― ― ― ―



U_1 : nB,3N U_2 : 2B,1N	U_1 : n-1B,4N U_2 : 3B,0N	U_1 : n+1B,2N U_2 : 1B,2N	U_1 : nB,3N U_2 : 2B,1N

$p(1B)=\frac{n}{n+3}$; $p(1N)=\frac{3}{n+3}$.

$p(2B/1B)=\frac{3}{4}$; $p(2N/1B)=\frac{1}{4}$; $p(2B/1N)=\frac{1}{2}$; $p(2N/2B)=\frac{1}{2}$

2. a. La probabilité p(A) se calcule en parcourant l'arbre :

$p(A)=\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{n+3}\times\frac{1}{2}$, soit $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

2. b. $\lim\limits_{n\to+\infty}p(A)=\frac{3}{4}$.

3. La probabilité p(B) se calcule en parcourant l'arbre :

$p(B)=\frac{3}{n+3}\times\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{3}{2(n+3)}$.

4. a. Le joueur doit être certain de pouvoir, dans le meilleur des cas, récupérer au moins sa mise d'où $2n>20$, soit $n>10$.

4. b. Le dernier événement non encore considéré (C) est : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient 3 boules blanches".

La probabilité p(C) se calcule en parcourant l'arbre :

$p(C)=\frac{n}{n+3}\times\frac{1}{4}$, $p(C)=\frac{n}{4(n+3)}$. La variable aléatoire X peut prendre 3 valeurs : $2n-20$ (événement A) ; $n-20$ (événement B) ; -20 (événement C).

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{2(n+3)}$	$\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$	$\frac{n}{4(n+3)}$

4. c. Espérance mathématique : E(x) =

$$E(X)=\frac{(2n-20)\times3}{2(n+3)}+(n-20)\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)-\frac{20n}{4(n+3)}, \text{ soit}$$

$$E(X)=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}.$$

4. d. E(X) > 0 donne $3n^2-62n-240>0$, soit $(3n+10)(n-24)>0$ et $n\in[25\,;+\infty[$ puisque n est entier.

Exercice 8:

1. a. $p(A)=\frac{1}{6}$; $p(\bar A)=\frac{5}{6}$; $p(B/A)=\frac{4}{7}$; $p(B/\bar A)=\frac{17}{35}$

D'après la loi des probabilités totales on a : $p(B)=p(A\cap B)+p(\bar A\cap B)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{17}{35}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$.

3. Pour 7000 : $p(G=75)=\dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}}{210}=\dfrac{12}{210}=\dfrac{2}{35}$; pour 2000 : $p(G=25)=p(B)=\dfrac{4}{105}$; pour 0000 : $p(G=-15)=\dfrac{1}{210}$; les autres : $p(G=-5)=1-\left(\dfrac{2}{35}+\dfrac{4}{105}+\dfrac{1}{210}\right)=1-\dfrac{12+8+1}{210}=\dfrac{189}{210}$.

G	−15	−5	25	75	
$p(G=x_i)$	$\dfrac{1}{210}$	$\dfrac{189}{210}$	$\dfrac{4}{105}=\dfrac{8}{210}$	$\dfrac{2}{35}=\dfrac{12}{210}$	1
$p_i x_i$	$\dfrac{-15}{210}$	$\dfrac{-5\times 189}{210}$	$\dfrac{25\times 8}{210}$	$\dfrac{75\times 12}{210}$	$\dfrac{2}{3}$

E(G)= $\dfrac{-15-945+200+900}{210}=\dfrac{140}{210}=\dfrac{2}{3}\approx 0{,}66$. Le joueur peut espérer gagner 0,66 centimes d'Euros par jeu : celui-ci lui est légèrement favorable.

Exercice 12:

	A	B	Total
Samedi 1	8	14	22
Samedi 2	4 (A)+12 (B)	2 (B) +4 (A)	22
Total	24	20	44

1\. a. $p(A_1)=\dfrac{8}{22}=\dfrac{4}{11}$; $p(A_2)=\dfrac{16}{22}=\dfrac{8}{11}$.

b. $p_{A_1}(A_2)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $p_{B_1}(A_2)=\dfrac{12}{14}=\dfrac{6}{7}$,

$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)p_{A_1}(A_2)=\dfrac{4}{11}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{11}$.

c.

A_1 : 8/22=4/11
- A_2 sachant A_1 : 4/8 — A_2 et A_1 : 2/11
- B_2 sachant A_1 : 4/8 — B_2 et A_1 : 2/11

B_1 : 14/22=7/11
- A_2 sachant B_1 : 12/14 — A_2 et B_1 : 6/11
- B_2 sachant B_1 : 2/14 — B_2 et B_1 : 1/11

d. $p(A_2)=p(A_1\cap A_2)+p(B_1\cap A_2)=\dfrac{2}{11}+\dfrac{6}{11}=\dfrac{8}{11}$.

2\. a. X peut prendre les valeurs 40, 50 ou 60 F.

X	40 (B, B)	50 (A, B) ou (B, A)	60 (A, A)
P_X	$\dfrac{1}{11}$	$\dfrac{6}{11}+\dfrac{2}{11}=\dfrac{8}{11}$	$\dfrac{2}{11}$

b. $E(X)=40\times\dfrac{1}{11}+50\times\dfrac{8}{11}+60\times\dfrac{2}{11}=\dfrac{560}{11}$.

Exercice 13:

1\. Nombre de possibilités : $\binom{10}{3}=\dfrac{10.9.8}{3.2.1}=120$.

a. $p(A)=\dfrac{\binom{5}{3}}{120}=\dfrac{1}{12}$, $p(B)=\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{120}=\dfrac{11}{120}$,

$p(C)=\dfrac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{120}=\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$.

b. X peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 : $p(X=1)=p(B)=\dfrac{11}{120}$; $p(X=3)=p(C)=\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$ et

$p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)=1-\dfrac{11}{120}-\dfrac{30}{120}=\dfrac{79}{120}$.

$E(X)=1.\dfrac{11}{120}+2.\dfrac{79}{120}+3.\dfrac{30}{120}=\dfrac{259}{120}\approx 2{,}16$.

2\. a. Nombre de tirages possibles : $\binom{n+5}{2}=\dfrac{(n+5)(n+4)}{2}$.

Nombre de tirages possibles pour D : $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Après simplification on a $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. E = 2 rouges ou 2 jaunes ou 2 vertes, soit

$\binom{n}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}+3+1=\dfrac{n^2-n+8}{2}$ d'où

$p(E)=\dfrac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}$.

On a

$p(E)\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0$

. Après résolution on a $n\geq 11{,}35$, soit $n=12$.

Exercice 14 :

Il y a n+10 boules ; il y a donc $\binom{n+10}{10}$ tirages possibles ; on tire 5 noires avec la probabilité

$$p_n=\dfrac{\binom{10}{5}\binom{n}{5}}{\binom{n+10}{10}}=\dfrac{\dfrac{10!}{5!5!}\dfrac{n!}{5!(n-5)!}}{\dfrac{(n+10)!}{10!n!}}=K\dfrac{n!n!}{(n-5)!(n+10)!}=K\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n+10)(n+9)...(n+2)(n+1)}$$

,

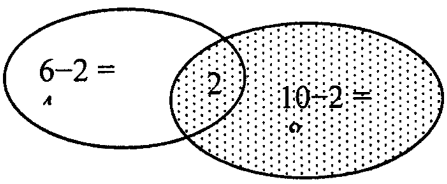
donc $p_n\approx K\dfrac{n^5}{n^{10}}\approx K\dfrac{1}{n^5}$ qui est décroissante et tend vers 0.

Exercice 15:

1\. Avec des patates le résultat est immédiat P(P) = 10/30 = 1/3 et P(T) = 6/30 = 1/5.

On a alors

$P(\text{P}\cap\text{T})=\dfrac{2}{30}=\dfrac{1}{15}$



et

$P(\text{P})\times P(\text{T})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=$

donc les événements sont indépendants. Ceci est un pur hasard de calcul, si vous changez par exemple le nombre d'élèves dans la classe ça ne marche plus....

2\. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. $P(T_1)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

b. $P_{T_1}(T_2)=\dfrac{1}{9}$: il reste à tirer un membre du club théâtre parmi les neuf restants.

$P_{\overline{T_1}}(T_2)=\frac{2}{9}$: si $\overline{T_1}$ est réalisé le premier élève ne fait pas de théaâre, il reste deux choix parmi 9 restants.

$P(T_2\cap T_1)=P_{T_1}(T_2)P(T_1)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$;

$P(T_2\cap\overline{T_1})=P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1})=\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{45}$.

b. Avec les probabilités totales, on a

$P(T_2)=P\left((T_1\cap T_2)\cup(\overline{T_1}\cap T_2)\right)=P(T_1\cap T_2)+P\left(\overline{T_1}\cap T_2\right)=P_{T_1}(T_2)P(T_1)+P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1})$

Donc $P(T_2)=\frac{1}{45}+\frac{8}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$.

Le calcul aurait pu se faire directement avec un arbre.

3. Loi binomiale : $n=4$, $p=1-P(T_2)=\frac{4}{5}$; la probabilité cherchée est, en posant X= nombre de fois où l'élève photographié n'appartient pas au club théâtre :

$P(X=4)=\binom{4}{4}p^4(1-p)^0=\frac{4^4}{5^4}=\frac{256}{625}$.

DENOMBREMENT ET PROBABILITE
Exercices non corrigés

DENOMBREMENT

Exercice 1:

Une urne contient 3 boules blanches ; n boules noires, n étant un entier naturel supérieur à 2.

1. On tire simultanément 2 boules de l'urne. Les boules sont indiscernables au toucher et tous les tirages sont équiprobables. Déterminer, en fonction de n, le nombre de tirage :
   a) Possible.
   b) Contenant deux boules une même couleur.
   c) Contenant deux boules de couleurs différentes.
   d) Contenant deux boules blanches.
2. On suppose désormais que n = 4 ; on procède alors à un tirage successif de 2 boules avec remise. Déterminer le nombre de tirage :
   a) Possible.
   b) Contenant deux boules de couleurs différentes.
   c) Contenant deux boules de même couleur.
   d) Contenant deux boules noires.

Exercice 2:

On jette 3 fois de suite un dé à six faces numéroter de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. Déterminer :
   a) Le nombre total de résultats possibles ?
   b) Le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.
   c) Le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.
   d) Le nombre de résultats comportant exactement deux chiffres identiques.
   e) Le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenue est égal à 6.

Exercice 3:

Une urne contient 4 boules rouges ; 3 boules noires et une boule blanche. On tire simultanément 3 boules. Déterminer dans chaque cas, le nombre de tirages différents.

1. Avec exactement deux noires.
2. Avec au moins deux rouges.
3. Avec au moins deux boules de même couleur.
4. Avec une boule de chaque couleur.

Exercice 4:

On demande à 4 boulangers d'un quartier quel jour hebdomadaire de fermeture lui conviendrait.

1. De combien de façons différentes peuvent à priori s'énoncer les choix des 4 boulangers ?
2. Certains boulangers ayant choisi le même de fermeture, ce qui ne peut pas être accepté, on réunit à nouveau les 4 boulangers en leur demandant de modifier éventuellement leur choix, les 4 jours de fermeture devant être différents. Quel est le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles ?
3. On s'aperçoit qu'aucun boulanger n'entend ni fermer le samedi, ni le dimanche quel est le nombre de choix différents.

Exercice 5:

Une association est formée de 35 personnes dont 15 hommes et 20 femmes. On se propose de former un bureau de 5 membres avec au moins 2 hommes et 2 femmes.

Déterminer de combien de façons l'on peut former ce bureau dans les cas suivants :

a) Chaque membre de l'association est candidat.
b) Deux hommes refusent d'être candidats.
c) Mr A refuse d'être dans le même bureau que Mme B.

Exercice 6:

Une classe de 30 élèves dont 18 garçons doit élire un bureau composé d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire. On suppose qu'il ne peut y avoir de cumul de poste. Combien de bureaux peuvent être constitués en respectant les consignes suivantes :

1. Aucune consigne.
2. Le poste de secrétaire doit être occupé par une fille.
3. Le bureau doit être constitué que de fille.
4. Le président est un garçon, le vice président une fille.
5. Le président et le vice président sont des garçons.
6. Le vice président est une fille.

Exercice 7:

Une urne contient 3 boules vertes et 7 jaunes. On tire de cette urne quatre (04) boules.

1°/ Le tirage des boules se fait une après et sans remise. Déterminer le nombre de tirages.

a) Les quatre boules tirées sont jaunes.
b) Les quatre boules tirées sont vertes.
c) Les boules sont jaunes.
d) Les deux 1ères sont vertes

2°/ Le tirage des quatre boules se fait de manières simultanées.

a) Les quatre boules tirées sont jaunes.
b) Les quatre boules tirées sont vertes.
c) Les boules sont jaunes.
d) Les deux 1ères sont vertes

Exercice 8:

Dans une classe de Terminale S2, 80% des élèves ont déclaré aimer l'étude des SVT, 20% celle des MATHS ,15% celle des SVT et des MATHS.

Quelle est la probabilité de tirer au hasard un élève de cette classe qui :

1. aime les SVT mais pas les MATHS ;

2. aime les MATHS mais pas les SVT ;
3. n'aime ni les SVT ni les MATHS.

Exercice 9:

Un sac contient 10 boules blanches numérotées de 1 à 10, 2 boules rouges numérotées 1 et 2 et 3 boules noires numérotées 1, 2 et 3.
1. On tire simultanément 3 boules du sac.
Calculer les probabilités des évènements A, B, C et D suivants :
A : «tirer 3 boules blanches»
B : «tirer 1 rouge et 2 noires »
C : «tirer 3 boules de même couleurs»
D : «tirer 3 boules portant le même numéro»
2. On tire successivement sans remise 3 boules du sac .Calculer les probabilités des évènement suivants.
E : «tirer une blanche, une noire et une rouge dans cet ordre»
F : «tirer deux blanches et une noire»

Exercice 10:

On considère dans le système décimal, l'ensemble des nombres de cinq chiffres (un nombre ne pouvant pas commencer par un 0).
1°/ Combien existe-t-il ?
2°/ Combien existe-il qui commencent par qu'avec des chiffres pairs ?
3°/ Combien existe il qui s'écrivent qu'avec des chiffres inférieurs ou égaux à 7 ?

Exercice 11:

Le programme scolaire d'Histoire et Géographie d'un candidat à un concours est composé de 12 chapitres de Géographie et 15 chapitres d'Histoire. Le candidat n'a appris que 11 chapitres d'Histoires et 10 chapitres de Géographie.
Le sujet comporte deux questions d'histoire et deux questions de géographie portant sur des chapitres distincts. Le candidat ne doit traiter au choix qu'une question par discipline
Déterminer :
1°/ Le nombre de sujets possibles.
2°/ Le nombre de sujets où le candidat sait traiter les quatre questions posées.
3°/ Le Nombre de sujets où le candidat sait traiter au moins une question.
4°/ Le nombre de sujets où le candidat ne sait traiter aucune question.
5°/ Les sujets où candidat sait traiter au moins une questions d'histoire et au moins une question de Géographie.

Exercice 12:

Il y a en vrac dans un tiroir 3 paires de chaussures de couleurs différentes. On tire au hasard deux Chaussures ; déterminer la probabilité des évènements suivants :
A : «elles appartiennent à la même paire»
B : «il y a un pied droit et un pied gauche»

PROBABILITES SIMPLES

Exercice 1:

Un questionnaire comprend n questions ($n \geq 6$) : 4 d'algèbre, 2 de géométrie et le reste d'analyse. Un élève tire au hasard et simultanément 3 questions.
On note les événements suivants.
A= tirer exactement 2 questions d'algèbre.
B= tirer exactement 1 question de géométrie.
C= tirer exactement 2 questions d'algèbres et une de géométrie.
1°) Calculer en fonction de n les probabilités de A, B et C.
En déduire celle de AUB.
2) Déterminer n pour que $P(A\cup B) = 2\,P(C)$.

Exercice 2:

Un sac contient douze jetons indiscernables au toucher sur chacun desquels est inscrite une lettre du mot " SENEGALAISES".
1. Déterminer la probabilité d'avoir les lettres du mot " SAGESSE" dans chacun des cas suivants :
 a) On tire simultanément sept lettres du sac.
 b) On tire successivement sept lettres en remettant à chaque fois la lettre tirée dans le sac après l'avoir notée.
2. Déterminer la probabilité d'avoir dans leur ordre les lettres du mot " SAGESSE", si l'on tire successivement et sans remise sept lettres du sac.

Exercice 3:

On considère un jeu de 32 cartes. On tire simultanément huit cartes du jeu. Quelle est la probabilité des événements suivants :
A "obtenir exactement un valet"
B "obtenir exactement trois cœurs"
C "obtenir exactement un valet et trois cœurs"
D "obtenir au moins un as"
E "obtenir deux valets, trois dames, un roi et deux as"

Exercice 4:

Pour une séance de révision, un professeur interroge 6 élèves sur 7 chapitres du programme. Il permet à chaque élève d'inscrire sur un bout de papier à l'insu des autres le chapitre sur lequel il souhaite être interrogé. Les 6 élèves ont fait leur choix.
1°) Quelle est la probabilité que les chapitres choisis soient deux à deux distincts ?
2°) Quelle est la probabilité que deux élèves choisissent le même chapitre et les autres choisissent des chapitres deux à deux distincts ?

Exercice 5:

On dispose de 6 objets à répartir dans trois boites. Déterminer la probabilité des événements suivants :
a)La première boites ne contient aucun objet ;
b) La première boite contient deux objets exactement ;
c) Chaque boite contient deux objets exactement

Exercice 6:

Un sac contient 10 boules blanches numérotées de 1à 10, 2 boules rouges numérotées 1et 2 et 3 boules noires numérotées 1, 2et 3.
1. On tire simultanément 3 boules du sac.
Calculer les probabilités des évènements A, B,C et D suivants :
A : «tirer 3 boules blanches»
B : «tirer 1 rouge et 2 noires »
C : «tirer 3 boules de même couleurs»
D : «tirer 3 boules portant le même numéro»
2. On tire successivement sans remise 3 boules du sac .Calculer les probabilités des évènement suivants.
E : «tirer une blanche,une noire et une rouge Dans cet ordre»
F : «tirer deux blanches et une noire»

Exercice 7:

Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher sur lesquels on a inscrit des nombres.
3 jetons portant le nombre 10, 5 jetons le nombre 10 et 2 jetons le nombre 20.
NB : Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
1. Calculer les probabilités des évènements suivants.
A : «obtenir 2 jetons portant le même nombre»
B : «obtenir 2 jetons portant des nombres pairs»
C : «obtenir 2 jetons portant des nombres de même parité »

Exercice 8:

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 1 boule verte.
On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) A : " le tirage est unicolore"
   b) B : " le tirage est tricolore"
   c) C :" le tirage contient au moins une boule blanche"
   d) D" le tirage contient au plus 2 boules rouges"

Exercice 9:

Une urne U1 contient deux boules noires et une boule blanche.
Une urne U2 contient deux boules blanches et une boule noire.
On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire une boule dans cette urne.
1. Faire un arbre.
2. Calculer la probabilité de choisir l'urne U1 et de tirer une boule blanche.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne U1 ?

Exercice 10:

On associe au jet d'un dé pipé(truqué) dont les faces sont numérotées de 1à 6,l'espace probabilisé $(\Omega,p(\Omega),p)$ où $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ et où la Probabilité p satisfait les conditions suivantes :

- les évènements élémentaires $\{4\}$,$\{5\}$ et $\{6\}$ sont équiprobables.
- $p(\{2\}) = p(\{3\}) = \frac{2}{3}p(\{1\})$
- la probabilité de l'évènement $\{1, 2, 3\}$ est égale aux $\frac{4}{5}$ de la probabilité de l'évènement contraire.

1. Préciser les valeurs de p pour les évènements élémentaires.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat impair par le jeu de ce dé ?

Exercice 11:

Il y a en vrac dans un tiroir 3 paires de chaussures de couleurs différentes. On tire au hasard deux Chaussures ; déterminer la probabilité des évènements suivants :
A :«elles appartiennent à la même paire»
B :«il y a un pied droit et un pied gauche»

Exercice 12:

On lance 100 fois une pièce en l'air et on note les côtés P :pile et F :face obtenus successivement.
Quelle est la probabilité p pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

Exercice 13:

On jette trois dés A, B et C, es faces étant numérotées de 1à 6.
Calculer la probabilité pour obtenir :
1. au poins deux faces identiques.
2. exactement deux faces identiques.
3. une somme de points paire.

Exercice 14:

Un automobiliste effectue un parcours sur lequel se trouvent dix feux tricolores. Ces feux fonctionnent de manière autonome et indépendante et possèdent chacun le même cycle : vert 25 secondes, orange 5 secondes, rouge 30 secondes.
1. Étant donné un feu tricolore, on note S l'événement "l'automobiliste passe au feu vert". Calculer P(S).
2. Quelle est la probabilité que sur son parcours (comportant dix feux tricolores) l'automobiliste rencontre exactement six feux verts ?
3. Quelle est la probabilité que sur son parcours l'automobiliste ne rencontre que des feux verts ?
4. Calculer le nombre moyen de feux verts que l'automobiliste rencontre sur son parcours.

Exercice 15:

Dans une classe de Terminale S2, 80% des élèves ont déclaré aimer l'étude des SVT,20% celle des MATHS ,15% celle des SVT et des MATHS.
Quelle est la probabilité de tirer au hasard un élève de cette classe qui :
1. aime les SVT mais pas les MATHS ;
2. aime les MATHS mais pas les SVT ;
3. n'aime ni les SVT ni les MATHS.

Exercice 16:

Lors d'un match de Foot sanctionné par un nul, les joueurs du SENEGAL à savoir Cissé, Coly ,Diouf, Fadiga et Faye sont choisis pour tirer chacun un penalty et un seul.
1. De combien de façons peut-on ranger les 5 tireurs dans un ordre d'exécution de leur penalty ?
2. Calculer les probabilités des évènements suivants
A «le premier tireur est Fadiga»
B «le premier tireur a un nom qui commence par F»
C«les 2 premiers tireurs ont un nom commençantpar la même lettre»
D«Diouf tire immédiatement après Fadiga»

Exercice 17:

Un questionnaire comprend n questions ($n \geq 6$) : 4 d'algèbre, 2 de géométrie et le reste d'analyse. Un élève tire au hasard et simultanément 3 questions.
On note les événements suivants.
A= tirer exactement 2 questions d'algèbre.
B= tirer exactement 1 questions de géométrie.
C= tirer exactement 2 questions d'algèbres et une de géométrie.
1°) Calculer en fonction de n les probabilités de A, B et C.
En déduire celle de AUB.
2) Déterminer n pour que P(AUB) = 2 P(C).

Exercice 18:

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.
On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne, et on note *b* le numéro du jeton tiré.
On note G l'événement : "La partie est gagnée", lorsque la somme des numéros *a* et *b* est égale à 5.

1. Montrer que la probabilité de gagner est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes *A* et *B* jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la question 1.
Si *A* gagne et *B* perd, *A* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, si *A* perd et *B* gagne, *B* est déclaré vainqueur, et le jeu s'arrête, dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
Pour tout entier *n*, on désigne les événements suivants :

A_n : "A gagne la nième partie".
B_n : "B gagne la nième partie".
C_n : "Le jeu continue après la nième partie."

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.
b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fontion de $p(C_n)$ et montrer que

$$p(C_n)=\left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

c. Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que

$$p(A_n)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

d. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
e le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Exercice 19:

On désigne par la probabilité d'apparition de la face numérotée i P_i lors d'un lancer du dé. Ces probabilités sont telles que :

- P_1 , P_3 , P_5 sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- P_2 , P_4 , P_6 sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$
- $2P_1 = 3P_2$

1. Calculer les probabilités P_1 et P_2 . Calculer ensuite P_3 , P_4 , P_5 et P_6 .
2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair lors d'un lancer du dé.
3. On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 chiffres impairs.

PROBABILITES CONDITIONNELLES

Exercice 19:

A, B et C sont trois événements. On sait que :
$p(A) = 0{,}5$ $p(B) = 0{,}1$ $p(C)$ $0{,}7$ $p(B \cup C) = 0{,}8$ $p(A \cap B) = 0{,}3$
1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?
2. Les événements B et C sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?
3. Les événements A et C sont-ils incompatibles ?

Exercice 20:

Une urne A contient 8 boules : 3 blanches et 5 noires.
Une urne B contient 5 boules : 2 blanches et 3 noires.
Les boules étant indiscernables au toucher, on tire une boule de chaque urne.

1. Quelle est la probabilité P_1 pour que les deux boules tirées soient noires ?
2. Quelle est la probabilité P_2 pour que l'une soit blanche et l'autre noire ?
3. Si l'une est blanche et l'autre noire, quelle est la probabilité P_3 pour que la boule noire provienne de A ?

Exercice 21:

Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A,B et C.

- La machine A assure 20% de la production et 5% des ampoules fabriquées par A sont défectueuses.
- La machine B assure 30% de la production et 4% des ampoules fabriquées par B sont défectueuses.
- La machine C assure 50% de la production et 1% des ampoules fabriquées par C sont défectueuses.

1. On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probabilités :
a) pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par A.
b) pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par B.
c) pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par C.
En déduire la probabilité pour qu'une ampoule prise au hasard soit défectueuse.
2. On choisit au hasard une ampoule, elle est défectueuse. Calculer la probabilité pour qu'elle :
a) provienne de A ;
b) provienne de B ;
c) provienne de C.

Exercice 22:

Dans une ville donnée, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marrons, et les 15% ont à la fois les cheveux bruns et les yeux marrons.
On choisit au hasard une personne résidant dans cette ville.
(i) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité pour qu'elle ait aussi les yeux marrons ?
(ii) Si elle a les yeux marrons, quelle est la probabilité pour qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?
(iii) Quelle est la probabilité pour qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marrons ?

Exercice 23:

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 vertes et 2 jaunes
1°) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note x la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées.
Déterminer la loi de x et calculer E(x).
2°) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événement suivants.
A : aucune boule verte n'est tirée au cours de premier tirage de 2 boules.
B : une boule verte et une jaune sont tirées au cours du premier tirage.
C : deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage.
D : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage.
a) Calculer P (D / A) : P(D / B) ; P(D / C).
b) En déduire $P(D \cap A)$; $P(D \cap B)$ et $P(D \cap C)$. Calculer P (D).

Exercice 24:

Un sondage effectué auprès des automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que
60 % des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85 % se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70 % des automobilistes voyageant sans enfant ne sont pas arrêtés.
On interroge au hasard un automobiliste. On note :
A l'événement "l'automobiliste interrogé s'est arrêté au moins une fois"
E l'événement "l'automobiliste interrogé transporte des enfants"
1. Préciser les probabilités suivantes : $p(E)$, $p(A|E)$ et $p(A| E)$.
($A|E$ désigne l'événement A sachant que E est réalisé et E est l'événement contraire de E)
2. Calculer les probabilités $p(A$ □□ $E)$ et $p(A)$.
3. Calculer la probabilité qu'un automobiliste transporte des enfants sachant qu'il ne s'est pas arrêté.

Exercice 25:

Dans une population il y a 45% d'hommes et 55% de femmes présente un caractère P.

a) Quelle est la probabilité pour que cet individu présente le caractère P ?
b) Quelle est la probabilité pour que ce soit un homme sachant qu'il présente le caractère P ?
c) Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme sachant qu'il ne présente pas le caractère P ?

Exercice 26:

Une urne U_1 contient 9 boules dont 5 rouges.
Une urne U_2 contient 5 boules dont 3 rouges.
On met toutes les boules dans une urne U et on tire une boule de l'urne U au hasard.
Si cette boule est rouge, calculer la probabilité pour qu'elle provienne de U_1.

Exercice 27:

Soit A, B deux évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$ tel que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$ et $p(C) \neq 0$

Montrer que : $p(B/A) = \dfrac{p(B) \times p(A/B)}{p(B) \times p(A/B) + p(\overline{B}) \times p(A/\overline{B})}$

Utilisation :

Une urne U_1 contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. Une urne U_2 contient 4 boules bleues et 6 rouges.
On jette un dé dont 2 faces sont numérotées 1 et les 4 autres numérotées 2.
Si le résultat est 1, on tire au hasard une boule de U_1
Si le résultat est 2,on tire au hasard une boule de U_2
Sachant qu'une boule rouge est tirée, quelle est la probabilité pour qu'elle ait été tirée de U_1 ?

Exercice 28:

Le but de cet exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. On dispose des données suivantes :

i) Un quart de la population a été vacciné contre la maladie.
ii) Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur 13 parmi les malades.
iii) La probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'il est vacciné est 0.1.

Pour une personne rencontrée au hasard, on note :

M L'évènement «être malade», $\overline{M}$ son contraire,

V L'évènement «être vacciné», $\overline{V}$ son contraire,

1. On rencontre une personne dans la population. Dessiner un arbre traduisant l'énoncé.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « M et V » noté $p(M \cap V)$. En déduire que la probabilité $p(M)$ de l'évènement M est égale à $\dfrac{13}{40}$.
3. Calculer les probabilités des deux évènements suivants :
   a) «être malade et ne pas être vacciné»
   b) «être malade sachant que l'on n'est pas vacciné»
4. Déterminer le réel k tel que : $p(M/V) = k\,p(M/\overline{V})$
Enoncer ce dernier résultat en langage courant.

Exercice 29:

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement $M1$, $M2$ et $M3$.
La moitié des appareils de son stock provient de $M1$, un huitième de $M2$, et trois huitièmes de $M3$.
Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque $M1$ sont rouge, que 5% des appareils de la marque $M2$ sont rouges et que 10% des appareils de la marque $M3$ le sont aussi.
On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste : (on donnera les résultats sous forme de fractions)
1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de $M3$?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de $M2$?
3. Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
4. Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque $M1$?

VARIABLE ALEATOIRE

Exercice 30:

Un dé est truquée de telle sorte que $p(1) = p(2) = p(3) = \dfrac{1}{10}$.

On sait d'autre part que $p(4) = p(5) = p(6)$.

1. Calculer $p(4)$, $p(5)$ et $p(6)$.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au résultat affiché par ce dé lorsqu'on le lance une fois.
   Calculer l'espérance E(X)

Exercice 31:

Un dé non truqué porte la lettre A sur deux faces et la lettre B sur les quatre autres faces.

1) On lance le dé quatre fois de suite ; quelle est la probabilité d'obtenir trois fois A et une fois B.
2) On suppose que lorsque A apparaît, on a un gain de a francs et que si c'est la lettre B on a une perte de b francs.

On définit une variable aléatoire Y qui à chaque série de 4 lancers va associer le gain algébrique obtenu.

a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
c) Calculer l'espérance mathématique de Y.
d) On suppose $a = 6$; combien vaut b pour que E(Y) soit nulle. Calculer dans ce cas la variance et l'écart type de Y.
e) Déterminer et construire la fonction de répartition de Y dans le cas $a = 6$ et $b = 3$.

Exercice 32:

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.
2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 33:

Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant 4 haies de 1 à 4. Pour chaque entier i, $1 \leq i \leq 4$, la probabilité de renverser la haie numéroté i est $\dfrac{1}{2i}$.

Le coureur poursuit sa course jusqu'à la $4^{ème}$ haie.

1°) calculer la probabilité des événements suivants.

A- aucune haie n'est renversée
B- le coureur renverse la $1^{ère}$ et la $4^{ème}$.
C- le coureur renverse 2 haies.
D- le coureur renverse au moins une haie.

2°) le coureur gagne 2 points pour chaque haie non renversée et perd 2 points pour chaque haie renversée.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du coureur.
Déterminer la loi de x et calculer son gain moyen.

Exercice 34:

Un jeu consiste à lancer deux dés non pipés, un rouge et un vert, dont les faces portent les numéros 1 à 6. Un joueur a misé 1Franc sur le numéro 5.Si le numéro est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4Francs. S'il est obtenu sur un seul dé, le joueur reçoit 3Francs. S'il n'est obtenu sur aucun dé, le joueur perd sa mise. G est la variable aléatoire qui compte le gain algébrique de ce joueur (somme reçue diminuée de la mise).
Donner la loi de probabilité de Y et calculer E (Y).

Exercice 35:

Une machine remplit automatiquement des sachets en mélangeant deux produits A et B. Dans chaque sachet, la masse de produit A introduite par la machine est 50g avec une probabilité de 0.8 ou 51g avec une probabilité de 0.2 et indépendamment, la masse de produit B introduite est 50g avec une probabilité de 0.6 ou 51g avec 0.4 .

1. Quelles sont les masses X possibles d'un sachet ?
2. Etablir et présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de X.
3. Calculer E (X).

Exercice 36:

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.
1. Soit les évènements suivants :
A « Les trois boules sont rouges. »
B « Les trois boules sont de la même couleur. »
C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »
a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.
b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.
2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D « Tirer deux boules rouges. »
E « Tirer deux boules de la même couleur. »
a. Montrer que la probabilité de l'événement D est
$$p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$
b. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n.
Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E)\geq\frac{1}{2}$?

Exercice 37:

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.
Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.
1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »
E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »
b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.
Établir la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
On effectue ainsi k tirages successifs.
Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 38:

Un porte-monnaie contient 2 pièces de 50F et n pièces de 100F.
1°/ Un enfant prend une pièce au hasard puis la remet dans le porte-monnaie. Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait tiré une pièce de 100F ?
2°/ L'enfant tire deux pièces une après sans remise.
a) Dresser l'arbre de choix relatif à ce tirage.
b) Qu'elle est la probabilité des événements suivants :
A : « l'enfant a tiré deux pièces de 100F »
B : « l'enfant a tiré une pièce de 50 F et une pièce de 100F »
C : « l'enfant a tiré une pièce de 50F et une pièce de 100F dans cet ordre »
3°/ L'enfant tire simultanément 4 pièces puis les remets. Déterminer la valeur de m pour que la probabilité qu'il tiré exactement 300F soit égale à $\frac{1}{11}$.
4°/ Dans cette question n=10
L'enfant tire simultanément 4 pièces. Soit X la variable aléatoire égale à la somme tirée.
a) Déterminer la loi de probabilité de X ;
b) Déterminer son espérance mathématique et son écart type.

Exercice 39:

On dispose d'un dé cubique normal numéroté de 1 à 6 et deux urnes U_1 et U_2.
- U_1 contient 1 boule noire, 2 boules blanches et 2 boules rouges.
- U_2 contient 2 boules noires ; 2 boules blanches et 1 boule rouge

Toutes ces boules sont indiscernables au toucher.
Pour commencer le jeu on lance le dé puis :
- Si on obtient un multiple de 3, alors on procède, dans l'urne U_1, à deux tirages successifs d'une boule avec remise.
- Sinon, on extrait simultanément deux boules de l'urne U_2.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules noires obtenus.
1°/
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer son expérience mathématique et son écart type.
2°/ Déterminer et représenter la fonction de répartition de X
3°/ On a obtenu exactement une boule noire qu'elle est la probabilité pour q'elle provienne de l'urne U_2 ?

Exercice 40:

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleurs » : piques, trèfle, carreau et cœur ; chaque « couleur » comprend huit (08) cartes dont un as.
1°/ On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A= « les trois cartes sont des as »
B= « il y a au moins trois couleurs parmi ces trois cartes »
C= « il n y a pas d'as parmi les trois cartes ».

2°/ On tire successivement avec remise trois cartes du jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cœurs obtenus dans le tirage. Déterminer :

a) Les valeurs prises par X.
b) Définir la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X

Exercice 41:

On lance 5 fois une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir pile est égale au double de celle d'obtenir face.

1°/ Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois face.

2°/ Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que pile apparaît.

a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 42:

Un porte- monnaie contient quatre pièces de 500 et six pièces de 200. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièce de ce porte-monnaie.

1°/ Calculer la probabilité de l'événement A= « tirer trois pièces de 500 »

2°/ Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 figurant dans le tirage.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écarte type de X.

3°/ Soit Y la somme de la valeur faciale des pièces tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par Y.
b) Calculer l'écart -type de Y.

4°/ L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque les trois pièces tirées dans le porte- monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement Ase réalise trois fois à l'issue des cinq tirages.

Exercice 43:

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont équiprobables.

1°/ Calculer la probabilité des événements suivants

A= « les deux nombres sont strictement inférieurs à 5 »

B= « le 1er est strictement supérieur au double du second »

2°/ Un joueur effectue 7 parties successivement, les parties sont supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la 7ème partie l'événement B se réalise au moins deux fois ?

Exercice 44:

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints du paludisme. On choisit au hasard un individu parmi cette population. Calculer la probabilité pour que cet individu soit :

a) Un homme atteint du paludisme.
b) Une femme atteinte du paludisme.
c) Une personne atteinte du paludisme.
d) Un homme non atteint du paludisme.
e) Un homme, sachant qu'il est atteint du paludisme.
f) Une femme, sachant qu'elle est atteinte du paludisme.

Exercice 45:

1°/ Un dé A, bien équilibré possède :

- une face numérotée 1 ;
- deux faces numérotées 2 ;
- une face numérotée 4
- une face numérotée 5 ;
- une face numérotée 6.

a) On lace une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?
b) On lace trois fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient un nombre de trois chiffres. Quelle est la probabilité d'obtenir 421 ?

2°/ Un autre dé B, bien équilibré possède :

- une face numérotée 1 ;
- deux faces numérotées 2 ;
- deux faces numérotées 4
- une face numérotée 6.

On lance trois fois le dé B comme à la question 1.b). Vérifier que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{1}{54}$

3°/ Une urne contient 4 dés du type A et 6 dés du type B. On tire au hasard un dé de l'urne et on le lance trois fois de suite pour obtenir un nombre de trois chiffres comme décrit précédemment.

a) Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$.
b) Calculer la probabilité d'avoir joué avec un dé de type A sachant qu'on obtenu 421.

Exercice 46:

TANOH écrit les lettres de son nom sur 5 cartons et les met dans un chapeau. Ensuite, il tire successivement et sans remise 3 cartons du chapeau qu'il dépose devant li de la gauche vers la droite. Il obtient un mot

(Ayant un sens ou non).

1°/ Vérifier que le nombre de mots possible est égale à 60.

2°/ Parmi ces mots :

a) Combien finissent par T ?
b) Combien ne comporte aucune voyelle ?
c) Combien commence par une consonne ?
d) Combien comporte qu'une seule consonne ?

3°/ Démontrer que la probabilité d'avoir un mot terminé par T est égale à 0,2.

4°/ Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant au moins une voyelle.

5°/ Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant les lettres O et H.

Exercice 47:

Dans une classe de 10 élèves il y a 2 tricheurs.

1°/ Un professeur choisit au hasard n élèves dan cette classe. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un tricheur parmi les n élèves choisis soit supérieure ou égale à 0,9.

2°/ Chaque tricheur porte le N°1 et les autres le N°0. On choisit au hasard 3 élèves dans cette classe ; X est la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les élèves choisis.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
b) En déduire la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

STATISTIQUES

Introduction:

La statistique a pour but la collecte, l'analyse et l'interprétation des observations relatives à des phénomènes collectifs.

Son domaine d'application enveloppe entre autres les études économiques, sociales mais aussi la physique, la biologie etc. ...

I- *VOCABULAIRE DE BASE*

- **Population :**
On appelle population de base l'ensemble sur lequel porte une étude statistique. Une population peut ainsi être constituée d'objets, d'animaux etc.
- **Individu :**
Tout élément de la population statistique constitue une unité statistique ou un individu.
- **Echantillon :**
Un échantillon est une partie non vide d'une population statistique
- **Caractère:**
On appelle caractère toute propriété étudiée sur la population ou sur l'échantillon. Il existe deux types de caractères :
  - *caractères qualitatifs* : ils relèvent de propriétés qui ne peuvent être mesurés; il s'agit du goût, du sens, de l'odorat, la nationalité , le groupe sanguin etc.
  - *caractères quantitatifs* : ils peuvent s'exprimés par un nombre réel ; les propriétés étudiés peuvent quantifiées, c'est à dire mesurées. Il s'agit du poids, de la taille, de l'âge etc.
- **Modalité :**
On appelle modalité toute valeur prise par un individu de la population.
- **Effectifs :**
a- **Effectifs total:** On appelle effectif total le cardinal de la population c'est à dire le nombre d'individu de la population.
b- **Effectif partiel :** Soit x_i une modalité on appelle effectif partiel de x_i l'entier naturel noté n_i égale au nombre d'individus qui ont la valeur x_i du caractère.

Remarque:

Soit N l'effectif total d'une population statistique et n_i l'effectif de la modalité x_i alors $N=\sum_{i=1}^{p} n = n_1 + n_2 + \dots\dots\dots\dots + n_{p_i}$

Etude d'un exemple :

Au cour d'un contrôle continu 20 élèves d'une classe de 1[ère] S_1 ont eu les notes suivantes en français :

08	07	12	10	11	09	03	08	02	14
06	12	05	07	10	11	03	05	01	16

Questions :

1. Sur quelle population porte l'étude statistique ?
2. Que représente un individu dans cette population ?
3. Donner l'effectif total ;
4. Quel est le caractère étudié sur cette population ?
5. De quel type de caractère s'agit-il ?
6. Donner les modalités du caractère; puis l'effectif partiel de chaque modalité.

II- SERIE STATISTIQUE A UNE VARIABLE OU SERIE STATISTIQUE SIMPLE:

Dans cette partie nous étudions sur une population un caractère quantitatif X on note par x_i les modalités du caractère et par n_i les effectifs partiels relatifs à x_i ($i \le i \le p$) rangé en ordre croissant et par N l'effectif total .

1. **Définition:**

On appelle série statistique à une variable ou série statistique simple l'ensemble des couples $(x_i\,;\,n_i)_{(i\le i\le p)}$ avec $p\le N$.

2. **Moyenne :** Soit $(x_i\,;\,n_i)_{(i\le i\le p)}$ une série statistique simple. On appelle moyenne arithmétique de la série statistique le réel noté $\overline{X}$ défini par : $\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{N}$

3. **Variance:**
Soit $(x_i\,;\,n_i)_{(i\le i\le p)}$ une série statistique simple. On appelle variance de X de la série le réel positif noté V(X) défini par :
$$V(X)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x^2}_i - \overline{X}^2 = \left(\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+\dots\dots\dots\dots+n_px_p^2}{N}\right)-\overline{X}^2$$

4. **Ecart type :**
Soit $(x_i\,;\,n_i)_{(i\le i\le p)}$ une série statistique à une variable. On appelle écart type de la série le réel noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple:

X	5	6	7	9	10	11	13	15
n	5	4	5	6	9	10	7	5

	x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
	5	5		
	6	4		
	7	5		
	9	6		
	10	9		
	11	10		
	13	7		
	15	5		
TOTAL				

a) Déterminer l'effectif total de cette série

b) Déterminer $\overline{X}$. $V(X)$ et $\sigma(X)$

III- SERIE STATISTIQUE A DEUX VARIABLES OU SERIE STATISTIQUE DOUBLE

Dans certains cas il arrive qu'on étudie sur les individus d'une même population simultanément deux caractères quantitatifs discrets X et Y . Par exemple dans une classe on peut se proposer d'étudier les notes de mathématiques et de physique chimie.

1. Définition:

Soit N l'effectif d'une population sur laquelle on étudie simultanément deux caractères quantitatifs discrets X et Y. On désigne par x_i ($1 \le i \le p$) les modalités du caractère X supposées en ordre croissant et y_i ($1 \le i \le k$) les modalités du caractère Y supposées aussi rangée en ordre croissant.

On appelle série statistique double ou série à deux variables l'ensemble des couples (x_i ; y_j) avec $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le k$.

L'effectif du couple (x_i ; y_j) est noté n_{ij}.

Une série statistique est dite injective (x_i ; y_j) $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le k$ lorsque:

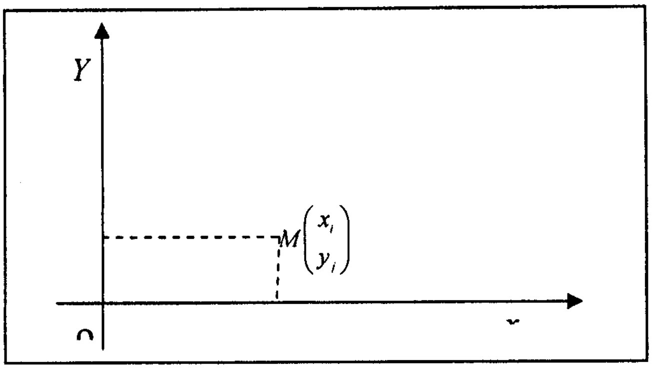
- ❖ p=k c'est à dire que X et Y ont même nombre de valeurs distinctes
- ❖ $n_{ij} = 1$ si i=j et $n_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Série statistique injective

X	x_1	x_2	x_3	…………………	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…………………	y_n

2- Nuage de points :

On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X;Y) , l'ensemble des points ayant pour couple de coordonnées (x_i ; y_j). Ces points sont notés M_{ij} on peut indiquer à droite de chaque point n_{ij}



3-Point Moyen du nuage statistique :

On appelle point moyen du nuage de points le point $G\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\end{pmatrix}$

4- Covariance:

On appelle covariance des caractères X et Y le réel noté $\text{cov}(X,Y)$ défini par : $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum n_{ij}x_iy_j - \overline{X}\ \overline{Y}$

pour une série injective on a : $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum x_iy_j - \overline{X}\ \overline{Y}$

5. Coefficient de corrélation linéaire : $r = \dfrac{Cov(X;Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Avec : σ_X l'écart type de X : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Avec : σ_Y l'écart type de Y : $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$

Remarque :

- ✓ Si $|r| \geq 0.87$ alors la corrélation entre X et Y est forte. Un ajustement affine est alors justifié. (les points du nuage de point sont dans une situation de proche alignement).
- ✓ Si $r = 1$ ou $r = -1$ alors les point du nuage sont alignés.

6 -Ajustement linéaire:

Le but de cette partie est de trouver une droite qui passe " le proche possible " de tous les points du nuage de points de la série.

Détermination d'un ajustement affine :

- ✓ **Droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés :** c'est la droite d'équation : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.
- ✓ **Droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés :** c'est la droite d'équation : $x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

Exemple1 :

On donne les notes X_i en mathématiques (sur 20) et Y_i en français (sur 20) de 12 élèves à un concours.

X	5	7	8	9	11	12	14	16	17	18	19	19
Y	4	6	5	6	5	7	12	11	10	9	11	13

1. Dessiner le nuage des points.
2. Marquer le point moyen
3. Quelle est la nature de la corrélation linéaire entre les notes de mathématiques et celles de français.
4. Déterminer la droite de régression $\Delta_{Y/X}$

Série statistique non injective

Y \ X	x_1	x_2	x_3	....	x_n	Totaux
y_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}	....	a_{n1}	$a_{.1}$
y_2	a_{12}	a_{22}	a_{32}	....	a_{n2}	$a_{.2}$
y_3	a_{13}	a_{23}	a_{33}	....	a_{n3}	$a_{.3}$
.. ..	.. ..	.. ..	.. ..	.. ..	.. ..	
y_p	a_{1p}	a_{2p}	a_{3p}	....	a_{np}	$a_{.p}$
Totaux	$a_{1.}$	$a_{2.}$	$a_{3.}$	....	$a_{n.}$	N

- Effectif total : $N = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0<j<p}} (a_{ij})$
- Effectif marginale de x_i est : $a_{i.} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + ... + a_{ip}$
- Effectif marginale de x_i est : $a_{.j} = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + ... + a_{nj}$
- Fréquence marginale : $f(x_i) = \frac{a_{i.}}{N}$; : $f(y_j) = \frac{a_{.j}}{N}$
- Fréquence conditionnelle : $f\left({}^{x_i}/{}_{y_j}\right) = \frac{a_{ij}}{a_{.j}}$; $f\left({}^{y_j}/{}_{x_i}\right) = \frac{a_{ij}}{a_{i.}}$;

STATISTIQUES

Exercice 1:

Le tableau suivant donne la taille Y (en cm) d'une fleur en fonction de l'âge X (en semaine).

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	x_1	12	16	x_2	34	36	41

1. Déterminer x_1 et x_2 sachant que : $\overline{Y} = 24$ et $Cov(X;Y) = 24$
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
3. Quelle serait la taille de la fleur au but de 15 semaines si l'évolution se poursuivait régulièrement ?
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 2:

Une entreprise de jeux électroniques, dispose sur cinq (05) années consécutives de l'évolution de sa production x (en milliers) et de son résultat net y (en millions de francs CFA) conformément au tableau suivant :

x_i (en milliers)	200	400	1 600	2 000	2 800
y_i (en millions)	18	84	1 188	1 800	6 600

1°/ Représenter le nuage de points de cette série dans un repère bien choisi. Au vue de l'allure du nuage est ce qu'un ajustement linéaire est possible ?

2°/ On note Z=lnX et T=lnY

a) Reproduire et remplir le tableau ci dessous :

x_i (en milliers)	200	400	1 600	2 000	2 800
y_i (en millions)	18	84	1 188	1 800	6 600
z_i					
t_i					

b) Donner une équation de la droite de régression de T en Z

c) En déduire une expression de y en fonction de x

d) Quelle estimation peut on faire du résultat de cette entreprise pour une production de 4000 ?

Exercice 3:

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise commerciale selon la date x_i

x_i	1990	1995	2000	2005	2010	2015
y_i	52	59	60	65	70	72

On pose : $Z_i = \dfrac{x_i - 1990}{5}$ et $T_i = \ln y_i$

1. Déterminer les équations des droites de régression de T en Z.
2. Déduire de la question précédente l'équation de la droites de régression de T en x.

Exercice 4:

Les résultats en math et P.C d'un groupe de 10 élèves d'une terminale L sont les suivants :

x_i désigne la note en math et y_i la note en P.C

x_i	14	13	9	10	11	5	4	13	16	5
y_i	15	12	8	11	7	10	6	15	16	10

1. Construire le nuage de points de cette série double.
2. Déterminer les équations des eux droites de régression par la méthode des moindres carrés et les construire dans le même graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation.

Exercice 5:

On donne la série double suivante

X	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Y	13	12	14	16	a

Par la méthode des moindre carrés la droite de régression de y en x a pour équation cartésienne $y = 9x + 0,6$.

1. Calculer $\overline{X}$
2. Exprimer $\overline{Y}$ en fonction de a.
3. En déduire que a=20.
4. Calculer le coefficient de corrélation pour cette valeur de a. Cette corrélation est elle forte ?
5. Estimer y pour x=3,2.

Exercice 6:

Le tableau ci-dessous donne le pourcentage des ménages possédant au moins une voiture entre 1958 et 1986.

On désigne par X l'année et par Y le pourcentage.

X	58	62	66	70	74	78	82	86
Y	25,5	35,7	49	56,5	62,1	66,8	71	74,7

1. Représenter le nuage de points
2. Calculer les moyennes, les variances et la covariance.
3. Déterminer la droite de régression de y en x puis la tracer.
4. Faire une estimation pour l'an 2000. Conclure.

Exercice 7:

Une entreprise a mis au point nouveau produit et cherche à fixer son prix de vente. Elle entreprend de faire une enquête auprès de ses clients potentiels ; les résultats sont consignés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires et x_i le prix de vente en milliers de francs.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1. Calculer le coefficient de corrélation. Un ajustement linéaire est il justifié ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite de égression de y en x.
3. Les frais de conception du produit s'élève à 28 millions le prix de fabrication de chaque produit est de 25.000Frs
   a) Déduire des questions précédentes que le bénéfice z s'exprime en fonction du prix de vente par la relation $z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$ où z est estimé en milliers de francs.
   b) Déterminer le prix de vente pour réaliser un bénéfice maximum.

Exercice 8:

Le coût Y d'une activité en fonction de la production X est donné par le tableau suivant :

X (unités)	10	12	15	6	18	20	21	25	30
Y(million)	20	25	32	x	35	40	43	45	50

1. Déterminer sachant que $\overline{Y} = 35$

2.
a) Construire le nuage de points associé à cette série statistique
b) Placer le point moyen.
3. Calculer les moyennes, les variances et les écarts types de ces deux caractères.
4.
a) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
b) Déterminer le coût pour une production de 70 unités
c) Donner le nombre d'unités pour un coût de 100 millions de francs.

Exercice 9:

On a relevé les notes x_i de mathématiques et les notes y_i de philosophie d'une classe de terminale. On obtenu les résultats suivants :

x_i / y_i	05	08	10	11	13	14
06	2	0	1	2	1	2
08	1	3	1	0	2	2
11	0	0	3	2	0	1
12	0	1	0	1	4	0
14	0	1	0	0	3	1

1. Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
2. Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
3. Calculer les variances $V(x)$ et $V(y)$.
4. Calculer la covariance $Cov(x;y)$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on déduire de ce coefficient qu'il existe une relation entre les notes de mathématiques et celles de philosophie dans cette classe.

Exercice 10:

Le classement d'un certain nombre d'individu selon leur âge A et leur taille T a donné le tableau suivant :

A / T	$[40;45[$	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$
$[150;155[$	20	9	1	0
$[155;160[$	2	18	4	1
$[160;165[$	0	5	12	6
$[165;170[$	0	1	7	14

1. Représenter le nuage de points associé à cette série et le point moyen de ce nuage.
2. Calculer $\overline{A}$; $\overline{T}$; $\sigma(T)$; $\sigma(A)$ et $Cov(T;A)$.
3. Calculer le coefficient de corrélation entre T et A.
4. Déterminer par la méthode de moindres carrés l'équation de chacune des deux droites de régression.
5. Construire les droites de régression.

Exercice 11:

Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en kg consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats suivants ci-dessous :

X / Y	$[5\ ;\ 7]$	$[8;10]$	$[11;13]$	$[14;18]$
$[10;15[$	1	3	0	0
$[15;25[$	5	9	8	3
$[25;35[$	0	7	5	9

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginale de X et Y.
2. A chaque centre x_i de classe de la série X, on associe la moyenne t_i de Y sachant que $X = x_i$. On obtient une série double (X,T). Déterminer cette série.
3. Dans la suite on considère la série (X,T) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
t_i	18.75	22.5	23.85	27.5

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et T. Un ajustement affine est-il justifié ?
b. Déterminer une équation de la droite de régression de T en X.
c. Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTRODUCTION

- On appelle équation différentielle une relation entre une fonction inconnue y et ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre, appelé ordre de l'équation differenyielle, l'expression de cette relation peut faire intervenir des fonctions données de la variable x .
- On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I toute fonction n fois dérivable sur I qui vérifie cette relation. On appelle courbe intégrale la courbe representative d'une solution.
- Notations des équations differentielles, la lettre y represente la fonction f, y' represente f' ; y'' represente la fonction f''.

I- EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

1. **Equation sans second membre** : $\mathbf{ay' + by = 0}$

Théorème1

Soit l'équation différentielle linéaire sans second membre : (E): $\mathbf{ay' + by = 0}$

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme : $y = ke^{-\frac{b}{a}x}$ où k est un réel quelconque

Théorème2

Pour tout couple de réels $(x_0;\ y_0)$, il existe une fonction y et une seule solution de l'équation (E): $\mathbf{ay' + by = 0}$ **tel que** $y(x_0) = y_0$.$\left(y = ke^{-\frac{b}{a}x}\ et\ k = \frac{y_0}{e^{-\frac{b}{a}x_0}} \right)$

2. **Equation différentielle du 1èr ordre avec second membre** : $ay' + by = g(x)$

Théorème 3

La solution générale de l'équation (E) : $ay' + by = g(x)$ est de la forme : $y = y_1 + y_2$ où y_1 est la solution de l'équation homogène associée : $ay' + by = 0$ et y_2 est une solution particuliere de (E).

II- EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

1. **Equation sans second membre** : $ay'' + by' + cy = 0$

Théorème1

Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (a et b constantes réelles).
L'équation : $r^2 + a.r + b = 0$ est l'**équation caractéristique** associée et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminat.

Si $\Delta > 0$ l'equation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2, alors la solution générale de (E) est $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.
Si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique admet une solution double r_0, alors la solution générale de (E) est $y = (Ax + B)e^{r_0x}$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.
Si $\Delta < 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i.\beta$ et $\alpha - i.\beta$ (avec α et β réels), alors la solution générale de (E) est $y = e^{\alpha x}.(A.\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

Cas particuliers : k et ω sont des reels positifs

1) $y'' + \omega^2.y = 0$. Les solutions de l'équation caractéristique sont $i\omega$ et $-i\omega$.La solution générale est donc $y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
2) $y'' - k^2.y = 0$. Les solutions de l'équation caractéristique sont k sont -k.La solution générale est donc $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

Remarque

Dans les trois cas, il existe une solution et une seule satisfaisant à des conditions initiales du genre $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

2. **Equation differentielle du 2nd ordre avec second membre** : $ay'' + by' + cy = g(x)$

Théorème 2

La solution générale de l'équatrion (E) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ est de la forme : $y = y_1 + y_2$ où y_1 est la solution de l'équation homogene associée $ay'' + by' + cy = 0$ et y_2 est une solution particuliere de (E).

Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur ℝ .

2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur IR par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
b. Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si $u+v$ est solution de (1).
c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
d. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Résolution

1. L'équation (2) sans second membre a, d'après le cours, pour solutions les fonctions définies sur IR par : $x \mapsto ke^{2x}$ avec k réel quelconque.

2. a. On a $u'(x)=(ax+b)e^x+ae^x=(ax+a+b)e^x$ donc u est solution de l'équation différentielle (1)
$\Leftrightarrow (ax+a+b)e^x-2(ax+b)e^x=xe^x$. Comme $e^x\neq 0$ pour tout réel x, u est solution de l'équation différentielle (1)
$\Leftrightarrow ax+a+b-2ax-2b=x$ c'est à dire si et seulement si, pour tout x réel, $-ax+a-b=x$ soit $\begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases} \Rightarrow a=-1$ et $b=-1$.

La fonction u cherchée est donc définie par $u(x)=(-x-1)e^x$.

b. On sait que $u'(x)-2u(x)=xe^x$, v est solution de (2)
$\Leftrightarrow v'-2v=0 \Leftrightarrow v'-2v+u'-2u=xe^x \Leftrightarrow (v'+u')-2(v+u)=xe^x \Leftrightarrow (v+u)'-2(v+u)=xe^x \Leftrightarrow u+v$ est solution de (1).
Remarque : on peut aussi supposer que v est solution de (2) et en déduire que $u+v$ est solution de (1) puis supposer que $(u+v)$ est solution de (1) et en déduire que v est solution de (2).
c. Soit f une solution de (1). On peut poser $f=u+v$. (On a alors $v=f-u$). On sait que $u+v$ est solution de (1) $\Leftrightarrow$ v est solution de (2).
Les solutions de (1) sont donc les fonctions f définies par : $x\mapsto -(x+1)e^x+ke^{2x}$ ($k\in\mathbb{R}$)
d. On cherche k tel que $f(0)=0$: $f(0)=0 \Leftrightarrow -e^0+ke^0=0 \Leftrightarrow k=1$. La solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction
$x\mapsto -(1+x)e^x+e^{2x}$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES
Exercices non corrigés

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle : (E): $y'+2y=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^x}$.

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f: x\mapsto e^{-2x}\ln(1+2e^x)$ est solution de (E).
2. Montrer que la fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi-f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'+2y=0$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 2:

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y'+(1+\tan x)y=\cos x$,

(E_0) : $y'+y=1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x)=g(x)\cos x$.
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=0$.

Exercice 3:

1. Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+5y=0$ puis déterminer la solution f vérifiant f(0)=0 et f'(0)=1.
2. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. A l'aide de deux intégrations par parties, déterminer F.

Exercice 4:

1. Soit (E) : $y''+2y'+5y=2\cos x$.

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $x\mapsto a\cos x+b\sin x$ soit solution de (E).

b) Résoudre (E) puis déterminer la solution f vérifiant $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $f'(\pi)=0$

2. Soit (E') : $2y''+3y'-5y=8\sin 2x$
Résolvez cette équation différentielle.

3. Soit (E'') : $y''-2y'+3y=e^{-\frac{1}{2}x}\cos x$

a) Résoudre l'équation sans second membre.

b) Déterminer les réels a et b pour que $x\mapsto(a\cos 2x+b\sin 2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ soit solution de (E'').

c) Donner alors la forme générales des solutions de (E'').

d) Déterminer la solution de (E'') vérifiant f(0)=0 et f'(0)=0.

Exercice 5:

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y''+3y'+2y=\cos 3x+x^2+x.$$

1. Donner la solution de l'équation sans second membre associée à (E).
2. Soit $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ et
$h(x)=a\cos 3x+b\sin 3x$

Déterminer les réels α, β, γ d'une part ; a et b d'autre part pour que :

- g soit solution de l'équation différentielle $y''+3y'+2y=x^2+x$. (1)
- et h solution de l'équation différentielle : $y''+3y'+2y=\cos 3x$ (2).

3. En déduire que $h+g$ est une solution particulière de(E).
4. Déterminer la solution générale de (E), puis la solution f de (E) qui vérifie :f(0) = 1 et f'(0) = 1.

Exercice 6:

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E): y'-2y=-\frac{2}{1+e^{-2x}}.$$

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle y'-2y=0 prenant la valeur 1 en 0.

2. Soit f la fonction définie sur IR telle que f(0)=ln2 et g la fonction définie par $f(x)=e^{2x}g(x)$.

a) Calculer g(0).
b) Calculer f '(x) en fonction de g '(x) et g(x).
c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si :

$$g(x)=\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

d) En déduire l'expression de f.

Parie B : Eude de la fonction $f: x \mapsto e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$

1. On pose $h(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\frac{1}{1+e^{2x}}$

a) Calculer la limite de h en $+\infty$.
b) Etudier les variations de h.
c) En déduire le signe de h
c) Calculer f '(x) et montrer que f '(x) et h(x) ont même signe.
d) Etudier les limites de f en $+\infty$. Montrer que $f(x)=e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{2x}\right)-2x\right]$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
e) Dresser le tableau de variations de f.
f) Représenter f dans un repère cartésien (unité 5cm). Préciser la tangente au point d'abscisse.

Partie C :

1. Montrer que $\frac{1}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire délimitée par les axes du repère, la courbe représentative de f et la droite d'équation x=-1.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \in [0;1]$
b) Montrer par récurrence sur n que (u_n) est croissante.
c) Monter que (u_n) converge vers α.
d) Montrer que $\alpha \in [0;1]$ puis donner une valeur approchée de à 10^{-1} près.

Exercice 7:

On considère la fonction $f: x \mapsto (x+1)e^{-2x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que f soit une solution de l'équation différentielle $(E): y''+ay'+by=0$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de f est aussi une solution de (E).
3. Déterminer la primitive de f solution de (E).

Exercice 8:

Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

1.
a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation
$$z^2\cos^2\theta - z\sin 2\theta + 1 = 0$$
b) Déterminer le module et un argument des solutions.

2. Résoudre l'équation différentielle
$$(1+\cos 2\theta)y''-2y'\sin 2\theta+2y=0$$

Exercice 9:

1. Donner les solutions des équations différentielles dans les cas suivants :

a) $4y''+9y=0$ avec $y(\pi)=1$ et $y'(\pi)=0$
b) $5y''-3y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=1$
c) $2y'+3y=6x^2-7x+2$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=2$

BACCALAUREAT SENEGALAIS

BAC S2 1999 1^er GROUPE

Exercice 1 :

L'étude du poids P de la larve d' un insecte mesuré en fonction de l' âge x a conduit au tableau suivant :

X (mois)	1	2	3	4	5
P (mg)	7	13	25	47	88

1°) On pose y = ln P ou ln désigne le logarithme népérien.

a) Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-5} près .

b) Tracer le nuage de points représentant les couples (X,Y) dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm) : y placer le barycentre G du nuage.

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X .

3°) Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

Exercice 2 :

Dans l'ensemble **C** des nombres complexes on considère l'équation

$$(E)\ z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$$

1°) a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.
b) Achever la résolution de l'équation (E)

2°) Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $z_A=-1$; $z_B=-2+i$; $z_C=i$.

a) Déterminer le module et argument de $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

Problème

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \quad \text{si } x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{si } x \in [0 ; +\infty[$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

Partie A

1°) Quel est le domaine de définition de f. Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.
2°) Montrer que la fonction f est continue en zéro.
3°) a) Etablir que la dérivée f ' de f a pour expression

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \text{si } x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[$$

$$f'(x) = x e^{-x}(2-x) \quad \text{si } x \in [0 ; +\infty[$$

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α comprise entre $-1,6$ et $1,5$.
5°) a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers $-\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) dans $]-\infty ; 0[\setminus \{-1\}$
6°) Tracer la courbe (C) en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi tangentes en O et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

Partie B

1°) Soit g la restriction de f à [0,2]. Montrer que g définit une bijection de [0 ; 2] sur un intervalle J à préciser.
2°) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.
b) Montrer que $g^{-1\,\prime}\left(\frac{1}{e}\right) = e$.
3°) On appelle (C ') la courbe représentative de g^{-1}.
Tracer (C ') en utilisant la courbe C et une transformation à préciser (on placera sur la courbe (C ') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$).

Partie C

λ étant un réel strictement positif, on pose $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx$.

1°) a) Interpréter graphiquement $I(\lambda)$.
b) En procédant à une intégration par parties, calculer $I(\lambda)$.
2°) Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.
3°) On pose $\lambda = 2$.
a) Calculer $I(2)$.
b) En déduire la valeur en cm² de l'aire de la partie limitée par C ' et les droites d'équation $y = 0$; $x = 0$ et $x = \frac{4}{e^2}$.

BAC S2 1999 2ème groupe

Exercice 1 :

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = (-1 + i\tan a)z - i\tan a + 2$

1°) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$.
2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.
3°) Soit h_a l'homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$. Donner une écriture complexe de la rotation r_a telle que : $f_a = r_a \circ h_a$.

Exercice 2 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 3 boules noires et 1 blanche. L'urne U_2 contient 1 boules noires et 2 blanches. On jette un dé cubique, parfaitement équilibré. Si le dé donne 6, on tire au hasard une boule de l'urne U_2, sinon on tire au hasard une boule de l'urne U_1.
On désigne par :
S l'événement : « on obtient 6 avec le dé ».
N l'événement : « on tire une boule noire ».

1°) Calculer les probabilités des événements $S \cap N$ et $\overline{S} \cap N$.
2°) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.
3°) Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé, sachant que l'on a tiré une boule blanche.

Exercice 3 :

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right)$.

1°) a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.
b) Justifier que (V_n), définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln U_n$ existe et est arithmétique.
2°) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n$.
a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n.
b) Déterminer les limites à l'infini de S_n et P_n.

Exercice 4:

On considère la fonction f de $[0 ; +\infty[$ dans R définie par :

$$f(x) = e^{2x} + 4x - 2.$$

1°) Montrer que f réalise une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2°) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,1 < \alpha < 0,2$.

BAC S2 1999 REMPLACEMENT

Exercice 1 :

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $-z^3 + 6z - 20i = 0$ (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a.
2°) Notons b et c les autres solutions de (E), b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de P d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.
3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} + i}$
a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point $A' = r(A)$.
b) Déterminer l'ensemble des points M de P dont les images par f ont pour affixe un réel négatif. On notera E cet ensemble.
c) Déterminer l'ensemble F des points M de P dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2 :

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). on note X la quantité, en tonnes de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mopis précédents est le suivant :

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1°) a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z.

b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation de X ?

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour Y = 39.

Problème

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}$$

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 2 cm).

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour tout $x \in]0 ; 1[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) En déduire que C admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.

3°) Etudier les variations de f.

4°) Tracer la courbe C.

Partie B

Soit g la restriction de f à $]1 ; +\infty[$.

1°) Montrer que g est une bijection de$]1 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

On notera g^{-1} la bijection réciproque de g.

2°) Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une solution α sur l'intervalle$]1 ; +\infty[$

(on ne demande pas de calculer α).

3°) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

4°) Tracer dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les représentations graphiques des bijections g et g^{-1} (on notera ces dernières C_g et C_{g-1}).

on prendra 2cm pour unité du repère, on indiquera en annexe la nature et l'équation de chacune des asymptotes à C_g et C_{g-1}.

5°) Calculer en cm² l'aire A de l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ défini par : $\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq g-1(x) \end{cases}$

BAC S2 : 2000 1er GROUPE

Exercice 1 :

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives :

$Z_1 = 1$; $Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $Z_3 = \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{4}$

1°) a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\dfrac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2°) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne d'affixe Z ', l'image par S du point M d'affixe Z. Exprimer Z ' en fonction de Z ; en déduire l'image, par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 2 :

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\dfrac{1}{30}$.

1°) a) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{12}$.

b) En déduire p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.

2°) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de la probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3°) Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de S.

b) On gagne à ce jeu lorsque $S \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner.

Problème

Soit la fonction de R dans R définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1 + x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1°) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour x < 0, f ' (x) > 0.

b) Etudier les variations de f ' sur [0 ;+ ∞[. En déduire que pour x >0, f ' (x) >0.

c) Donner le tableau de variation de f.

3°) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (on pourra poser $u = \dfrac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : y = x + 1 est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On admettra que (C) est en dessous de (D).

4°) a) Construire (C), on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour x >0

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C) en + ∞.

Partie B

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

2°) En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$$F(x) = \frac{(x^2-1)\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$

3°) Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations x = 0 et x = e − 1.

Partie C

1°) a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} .

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .

2°) Construire (C ') courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le e-1 \\ f(x) \le y \le f{-1}(x). \end{cases}$

BAC S2 2000 REMPLACEMENT

Exercice 1 :

Soit le nombre complexe

$Z = (1-x)$ ***Erreur ! Signet non défini.*** avec x ∈ R.

1°) Calculer le module et un argument de Z(on discutera selon les valeurs de x) . Donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme exponentielle de Z.

2°) Montrer que Z^{2004} est un réel dont on précisera le signe.

3°) a) Montrer que l'équation | Z| = 2 admet deux racines Z_1 et Z_2.

On notera Z_1 le complexe de plus grande partie réelle et Z_2 l'autre racine.

b) Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

c) Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et vérifier que A_2, O, A_1 sont alignés.

Exercice 2 :

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de se bêtes.

1°) Soit X le nombre de moutons tués.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type de X.

2°) On estime qu'un mouton donne environ 20kg de viande et une chèvre 15kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.

On note A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et B l'événement « il y a assez de viande ».

a) Calculer P(A) et P(B)

b) Calculer P (B / A) ; A et B sont-ils indépendants ?

Problème

I — On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) En déduire le signe de g (x) suivant les valeurs de x.

II — On considère la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = \ln(-x) & \text{si } x < -1 \\ f(x) = (x+1)(1+e{-}x) & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) du plan.(unité 2 cm) .

1°)) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur R .

b) Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variations de f. (On utilisera I. 2).

2°) a) Montrer que la droite D d'équation y = x + 1 est asymptote à la courbe C en + ∞.

b) Etudier la position relative de C et D sur [− 1 ; + ∞ [.

3°) Montrer qu'il existe un unique point de la courbe C dont on précisera les coordonnées, où la tangente (T) est parallèle à la droite D.

4°) Tracer la courbe C, l'asymptote D et la tangente (T), on précisera la tangente ou les demi-tangentes à C au point d'abscisse − 1.

5°) a) Montrer que f est une bijection de [− 1 ; + ∞ [sur un ensemble J que l'on précisera.

b) Construire la courbe C ' de f^{-1} sur le même graphique que la courbe C.

III – Pour λ ≥ − 1, on note A (λ) l'aire en cm² de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \le x \le \lambda. \\ x+1 \le y \le f(x) \end{cases}$

a) Calculer A (λ) à l'aide d'une intégration par parties.

b) Montrer que A (λ) admet une limite finie lorsque λ tend vers + ∞.

Calculer et interpréter graphiquement cette limite.

BAC S2 2001 1er GROUPE

Exercice 1 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$.

1) a) – Résoudre dans $\mathbb{C}$: f (z) = z. Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer $z_1^4 + z_2^4$

2) Soit M (z) un point de P. Soit (Γ) l'ensemble des points M (z) tels que f (z) soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ). Tracer (Γ).

3) Montrer que |z| = 1 équivaut à |f (z)| = 1.

Exercice 2 :

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1°) Quelle est la probabilité des événements :

A « les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 »

B « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second ».

2°) Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes; Quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la 7ème partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ?au moins une fois ?

Problème

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x(1 - \ln x)^2$ et g (0) = 0 où ln x désigne le logarithme népérien de x, on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) - Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

b) - Etudier les variations de g.

c) - Tracer (C).

2. a) Soit α un réel appartenant à l'intervalle] 0, e [.

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire A (α) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = e$.

b) - Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) : $y=x$

b) Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) : $y = mx$, recoupe-t-elle la courbe C en deux points M_1 et M_2 autres que O ?

c) La droite (Δ_m) coupe la droite D d'équation $x = e$ en P. Montrer que : $OM_1 \times OM_2 = OP^2$.

4. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[e ; +\infty[$ admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable? Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

c) Construire la courbe de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

BAC S2 2001 2ème groupe

Exercice 1 :

1°) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

2°) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3°) Résoudre :

a) Dans R : $f(x) + \sqrt{2} = 0$

b) Dans $[0 ; 2\pi[$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

Exercice 2 :

1°) Factoriser : $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$.

2°) On note r le module de α et θ un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de (E).

3°) P désigne le plan complexe ; on note S_α l'application définie sur P par :

$$S_\alpha : P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que : } z' = i\alpha z + \alpha^2.$$

Déterminer α pour que S_α soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 3 :

Les relevés de l'intensité (x_i) du travail fourni exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (y_i) (nombre de battements par minute) de 8 personnes sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1°) Représentez le nuage de points M_i $(x_i ; y_i)$.

2°) Déterminez les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, les variances V(x) et V(y) de x et y . On précisera les formules utilisées.

3°) Déterminez la droite de régression de y en x ;la tracer.

Exercice 4 :

1°) Etablir que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2°) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 7 - 4\,ex & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x + 3 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.

c) Etudier les variations de f.

3°) C est courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Ecrire l'équation de la tangente à C au point d'abscisse e.

b) Tracer C .

BAC S2 2002 1er GROUPE

Exercice 1 :

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que, dans $\mathbb{C}$, la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à zéro ($n \ge 2$)

2. En utilisant les résultats du 1) montrer que $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 2:

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

Note de Math / Note de SP	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle $X = (x_i)$ la série statistique des notes de Sciences Physiques et $Y = (y_i)$ la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne z_i de la série conditionnelle y / z_i.

2. On considère la série double $(x_i ; z_i)$

a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points $M(x_i, z_i)$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série $X = (x_i)$ et $Z = (Z_i)$.

c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z et X par la méthode des moindres carrés.

d) Tracer cette droite.

Problème

A. On considère la fonction g définie sur $R+ \setminus \{1\}$ par :

$g(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$ pour tout $x > 0$ et $x \ne 1$; $g(0) = 0$.

1. Montrer que g est continue à droite en zéro.

2. Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Dresser le tableau de variation de g. En déduire le signe de g(x) en fonction de x.

B. On considère la fonction f définie sur $R+ \setminus \{1\}$ par :

$f(x) =$ ***Erreur ! Signet non défini.*** si $x > 0$ et $x \ne 1$; $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite et dérivable à droite au point O. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0.

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Comparer $f'(x)$ et $g(x)$. En déduire les variations de f et son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse e^2.

5. Soit M le point de C d'abscisse x et N le point de D de même abscisse x. On pose $\varphi(x) = \overline{NM}$. Montrer que :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{x+e^2}{4}$$

Déduire de A) le tableau de variations de $\varphi'(x)$ puis le signe de $\varphi'(x)$ sur$]1\,;+\infty[$.

En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur$]1\,;+\infty[$et la position de C par rapport à D pour les points d'abscisse $x>1$.

6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe C et la droite D (unité 2 cm).

C. On revient à la fonction g du A). On note Cg la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm). Sans construire Cg, calculer en cm^2 l'aire de la partie plane comprise entre la courbe Cg, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = e$ et $x = e^2$.

BAC S2 2002 2ème groupe

Exercice 1 :

Calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}(2x^2-1)\cos 3x\,dx$.

Exercice 2 :

1°) Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2°) Déterminer et construire $E_1 = \{M(z)\,;(iz-2)(\overline{z}-1)$ soit un réel$\}$

3°) Déterminer et construire $E_2 = \{M(z)\,;\arg[(iz-2)(\overline{z}-1)] = \frac{\pi}{2}\}$.

Exercice 3

Un sac contient douze jetons indiscernables au toucher sur chacun desquels est inscrite une lettre du mot « SENEGALAISES ».

1°) Déterminer la probabilité d'avoir les lettres du mot « SAGESSE » dans chacun des cas suivants :

a) On tire simultanément sept lettres du sac.

b) On tire successivement sept lettres en remettant à chaque fois la lettre tirée dans le sac après l'avoir notée.

2°) Déterminer la probabilité d'avoir dans leur ordre les lettres du mot « SAGESSE », si l'on tire successivement sans remise sept lettres du sac.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \ln(1+e^x)$.

1°) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2°) Vérifier que $e^x + 1 = e^x(1+e^{-x})$; en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3°) Montrer que la droite D : $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

4°) Montrer que f est bijective. Calculer f v(0) et $(f^{-1})'(-\ln 2)$.

5°) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

BAC S2 2003 1er GROUPE

Exercice 1 :

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note T l'événement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'événement « être malade » $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

On rappelle que pour tous événements A et B on a :

(*) $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1°) a) Réécrire la relation (*) pour A = T et B = M puis pour $A = \overline{M}$ et $B = \overline{T}$.

b) En déduire que $P(M\cap T) = P(\overline{M})\,[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})]$.

2°) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3°) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test Positif à cette maladie.

b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2 :

Dans l'ensemble ℂ des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z3 + (1-8i)z2 - (23+4i)z - 3 + 4i = 0$

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions de (E).

c) Donner l'ensemble des solutions de (E).

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $2, -2,$ et 1

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2i et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

Problème

PARTIE A

On considère la fonction u : $[0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de u ; Calculer u (0) et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

2°) Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3°) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall x \in [0 ; 1[, u(x) \geq 0$.

b) $\forall x \in]1 ; +\infty[, u(x) < 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par : $g : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1.$$

1°) Déterminer D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

2°) a) Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à] 0 ; 1 [tel que $g(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3°) Tracer la courbe C g de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

PARTIE C

Soit f : $[0 ; 1[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

1°) Montrer que f est dérivable sur [0 ; 1 [et que : $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [0 ;1[$.

2°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe C g, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$.

BAC S2 2004 1er GROUPE

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$, de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$, de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1°) a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) En déduire z_n.

2°) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$.

3°) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots\dots\dots z_n$.

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n.

b) Démontrer que si n est impair, alors Z_n est réel.

Exercice 2 :

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1°) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F ».

2°) soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3°) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Problème

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f et trouver les trois réels a, b et c tels que pour tout x de D_f, on ait

$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

3°) a) Déterminer la fonction dérivée de f.

b) Résoudre dans R l'équation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.

c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

4°) On appelle (C) la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de (C) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser l'autre asymptote.

5°) Soit x un réel de D_f. On considère les deux points M et M ' de (C) d'abscisses respectives x et – x. Déterminer les coordonnées du milieu Ω du segment [M M ']. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

6°) Tracer la courbe (C).

7°) a) Trouver les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble D_f on ait : $f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$.

b) Soit k un réel supérieur ou égal à 2. Déterminer l'aire A (k) en cm² de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x ;y) vérifient : $\ln 2 \leq x \leq \ln k$ et $2x - 1 \leq y \leq f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A(k)$.

BAC S2 2004 2ème groupe

Exercice 1 :

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U0 = e3 \\ Un + 1 = e\sqrt{Un} \end{cases}$ et $Vn = \ln(Un) - 2$.

1°) Calculer U_1 et V_1.

2°) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3°) Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.

4°) Etudier la convergence des suites (V_n) et (U_n).

Exercice 2 :

1°) a) Démontrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

a) Calculer la dérivée de f.

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$.

Exercice 3:

On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois le dé et on note le numéro de la face de dessus. on note P_i la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est i ».

1°) sachant que l'on a $P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_5 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3$, montrer que $P_1 = \frac{1}{15}$ et en déduire P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.

2°) Calculer la probabilité de l'événement : « obtenir un numéro pair »

3°) On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un numéro pair ?

Exercice 4:

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

c) En déduire les solutions de l'équation :

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

2°) Soit les points A, B d'affixes $1 + i$, $1 - i$. Déterminer le centre de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

BAC S2 2004 REMPLACEMENT

Exercice 1 :

1°) a) Montrer que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (E). On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$.

2°) a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire les arguments des solutions de (E).

3°) Déduire des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}.$$

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F.

b) Construire l'image B du point A d'affixe -1.

Exercice 2 :

Une étude faite sur l'effectif X des familllles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

X \ Y	[5 ; 7]	[8 ; 10]	[11 ; 13]	[14 ; 18]
[10 ; 15]	1	3	0	0
[5 ; 25]	5	9	8	3
[25 ; 35]	0	7	5	9

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y.

2°) A chaque centre x_i de classe de la série de X on associe la moyenne z_i de Y sachant que $X = x_i$.

3°) Dans la suite on considère la série (x, z) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

c) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

Problème

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (G) passe par le point A (0 ; − 1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

1°) Etudier les variations de f définie sur R par $f(x) = e^{2x} - e^x$.

2°) Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ; Unité 2 cm.

a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

3°) a) Tracer (Γ).

b) Calculer l'aire A (α) en cm^2 du domaine délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$, $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1°) Démontrer que h est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

2°) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis calculer $h^{-1}{}'(3)$.

3°) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
4°) Tracer (C ') la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

BAC S2 2005 1er GROUPE

Exercice 1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.
2°) a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
b) Soit l'équation $E : z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1 - i)$.
En posant $u = \dfrac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation E.
3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 2 :

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i

x_i	60	80	10	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont les y_i.
1°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
3°) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.
a) Déduire de la question précédente que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité : $z = -5{,}95\,x^2 + 1426{,}25\,x - 59937{,}5$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.
b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.
N.B Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.
Rappel : Bénéfice = Prix de vente – Prix de revient.

Problème

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$$

1°) a) Etudier les variations de f.
b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe.
(Unité : 2cm).
c) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]-\infty ; 0[$.
2°) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.
a) Démontrer que g est dérivable sur R.
b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x) = e^{-x}.f(x)$.
c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.
d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.
3°) a) Montrer que $\dfrac{1}{1 + e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.
b) A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} g(x)dx$.
Justifier l'existence de $I(\lambda)$.
Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.
c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1°) Montrer que g est une bijection de R sur un intervalle J à préciser.
2°) a) Calculer g (0).
b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln 2.
c) Déterminer l'équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln 2.

BAC S2 2005 2ème groupe

Exercice 1 :

On considère l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$.

Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 2 :

Soit la suite (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2i \end{cases}$

1°) Calculer z_1 et z_2.
2°) On considère la suite (U_n) définie par: $U_n = z_n + 2$.
a) Montrer que : $U_n = (2 + i)(1 + i)^n$
b) Exprimer z_n en fonction de n.
3°) Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives z_{n+1}, z_n, i et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Démontrer que : $\dfrac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que:
$(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

Exercice 3 :

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :
a) un homme atteint de paludisme.
b) une femme atteinte de paludisme.
c) Une personne atteinte de paludisme.
d) un homme non atteint de paludisme.
e) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.
f) une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

Exercice 4 :

1°) Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle : $y'' + 25y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -5$.
2°) Soit g la fonction numérique définie sur $[0 ; 2\pi]$ par : $g(x) = \cos 5x - \sin 5x$; C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct. Déterminer les points d'intersection de C_g et l'axe des abscisses.

BAC S2 2006 1er GROUPE

Exercice 1 :

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, et par z_2 l'autre solution de (E).

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.On considère les points A, B, C d'affixes respectives z_1, z_2 et $\sqrt{3}+1$. Placer les points A, B, et C. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3°) On considère l'équation différentielle : $ay'' - by' + cy = 0$, où a, b et c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble {1 , 2, 3, 4, 5, 6}. Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur b et le troisième, celle de c.

a) Justifier que l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme : $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, où A et B sont des réels si et seulement si $1+i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, $az^2 - bz + c = 0$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, A et B étant des constantes réelles.

Exercice 2:

Les parties **A** et B sont indépendantes.

A- Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1°) Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

<u>NB</u> : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les les graduations à partir de 8 m.

2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4°) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

B- Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : Y / Cause des accidents : X	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1°) Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.

2°) Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2}.

3°) Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{2.}$.

Problème

I. On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x(1+e^{2-x})$. On note C sa corbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1°) Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de h (x) sur R.

2°) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de C par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur R.

c) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de C par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire C (on tracera la tangente à C au point d'abscisse 2).

f) Construire C ' courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

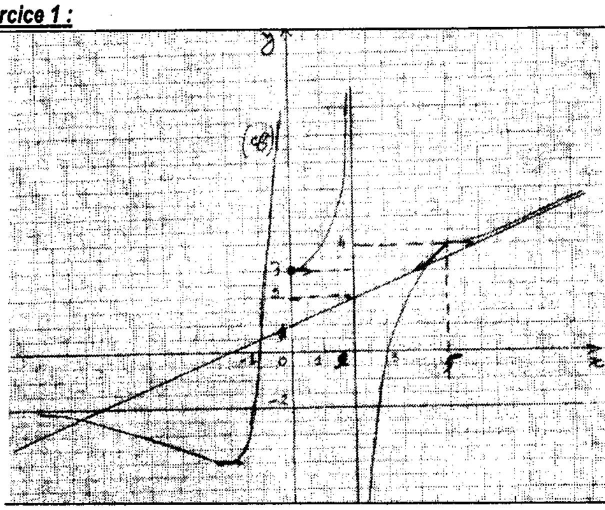
II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y = f(x)$ et $y = x$. Soit a (λ) l'aire de R_λ en cm^2.

1°) Calculer a (λ) en fonction de λ.

2°) Déterminer $a = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

BAC S2 2006 2ème groupe

Exercice 1 :



La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction f dans un repère orthonormal.

f est définie en 0 et on a f (0) = 3.

1°) Préciser l'ensemble de définition de f.

2°) Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f$.

3°) La courbe admet-elle une asymptote oblique? Si oui, donner son équation.

4°) Préciser les équations des autres asymptotes.

5°) Le fonction est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.

6°) Dresser le tableau de variation de f.

7°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par g (x) = ln (f (x)).

Exercice 2:

1°) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

2°) a) Calculer $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$;

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)}dx$$. (On remarquera que : $\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$)

Exercice 3 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient 3 boules rouges et 4 jaunes et U_2 2 rouges et 3 jaunes. On prélève au hasard une boule dans U_1 que l'on remet dans U_2, puis on tire une boule dans U_2.

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : « obtenir une boule rouge de U_1 ».

b) B : « obtenir une boule rouge de U_2 sachant que la boule remise est rouge. »

c) C : « La boule tirée de U_2 est rouge ».

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

1°) Résoudre cette équation différentielle.

2°) Trouver la solution f de cette équation dont la courbe représentative passe par A (0 ; 2) et a en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

BAC S2 2007 1er GROUPE

Exercice 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0.$$

1°) a) Déterminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déterminer la troisième solution de cette équation.

2°) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2 + i.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I(1 + i) et de rayon r à déterminer.

Exercice 2:

1°) On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient:

$$p_1 = p_2 \ ; \ p_3 = p_4 = 2p_1; \ p_5 = p_6 = 3p_1.$$

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A: " obtenir 3 ou 6" est égale à $\frac{5}{12}$.

2°) Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible; à 5m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$. Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette; à 7 m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{2}{5}$. On note C l'événement : " la cible est atteinte".

a) Déterminer $p(C|A)$ et $p(C|\overline{A})$. En déduire que $p(C) = \frac{29}{60}$.

b) Déterminer $p(A|C)$.

3°) Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Problème

I. Soit g la fonction définie sur$]0 ; +\infty[$par :

$$g(x) = 1 + x + \ln x.$$

1°) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que $\alpha \in \left]0,2;0,3\right[$.

3°) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4°) Etablir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

II. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{1+x} & si\ x \succ 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4°) Montrer que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

5°) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

6°) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7°) Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique: 5 cm. Prendre $\alpha \approx 0,3$.

III. 1°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$I = \int_1^e x.\ln(x).dx.$$

2°) Montrer que pour tout x élément de [1; e], $\frac{x\ln x}{e+1} \le f(x) \le \frac{x\ln x}{2}$.

En déduire que $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \le \int_1^e f(x)dx \le \frac{e^2+1}{8}$.

BAC S2 2007 2ème groupe

Exercice 1 : 03,5 points

1°) Déterminer les fonctions définies sur R, solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2°) Déterminer la solution f de 'E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = 1 \ et \ f'(0) = -2.$$

3°) Résoudre sur l'intervalle [0, 2π] l'équation :

$$e - x\,(\cos x - \sin x) = 0.$$

Exercice 2: 4 points

Soit $w = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1°) a) Calculer w^2.

b) Déterminer le module et un argument de w^2.

c) Donner une écriture exponentielle de w^2.

2°) En déduire un argument de w.

Exercice 3 4,5 points

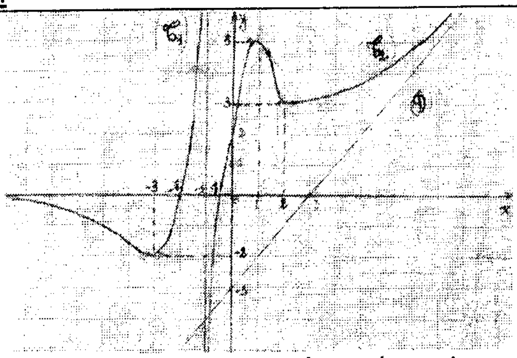
Un sac contient des jetons blancs et des jetons noirs. 45% de ces jetons sont blancs. Les jetons contenus dans le sac sont numérotés 1 ou 2 et ils sont indiscernables au toucher. Parmi les jetons blancs, 40% portent le numéro 1 et parmi les jetons noirs, 60% portent le numéro 1. On tire au hasard un jeton du sac. On considère les événements suivants :

A : « le jeton tiré est blanc » ; B : « le jeton tiré est noir » ;
C : « le jeton tiré porte le numéro 1 » ; D : « le jeton tiré porte le numéro 2 ».

1°) Calculer : a) $p(A \cap C)$ b) $p(B \cap C)$ c) $p(C)$.

2°) Le jeton tiré porte le numéro 1. Quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

Exercice4



Dans la figure ci-dessus, $C_1 \cup C_2$ est la représentation graphique C_f d'une fonction numérique f définie et continue sur son ensemble de définition.

1°) a) Donner l'ensemble de définition de définition de la fonction f.
b) f est-elle dérivable en 1 ? (Justifier la réponse).

2°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) Donner une équation de la droite (D).

4°) Préciser toutes les droites asymptotes à la courbe C_f.

5°) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

6°) Donner une équation de chacune des demi tangentes au point d'abscisse 1.

7°) Préciser les maximas et minima de la fonction f.

8°) Donner les solutions dans R de l'équation :
a) $f(x) == 0$ b) $f'(x) = 0$.

9°) Soit $m \in \mathbb{R}$. Préciser l'intervalle de R sur lequel l'équation : $f(x) = m$ admet 4 solutions réelles distinctes.

BAC S2 2008 1er GROUPE

Exercice 1 :

1. On considère l'équation
(E) : $z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z + 9 - 45i = 0$.
   a. Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).
   b. Achever la résolution de (E). (On appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution).
2. Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i , 3 + 3i et 3 - 2i.
   a. Placer les points A , B et C dans le repère.
   b. Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$, En déduire la nature de ABC.
3. Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
   a. Donner une écriture complexe de f.
   b. Donner les éléments géométrique caractéristiques de f.

Exercice 2 :

1. Soient les équations différentielles :
(E_0) : $y'+y=0$ et (E) : $y'+y=e^{-x}\cos x$.
   a) Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E) avec $h(x)=(a\cos x+b\sin x)e^{-x}$
   b) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0).
   c) Résoudre(E_0).
   d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).
   e) Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0)=0$.
2. Soit ℓ la fonction définie par : $\ell(x)=e^{-x}\sin x$.
   a) Exprimer $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
   b) Etudier les variations de ℓ sur $[0;\ 2\pi]$.
   c) Calculer $I=\int_0^{2\pi}\ell(x)dx$.

Exercice 3 :

On dispose de trois urnes U_1 ; U_2 et U_3.

U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ;

U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;

U_3 contient 5 boules jaunes et 4 boules rouges et 1 boules verte.

Descriptions de l'épreuve

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1

Si elle est verte on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2

Si elle est rouge, on la met dans puis U_3 on tire une boule dans U_3

Question

A) 1) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.
2) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge.
3) En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.
4) Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.
5) calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage.

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :
- Une boule verte, on gagne 1000F.
- Une boule jaune, on gagne 500F
- Une boule rouge, on perd 500F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X.

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième près par défaut.
1) Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage.
2) Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage.
3) Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage.

Exercice 4 :

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10^{-1} près.
Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (Y) d'un enfant en fonction de son âge (X).

X (années)	0	1	2	4	7	11	12
Y(kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal. Unité graphique : en abscisse 1cm pour 1 année et en ordonnée 1cm pour 2kg.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G.
3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r.
   b) Interpréter votre résultat.
4) Donner une équation de la droite de régression (D)de y en x. Tracer (D).
5) a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15kg. Expliciter votre raisonnement.
   b) Retrouver ce résultat par le calcul.

BAC S2 2009 1ᵉʳ groupe

Exercice 1 :

1) (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X. Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que : (D_1) :$y = ax + b$ et (D_2) :$y = a'x + b'$.
Soit r le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.
Etablir que $r^2=aa'$.
2) Dans une entreprise une étude simultané portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :
   - La droite de régression de X en Y a pour équation : $2.4x - y = 0$
   - La droite de régression de Y en X a pour équation : $3.5y - 9X + 24 = 0$

   a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance es positive.
   b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

Exercice 2 :

Une urne contient quatre jetons qui porte le nombre 1, deux qui portent e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$. On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés. A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = lnx + ilny$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « M appartient à l'axe des abscisses »
   B : « M appartient à l'axe des ordonnées »
   C : « M appartient aux deux axes »
   D : « M n'appartient à aucun des axes »
   E : « l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{\imath})$ est égal à $-\frac{\pi}{4}$ »
   F : « le point M appartient au cercle trigonométrique »
2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation, différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par : h(x)=ax+b, soit solution de (E').
3) a. Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si g-h est solution de (E).
   b. Résoudre (E').
   c. Déterminer la solution f de (E) telle que :
   $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.
4) Soit la fonction k définie par $k(x)=(x+2)e^{-x}$.
   a. Etudier les variations de k.
   b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de k au point d'abscisse 0.
   c. Démontrer que le point I(0 ; 2) est un point d'inflexion de la courbe (C).
   d. Tracer (C) et (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Exercice 4 :

1. a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = 2ln(x + 1)$. Tracer sa courbe representative (C) dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ unité 2cm
   b) Démontrer que sur $[2; +\infty[$ la fonction ℓ définie par : $\ell(x) = f(x) - x$, est bijective et l'équation $\ell(x) = 0$ admet une solution unique λ.
2. on considère la suite (U_n) avec $n \in IN$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 \\ U_n = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$
   a) sans faire le calcul, représenter les quatre premiers termes de suite sur le graphique.
   b) Démontrer pa récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$.
   c) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[2; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
   d) En déduire que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2(2/3)^n$, et que la suite (U_n) converge vers λ.
   e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que represente U_p pour λ.

BAC S2 2012 1ᵉʳ groupe

Exercice 1 :

Une urne contient 3 boules vertes et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

- Si elle rouge, on la remet dans l'urne, puis on tire simultanément deux boules .
- Si elle est verte, on ne remet pas, puis on tir une boule de l'urne.

Soit les événements suivants :
A : la boule tirée au premier tirage est rouge ;
B : les boules tirées au deuxième tirage sont rouges ;
C : les boules tirées au deuxième tirage sont vertes ;
D : la boule tirée au deuxième tirage est rouge.
Soi p la probabilité sur l'univers Ω.

1. Vérifier que $P(A) = \frac{4}{7}$; $P(B/A) = \frac{2}{7}$; $P(C/A) = \frac{1}{7}$; $P(D/\overline{A}) = \frac{2}{3}$.
2. Montrer que la probabilité :
   a) de ne pas avoir de boule rouge au deuxième tirage est $\frac{11}{49}$.
   b) d'avoir deux boules rouges au deuxième tirage est $\frac{8}{49}$

3. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues au deuxième tirage. Déterminer la loi de probabilité de Y.
4. Déterminer puis représenter graphiquement la fonction de repartition de Y
Echelle pour la représentation :
   - Sur l'axe des abscisses : 2cm → 1unité
   - Sur l'axe des ordonnées : 4cm → 1unité

Exercice 2 :

Partie A

On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1. Calculer g(1).
2. Etudier les variations de g.
3. Déduire de cette étude le signe de g(x) pour tout x de l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

4. Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
5. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
6. a) Montrer que la courbe représentative (C_f) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$.
   b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) suivant les valeurs de x.
7. Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (Δ).
8. Représenter dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ unité 2cm la courbe (C_f) et ses asymptotes.

Exercice 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthornormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

1. Résoudre dans ℂ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure(E) : $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1 +i, 2i et i. Placer les points A, B et C dans le repère (unité graphique 2cm)
3. Pour tout nombre complexe z différent de 1 + i, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$.
   a) Interpréter géométriquement $|z'|$ et arg(z').
   b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$.
4. Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B.
   a) Déterminer la nature du triangle ABC.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S
   c) Déterminer les images par S de (E1) et (E2) puis les construire.

Exercice 4 :

On donne l'équation différentielle (E) : $f'' + 2f' + f = 0$. On pose pour tout réel x, $k(x) = e - xh(x)$.

1. Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $h''(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle $h'' = 0$.
3. En déduire la solution générale f de (E).
4. Déterminer toutes les primitives de f sur IR.

BAC S2 2012 1èr groupe Remplacement

Exercice 1 :

1. Comparer les nombres complexes $-i$ et $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3$
2. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes chacune des équations qui suivent.
   a) $z^3 - 1 = 0$; b) $z^3 = -i$; c) $u^2 - (1 - i)u - i = 0$;
   d) $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$

Exercice 2:

Dans chacun des quatre cas ci-dessous, quatre déclarations/ propositions a), b), c) et d) sont faites. Une seule de ces propositions est vraie. Indique pour chaque cas la proposition vraie. Pour cela recopie et complète le tableau ci-dessous

CAS	Propositions vraie
Cas N°1	
Cas N°2	
Cas N°3	
Cas N°4	

Cas N°1. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = i$. l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur, est :

a) Le cercle de diamètre $[AB]$;
b) b) le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A ;
c) la droite (AB) privée du point A ; d) le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Cas N°2. Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite définie par : $U_0 = 1$; $U_2 = 2$ et pour tout n ∈ IN, $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$. La suite $(V_n)_{n \in IN}$ définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est :

a) une suite constante ; b) une suite arithmétique ; c) une suite géométrique ; d) une suite divergente.

Cas N°3. On pose $I = \int_1^e x \ln x dx$ on a alors :

a) $I = \frac{e^2+1}{4}$; b) I = e ; c) $I = \frac{e^2-1}{4}$; d) I = e - 1

Cas N°4. Dans une culture de microbes, le nombres de microbes en un instant t exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numerique y à valeurs réelles de la variable t. la vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que y'(t) = (ln2)y(t) et qu'à l'instant t = 0 la culture contient 200 microbes. Alors le nombre de microbes dans la culture au bout de 5 heures est :

a) 1000 ; b) 1200 ; c) 6000 ; d) 6400

Exercice 3:

Un gardien de but doit faire face, lors d'une séance d'entrainement, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes révèlent que :

- S'il a arrête le $n^{ième}$tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $(n + 1)^{ième}$) est 0.8
- S'il a laissé passer le $n^{ième}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{ième}$) est 0.6
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0.7.

On note A_n l'événement « le gardien arrête le $n^{ième}$tir »

1. a) Donner, pour n ≥ 1, les valeurs de $p(A_1)$; $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$.
   b) Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de $p(A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$ en fonction de $p(\overline{A_n})$
   c) En déduire que, pour tout entier n ≥ 1, on a
   $$p(A_{n+1}) = 0.2P(A_n) + 0.6$$
2. On pose, pour n ≥ 1, $p_n = p(A_n)$ et $U_n = p_n - 0.75$.

a) Démontrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q = 0.2 et de premier terme $U_1 = -0.05$.

b) En déduire une expression de U_n en fonction de n, puis une expression de p_n en fonction de n

c) Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ admet une limite que l'on calculera.

PROBLEME

Partie A (02.75pts)

On considère l'application g de [0; +∞[dans IR définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$

1. a) Déterminer la limite de g(x) quand x tend vers +∞.
   b) Calculer la dérivée de g et donner son tableau de variations
2. Montrer que sur l'intervalle [1; +∞[l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α et que $1.9 < \alpha < 2$.
3. Préciser le signe de g sur [0; +∞[.

Partie B (06.5pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$) avec $\|\vec{i}\| = 2cm$;

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Montrer que la droite d'équation y = x + 1 est asymptote à (C) en -∞.
3. Calculer la limite de f(x) quand x tend vers +∞. Interpréter graphiquement le resultat.
4. Calculer f'(x) dans chacun des intervalles où f est dérivable et donner une relation liant f'(x) et g(x) pour x > 0.
5. Etablir que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
6. Donner le tableau de variations de f et tracer la courbe (C). (On prendra α= 1.95 et $f(\alpha) \cong 0.85$)

Partie C (01 pt)

Soit h la restriction de f à l'intervalle]−∞ ; 0[

1. Montrer que h est une bijection de]−∞ ; 0[sur un intervalle J à préciser.
2. Représenter ($C_{h^{-1}}$) la courbe représentative de h^{-1}, dans le repère (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$).

BAC S2 2013 1èr groupe

Exercice 1 :

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré la salinité Y_i du Lac Rose pendant le i ème ,mois de pluie , noté X_i.

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	**4.26**	**3.4**	**2.01**	**1.16**	**1.01**

Dans ce qui suit faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} prés.

1. a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interpréter le résultat.
   b) Quelle est l'équation de la droite de régression de Y en X.
   c) Cette équation permet elle d'estimer le degré de la salinité du lac au 6ieme mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse.
2. On pose $Z = \ln(Y-1)$.
   a) Donner le tableau correspondant à la série (X, Z). Les résultats seront arrondis au millième prés.
   b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Z).
   c) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X. puis exprimer Y en fonction de X.
   d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c)

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{e_1}$; $\vec{e_2}$) S est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{4}$et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec M' = S (M).

1) Exprimez z' en fonction de z.

2) On définit la suite des points $(M_n)_{n \in IN}$ de la façon suivante : $\begin{cases} M_o d'affixe\ z_0 = 1+i \\ M_n = S(M_{n-1}) pour\ n \geq 1 \end{cases}$

z_n est l'affixe de Mn, pour tout entier naturel n.

a. Déterminer les affixes des points M_1, M_2 *et* M_3.

b. Exprimer z_n en fonction de z_{n-1} pour n≥1.

c. En déduire que $z_n = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}n\right)^n z_0$.

d. Soit $a_n = |z_n|$, montrer que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

e. Etudier la convergence de la suite (a_n), $n \in IN$.

PROBLEME:

Les résultats de la partie A seront utiles dans la partie B.

PARTIE A

1) Montrer que $\lim_{n\to 0}\left(\frac{e^x+x-1}{x}\right) = 0$

2) Soit k :]0 ; +∞[→IR
x → x(1- lnx)

a) k est-elle continue sur] 0 ; +∞[? Justifier la réponse.

b) Soit K :]0 ; +∞[→ IR
$x \to \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$

Vérifier que K est une primitive de k, dans] 0 ; +∞[.

PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & si\ x \leq 0 \\ x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

1) DétermineD_f , le domaine de définition de f. Puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement les résultats.

3) Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de f .

4) Calculer la dérivée de f sur son domaine d'existence et étudier son signe.

5) Dresser le tableau de variations de f .

6) Montrer que la droite (Δ) d'équation : y = -x-1 est une asymptote de la courbe (C_f) de f dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ quand x tend vers - ∞.

7) Préciser la nature de la branche infinie de (C_f) quand x tend vers +∞.

8) Représenter graphiquement la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 0 et tracer (Δ).

9) Soit h la restriction de f à $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[\frac{1}{e}; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Représenter graphiquement (Ch-1) la courbe représentative de (h^{-1}) dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ à l'aide de (C_f).

10) Soit $\mathcal{A}_i$ l'aire du domaine du plan délimité par $x=\frac{1}{e}, x=e$, la courbe (C_f) et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : y = x.

a) Calculer $\mathcal{A}_1$.

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine du plan délimité par les droites d'équations respectives : $x=-\frac{1}{e}, y=\frac{1}{e}$. la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe (Ch-1).

SUJET TYPE BAC

SUJET N°I

Exercice 1 :

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante : le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-2z+4=0$. Les solutions seront notées z' et z'', z' étant la solution dont la partie imaginaire est positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image de B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$. Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.

a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?

b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3}-i$.

c. La conjecture émise à la question 2. a. est-elle vraie ?

Problème :

Partie A : *étude d'une fonction auxiliaire*

Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur IR.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une dans l'intervalle $[1;+\infty[$ qui sera notée α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur IR et le présenter dans un tableau.

Partie B : *Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire*

Sur la feuille jointe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g. Ces fonctions sont définies par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ces courbes sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

2. a. Démontrer que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

b. A l'aide d'un tableau étudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur IR.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. a. Montrer que la fonction h, définie sur IR par $h(x)=(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur IR de la fonction $f-g$.

b. En déduire l'aire S, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=0$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} près de cette aire.

SUJET N°II

Exercice 1 :

On considère les intégrales I_n dépendant de l'entier n définies par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{(1+e^x)^2}dx$.

1. Trouver les dérivées de $\ln(1+e^x)$ et de $(1+e^x)^{-1}$.
2. Calculer $I_0 + I_1$. Calculer ensuite I_0 et en déduire I_1.
3. Calculer, en utilisant encore une simplification sous le signe « intégrale », le nombre $I_1 + I_2$ et en déduire I_2.
4. En remarquant que l'on peut écrire $e^{3x} = e^x(e^x-1)(e^x+1)+e^x$,
5. calculer le nombre $I_2 + I_3$ et en déduire I_3.
6. Démontrer, lorsque n est impair, la formule $\frac{u^n+1}{1+u} = P(u)$ où P est le polynôme de degré $n-1$ défini par $P(u) = 1-u+u^2-u^3+...+(-1)^{n-1}u^{n-1}$. En déduire une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{u^n}{1+u}$ s'exprimant à l'aide d'un polynôme $P_1(u)$ que l'on définira et d'une fonction logarithme. Montrer que $J_n = I_n + I_{n+1}$ peut se mettre sous la forme $J_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ En utilisant ce qui précède, déterminer, lorsque n est impair, la valeur de J_n en utilisant les nombres $P_1(e)$, $P_1(1)$ et un logarithme.
7. Déterminer de même un polynôme $Q(u)$ tel que, n étant pair, $Q(u) = \frac{u^n-1}{1+u}$. En déduire dans ce cas la valeur de $J_n = I_n + I_{n+1}$ à l'aide d'un certain polynôme à définir et d'un logarithme.

Exercice 2 :

Soit a un nombre complexe, j le complexe défini par $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On désigne par $M_0(a)$; $M_1(aj)$ et $M_2(aj^2)$.

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe j.
2) Calculer le module et l'argument du nombre complexe Z $= \frac{aj^2-a}{aj-a}$. En déduire la nature du triangle $M_0M_1M_2$.
3) Soit l'équation (E') :
$$z^3-(1+a+ia)z^2+(a+ia+ia^2)z-ia^2=0$$
   a) Développer $(a-ia)^2$
   b) Résoudre (E') après avoir vérifié que 1 est solution.
   c) On désigne par A(1) ;B(a) ;C(ai). Déterminer a pour que le triangle ABC soit isocèle - rectangle en A et de sens indirect.

Problème :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=(1-x)e^x$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I-1-a- Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

I-1-b- En déduire que f admet une asymptote Δ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

I-2-a- Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

I-2-b- Compléter le tableau des variations de f.

I-3-a- Déterminer une équation de la tangente T_1 au point A d'abscisse 1 de la courbe Cf et une équation de la tangente T_{-1} au point B d'abscisse −1.

I-3-b- Expliquer pourquoi l'on peut affirmer que les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires.

I-4- On se propose d'étudier la position de C_f par rapport à T_{-1}. Pour cela, on considère la fonction g définie sur □ par :

$$g(x)=(1-x)e^x-\left(\frac{x+3}{e}\right).$$

I-4-a- Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont les dérivées première et seconde de g.

I-4-b- Etudier le signe de g'' et le sens de variation de g'. Préciser la valeur de $g'(-1)$.

Etudier le signe de g' et le sens de variation de g. Préciser la valeur de $g(-1)$. Enfin donner le signe de g.

I-4-c- Indiquer alors la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T_{-1}.

I-5- Tracer l'asymptote Δ, les tangentes T_1 et T_{-1} et la courbe C_f. Pour tracer ces courbes, on considèrera les valeurs approchées suivantes : $e \approx 2,7$; $\frac{1}{e} \approx 0,4$.

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

14 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées . Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE1 **(06 points)**

A) **Questions de cours**

1) Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. **(0,75 point)**
2) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d' angle θ. **(0,5 point)**

B) On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) Donner une écriture trigonométrique de z_0. **(0,5 point)**
2) Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8\,i\sqrt{3}$. **(0,25 point)**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$. **(0,5 point)**
4) En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8\,i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique. **(01 point)**

   On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$
5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$. **(0,75 point)**
6) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **(0,5 point)**
7) Vérifier que : r (A) = C ; r (C) = B et r (B) = D. **(0,75 point)**
8) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 **(04 points)**

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

A) **Question de cours**

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. **(01 point)**

B) Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.
On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1) On note : A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ;
B, l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».
   a) Calculer la probabilité de A. **(0,25 point)**
   b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$. **(0,25 point)**
   c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? **(0,25 point)**
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. **(0,75 point)**
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. **(0,25 point)**
   c) Calculer la variance de X. **(0,25 point)**

C) L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1) Déterminer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ». **(0,25 point)**

.../... 2

2) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.
On note p_n, la probabilité de l'évènement D_n « C soit réalisé au moins une fois »
Exprimer p_n en fonction de n. **(0,25 point)**
3) Etudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in \mathbb{N}}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. **(0,5 point)**

PROBLEME **(10 points)**

NB : Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

PARTIE A : **(03,25 points)**

Soit g la fonction définie dans $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 point)**
b) Calculer les limites de g aux bornes de D_g. **(0,75 point)**
(Pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser $h = x - 1$).
2) Déterminer g', la fonction dérivée de g, et dresser le tableau de variations de g. **(01 point)**
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$. **(0,5 point)**
4) Déduire de l'étude précédente le signe de g sur D_g. **(0,5 point)**

PARTIE B : **(06,75 points)**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$, si $x > 0$

$f(x) = \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$, si $x \leq 0$

1) a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(01 point)**
b) Préciser les droites asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. **(0,5 point)**
2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 point)**
b) On admet que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \frac{-1}{2}$.
Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}$. **(0,5 point)**
Donner l'interprétation graphique de ces résultats. **(0,5 point)**
3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$. **(0,25 point)**
b) Calculer f '(x) sur les intervalles où f est dérivable puis dresser le tableau de variations de f. **(01 point)**
4) Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm. **(01,5 point)**
On pourra prendre $\alpha \simeq 4,5$.
On placera les points d'abscisses -1 ; 0 ; 2 et 5.
5) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; -1\}$, on ait :
$\frac{-6x}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$ **(0,25 point)**
b) En déduire que :
$\frac{-6\,e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12\,e^{-x}}{1+2\,e^{-x}} + \frac{6\,e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **(0,25 point)**
c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\ln 2$ et $x = 0$. **(0,5 point)**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/2

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 33 824 65 81 - Tél. : 33 824 95 92 - 33 824 65 81

10 G 26 A 01
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCICE 1 (03 points)

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$. **(0,25 + 0,25 pt)**

2) Dans la suite, on suppose que a = 40 et b = 20. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : $Y/X = x_i$. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

a) Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat. **(01,75 pt)**

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X. **(0,5 pt)**

c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$; l'unité est le centimètre.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. **(0,75 pt)**

b) En remarquant que $2^3 = 8$, déduire de 1)a) les solutions de l'équation $z^3 = 8$. **(0,75 pt)**

2) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$, 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

a) Placer ces points dans le repère. **(0,75 pt)**

b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. **(0,5 pt)**

c) En déduire la nature du triangle ABC. **(0,25 pt)**

3) On considère f, la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

a) Déterminer la nature de f puis donner ses éléments géométriques caractéristiques. **(01 pt)**

b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f. **(0,5 pt)**

c) En déduire l'image de la droite (AC) par f. **(0,5 pt)**

EXERCICE 3 **(03 points)**

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.
   a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ». **(0,5 pt)**
   b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ». **(0,5 pt)**
   c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$. **(0,25 pt)**
2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
   On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
   a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que la loi de probabilité de X est : $p(X = 2) = \frac{1}{6}$; $p(X = 3) = \frac{1}{3}$ et $p(X=4) = \frac{1}{2}$. **(0,75 pt)**
   c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type. **(0,25 + 0,25 pt)**

PROBLEME **(09 points)**

Les parties A et B du problème ne sont pas indépendantes.

PARTIE A

1) Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^{x} + 1$. **(0,5 pt)**
2) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x}+2$.
   a) Déterminer son domaine de définition $D\varphi$ et calculer ses limites aux bornes de $D\varphi$. **(0,75 pt)**
   b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations. **(01 pt)**
   c) En déduire son signe. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{e^x}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f. **(0,5 pt)**
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$. **(01 + 0,5 pt)**
   c) Etudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty, 0]$. **(0,25 pt)**
2) a) Etudier la continuité de f en 0. **(0,25 pt)**
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 + 0,25 pt)**
3) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f. **(0,5 + 0,5 pt)**
4) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les demi-tangentes. On remarquera que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. **(02 pts)**
5) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -\ln 8$ et $x = -\ln 4$. **(0,5 pt)**