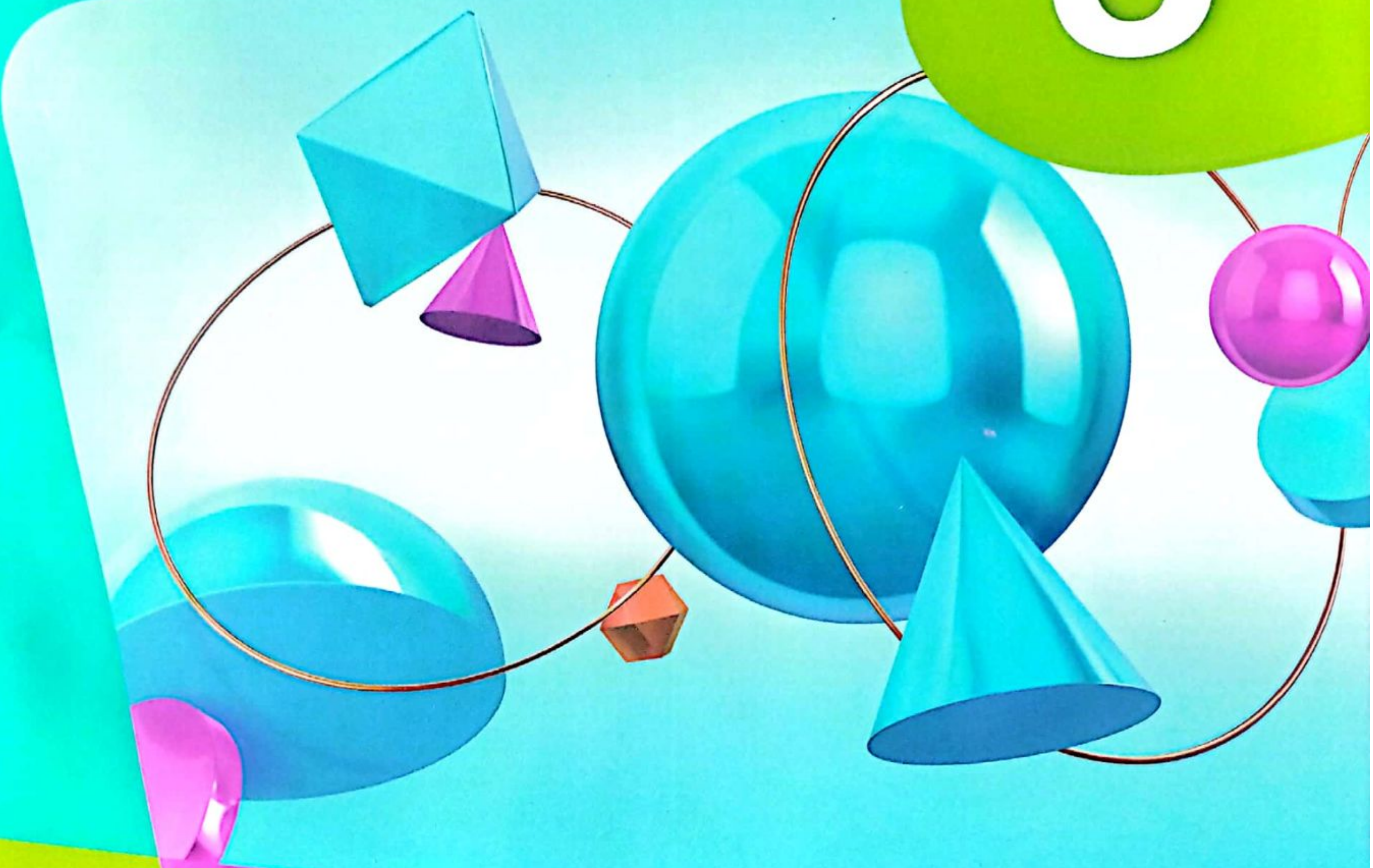
Collection
La Réussite

Mathématiques

Manuel

3e



Vallesse

Collection
La Réussite

Mathématiques
Manuel

3e

Auteurs

KOUA Oi Koua Noël
Inspecteur Pédagogique
ACHOU Roseline
Professeur de collège
ARRICO Lucie
Professeur de lycée
SILUÉ Massiata
Professeur de lycée
Tiémokoba DIARRASSOUBA
Professeur de lycée

Vallesse

Avant-Propos

Ce manuel de mathématiques de Troisième est conforme au programme en vigueur.
Il comporte trois parties : un préacquis, quatorze leçons et un mémento :

- **Un préacquis** : ce sont des résumés des leçons de la classe de quatrième indispensables à la classe de Troisième.

- **14 leçons** : chaque leçon est organisée de la façon suivante :

  - Le titre de la leçon : il est conforme à celui du programme.
  - Une image : elle illustre et suscite une réflexion sur le titre de la leçon.
  - Une situation d'apprentissage : elle a les caractéristiques suivantes : un contexte, une (ou des) circonstance(s) et une (ou des) tâche(s).
  - Les habiletés et contenus : ils sont organisés pour faire apparaître le plan suivant lequel sera traitée la leçon.
  - L'installation des habiletés : elle présente une succession d'activités en rapport avec le plan précédent et permettant le développement des habiletés et contenus. Chaque activité est suivie d'exercices de fixation.
  - L'apprentissage de la rédaction : il présente des exercices et leurs corrigés. Ces exercices sont suivis de points méthodes.
  - Le résumé de cours : il présente l'essentiel de la leçon à retenir.
  - Les exercices : ils présentent des exercices rangés en trois groupes :

    - Exercices de renforcement : ils convoquent au moins deux habiletés d'une même leçon ;
    - Exercices d'approfondissement : ils convoquent des habiletés de plusieurs leçons ;
    - Situations d'évaluation : ses constituants sont : un contexte, une ou des circonstance(s), une (à trois) consigne(s).

  - Le coup de pouce : il présente pour certains exercices d'approfondissement ou des situations d'évaluation, des indications à l'utilisateur. Ces exercices sont signalés par un astérisque.

- **Un mémento** : il présente un résumé succinct de chaque leçon du manuel.

Les auteurs

ISBN : 978-2-38403-037-8

Sommaire

Sommaire

Préacquis

NOMBRES DÉCIMAUX RELATIFS

Puissance de 10

La lettre n désigne un nombre entier relatif, on pose :
- Pour $n \geq 1$, $10^n = 10 \times \ldots \times 10$ (n facteurs égaux à 10)
- pour $n = 0$, $10^0 = 1$;
- $10^n = \dfrac{1}{10^{-n}}$.

Règles de calcul

Pour tous entiers relatifs n et p, on a :
- $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$;
- $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$;
- $(10^n)^p = 10^{n \times p}$.

Notation scientifique
Définition

La notation scientifique d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$.
où a est un décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule** et p un entier relatif.

NOMBRES RATIONNELS

Notion de PGCD et PPCM

PGCD de deux nombres entiers naturels
Le PGCD de deux nombres entiers naturels non nuls a et b est le plus grand des diviseurs communs à a et b.
On le note PGCD(a ; b).

PPCM de deux nombres entiers naturels
Le PPCM de deux nombres entiers naturels non nuls a et b est le plus petit des multiples communs à a et b.
On le note PPCM (a ; b).

Ensemble des nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction ou de l'opposé d'une fraction.
L'ensemble des nombres rationnels est noté **Q**.

Approximations décimales d'un nombre rationnel

Troncature à l'ordre n d'un nombre rationnel
La troncature à l'ordre n d'un nombre rationnel r est le nombre décimal d'ordre n obtenu en ne gardant que les n premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de r.

Approximations décimales d'ordre n d'un nombre rationnel
r étant un nombre rationnel et n un nombre entier naturel :
- le plus petit des deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n qui encadrent r est appelé approximation décimale d'ordre n par défaut de r ;
- et le plus grand des deux décimaux consécutifs d'ordre n qui encadrent r est appelé approximation décimale d'ordre n par excès de r.

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{Q}$

Équation du premier degré dans $\mathbb{Q}$

Résoudre une équation du type $x + a = b$ ou $ax = b$
- On a : $x + a = b$ équivaut à $x + a - a = b - a$
  équivaut à $x = b - a$.
- On a : $ax = b$ $(a \neq 0)$ équivaut à $\dfrac{1}{a} \times ax = \dfrac{1}{a} \times b$
  équivaut à $x = \dfrac{b}{a}$.

Inéquation du premier degré dans $\mathbb{Q}$

Résoudre une équation de l'un des types :
$x + a > b$; $x + a < b$; $ax > b$; $ax < b$.
- On a : $x + a > b$ équivaut à $x + a - a > b - a$
  équivaut à $x > b - a$.
- On a : $ax > b$ $(a > 0)$ équivaut à $\dfrac{1}{a} \times ax > \dfrac{1}{a} \times b$
  équivaut à $x > \dfrac{b}{a}$.
- On a : $ax > b$ $(a < 0)$ équivaut à $\dfrac{1}{a} \times ax < \dfrac{1}{a} \times b$
  équivaut à $x < \dfrac{b}{a}$.

CALCUL LITTÉRAL

Développements

a, b et c sont des nombres rationnels. On a :

$a + (b + c) = a + b + c$;
$a + (b - c) = a + b - c$;
$a - (b + c) = a - b - c$;
$a - (b - c) = a - b + c$;
$k(a + b) = ka + kb$;
$k(a - b) = ka - kb$;

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$;
$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$;
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

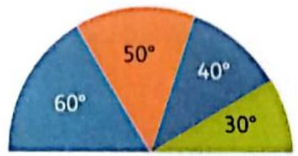
STATISTIQUE

Mode d'une série statistique

Un mode d'une série statistique est une modalité ayant le plus grand effectif.

Diagramme semi-circulaire

Un diagramme semi-circulaire est la représentation d'une série statistique à l'aide d'un demi-disque.
Les modalités sont représentées par les angles au centre dont les mesures en degrés sont proportionnelles aux effectifs.



▪ Zouglou ▪ Coupé-décalé ▪ Reggae ▪ Rap

Moyenne d'une série statistique

▪ **Détermination de la moyenne d'une série statistique**

Méthode :
Pour calculer la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif, il faut :
- déterminer l'effectif total de la série ;
- calculer le produit de chaque modalité par son effectif ;
- calculer la somme de ces produits ;
- diviser cette somme par l'effectif total.

ANGLES

Angles alternes-internes

▪ Si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.

▪ Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.

Angles correspondants

▪ Si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants de même mesure, alors elles sont parallèles.

Angles au centre et arc d'un cercle

▪ On appelle angle au centre d'un cercle, tout angle ayant pour sommet le centre de ce cercle.

▪ Dans un cercle, si deux angles au centre ont la même mesure, alors ils interceptent deux arcs de même longueur.

▪ Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.

Cordes et arcs de cercle

▪ Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.

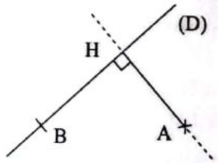
▪ Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur.

DISTANCES

Distance d'un point à une droite

(D) est une droite et A est un point qui n'appartient pas à la droite (D).
H est le point d'intersection de (D) et de la perpendiculaire à la droite (D) passant par A.
La distance AH est appelée distance du point A à la droite (D).
Si le point A appartient à (D) alors la distance de A à (D) est nulle.

Illustration

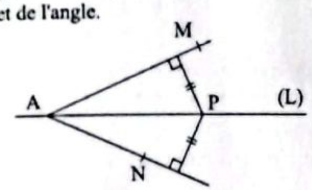


Distance de A à (D) est égale à AH.
Distance de B à (D) est égale à zéro, car B ∈ (D).

Caractérisation de la bissectrice d'un angle

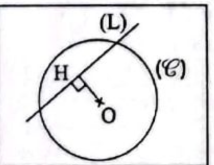
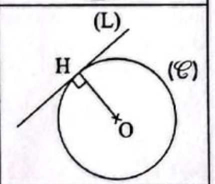
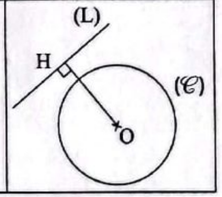
▪ Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des supports des côtés de cet angle.

▪ Si un point est équidistant des supports des côtés d'un angle alors, ce point appartient à la bissectrice de cet angle ou à la perpendiculaire à cette bissectrice au sommet de l'angle.



CERCLES ET TRIANGLES

Positions relatives d'une droite et d'un cercle
($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de rayon r ; (L) est une droite. H est le point de (L) tel que (OH) et (L) sont perpendiculaires.
Si OH < r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) ont deux points communs. Ils sont sécants.
Si OH = r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) ont un seul point commun. Ils sont tangents.
Si OH > r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) n'ont aucun point commun. Ils sont disjoints.

Si OH < r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) ont deux points communs.	
Si OH = r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) ont un seul point commun.	
Si OH > r, alors ($\mathscr{C}$) et (L) n'ont aucun point commun.	

Droite des milieux

▪ Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.

▪ Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

▪ Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

PERSPECTIVE CAVALIÈRE

La perspective cavalière est une technique de construction qui permet de représenter dans le plan un objet de l'espace.

Règles de la perspective cavalière

Ce sont ces règles qui permettent de réaliser la représentation des solides sur une feuille. Elles sont au nombre de cinq :

Règle 1
Des arêtes à supports parallèles sont représentées par des segments à supports parallèles.

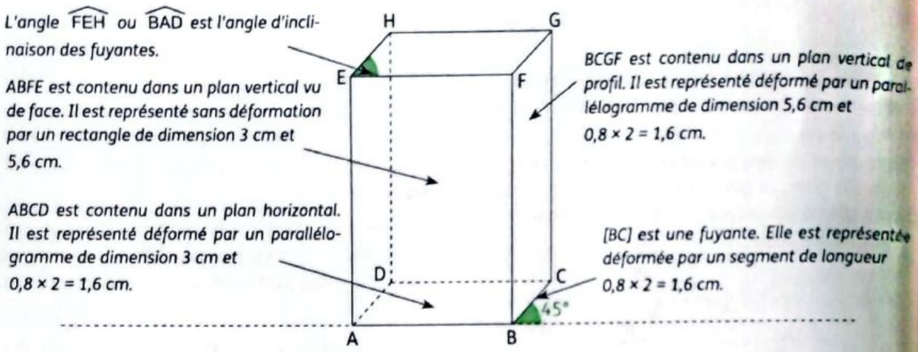
Règle 2
Toute face située dans un plan vertical de face est représentée sans déformation.

Règle 3
Les arêtes « cachées » sont représentées par des traits en pointillé.

Règle 4
Les arêtes à supports perpendiculaires au plan vertical de face sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle fixé a avec la représentation de l'horizontal sur le dessin.

Règle 5
Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un même coefficient c appelé coefficient de réduction.

Sur le schéma ci-dessous, le coefficient de réduction est 0,8 et l'angle d'inclinaison est 45°.



Symétries et translations

Application du plan

On appelle application du plan dans le plan toute correspondance qui, à chaque point M du plan, associe un unique point M' du plan.

Notation et vocabulaire

f est une application.
- Le point M' est l'image du point M par cette application.
- Lorsque l'application *f* du plan dans le plan associe au point M le point M', on note M' = *f*(M).

Symétrie centrale

O est un point du plan.
La symétrie centrale de centre O est l'application qui, à tout point M du plan, associe son symétrique par rapport à O.
La symétrie centrale de centre O se note : S_O.
M' est le symétrique de M par rapport à O se note :
M' = S_O (M).

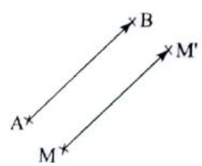
Conséquences
- O = S_O (O).
- Si M ≠ O, alors M' = S_O (M) signifie que O est le milieu du segment [MM'].

Symétrie orthogonale

(D) est une droite du plan.
La symétrie orthogonale par rapport à (D) est l'application du plan dans le plan qui, à tout point M du plan, associe le point M', symétrique du point M par rapport à la droite (D).
On note : M' = $S_{(D)}$(M).

Translation

A et B sont deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée : $t_{\overrightarrow{AB}}$.
L'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est M' signifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$



Leçon
1

Calcul littéral

Le riz cultivé en Côte d'Ivoire.

Un sac de riz de 5 kg coûte 2 800 F CFA.
Le prix de x sacs de riz est donné par la formule littérale 2 800 x.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

De retour d'un week-end à Jacqueville, M. Barra achète des poissons carpes à 5 000 F CFA l'unité et du maquereau. À son arrivée à la maison, ses filles jumelles Aïcha et Sara, élèves en 3ᵉ lui demandent le prix de l'unité de maquereau. Mais ce dernier ne se rappelle plus. Toutefois, il a dépensé 16 000 F CFA pour deux carpes et 6 maquereaux. Les filles décident de déterminer le prix de l'unité de maquereau en faisant des calculs.

Des carpes

Des maquereaux

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Quotients

Connaître

- la propriété relative à l'égalité de deux quotients ;
- les propriétés relatives aux opérations sur les quotients ;
- la définition de deux nombres inverses l'un de l'autre.

2 Puissance à exposant entier relatif

Connaître :
les règles relatives aux puissances à exposant entier relatif d'un nombre.
Calculer :
avec les puissances d'exposant entier relatif.

3 Développement, réduction et factorisation

Connaître :

- la propriété relative au produit nul ;
- la propriété relative aux nombres de même carré.

Développer et réduire :
des expressions littérales.
Factoriser
des expressions littérales.

4 Exemples d'expressions littérales

Identifier :

- un polynôme ;
- une fraction rationnelle.

Déterminer :
les valeurs de la variable pour lesquelles une fraction rationnelle existe.
Simplifier :
une fraction rationnelle.
Calculer :

- la somme, la différence, le produit et le quotient de polynômes ;
- une valeur numérique d'une expression littérale.

Traiter :
une situation faisant appel au calcul littéral.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Quotients

1 Activité : Propriété relative à l'égalité de deux quotients

a, b, c et d sont des nombres réels tels que b et d sont non nuls.
On donne les quotients suivants : $\frac{3}{7}$; $\frac{-15}{-36}$; $\frac{1,2}{2,8}$ et $\frac{10}{24}$.

1. Compare $\frac{3}{7}$ et $\frac{1,2}{2,8}$ puis compare $3 \times 2,8$ et $7 \times 1,2$.
2. Compare $\frac{-15}{-36}$ et $\frac{10}{24}$ puis compare -15×24 et -36×10.

Synthèse

$\frac{3}{7} = \frac{1,2}{2,8}$ équivaut à $3 \times 2,8 = 7 \times 1,2$.
On admet que : a, b, c et d sont des nombres tels que b et d sont non nuls.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

Exercices de fixation

1 a) Calcule 15×5 et 25×3 puis compare $\frac{15}{25}$ et $\frac{3}{5}$.

b) Calcule 2×12 et 8×3 puis déduis-en deux fractions égales.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. $\frac{x}{2} = \frac{y}{9}$ équivaut à $xy = 18$.
2. $\frac{x}{2} = \frac{y}{9}$ équivaut à $9x = 2y$.
3. $\frac{x}{2} = \frac{y}{9}$ équivaut à $2x = 9y$.

2 Activité : Deux nombres inverses l'un de l'autre

a et b sont deux nombres non nuls.
Calcule le produit $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$ et donne le résultat sous la forme d'un nombre entier.

Synthèse

- Deux nombres non nuls sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.
- a et b étant deux nombres non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Exercices de fixation

1 Justifie que les nombres ci-dessous sont inverses l'un de l'autre :
a) 0,5 et 2 ; b) -3 et $-\frac{1}{3}$; c) $3 - \frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$.

2 Donne l'inverse de chacun des nombres suivants :
0,75 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{17}{19}$; $\frac{2021}{2022}$.

Activité 2 Puissance à exposant entier relatif

1. Compare : a) $2^3 \times 2^4$ et 2^{3+4} ; b) $3^2 \times 3^5$ et 3^{2+5}.
2. Compare : a) $(2^3)^4$ et $2^{3\times4}$; b) $(2^2)^5$ et $2^{2\times5}$.
3. Compare : a) $2^3 \times 5^3$ et $(2 \times 5)^3$; b) $2^7 \times 5^7$ et $(2 \times 5)^7$.
4. Compare : a) $\frac{2^4}{2^3}$ et 2^{4-3} ; b) $\frac{2^5}{2^3}$ et 2^{5-3}.
5. Détermine l'inverse de 2^3 et de 3^2.

Synthèse

$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$; $(2^3)^4 = 2^{3\times4}$; $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3$; $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3}$; l'inverse de 2^3 est 2^{-3}.
On admet que :

- a et b sont des nombres non nuls ; m et n sont des nombres entiers relatifs. On admet les égalités suivantes :
$a^m \times a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{m \times n}$; $a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $a^1 = a$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- L'inverse du nombre a^n est $\frac{1}{a^n}$ qu'on note aussi a^{-n}.
- Par convention, pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$.

Exercices de fixation

1 Écris le numéro de chacune des égalités ci-dessous suivi de vrai si l'égalité est vraie et de faux dans le cas contraire.

a) $3^{-2} = -9$; b) $5^4 \times 5^{-1} = 5^3$;
c) $(-3a)^2 = 9a$; d) $\frac{2^4}{2^{-4}} = 2^0$;
e) $\frac{1}{10^{-2}} = 100$.

2 Recopie chaque égalité puis remplace les pointillés par le nombre qu'il faut pour qu'elle soit vraie.

a) $5^7 \times 5^{\dots} = 5^{10}$; b) $(\dots \times 2)^{2020} = 1$;
c) $(3^5)^{\dots} = 3^{-10}$; d) $\frac{10^2}{10^{\dots}} = 10^4$.

Activités 3 Développement, réduction, factorisation

1 Activité : Suppression des parenthèses

Utilise les connaissances de la classe de 4e pour développer et réduire les expressions suivantes :

a) $x + (2x - 1)$; b) $x - (-2x - 1)$; c) $x - (2x - 1)$; d) $x^2 + 3x - (2x^2 + x - 7)$.

Synthèse

$x + (2x - 1) = x + 2x - 1$; $x - (-2x - 1) = x + 2x + 1$.
On admet que :
a, b et c sont des nombres.
$a + (b + c) = a + b + c$; $a + (b - c) = a + b - c$; $a - (b + c) = a - b - c$; $a - (b - c) = a - b + c$.

Exercices de fixation

1 Supprime les parenthèses de chacune des expressions a et b suivantes :
$a = 7 - (5 + x)$; $b = -2y + 3 - (-7 - t)$.

2 Supprime les parenthèses dans l'expression suivante :
$2x + 3x^3 - (4 + 5x^2) + 7 + 0{,}25x + (8x^2 + 11{,}3x^3)$.

2 Activité : Développement et réduction

Développe chacune des expressions suivantes :

a) $3x(y - 2)$; b) $-5t(3t^2 + 2t - 7)$; c) $(4 - 6x)(-2y + 1)$;
d) $(a + b)^2$; e) $(a + b)(a - b)$; f) $(a - b)^2$.

Synthèse

$3x(y - 2) = 3xy - 6x$; $(4 - 6x)(-2y + 1) = -8y + 4 + 12xy - 6x$.
On admet que :
a, b et c sont des nombres.
$a(b + c) = ab + ac$; $a(b - c) = ab - ac$; $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$;
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exercices de fixation

Développe et réduis chacune des expressions suivantes :
a) $4x(3 - x)$; b) $7(2x - x^2)$; c) $(2 - x)(5t + 1)$; d) $(3x + 4)^2$;
e) $8z - (z + 3)$; f) $(9p + 7)^2$; g) $6 + 3k(k - 1)$.

Pour chaque énoncé, écris son numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N	Énoncés	A	B	C
1	$(5x - 3)(5x + 3) =$	$5x^2 - 9$	$25x^2 - 9$	$25x^2 - 30x + 9$
2	$7(2 - x) =$	$14 + 7x$	$-7x + 14$	$14 - x$
3	$(x - 3)^2 =$	$x^2 - 9$	$x^2 - 6x - 9$	$x^2 - 6x + 9$
4	$(2x - 5)(1 + 3x) =$	$6x^2 - 13x - 5$	$6x - 5$	$-5 + 13x + 5x^2$

3 Activité : Factorisation

Écris sous la forme d'un produit de facteurs chacune des expressions A, B, C, D et E ci-dessous :
$A = 2x + 4$; $B = 3x(2x + 1) - (2x + 1)$; $C = x^2 + 4x + 4$; $D = x^2 - 2x + 1$ et $E = x^2 - 4$.

Synthèse

$2x + 4 = 2(x + 2)$; $3x(2x + 1) - (2x + 1) = (2x + 1)(3x - 1)$; $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$;
$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.
On admet que : a, b et k sont des nombres.
On a :
- $ka + kb = k(a + b)$
- $ka - kb = k(a - b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exercices de fixation

Parmi les expressions ci-dessous, recopie celles qui sont écrites sous forme factorisée.
a) $4x(3 - x)$; b) $7 + 2x - x^2$;
c) $(2 - x)(5t + 1)$; d) $16 + 24y + 9y^2$;
e) $8z - (z + 3)$; f) $(9p + 7)^2$;
g) $6 + 3k(k - 1)$.

2 Factorise chacune des expressions suivantes :
a) $5x - 10$; b) $4y^2 - 9$; c) $-24t + 9t^2 + 16$;
d) $8z^3 + z$; e) $(x + 3)^2 - 1$;
f) $7y^2 + 14y + 7$.

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, écris l'expression et sa forme factorisée choisie parmi les quatre propositions.

La forme factorisée de	A	B	C	D
$16 - 9x^2$ est égale à ...	$(4 + 9x)(4 - 9x)$	$(4 - 3x)^2$	$(4 - 3x)(4 + 3x)$	$7x^2$
$25y^2 + 60y + 36$ est égale à ...	$(25y + 6)^2$	$(5y + 6)^2$	$(5y + 6)(5y - 6)$	$(5 + 6y)^2$
$64t^2 - 16t$ est égale à ...	$16t(4t - 1)$	$(8t + 4)(8t - 4)$	$(8t - 4)^2$	$(8 - 4t)^2$
$(2x - 3)^2 - 9$ est égale à ...	$(2x - 3) - 3$	$4x(x - 3)$	$4x^2 - 12x + 9$	$x(4x - 6)$

4 Activité : Produit nul – nombre de même carré

1. On donne le produit p tel que : $p = (2x-3)(x+1)$.
   a) Calcule p pour x égal respectivement à -1 ; -5 ; 0 ; 3 et $\frac{3}{2}$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations $2x-3=0$ et $x+1=0$.
   c) a et b sont deux nombres. Trouve la condition pour que le produit ab soit égal à 0.
2. a) Calcule 5^2 et $(-5)^2$.
   b) Trouve si possible un autre nombre dont le carré est égal à 25.
   c) Quels sont les nombres ayant pour carré 25 ?

Synthèse

$(2x-3)(x+1)=0$ équivaut à $x=\frac{3}{2}$ ou $x-1$.

$5^2=25$ et $(-5)^2=25$, l'équation $x^2=5^2$ a deux solutions : 5 et -5.

On admet que :

a et b sont des nombres.

- $ab=0$ équivaut à $a=0$ ou $b=0$.
- $a^2=b^2$ équivaut à $a=b$ ou $a=-b$.

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai si l'équivalence est vraie ou par faux si elle est fausse.

1. $(3-x)^2=0$ équivaut à $3-x=0$ ou $3+x=0$;
2. $2x(x-1)=0$ équivaut à $2x=0$ ou $x-1=0$;
3. $(x+2)(x-5)=0$ équivaut à $x=-2$ ou $x=5$;
4. $x^2=7^2$ équivaut à $x=7$ ou $x=-7$.

2 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $x(x-2)=0$;
b) $2x=0$;
c) $x^2=0$;
d) $x^2=9$.

3 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $(2x-3)(1-x)=0$;
b) $(x+3)^2=4$.

Activités 4 Exemples d'expressions littérales

1 Activité : Monôme - polynôme

On donne les expressions suivantes : $-61x^3$; $7x^2$; $4x$; -10.

Écris la somme p de toutes ces expressions.

Synthèse

$-61x^3$ est une expression littérale, appelée monôme de variable x, de coefficient -61 et de degré 3.

$-61x^3+7x^2+4x-10$ est la somme de plusieurs monômes, elle est appelée polynôme. L'exposant le plus élevé est 3. On dit que c'est un polynôme de degré 3.

Exercices de fixation

1 Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Monôme	Coefficient	Degré	Variable
$-11x^7$			
	0,5	4	y
$-x$			
	-6	0	t

2 Regroupe les expressions suivantes en deux groupes (monômes ou polynômes) :
$2{,}3x-1$; $-21x^6$; $(5-x)^2$; $7+(9+x)-x$; $14x^3(x-1)$; $(x+2)^2+(-x+1)(x-4)$.

3 À l'aide des expressions suivantes, écris trois polynômes de degré différents.
$0{,}5x$; -14 ; $7x^3$; $-209x^2$; $6x^4$.

2 Activité : Fraction rationnelle

1. Donne la condition pour laquelle le quotient $\frac{a}{b}$ existe.
2. On donne le quotient R tel que : $R=\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.
   a) Factorise x^2+4x+4 et x^2-4.
   b) Détermine les valeurs de x pour lesquelles R existe.
   c) Simplifie R lorsqu'il existe.
   d) Calcule la valeur numérique de R pour $x=1$.
   e) Dégage une méthode de simplification de R.

Synthèse

$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ est une fraction rationnelle.

$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ existe pour x^2-4 est différent de 0.

Généralement :

- Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.
- Une fraction rationnelle existe lorsque son dénominateur est différent de zéro.
- Pour simplifier une fraction rationnelle :
  - On factorise si possible son numérateur et son dénominateur.
  - On simplifie par le ou les facteur(s) commun(s) au numérateur et au dénominateur sans oublier de marquer la condition d'existence.
- Pour calculer la valeur numérique d'une fraction rationnelle, on remplace la variable dans l'expression de la fraction rationnelle par le nombre donné.

Exercices de fixation

1 Vérifie que chacune des expressions suivantes est une fraction rationnelle en donnant son numérateur et son dénominateur :

$4x-7$; $\frac{2}{(x+6)(3x-5)}$; $\frac{8}{3}x^2+\frac{1}{4}$; $\frac{x+1}{x^2-16}$; $(2x+1)(3-x)$.

Détermine la condition d'existence de chaque fraction rationnelle A, B, C et D :

$A = \dfrac{2}{(x+6)(3x-5)}$; $B = \dfrac{x+1}{x^2-16}$;

$C = \dfrac{(x+1)(2-x)}{x}$ et $D = \dfrac{x^2-1}{3x(5x+2)}$.

Simplifie chacune des fractions rationnelles suivantes :

a) $\dfrac{2-x}{(x-2)(x+3)}$; b) $\dfrac{x^2-49}{(x+7)^2}$;

c) $\dfrac{x^2-x}{2x}$; d) $\dfrac{(x^2-2)^2}{3x-2}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Calculer avec des quotients

Calcule A puis rends irréductible le résultat.

$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \div \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2$.

Corrigé

$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \div \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2$

$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \div \frac{4}{9}$

$A = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{9}{4}$

$A = \frac{1}{5} + \frac{9}{5}$.

$A = \frac{10}{5}$

$A = 2$.

Méthode

- Les calculs entre parenthèses étant prioritaires, j'effectue la soustraction en rendant les fractions au même dénominateur.
- J'effectue le calcul de puissance.
- J'effectue ensuite la division.
- J'effectue enfin la somme et je n'oublie pas de simplifier.

Remarque : En l'absence de parenthèses, on effectue les opérations dans l'ordre suivant : les puissances, les multiplications (ou les divisions) et enfin les additions (ou les soustractions).

Exercice 2 Développer, réduire et ordonner

Développe, réduis puis ordonne l'expression B telle que : $B = (2x-3)^2 - (-x+1)(3x-2)$.

Corrigé

$B = (2x-3)^2 - (-x+1)(3x-2)$

$B = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + (3)^2 -$
$(-x \times 3x - x \times (-2) + 1 \times 3x + 1 \times (-2))$

$B = 4x^2 - 12x + 9 - (-3x^2 + 2x + 3x - 2)$.

$B = 4x^2 - 12x + 9 + 3x^2 - 2x - 3x + 2$

$B = 4x^2 + 3x^2 - 12x - 2x - 3x + 9 + 2$

$B = 7x^2 - 17x + 11$.

Méthode

- Développe l'expression en utilisant une égalité remarquable et un produit de facteurs.
- Réduis en regroupant les termes de même degré.
- Ordonne les termes selon les degrés croissants ou décroissants.

Exercice 3 Factoriser

Factorise C tel que : $C = 9x^2 - 12x + 4 + (4-6x)(x-3)$.

Corrigé

$C = 9x^2 - 12x + 4 + (4-6x)(x-3)$

$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 + (-2 \times (-2) - 2 \times 3x)(x-3)$

$C = (3x-2)^2 - 2(-2+3x)(x-3)$

$C = (3x-2)(3x-2) - 2(3x-2)(x-3)$

$C = (3x-2)[(3x-2) - 2(x-3)]$

$C = (3x-2)(3x-2-2x+6)$

$C = (3x-2)(x+4)$.

Méthode

- Factorise les différents termes.
- Fais apparaître les facteurs communs.

Exercice 4 Simplifier une fraction rationnelle - Calculer une valeur numérique d'une fraction rationnelle

On donne la fraction rationnelle F telle que $F = \dfrac{(x-4)^2 + (x-4)(2x+1)}{2x^2 - 8x}$.

1. Détermine la condition d'existence de F.
2. Factorise le numérateur et le dénominateur de F puis simplifie F.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = 2$.

Corrigé

1. F existe si et seulement si $2x^2 - 8x \neq 0$.
$2x(x-4) \neq 0$ soit $2x \neq 0$ et $x - 4 \neq 0$.
Donc $x \neq 0$ et $x \neq 4$ est la condition d'existence de F.

2. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$,

$F = \dfrac{(x-4)(x-4) + (x-4)(2x+1)}{2x(x-4)}$

$F = \dfrac{(x-4)[(x-4) + (2x+1)]}{2x(x-4)}$

$F = \dfrac{(x-4)(x-4+2x+1)}{2x(x-4)}$

$F = \dfrac{(x-4)(3x-3)}{2x(x-4)} = \dfrac{3(x-4)(x-1)}{2x(x-4)}$

$F = \dfrac{3(x-1)}{2x}$.

3. Pour $x = 2$, $F = \dfrac{3(2-1)}{2 \times 2}$

$F = \dfrac{3}{4}$.

Méthode

- Pour déterminer, les valeurs de x pour lesquelles F existe on cherche les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur est différent de zéro.
- Pour simplifier une fraction rationnelle, on donne sa condition d'existence, puis on factorise le numérateur et le dénominateur. Enfin on simplifie par le ou les facteurs communs.
- Pour calculer la valeur numérique d'une fraction rationnelle, on peut remplacer la variable par la valeur donnée.

1 Quotients

1.1. Propriété relative à l'égalité de deux quotients

a, b, c et d sont des nombres tels que b et d sont non nuls.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

1.2. Opérations sur les quotients

- a, b, c et d sont des nombres non nuls.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

1.3. Deux nombres inverses l'un de l'autre

Définition

- Deux nombres sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.
- a et b étant deux nombres non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

2 Puissance à exposant entier relatif

Propriétés

- a et b sont des nombres non nuls ; m et n sont des nombres entiers relatifs.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$; $\quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $\quad a^1 = a \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

- Lorsque $a \neq 0$, l'inverse du nombre a^n est $\frac{1}{a^n}$ qu'on note a^{-n}.
- Le produit de deux nombres inverses l'un de l'autre est égal à 1.
- Par convention, pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$.
- Si n est différent de 0, $0^n = 0$.

3 Développement, réduction et factorisation

3.1. Suppression des parenthèses

a, b et c sont des nombres.

$a + (b + c) = a + b + c$; $a + (b - c) = a + b - c$; $a - (b + c) = a - b - c$; $a - (b - c) = a - b + c$.

3.2. Développement et réduction

a, b et c sont des nombres.

$a(b + c) = ab + ac$; $a(b - c) = ab - ac$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

3.3. Factorisation

Méthode

Pour factoriser une expression littérale, on peut procéder comme suit :
- Mettre en évidence un facteur commun à chaque terme et utiliser une des égalités suivantes :

$ka + kb = k(a + b)$;
$ka - kb = k(a - b)$.

- Reconnaître et utiliser les égalités remarquables.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- Combiner les deux techniques ci-dessus.

3.4. Produit nul – nombre de même carré

a et b sont des nombres réels.
- $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
- $a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

4 Exemples d'expressions littérales

4.1. Monôme - polynôme

$-3x^5$ est une expression littérale, appelée monôme de variable x, de coefficient -3 et de degré 5.

$x^0 = 1$; on convient de dire que tout nombre différent de 0 est un monôme.
- Un polynôme est la somme de plusieurs monômes.

4.2. Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.
- Une fraction rationnelle existe lorsque son dénominateur est différent de zéro.
- Pour simplifier une fraction rationnelle,
  - On factorise si possible son numérateur et son dénominateur.
  - On simplifie par le ou les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs sans oublier de donner la condition d'existence.
- Pour calculer la valeur numérique d'une fraction rationnelle, on remplace la variable dans l'expression de la fraction rationnelle par le nombre donné.

Exercices de renforcement

1 Pour chaque égalité, dis si elle est vraie ou si elle est fausse sachant que $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$; b) $3x = 4y$; c) $\frac{x}{4} = \frac{3}{y}$;

d) $3y = 4x$; e) $\frac{4}{3}x = y$; f) $\frac{2x}{2y} = \frac{3}{4}$.

2 Détermine a, b, c et d tels que :

a) $\frac{a}{2} = -\frac{7}{4}$; b) $\frac{5}{3} = \frac{5}{b}$; c) $\frac{c+5}{4} = \frac{3}{2}$;

d) $\frac{d-2}{6} = \frac{d+1}{8}$.

3 Écris sous forme de quotient irréductible, les nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I et J suivants :

$A = 3 - \frac{5}{2}$; $B = \frac{1{,}6}{5} + \frac{0{,}7}{3}$; $C = \frac{11}{42} - \frac{2}{7}$;

$D = \frac{9}{14} \div \frac{12}{7}$; $E = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{5}{9}\right)$;

$F = \frac{64}{35} \div \frac{72}{49}$; $G = \frac{22}{7} \div \left(-\frac{11}{4}\right)$;

$H = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)^2$; $I = \frac{4}{5} - \frac{6}{5} \times \frac{2}{3}$; $J = \frac{\frac{11}{24} - \frac{13}{36}}{1 + \frac{1}{27}}$.

4 Calcule l'inverse du nombre $\frac{7}{6} - 2$.

5 Écris les nombres ci-dessous sous la forme a^n où a est un nombre non nul et n un nombre entier relatif.

1. $a^{-6} \times a$; 2. $(-a)^2 \times (-a)^{-3}$; 3. $a^{-7} \times (-a)^4$;
4. $(2a)^2 \times (-2a)^{-3}$; 5. $(a-11)^2$;
6. $(-3)^3 \times a^3$; 7. $\frac{a}{a^5}$; 8. $(a^3)^2 \times \frac{a^{-1}}{a^4}$.

6 Calcule les expressions A, B, C, D, E et F suivantes :

$A = 2^5 \times 2^{-4}$; $B = 3^{-6} \times \frac{1}{3^{-4}}$; $C = (4^{-1})^2$;

$D = 6^{-3} \times 2^3 \times 3^3$; $E = \frac{73 \times 7^{-6}}{7^{-8}}$;

$F = (-0{,}5)^7 \times 2^7$.

7 Réduis les expressions S, K et T suivantes :

$S = (5x - 3) - (2 - 3x) + 6x + 1$;

$K = 4x - 2x - (3 + 7x) + (5 - x)$;

$T = (7x^2 + 3x - 5) - [3x - 2 - (4 - 9x + 6x^2)]$.

8 Développe et réduis les expressions A, B, C, D, E, F, G et H suivantes :

$A = (-4x + 3)(2x - 1)$;

$B = 7 - (5 - x)(6x + 8)$;

$C = -2(3x - 2) + 5(1 + x)$;

$D = 4x(x + 3) - 7x(2 - x)$;

$E = (9x + 5)(9x - 5)$;

$F = (-2x)^2 - 4x(x - 1)$;

$G = \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right)^2$;

$H = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y\right)$.

9 On donne : $M = 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7$;

$N = (3y + 2)(1 - y)^2$; $P = \frac{2t - 3}{t^2 + 1}$.

1. Développe et réduit N.
2. Calcule la valeur numérique de :

- M pour $x = 1$;
- N pour $y = 2$;
- P pour $t = \frac{3}{2}$.

10 Dans les sommes ou différences X, Y, Z, T et suivantes, recopie et souligne le facteur commun :

$X = 7a(a + 1) - 3 \times 7$;

$Y = -5b \times (b - 1) + 6b(b + 2)$;

$Z = (c + 3)(2c - 1) + (2c + 1)(c + 3)$;

$T = -9d(d + 5) - 9(8d - 1)d$;

$S = 3(1 + e)^2 - 7(e - 2)(e + 1)^2$.

11 Factorise les expressions A, B, C, D, E, F et G suivantes :

$A = 12x^2 + 4xy - 8xy^2$; $B = 9x^2 + 30x + 25$;

$C = 16x^2 + 1 - 8x$; $D = 81x^2 - 16y^2$;

$E = 25 - 16t^2$; $F = 49 - (5z - 7)^2$;

$G = (3 - 5y)^2 - (4y + 1)^2$.

12 Calcule de façon performante :

a) $23^2 - 17^2$; b) $105^2 - 95^2$; c) 103×97 ;
d) 41×39 ; e) 85^2 ; f) 61^2 ; g) 59^2.

13 Dans chaque cas détermine les valeurs de x pour lesquelles :

a) $2x(1 - x)(3x + 5) = 0$; b) $4x^2(x + 3) = 0$;

c) $(5x + 4)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}x\right) = 0$; d) $4x^2 - 9 = 0$.

14 Parmi les expressions ci-dessous, recopie :

a) les monômes ;
b) les polynômes ;
c) les fractions rationnelles.

• $\frac{3}{2}x^2 - x + 1$; • $-\frac{2}{x}$; • $3x + 5(1 - x)$; • $7x^3$; • $\frac{4 - x^2}{3} - 2$; • -9 ; • $\frac{8x - 3 + x^2}{7x^2}$;

• $(4x + 1)^2 - 3x - 2\,020x$.

15 Détermine les valeurs de x pour lesquelles, les fractions rationnelles A, B, C, D, E et F ci-dessous existent.

$A = \frac{x + 4}{2x - 6}$; $B = \frac{7(x - 5) + (x + 1)(x - 5)}{(4 - x)(3x + 6)}$

$C = \frac{4 - x^2}{3} - 2$; $D = \frac{2x(x + 3)}{7x^2 + 2x}$;

$E = \frac{x + 1}{x^2 - 10x + 25}$; $F = \frac{4 - x^2}{(3x + 1)^2 - 4}$.

16 Lorsque les fractions R, S, T et U suivantes existent, simplifie-les.

$R = \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 16}$;

$S = \frac{(x - 2)^2 + (x - 2)(3x - 1)}{(4 - x)(3x + 6)}$;

$T = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 1}$; $U = \frac{2x(x + 1)}{(x - 1)^2 - 4}$.

17 Calcule la valeur numérique de chaque expression E, F, G et H pour la valeur donnée à x.

$E = 3x^2 + 4x - 5 + 2x(7 - x)$ pour $x = -1$;

$F = (2x + 3)^2 - 5x$ pour $x = 1$;

$G = \frac{4x + 6}{x^2 - 9}$ pour $x = -2$;

$H = \frac{(x + 2)(-3 + x)}{3x - 8}$ pour $x = 3$.

18 1. Développe, réduis puis ordonne suivant les puissances décroissantes de x les expressions I, J, K, L et M suivantes :

$I = (3x - 4)^2 - 9x^2 + 7(1 + 2x)$;

$J = (2 - 3x)(3x + 2) - (x + 1)(2x - 3)$;

$K = (4x - 1)^2 + 3x(4 - x)$;

$L = (-x - 5)(2x - 3) - (x + 1)^2$;

$M = (2x - 2)^2 - (x + 3)^2 + (3x + 2)(x - 5)$.

2. Calcule K pour $x = -1$ et L pour $x = 1$.

19 On donne les expressions M et N ci-dessous :

$M = (x - 3)^2 - 3x(2 - x)$ et

$N = (x - 3)^2 - 3x(2 - x) - 4x^2$.

1. Justifie que : $M = (2x - 3)^2$.
2. Déduis-en que : $N = -3(4x - 3)$.

20 Factorise chacune des expressions suivantes :

a) $16x^2 - 9 + (3 - 4x)(x + 5)$;
b) $25x^2 - 10x + 1 + (x - 3)(5x - 1)$;
c) $(7x - 3)^2 - (3x + 1)^2 + 5x - 1$;
d) $9x^2 - 16 + 4(3x - 4)^2$;
e) $x^2 - 8x + 16 - (4 - x)(2x + 3)$;
f) $(12x^2 - 3) + (1 - 2x)(7x - 5)$.

21 On donne : $G = (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$,
$H = (x - 5)(x + 2) - (x - 14)$, $I = (1 - x)^2 - 16x^2$.
Justifie que : $G = (1 - x)(x + 3)$;
$H = (x - 2)^2$; $I = (1 - 5x)(3x + 1)$.

22 On donne les expressions D, E, F, G et H :

$D = x^2 - 9 - (3 - x)(x + 4)$;

$E = (2x + 1)^2 - (9x^2 + 12x + 4)$;

$F = (5x - 3)^2 - 9 + (5x - 6)(x + 1)$;

$G = (x + 5)^2 - (x + 5)(3x - 1)$ et

$H = 25x^2 - 10x + 1 + 3x(1 - 5x)$.

1. Développe, réduis puis ordonne D, E, F, G et H.
2. Factorise chacune des expressions ci-dessus.
3. a) Calcule leurs valeurs numériques pour $x = -1$.
   b) Pour chaque expression trouve x tel que $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$ et $H = 0$.

Exercices d'approfondissement

23 Détermine les nombres a, b, c, d, e et f dans chaque cas :

1. $\frac{-1}{1 - a} = \frac{2}{a}$; 2. $\frac{b - 1}{3} = 1 + b$;
3. $\frac{c + 2}{3} = \frac{2c}{5}$; 4. $-\frac{d}{5} = \frac{d + 1}{3}$;
5. $\frac{-7}{3e - 2} = \frac{2e + 3}{4}$; 6. $\frac{-4}{f} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{3 \times \frac{1}{8}}$.

24 Écris les expressions suivantes sous la forme $a^n b^m$ où a et b sont des nombres non nuls et n et m des entiers relatifs.

a) $= (a^{-2}b^3)^2$; b) $= (ab^{-2})^{-3}$;

c) $= ab^2 \times (a^3 b^{-2})^{-1}$; d) $= \frac{(a^{-1}b^3)a^2 b}{a^{-6}(b^3)}$.

25 Calcule et écris le résultat sous forme de fraction irréductible les nombres ci-dessous :

a) $\frac{6^2}{3^5 \times 2^5} \times (6^2)^2$;

b) $\frac{1{,}5 \times 10^5 \times 3 \times (10^{-2})^2}{5 \times 10^{-2}}$;

c) $\frac{0{,}91 + (3 \times 10^{-1})^2}{0{,}001}$.

26 Calcule et écris le résultat sous forme d'une fraction ou de l'opposé d'une fraction :

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$;

b) $\left(-\frac{2}{3} - \frac{-4}{9}\right) \div \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{-7}\right)$;

c) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right) - \frac{7}{3} \times \frac{6}{21}$;

d) $9 - 3^2 \div \left(\frac{3}{4} - 1\right)$;

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{20 - 11}{20 - 4}$;

f) $\dfrac{\frac{4}{3} + \frac{3}{10}}{\frac{5}{2} - \frac{2}{5}}$.

27 Dis en justifiant, si les nombres $\frac{7}{3} + \frac{5}{2}$ et $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ sont inverses l'un de l'autre.

28 On donne : $A = -2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$ et $B = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}}$.

Justifie que B est un nombre entier relatif et que A et B sont inverses l'un de l'autre.

29 Sachant que $a = \frac{1}{9}$; $b = -4$ et $c = -\frac{3}{5}$, calcule :

1. $\frac{c}{a+b}$; 2. $\frac{b+c}{a}$; 3. $a + \frac{b}{c}$;

4. $\frac{a-c}{b-c}$; 5. $\frac{ac^2}{b+c}$.

30 Pour chaque fraction rationnelle A, B, C, D, E, F et G ci-dessous :
1. détermine les valeurs de x pour lesquelles elle existe.
2. simplifie-la.

$A = \frac{36 - x^2}{2x(x+6)}$; $B = \frac{(3x-1)^2 - 25}{3x^2 - 6x}$;

$C = \frac{x(2x+3)}{9 - 4x^2}$; $D = \frac{(2x+1)^2 - 4}{(x-1)(2x+3)}$;

$E = \frac{x-5}{(x-1)^2 - 16}$; $F = \frac{(x-5)(x-1)}{25 - 10x + x^2}$;

$G = \frac{x^2 - 9 + (x-3)(x-4)}{4x^2 - 1}$.

31 On considère la fraction rationnelle F telle que $F = \frac{x^2 - 14x - 32}{(x-16)(x-2)}$.
1. Justifie que : $(x - 16)(x + 2) = x^2 - 14x - 32$
2. a) Trouve les valeurs de x pour lesquelles F existe.
b) Lorsque F existe, justifie que : $F = \frac{x+2}{x-2}$
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = \frac{1}{3}$ (tu donneras le résultat sous forme de quotient irréductible).

32 On donne : $E = 2(x - 3)^2 - 3x(3 - x)$;
$F = 10x^2 - 12x$ et $R = \frac{F}{E}$.
1. a) Développe et réduis E.
b) Démontre que $E = (x - 3)(5x - 6)$ et $F = 2x(5x - 6)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles R existe.
b) Lorsque R existe, simplifie R.
3. Calcule la valeur numérique de R pour $x = 3$.

33 On donne la fraction rationnelle B telle que :
$B = \frac{(x-4)(x+1)}{9 - (x-1)^2}$.
1. a) Développe et réduis $9 - (x - 1)^2$.
b) Justifie que $9 - (x - 1)^2 = -(x - 4)(x + 2)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles B existe.
b) Lorsque B existe, justifie que : $B = \frac{-1-x}{x+2}$.
3. Calcule la valeur numérique la plus simple de B pour $x = -3$.

34 On donne : $E = (2x - 7)^2 - (5 - x)^2$ et
$F = \frac{(2x-7)^2 - (5-x)^2}{3(x-4)(1-x)}$.
1. Développe puis réduis l'expression E.
2. Justifie que : $E = 3(x - 4)(x - 2)$.
3. a) Trouve les valeurs de x pour lesquelles F existe.
b) Simplifie F.
4. Calcule la valeur numérique de $\frac{x-2}{1-x}$ pour $x = \frac{1}{3}$.
(On simplifiera si possible le résultat).

EXERCICES

35 1. On donne l'expression littérale A telle que :
$A = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(-x + 3)$.
a) Factorise l'expression $4x^2 - 9$.
b) Déduis-en que $A = x(2x + 3)$.
2. On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{4x^2 - 9 + (2x+3)(-x+3)}{(x-1)(2x+3)}$.
a) Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles F existe.
b) Simplifie l'expression de F.
c) Calcule la valeur numérique de F pour $x = 3$.

36 On considère la fraction rationnelle A telle que : $A = \frac{(5x+2)^2 - 9}{5(2x+3)(x+1)}$.
1. Justifie que : $(5x + 2)^2 - 9 = 5(5x - 1)(x + 1)$.
2. a) Trouve les valeurs de x pour lesquelles A existe.
b) Lorsque A existe, justifie que : $A = \frac{5x-1}{2x+3}$.
3. Calcule la valeur numérique de A pour $x = -2$.

37 On donne : $A = (2x - 3)^2 - 5(1 - x^2)$;
$B = (2x - 3)^2 - 5(1 - x^2) - 9x^2$ et
$R = \frac{B}{6x^2 + 10x - 4}$.
1. a) Justifie que $A = (3x - 2)^2$ puis déduis-en que $B = -4(3x - 1)$.
b) Développe et réduis $(3x - 1)(2x + 4)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles R existe puis simplifie R.
b) Justifie que : $R = \frac{-2}{x+2}$.
c) Calcule R pour : $x = -3$.

38 **Partage proportionnel**
Monsieur Balemosse, avant d'effectuer son pèlerinage, a remis la somme de 3 200 000 F CFA à partager à ses trois filles âgées respectivement de 4 ans, 5 ans et 7 ans proportionnellement à leur âge.
Calcule la part de chacune.

39 **Sudoku fractionnaire**
Remplis les grilles de sorte à obtenir sur les lignes, colonnes et diagonales la même somme.

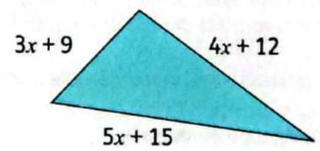
$\frac{1}{3}$		
	$\frac{5}{6}$	
1		$\frac{4}{3}$

40 Un professeur de Mathématiques demande à ses élèves de calculer :
$99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$.
Tous les élèves se ruent sur leur calculatrice sauf Razak qui disant à sa voisine Saly que la calculatrice est inutile, affirme que le résultat est $-299\,993$.
Il explique au professeur qu'il suffit pour tout nombre d'exécuter le programme de calcul suivant :

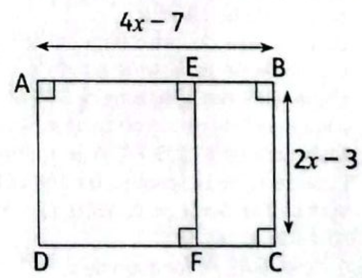
Programme : • Choisis un nombre,
• Multiplie-le par -3,
• Ajoute 7 au résultat.

1. En choisissant x comme nombre, écris l'expression littérale du programme.
2. Exécute le programme avec 100 000 puis compare le résultat avec celui que tu trouves avec la calculatrice.
3. Démontre l'affirmation de Razak.

41 On donne la figure ci-dessous.
Justifie que ce triangle est rectangle, quel que soit le nombre positif x.



42 1. On considère l'expression D telle que :
$D = (4x - 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2$.
a) Développe et réduis D.
b) Factorise D.
2. Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle et AEFD est un carré.
On suppose que x est un nombre supérieur à 2.
Détermine pour quelle(s) valeur(s) de x ($x > 2$), la différence entre l'aire du rectangle et l'aire du carré soit égale à 12.



43 Kpachi et Kpanon choisissent un même nombre. Kpachi le multiplie par 10, puis soustrait 2 au résultat obtenu. Kpanon le multiplie par 8, et ajoute 7 au résultat obtenu.
Ils obtiennent tous les deux le même résultat. Détermine le nombre que Kpachi et Kpanon avaient choisi au départ.

44 On considère l'expression E suivante :
$E = (3x - 5)^2 + (3x - 5)(7x - 4)$.
1. Développe puis réduis E.
2. Factorise E.
3. Calcule E pour $x = 0$, puis pour $x = \frac{5}{3}$.

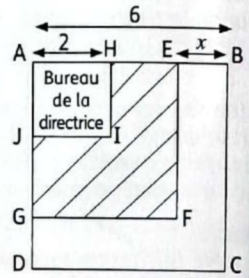
45 Soit l'expression f telle que :
$f = (x + 7)^2 - (3x - 5)^2$.
1. Développe et réduis f.
2. Factoriser f.
3. Calcule efficacement la valeur de f dans chacun des cas suivants :
a) $x = -7$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = 0$; d) $x = 3$.

46 Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. Détermine dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc.

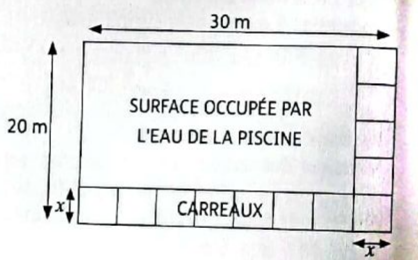
47 On considère l'expression E telle que :
$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$.
a) Développe et réduis E.
b) Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de $99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$?
c) Factorise l'expression F telle que :
$F = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(7x - 6)$.
d) Résous l'équation $(4x + 1)(7 - 3x) = 0$.

Situations d'évaluation

48 L'unité de longueur est le mètre.
Ci-dessous nous avons le plan d'une banque de Bingerville.
La directrice de cette banque demande à ton oncle de tapisser le sol du couloir hachuré. Elle met la somme de 100 000 F CFA à la disposition de ton oncle pour l'achat d'un tapis coûtant 7 000 F CFA le mètre carré.
Curieux, tu veux savoir si les 100 000 F CFA vont suffire. Sur le plan, ABCD, AHIJ et AEFG sont des carrés.
1. Calcule AE en fonction de x.
2. Factorise $(6 - x)^2 - 4$.
3. Sachant que $x = 1{,}5$. Conclus sur la possibilité d'acheter le tapis voulu avec les 100 000 F CFA.



49 La figure ci-dessous représente le plan de la piscine de Monsieur Gbané. Étant dans la piscine avec Junior, le fils de Monsieur Gbané, tu entends le carreleur dire au père de ton ami qu'il doit payer 184 000 F pour les travaux de carrelage à 1000 F le m².
Junior affirme que, dans ces conditions, la largeur x sur le plan dépasse 4 m.
Curieux, tu veux savoir si Junior a raison.
1. Justifie que l'aire P de la surface occupée par l'eau est : $P = x^2 - 50x + 600$.
2. Déduis-en que celle de la partie carrelée C vaut $50x - x^2$.
3. Calcule la valeur de C pour $x = 4$ puis dis si Junior a raison.



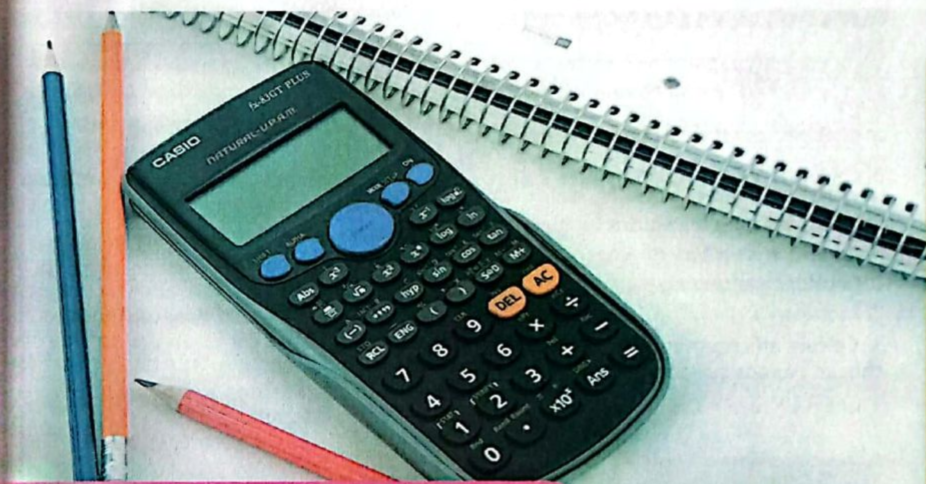
Coup de Pouce

33 Remarque que $9 - (x - 1)^2$ est de la forme $a^2 - b^2$.

38 Vérifie que la résolution du problème revient à résoudre le système.
$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ x + y + z = 3\,200\,000 \end{cases}$$

Leçon 2

Racines carrées



Pour faire certains calculs, on utilise une calculatrice.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La ferme d'un agriculteur dans le village de Foula est de forme carrée et d'aire égale à 500 m². Il veut savoir la longueur de grillage nécessaire pour clôturer sa ferme. Le grillage devra couvrir le portail. Il se confie au téléphone à son neveu qui est en classe de Troisième au Collège Moderne de BOUNDIALI. Ce dernier collabore avec ses camarades de classe pour calculer la longueur du côté de la ferme et son périmètre.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Racine carrée

Identifier :
une racine carrée d'un nombre positif.
Connaître :
les propriétés relatives aux racines carrées.
Noter :
une racine carrée.
Écrire :
un quotient sans radical au dénominateur.
Calculer :
- des sommes, des différences, des produits, des puissances, des quotients contenant des racines carrées ;
- des racines carrées de puissances.

2 Ensemble des nombres réels

Identifier :
des nombres réels.
Noter :
l'ensemble des nombres réels.

3 Valeur absolue d'un nombre réel

Identifier :
la valeur absolue d'un nombre réel.
Connaître :
la propriété relative à la racine carrée du carré d'un nombre.
Noter :
une valeur absolue.
Traiter :
une situation faisant appel aux racines carrées.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 **Racine carrée**

1 Activité : Définition, Notation

1. a) Trouve tous les nombres dont le carré est 49. Même question avec 16.
   b) Soit a la longueur d'un côté d'un carré dont l'aire est 25 cm². Écris une égalité entre a et 25. Détermine a.
2. En utilisant la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, reproduis et remplis le tableau ci-dessous. Arrondis au 100ᵉ le résultat, si nécessaire.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{a}$											

Synthèse

$\sqrt{4} = 2$. On dit que 2 est la racine carrée de 4 et on écrit : $\sqrt{4} = 2$.

Exercices de fixation

1 Recopie et remplace les pointillés par le nombre qui convient dans chaque cas.
$2^2 = 4$, donc : $\sqrt{4} = ...$
$11^2 = 121$, donc : $\sqrt{121} = ...$
$(1{,}2)^2 = 1{,}44$, donc : $\sqrt{1{,}44} = ...$

2 Donne la valeur exacte de chacun des nombres suivants :
$\sqrt{81}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{625}$.

2 Activité : Opérations sur les racines carrées : addition, produit, quotient

1. Recopie et complète le tableau suivant :

a	b	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$(\sqrt{a})^2$
9	16							
36	64							
16	36							
25	4							

2. Écris les égalités que tu remarques en utilisant les notations de la première ligne.

Synthèse

$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$; $\sqrt{9\times 16} = \sqrt{9}\times\sqrt{16}$; $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$.

On admet que :
a et b étant des nombres positifs, on a :
- $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

Exercices de fixation

1 Réduis les nombres et expressions suivants :
$\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $\sqrt{49\times 121}$;
$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}}$; $(\sqrt{3})^2$.

2 Recopie et remplace les pointillés par les nombres qui conviennent.
- $\sqrt{28} = \sqrt{...\times 7} = \sqrt{...}\times\sqrt{7} = ...\sqrt{7}$.
- $\sqrt{108} - \sqrt{192} = ...\sqrt{3} - 8\sqrt{...} = ...\sqrt{3}$.
- $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{72}} = \frac{...\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{...\sqrt{2}} = ...\sqrt{3}$.

3 Activité : Expressions conjuguées

Soit a et b deux nombres positifs.
Écris $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ sans radical.

Synthèse

a et b sont deux nombres positifs. On a $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$. On dit que les nombres $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont des expressions conjuguées.

Exercices de fixation

1 Trouve l'expression conjuguée de chacun des nombres suivants :
$\sqrt{5}+\sqrt{3}$; $\sqrt{7}-\sqrt{2}$; $4-\sqrt{13}$; $\sqrt{3}+1$;
$\sqrt{7}$; $-\sqrt{11}$.

2 Calcule :
$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;
$(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})$.

Activité 2 Ensemble des nombres réels

On considère l'ensemble A suivant : $A = \left\{-1 ; 7 ; \pi ; \frac{7}{8} ; \frac{8}{3} ; \sqrt{2} ; -5 ; 2-\sqrt{3} ; 0\right\}$.

1. Cite tous les éléments de A qui appartiennent à $\mathbb{N}$.
2. Cite tous les éléments de A qui appartiennent à $\mathbb{Z}$.
3. Cite tous les éléments de A qui appartiennent à $\mathbb{D}$.
4. Cite tous les éléments de A qui appartiennent à $\mathbb{Q}$.
5. Cite tous les éléments de A qui n'appartiennent ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$, ni à $\mathbb{D}$, ni à $\mathbb{Q}$.

Synthèse

On admet que :
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$; $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
- Tout nombre qui n'est pas rationnel est un nombre irrationnel.
- L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est l'ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

Recopie le tableau ci-contre dans ton cahier puis mets une croix si le nombre appartient à l'ensemble indiqué.

	$\frac{3}{8}$	$5-\sqrt{41}$	$-\frac{9}{13}$	$1-\sqrt{9}$	$(3+\sqrt{2})^2$	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
$\mathbb{D}$							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{R}$							
$\mathbb{R}^*$							

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. $\frac{6}{7}$ est un nombre décimal.
2. $-\frac{2}{13}$ est un nombre rationnel.
3. $-\frac{5}{16}$ est un nombre décimal.
4. $-\frac{2\pi}{3}$ est un nombre irrationnel.
5. $-2,4758$ est un nombre réel.

Activités 3 Valeur absolue d'un nombre réel

1 Activité : Définition - Propriété

1. Détermine la distance à zéro de chacun des nombres suivants : 3 ; −5 ; −0,2 et 0.
2. Recopie et complète le tableau ci-contre :
3. Compare les résultats de la 3ème colonne à ceux de la 1ère colonne.

a	a^2	$\sqrt{a^2}$
3		
−5		
−0,2		
0		

Synthèse

La distance à zéro de 3 est 3. On dit que 3 est la valeur absolue de 3.
La distance à zéro de −5 est 5. On dit que 5 est la valeur absolue de −5.
Plus généralement :
- La valeur absolue d'un nombre a est la distance à zéro de ce nombre. Elle se note $|a|$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Si $a \geq 0$, alors $|a| = a$; si $a \leq 0$, alors $|a| = -a$.

Exercices de fixation

Recopie et complète le tableau suivant :

a	0,023	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	-7π
$\lvert a\rvert$				

2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. $\sqrt{15^2} = 15$; 2. $\sqrt{(-22)^2} = -22$;
3. $\sqrt{(-\pi)^2} = \pi$; 4. $\sqrt{(-41)^2} = 41$.

2 Activité : Racine carrée et puissance

1. Recopie et complète.
$5^6 = (5...)^2$, donc : $\sqrt{5^6} = \sqrt{(5^{...})^2} = 5^{...}$.
2. Recopie et complète.
$5^7 = 5^6 \times ...$, donc : $\sqrt{5^7} = \sqrt{... \times ...} = \sqrt{...} \times \sqrt{...} = ... \times \sqrt{5}$.

Synthèse

$\sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3$, $\sqrt{5^7} = \sqrt{5^6 \times 5} = 5^3\sqrt{5}$.

On admet que :
a étant un nombre positif et n un nombre entier naturel, on a :
- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; • $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$.

Exercices de fixation

Écris chacun des nombres suivants sous la forme a^n, où n est un nombre entier naturel
$\sqrt{11^4}$; $\sqrt{5^{20}}$; $\sqrt{2^{2022}}$.

2 Écris chacun des nombres suivants sous la forme $a^n\sqrt{a}$, où a est un nombre réel positif et n un nombre entier naturel
$\sqrt{17^5}$; $\sqrt{10^{21}}$; $\sqrt{41^{17}}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre une équation du type $x^2 = a$ où $a \geq 0$

Résous les équations suivantes :
1. $x^2 = 9$; 2. $y^2 = 7$.

Corrigé

1. $x^2 = 9$
donc $x^2 = 3^2$
d'où $x = 3$ ou $x = -3$
$S = \{3 ; -3\}$.

2. $y^2 = 7$
donc $y^2 = (\sqrt{7})^2$
d'où $y = \sqrt{7}$ ou $y = -\sqrt{7}$
$S = \{\sqrt{7} ; -\sqrt{7}\}$.

Méthode

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ où $a \geq 0$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice 2 Écrire des quotients sans radical au dénominateur

Écris les nombres A, B et C suivants sans radical au dénominateur :

$A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$; $B = -\frac{5}{\sqrt{2}-1}$; $C = \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}}$.

Corrigé

$A = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

$B = -\dfrac{5}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{-5(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$B = \dfrac{-5(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1}$

$B = -5\sqrt{2}-5$.

$C = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$C = \dfrac{2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Méthode

Pour écrire un nombre sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exercice 3 Écrire des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$

Écris chacun des nombres A et B suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et b est le plus petit possible.

$A = 2\sqrt{32} - 5\sqrt{72}$; $B = -\sqrt{12}+\sqrt{243}-\sqrt{300}+\sqrt{108}$.

Corrigé

$A = 2\sqrt{32}-5\sqrt{72}$

$A = 2\sqrt{2^5}-5\sqrt{6^2\times 2}$

$A = 2\times 4\sqrt{2}-5\times 6\sqrt{2}$

$A = 8\sqrt{2}-30\sqrt{2}$

$A = -22\sqrt{2}$.

$B = -\sqrt{12}+\sqrt{243}-\sqrt{300}+\sqrt{108}$

$B = -\sqrt{4\times 3}+\sqrt{81\times 3}-\sqrt{100\times 3}+\sqrt{36\times 3}$

$B = -2\sqrt{3}+9\sqrt{3}-10\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$B = 3\sqrt{3}$.

Méthode

Pour écrire $\sqrt{72}$ sous la forme $6\sqrt{2}$, on a utilisé le fait que : $72 = 36\times 2$ et $36 = 6^2$.

Exercice 4 Simplifier une écriture

On donne le nombre réel A tel que : $A = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

1. Justifie que : $A = 2\sqrt{6}-5$.
2. a) Calcule A^2.
   b) Sachant que A est négatif donne une écriture plus simple du nombre réel B tel que $B = \sqrt{49-20\sqrt{6}}$.

Corrigé

1. $A = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$A = \dfrac{2-2\sqrt{6}+3}{2-3} = \dfrac{5-2\sqrt{6}}{-1}$

$A = 2\sqrt{6}-5$.

2. a) $A = (2\sqrt{6}-5)^2 = 24-20\sqrt{6}+25$

$A = 49-20\sqrt{6}$.

b) $B = \sqrt{49-20\sqrt{6}} = \sqrt{A^2} = |A|$ et comme $A < 0$ on a : $B = -A = 5-2\sqrt{6}$.

Méthode

Pour déterminer $\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2}$, on a utilisé la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$.

Résumé de cours

1 Racine carrée

Définition - Notation

- On appelle **racine carrée** du nombre positif a le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a.
  $\sqrt{a}$ se lit « **racine carrée de a** » ou encore « **radical de a** » Le symbole " $\sqrt{\ }$ " est appelé le **radical**.
- Si a est positif alors, $\sqrt{a^2} = a$.

Opérations sur les racines carrées : addition, produit, quotient

a est un nombre positif. $\sqrt{a}$ existe si et seulement si $a \geq 0$.
a et b deux nombres positifs.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$; $(\sqrt{a})^2 = a$.

Remarque : En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Expressions conjuguées

L'expression conjuguée de $a+\sqrt{b}$ est $a-\sqrt{b}$, où a est un nombre réel et b un nombre réel positif.
L'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres positifs.

2 Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

$\pi \notin \mathbb{Q}$ mais $\pi \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels.

3 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition - Propriété

Définition et notation

- La valeur absolue d'un nombre réel est la distance à zéro de ce nombre.
- La valeur absolue du nombre a est notée $|a|$.
- $|a|$ se lit valeur absolue de a.

Propriété

Pour tout nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Racine carrée et puissance

a est un nombre strictement positif et n un nombre entier naturel.
On a : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$.

Exercices de renforcement

1 Écris chacun des nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K et L suivants sans le symbole $\sqrt{\ }$:

$A = \sqrt{2} \times \sqrt{8}$ $\quad G = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$

$B = \sqrt{5^4}$ $\quad H = \sqrt{7} \times \sqrt{\dfrac{7}{16}}$

$C = \sqrt{2 \times 4 \times 8}$ $\quad I = 2\sqrt{7} \times \sqrt{28}$

$D = \sqrt{1000} \times \sqrt{10}$ $\quad J = \sqrt{\dfrac{18}{50}}$

$E = \sqrt{5^3 \times 2 \times 10}$ $\quad K = \sqrt{0,12 \times 8\sqrt{3}}$

$F = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$ $\quad L = \dfrac{\sqrt{0,32} \times \sqrt{0,2}}{\sqrt{3,6}}$

2 Détermine la valeur exacte des nombres réels A, B, C, D et E suivants en précisant les étapes des calculs :

$A = \sqrt{9} \times \sqrt{64}$; $B = \sqrt{0,36} - \sqrt{0,25}$

$C = \sqrt{0,04} + \sqrt{0,01} + \sqrt{0,01} + \sqrt{10^{-4}}$;

$D = \sqrt{16} - \sqrt{1,69} + \sqrt{0,81}$;

$E = \sqrt{2020 \times 2021 + 2021}$.

3 Écris chacun des nombres A, B, C, et D suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$; $B = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}$;

$C = -\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$;

$D = \dfrac{2\sqrt{7}}{5} + \sqrt{7} - \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

4 Écris chacun des nombres suivants A, B et C sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$A = \sqrt{20} - 3\sqrt{5} + \sqrt{45}$;

$B = 3\sqrt{96} + \sqrt{150} - \sqrt{726}$;

$C = \sqrt{\dfrac{50}{9}} - \sqrt{\dfrac{18}{25}}$.

5 Écris les nombres suivants sans radical au dénominateur.

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{-4}{\sqrt{3}-1}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$; $\dfrac{2}{-1-\sqrt{2}}$;

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}}$.

6 Écris chacun des nombres A, B, C, D et E suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{N}^*$.

$A = \sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})$;

$B = (1 + 7\sqrt{5})(5 - 3\sqrt{5})$;

$C = (2\sqrt{5} - 3)^2$;

$D = (\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$;

$E = (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$.

7 Écris chacun des nombres H, I, J, L, M e suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où $a \in$ $b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}^*$:

$H = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \sqrt{3}}}$;

$I = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

$J = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2}$; $K = 3\sqrt{80} - \sqrt{180} - 2\sqrt{4}$

$L = \sqrt{\dfrac{27}{2}} \times \sqrt{\dfrac{8}{49}}$;

$M = \sqrt{\dfrac{8}{9}} \times \sqrt{\dfrac{12}{25}} \times \sqrt{\dfrac{225}{24}}$;

$N = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$.

8 On donne : $x = \sqrt{75}$ et $y = \sqrt{80}$.

a) Écris x et y sous la forme $a\sqrt{b}$, où a e sont des entiers naturels.

b) Écris sous la forme la plus simple possi $(x - y)$ et $\dfrac{xy}{x+y}$.

9 Le tableau ci-dessous est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie ta réponse.

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$10+4\sqrt{2}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	2

10 Justifie que :

1. $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4,5}$;

2. $\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = 1$.

11 Justifie que :

$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}}}} = 3$

EXERCICES

12 Calcule : $(-2)^2 \times 2^2 \times (-\sqrt{5})^2$; $\dfrac{(-0,1)^3}{(-0,1)^5}$;

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \times \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^4$; $(-\sqrt{5})^3 \times (-\sqrt{5})^2$.

13 a, b et c sont des nombres réels positifs. Écris plus simplement :

$(\sqrt{a^5 \times b^6 \times c^{30}})^2$; $(\sqrt{a^{34} \times b^{57} \times c^{175}})^5$;

$\left(\dfrac{\sqrt{a^{75} \times b^{552} \times c^{127}}}{\sqrt{a^{33} \times b^{133} \times c^{355}}}\right)^3$.

14 Factorise les expressions A, B, C, D, E, F et G suivantes :

$A = a^2 - 2$;

$B = x\sqrt{3} - x^2\sqrt{3}$;

$C = x^2 - 2\sqrt{7}x + 7$;

$D = (x - 2)^2 - 5$;

$E = 5x^2 - 8$;

$F = (\sqrt{5} - 1)x - 2\sqrt{5} + 2$;

$G = 7 + 4\sqrt{7}x + 4x^2 - (\sqrt{7} + 2x)(5x - 3\sqrt{7})$.

15 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x + 2 = x\sqrt{2}$;
2. $x + 4\sqrt{3} - 1 = 2x\sqrt{3} - 4$;
3. $\dfrac{x}{4+\sqrt{5}} = \dfrac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$;
4. $\dfrac{1-2x}{3\sqrt{2}+1} = \dfrac{2x}{3\sqrt{2}}$;
5. $x - \dfrac{5+\sqrt{7}}{2} + \dfrac{x}{\sqrt{7}} = 0$.

16 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 = 4 - \sqrt{2}$;
2. $5x^2 + 4 = 0$;
3. $2x^2 - 3 = 0$;
4. $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$;
5. $(x + 1)^2 - 2 = 0$.

17 Écris les nombres réels A, B, C, D, E et F suivants sous la forme $a\sqrt{n}$, où $a \in \mathbb{Q}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$A = \sqrt{1,21} \times \sqrt{100}$;

$B = \sqrt{7,2} \times \sqrt{10}$;

$C = \sqrt{1,69 \times 300}$;

$D = \sqrt{27} - \dfrac{3}{4}\sqrt{12} - \sqrt{75} + \dfrac{5}{6}\sqrt{192}$;

$E = \sqrt{20} - \dfrac{3}{4}\sqrt{80} + 2\sqrt{2,45}$;

$F = \dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{54}{16}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{24}{81}}$.

18 Écris le plus simplement possible chacune des expressions E, F, G et H suivantes :

$E = \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$;

$F = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

$G = -\sqrt{12} + \sqrt{243} - \sqrt{300}$;

$H = \sqrt{\dfrac{16}{25}} - \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

19 On donne :

$H = \sqrt{18} - \sqrt{288} - 2\sqrt{32} + 5\sqrt{72}$;

$P = 2\sqrt{27} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{108}$;

$K = \sqrt{2 \times 2021 \times 2022 - 2 \times 2021}$.

Écris H, P et K sous la forme $a\sqrt{n}$ où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

20 Pour tout nombre réel x, on pose :

$A = (1 - \sqrt{5})x + 2(1 + \sqrt{5})x - 8$.

Détermine la valeur numérique de A pour les valeurs de x suivantes :

$\sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; $1 - \sqrt{5}$.

21 On donne la fraction rationnelle R telle que :

$R = \dfrac{x + \sqrt{2}}{x^2 - 2}$.

1. a) Trouve les valeurs de x pour lesquelles R existe.

b) Simplifie R.

2. Calcule la valeur numérique de R sans radical au dénominateur pour $x = 1$ et $x = -2\sqrt{2}$.

22 On donne les nombres réels a et b tels que :

$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$ et $b = \dfrac{-2}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$.

1. Écris les nombres réels a et b sans radical au dénominateur.

2. Justifie que les nombres réels a et b sont opposés.

23 Donne la forme factorisée de A, B et C.
$A = 2x^2 - 3$; $B = x^2 - 2 + (x - \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$;
$C = 4x\sqrt{3} - 3x^2\sqrt{3} + (4 - 3x)$.

24 On donne le nombre réel E tel que :
$E = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.
1. a) Justifie que : $E = \sqrt{35} - 6$.
b) Détermine le signe de E.
2. a) Calcule E^2.
b) Donne une écriture plus simple du nombre réel B tel que $B = \sqrt{71 - 12\sqrt{35}}$.

25 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
a) $3x - \sqrt{3} = 2 - x\sqrt{2}$; b) $16x - 5 = 0$;
c) $2x + \sqrt{3} > 3x + 1$; d) $x - \sqrt{5} \geq -2$.

26 On donne les nombres réels positifs A et B.
$A = 5 - 2\sqrt{6}$ et $B = 5 + 2\sqrt{6}$ avec l'encadrement $0{,}101 < A < 0{,}102$.
1. Justifie que les nombres A et B sont deux nombres inverses l'un de l'autre.
2. Déduis-en un encadrement de B par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

27 a, b et c sont des nombres réels tels que :
$a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et
$c = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2$.
1. Écris a et c sous la forme $x\sqrt{n} + y$, où x et y sont des nombres rationnels et n un entier naturel.
2. Justifie que : $a = c$.
3. Déduis-en une écriture simplifiée de b.

28 On donne les nombres réels a et b tels que :
$a = \dfrac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$.
Justifie que $a \times b$ est un nombre entier.

29 On donne : $a = \dfrac{-3}{3+2\sqrt{3}}$ et $b = 2\sqrt{3} - 3$.
Justifie que : $a + b = 0$.

Exercices d'approfondissement

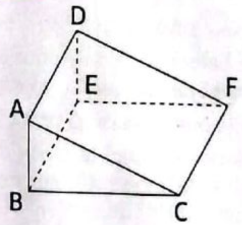
30 On donne les nombres réels a et b tels que $a = 5 - 2\sqrt{6}$ et $b = 5 + 2\sqrt{6}$.
Justifie que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ est un nombre entier naturel.

31 On donne les nombres réels a et b tels que $a = 3 + 2\sqrt{2}$ et $b = 3 - 2\sqrt{2}$.
1. a) Calcule a^2 et b^2.
b) Déduis-en la valeur exacte du nombre réel A tel que :
$A = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$.
2. On donne les nombres réels X et Y tels que $X = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ et $Y = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.
a) Calcule XY.
b) On pose : $B = X - Y$.
Détermine le signe de B.
c) Calcule B^2 puis donne la valeur exacte de B.

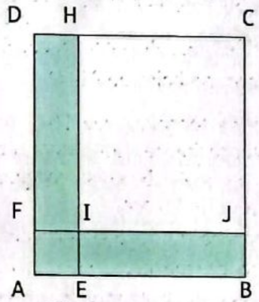
32 ABCD est un rectangle. On sait de plus que $AB = \sqrt{300} - \sqrt{147}$ et $BC = \dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{2}} - \sqrt{12}$.
1. Justifie que ABCD est un carré.
2. Détermine l'aire de ABCD.

33 L'unité de longueur est l'hectomètre (hm). Une plantation rectangulaire a pour largeur $2\sqrt{12} + \sqrt{147} - 5$ et sa longueur dépasse sa largeur de 10 hm.
1. Détermine la largeur et la longueur de la plantation sous la forme $a\sqrt{n} + b$ où a et b sont des nombres rationnels et n un entier naturel.
2. Détermine le périmètre de la plantation.
3. Détermine l'aire de la plantation.

34 L'unité de longueur est le mètre.
On donne le prisme droit de bases ABC et DEF ci-après, où $AB = 2 - \sqrt{2}$; $BC = 2 + \sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{3}$ et $AD = 1 + \sqrt{3}$.
Les triangles ABC et DEF sont rectangles et superposables.
1. Calcule l'aire latérale de ce prisme.
2. Calcule son aire totale.
3. Calcule son volume.



35 Les parties A et B sont indépendantes.
Partie A
1. Vérifie que les nombres A et B tels que :
$A = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)(5\sqrt{7} - 2)$ et
$B = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(5\sqrt{7} - 2)$ sont les solutions de l'équation :
(E) : $2x^2 - 4(5\sqrt{7} - 2)x + (5\sqrt{7} - 2)^2 = 0$.
2. Koffi veut réaliser un champ de telle sorte que l'aire de sa canalisation d'eau en bleu sur la figure ci-dessous soit la même que celle de la parcelle CHIJ à cultiver. ABCD et CHIJ sont des carrés. Ne sachant comment s'y prendre pour déterminer la largeur de sa canalisation, il te sollicite.
Détermine DH sachant que : $DC = 5\sqrt{7} - 2$.



Partie B
ABCD et CHIJ sont des carrés de côtés respectifs $5\sqrt{7} - 2$ et $\sqrt{63} + 2$.
Détermine l'aire $\mathscr{A}$ de la surface coloriée de deux manières différentes.

36 1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$x = -2 - x\sqrt{3}$.
2. Écris la solution sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a et b sont des nombres réels et c un nombre réel positif.

37 On donne les nombres réels A, B et C tels que :
$A = \sqrt{3} - 2$; $B = -\sqrt{3} - 2$ et
$C = \dfrac{1-\sqrt{3}}{A} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{B}$.
1. a) Détermine le signe de A.
b) Déduis-en une écriture plus simple de $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.
2. Justifie que A et B sont inverses l'un de l'autre.
3. Justifie que C est un nombre entier naturel.

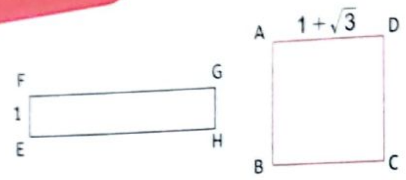
38 1. Justifie que les nombres réels $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont inverses l'un et l'autre.
2. Justifie que les nombres réels $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont opposés.

39 On donne : $A = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ et $B = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$.
1. Justifie que : $A = 2 + \sqrt{3}$.
2. a) Détermine le signe de B.
b) Calcule B^2 et déduis-en une écriture simple de D tel que $D = \sqrt{78 - 40\sqrt{6}}$.
3. On donne : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$. Encadre B par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

40 On donne l'expression littérale A(x) tel que :
$A = \dfrac{x^2(x+\sqrt{2})}{x^2 - x\sqrt{2}}$.
1. Détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de A.
2. Donne l'écriture simplifiée de A.
3. Calcule la valeur numérique de A(x) pour $x = 1, x = 0, x = 2\sqrt{2}$ et $x = 3 + 5\sqrt{2}$.
(Tu donneras les résultats sans radical au dénominateur).

41 Les figures ci-après ne sont pas en vraies grandeurs. ABCD est un carré de côté $(1 + \sqrt{3})$ cm et EFGH est un rectangle de largeur 1 cm et de longueur indéterminée.

EXERCICES



1. Détermine la valeur exacte de FG pour que le périmètre de EFGH soit égal à celui de ABCD.
2. Justifie que lorsque les aires de ABCD et EFGH sont égales, la valeur exacte de FG est $4 + 2\sqrt{3}$.

42 1. a et b étant deux nombres réels quelconques, justifie que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. a et b étant deux nombres réels positifs, justifie que :

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;
b) $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$;
c) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

43 Trois points A, B et C sont tels que $AB = \sqrt{325}$, $AC = \sqrt{52}$ et $BC = \sqrt{637}$
Tes deux amis, Koffi et Moussa, ont fait une figure.
Koffi affirme : « Les points A, B et C sont alignés ».
Moussa répond : « Mais non, pas du tout ! »
On te demande de départager tes deux amis avec une bonne argumentation.

Situation d'évaluation

44 L'unité de longueur est le km.
M. IRIÉ dispose d'une parcelle de forme rectangulaire dont la largeur est $5 - 2\sqrt{5}$ et la longueur $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$.
Il veut améliorer le rendement de son verger de légumes sur toute la parcelle. Une enquête menée par l'Agence National d'Appui au Développement Rural (ANADER) révèle qu'il faut utiliser 50 kg d'engrais par km² pour accroître la production du verger de légumes.

M. IRIÉ veut savoir si les 19 kg d'engrais dont il dispose seront suffisants pour améliorer le rendement de son verger.
1. Justifie que l'aire de la parcelle est 1 km
2. Explique pourquoi le stock d'engrais que possède M. IRIÉ ne suffit pas pour améliorer le rendement de son verger.

Coup de Pouce

34 1. L'aire latérale du trapèze est égale à la somme des aires des rectangles ABED, ADFC et BEFC.
2. L'aire totale est égale à la somme de l'aire latérale et des aires des bases.
3. Le volume du trapèze est égal à l'aire de la base multipliée par la hauteur.
Aire (ABC) × AD.

35 Attention au calcul. Il faut remarquer que l'on peut mettre $(5\sqrt{7} - 2)^2$ en facteur.

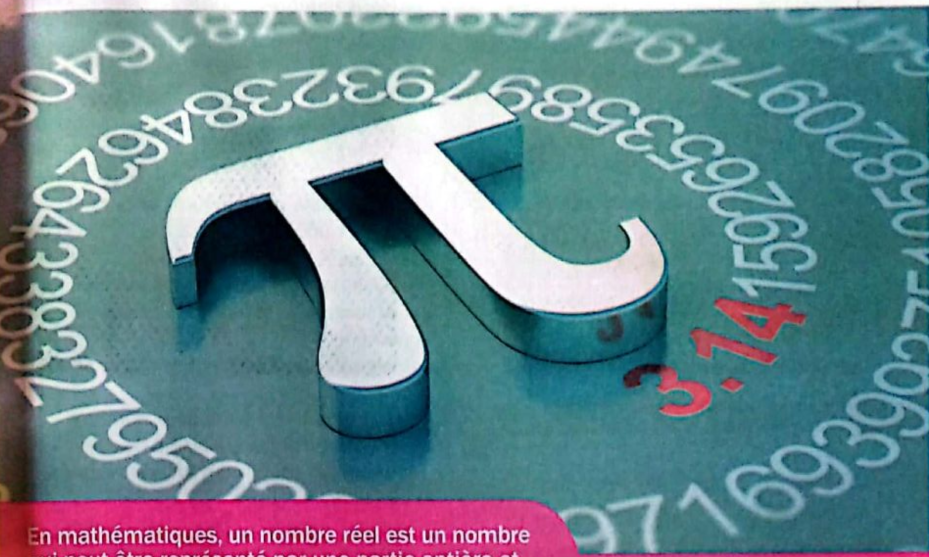
37 Calcule $(\sqrt{3})^2$ et 2^2 puis compare $\sqrt{3}$ et 2 pour trouver le signe A.

38 1. Vérifie que le produit des nombres donnés est égal à 1.
2. Vérifie que la somme des nombres donnés est égale à zéro.

42 Utilise $(a-b)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
Calcule $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
Compare les carrés de $\sqrt{a+b}$ et de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Leçon 3

Calcul numérique



En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de 2 et π.

C'est à partir des années 1860 que la nécessité de présenter une construction des nombres réels se fait de plus en plus pressante, dans le but d'asseoir l'analyse sur des fondements rigoureux. Jusqu'à cette date, l'existence des réels et leurs propriétés sont admises, par exemple par Cauchy dans son cours de 1821.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un commerçant souhaite acheter un terrain dont l'aire est comprise entre 230 m² et 300 m² dans le quartier d'Angré pour y construire un magasin. À cet effet, il a contacté un propriétaire terrien. Celui-ci possède un terrain dont il ne retrouve pas l'extrait topographique. Cependant, il se rappelle que son terrain est rectangulaire, la longueur est comprise entre 17 m et 18 m et sa largeur entre 14 m et 15 m.
Pour savoir si son terrain répond aux critères du commerçant, il s'adresse à sa fille qui est en classe de Troisième au Lycée Moderne d'Angré.
Elle travaille avec ses camarades de classe pour répondre à la préoccupation de son père.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Intervalles

Identifier
un intervalle.
Noter
un intervalle.
Lire
un intervalle.
Traduire
- un intervalle à l'aide d'inégalités ;
- une inégalité à l'aide d'un intervalle.

Représenter
un intervalle sur une droite graduée.
Identifier
- l'amplitude d'un intervalle ;
- le centre d'un intervalle.

Déterminer
- le centre d'un intervalle ;
- l'amplitude d'un intervalle.

2 Réunion et intersection d'intervalles

Représenter :
l'intersection ou la réunion de deux intervalles sur une droite graduée.

3 Inégalités et opérations

Connaître :
les propriétés relatives aux inégalités et opérations.

4 Comparaison

Comparer :
- deux nombres réels en recherchant le signe de leur différence ;
- deux nombres positifs en comparant leurs carrés ;
- deux nombres strictement positifs en comparant leurs inverses.

5 Encadrement

Encadrer :
- un nombre réel par deux entiers consécutifs ;
- l'opposé d'un nombre ;
- l'inverse d'un nombre non nul ;
- la somme, la différence de deux nombres ;
- le produit et le quotient de deux nombres positifs ;
- un nombre réel entre deux nombres décimaux d'ordre 1, 2 ou 3 à l'aide de la table des carrés ou d'une calculatrice.

Déterminer :
l'arrondi d'ordre 1, 2 ou 3 de la racine carrée d'un nombre réel positif.
Traiter :
une situation faisant appel au calcul numérique.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Intervalles

1 Activité : Présentation

1. Représente sur une droite graduée les nombres réels x tels que : $x > -2$.
2. Représente sur une droite graduée les nombres réels x tels que : $x \leq 3$.
3. Représente sur une droite graduée les nombres réels x tels que : $-2 < x \leq 3$.
4. Représente sur une droite graduée les nombres réels x tels que : $-2 \leq x \leq 3$.
5. Représente sur une droite graduée les nombres réels x tels que : $-2 < x < 3$.

Synthèse

- L'ensemble des nombres réels x tels que $x > -2$ est l'intervalle des nombres réels supérieurs à -2. Il est noté $]-2 ; \rightarrow[$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $-2 < x \leq 3$ est l'intervalle ouvert en -2, fermé en 3. Il est noté $]-2 ; 3]$.

- Les nombres -2 et 3 sont les **bornes** de l'intervalle $]-2 ; 3]$.
- L'ensemble des nombres réels tels que $x \leq 3$ est l'intervalle des nombres réels inférieurs ou égaux à 3. Il est noté $]\leftarrow ; 3]$.
- L'ensemble des nombres réels tels que $-2 < x < 3$ est l'intervalle ouvert -2 ; 3. Il est noté $]-2 ; 3[$.

Exercices de fixation

1 Écris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres réels suivants :
1. l'ensemble des nombres réels x tels que $-3 \leq x \leq 7$;
2. l'ensemble des nombres réels x tels que $x > -7$;
3. l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq 0$.

2 Écris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres réels suivants :
1. l'ensemble des nombres réels x tels que $1 < x < 6$;
2. l'ensemble des nombres réels x tels que $-5 < x \leq -2$;
3. l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq 10$.

2 Activité : Intervalle et inégalité

1. Représente sur une droite graduée les intervalles suivants : $[1 ; 5[$; $]\leftarrow ; 3[$ et $]-2 ; \rightarrow[$.
2. Écris sous forme d'inégalité chacun des intervalles suivants : $[1 ; 5[$; $]\leftarrow ; 3[$ et $]-2 ; \rightarrow[$.

Synthèse

On peut écrire un intervalle sous forme d'inégalité(s).

Exercices de fixation

1 Écris les intervalles suivants sous forme d'inégalités :
a) $[-7 ; 0]$; b) $[1 ; 2[$;
c) $]\leftarrow ; -9[$; d) $]5 ; \rightarrow[$;
e) $]2 ; 4[$.

2 Écris sous forme d'inégalité les intervalles suivants :
a) $[-3 ; 5]$; b) $[3 ; 5[$;
c) $]\leftarrow ; -8[$; d) $[9 ; \rightarrow[$;
e) $]-2 ; 2[$.

3 Activité : Amplitude et centre d'un intervalle

On donne les intervalles $[2 ; 5]$; $]2 ; 5]$; $[2 ; 5[$ et $]2 ; 5[$.
1. Calcule $5 - 2$.
2. Calcule $\frac{2+5}{2}$.

Synthèse

$5 - 2$ est l'amplitude de l'intervalle $[2 ; 5]$ et $\frac{5+2}{2}$ est le centre de l'intervalle $[2 ; 5]$.
Plus généralement :
Soit a et b deux nombres réels tels que : $a < b$.
- Le nombre $b - a$ est l'amplitude de chacun des intervalles $[a ; b]$; $]a ; b]$; $[a ; b[$ et $]a ; b[$.
- Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est le centre de chacun des intervalles $[a ; b]$; $]a ; b]$; $[a ; b[$ et $]a ; b[$.

Exercices de fixation

1 Détermine l'amplitude et le centre de chacun des intervalles $[2 ; 5]$ et $[-2 ; 3[$.

2 Détermine l'amplitude et le centre de chacun des intervalles $]4 ; 9[$ et $[-7 ; -3]$.

Activités 2 Réunion et intersection d'intervalles

1 Activité : Intersection de deux intervalles

On donne les intervalles I, J et K tels que : $I = [-3 ; 5]$, $J = [-1 ; 7]$ et $K = [6 ; 7[$.

1. Représente sur une droite graduée l'intervalle I en bleu.
2. Représente sur la même droite graduée l'intervalle J en rouge.
3. Déduis-en les nombres appartenant à la fois à l'intervalle I et à l'intervalle J.
4. Représente sur la même droite graduée l'intervalle K en vert .
   Y a-t-il des nombres appartenant à la fois à l'intervalle I et à l'intervalle K ?

Synthèse

- L'ensemble des nombres appartenant à la fois à l'intervalle $[-3 ; 5]$ et à l'intervalle $[-1 ; 7]$ est l'intersection des intervalles $[-3 ; 5]$ et $[-1 ; 7]$. On note : $[-3 ; 5] \cap [-1 ; 7]$.
- L'intersection des intervalles I et K est appelée ensemble vide.
  On note : $\varnothing$ ou $\{\}$.

Exercices de fixation

1 En utilisant une droite graduée, détermine l'intersection des intervalles I et J.
a) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [1 ; 4]$.
b) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [4 ; 5]$.
c) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [1 ; 2]$.

2 En utilisant une droite graduée détermine l'intersection des intervalles I et J.
a) $I = [-2 ; 3[$ et $J =]3 ; 4[$.
b) $I = [0 ; 3[$ et $J = [2 ; \rightarrow[$.
c) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [-2 ; \rightarrow[$.

2 Activité : Réunion de deux intervalles

On donne les intervalles I et J tels que : $I = [-3 ; 5]$ et $J = [-1 ; 7]$.

1. Représente sur une droite graduée l'intervalle I en bleu.
2. Représente sur la même droite graduée l'intervalle J en rouge.
3. Déduis-en l'ensemble de tous les nombres appartenant à l'intervalle I ou à l'intervalle J.

Synthèse

L'ensemble des nombres appartenant à l'intervalle $[-3 ; 5]$ ou à l'intervalle $[-1 ; 7]$ est la réunion des intervalles $[-3 ; 5]$ et $[-1 ; 7]$. On note : $[-3 ; 5] \cup [-1 ; 7]$.

Exercices de fixation

1 En utilisant une droite graduée, détermine la réunion des intervalles I et J.
a) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [1 ; 4]$.
b) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [4 ; 5]$.
c) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [1 ; 2]$.

2 En utilisant une droite graduée, détermine la réunion des intervalles I et J.
a) $I = [-2 ; 3[$ et $J =]3 ; 4[$.
b) $I = [0 ; 3[$ et $J = [2 ; \rightarrow[$.
c) $I = [-2 ; 3]$ et $J = [-2 ; \rightarrow[$.

Activités 3 Inégalités et opérations

1 Activité : Inégalités et addition

a, b et c sont des nombres réels tels que : $a < b$.
Compare :
a) $a + 3$ et $b + 3$.
b) $a - 2$ et $b - 2$.
c) $a + c$ et $b + c$.

Synthèse

On admet que :
a, b et c sont trois nombres réels tels que : $a < b$.
On a : $a + c < b + c$.

Exercices de fixation

1 Deux nombres réels a et b sont tels que : $a \geq b$. Compare $a + 150$ et $b + 150$.

2 Deux nombres a et b sont tels que : $a < b$. Compare $a - 3$ et $b - 3$.

3 Sachant que $\sqrt{2} \geq 1{,}4$, justifie que : $\sqrt{2} - 2 \geq -0{,}6$.

2 Activité : Inégalités et multiplication

a et b sont deux nombres réels tels que : $a < b$.
Justifie que :
a) $5a < 5b$;
b) $-\frac{5}{2}a > -\frac{5}{2}b$.

Synthèse

On admet que :
a, b et c sont trois nombres réels tels que : $a < b$.
Si $c > 0$, alors $ac < bc$.
Si $c < 0$, alors $ac > bc$.

Exercices de fixation

1 Deux nombres réels a et b sont tels que : $a < b$.
Compare $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$.

2 Deux nombres a et b positifs sont tels que : $a \geq b$.
Compare $-3a$ et $-3b$.

3 Sachant que $1{,}5 \geq \sqrt{2}$, justifie que : $0{,}5 \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$.

4 Sachant que $\sqrt{2} > 1{,}2$, justifie que : $-\frac{\sqrt{2}}{6} < -0{,}2$.

Activités 4

Comparaison

1 Activité : Comparaison et différence

1. Compare les nombres $3-\frac{2}{3}$ et 2 en utilisant le signe de la différence.
2. Compare les nombres $1-\frac{3}{2}$ et 2 en utilisant le signe de la différence.
3. Compare 63 et 40.

Synthèse

$1-\frac{3}{2}<0$ et $2>0$, donc $2>1-\frac{3}{2}$. $\left(3-\frac{2}{3}\right)-2=\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}>0$, donc $3-\frac{2}{3}>2$

Plus généralement :
Un nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif.
Pour comparer deux nombres, on peut déterminer le signe de leur différence.

Exercices de fixation

1 Compare : $7\sqrt{3}-2$ et $3+7\sqrt{3}$ en utilisant le signe de leur différence.

2 Compare : $\pi-3$ et $\pi-\frac{22}{7}$.

3 Compare $-2-\sqrt{2}$ et $-7-\sqrt{2}$ en utilisant le signe de leur différence.

2 Activité : Comparaison et carrée - Comparaison et racine carrée

1. a) Compare les nombres positifs : $5\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ en utilisant la calculatrice.
   b) Compare les carrés de $5\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$.
   c) Déduis de a) et b) une règle de comparaison de deux nombres positifs à partir de leurs carrés.
2. a) Compare : 16 et 81.
   b) Compare : $\sqrt{16}$ et $\sqrt{81}$.
   c) Déduis de a) et b) une règle de comparaison de deux nombres positifs à partir de leurs racines carrées.

Synthèse

$(5\sqrt{2})^2>(2\sqrt{5})^2$, donc $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$. $16<81$, donc $\sqrt{16}<\sqrt{81}$.

On admet que :
- Deux nombres positifs sont rangés dans le même sens que leurs carrés.
- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

Exercices de fixation

1 a) Compare les carrés de $5\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$.
b) Déduis-en la comparaison de :
$5\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$.

2 Compare :
a) $-3\sqrt{2}$ et -4.
b) $2+\sqrt{3}$ et $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

3 Activité : Comparaison et inverse

1. a) Compare les nombres positifs $\sqrt{5}+2$ et $\sqrt{5}+3$.
   b) Compare $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}+3}$ à l'aide de la calculatrice.
2. a) Compare les nombres négatifs -5 et -3.
   b) Compare : $-\frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{3}$.
   c) Énonce une règle de comparaison de deux nombres de même signe à partir de leurs inverses.

Synthèse

$\sqrt{5}+2<\sqrt{5}+3$, donc $\frac{1}{\sqrt{5}+2}>\frac{1}{\sqrt{5}+3}$. $-5<-3$, donc $-\frac{1}{5}>-\frac{1}{3}$.

On admet que :
Deux nombres réels de même signe et différents de 0 sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Exercices de fixation

1 Sachant que $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$, compare :
a) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ b) $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{-1}{3\sqrt{2}}$.

2 Compare :
a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ et $\frac{1}{2}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{-1}{8}$.

Activités 5

Encadrement

1 Activité : Encadrement d'une somme

x, y, a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $a<x<b$ et $c<y<d$.
a) Détermine le signe de $(x+y)-(a+c)$ et le signe de $(x+y)-(b+d)$.
b) Justifie que : $a+c<x+y<b+d$.

Synthèse

On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

Exercices de fixation

1 On donne :
$3<x<4$ et $5<y<6$.
Encadre : $x+y$.

2 On donne : $-3<x<-2$ et $4<y<5$.
Encadre : $x+y$.

3 On donne :
$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ et $3{,}14<\pi<3{,}15$.
Encadre : $\sqrt{2}+\pi$.

4 On donne : $-5<x<-2$ et $2<y<3$.
Trouve un encadrement de $x+y$.

2 Activité : Encadrement d'une différence

x, y, a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $a<x<b$ et $c<y<d$.
a) Détermine un encadrement de $-y$.
b) Encadre : $x+(-y)$.
c) Donne une méthode d'encadrement d'une différence.

Synthèse

Pour encadrer la différence $x - y$, on encadre $-y$ et on utilise l'égalité $x - y = x + (-y)$.

Exercices de fixation

1 On donne :
$3 < x < 4$ et $5 < y < 6$.
Encadre : $x - y$.

2 On donne : $-5 < x < -4$ et $1 < y < 2$.
Encadre : $x - y$.

3 On donne :
$1,41 < 2 < 1,42$ et $3,14 < \pi < 3,15$
Encadre : $\sqrt{2} - \pi$.

4 On donne : $-5 < x < 2$ et $2 < y < 3$
Trouve un encadrement de $x - y$.

3 Activité : Encadrement d'un produit

On donne les nombres réels x, y et z tels que $5 \leq x \leq 8$; $2 \leq y \leq 3$ et $-4 \leq z \leq -1$.

1. a) Justifie que : $10 \leq 5y \leq xy$.
   b) Justifie que : $xy \leq 8y \leq 24$.
   c) Déduis-en un encadrement de xy.
2. a) Justifie que : $1 \leq -z \leq 4$.
   b) Déduis-en un encadrement de $-xz$ puis un encadrement de xz.

Synthèse

$5 \leq x \leq 8$ et $2 \leq y \leq 3$, donc $5 \times 2 < xy < 8 \times 3$.
On admet que :
x et y sont deux nombres réels. a, b, c, et d sont des nombres positifs on a :
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$,alors $ac \leq xy \leq bd$.
- Si un des nombres est négatif, on encadre d'abord son opposé.

Exercices de fixation

1 On donne : $5 < x < 6$ et $7 < y < 8$.
Encadre : xy.

2 On donne : $-3 < x < -2$ et $4 < y < 5$.
Encadre : xy.

3 On donne : $-3 < x < -2$ et $-4 < y < -3$.
Encadre : xy.

4 Activité : Encadrement d'un inverse

On donne deux nombres réels x et y tels que : $5 \leq x \leq 6$ et $-4 \leq y \leq -3$.

1. Justifie que : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$.
2. a) Justifie que : $3 \leq -y \leq 4$.
   b) Trouve un encadrement de $-\frac{1}{y}$.
   c) Déduis-en un encadrement $\frac{1}{y}$.

Synthèse

$5 \leq x \leq 6$, donc $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$.
On admet que :
Deux nombres non nuls de même signe sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses.

Exercices de fixation

1 On donne : $3 < x < 4$ et $-5 < y < -4$.
Encadre : a) $\frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{y}$.

2 On donne : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $3,14 < \pi < 3,15$.
Encadre : a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\pi}$; c) $-\frac{1}{\pi}$.

5 Activité : Encadrement d'un quotient

On donne : $1 \leq x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 3$.

1. Encadre : $\frac{1}{y}$.
2. Donne un encadrement de $x \times \frac{1}{y}$.
3. Donne une méthode d'encadrement d'un quotient.

Synthèse

Pour encadrer $\frac{x}{y}$ on encadre d'abord $\frac{1}{y}$ puis on encadre $\frac{x}{y}$ en remarquant que $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$.

Exercices de fixation

1 On donne : $3 < x < 4$ et $5 < y < 6$.
Encadre : $\frac{x}{y}$.

2 On donne : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $3,14 < \pi < 3,15$.
Encadre : $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

3 On donne $-3 < x < -2$ et $4 < y < 5$.
Encadre : $\frac{y}{x}$.

4 On donne $-3 < x < -2$ et $-5 < y < -4$.
Encadre : $\frac{x}{y}$.

6 Activité : Arrondi de la racine carrée d'un nombre réel positif

En utilisant une calculatrice, détermine :
a) L'arrondi d'ordre 0 de $\sqrt{7}$.
b) L'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{7}$.
c) L'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{7}$.
d) L'arrondi d'ordre 3 de $\sqrt{7}$.

Synthèse

$\sqrt{7} = 2,645...$ le deuxième chiffre après la virgule est 4, donc l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{7}$ est 2,6.
Plus généralement :
Pour arrondir un nombre, on tient compte de la valeur du chiffre immédiatement à droite de la précision demandée.
- S'il est égal à 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4, on garde la valeur de la précision.
- S'il est égal à 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9, on ajoute 1 à la valeur de la précision.

Exercices de fixation

1. Arrondis $\sqrt{2}$ à l'ordre 1.
2. Arrondis $\sqrt{5}$ à l'ordre 3.
3. Arrondis $\sqrt{10}$ à l'ordre 2.
4. Arrondis $\sqrt{10}$ à l'ordre 1.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Déterminer l'intersection ou la réunion de deux intervalles

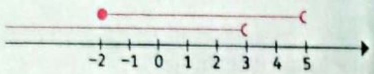
1. Dans chacun des cas suivants, détermine l'intersection des intervalles I et J.
   a) I =]← ; 3[et J = [−2 ; 5[; b) I = [−2 ; 7] et J = [0 ; 3] ; c) I =]−2 ; 3[et J =]5 ; 6[;
   d) I = [5 ; →[et J =]−3 ; 5].
2. Dans chacun des cas suivants, détermine la réunion des intervalles I et J.
   a) I =]← ; 3[et J = [−2 ; 5[; b) I = [−2 ; 7] et J = [0 ; 3] ; c) I =]−2 ; 3[et J =]5 ; 6[;
   d) I = [5 ; →[et J =]−3 ; 5].

Corrigé

1. Dans chacun des cas suivants, détermine l'intersection des intervalles I et J.

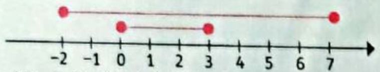
a) I =]← ; 3[et J = [−2 ; 5[

I∩J = [−2 ; 3[

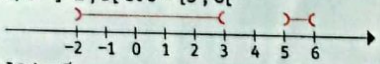


b) I = [−2 ; 7] et J = [0 ; 3]

I∩J = [0 ; 3]

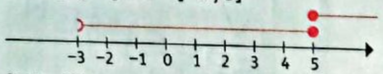


c) I =]−2 ; 3[et J = [5 ; 6[



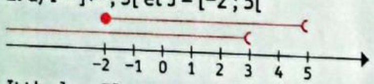
I∩J = Ø

d) I = [5 ; →[et J =]−3 ; 5]



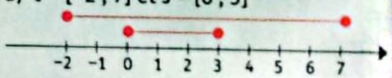
I∩J = {5}

2. a) I =]← ; 3[et J = [−2 ; 5[



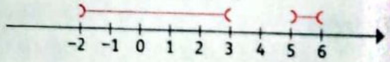
IUJ =]← ; 5[

b) I = [−2 ; 7] et J = [0 ; 3]



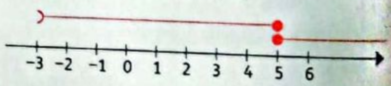
IUJ = [−2 ; 7]

c) I =]−2 ; 3[et J =]5 ; 6[



IUJ =]−2 ; 3[U]5 ; 6[

d) I = [5 ; →[et J =]−3 ; 5]



IUJ =]−3 ; →[

Méthode

Pour déterminer l'intersection ou la réunion de deux intervalles, on peut utiliser une droite graduée et les représentations graphiques des deux intervalles.

Exercice 2 Encadrer une somme, une différence

On donne : $-3 \leq x \leq 2$ et $-5 \leq y \leq 1$.
Encadre $x + y$ et $x - y$.

Corrigé

$-3 - 5 \leq x + y \leq 2 + 1$
$-8 \leq x + y \leq 3$
$-1 \leq -y \leq 5$
$-3 - 1 \leq x - y \leq 2 + 5$
$-4 \leq x - y \leq 7$

Méthode

• Pour encadrer $x - y$, on encadre d'abord $-y$ puis on encadre $x + (-y)$.

Exercice 3 Encadrer un produit

a) On donne : $2 \leq x \leq 3$ et $5 \leq y \leq 6$.
Encadre xy.
b) On donne : $2 \leq x \leq 3$ et $-4 \leq y \leq -3$.
Encadre xy.

Corrigé

a) $2 \times 5 \leq xy \leq 3 \times 6$
$10 \leq xy \leq 18$.
b) On a :
$-4 \leq y \leq -3$ donc $3 \leq -y \leq 4$
$2 \times 3 \leq x \times (-y) \leq 3 \times 4$
$6 \leq -xy \leq 12$
$-12 \leq xy \leq -6$.

Méthode

• Pour encadrer un produit xy, on multiplie les bornes des encadrements lorsque les nombres sont tous positifs.
• Si un des nombres par exemple y est négatif on encadre d'abord son opposé, puis on encadre $x\,(-y)$, enfin on encadre xy.

Exercice 4 Encadrer un inverse

On donne : $2 \leq x \leq 3$ et $-4 \leq y \leq -3$.
a) Encadre : $\frac{1}{x}$.
b) Encadre : $\frac{1}{y}$.

Corrigé

a) $2 \leq x \leq 3$
$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
b) $-4 \leq y \leq -3$
donc $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4}$.

Méthode

Pour encadrer l'inverse d'un nombre, on peut utiliser la propriété suivante :
Des nombres non nuls de même signe sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses.

Exercice 5 Encadrer un quotient

a) On donne : $2 \leq x \leq 3$ et $5 \leq y \leq 6$.
Encadre : $\frac{x}{y}$.
b) On donne : $2 < x < 3$ et $-4 < y < -3$.
Encadre : $\frac{x}{y}$.

Corrigé

a) $5 \leq y \leq 6$

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$

$2 \leq x \leq 3$

$\frac{1}{6} \times 2 \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{5}$

$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{5}$.

b) $-4 < y < -3$

$3 \leq -y \leq 4$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{-y} \leq \frac{1}{3}$

$2 \leq x \leq 3$

$\frac{1}{4} \times 2 \leq x \times \left(\frac{1}{-y}\right) \leq \frac{1}{3} \times 3$

$\frac{1}{2} \leq -\frac{x}{y} \leq 1$

$-1 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$.

Méthode

Pour encadrer un quotient $\frac{x}{y}$ on encadre $\frac{1}{y}$ puis le produit $x \times \frac{1}{y}$.

Exercice 6 Encadrer un inverse (D'après BEPC Côte d'Ivoire 2013)

On donne les nombres réels positifs A et B tels que : $A = 2\sqrt{3} - 3$; $B = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} + 3$ et un encadrement de A :
$0,46 < A < 0,47$.
1. Justifie que A et B sont inverses l'un de l'autre.
2. Déduis-en un encadrement de B par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

Corrigé

1. $AB = (2\sqrt{3} - 3)\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)$

$= \frac{4 \times 3 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 9}{3}$

$= \frac{12-9}{3}$

$= 1$.

AB = 1, donc A et B sont inverses l'un de l'autre.

2. $0,46 < A < 0,47$

$\frac{1}{0,47} < \frac{1}{A} < \frac{1}{0,46}$

$2,12 < B < 2,17$

$2,1 < B < 2,2$.

Méthode

Pour encadrer l'inverse d'un nombre, on peut utiliser la propriété suivante :
Des nombres non nuls de même signe sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses.

Résumé de cours

1 Intervalles

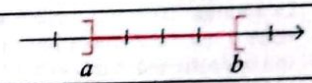
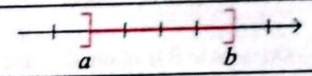
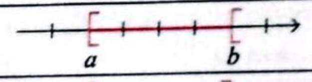
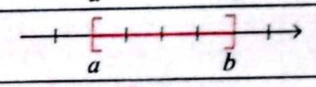
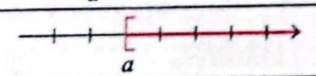
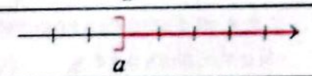
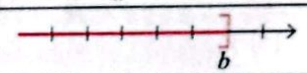
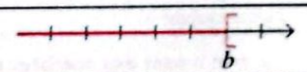
1.1. Présentation

a et b sont des nombres réels tels que : $a < b$.
L'ensemble des nombres réels tels que :
- $a < x < b$ est l'intervalle ouvert a ; b. On le note $]a ; b[$.
- $a \leq x \leq b$ est l'intervalle fermé a ; b. On le note $[a ; b]$.
- $a < x \leq b$ est l'intervalle ouvert en a et fermé en b. On le note $]a ; b]$.
- $a \leq x < b$ est l'intervalle fermé en a et ouvert en b. On le note $[a ; b[$.
- $x < a$ est l'intervalle des nombres inférieurs à a. On le note $]\leftarrow ; a[$.
- $x \leq a$ est l'intervalle des nombres inférieurs à ou égaux à a. On le note $]\leftarrow ; a]$.
- $x > a$ est l'intervalle des nombres supérieurs à a. On le note $]a ; \rightarrow[$.
- $x \geq a$ est l'intervalle des nombres supérieurs ou égaux à a. On le note $[a ; \rightarrow[$.

Les nombres a et b sont les **bornes** de chacun des intervalles suivants :
$[a ; b]$; $[a ; b[$; $]a ; b]$ et $]a ; b[$.

1.2. Intervalles et inégalités

Tableau récapitulatif

Écriture	Lecture	Ensemble des x tels que :	Représentation graphique
$]a ; b[$	Intervalle ouvert a, b	$a < x < b$	
$]a ; b]$	Intervalle a, b ouvert en a, fermé en b	$a < x \leq b$	
$[a ; b[$	Intervalle a, b, fermé en a, ouvert en b	$a \leq x < b$	
$[a ; b]$	Intervalle fermé a, b	$a \leq x \leq b$	
$[a ; \rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs ou égaux à a	$x \geq a$	
$]a ; \rightarrow[$	Intervalle des nombres plus grands que a	$x > a$	
$]\leftarrow ; b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	$x \leq b$	
$]\leftarrow ; b[$	Intervalle des nombres plus petits que b	$x < b$	

1.3. Amplitude et centre d'un intervalle

a et b sont deux nombres réels tels que : $a < b$.
On donne les intervalles : $[a ; b]$; $[a ; b[$; $]a ; b]$ et $]a ; b[$.

- Le nombre $b - a$ est appelée **l'amplitude** de chacun de ces intervalles.
- Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est le centre de chacun de ces intervalles.

2 Réunion et intersection d'intervalles

2.1. Intersection de deux intervalles

Définition

L'intersection d'un intervalle I et d'un intervalle J est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois à I et à J.

Notation et lecture :

On le note I∩J et on lit : « I inter J ».

Remarques

- $x \in I \cap J$ équivaut à $x \in I$ et $x \in J$.
- L'intersection de deux intervalles n'ayant aucun nombre en commun est l'ensemble vide noté ∅ ou {}.

2.2. Réunion de deux intervalles

Définition

La réunion d'un intervalle I et d'un intervalle J est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I ou à J.

Notation et lecture :

On le note I∪J et on lit : « I union J ».

Remarque : $x \in I \cup J$ équivaut à $x \in I$ ou $x \in J$.

3 Inégalités et opérations

3.1. Inégalités et addition

Propriétés

***a*, *b*, *c*, et *d* sont des nombres réels.**

- Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

3.2. Inégalités et multiplication

Propriétés

- ***a*, *b* et *c* sont des nombres réels.**
- Si $c > 0$ et $a < b$, alors $ac < bc$.
- Si $c < 0$ et $a < b$, alors $ac > bc$.
- ***a*, *b*, *c*, et *d* étant des nombres réels positifs.**
- Si $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

4 Comparaison

4.1. Comparaison et différence

***a* et *b* sont deux nombres réels.**
$a \leq b$ lorsque $b - a \geq 0$.

4.2. Comparaison et carrés - Comparaison et racine carrée

Propriétés

- ***a* et *b* sont des nombres positifs.**
- $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.
- $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.

- ***a* et *b* sont des nombres négatifs.**
- $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$.
- $a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$.

Propriété

***a* et *b* sont deux nombres réels positifs.**

- $a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

4.3. Comparaison et inverse

Propriété

***a* et *b* sont deux nombres de même signe et différents de 0.**

- $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Méthode récapitulative

Pour comparer des nombres réels, on peut :
- Comparer leurs carrés ou leurs racines carrées.
- Comparer leurs inverses.
- Étudier le signe de leur différence.

5 Encadrement

5.1. Encadrement d'une somme

x et y sont deux nombres réels.
a, b, c et d sont des nombres réels : Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors $a + c \leq x + y \leq b + d$.

5.2. Encadrement d'une différence

Méthode

a et b sont deux nombres réels.
Pour encadrer la différence $a - b$, connaissant un encadrement de a et un encadrement de b, on peut procéder comme suit :
- on détermine un encadrement de $(-b)$;
- on détermine un encadrement de la somme $a + (-b)$.

5.3. Encadrement d'un produit

Propriété

x et y sont deux nombres réels. a, b, c et d sont des nombres positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors $ac \leq xy \leq bd$.

5.4. Encadrement d'un inverse

Propriété

a, b et x sont des nombres réels non nuls de même signe.
Si $a < x < b$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$.

5.5. Encadrement d'un quotient

Méthode

Pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$ connaissant un encadrement de chacun des nombres positifs a et b ($b \neq 0$), on peut procéder comme suit :
- on détermine un encadrement de $\frac{1}{b}$ de même sens que celui de a.
- on détermine un encadrement du produit $a \times \frac{1}{b}$.

5.6. Arrondis de la racine carrée d'un nombre réel

Méthode

Pour arrondir la racine carrée d'un nombre réel positif par exemple à l'ordre 2.
- On détermine une écriture décimale de cette racine carrée.
- On tient compte du troisième chiffre après la virgule.
  - S'il est égal à 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4, on garde la valeur de la précision.
  - S'il est égal à 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9, on ajoute 1 à la valeur de la précision.

Exercices de renforcement

1 Écris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de réels suivants :
1. L'ensemble des réels x tels que : $-3 \leq x \leq 7$;
2. L'ensemble des réels x tels que : $x > -7$;
3. L'ensemble des réels x tels que : $x \leq 0$.

2 Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :
1. $[-4 ; 3]$;
2. $[1 ; 3,5[$;
3. $\left]\leftarrow ; \frac{1}{3}\right[$;
4. $]-2 ; +\rightarrow[$.

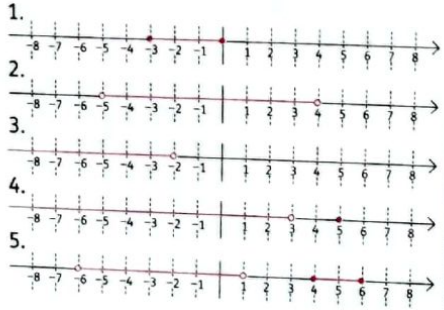
3 Dans chacun des cas, détermine l'amplitude de l'encadrement proposé :
1. $-2 < x < 7$;
2. $-1,23 \leq x \leq -1,17$;
3. $-1,576 < x < 2,435$.

4 Détermine tous les nombres premiers de l'intervalle $[1 ; 13[$.

5 Recopie et remplace les pointillés par $\in$ ou $\notin$:

1. 1 .... $[0;2]$
2. -1 .... $[0;2]$
3. 1 .... $]\leftarrow ; 2[$
4. 1 .... $]\leftarrow ; -2]$
5. 1 .... $[1 ; 2]$
6. 1 .... $]1 ; 2]$
7. $10 - 3$ .... $[0 ; 1]$
8. π .... $[3,14 ; 3,15]$
9. -2 .... $]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$.

6 Écris les ensembles suivants représentés en rouge sur chacune des droites graduées sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles :



7 Détermine chacune des réunions ou des intersections suivantes.
1. $[1 ; 5] \cap]2 ; 6[$.
2. $[1 ; 5] \cup]2 ; 6[$.
3. $[3 ; \rightarrow[\cap]\leftarrow ; 8]$.
4. $[3 ; \rightarrow[\cup]\leftarrow ; 8]$.
5. $[-3 ; -2] \cup]-2 ; 8[$.
6. $[-3 ; -2] \cap]-2 ; 8[$.

8 Recopie et remplace les pointillés par les nombres qui conviennent.

a) L'intervalle $[-2 ; 4]$ est l'intervalle de centre .... et d'amplitude ....

b) L'intervalle $]-8 ; -1[$ est l'intervalle de centre .... et d'amplitude ....

9 Écris à l'aide d'inégalités les intervalles suivants :

a) $]5 ; 8]$;
b) $[0 ; \rightarrow[$;
c) $]\leftarrow ; 3[$;
d) $[-50 ; 50[$.

10 Détermine les intervalles correspondant aux inégalités suivantes :
1. $x > 7$;
2. $x < 10$;
3. $x \leq 3$;
4. $x > 5$;
5. $2 \leq x \leq 8$;
6. $-4 \leq x < 7$;
7. $0 < x \leq 3$;
8. $-7 < x < -2$.

11 Recopie et remplace les pointillés par l'intervalle qui convient pour chacune des inégalités suivantes :

$0 \leq x \leq 10$ correspond à l'intervalle .... ;
$x \leq 10$ correspond à l'intervalle .... ;
$x > 5$ correspond à l'intervalle .... ;
$-10 < x \leq 10$ correspond à l'intervalle .... ;
$x < 40$ correspond à l'intervalle ..... .

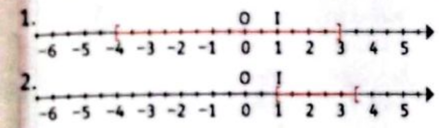
12 Dans chacun des cas suivants, détermine $I \cap J$ et $I \cup J$:

a) $I = [-2 ; 5]$ et $J =]3 ; \rightarrow[$;
b) $I = [0 ; 3[$ et $J =]\leftarrow ; 3[$.

13 Détermine l'amplitude et le centre de chacun des intervalles suivants :

1. $[1 ; 5]$;
2. $]-50 ; 6[$;
3. $]2 ; 4[$;
4. $]-7 ; 8]$;
5. $[-18 ; -2]$.

14 Détermine l'amplitude de chacun des intervalles représentés en rouge sur les droites graduées.



15 Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Intervalle	Centre	Amplitude
$[0; 3[$		
$]-15 ; -4[$		
$[-62,7 ; 11]$		
$]7 ; 21]$		
$[1,8 ; 13,2[$		

16 Dans chacun des cas, détermine le centre et l'amplitude de l'intervalle proposé.
1. $]-7 ; 2[$.
2. $[-12,3 ; -1,17]$.
3. $[-19 ; 3]$.
4. $]2,45 ; 2,58]$.
5. $\left[\frac{1}{3} ; \frac{5}{4}\right[$.

Exercices d'approfondissement

17 A et B sont deux nombres positifs tels que : $A = 3\sqrt{5}$ et $B = 5\sqrt{2}$.
Compare : A et B.

18 On pose : $A = 3\sqrt{2} - 2$ et $B = \sqrt{3} - 2$.
1. Justifie que : $A - B = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
2. a) Démontre que : $\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
   b) Déduis-en la comparaison des nombres A et B.

19 P et Q sont des nombres tels que :
$P = 2 - \sqrt{2}$ et $Q = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}}$.
1. Calcule P^2.
2. Justifie que : $Q = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})$.
3. Justifie que P et Q sont inverses l'un de l'autre.
4. Compare : P et Q.

20 Compare :
a) $5\sqrt{3}$ et $4\sqrt{5}$; b) 3 et $2\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{7}$ et 5.

21 Détermine le signe de :
a) $3\sqrt{2} - 5$; b) $9 - 5\sqrt{11}$.

22 Détermine le signe de :
a) $4\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{3} - 3$.

23 Compare les nombres suivants :
a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

24 On donne : $3,141 < \pi < 3,142$.
1. Encadre π par deux nombres décimaux d'ordre 1.
2. Encadre π par deux nombres décimaux d'ordre 2.

25 On donne : $1 < \sqrt{2} < 2$ et $2 < \sqrt{7} < 3$.
1. Encadre : $\sqrt{2} + \sqrt{7}$.
2. Encadre : $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$.
3. Encadre : $\sqrt{2} - \sqrt{7}$.

26 Donne un encadrement de $\sqrt{7}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

27 $\sqrt{2} \simeq 1,4142135$.
1. Encadre $\sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
2. Encadre $\sqrt{2}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

28 Donne l'arrondi d'ordre 3 de chacun des nombres suivants :
1. $\frac{1}{3}$.
2. $-\sqrt{5}$.
3. $-\frac{5}{11}$.

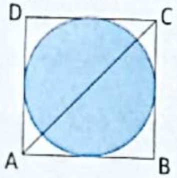
29 On considère un nombre réel x tel que : $-2 < x \leq 1$.
Encadre les expressions suivantes :
1. $x + 1$;
2. $x - 4$;
3. $3x$;
4. $-2x$.

30 On sait que : $-45 < x < -44$ et que $1 < y < 2$
Donne un encadrement des nombres suivants : a) $x + y$. b) $x - y$. c) $x - 2y$.

31 Sachant que le rayon d'un disque est compris entre 19,8 et 19,9 cm et que $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$, donne un encadrement de l'aire de ce disque.

32 Le côté d'un carré est compris entre 7,1 et 7,2 cm. Donne un encadrement de son aire et de son périmètre.

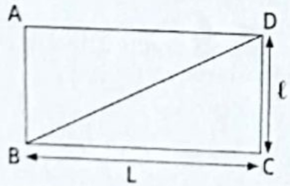
33 On inscrit dans un carré ABCD un cercle d'aire 3 cm².
Détermine un encadrement au centième près de la diagonale [AC].



34 Les nombres a et b vérifient :
$-2 < a < 3$; $0{,}1 < b < 0{,}2$.
1. Encadre le produit ab.
2. Encadre le produit $-7ab$.

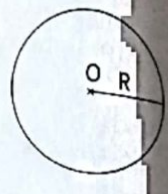
35 1. On donne : $1 \leq x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 3$.
Donne un encadrement de $\frac{x}{y}$.
2. On donne : $-4 \leq x \leq -2$ et : $2 \leq y \leq 3$.
Donne un encadrement de $-\frac{x}{y}$.

36 On donne le rectangle ABCD de longueur L et de largeur ℓ telles que :
$7 < L < 8$ et $4{,}4 < \ell < 4{,}5$



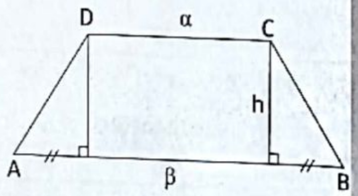
1. Détermine un encadrement du périmètre du rectangle ABCD.
2. Détermine un encadrement de l'aire du rectangle ABCD.
3. Détermine un encadrement de l'aire du triangle ABD.

37 La figure ci-contre est un cercle de centre O et de rayon R.
On donne :
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et
$4{,}4 < R < 4{,}5$



1. Détermine un encadrement du périmètre du cercle de rayon R.
2. Détermine un encadrement de l'aire du disque de rayon R.

38



La figure codée ci-dessus est un trapèze.
On donne :
$4{,}5 < \alpha < 5$, $7{,}8 < \beta < 7{,}9$ et $3 < h < 3{,}1$.
Détermine un encadrement de l'aire du trapèze ABCD.

Situation d'évaluation

39 Un entrepreneur recherche un espace de 380 m² au moins pour y construire un supermarché. Monsieur Koffi veut proposer à l'entrepreneur son terrain mais il ne sait pas si l'aire du terrain atteint 380 m².
Il sait, toutefois, que le terrain est rectangulaire et la longueur est comprise entre 20,2 m et 20,7 m et la largeur est comprise entre 19,4 m et 20 m. Il te sollicite pour répondre à sa préoccupation.
1. Encadre l'aire du terrain de Monsieur Koffi.
2. Dis si le terrain de Monsieur Koffi répond au critère de l'entrepreneur.
Justifie ta réponse.

Coup de Pouce

33 Utiliser le fait que le diamètre du cercle est égal à la longueur du côté du carré.

34 Il faut dissocier les cas :
$-2 < a < 0$ et $0 < a < 3$.

Leçon **4**

Équations et inéquations dans ℝ

Lorsqu'il y a équilibre, les objets dans les deux plateaux ont la même masse.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le club vidéo du Lycée Moderne de Divo propose aux élèves des DVD éducatifs selon les tarifs suivants :
Tarif A : 30 F CFA par DVD.
Tarif B : 20 F CFA par DVD plus 1000 F CFA d'abonnement.
Pour l'année 2021, Alicia a choisi le tarif A et Grégoire le tarif B.
À la fin de l'année, Alicia et Grégoire ont payé le même prix et ont loué le même nombre de DVD.
Étonnés, les élèves d'une classe de 3ᵉ décident de faire des calculs pour trouver le nombre de DVD et la somme payée par Alicia et Grégoire.

DVD

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Équations du premier degré dans ℝ

Résoudre :

des équations de chacun des types :
- $ax + b = 0$;
- $ax + b = cx + d$;
- $(ax + b)(cx + d) = 0$.

2 Inéquations du premier degré dans ℝ

Résoudre :

- des inéquations de chacun des types :
- $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$;
- $ax + b > 0$, $ax + b < 0$;
- $ax + b \geq cx + d$, $ax + b > cx + d$;
- $ax + b < cx + d$, $ax + b \leq cx + d$.
- un système de deux inéquations du premier degré dans ℝ.

Utiliser :

des intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans ℝ ou d'un système de deux inéquations du premier degré dans ℝ.

3 Problème conduisant à une équation ou une inéquation du 1er degré dans ℝ

Résoudre :

des problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du 1er degré dans ℝ.

Traiter :

une situation faisant appel aux équations ou inéquations dans ℝ.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Équations du premier degré dans ℝ

1 Activité : Équation du type : $ax + b = 0$

a, b, u et v sont des nombres réels.

1. Démontre que toute équation $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) se ramène à une équation du type $ux = v$ ($u \neq 0$).
2. Démontre que l'équation $ux = v$ ($u \neq 0$) a pour solution $\frac{v}{u}$.

Synthèse

- L'équation $ax + b = 0$, ($a \neq 0$) se ramène à une équation du type $ux = v$ ($u \neq 0$).
- L'équation $ux = v$ ($u \neq 0$) a pour solution $\frac{v}{u}$.

Exercices de fixation

1. Écris chacune des équations sous la forme $ux = v$ ($u \neq 0$).
   1. $x + 4 = 0$;
   2. $3x + 6 = 0$.
2. Trouve dans ℝ la solution de chacune des équations suivantes :
   1. $-5x = 8$;
   2. $\frac{1}{3}x = 6$.
3. Résous dans ℝ les équations suivantes :
   1. $x - 7 = 2$;
   2. $6x = 3$.
4. Résous dans ℝ les équations suivantes :
   1. $0{,}2x - 1 = 0$;
   2. $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = 0$.

2 Activité : Équation du type : $ax + b = cx + d$

1. Justifie que $3x + 4 = -2x + 7$ équivaut à $5x = 3$.
2. Déduis-en la résolution de l'équation : $3x + 4 = -2x + 7$.
3. Justifie que l'équation $ax + b = cx + d$ est équivalente à une équation du type $ux = v$.

Synthèse

Toute équation du type $ax + b = cx + d$ est équivalente à une équation du type $ux = v$.

Exercices de fixation

1. Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes, en justifiant.
   a) $\frac{4}{3}$ est solution de l'équation : $3x + 4 = 8$.
   b) 2 est solution de l'équation : $4x + 11 = -3$.
   c) $\frac{3}{6}$ est solution de l'équation : $3x + 5 = 9$.
2. Résous dans ℝ les équations suivantes :
   a) $4x + 7 = 15$; b) $4x + 6 = 2x - 4$.
3. Résous dans ℝ les équations suivantes :
   a) $2x + 3 = x + 5$; b) $3x - 5 = 2x + 9$;
   c) $x + 3 = 2x - 5$.
4. Résous dans ℝ les équations suivantes :
   a) $5x + 2 = 9x + 7$.
   b) $5x - 3 - 2x = x + 13$.
   c) $\frac{1}{3}x - \frac{3}{5} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}$.

3 Activité : Équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

1. Rappelle la propriété relative au produit nul.
2. Déduis de 1) une méthode de résolution d'une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Synthèse

Pour résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, on utilise la propriété relative au produit nul.

Exercices de fixation

1. Résous dans ℝ, l'équation : $(8x - 4)(5x - 2) = 0$.
2. Résous dans ℝ, l'équation : $x(2x - 1) = 0$.
3. Résous dans ℝ, l'équation : $(x - 1)^2 = 0$.
4. Résous dans ℝ, l'équation : $(x - 1)(x + 1) = 0$.

Activités 2 Inéquations du premier degré dans ℝ

1 Activité : Inéquations de l'un des types : $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b > 0$ et $ax + b < 0$

1. Justifie que : $5x - 10 > 0$ équivaut à $x > 2$.
2. Déduis-en les solutions de l'inéquation : $5x - 10 > 0$.
3. Écris sous forme d'intervalle l'ensemble des solutions de cette inéquation.
4. Justifie que toute inéquation de l'un des types $ax + b > 0$; $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) peut se ramener à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ ($u \in \mathbb{R}$).
5. Justifie que toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ ($a \neq 0$) peut se ramener à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ ($u \in \mathbb{R}$).

Synthèse

- L'inéquation $5x - 10 > 0$ a pour ensemble de solution l'intervalle $]2 ; \rightarrow[$.
- Toute inéquation de l'un des types $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ se ramène à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ $(u \in \mathbb{R})$.
- Toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$ se ramène à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ $(u \in \mathbb{R})$.

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
a) 0 est une solution de l'inéquation : $-2x + 3 \geq 0$.
b) -2 est une solution de l'inéquation : $-2x + 3 \geq 0$.
c) 1 est une solution de l'inéquation : $-2x + 3 \geq 0$.
d) 7 est une solution de l'inéquation : $-2x + 3 \geq 0$.

2 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $15x - 6 > 0$.

3 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{1}{3}x - 6 \leq 0$.

4 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $-2x + 1 \leq 0$.

2 Activité : Inéquations de l'un des types : $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$; $ax + b > cx + d$ et $ax + b < cx + d$

1. Justifie que : $-2x - 4 \leq 4x + 5$ équivaut à $x \geq -\frac{3}{2}$.
2. Déduis-en les solutions de l'inéquation : $-2x - 4 \leq 4x + 5$.
3. Écris sous forme d'intervalle l'ensemble de ces solutions.
4. Justifie que toute inéquation de l'un des types $ax + b > cx + d$; $ax + b < cx + d$ peut se ramener à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ $(u \in \mathbb{R})$.
5. Justifie que toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$ peut se ramener à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ $(u \in \mathbb{R})$.

Synthèse

- Toute inéquation de l'un des types $ax + b > cx + d$ ou $ax + b < cx + d$ se ramene à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ $(u \in \mathbb{R})$.
- Toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$ se ramene à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ $(u \in \mathbb{R})$.

Exercices de fixation

1 Pour chacune des inéquations, écris la lettre de son ensemble de solutions.

	Équation	Ensemble de solutions A	B	C	D
1	$3x + 2 < x - 4$	$]\leftarrow ; 3[$	$]\leftarrow ; -3[$	$]3 ; \rightarrow[$	$]-3 ; \rightarrow[$
2	$2x + 5 \geq 5x - 1$	$]\leftarrow ; 2]$	$]\leftarrow ; -2]$	$[-2 ; \rightarrow[$	$[2 ; \rightarrow[$
3	$2x + 5 \geq 3x + 5$	$]\leftarrow ; 0]$	$]\leftarrow ; 1]$	$[0 ; \rightarrow[$	$[1 ; \rightarrow[$
4	$3x + 5 \leq x + 1$	$]\leftarrow ; -2]$	$]\leftarrow ; 2]$	$[-2 ; \rightarrow[$	$[2 ; \rightarrow[$

2 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations :
a) $-4x + 3 > x + 2$.
b) $8x - 5 \leq 17x + 9$.

3 Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{x}{2} + \frac{3}{2} > \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$.

3 Activité : Système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

On considère le système : $\begin{cases} -7x + 3 < 2x - 1 \\ 14x \leq -3x + 34 \end{cases}$.

1. Justifie que : $-7x + 3 < 2x - 1$ équivaut à $x > \frac{4}{9}$.
2. Justifie que : $14x \leq -3x + 34$ équivaut à $x \leq 2$.
3. En utilisant une droite graduée, détermine l'ensemble des nombres réels x tels que $x > \frac{4}{9}$ et $x \leq 2$.
4. Dégage une méthode de résolution d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Synthèse

- L'ensemble des solutions du système est l'intervalle $\left]\frac{4}{9} ; 2\right]$.
- Pour résoudre un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$, on résout chaque inéquation puis à l'aide d'une droite graduée on détermine l'intersection des ensembles de solutions.

Exercices de fixation

1 Détermine l'ensemble de solutions du système $\begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases}$.

2 Résous dans $\mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x + 4 > x - 3 \\ 5x + 6 < x + 1 \end{cases}$.

3 Résous dans $\mathbb{R}$, $\begin{cases} x + 1 > 2x - 1 \\ x - 3 < 2x + 1 \end{cases}$.

Activité 3 Problème conduisant à une équation ou une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$

Pour embellir la salle informatique, le Comité de Gestion (COGES) d'un établissement scolaire décide de recouvrir une partie du sol de la salle par des carreaux.
Le magasin de Monsieur OULAI propose des carreaux à 3000 F CFA le mètre carré. Pour la livraison de ces carreaux, le transport est gratuit.
Le magasin de Monsieur KOUA propose des carreaux à 2500 F CFA le mètre carré. Mais, pour la livraison de tous ces carreaux, le transport coûte 4 000 F CFA.
Les élèves d'une classe de 3e de l'établissement décident d'aider le COGES à choisir le magasin où le prix proposé est plus avantageux.
On désigne par x l'aire en mètre carré de la partie du sol à recouvrir. On admet que x est un entier naturel.

1. a) Exprime en fonction de x, le prix proposé par le magasin de Monsieur Oulai.
   b) Exprime en fonction de x, le prix proposé par le magasin de Monsieur Koua.
2. a) Résous l'inéquation suivante : $2500x + 4000 < 3000x$.
   b) Détermine en fonction de l'aire à carreler le magasin le plus avantageux.

Synthèse

- **Si la surface à carreler est supérieure à 8 m², alors le magasin de Monsieur Oulaï est le plus avantageux.**
- **Si la surface à carreler est inférieure à 8 m², alors le magasin de Monsieur Koua est le plus avantageux.**
- **Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$, on procède comme suit :**

- on nomme l'inconnue ;
- on met le problème en équation ou en inéquation ;
- on résout l'équation ou l'inéquation ;
- on conclut en interprétant le résultat trouvé.

Exercice de fixation

À l'approche de la fête de nouvel an, une mère décide de partager la somme de 5 800 F CFA entre ses deux enfants.
Le cadet ayant obtenu le meilleur résultat scolaire au premier trimestre, aura 600 F CFA de plus que son aîné.
Informé de ce partage, l'aîné est inquiet et se demande si sa part lui permettra de payer les 2 500 F CFA que coûte le ticket d'entrée à la fête des enfants organisée par la Mairie.
Pour cela, il te sollicite.

1. On désigne par x la part de l'aîné.
Exprime en fonction de x la part du cadet.
2. Justifie que : $2x = 5\,200$.
3. a) Résous l'équation : $2x = 5\,200$.
b) Dis, en justifiant ta réponse, si l'aîné peut acheter son ticket.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre une équation du premier degré

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x + \frac{3}{2} = 4$; b) $5x = 6$; c) $9 - \frac{3}{2}(7 - x) = \frac{4x-7}{3}$.

Corrigé

a) $x + \frac{3}{2} = 4$
$x = 4 - \frac{3}{2}$
$x = \frac{5}{2}$
La solution est : $\frac{5}{2}$.
b) $5x = 6$
$x = \frac{6}{5}$
La solution est : $\frac{6}{5}$.
c) $9 - \frac{3}{2}(7 - x) = \frac{4x-7}{3}$
$9 - \frac{21}{2} + \frac{3}{2}x = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$
$\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}x = -\frac{7}{3} - 9 + \frac{21}{2}$
$\frac{1}{6}x = \frac{-5}{6}$
$x = -5$
La solution est : -5.

Méthode

Pour résoudre une équation, on la remplace par une équation équivalente. Pour cela :
- on peut ajouter un même nombre non nul à chaque membre de l'équation ;
- on peut multiplier par un même nombre non nul chaque membre de l'équation.

Exercice 2 Résoudre une équation se ramenant à un produit nul

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(2x - 1)(6x - 18) = 0$; b) $x^2 = 169$; c) $x^2 = 50$.

Corrigé

a) $(2x - 1)(6x - 18) = 0$
équivaut à $2x - 1 = 0$ ou $6x - 18 = 0$
équivaut à $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$
Les solutions sont : $\frac{1}{2}$ et 3.
b) $x^2 = 169$ équivaut à $x^2 - 13^2 = 0$
équivaut à $(x - 13)(x + 13) = 0$
équivaut à $x - 13 = 0$ ou $x + 13 = 0$
équivaut à $x = 13$ ou $x = -13$
Les solutions sont : 13 et – 13.
c) $x^2 = 50$ équivaut à $x^2 - 50 = 0$
équivaut à $(x - \sqrt{50})(x + \sqrt{50}) = 0$
équivaut à $x - 5\sqrt{2} = 0$ ou $x + 5\sqrt{2} = 0$
équivaut à $x = 5\sqrt{2}$ ou $x = -5\sqrt{2}$
Les solutions sont : $5\sqrt{2}$ et $-5\sqrt{2}$.

Méthode

- Pour résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, on peut utiliser la propriété : $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
- Une équation du type $x^2 = a$ $(a > 0)$ peut se ramener à une équation du type : $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.

Exercice 3 Résoudre une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $x + 3 < 6$; b) $-3x \geq 4$; c) $2(x - 1) < 3(x + 4)$.

Corrigé

a) $x + 3 < 6$
$x < 3$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]\leftarrow ; 3[$.
b) $-3x \geq 4$ équivaut à $3x \leq -4$
équivaut à $x \leq -\frac{4}{3}$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]\leftarrow ; -\frac{4}{3}\right]$.
c) $2(x - 1) < 3(x + 4)$
$2x - 2 < 3x + 12$
$-x < 14$
$x > -14$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-14 ; \rightarrow[$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$, on peut utiliser les propriétés des inégalités et opérations.

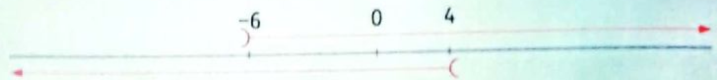
Exercice 4 Résoudre un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$

Résous le système : $\begin{cases} 2x+5 > x-1 \\ -x+5 > 2x-7 \end{cases}$.

Corrigé

$\begin{cases} 2x+5 > x-1 \\ -x+5 > 2x-7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x > -6 \\ -3x > -12 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x > -6 \\ x < 4 \end{cases}$



L'ensemble des solutions est l'intervalle :]- 6 ; 4[.

Méthode

Pour résoudre un système de deux inéqua[tions] dans $\mathbb{R}$, on résout chaque inéquation e[t on] prend l'intersection des ensembles solutio[ns].

Exercice 5 Résoudre un problème se ramenant au premier degré

Pour fêter ses 35 ans de mariage, Monsieur Jean offre à sa femme un bouquet de 35 fleurs, compo[sé] d'iris et de roses. Un iris coûte 60 F CFA et une rose 90 F CFA. Son bouquet lui revient à 2 580 F CFA. Son voisin qui veut offrir le même bouquet à sa femme cherche à déterminer le nombre d'iris [et] de roses composant ce bouquet.
Détermine le nombre de roses et le nombre d'iris composant ce bouquet.

Corrigé

- Choix de l'inconnue :
Soit x le nombre de roses.
$35 - x$ est par conséquent le nombre d'iris.
- Mise en équation :
$90x + 60(35 - x) = 2580$.
- Résolution

$90x + 60(35 - x) = 2580$
$90x + 2100 - 60x = 2580$
$30x = 480$
$x = 16$.

- Retour au problème.
Le nombre de roses est 16.
Le nombre d'iris est 35 – 16, soit 19.

Méthode

Pour résoudre un problème se ramenant [à] une équation du 1er degré, on peut observe[r] les étapes suivantes :
- choix de l'inconnue ;
- mise en équation ;
- résolution de l'équation ;
- retour au problème.

Résumé de cours

1 Équations du premier degré dans $\mathbb{R}$

1.1. Équations du type : $ax + b = 0$

Propriétés

a, b, u et v sont des nombres réels tels que $a \neq 0$.
- L'équation $ax + b = 0$ se ramène à une équation du type : $ux = v$ $(u \neq 0)$.
- Toute équation du type $ux = v$, où $u \neq 0$, a une solution unique qui est : $\frac{v}{u}$.

Remarques
- L'équation : $0x = 0$ admet une infinité de solutions (tous les nombres réels sont solutions de cette équation).
- L'équation : $0x = b$ où b est non nul n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

1.2. Équation du type : $ax + b = cx + d$

Définition

a, b, c et d sont des nombres réels donnés. L'équation $ax + b = cx + d$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Propriété

Toute équation du type $ax + b = cx + d$ peut se ramener à une équation du type : $ux = v$.

1.3. Équation du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, on utilise la propriété :
$ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$, a et b étant des nombres réels.

2 Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

2.1. Inéquations de l'un des types : $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b > 0$ et $ax + b < 0$

Propriété

- Toute inéquation de l'un des types $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ se ramène à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ $(u \in \mathbb{R})$.
- Toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$ se ramène à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ $(u \in \mathbb{R})$.
- Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées sur une droite graduée ou données sous forme d'intervalle.

2.2. Inéquations de l'un des types : $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$; $ax + b > cx + d$ et $ax + b < cx + d$

Définition

a, b, c et d sont des nombres réels donnés. Les inéquations $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$; $ax + b > cx + d$ et $ax + b < cx + d$ sont des inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

- Toute inéquation de l'un des types $ax + b > cx + d$ ou $ax + b < cx + d$ se ramène à une inéquation du type $x > u$ ou $x < u$ ($u \in \mathbb{R}$).
- Toute inéquation de l'un des types $ax + b \geq cx + d$; $ax + b \leq cx + d$ se ramène à une inéquation du type $x \geq u$ ou $x \leq u$ ($u \in \mathbb{R}$).

3 Système de deux inéquations du 1er degré dans ℝ

Définition

Le système : $\begin{cases} ax + b \geq 0 & (a \neq 0) \\ cx + d < 0 & (c \neq 0) \end{cases}$ est un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi rencontrer dans les systèmes d'inéquations les symboles : > ou ≤.
Résoudre un système d'inéquations du 1er degré dans ℝ, revient à trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations du système.

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations du 1er degré dans ℝ, on peut procéder comme suit :
- on résout séparément chacune des inéquations ;
- on détermine l'intersection des deux ensembles solutions trouvées qui est l'ensemble des solutions du système.

4 Problème conduisant à une équation ou une inéquation du 1er degré dans ℝ

Méthode

Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré dans ℝ, on procède comme suit :
- on choisit l'inconnue ;
- on met le problème en équation ou en inéquation ;
- on résout l'équation ou l'inéquation ;
- on conclut en interprétant le résultat trouvé.

Exercices de renforcement

1 Résous les équations suivantes :
a) $x + 3 = 6$; b) $x + 5 = -6$; c) $x + 3 = -8$;
d) $x - 4 = 2$; e) $x - 8 = 10$; f) $x - 1 = -4$.

2 Résous les équations suivantes :
a) $3x = 6$; b) $-x = 8$; c) $-4x = -5$;
d) $\frac{x}{3} = 5$; e) $\frac{2x}{7} = 4$.

3 Résous les équations suivantes :
a) $3x - 4 = 8$; b) $-5x + 7 = 6$; c) $\frac{x}{4} - 2 = -7$.

4 1. Détermine une équation du premier degré à une inconnue ayant pour solution 3.
2. Détermine une équation du premier degré à une inconnue ayant pour solution −2.

5 Résous les équations suivantes :
a) $3x + 4 = 2x + 9$; b) $2x + 3 = 3x - 5$;
c) $5x - 1 = 2x + 4$; d) $3x + 1 = 7x + 5$.

6 Résous les équations suivantes :
a) $8(4 - 3x) + 1 = 53 - 3(x - 5)$;
b) $13x + 2 - (x - 3) = x - 5 - 3(x + 12) + 4x$;
c) $5(3x - 1) - (1 - 2x) = 3(5x - 2)$;
d) $(x + 2)(x + 1) = (x + 4)(x - 5)$.

7 Résous les équations suivantes :
a) $(2x - 3)(x + 1) = 0$;
b) $(8x - 9)(x - 1) = 0$;
c) $(7x - 3)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0$;
d) $2x(7x + 1) = 0$.

8 Résous les équations suivantes dans ℝ :
a) $x^2 = 7$; b) $x^2 = 64$; c) $x^2 = 18$; d) $4x^2 = 9$.

9 Résous les équations suivantes dans ℝ :
a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 4 = 0$;
c) $x^2 - 9 = 0$; d) $x^2 - 25 = 0$.

10 Résous les équations suivantes dans ℝ :
a) $4x^2 - 25 = 0$; b) $6x^2 - 6 = 0$; c) $-x^2 + 4 = 0$.

11 Résous les inéquations suivantes dans ℝ :
a) $x + 3 \leq 6$; b) $x + 5 < -6$;
c) $x + 3 > -8$; d) $x - 4 \geq 2$.

12 Résous les inéquations suivantes dans ℝ :
a) $3x \geq 6$; b) $-x \leq 8$; c) $-4x > -5$;
d) $\frac{x}{5} \leq 5$; e) $\frac{-2x}{3} \geq 4$.

13 Résous les inéquations suivantes dans ℝ :
a) $3x - 4 \leq 8$; b) $-5x + 7 > 6$;
c) $\frac{x}{4} - 2 \geq -7$; d) $3 - 2x < 3x - 7$.

14 1. Détermine une inéquation du premier degré à une inconnue ayant pour ensemble de solutions l'intervalle]← ; 3].
2. Détermine une inéquation du premier degré à une inconnue ayant pour ensemble de solutions l'intervalle]−2 ; →[.

15 Résous les inéquations suivantes dans ℝ :
a) $3x + 4 < 2x + 9$; b) $2x + 3 \leq 7x - 5$;
c) $-5x - 1 > 2x + 4$; d) $3x + 1 < 7x + 5$.

16 Résous les inéquations suivantes dans ℝ :
a) $8(4 - 3x) + 1 < 53 - 3(x - 5)$;
b) $13x + 2 - (x - 3) \geq x - 5 - 3(x + 12) + 4x$;
c) $5(3x - 1) - (1 - 2x) > 3(5x - 2)$;
d) $(x + 2)(x + 1) \leq (x + 4)(x - 5)$.

17 Résous les systèmes de deux inéquations suivantes dans ℝ :
a) $\begin{cases} x + 2 < 5 \\ x + 8 \geq 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 5 < 7 \\ 2x + 1 \geq -3 \end{cases}$.

18 Résous les systèmes de deux inéquations suivantes dans ℝ :
a) $\begin{cases} 4x + 2 < 2 \\ 2x - 8 \geq 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -5x - 1 < 7 \\ 2x + 1 \geq 3 \end{cases}$.

Exercices d'approfondissement

19 Pour l'élection du délégué de classe, quatre candidats se sont présentés :
- Le premier candidat a obtenu la moitié des voix.
- Le deuxième candidat a obtenu le quart des voix.
- Le troisième candidat a obtenu un septième des voix.
- Le quatrième a obtenu 3 voix.

Sachant que chaque élève de la classe a voté un candidat, détermine le nombre d'élèves dans cette classe.

20 Un particulier a des marchandises à transporter.
Un premier transporteur lui demande 46 000 F CFA au départ et 350 F CFA par kilomètre.
Un second transporteur lui demande 100 000 F CFA au départ et 200 F CFA par kilomètre.
Détermine les distances à parcourir pour lesquelles il est plus avantageux de s'adresser au second transporteur.

21 Résous les équations suivantes :
1. $4{,}3x + 12 = 5{,}7x + 33$;
2. $3\left(5 - \frac{x}{2}\right) = \frac{7}{3} + 2x - \frac{1}{3}$;
3. $3x - 2(x - 4) = 5 + 4(1 - 2x)$.

22 Résous les équations suivantes :
1. $\frac{2}{3}x + 500 = 1488$;
2. $40 + x = 2 \times (9 + x)$;
3. $\frac{2}{5}x + \frac{4}{25}x + 143 = x$;
4. $\frac{4}{5}x + x = 1728$.

23 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $4{,}9 - 0{,}7x = 2{,}3x + 0{,}9$;
2. $5(x - 1) - (2x - 1) = 3 - x$;
3. $\frac{x}{2} + 4 = \frac{x}{6} + 5$.

24 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x-1}{4} - 5 = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}$;

b) $\frac{x}{3} + \frac{9}{4} = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}$;

c) $\frac{2x+3}{6} + \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} + 2$;

d) $\frac{3-2x}{5} - \frac{x-2}{10} = \frac{5x+2}{2} - \frac{1}{5}$.

25 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x\sqrt{2} + \sqrt{2} = x\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - (2 - \sqrt{2})$;

b) $2x + \sqrt{2} = x\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - (7 - \sqrt{2})$.

26 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(5x - 2)(x + 6) = 0$;

b) $(3x + 4)(4x + 5) = 0$;

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 0$;

d) $\left(\frac{3}{5}x - 1\right)\left(\frac{8}{3}x + 2\right) = 0$.

27 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $36x^2 - 9x = 0$;

b) $4x^2 - x = 0$;

c) $(x - 2)(x + 3) = (x - 2)(3x + 1)$;

d) $x^2 - 49 - (5x + 3)(x + 7) = 0$.

28 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

b) $4x^2 + 20x + 25 = 0$;

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

29 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 3x(x - 1) = 0$;

b) $(3 - x)^2 + (x - 3) = 0$;

c) $(3x - 2)^2 - (x - 4)^2 = 0$;

d) $(x + 3)^2 - 4 = 0$;

e) $(x - 1)(2x + 3) + (2 - 2x)(3 - x) = 0$;

f) $(5x + 2)^2 + (x + 7)(5x + 2) - 25x^2 + 4 = 0$.

30 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x - \frac{1}{3} < 3x - \frac{1}{4}$;

b) $\frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6}$;

c) $2x - \frac{x-1}{5} \geq \frac{1}{4} - x$;

d) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} > x + \frac{1}{2}$.

31 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $3(x - 2) - 5(1 - 2x) < 2(x + 3) - 1$;

b) $\frac{2x+5}{15} - \frac{1+x}{2} \geq \frac{7x}{3} - \frac{2x+6}{5}$;

c) $(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 > 3(x + 2)^2 - 7x$;

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 + \frac{4x-1}{2}$.

EXERCICES

32 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{11}{10}x - \frac{1}{10} \leq 2\left(x + \frac{8}{5}\right)$;

b) $\frac{1}{3}(2x + 1) - \frac{1}{2}(x - 2) > \frac{1}{6}(x + 2)$;

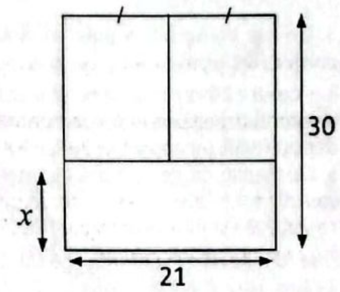
c) $\frac{1-x}{4} - \frac{3x-2}{2} \geq \frac{2x+5}{6}$.

33 Un fleuriste propose à ses clients d'emporter gratuitement un bouquet de cinq roses, quatre iris et six tulipes, dont le prix est de 3 150 F CFA, à condition de trouver le prix unitaire de chaque fleur. Pour cela, il donne les renseignements suivants :
Le prix d'un iris est la moitié du prix d'une rose.
Le prix d'une tulipe est le triple du prix d'une rose.
Pour résoudre ce problème, recopie et complète d'abord ce tableau ci-dessous.

Langage courant	Langage mathématique
Prix d'une rose	x
Prix de cinq roses	
Prix d'un iris	
Prix de quatre iris	
Prix d'une tulipe	
Prix de six tulipes	
Prix du bouquet	

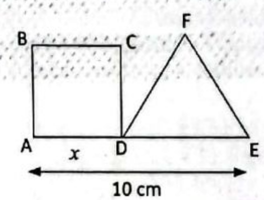
Écris une équation, résous-la et conclus.

34 Dans une feuille de format 21 × 30, on veut découper trois rectangles de même aire disposés ainsi que le montre le schéma ci-dessous :



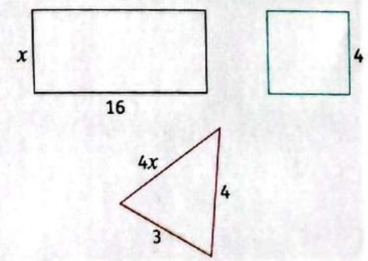
Détermine la valeur de x pour réaliser le découpage.

35



ABCD est un carré, de côté x.
DEF est un triangle équilatéral.
1. Exprime en fonction de x la longueur du côté du triangle DEF.
2. Calcule x pour que le périmètre du triangle équilatéral DEF soit égal au périmètre du carré ABCD. (la figure n'est pas tracée à l'échelle).

36 Trouve x pour que le périmètre du rectangle soit égal à la somme des périmètres du carré et du triangle.



37 Dans chaque cas trouve le nombre.
1. On me multiplie par 5 et on retranche 7 au produit. On trouve 23.
2. On prend mon triple puis on retranche 50 au produit. On trouve −2.
3. On me divise par 4 puis on ajoute 7 au produit. On trouve 22.
4. J'ajoute 20 à ce nombre, je quadruple le résultat et j'obtiens 20 fois le nombre de départ.
5. Le double de ce nombre augmenté de 8 vaut 0.

38 Une famille a trois enfants âgés de 12, 14 et 17 ans. Leur mère a 35 ans.
Détermine l'année où la somme des âges des enfants sera égale au double de l'âge de la mère.

39 Pierre a acheté un sandwich à 1500 F CFA et 3 sodas. Il a payé 2 550 F CFA.
Détermine le prix d'un soda.

40 Jean et Bruno collectionnent des timbres. À eux deux, ils ont 330 timbres. Sachant que Bruno a deux fois plus de timbres que Jean, détermine le nombre de timbres de chaque collectionneur.

41 Une famille passe ses vacances à Pa[ris] a pris deux fois plus de photos de la To[ur] Eiffel que des Champs-Élysées. Elle to[...] à la fin de ses vacances 96 photos.
Détermine le nombre de photos de la [...] Eiffel et des Champs-Élysées.

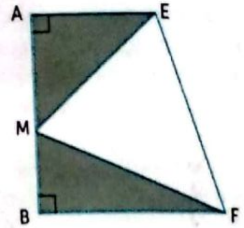
42 Mathilde se rend chez le marchand [de] légumes. Elle paie 10 000 F CFA et le m[ar]chand lui rend 4500 F CFA. Sachant qu['elle] a acheté 5 kg de pommes, détermine le p[rix] d'un kg de pommes.

43 Deux magasins louent des DVD à des ta[rifs] différents.
Le magasin A propose un tarif de 150 F C[FA] par DVD loué.
Le magasin B propose un tarif de 100 F C[FA] par DVD loué après avoir payé une carte [de] 800 F CFA.
Détermine le nombre de DVD à partir duqu[el] le tarif du magasin B est plus avantageu[x].

44 Un vidéoclub propose les tarifs suivants :
Tarif A : 30 F CFA par cassette.
Tarif B : 20 F CFA par cassette plus 1000 F CF[A] d'abonnement.
Pour l'année 2021, Alicia a choisi le tarif A e[t] Grégoire le tarif B.
À la fin de l'année, Alicia et Grégoire o[nt] payé le même prix et ont loué le mêm[e] nombre de cassettes.
a) Détermine ce nombre.
b) Détermine le montant dépensé chacun.

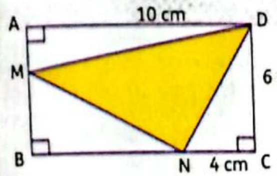
45 Un élève, après 5 devoirs, a une moyenne de 11,8 sur 20.
Détermine la note la plus basse que doit ob[-]tenir l'élève au sixième devoir pour que s[a] moyenne sur les six devoirs soit supérieure ou égale à 10/20.

46 On donne la figure codée ci-dessous.



AB = 100 m ; AE = 60 m ; BF = 80 m.
Les triangles AME et BMF ont la même aire.
Calcule AM.

47 On donne la figure codée ci-dessous.



L'aire du triangle MND est égale à 28 cm.
Calcule AM.

48 On propose deux programmes de calcul :
Programme A :
- Choisir un nombre.
- Ajouter 5.
- Calculer le carré du nombre obtenu.

Programme B :
- Choisir un nombre.
- Soustraire 7.
- Calculer le carré du résultat obtenu.

1. On choisit 5 comme nombre de départ. Justifie que le résultat du programme B est 4.
2. Détermine le résultat avec le programme A.
3. a) Détermine le nombre à choisir pour que le résultat du programme A soit 0.
b) Détermine les nombres à choisir pour que le résultat du programme B soit 9.
4. Détermine le nombre à choisir pour obtenir le même résultat avec les deux programmes.

49 **D'après : Mali 2019**
On donne : $A = (2x + 1)^2 - (x - 4)^2$ et
$B = (2x + 1)(x + 3) - 4x^2 - 2x$.
1. Écris A et B sous la forme de produit de facteurs du premier degré.
2. Résous dans ℝ les équations A = 0 et B = 0.

50 **D'après BEPC Togo 2021**
Soient les expressions algébriques suivantes :
$E = (3x - 5)(5x + 6) - 6(3x - 2)$ et
$F = (4x - 3)^2 - (x - 1)^2$.
1. Développe, réduis et ordonne E et F suivant les puissances décroissantes de x.
2. Mets sous forme d'un produit de facteurs premiers les expressions algébriques E et F.
3. On pose $G = \dfrac{E}{(3x - 2)(5x - 4)}$.
a) Donne la condition d'existence d'une valeur numérique de G.
b) Simplifie G.
c) Calcule la valeur de G si $x = \sqrt{2}$.
d) Détermine la valeur de x pour laquelle G = 0.

51 On donne le programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 1.
- Calculer le carré de cette somme.
- Enlever 16 au résultat obtenu.

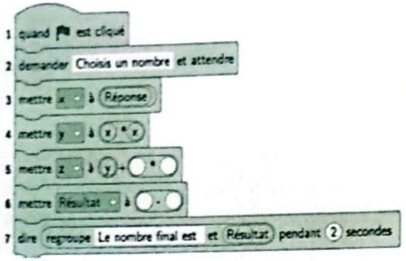
1.
a) Vérifie que, lorsque le nombre de départ est 4, on obtient comme résultat 9.
b) Lorsque le nombre de départ est −3, calcule le résultat obtenu.
c) Le nombre de départ étant x, exprime le résultat final en fonction de x.
On appelle P cette expression.
d) Vérifie que : $P = x^2 + 2x - 15$.

2.
a) Vérifie que $(x - 3)(x + 5) = P$.
b) Détermine les nombres à choisir au départ pour que le résultat final soit nul.

52 Voici un programme de calcul.
- Choisir un nombre.
- Prendre le carré du nombre de départ.
- Ajouter le triple du nombre de départ.
- Soustraire 10 au résultat.

1. Vérifie que si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient 18.
2. Applique ce programme de calcul au nombre −3.
3. Vous trouverez ci-après un script, écrit avec scratch.

EXERCICES



Recopie et complète les lignes 5 et 6 pour que ce script corresponde au programme de calcul.

4. On veut déterminer le nombre à choisir au départ pour obtenir zéro comme résultat.

a) On appelle x le nombre de départ. Exprime en fonction de x le résultat final.

b) Vérifie que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x+5)(x-2)$.

c) Détermine les nombres à choisir au départ pour obtenir le nombre 0 à l'arrivée.

Situation d'évaluation

53 Marc et Sophie se lancent des défis mathématiques. C'est au tour de Marc, il propose un programme de calcul à sa camarade :

- Choisir un nombre entier positif.
- Élever ce nombre au carré.
- Ajouter 3 au résultat obtenu.
- Puis, multiplier par 2 le résultat obtenu.
- Soustraire 6 au résultat précédent.
- Enfin, prendre la moitié du dernier résultat.
- Écrire le résultat final.

1. Marc prétend être capable de trouver rapidement le nombre de départ en connaissant le résultat final. Sophie choisit alors au hasard un nombre et applique le programme de calcul.

Elle annonce à Marc le résultat final 81. Celui-ci lui répond qu'elle avait choisi le nombre 9 au départ. Stupéfaite, Sophie lui dit : "Tu es un magicien !".

Sophie est troublée et ne comprend pas comment Marc a pu trouver le résultat. Elle te sollicite.

a) Vérifie le calcul en commençant le programme avec le nombre 9.

b) On appelle x le nombre de départ. Exprime en fonction de x le résultat final puis réduis ce résultat.

c) En utilisant tes connaissances sur les équations, explique la démarche de Marc.

Coup de Pouce

19
- Choisir x l'effectif de la classe.
- Faire une mise en équation.
- Résoudre l'équation.

20
- Choisir x le nombre de km.
- Écrire une inéquation en fonction de x.
- Résoudre cette inéquation.

27 Factoriser chaque expression avant de résoudre l'équation.

29 Pour le 1, il faut développer et réduire l'expression. Pour les autres il faut factoriser.

38 Poser x le nombre d'année.

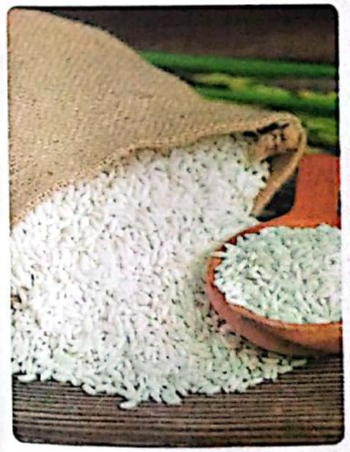
46 Poser AM $= x$. L'aire du rectangle ABCD est égale à la somme des aires des triangles qui composent le rectangle.

Leçon 5

Équations et inéquations dans ℝ × ℝ

Pour déterminer certaines grandeurs, par exemple les prix de vente de fruits, on remplace ces grandeurs par des lettres dans des égalités ou des inégalités.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Dans un élan de solidarité pendant la pandémie du covid-19, Madame Aminadou offre des paquets contenant des sachets de riz et des bouteilles d'huile à des démunis du quartier précaire Gbagba de Bingerville.

Elle demande à ses enfants, Ismael et Ablo, de faire deux types de paquets (grands et petits) dont les grands contiennent 6 sachets de riz et 4 bouteilles d'huile coûtant 6 200 F CFA alors que les petits contiennent 5 sachets de riz et 3 bouteilles d'huile pour un coût de 4 900 F CFA.

Aminadou dit à sa sœur Bintou qu'elle doit dépenser moins d' 1 000 000 F CFA.

Curieuse, la fille de Bintou, élève en 3ᵉ, décide de déterminer le prix d'un sachet de riz et celui d'une bouteille d'huile ainsi que le nombre de paquets possibles de chaque type.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Identifier :
une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Vérifier :
qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Déterminer :
des couples de nombres réels, solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

2 Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Identifier :
une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Vérifier :
qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Déterminer :
des couples de nombres réels, solutions d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3 Systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Identifier :
un système de deux :
- équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Vérifier :
qu'un couple de nombres réels donné est solution d'un système d'équations (ou d'inéquations) du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Résoudre :
un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:
- par substitution ;
- par combinaison ;
- graphiquement.

Représenter :
graphiquement un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

4 Problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Traduire :
un problème du premier degré par :
- une équation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;
- une inéquation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Traiter :
une situation faisant appel aux équations et inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1 Activité : Définition

La somme du prix d'un sachet de riz et de celui de deux bouteilles d'huile est égale à 5 000 F CFA.
1. Traduis sous forme d'égalité la phrase ci-dessus en posant x le prix d'un sachet de riz et y celui d'une bouteille d'huile.
2. Trouve deux nombres qui vérifient l'égalité trouvée à la consigne 1.

Synthèse

- $x + 2y = 5\,000$: cette égalité est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- $x = 900$ et $y = 2050$ vérifient l'égalité ci-dessus : on dit que le couple (900 ; 2050) est une solution de l'équation $x + 2y = 5\,000$.
- On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, où x et y sont les inconnues et $(a, b) \neq (0, 0)$.
- Ses solutions sont des couples de la forme $(x ; y)$, où x est la première composante et y la deuxième composante.

Exercices de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. $3x + y = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
2. $-2x + 5 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
3. $\frac{4}{9}x = 7y - 1$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
4. $x^2 + 8y - 6 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
5. $\frac{x-3}{2} = 4y$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
6. $x + 4y - 1$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
7. $x\sqrt{3} + y = 2$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
8. $5\sqrt{x} - 6y + 2 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. Les expressions littérales sont des équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
2. Les solutions des équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sont des couples.
3. $(2 ; -1)$ est une solution de l'équation $x + y = 1$.
4. $7x - 3 = 0$ n'est pas une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

On donne dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'équation suivante (E) : $2x - 3y + 5 = 0$.
Vérifie que le couple $(1 ; -1)$ est une solution de l'équation (E).

2 Activité : Recherche de solutions

On donne dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x - 4y + 3 = 0$.
1. a) Remplace x par 0 puis détermine y.
   b) Déduis-en une solution de (E).
2. a) Exprime x en fonction de y puis y en fonction de x.
   b) Déduis-en d'autres solutions de (E).

Synthèse

Tout couple de la forme $(4y - 3 ; y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (E) : $x - 4y + 3 = 0$.
On admet que :
- Une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ admet une infinité de couples de nombres réels comme solutions.
- Pour trouver une solution d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, il suffit de donner une valeur à une des inconnues puis résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur de l'autre inconnue.

Exercices de fixation

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Énoncés	A	B	C
1	Une solution de $x - y + 4 = 0$ est ...	$(1 ; 1)$	$(0 ; 4)$	$(4 ; 0)$
2	L'expression de y en fonction de x de l'équation $3x - y + 1 = 0$ est ...	$y = -3x - 1$	$y = 3x + 1$	$y = 3x - 1$
3	Pour le couple $(a ; b)$, la 2e composante est ...	a	b	ab
4	Le couple $(-1 ; 1)$ est une solution de ...	$2x - 7y + 9 = 0$	$x + y + 2 = 0$	$y = x - 1$

Recopie puis relie chaque équation à une de ses solutions :

$-3x+y-5=0$ •
$x+2y=0$ •
$4x-9y+27=0$ •

• $(2;-1)$
• $(0;3)$
• $(-4;-7)$

En utilisant l'équation suivante $-x+2y-7=0$, recopie et complète le tableau ci-contre :

x	0		-2		$\frac{1}{4}$
y		4		1	

Activités 2 Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1 Activité : Définition

Malicka, élève en classe de 3e au Lycée Moderne de Divo, dispose seulement de 5000 F CFA. Elle veut acheter des cahiers qui coûtent 300 F CFA l'unité et des stylos qui coûtent 100 F CFA l'unité.

On désigne par x le nombre de cahiers et par y le nombre de stylos.

1. Écris en fonction de x et y une condition pour laquelle Malicka peut acheter des cahiers et des stylos.
2. Trouve deux nombres qui vérifient l'inégalité trouvée à la consigne 1.

Synthèse

- $300x + 100y \leq 5000$: cette inégalité est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $x = 15$ et $y = 4$ vérifient l'inégalité ci-dessus : on dit que le couple $(15 ; 4)$ est une solution de l'inéquation $300x + 100y \leq 5000$.

a et b sont des nombres tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

- On appelle inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toute inéquation du type $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c \geq 0$.
- Tout couple (a, b) qui vérifie l'une des inégalités ci-dessus est solution de cette inéquation.

Exercices de fixation

Recopie les inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
$5x^2+7<0$; $-3x+y-2 \geq 0$; $8+6x \leq 9y^2$; $\sqrt{7}x-5y \geq 0$; $-1{,}2x-\frac{3}{y}+1 \leq 0$; $\frac{2-x}{3}+6y-5<0$.

Écris cinq inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où a et b désignent les inconnues.

On donne l'inéquation $-3x+y-2<0$.
Trouve deux couples solutions de cette inéquation.

2 Activité : Recherche de solutions

On donne dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x-y+2>0$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), trace la droite (D) d'équation $x-y+2=0$.
2. Choisis trois points du demi-plan de bord (D) contenant O(0, 0).
Justifie que les coordonnées de ces points sont solution de (I).
3. Choisis trois points du demi-plan de bord (D) ne contenant pas O(0, 0).
Justifie que les coordonnées de chacun de ces points ne sont pas solution de (I).
4. Donne une méthode de résolution graphique de l'inéquation (I).

Synthèse

- Les coordonnées de tous les points du demi-plan contenant le point O, sont les solutions de l'inéquation (I).

On admet que :

- Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'un des types $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$, on peut procéder comme suit :
- Tracer la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ dans le plan muni d'un repère.
- Choisir un point A qui n'appartient pas à (D).
- Si les coordonnées de A vérifient l'inéquation, alors le demi-plan ouvert de bord (D) contenant A est l'ensemble des solutions.
- Si les coordonnées de A ne vérifient pas l'inéquation, alors c'est le demi-plan ouvert de bord (D) ne contenant pas A qui est l'ensemble des solutions.

Exercices de fixation

On donne l'inéquation : $2x-y+3 \geq 0$.
Parmi les couples suivants, identifie ceux qui sont solutions de l'inéquation :
$(1;-2)$; $(0;5)$; $(-4;-7)$; $\left(\frac{1}{2};3\right)$; $(5;14)$.

On donne l'inéquation (I) : $-2x+y+3 \leq 0$.
Trouve trois valeurs de a et trois valeurs de b pour que les couples $(a ; 1)$ et $(-2 ; b)$ soient solutions de (I).

On donne l'inéquation (I) : $2x-y+3 \leq 0$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représente la droite d'équation $2x-y+3=0$.
Hachure le demi-plan solution de l'inéquation $2x-y+3 \leq 0$.

Résous graphiquement l'inéquation $x-y-1<0$.

Activité 3 Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité : Définitions

Pour leur fête de fin d'année 2022, les élèves d'une classe de Troisième d'un Collège d'Abidjan commandent du jus de « Bissap » et de « Gnamankou ». Le litre du jus de « Bissap » coûte 400 F CFA et celui de « Gnamankou » 300 F CFA. Les organisateurs ont commandé 20 litres de jus pour 6 200 F CFA.
Pour faire le bilan de la fête, il est question pour les organisateurs de calculer le nombre de litres de chaque type de jus.
Par ailleurs, ils comptent pour l'année 2023 commander plus de 30 litres pour moins de 10 000 F CFA.
Pour cela :
1. Écris deux équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ traduisant la situation de l'année 2022.
2. Écris deux inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ traduisant la situation de l'année 2023.

Synthèse

- $x+y=20$ et $400x+300y=6\,200$.
- $x+y>30$ et $400x+300y<10\,000$.

On admet que :

- Deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ forment un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ forment un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1. Parmi les systèmes d'équations suivants, identifie ceux qui sont des systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x+4y-1=0 \\ 3y=-5x+2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 7x^2-9y+5=0 \\ -x-y+8=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{3}{x}+6y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x+\frac{7y}{4}-6=0 \\ x-y\sqrt{3}=-2 \end{cases}$

2. Écris quatre systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3. Écris quatre systèmes de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Activité 4 Résolution d'un système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

On donne le système suivant : $(S)\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ 2x+3y-19=0 \end{cases}$

1. Réécris le système (S) en écrivant y en fonction de x dans la 1ère équation.
2. Remplace y par sa valeur en fonction de x dans la 2ème équation.
3. À partir de la 2ème équation obtenue ci-dessus, détermine la valeur de x.
4. Détermine la valeur de y en remplaçant x par sa valeur dans la 1ère équation.
5. Vérifie que le couple $(x ; y)$ trouvé ci-dessus est bien solution du système (S).

Synthèse

- Le couple $(2 ; 5)$ est la solution du système : $(S)\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ 2x+3y-19=0 \end{cases}$
- La méthode de substitution consiste à remplacer une variable isolée par son expression algébrique correspondante dans l'équation où cette variable n'est pas isolée pour déterminer sa valeur.

Exercice de fixation

Résous chacun des systèmes suivants par substitution :

$(S)\begin{cases} 3x-4y-9=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$; $(T)\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

Activité 5 Résolution d'un système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

On donne le système suivant : $(S)\begin{cases} 3x+5y-2=0 \\ 2x+4y-6=0 \end{cases}$

1. a) Réécris le système (S) en multipliant chaque membre de la 1ère équation par 2 et chaque membre de la 2ème équation par -3.
   b) Additionne membre à membre les deux équations puis résous l'équation ainsi obtenue pour déterminer la valeur de y.
2. a) Réécris le système (S) en multipliant chaque membre de la 1ère équation par 4 et chaque membre de la 2ème équation par -5.
   b) Additionne membre à membre les deux équations puis résous l'équation ainsi obtenue pour déterminer la valeur de x.
3. Vérifie que le couple $(x ; y)$ trouvé ci-dessus est bien solution du système (S).

Synthèse

- Le couple $(-11 ; 7)$ est la solution du système : $(S)\begin{cases} 3x+5y-2=0 \\ 2x+4y-6=0 \end{cases}$

- La méthode de combinaison consiste à éliminer une variable par transformation des équations du système puis par addition membre à membre des équations pour trouver la valeur de la variable qui n'est pas éliminée.

Exercice de fixation

Résous chacun des systèmes suivants par combinaison :

(a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x+6y-16=0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 5x+2y+8=0 \\ 5x-4y+20=0 \end{cases}$

Activité 6 Résolution graphique d'un système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1. On donne le système (S_1) suivant : $\begin{cases} 2x-3y-9=0 \\ x+3y+9=0 \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) On donne la droite (D) d'équation $2x-3y-9=0$ et (Δ) d'équation $x+3y+9=0$. Trace les droites (D) et (Δ).

b) Justifie que les droites (D) et (Δ) sont sécantes en un point A.

c) Lis graphiquement et écris le couple de coordonnées du point commun A à ces deux droites.

2. On donne le système (S_2) suivant : $\begin{cases} 2x+4y+4=0 \\ -x-2y-2=0 \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Soit (D_1) et (D_2) deux droites d'équations respectives $2x+4y+4=0$ et $-x-2y-2=0$. Construis (D_1) et (D_2).

b) Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont confondues.

c) Détermine le nombre de solutions du système.

3. On donne le système (S_3) suivant : $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 2x+3y-2=0 \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites d'équations respectives $2x+3y+1=0$ et $2x+3y-2=0$. Construis (Δ_1) et (Δ_2).

b) Donne le coefficient directeur de chacune des deux droites (Δ_1) et (Δ_2).

c) Justifie que les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles et disjointes.

d) Détermine le nombre de solutions du système (S_3).

Synthèse

- L'ensemble des solutions de chacun des systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) dépend de la position relative des droites dont les équations composent chaque système.
- La résolution graphique d'un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ peut se faire en deux étapes :

1ère étape : Dans le plan muni d'un repère on trace la droite (D_1) d'équation $ax+by+c=0$ et la droite (D_2) d'équation $mx+ny+p=0$.

2ème étape : On regarde la position relative des droites (D_1) et (D_2).

- Si (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point $M(\alpha ; \beta)$ alors le système a une seule solution qui est le couple $(\alpha ; \beta)$.
- Si (D_1) et (D_2) sont parallèles et disjointes alors le système n'a pas de solution.
- Si (D_1) et (D_2) sont confondues alors le système a une infinité de solutions (le couple de coordonnées de chaque point de la droite (D) (ou bien (Δ)) est solution du système.

Exercice de fixation

Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y-7=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ -4x+2y-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-7y=-1 \\ 2x-7y=8 \end{cases}$.

Activité 7 **Résolution graphique d'un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

On veut représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système.

(S) : $\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0 \\ -x + 3y - 1 < 0 \end{cases}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Trace la droite (D_1) d'équation $2x - y - 3 = 0$ et la droite (D_2) d'équation $-x + 3y - 1 = 0$.
2. Hachure en bleu l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - y - 3 \geq 0$.
3. Hachure en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x + 3y - 1 < 0$.
4. Décris la zone représentant l'ensemble des solutions du système (S).

Synthèse

- Les coordonnées des points du plan hachurés à la fois en bleu et en rouge sont des solutions du système (S).
- Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
  - On représente l'ensemble des solutions de chacune des inéquations composant le système.
  - L'ensemble cherché est l'ensemble des points communs aux deux ensembles solutions (c'est leur intersection).

Exercice de fixation

Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

$\begin{cases} x + 2y > 6 \\ 2x - y - 7 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - y < -1 \\ -4x + 2y - 2 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 7y > -1 \\ 2x - 7y \leq 8 \end{cases}$.

Activité 8 **Problème du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

La librairie de Monsieur Habib a vendu 23 ouvrages dont des manuels de Mathématiques à 2 800 F CFA l'unité et des romans à 1 500 F CFA l'unité. Pour une recette totale de 46 200 F CFA. Calcule le nombre d'ouvrages de chaque catégorie.

Synthèse

- En notant x le nombre de manuels de Mathématiques et y le nombre de romans, on résout le système $\begin{cases} x + y = 23 \\ 2\,800x + 1\,500y = 46\,200 \end{cases}$ pour trouver le nombre d'ouvrages de chaque catégorie.
- Pour résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on procède comme suit :
  - Choisir les inconnues.
  - Mettre le problème en équations ou en inéquations [traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s)].
  - Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système en utilisant une méthode appropriée.
  - S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation, l'inéquation ou le système.
- Conclure en interprétant le résultat trouvé.

Exercices de fixation

1 Pour cette situation, écris la lettre de la bonne modélisation.

Affirmations	A	B	C
L'achat de x cahiers à 500 F CFA l'unité et y stylos à 100 F CFA l'unité pour une dépense de 6500 F CFA se traduit par :	$100x + 500y = 6500$	$500x + 100y = 6500$	$600x + 600y = 6500$

Traduis à l'aide d'un système :

a) Avec 16500 F CFA, Raima achète 6 kg de viande et 9 kg de riz mais avec 21300 F CFA, elle achète 8 kg de viande et 11 kg de riz.

b) La société de M. Gbané emploie moins de 50 personnes. Le départ de 7 hommes et 4 femmes fait qu'il y a moins d'hommes que de femmes.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 **Équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

Détermine une solution de l'équation : $3x - 2y + 1 = 0$.

Corrigé

Remplaçons x par le nombre 1 :

$3 \times 1 - 2y + 1 = 0$

Résolvons l'équation : $3 \times 1 - 2y + 1 = 0$

$4 - 2y = 0$

$-2y = -4$

$y = \frac{-4}{-2}$

$y = 2$, donc le couple (1 ; 2) est une solution de l'équation.

On peut aussi commencer par exprimer y en fonction x :

$-2y = -3x - 1$

$y = \frac{-3x - 1}{-2}$

$y = \frac{3x + 1}{2}$

Ainsi en posant $x = 1$, on obtient :

$y = \frac{3 \times 1 + 1}{2}$ soit $y = 2$.

Donc le couple (1 ; 2) est une solution de l'équation.

Pour trouver d'autres solutions, il suffit d'attribuer d'autres valeurs à x pour trouver celles de y et vis versa.

Méthode

Pour trouver une solution d'une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut donner une valeur à l'une des inconnues et déterminer la valeur de l'autre inconnue en résolvant une équation.

Exercice 2 **Résolution d'un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

Résolvons le système suivant : $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -3x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$

Méthode

On peut résoudre un système par substitution, par combinaison ou graphiquement.

Corrigé

- Méthode de substitution

En utilisant l'équation $x + 2y - 1 = 0$, exprimons x en fonction de y : $x = -2y + 1$ (1) puis remplaçons x par $-2y + 1$ dans l'autre équation :

$-3(-2y + 1) + 4y + 13 = 0$

$6y - 3 + 4y + 13 = 0$

$10y + 10 = 0$

$y = -1$

Exprimons y en fonction de x :

$y = \frac{1 - x}{2}$

Remplaçons y par $\frac{1 - x}{2}$

$-3x + 4\left(\frac{1 - x}{2}\right) + 13 = 0$

$-3x - 2x + 15 = 0$
$x = 3$
$S = \{(3\,;-1)\}$

• Méthode de combinaison

En multipliant la 1ère équation par 3,

on obtient : $\begin{cases} 3x + 6y - 3 = 0 \\ -3x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$

En additionnant membre à membre,
on obtient : $0 + 10y + 10 = 0$ soit
$y = -1$

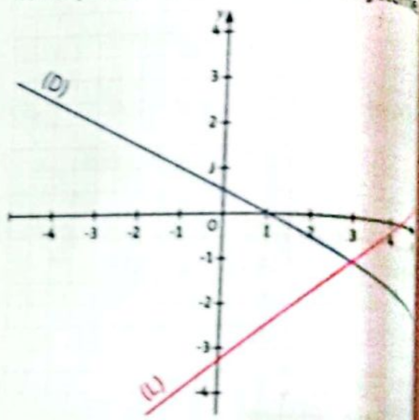
En multipliant la 1ère équation par −2,

on obtient : $\begin{cases} -2x - 4y + 2 = 0 \\ -3x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$

En additionnant membre à membre,
on obtient $-5x + 15 = 0$.
Soit $x = 3$.
Donc la solution du système est : $(3\,;-1)$.

• Méthode graphique

Représentons les droites (D) et (L) d'équations respectives :
$x + 2y - 1 = 0$ et $-3x + 4y + 13 = 0$
(D) et (L) se coupent en un point dont le couple de coordonnées est $(3\,;-1)$.
Le couple $(3\,;-1)$ est la solution du système.



Exercice 3 Résolution d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Résous graphiquement le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 3x + y - 5 < 0 \\ -3x - 5y + 15 > 0 \end{cases}$

Corrigé

Construisons les droites (D) d'équation :
$3x + y - 5 = 0$ et (D') d'équation :
$-3x - 5y + 15 = 0$, dans un repère (O, I, J).

(D)

x	0	1
y	5	2

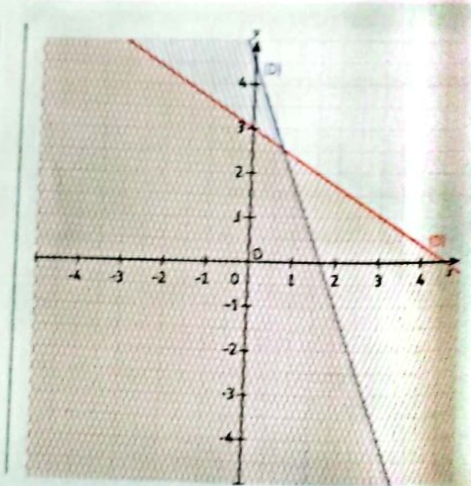
(D')

x	0	5
y	3	0

$3 \times 0 + 0 - 5 = -5$.
$-5 < 0$ est vrai donc l'origine O du repère appartient au demi-plan solution de l'inéquation (1).
$-3 \times 0 - 5 \times 0 + 15 = 15$.
$15 > 0$ est vrai donc l'origine O du repère appartient au demi-plan solution de l'inéquation (2).
En hachurant les deux parties, on obtient une partie hachurée deux fois qui est ainsi la solution du système.

Méthode

Pour résoudre un système d'inéquation, on utilise la méthode graphique.



Résumé de cours

1 Équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1.1. Définition

a, b et c sont des nombres réels tels que a et b sont non nuls.
On appelle équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemples

$2x - 3y + 5 = 0$; $4y = 7 - x$; $\frac{x\sqrt{6}}{2} + 5y = 0$ sont des équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2. Recherche de solutions

• Tout couple $(x\,;y)$ de nombres réels qui vérifie une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une solution de cette dernière.

• Pour déterminer une solution d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on remplace une des inconnues par un nombre réel puis on résout l'équation obtenue pour trouver la valeur de la seconde inconnue.

2 Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.1. Définition

a, b et c sont des nombres réels tels que a et b sont non nuls.
On appelle inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toute inéquation de l'un des types
$ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c < 0$.

2.2. Recherche de solutions

• Tout couple $(x\,;y)$ de nombres réels qui vérifie une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une solution de cette dernière.

• Pour déterminer une solution d'une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on remplace une des inconnues par un nombre réel puis on résout l'inéquation obtenue pour trouver une valeur possible de la seconde inconnue.

3 Systèmes d'équations et d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3.1. Systèmes d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels tels que a, b, a' et b' sont non nuls.
On appelle système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tout système de la forme : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

On appelle système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tout système de la forme : $\begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$

Remarque

On peut utiliser les inégalités $>$; $\geq$; $\leq$; $<$.

Résumé de cours

3.2. Recherche de solutions

• Pour résoudre un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on utilise en général la méthode de substitution, la méthode de combinaison ou la méthode graphique.

• Pour résoudre un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on utilise en général la méthode graphique.

3.3. Méthode par substitution

Pour résoudre un système par substitution :
1. On utilise l'une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.
2. Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par son expression exprimée en 1) et on obtient une équation à une inconnue qu'on résout.
3. Dans l'équation obtenue au 1), on remplace l'inconnue par la valeur trouvée et on trouve la deuxième inconnue.

3.4. Méthode par combinaison

Pour résoudre un système par combinaison :
1. On choisit l'inconnue que l'on veut éliminer, par exemple x ;
2. On multiplie les deux membres de l'une des équations (ou les deux équations, si nécessaire) par des coefficients de sorte que la variable x ait des coefficients opposés ;
3. On additionne membre à membre les deux équations obtenues en 2) et on obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue y et on trouve la valeur de y ;
4. On élimine la deuxième inconnue en suivant les mêmes étapes.

On donne la solution du système.

3.5. Résolution graphique d'un système d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

La résolution graphique d'un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ peut se faire en deux étapes :

1ère étape : Dans le plan muni d'un repère, on trace la droite (D_1) d'équation $ax + by + c = 0$ et la droite (D_2) d'équation $mx + ny + p = 0$.

2ème étape : On regarde la position relative des droites (D_1) et (D_2).
- Si (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point $M(\alpha ; \beta)$ alors le système a une seule solution qui est le couple $(\alpha ; \beta)$.
- Si (D_1) et (D_2) sont parallèles et disjointes alors le système n'a pas de solution.
- Si (D_1) et (D_2) sont confondues alors le système a une infinité de solutions (le couple de coordonnées de chaque point de la droite (D) (ou bien (Δ)) est solution du système).

3.6. Résolution graphique d'un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut procéder comme suit :
- On représente l'ensemble des solutions de chacune des inéquations composant le système ;
- L'ensemble cherché est l'ensemble des points communs aux deux ensembles de solutions (c'est leur intersection).

4 Problème du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on procède comme suit :
- Choisir les inconnues.
- Mettre le problème en équations ou en inéquations [traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s)].
- Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système en utilisant une méthode appropriée.
- S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation, l'inéquation ou le système.
- Conclure en interprétant le résultat trouvé.

EXERCICES

Exercices de renforcement

1 On donne (E) : $5x - 4y = 12$
a) Exprime y en fonction de x.
b) Exprime x en fonction de y.
c) Parmi les couples suivants : $(4 ; 2)$; $(3 ; 1)$; $(0 ; -3)$; $(5 ; 3)$ et $\left(1 ; -\frac{7}{4}\right)$, trouve ceux qui sont des solutions de (E).

2 On donne l'équation (E) : $2x - 3y + 1 = 0$.
1. Trouve quatre solutions de (E).
2. Détermine a et b pour que les couples $(a ; -1)$ et $(2 ; b)$ soient solutions de (E).
3. Détermine le couple dont la 2ème composante est le double de la 1ère, qui est solution de (E).
4. Détermine c pour que $(c ; c)$ soit solution de (E).

3 Pour chacun des couples suivants, détermine trois équations et trois inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont il est solution.
$(0 ; 2)$; $(-1 ; 3)$; $(4 ; -5)$; $(-6 ; -7)$.

4 Soit l'inéquation (I) : $x - 3y + 2 \leq 0$.
1. Parmi les couples suivants, cite ceux qui sont solutions de (I) :
$(5 ; -1)$; $(-2 ; 3)$; $(0 ; 7)$; $(1 ; -4)$; $(-6 ; 2)$; $(9 ; 0)$; $(-8 ; -1)$.
2. Représente graphiquement, l'ensemble des solutions de (I).

5 On donne l'inéquation (I) : $5x - 4y + 9 \geq 0$.
1. Détermine trois solutions de (I).
2. Détermine a et b pour que $(a ; -1)$; $(2 ; b)$ et $\left(\frac{a}{5} ; a\right)$ soient solutions de (I).
3. Représente graphiquement l'ensemble des couples solutions de (I).

6 Résous par la méthode de substitution, les systèmes d'équations ci-dessous :

$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ -3x + 2y = 23 \end{cases}$;

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x + 3y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$.

7 Résous par la méthode de combinaison chacun des systèmes suivants :

$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 21 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -5x - y - 9 = 0 \\ 7y = 3 - 5x \end{cases}$;

$\begin{cases} 12x - 7y = 2 \\ -8x - 21y = -50 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ -2x - \frac{3}{2}y + 1 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -6x + y - 1 = 0 \\ -3y = -18x - 3 \end{cases}$

8 Résous graphiquement les systèmes suivants :

$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 8 - 2x - 5y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x + 6y - 4 = 0 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$;

$\begin{cases} -6x + y - 1 = 0 \\ -3y = -18x - 3 \end{cases}$

9 Résous les systèmes d'inéquations ci-dessous :

$\begin{cases} x + 2y + 1 \leq 0 \\ -3x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y - 3 \geq 0 \\ x + 7y - 10 \leq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -4x + 2y \leq 1 \\ 3x - y \geq 0 \end{cases}$

10 Pour chaque couple, détermine un système d'équations et d'inéquations dont il est une solution : $(0 ; 0)$; $(-1 ; 2)$; $(5 ; -4)$; $(-3 ; -7)$.

11 Trouve deux nombres dont la somme est égale à 19 et la différence égale à 5.

12 Avec 2400 F CFA, Habib s'achète 4 croissants et 2 glaces mais avec 3450 F CFA, il peut avoir 2 croissants et 4 glaces.

Calcule les prix d'un croissant et le prix d'une glace.

Exercices d'approfondissement

13 On donne l'équation (E) :
$(x + 3)^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 + 5y$.
1. Justifie que le couple $(1 ; 3)$ est solution de l'équation (E).
2. Justifie que l'équation (E) est équivalente à $6x - 5y + 9 = 0$.
3. Vérifie l'affirmation de la question 1).

EXERCICES

14 Détermine trois couples solutions à la fois de l'équation : $x + y - 1 = 0$ et de l'inéquation : $-2x + 3y - 4 \geq 0$.

15 Résous à l'aide de la méthode de ton choix, les systèmes d'équations ci-dessous :

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x-2y+9=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=0 \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} 0{,}11x-0{,}03y=0{,}25 \\ 0{,}12x+0{,}05y=0{,}7 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=1 \\ x-\frac{1}{3}y=-\frac{5}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{x+1}{4}+\frac{y-3}{10}=\frac{-1}{6} \\ 4x-3y+1=0 \end{cases}$.

16 On donne le système d'équations suivant :

$\begin{cases} (2a-3)x+(b+1)y=0 \\ ax-(b-2)y=-3 \end{cases}$.

1. Détermine les nombres réels a et b pour que le couple $(1 ; -1)$ soit solution du système ci-dessus.
2. Résous le système lorsque $a = 1$ et $b = -2$.

17 Soit (S) le système d'inéquations suivant :

$\begin{cases} 2x-3y+4\geq 0 \\ 3x-10<4y \end{cases}$.

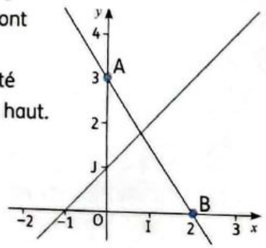
1. Parmi les couples suivants, cite ceux qui sont solutions de (S) : $(0 ; -2)$; $(1 ; 3)$; $(0 ; 0)$; $(-4 ; 2)$; $(5 ; -12)$ et $(-3 ; -7)$.
2. Résous graphiquement le système.

18 Résous graphiquement les systèmes suivants :

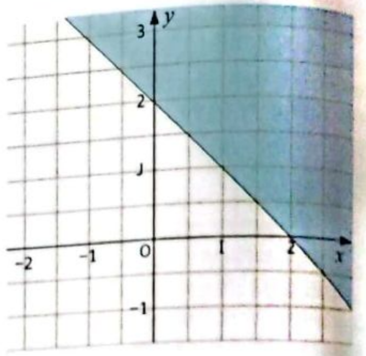
$\begin{cases} x\leq 5 \\ y\geq -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 4 \\ x+y-3\leq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -2x+y\leq 3 \\ y\geq -1 \end{cases}$.

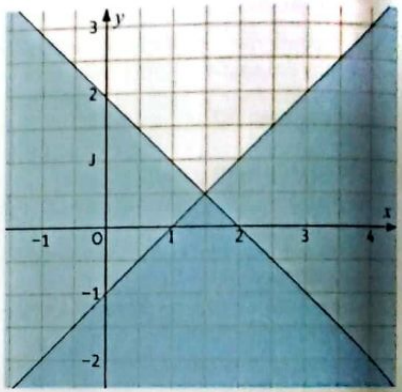
19 Soit la figure ci-dessous :
Déterminer le système d'équations dont la résolution graphique a été proposée plus haut.



20 Détermine l'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont la solution graphique est la partie violette.



21 Détermine le système d'inéquations dont la solution graphique est la partie bleue.



22 L'âge cumulé de Bertrand et de son frère donne 34 ans aujourd'hui. Dans 4 ans, Bertrand aura le double de l'âge de son frère.
Détermine les âges de Bertrand et de son frère.

23 1. Résous le système suivant :

$\begin{cases} 12x+4y-1\,200=0 \\ 5x+10y-1\,000=0 \end{cases}$

2. Koffi et Yao achètent des chemises cartonnées pour ranger leurs documents. Il en existe de deux qualités A et B.
Pour 1 200 F CFA, Koffi achète 12 chemises de qualité A et 4 de qualité B.
Pour 5 chemises de qualité A et 10 de B, Yao paie 1 000 F CFA.
Détermine le prix d'une chemise de chaque qualité.

EXERCICES

24 Il y a trois ans, l'âge d'Alice était le triple de celui de Sophie. Dans neuf ans, l'âge de Sophie sera la moitié de celui d'Alice.
1. Justifie que la résolution du système suivant : $\begin{cases} x-3y+6=0 \\ x+2y-9=0 \end{cases}$, permet de déterminer l'âge de chaque fille.
2. Détermine l'âge des deux filles.

25 Pour les fêtes de fin d'année, les résidents de la cité LAURIERS 9 de la Riviera ont décidé de commander dix casiers de sucrerie de plus que de casiers de bière pour la somme de 108 900 F CFA.
Un casier de sucrerie coûte 5160 F CFA alors que celui de la bière coûte 6300 F CFA.
Calcule le nombre de casiers de sucrerie et celui de la bière achetés pour la fête.

26 *Dans le désert*, dans une ferme qui contient des dromadaires et des chameaux, on compte 45 têtes pour 71 bosses.
Détermine le nombre de dromadaires et le nombre de chameaux.

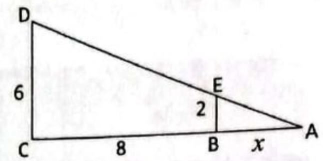

DROMADAIRE


CHAMEAUX

27 *Au restaurant*
1. Résous le système suivant : $\begin{cases} 5t=p-4 \\ 6t=p+2 \end{cases}$.
2. Dans un restaurant, si les clients d'un soir occupaient 5 tables, il resterait 4 clients debout.
Mais s'ils occupent 6 tables, il restera 2 places non occupées.
Détermine le nombre des clients et des tables.

28 *Affaire d'âge*
Détermine mon âge sachant que :
" j'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 117 ans.

29 *Encore Thalès*
On donne la figure ci-dessous :
$AB = x$ $BC = 8$ $CD = 6$ et $BE = 2$ (BE) // (CD).
Sachant que $AC = y$, calcule x.



30 Un premier bouquet de fleurs est composé de 3 iris et 4 roses jaunes, il coûte 480 F CFA. Un second bouquet est composé de 5 iris et de 6 roses jaunes, il coûte 750 F CFA. On appelle x le prix en francs d'un iris et y le prix en francs d'une rose jaune.
Écris un système d'équations traduisant les données de ce problème et calcule le prix d'un iris et celui d'une rose jaune.

31 Pour financer une partie de leur voyage de fin d'année, des élèves de Troisième vendent des gâteaux qu'ils ont confectionnés eux-mêmes. Un même jour, ils ont vendu 15 tartes, les unes aux myrtilles et les autres aux pommes. Une tarte aux myrtilles est vendue 400 F CFA et une tarte aux pommes 200 F CFA. La somme encaissée ce jour-là est de 4200 F CFA. Après avoir mis le problème en équation, détermine combien ils ont vendu de tartes de chaque sorte.

EXERCICES

32 Dans un concours hippique un cavalier est pénalisé :
- quand le cheval refuse de sauter un obstacle,
- quand le cheval fait tomber la barre.

Le cheval de Pierre a fait 2 refus et a fait tomber 3 barres pour un total de 18 points de pénalité.
Le cheval de Jean a fait 1 refus et a fait tomber 4 barres pour un total de 19 points.
1. Détermine le nombre de points d'un refus.
2. Détermine le nombre de points de la chute d'une barre.

33 Un client achète 3 baguettes de pain et un croissant, il paie 1 550 F CFA. Un autre client achète 2 baguettes de pain et 3 croissants et paie 2 060 F CFA.
Détermine le prix d'une baguette et celui d'un croissant.

Situation d'évaluation

34 Les élèves d'une classe de Troisième d'un établissement scolaire organisent une sortie-détente. Pour cela, le chef de classe a acheté des bouteilles de jus d'ananas et de jus d'orange. La bouteille de jus d'ananas coûte 200 F CFA et celle de jus d'orange coûte 100 F CFA. Le montant total dépensé pour les bouteilles de jus est de 21 000 F CFA pour 120 bouteilles de jus.
Le chef de classe veut faire le bilan de la sortie, mais il a oublié le nombre de bouteilles de jus de chaque type.
On désigne par x le nombre de bouteilles de jus d'ananas et par y celui de bouteilles de jus d'orange.
1. Traduis par une équation chacune des phrases suivantes :
   a) le nombre total de bouteilles de jus est 120.
   b) les bouteilles de jus coûtent au total 21 000 F CFA, sachant que la bouteille de jus d'ananas coûte 200 F CFA et celle de jus d'orange 100 F CFA.
2. a) Résous le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 200x + 100y = 21\,000 \end{cases}$$

   b) Réponds ainsi à la préoccupation du chef de classe.

Coup de Pouce

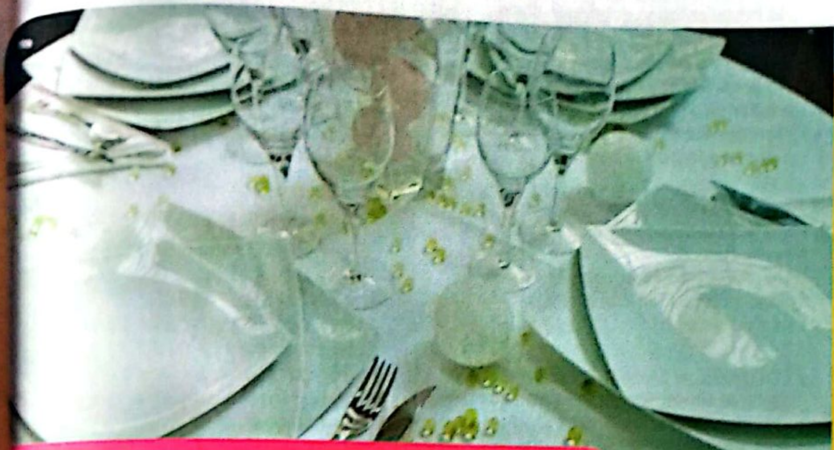
19 Utilise les points d'intersection avec les axes.

20 Utilise les points d'intersection avec les axes.

21 Utilise les points d'intersection avec les axes.

Leçon **6**

Applications affines



La location de vaisselle de réception est souvent soumise à une caution à laquelle s'ajoute le prix unitaire de la vaisselle.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La facture d'eau potable dans un pays se compose d'une taxe fixe à laquelle s'ajoute le prix du mètre cube multiplié par le nombre de mètre cube d'eau consommée.

Pour les mois de juin et septembre, les consommations en eau de la famille Sogon se sont élevées respectivement à 13 440 F CFA pour une consommation de 123 m³ et 24 240 F CFA pour une consommation de 258 m³.

M. Sogon ne veut plus être surpris par les montants à payer tous les trois mois. Pour cela, il sollicite son fils en classe de Troisième pour lui donner la formule de calcul de la facture d'eau.

Ce dernier, avec l'aide de ses camarades de classe, décide de répondre à la préoccupation de son père.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Application affine

Identifier :
- une application affine ;
- la représentation graphique d'une application affine.

Connaître :
- la propriété relative à la représentation graphique d'une application affine ;
- la propriété relative au sens de variation d'une application affine.

Reconnaître :
- une application affine ;
- la représentation graphique d'une application affine ;
- la représentation graphique d'une application affine constante, croissante ou décroissante.

Déterminer :
- l'expression d'une application affine à partir de sa représentation graphique ;
- graphiquement une image ;
- graphiquement le réel a tel que $f(a) = b$ (où f est une application affine et b un nombre réel donné) ;
- une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images ;
- le sens de variation d'une application affine ;
- l'application affine dont on connaît une équation de sa représentation graphique.

Calculer :
- l'image d'un nombre réel par une application affine ;
- le nombre réel a tel $f(a) = b$ (où f est une application affine et b nombre réel donné).

Représenter :
- graphiquement une application affine dont on connaît l'expression explicite ;
- graphiquement une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images.

Utiliser :
le sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres.

Justifier :
le sens de variation d'une application affine.

2 Application linéaire

Identifier :
- une application linéaire ;
- la représentation graphique d'une application linéaire.

Connaître :
- la propriété relative à la représentation graphique d'une application linéaire ;
- les propriétés de linéarité.

Reconnaître :
- une application linéaire ;
- la représentation graphique d'une application linéaire ;
- la représentation graphique d'une application linéaire constante, croissante ou décroissante.

Déterminer :
une application linéaire connaissant un nombre réel et son image.

Représenter :
- graphiquement une application linéaire dont on connaît l'expression explicite ;
- graphiquement une application linéaire connaissant un nombre réel et son image.

Utiliser :
les propriétés de linéarité pour calculer l'image d'un nombre.

Traduire :
une situation de proportionnalité par une application linéaire.

Justifier :
le sens de variation d'une application linéaire.

Traiter :
une situation faisant appel aux applications affines.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Application affine

1 Activité : Définition

FAMCI est une société de location de vaisselles. Lors des jeux de la francophonie en Côte d'Ivoire, elle a reçu de nombreuses commandes de ses clients. Pour chaque commande, il faut 6 000 F CFA à la réservation et 500 F CFA par vaisselle commandée.

On note $f(x)$ le prix à payer à la compagnie FAMCI pour x vaisselles commandées.

1. Exprime $f(x)$ en fonction de x.
2. Donne la forme générale de $f(x)$.
3. Détermine le prix à payer pour une commande de 125 vaisselles.
4. Détermine le nombre de vaisselles pour une commande de 21 000 F CFA.

Synthèse

- $f(x) = 500x + 6\,000$.

La forme générale de $f(x)$ est : $f(x) = ax + b$. a est le coefficient et b est le terme constant. a et b sont des nombres réels.

- Une application qui à chaque nombre réel x associe $ax + b$ est une application affine.
- $ax + b$ est l'image de x par f.
- Pour déterminer le nombre u tel que $f(u) = v$, v étant donné, on résout l'équation $au + b = v$.

Exercices de fixation

1 Détermine parmi les applications f, g, h, i, j, k et l définies ci-dessous celles qui sont des applications affines.

a) $f(x) = 4x$; b) $g(x) = \dfrac{-x+10}{2}$;
c) $h(x) = 2\sqrt{x} - 3$; d) $i(x) = -x^2 + 3$
e) $j(x) = \dfrac{2}{x} - 1$; f) $k(x) = -3x$;
g) $l(x) = \sqrt{5}x + 2$.

2 Recopie et complète les phrases suivantes où f désigne une application affine :
1. Si $f(2) = 5$, alors l'image de ... est ... par f.
2. Si $f(4) = 12$, alors 12 est ... de ... par f.

3 Détermine le coefficient a et le terme constant b des applications affines suivantes :

a) $f(x) = 4x$; b) $g(x) = \dfrac{-x+10}{2}$;
c) $j(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$; d) $k(x) = -3x$;
e) $l(x) = \sqrt{7}x - 3$.

4 On considère l'application affine f telle que : $f(x) = 5x + 2$.
1. a) Détermine l'image de chacun des nombre $\dfrac{3}{5}$ et -6 par f.
b) Détermine les nombres m et n tels que $f(m) = 4$ et $f(n) = 22$.

2 Activité : Représentation graphique d'une application affine

On considère l'application affine f telle que : $f(x) = -3x + 4$.

x	-3	-1	0	2	5
$f(x)$					

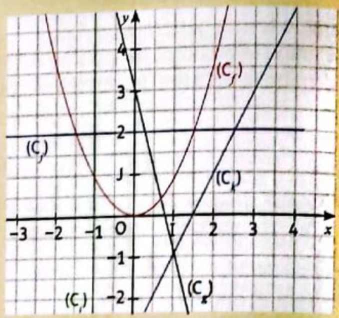
1. Recopie et complète le tableau ci-contre :
2. Place tous les points correspondants aux couples $(x ; f(x))$ de ce tableau sur un graphique. On utilisera un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le cm.
3. Vérifie à l'aide d'une règle que les points obtenus sont alignés. Trace la droite passant par ces points.
4. Détermine une équation de cette droite.

Synthèse

On admet que :
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- Dans le plan rapporté à un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une application affine.

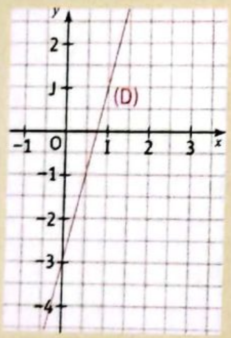
Exercices de fixation

1 Parmi les représentations graphiques ci-contre, indique celles qui sont les représentations graphiques d'une application affine.

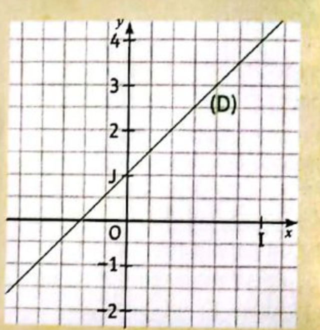


2 Représente graphiquement les applications affines f et g définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = 6x - 2$.

3 La droite (D) ci-dessous est la représentation graphique d'une application affine f. Détermine graphiquement le coefficient et l'ordonnée à l'origine de f.



4 La droite (D) ci-dessous est la représentation graphique d'une application affine f. Détermine graphiquement :
a) l'image de 1 par f ;
b) l'image de 0 par f.



3 Activité : Sens de variation d'une application affine

On donne l'application affine f définie par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.
1. On suppose que : $a > 0$.
   a) Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que : $x_1 \leq x_2$.
   b) Justifie que : $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. On suppose que : $a < 0$.
   a) Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que : $x_1 \leq x_2$.
   b) Justifie que : $f(x_1) \geq f(x_2)$.
3. On suppose que : $a = 0$.
   a) Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que : $x_1 \leq x_2$.
   b) Justifie que : $f(x_1) = f(x_2)$.

Synthèse

f est une fonction affine de coefficient a.
- Lorsque $a > 0$, deux nombres réels et leurs images par f sont rangés dans le même ordre : on dit que f est croissante.
- Lorsque $a < 0$, deux nombres réels et leurs images par f sont rangées dans des ordres contraires : on dit que f est décroissante.
- Lorsque $a = 0$, deux nombres réels quelconques ont la même image par f : on dit que f est constante.

Exercices de fixation

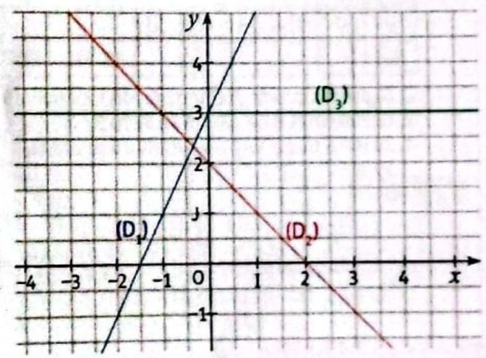
1 Recopie et relie chacune des applications affines données par leurs expressions, à son sens de variation.

$f(x) = 3x + 5$	•	
$f(x) = -10$	•	• croissante
$f(x) = \sqrt{2}x - 7$	•	• décroissante
$f(x) = -2x + 1$	•	• constante
$f(x) = -\frac{4}{5}x - 9$	•	

2 Détermine le sens de variation de chacune des applications affines f, g et h définies ci-dessous :
a) $f(x) = 2x - 11$; b) $g(x) = 5 - 4x$; c) $h(x) = -17$.

4 Activité : Variation et représentation graphique d'une application affine

Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) ci-contre sont les représentations graphiques de trois applications affines respectives f, g et h.



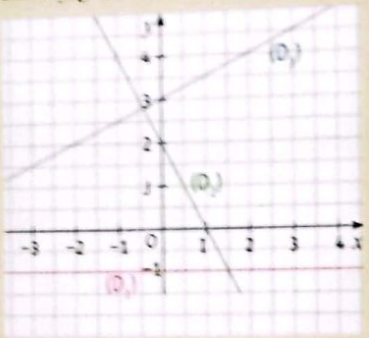
1. a) Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$. Compare graphiquement $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
   b) Donne le signe du coefficient directeur de f.
   c) Déduis-en le lien entre le sens de variation de f et le coefficient directeur de la droite (D_1).
2. Réponds aux mêmes consignes qu'au 1) pour (D_2) et g.
3. Réponds aux mêmes consignes qu'au 1) pour (D_3) et h.

Synthèse

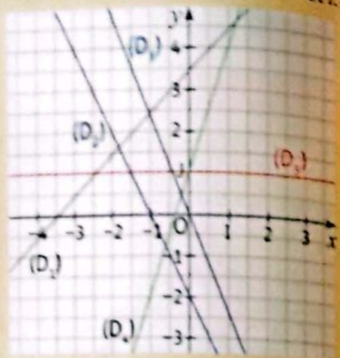
- f est croissante parce que son coefficient a est positif ($a > 0$).
- g est décroissante parce que son coefficient a est négatif ($a < 0$).
- h est constante parce que son coefficient a est égal à 0 ($a = 0$).

Exercices de fixation

Les droites (D_1), (D_2) et (D_3) ci-dessous représentent graphiquement des applications affines respectives f, g et h.
Donne les variations des applications affines f, g et h.



Les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) et (D_5) suivantes sont les représentations graphiques respectives des applications affines f, g, h, k et i.
Détermine le sens de variation de chacune des applications f, g, h, k et i.



Activité 3 Application linéaire

1 Activité : Définition

À l'occasion de la fête du quartier, Grâce et Ophir ont décidé de faire des gâteaux et de les vendre à 250 F CFA le gâteau.

1. On désigne par x le nombre de gâteaux vendus et par $f(x)$ la recette. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

x	0	10	25	40	50		
$f(x)$						18 750	30 750

2. Exprime le prix $f(x)$ à payer en fonction du nombre x de gâteaux.
3. Donne la forme générale de $f(x)$.
4. Justifie que f est une application affine.

Synthèse

- $f(x) = 250x$.
- La forme générale de $f(x)$ est : $f(x) = ax$.

Toute application affine définie par $f(x) = ax$ est appelée application linéaire.

Exercices de fixation

Détermine parmi les applications f, g, h, i, j, k et l définies ci-dessous, celles qui sont des applications linéaires.

a) $f(x) = 4x$; b) $g(x) = \frac{-x+10}{2} - 5$;
c) $h(x) = 3\sqrt{x}$; d) $i(x) = -x^2 + 3 + x^2$;
e) $j(x) = -\frac{9}{x} - 1$; f) $k(x) = -10x$;
g) $l(x) = \sqrt{5}x + 2$.

On considère l'application linéaire f telle que : $f(x) = \frac{3}{5}x$.

1. Détermine l'image de chacun des nombres $\frac{5}{3}$ et -5 par f.
2. Détermine les nombres r et s tels que : $f\left(-\frac{2}{3}\right) = r$ et $f(s) = 3$.

2 Activité : Représentation graphique d'une application linéaire

On considère l'application linéaire f définie par $f(x) = 3x$.

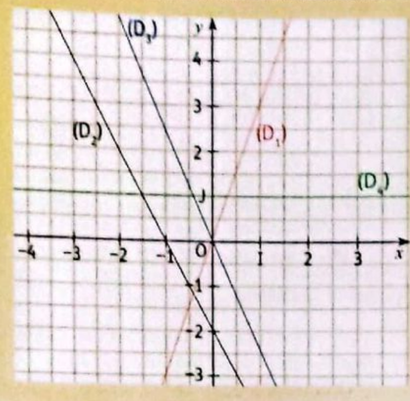
1. Représente graphiquement f dans un repère (O, I, J).
2. Vérifie que cette représentation graphique passe par O.

Synthèse

On admet que :
La représentation graphique d'une application linéaire est une droite d'équation : $y = ax$ qui passe par l'origine O du repère.

Exercices de fixation

Parmi les représentations graphiques (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) ci-contre, indique celles qui sont les représentations graphiques d'applications linéaires.



Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les droites représentant les applications linéaires définies ci-dessous.

a) $f : x \mapsto -x$; b) $f : x \mapsto 3x$;
c) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$; d) $f : x \mapsto -\frac{3}{4}x$.

3 Activité : Propriétés de linéarité

Soit f l'application linéaire définie par : $f(x) = ax$.
On considère trois nombres réels u, v et k.

1. Justifie que : $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. Justifie que : $f(ku) = kf(u)$.

Synthèse

u, v et k sont des nombres réels. Si f est une application linéaire, alors $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(ku) = kf(u)$.

Exercices de fixation

x est un nombre réel et f une application linéaire.
Pour chaque énoncé ci-contre, trois propositions de réponses sont données. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

		Réponses		
N°	Énoncés	a	b	c
1	$f(x + 3) = ...$	$f(3x)$	$f(x) + 3$	$f(x) + f(3)$
2	$f(11x) = ...$	$11f(x)$	$f(11 + x)$	$f(11)$
3	$f(x - 7) = ...$	$f(x + 7)$	$f(x) - f(7)$	$f(7x)$

f est une application linéaire telle que : $f(9) = 15$.
En utilisant les propriétés de linéarité, calcule $f(3)$ et $f(12)$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Déterminer l'expression d'une application affine

Détermine l'expression de l'application affine f vérifiant : $f(-1) = 1$ et $f(3) = 4$.

Corrigé

Première méthode

f est une application affine.
$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$ et a est le coefficient directeur de la droite représentant f.

$a = \frac{f(-3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$,

on a : $f(x) = \frac{3}{4}x + b$.

$f(3) = 4$ équivaut à $\frac{3}{4} \times 3 + b = 4$.

équivaut à $\frac{9}{4} + b = 4$

équivaut à $b = \frac{7}{4}$

Donc : $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

Deuxième méthode

f est une application affine, elle est définie par : $f(x) = ax + b$

$f(-1) = 1$ équivaut à $-a + b = 1$

et $f(3) = 4$ équivaut à $3a + b = 4$

On a le système suivant : $\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a+b=4 \end{cases}$.

Par la méthode de combinaison on a :

$\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a+b=4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a-b=-1 \\ 3a+b=4 \end{cases}$

$4a = 3$ donc $a = \frac{3}{4}$,

$\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a+b=4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -3a+3b=3 \\ 3a+b=4 \end{cases}$

$4b = 7$ donc $b = \frac{7}{4}$

Donc : $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$.

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une application affine on utilise l'expression générale $f(x) = ax + b$

Exercice 2 Déterminer l'expression d'une application linéaire

Détermine l'expression de l'application linéaire g vérifiant : $g\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{7}$.

Corrigé

g est une application linéaire, $g(x)$ est de la forme : $g(x) = ax$.

$g\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{7}$ équivaut à $a \times \frac{1}{6} = \frac{5}{7}$

équivaut à $a = \frac{5}{7} \times 6 = \frac{30}{7}$

Donc : $g(x) = \frac{30}{7}x$.

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une application linéaire on utilise l'expression générale $g(x) = ax$.

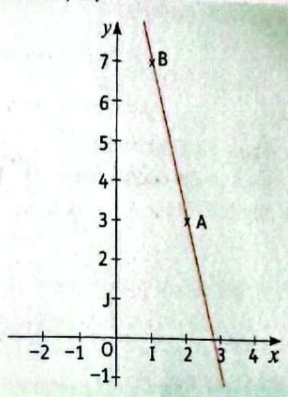
Exercice 3 Déterminer le sens de variation d'une application affine

On donne l'application affine f telle que : $f(2) = 3$ et $f(1) = 7$.

1. Détermine le sens de variation de f.
2. Représente graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Corrigé

1. Déterminons le sens de variation de f.
$2 > 1$ et $f(2) < f(1)$, donc f est une application affine décroissante.
2. f étant une application affine, sa représentation graphique est la droite (AB) où A(2 ; 3) et B(1 ; 7).



Méthode

Pour déterminer le sens de variation d'une application affine, on peut choisir deux nombres a et b tels que $a < b$ et on compare leurs images.

Exercice 4 Calculer l'image d'un nombre en utilisant les propriétés de linéarité

f est une application linéaire telle que : $f\left(\frac{8}{5}\right) = 3$.
En utilisant les propriétés de linéarité,

a) calcule $f(8)$;

b) déduis-en $f\left(\frac{48}{5}\right)$.

Corrigé

f est une application linéaire.

On sait que : $8 = 5 \times \left(\frac{8}{5}\right)$ et $\frac{48}{5} = \frac{8}{5} + 8$.

a) On a $f(8) = f\left(5 \times \frac{8}{5}\right) = 5f\left(\frac{8}{5}\right) = 5 \times 3 = 15$.

b) $f\left(\frac{48}{5}\right) = f\left(\frac{8}{5} + 8\right) = f\left(\frac{8}{5}\right) + f(8) = 3 + 15 = 18$.

Méthode

Si f est une application linéaire alors, $f(ka) = kf(a)$ et $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

1 Application affine

1.1. Définition

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

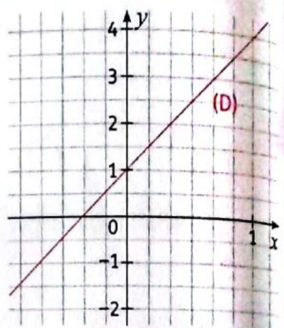
On appelle application affine de coefficient a et de terme constant b, la correspondance qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.

On note : $f(x) = ax + b$.

1.2. Représentation graphique d'une application affine

Définition

Le plan est muni d'un repère.
f est une application affine.
On appelle représentation graphique de l'application affine f, l'ensemble des points du plan de couple de coordonnées $(x\,;f(x))$, x étant un nombre réel.



Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J), a et b sont deux nombres réels donnés.

f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- L'application affine f a pour représentation graphique la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.
- Toute droite d'équation $y = ax + b$ est la représentation graphique de l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$.

1.3. Sens de variation d'une application affine

Propriété

a et b sont deux nombres réels.
f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.
- f est croissante équivaut à $a > 0$.
- f est décroissante équivaut à $a < 0$
- f est constante équivaut à $a = 0$.

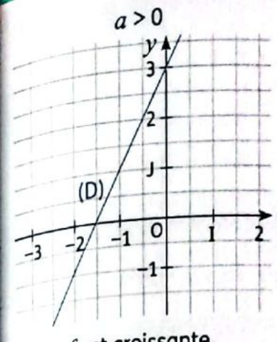
1.4. Variation et représentation graphique d'une application affine

Illustrations graphiques

Dans chacune des figures suivantes, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f.

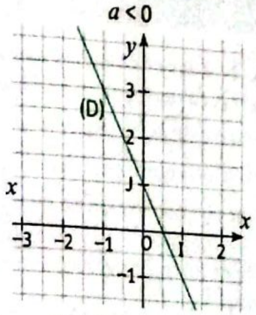
(D) a pour équation réduite : $y = ax + b$.

$a > 0$



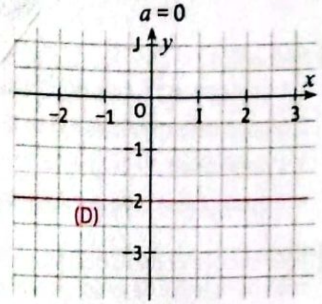
f est croissante.

$a < 0$



f est décroissante.

$a = 0$



f est constante.

2 Application linéaire

2.1. Définition

Définition

On appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$, a étant un nombre réel.

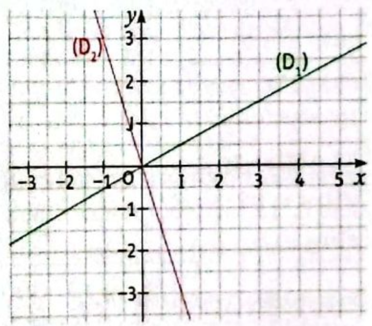
Remarque
- Toute application linéaire est une application affine.
- Toutes les propriétés d'une application affine sont valables pour une application linéaire.

2.2. Représentation graphique d'une application linéaire

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
- La représentation graphique de l'application linéaire f définie par : $f(x) = ax$ est la droite d'équation : $y = ax$.

Cette droite passe toujours par l'origine O du repère.
- Toute droite d'équation : $y = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) est la représentation d'une d'application linéaire.



2.3. Propriétés de linéarité

Propriété

f est une application linéaire.

u, v et k sont des nombres réels.

$f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(ku) = kf(u)$.

EXERCICES

Exercices de renforcement

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
1. L'application f telle que $f(x) = 5x + 2$ est une application linéaire.
2. L'application f telle que $f(x) = 3x^2$ est une application affine.
3. L'application f telle que $f(x) = 5x$ est une application linéaire.
4. L'application f telle que $f(x) = 4$ est une application affine.

2 Pour chaque énoncé, trois propositions de réponses sont données, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

	Énoncés	Réponses a	b	c
1	L'image de 3 par l'application affine f telle que : $f(x) = -3x + 7$ est ...	-4	-2	2
2	L'antécédent de 3 par l'application affine f telle que : $f(x) = -3x + 7$ est ...	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	La droite d'équation $y = 2x + 5$ passe par le point ...	B(5 ; 7)	B(12 ; 3)	B(0 ; 5)
4	La droite d'équation $y = 74x$ passe par le point ...	B(0 ; 0)	$A\left(1 ; \frac{4}{7}\right)$	$B\left(0 ; \frac{7}{4}\right)$

3 Recopie le tableau et mets une croix dans la case qui convient selon que l'application est affine, linéaire ou non.

Affirmations	Réponses: Application affine	Application linéaire	Non affine
$f(x) = 18x - 23$			
$g(x) = \frac{3}{x} + 5$			
$h(x) = 13x$			
$k(x) = 31$			
$l(x) = 6(3x - 1)$			
$m(x) = 4x + 5 - 4x$			
$n(x) = 3x(7x - 2)$			

4 On considère l'application affine $f : x \mapsto -4x + 5$.
1. Calcule l'image de 2 par f.
2. Calcule l'antécédent de 17 par f.
3. Détermine le nombre qui a pour image 4 par f.
4. Détermine l'image de 720 et de $\frac{7}{20}$ par f.

5 Par l'application linéaire h, l'image du nombre -6 est le nombre 2.
1. Détermine le coefficient de cette application.
2. Détermine l'image de -3 par h.
3. Détermine l'antécédent de 9 par h.
4. On appelle (D) la représentation graphique de h. Précise le coefficient directeur de (D), puis trace (D) dans le plan muni d'un repère.

6 Dans chacun des cas, indique le coefficient et le terme constant de l'application f et précise, en justifiant, le sens de variation de l'application f.
1. $f(x) = 3x + 5$.
2. $f(x) = -2x - 7{,}5$.
3. $f(x) = -\frac{5}{7}x + 0{,}9$.
4. $f(x) = 2 - 3x$.

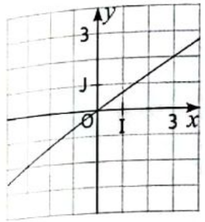
EXERCICES

7 On donne l'application affine f telle que : $f(3) = 5$ et $f(7) = 13$.
1. Trace la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
2. Détermine l'expression de $f(x)$.

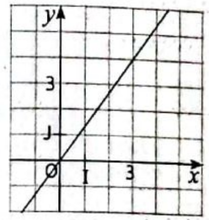
8 Soit f l'application linéaire telle que : $f(2) = -4$.
1. Trace la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
2. Détermine l'expression de $f(x)$.
3. Calcule l'antécédent de 8 par f.

9 Calcule les coefficients de chacune des applications linéaires représentées ci-dessous.

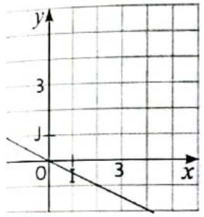
a)



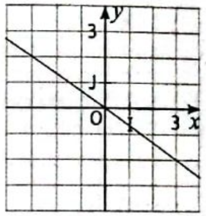
b)



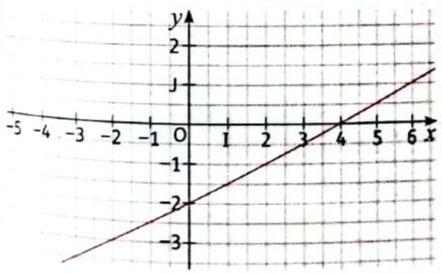
c)



d)



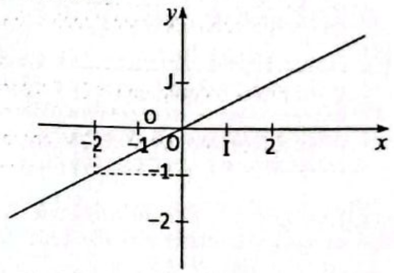
10 La figure suivante est la représentation graphique d'une application affine g.
1. Détermine graphiquement $g(6)$ et $g(-4)$.
2. Détermine graphiquement x tel que :
a) $g(x) = -3$
b) $g(x) = -5$
3. Détermine l'antécédent de 0.
4. Donne l'expression de $g(x)$.



11 On considère l'application affine f telle que : $f(9) = -1$ et $f(18) = -8$.
Détermine le sens de variation de f, sans calculer l'expression de f.

12 Représente sur le même graphique les applications linéaires suivantes :
$f : x \mapsto -\frac{1}{3}x$; $g : x \mapsto -2x$; $h : x \mapsto 6x$.

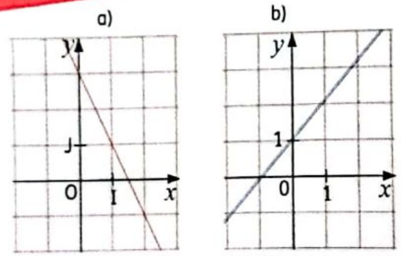
13 La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une application linéaire f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité 1 cm.
Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x.



14 f, g et h sont des applications définies par : $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = -x$ et $h(x) = -1$.
Deux élèves d'une classe de troisième affirment :
Yao : « f, g et h sont des applications affines. »
Koné : « L'image de 11 est la même par chacune de ces applications. »
1. Dis si Yao a raison, justifie ta réponse.
2. Dis si Koné a raison, justifie ta réponse.

15 Soit f l'application affine définie par :
$f(x) = \frac{3x - 1}{5}$.
1. Calcule l'image par f des nombres suivants : a) 2 ; b) -4 ; c) $-\frac{4}{3}$; d) $\frac{7}{4}$.
2. Détermine les antécédents par f des nombres suivants : a) 0 ; b) 4 ; c) $-\frac{4}{3}$.

16 Les droites ci-après représentent des applications affines.
1. Dans chaque cas, donne le coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
2. Déduis-en l'expression de chacune des applications affines.



17 On considère l'application affine h telle que : $h(0) = 5$ et $h(4) = -1$.
Détermine l'expression de la fonction h.

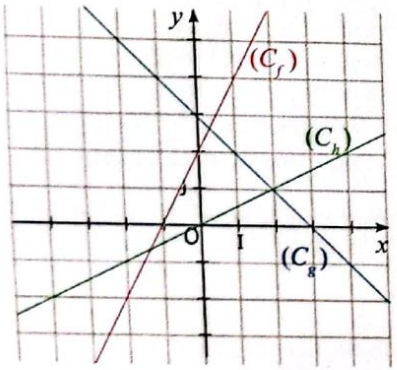
18 1. Détermine l'expression de l'application affine f telle que $f(5) = 20$ et $f(10) = 70$.
2. Calcule $f(-6)$.

19 j est une application linéaire telle que $j(4) = 3$.
a) Dis s'il est possible que $j(-8) = -5$. Justifie.
b) Sans déterminer le coefficient de j, calcule $j(24)$ et $j(-2)$
c) Détermine le coefficient de j.

20 Soit l'application linéaire h telle que $h(1) = -4$.
a) Sans déterminer le coefficient de h, calcule : $h(4)$; $h(-2{,}5)$; $h(5)$.
b) Détermine le coefficient de h.

21 Justifie que les applications suivantes sont affines.
a) $f : x \mapsto -1$ b) $g : x \mapsto \dfrac{40-7x}{5}$
c) $h : x \mapsto 3(7-x) - 2(5-x)$.

22 Détermine l'expression de chacune des applications affines f, g et h dont les représentations graphiques sont respectivement (C_f), (C_g) et (C_h) sur le graphique ci-dessous.



23 Recopie et complète le tableau ci-dessous en indiquant les applications linéaires et leur coefficient.
$f : x \mapsto 6x - 1$; $g : x \mapsto \dfrac{x}{5}$; $h : x \mapsto \dfrac{5}{x}$
$j : x \mapsto 4x^2$; $k : x \mapsto \dfrac{2}{3}x$; $l : x \mapsto 5x - 3{,}2$
$m : x \mapsto 7(x-3)$; $n : x \mapsto 3(1-x) - 3$.

Application linéaire					
Coefficient					

24 k est une application linéaire telle que $k(7) = -2$.
a) Sans déterminer le coefficient de k, calcule $k(21)$ et $k(-3{,}5)$.
b) Détermine le coefficient de k.

25 On considère l'application affine g telle que $g(5) = 7$ et $g(-2) = 7$.
Détermine sans calculer l'expression de g le sens de variation de g.

26 On considère l'application affine h telle que $h(-2) = 4$ et $h(-5) = -3$.
Détermine sans calculer l'expression de h le sens de variation de h.

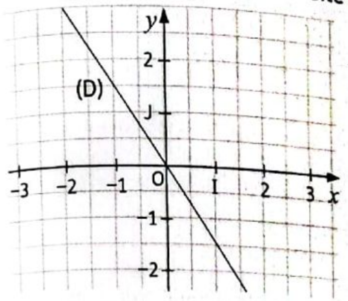
27 Soit l'application linéaire $f : x \mapsto ax$
Détermine dans chaque cas le coefficient de l'application f :
1. $f(2) = -4$; 2. $f(12) = -4$; 3. $f(2) = 7$.

28 f est une application linéaire définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(3) = -6$ et g est une application affine définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $g(5) = -2$ et $g(-3) = 4$.
1. Détermine $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.
2. Donne le sens de variation de f et de g.

Exercices d'approfondissement

29 Détermine l'application linéaire qui correspond à chaque phrase :
a) « Prendre 15 % de x ».
b) « Augmenter x de 5 % ».
c) « Prendre 20 % de x ».
d) « Diminuer x de 20 % »
e) « Augmenter x de 45 % ».

Sur la figure ci-dessous, la droite (D) est la représentation graphique d'une application linéaire g.
1. Le point M a pour abscisse -2 et appartient à la droite (D). Détermine son ordonnée.
2. Déduis-en l'image de -2 par g.
3. Détermine l'expression de $g(x)$.
4. Déduis-en une équation de la droite (D).



31 Soit l'application affine f définie par $f(x) = -0{,}5x + 40$.
1. Construis la représentation graphique de f (en prenant 1 cm pour 100 unités en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée).
2. La fonction indique la quantité de carburant (L) contenue dans le réservoir d'un véhicule en fonction de la distance parcourue (en km) lors d'un déplacement. Soit V le point où la représentation graphique de f coupe l'axe des abscisses et P celui où elle coupe l'axe des ordonnées.
a) Lis les coordonnées de V et de P.
b) À quelle situation concrète correspond chacun des points V et P ?

f est une application linéaire telle que : $f(3) = 10$.
En utilisant les propriétés de linéarité calcule $f(9)$; $f(11)$ et $f\left(\dfrac{6}{5}\right)$.

Dans un repère, on donne les points A et B tels que : A(– ; 4) et B(2 ; –2).
1. Détermine le sens de variation de l'application affine f dont la représentation graphique est la droite (AB).
2. Détermine l'expression de f.

34 h est une application affine définie par : $h(x) = (2 - \sqrt{7})x + 3$.
Détermine le sens de variation de h.

35 g est l'application affine telle que : $g\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $g\left(\dfrac{5}{7}\right) = \dfrac{3}{2}$.
Sans calculer l'expression de g compare : $g(3\sqrt{7})$ et $g(7)$.

36 Soit f une application affine telle que : $f(x) = ax + b$, $f(-3) = -10$ et $f(3) = 2$.
On souhaite déterminer l'expression de $f(x)$, c'est-à-dire déterminer a et b.
1. Calcule le coefficient de f en utilisant la formule $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.
2. Détermine l'expression de f.

37 On donne l'application affine f définie par $f(-1) = 5$ et $f(2) = 2$.
1. a) Justifie que f est décroissante.
b) Déduis-en un rangement des nombres réels suivants $f(\sqrt{5})$; $f\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$; $f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Écris $f(x)$ sous la forme $ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

38 Une agence de location de voitures propose le tarif suivant : un forfait de 10 000 F CFA auquel s'ajoute 700 F CFA par kilomètre parcouru.
1. Calcule le prix à payer pour 540 km parcourus.
2. Avec un budget de 27 500 F CFA, détermine le nombre de kilomètres à parcourir.
3. On considère l'application f qui, au nombre de kilomètres parcourus d, associe le prix à payer.
Donne une expression de f, ainsi que sa nature.

39 Les clients d'une société de téléphonie ont le choix entre les deux options d'abonnement à l'internet pour un même débit.
Option A : Une somme fixe de 30 000 F CFA correspondant aux frais d'installations et d'achats du matériel et 10 000 F CFA par mois.
Option B : 15 000 F CFA par mois.
1. Détermine les applications F et G correspondant aux options A et B.
Précise leur nature.

EXERCICES

2. a) Détermine l'option la plus avantageuse pour un client qui veut juste s'abonner pour 3 mois.

b) Un client ne dispose que de 60 000 F CFA. Détermine l'option la plus avantageuse à lui conseiller

3. a) Représente graphiquement dans un même repère orthonormé les applications F et G.

b) Retrouve par lecture graphique les réponses de la consigne 2.

c) Détermine graphiquement le nombre de mois pour lequel les deux options sont équivalentes puis le nombre de mois à partir duquel l'option A est plus avantageuse. Vérifie les résultats trouvés par le calcul.

40 f est l'application affine qui à $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

1. Calcule $f(0)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(4)$.
2. Dans un repère, trace la droite (D) représentant la fonction f.
3. Lis graphiquement la valeur approchée du nombre m qui a pour image 5 par f.

41 1. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 6x + y - 440 = 0 \\ 17x + 2y - 1\,080 = 0 \end{cases}$.

2. Le prix à payer sur le réseau téléphonique "EXPRESSO" comprend une somme forfaitaire et un prix proportionnel au nombre de minutes de communication.

- Alioune a payé 440 F CFA pour une durée de 6 min ;
- Fatou a payé 540 F CFA pour une durée de 8,5 min.

a) Détermine le prix d'une minute de communication et la somme forfaitaire sur le réseau "EXPRESSO"

b) Détermine l'application affine qui définit la somme à payer en fonction du nombre de minutes de communication.

c) Représente graphiquement cette application dans un repère orthonormé.

On prendra en abscisse : 1 cm pour 2 minutes et en ordonnée : 1 cm pour 100 F CFA.

d) Détermine graphiquement la somme à payer pour 10 minutes de communication

42 Une maison d'édition veut publier un formulaire de mathématiques. Les frais de création s'élèvent à 300 000 F CFA et l'impression de chaque formulaire coûte ensuite 35 F CFA. On désigne par C le coût de production de formulaires et par R la recette de la vente de n formulaires.

1. Détermine le coût de production, C(n) de n formulaires.
2. Chaque formulaire est vendu à 65 F CFA. Calcule la recette, R(n), pour n formulaires vendus.
3. Représente graphiquement dans un même repère les applications C et R associées.
4. Détermine le nombre de formulaires que la maison d'édition doit vendre pour réaliser un bénéfice. Après une étude de marché plus approfondie, la maison d'édition souhaite commencer à réaliser des bénéfices à partir de 4 000 formulaires vendus. Détermine le prix vente de chaque formulaire.

Situation d'évaluation

43 Le gérant d'un cybercafé propose à ses clients deux types d'options :

Option I : 150 F CFA par heure d'utilisation (navigation) avec un abonnement de 3 000 F CFA.

Option II : 350 F CFA par heure d'utilisation sans abonnement.

Pour un exposé, deux élèves d'une classe de 3ᵉ ont choisi ce cybercafé pour y faire des recherches. Ils choisissent des options différentes. Chacun doit payer la même somme. Ils se demandent au bout de combien de temps ils payeront la même somme. Ils te sollicitent.

1. En notant x le nombre d'heures de navigation mensuelle, $P_1(x)$ et $P_2(x)$, les prix en francs correspondants respectivement aux options I et II, démontre que : $P_1(x) = 150x + 3\,000$ et $P_2(x) = 350x$.
2. Réponds à la préoccupation des deux camarades de classe.

Coup de Pouce

29 Augmenter x de 5 % revient à ajouter $\frac{5x}{100}$ à x.

Diminuer x de 20 % revient à retrancher $\frac{20x}{100}$ de x.

Leçon

7 Statistique

Dès l'apparition du covid-19 en Côte d'Ivoire, le Gouvernement, à travers la télévision, a communiqué chaque jour, les statistiques du nombre de cas confirmés, nombre de cas guéris et nombre de décès.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour tester un nouveau médicament contre l'hypertension chez les jeunes adultes, 50 volontaires se sont présentés. Parmi eux seuls les hypertendus seront sélectionnés pour les tests. Pour cela une infirmière a relevé la tension artérielle de chacun d'eux et a consigné les résultats dans le tableau suivant :

Tension	8,8	9	10	11,5	12,8	13,5	14,8	15	15,7	16,5
Effectif	1	2	2	4	2	4	15	6	10	4

Elle doit communiquer à son chef, le nombre de volontaires qui seront sélectionnés.

On note t la tension d'un jeune adulte quelconque :

- Si $t \leq 10{,}8$, alors il est hypotendu.
- Si $10{,}8 < t < 14{,}8$, alors il a une tension normale.
- Si $t \geq 14{,}8$, alors il est hypertendu.

L'infirmière n'a pas pu communiquer ces chiffres à son chef. De retour à la maison elle demande à sa fille en classe de 3ᵉ de l'aider. Cette dernière sollicite ses camarades de classe, et ensemble, ils décident de s'informer sur les regroupements en classes et les effectifs cumulés en statistique pour aider l'infirmière.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Effectifs cumulés croissants et fréquences cumulées croissantes

Identifier :
- les effectifs cumulés croissants ;
- les fréquences cumulées croissantes.

Dresser :
- le tableau des effectifs cumulés croissants ;
- le tableau des fréquences cumulées croissantes.

2 Médiane d'une série statistique

Identifier :
la médiane d'une statistique à caractère discret ou continu.

Calculer :
la médiane d'une série statistique à caractère discret.

Interpréter :
la médiane d'une série statistique.

3 Regroupement en classes de même amplitude

Regrouper :
les données d'une série statistique en classes de même amplitude.

Identifier :
- des classes de même amplitude ;
- une classe modale ;
- la moyenne d'une série statistique à caractère continu.

Déterminer :
la classe modale.

Calculer :
- la moyenne d'une série statistique à caractère continu ;
- la médiane d'une série statistique à caractère continu.

4 Polygone des effectifs cumulés croissants

Construire :
un polygone des effectifs cumulés croissants.

Déterminer :
la médiane d'une série statistique par lecture graphique.

5 Diagramme circulaire

Construire :
un diagramme circulaire.

Interpréter :
un diagramme circulaire.

Dresser :
le tableau des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées à partir d'un diagramme circulaire.

Traiter :
une situation faisant appel à la statistique.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 **Effectifs cumulés croissants et fréquences cumulées croissantes**

1 Activité : Effectifs cumulés croissants

Une infirmière a relevé les tensions artérielles de 50 patients hypertendus ayant rendez-vous avec leur médecin traitant, avant que ce dernier ne les reçoive. Elle a consigné les résultats dans le tableau suivant :

Tensions	14,8	15	15,7	16,5	18
Effectifs	8	9	10	16	7

1. Calcule le nombre m de patients ayant une tension inférieure ou égale à 15.
2. Calcule le nombre n de patients ayant une tension inférieure ou égale à 15,7.
3. Calcule le nombre p de patients ayant une tension inférieure ou égale à 16,5.
4. Recopie et complète la phrase suivante par le nombre du tableau qui convient :
« Les 50 patients ont tous une tension inférieure ou égale à ..... ».
5. Recopie et complète le tableau en remplaçant m, p et n par leur valeur

Tensions	14,8	15	15,7	16,5	18
Effectifs	8	9	10	16	7
	8	m	n	p	50

Synthèse

- Les nombres 8, m, n, p et 50 sont appelés **effectifs cumulés croissants.**
- Le tableau avec les effectifs cumulés croissants est appelé **tableau des effectifs cumulés croissants.**
- Les modalités étant rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé croissant d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à cette modalité.

Exercice de fixation

Une enquête auprès de 75 familles pour connaître le nombre d'enfants de la famille a donné les résultats suivants :

Nombre d'enfants	0	1	2	2	4
Nombre de familles	17	21	15	16	6

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

2 Activité : Fréquences cumulées croissantes

Reprenons le tableau de l'activité précédente :

Tension	14,8	15	15,7	16,5	18
Effectif	8	9	10	16	7

1. Dresse le tableau des fréquences.
2. a) Calcule le pourcentage de patients dont la tension est inférieure ou égale à 15.
   b) Calcule le pourcentage de patients dont la tension est inférieure ou égale à 16,5.
3. À l'exemple des effectifs cumulés croissants, dresse le tableau des fréquences cumulées correspondantes.

Synthèse

On admet que :
- Les modalités étant rangées dans l'ordre croissant, la fréquence cumulée croissante d'une modalité est la somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- Le tableau avec les fréquences cumulées croissantes est appelé tableau des fréquences cumulées croissantes.

Exercice de fixation

Une enquête auprès de 75 familles pour connaître le nombre d'enfants de la famille a donné les résultats suivants :

Nombre d'enfants	0	1	2	2	4
Nombre de familles	17	21	15	16	6

Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Activités 2 Médiane d'une série statistique

1 Activité : Médiane d'une série statistique

On considère les deux séries statistiques suivantes qui représentent les notes sur 20 de Koffi, un élève en classe de 3e, en Mathématiques et en Français au 1er trimestre, interrogations et devoirs compris :

Mathématiques	9	15	13	11	14	12	10
Français	11	12	10	13	12	11	

1. En mathématiques :
   a) Range toutes les notes de Koffi dans l'ordre croissant.
   b) Donne le nombre de notes de Koffi.
   c) Cite la note m de Koffi qui a autant de notes qui lui sont inférieures que de notes qui lui sont supérieures.
2. En français :
   a) Range toutes les notes de Koffi dans l'ordre croissant.
   b) Donne le nombre de notes de Koffi.
   c) Existe-t-il une note de Koffi qui a autant de notes qui lui sont inférieures que de notes qui lui sont supérieures ?
   d) Cite les deux notes n_1 et n_2 de Koffi qui sont telles qu'il y a autant de notes qui sont inférieures ou égale à n_1 que de notes qui sont supérieures ou égale à n_2.
   e) Calcule la demi-somme m_e de n_1 et n_2, puis marque-la entre n_1 et n_2 dans le rangement de la consigne 2. a).
   f) Compte le nombre de notes inférieures à m_e et le nombre de notes supérieures à m_e.

Synthèse

• $m = 12$; $m_e = 11,5$.
12 et 11,5 sont appelés les notes médianes de Koffi respectivement en Mathématiques et en Français.
• On appelle **médiane** d'une série statistique dont les modalités sont ordonnées, tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. La médiane d'une série statistique est toujours une modalité de cette série.
2. La moitié de l'effectif total d'une série statistique a une valeur supérieure à la médiane.
3. La médiane d'une série statistique est égale à l'effectif total divisé par 2.
4. La médiane d'une série statistique partage cette série en deux séries de même effectif.
5. La médiane d'une série statistique est un nombre.

2 Activité : Méthodes de détermination de la médiane d'une série statistique à caractère discret

En te basant sur les consignes 1. a) et b) puis 2. e) et f) de l'activité du paragraphe 2.1, propose une méthode pour déterminer une médiane d'une série statistique.

Synthèse

On admet que :
Les modalités étant rangées dans l'ordre croissant :
• Si l'effectif total N de la série est un nombre impair ($N = 2n + 1$) alors la médiane est la $(n + 1)$-ième modalité.
• Si l'effectif total N de la série est un nombre pair ($N = 2n$) alors la médiane est la demi-somme de la n -ième et de la $(n + 1)$-ième modalité.

Exercice de fixation

On considère les deux séries statistiques, ci-dessous :

Série 1	13	6	11	7	11	5	11	14	12
Série 2	13	8	15	9	11	6	8	15	

Détermine une médiane de chaque série.

Activités 3 Regroupement en classes de même amplitude

1 Activité : Classe et classe modale d'une série statistique

Un médecin a noté la tension artérielle des 50 patients qu'il a examinés pendant une journée dans son registre. On donne ci-dessous les résultats obtenus.

12,8	9	13,5	13,5	9	15	11,5	15,7	15,7	13,5
14,8	15	11,5	14,8	15,7	12,8	15,7	14,8	11,5	14,8
15	15,7	14,8	16,5	15	14,8	16,5	15,7	15	13,5
12,8	13,5	15,7	10	16,5	12,8	15	14,8	15,7	14,8
14,8	16,5	8,8	15,7	13,5	15,7	10	13,5	12,8	11,5

On dit qu'une personne de tension t :
• est hypotendu si : $8,8 \leq t < 10,8$.
• a une tension normale si : $10,8 \leq t < 12,8$.
• doit surveiller sa tension si : $12,8 \leq t < 14,8$.
• est hypertendu si : $14,8 \leq t < 16,8$.

1. Détermine le nombre de patients hypotendus examinés de cette journée.
2. Détermine le nombre de patients hypertendus examinés de cette journée.
3. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Tensions t	[8,8 ; 10,8[	[10,8 ; 12,8[	[12,8 ; 14,8[	[14,8 ; 16,8[
Effectifs				

4. Calcule l'amplitude de chacun des intervalles du tableau.
5. Détermine l'intervalle qui a le plus grand effectif.

Synthèse

- Chaque intervalle de tension dans le tableau ci-dessus est appelé **classe** de la série statistique.
- Ici les intervalles ont la même amplitude : on dit qu'on a **regroupé les modalités en classes de même amplitude**.
- La classe qui a le plus grand effectif est appelée **classe modale** de la série statistique.

Exercice de fixation

Pour les cours pratiques en basketball, un professeur d'EPS a relevé la taille, en centimètres, de chacun des élèves d'une classe de 3ᵉ. Il a obtenu les résultats ci-dessous :

173	186	159	177	165	156	157	162	165	169
159	176	151	182	164	170	176	188	174	181
184	178	186	174	155	183	186	177	167	167
161	163	167	167	167	179	169	158	172	176
154	153	171	153	157	184	160	159	182	154

On considère la série statistique qui étudie la taille de ces élèves.

1. Regroupe ces données en classes d'amplitude 10.
2. Dresse le tableau des effectifs avec le regroupement en classes.
3. Détermine les centres des classes.

2 Activité : Centre d'une classe et moyenne d'une série statistique regroupée en classes

On a relevé les hauteurs de pluie d'un mois de juin dans certaines villes de **Côte d'Ivoire**. Les résultats exprimés en millimètres sont regroupés en classes dans le tableau ci-dessous.

Hauteurs de pluie (en mm)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Nombre de villes	13	24	17	11	5

1. Calcule le nombre total des villes.
2. Calcule chacun des nombres suivants :
$c_1 = \frac{0+10}{2}$; $c_2 = \frac{10+20}{2}$; $c_3 = \frac{20+30}{2}$; $c_4 = \frac{30+40}{2}$; $c_5 = \frac{40+50}{2}$.
3. Calcule le nombre :
$$m = \frac{(13 \times c_1)+(24 \times c_2)+(17 \times c_3)+(11 \times c_4)+(5 \times c_5)}{70}.$$

Synthèse

On admet que :

- Le centre c d'un intervalle d'extrémités a et b est la demi-somme de a et b : $c = \frac{a+b}{2}$.
- Le centre d'une classe est donc le centre de l'intervalle correspondant.
- La moyenne m d'une série statistique regroupée en classe est :

$m = \frac{(n_1 \times c_1)+(n_2 \times c_2)+ ... +(n_p \times c_p)}{N}$, où N est l'effectif total, p le nombre de classes, c_1, c_2, ... et c_p les centres respectifs des classes et n_1, n_2, ... et n_p les effectifs respectifs des classes.

Exercice de fixation

On donne dans le tableau ci-dessous les durées de trajet, en minutes, entre le domicile et l'établissement des élèves d'un collège de proximité.

Durées	[0 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[
Nombre d'élèves	154	195	32	9

1. Calcule l'effectif total des élèves de ce collège.
2. Détermine les centres des classes.
3. Calcule la moyenne de cette série statistique.

3 Activité : Méthodes de détermination de la médiane d'une série statistique regroupée en classes

On a relevé les hauteurs de pluie d'un mois de juin dans certaines villes de Côte d'Ivoire. Les résultats exprimés en millimètres sont regroupés par classes dans le tableau ci-dessous.

Hauteurs de pluie (en mm)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Nombre de villes	13	24	17	11	5

1. Calcule le nombre total des villes.
2. Détermine la moitié de ce nombre.
3. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
4. Détermine la classe qui contient la médiane m.

On suppose qu'il existe une application affine f qui, à tout nombre réel associe son effectif cumulé croissant.

a) Donne $f(10)$; $f(20)$; $f(m)$.

b) Justifie que $\frac{f(m)-f(10)}{20-10} = \frac{f(20)-f(10)}{20-10}$.

5. Résous l'équation : $\frac{m-10}{35-13} = \frac{20-10}{37-13}$.

Synthèse

On admet que :
Pour déterminer la médiane d'une série statistique regroupée en classes on peut procéder comme suit :

- On calcule la moitié de l'effectif total.
- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
- On identifie la classe $[a ; b[$ qui a un effectif supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total.
- On résout l'équation : $\frac{m-a}{\frac{N}{2}-ECC_a} = \frac{b-a}{ECC_b-ECC_a}$ où ECC_a et ECC_b sont les effectifs cumulés croissants respectifs de a et b ; $\frac{N}{2}$ est la moitié de l'effectif total.
- La solution m de l'équation est la médiane de la série statistique.

Exercice de fixation

On donne dans le tableau ci-dessous les durées de trajet, en minutes, entre le domicile et l'établissement des élèves d'un collège de proximité.

Durées	[0 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[
Nombre d'élèves	154	195	32	9

1. Établis le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Détermine la médiane de la série statistique définie par le tableau.

Activités 4 Polygone des effectifs cumulés croissants

1 Activité : Cas d'une série statistique regroupée en classes

On donne ci-dessous une série statistique regroupée en classes.

Classes	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[
Effectifs	6	11	14	9	10

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Dans un repère orthogonal :
   - place le point de coordonnées (5 ; 0) ;
   - place les points dont les coordonnées sont de la forme : (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe).
3. Trace les segments reliant, dans l'ordre, les différents points.

Synthèse

- Le graphique que tu viens de construire est appelé polygone des effectifs cumulés croissants.
- Pour construire le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu :
  - on dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
  - on place dans un repère orthogonal le point de coordonnées (borne inférieure de la 1re classe ; 0), puis les points dont les coordonnées sont de la forme : (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe) ;
  - on relie les points entre eux, dans l'ordre, par des segments.

La ligne brisée obtenue est le polygone des effectifs cumulés croissants.

Exercice de fixation

On donne ci-dessous une série statistique regroupée en classes.

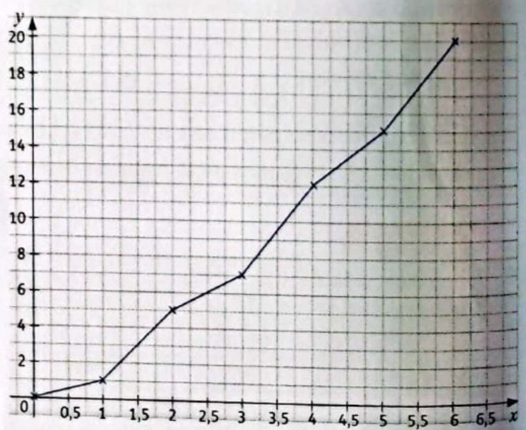
Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	5	24	20	11

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de la série définie par le tableau.

2 Activité : Détermination graphique de la médiane d'une série statistique

On donne ci-contre le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique :

1. Donne l'effectif total N de cette série statistique.
2. Calcule la moitié de l'effectif total de cette série.
3. Trace la droite (D) passant par le point de coordonnées $\left(O; \frac{N}{2}\right)$ et parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe le polygone en M.
Donne l'abscisse m du point M.
4. Justifie que m est la médiane de cette série statistique.



Synthèse

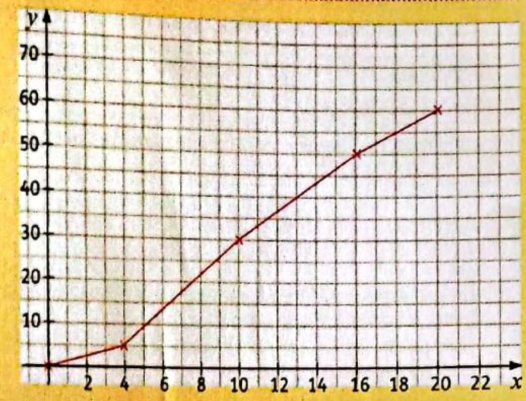
Pour déterminer graphiquement la médiane d'une série statistique d'effectif total N, à partir du polygone des effectifs cumulés croissants :
- on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $\left(O; \frac{N}{2}\right)$;
- on lit l'abscisse du point d'intersection de cette droite et du polygone.

Cette abscisse est la médiane de la série statistique.

Exercice de fixation

On donne ci-contre le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique :

1. Reproduis la figure ci-contre dans ton cahier.
2. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.



Activités 5 Diagramme circulaire

1 Activité : Construction d'un diagramme circulaire

Dans un Zoo, on a recensé quatre espèces de primates et on a compté le nombre d'individus de chaque espèce. On a résumé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Espèces de primate	Singe	Orang-outang	Chimpanzé	Macaque
Nombre d'individus	7	12	15	6

1. a) Calcule le nombre total N des primates recensés.
   b) Recopie et complète le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Espèces de primate	Singe	Orang-outang	Chimpanzé	Macaque	
Nombre d'individus	7	12	15	6	40
Mesures d'angles					360°

2. Construis un cercle de centre O et de rayon 2,5 cm.
3. Trace, dans le cercle, les secteurs angulaires de sommet O, dont les mesures correspondent à l'effectif de chaque espèce de primate.
4. a) Colorie les secteurs angulaires en des couleurs différentes.
   b) Établis une légende.
5. Dégage une méthode de construction de ce graphique.

Synthèse

Ce graphique s'appelle un diagramme circulaire.
Pour construire le diagramme circulaire correspondant à une série statistique d'effectif total N :
- on calcule la mesure $a°$ du secteur angulaire correspondant à l'effectif de chaque modalité avec la formule :
$$a = \frac{360}{N} \times \text{effectif de la modalité};$$
- on dessine ensuite les secteurs angulaires correspondants dans un cercle.

Exercice de fixation

On donne, ci-dessous, le tableau des effectifs d'une série statistique.
1. Calcule la mesure du secteur angulaire correspondant à chaque modalité.

Disciplines	Maths	Français	SVT	Anglais
Nombre de devoirs	9	6	4	5

2. Construis le diagramme circulaire correspondant à cette série statistique.

2 Activité : Tableau des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées à partir d'un diagramme circulaire.

Un professeur d'EPS a classé les 50 élèves de l'une de ses classes par taille. Il a ainsi constitué trois groupes :
- Les petits dont la taille en mètres appartient à l'intervalle [1,5 ; 1,6[.
- Les moyens dont la taille en mètres appartient à l'intervalle [1,6 ; 1,7[.
- Les grands dont la taille en mètres appartient à l'intervalle [1,7 ; 1,8[.

Il a fait une représentation sous forme de diagramme circulaire.

1. Recopie et complète, à partir du diagramme, le tableau suivant :

Groupes	Petits	Moyens	Grands	
Mesures d'angles				360°
Effectifs				50
Fréquences				100

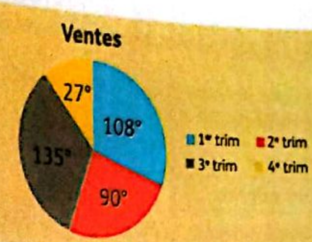
2. Établis le tableau des effectifs cumulés croissants.

Synthèse

Pour dresser le tableau des effectifs cumulés et/ou des fréquences cumulées correspondant à une série statistique d'effectif total N, à partir du diagramme circulaire :
- on calcule l'effectif de chaque modalité avec la formule :
effectif de la modalité $= a \times \frac{N}{360}$, où a est la mesure du secteur angulaire correspondant à la modalité ;
- on calcule (si c'est demandé) la fréquence de chaque modalité ;
- on dresse le tableau demandé.

Exercice de fixation

On donne, ci-après, le diagramme circulaire correspondant à la série statistique représentant la répartition des ventes de chaises d'un commerçant au cours des quatre trimestres de l'année 2020.



Dresse le tableau des effectifs et des fréquences sachant qu'il a vendu au total 5000 chaises cette année-là.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu

On donne dans le tableau ci-dessous la répartition des salaires, en milliers de francs, dans une petite entreprise.

Salaire mensuel	[90 ; 100[	[100 ; 110[	[110 ; 120[	[120 ; 130[
Nombre de salariés	9	5	7	4

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

Corrigé

Je dresse d'abord le tableau des effectifs cumulés croissants.

Salaire mensuel	[90 ; 100[
Nombre de salariés	9
Effectifs cumulés croissants	9

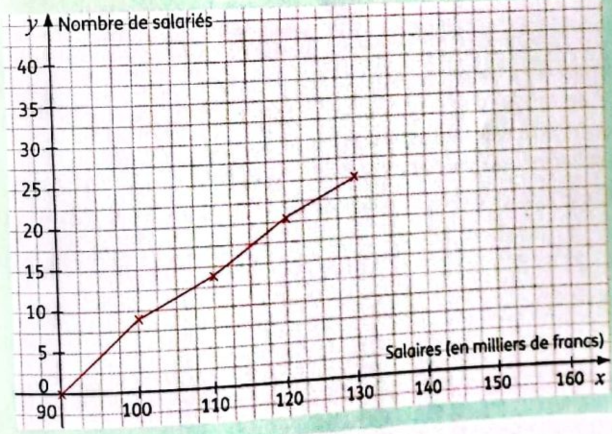
[100 ; 110[	[110 ; 120[	[120 ; 130[
5	7	4
14	21	25

Je choisis ensuite une échelle pour les axes du repère orthogonal :
- Pour l'axe des abscisses (les salaires) : 2 cm pour 10.
- Pour l'axe des ordonnées (le nombre de salariés) : 1 cm pour 2.

Ici il est bon de commencer la graduation de l'axe des abscisses par 90 au lieu de 0.
Je marque les points de coordonnées : (90 ; 0) ; (100 ; 9) ; (110 ; 14) ; (120 ; 21) et (130 ; 25).
Je trace ensuite les segments reliant ces points.

Méthode

- Pour une meilleure représentation, on peut commencer la graduation par un nombre différent de 0.



Exercice 2 — Calculer et interpréter la médiane d'une série statistique regroupée en classes

On donne dans le tableau ci-dessous la répartition des salaires, en milliers de francs, dans une petite entreprise.

Salaire mensuel	[90 ; 100[	[100 ; 110[	[110 ; 120[	[120 ; 130[
Nombre de salariés	9	5	7	4

Détermine et interprète la médiane de la série statistique définie par le tableau.

Corrigé

Je dresse d'abord le tableau des effectifs cumulés croissants.

Salaire mensuel	[90 ; 100[	[100 ; 110[	[110 ; 120[	[120 ; 130[
Nombre de salariés	9	5	7	4
Effectifs cumulés croissants	9	14	21	25

L'effectif total est 25 donc la moitié de l'effectif est 12,5.

L'effectif cumulé croissant de [100 ; 110[est 14 et la moitié de l'effectif total est 12,5 donc la médiane appartient à l'intervalle [100 ; 110[.

Appelons la médiane m.

L'effectif cumulé croissant de 100 est 9 ; celui de 110 est 14 et celui de m est 12,5.

On a donc :

$\frac{m-100}{12,5-9} = \frac{110-100}{14-9}$; ce qui donne

$\frac{m-100}{3,5} = 2$; d'où : $m = 107$.

La médiane est 107, ce qui signifie que le salaire médian dans cette entreprise est de 107 000 F. Il y a donc autant de salariés ayant un salaire inférieur à 107 000 F que de salariés ayant un salaire supérieur à 107 000 F.

Méthode

L'interprétation de la médiane dépend du sujet d'étude.

Exercice 3 — Calculer et interpréter la médiane d'une série statistique à caractère discret

On donne ci-dessous, les notes en interrogations écrites d'un élève de 3e (les interrogations étant notées sur 10) :

5 ; 8 ; 6 ; 5 ; 3 ; 8 ; 4 ; 9 ; 2 ; 7.

Détermine et interprète la note médiane de cet élève.

Corrigé

Je range les notes dans l'ordre croissant :

2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9.

Je constate qu'il y a 10 notes (10 étant pair),

la médiane est la demi-somme de la 5e et de la 6e modalité : $\frac{5+6}{2} = 5,5$

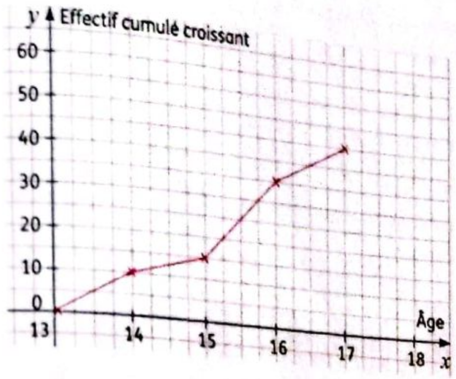
La note médiane est 5,5. L'élève a eu autant de notes inférieures à 5,5 que de notes supérieures à 5,5.

Méthode

Ranger les notes dans l'ordre croissant.

Exercice 4 — Déterminer graphiquement et interpréter la médiane d'une série statistique regroupée en classes

On donne ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique donnant la répartition des âges des élèves d'une classe de 3e.



Détermine graphiquement et interprète l'âge médian de cette classe.

Corrigé

L'effectif total est 45 donc la moitié de l'effectif total est 22,5.

Je trace la droite passant par le point de coordonnées (0 ; 22,5) et parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe le polygone en M. L'abscisse du point M est 15,3 (à peu près).

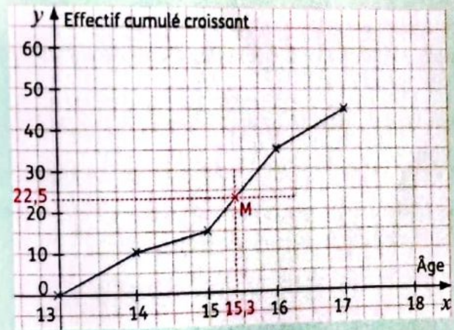
Donc l'âge médian est 15,3 ans (un peu plus de 15 ans 4 mois).

Interprétation :

Il y a autant d'élèves ayant moins de 15,3 ans que d'élèves ayant plus de 15,3 ans dans cette classe.

Méthode

- La médiane est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée $\frac{N}{2}$.



1 Effectifs cumulés croissants et fréquences cumulées croissantes

1.1. Effectifs cumulés croissants d'une série statistique

Étant donné une série statistique à caractère quantitatif discret (le caractère prend un nombre fini de valeurs) dont les modalités sont rangées dans l'ordre croissant, l'**effectif cumulé croissant** d'une modalité x est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à x.

1.2. Fréquences cumulées croissantes d'une série statistique

Étant donné une série statistique à caractère quantitatif discret (le caractère prend un nombre fini de valeurs) dont les modalités sont rangées dans l'ordre croissant, la **fréquence cumulée croissante** d'une modalité x est la somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à x ; cest aussi le rapport de l'effectif cumulé croissant de la modalité x sur l'effectif total.

2 Médiane d'une série statistique

Médiane d'une série statistique

Définition

On appelle médiane d'une série statistique dont les modalités sont ordonnées, tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

Détermination de la médiane d'une série statistique à caractère discret

Méthode

- Si l'effectif total N de la série est un nombre impair ($N = 2n + 1$) alors la médiane est la $(n + 1)$-ième modalité.
- Si l'effectif total N de la série est un nombre pair ($N = 2n$) alors la médiane est la demi-somme de la n-ième et de la $(n + 1)$-ième modalité.

3 Regroupement en classes d'une série statistique

3.1. Classe et classe modale d'une série statistique

- Lorsque les données d'une série statistique, à caractère quantitatif, sont en très grand nombre ou qu'elles peuvent avoir des valeurs approximatives, on peut les regrouper en plusieurs intervalles.
Ces intervalles sont appelés classes de la série statistique.
- La **classe modale** d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude est la classe qui a le plus grand effectif.

3.2. Centre d'une classe et moyenne d'une série statistique regroupée en classes

- Le **centre d'une classe** $[a\,;b[$ d'une série statistique regroupée en classes est la demi-somme des extrémités de cette classe, c'est-à-dire : $\frac{a+b}{2}$ (centre de l'intervalle).
- Moyenne d'une série statistique regroupée en classes :

Méthode de calcul

On donne dans le tableau ci-contre une série statistique d'effectif total N.

La moyenne m de la série statistique ci-contre est : $\frac{(n_1 \times c_1)+(n_2 \times c_2)+\ldots+(n_P \times c_P)}{N}$.

Modalités	x_1	x_2	……	x_p
Effectifs	n_1	n_2		n_p
Centres des classes	c_1	c_2		c_p

3.3. Méthode de détermination de la médiane d'une série statistique regroupée en classes

Méthode

Pour déterminer la médiane d'une série statistique regroupée en classes, on peut procéder comme suit :
- on calcule la moitié de l'effectif total ;
- on dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
- on identifie la classe $[a\,;b[$ qui a un effectif cumulé supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total ;
- on résout l'équation : $\frac{m-a}{\frac{N}{2}-ECC_a} = \frac{b-a}{ECC_b-ECC_a}$ où ECC_a et ECC_b sont les effectifs cumulés croissants de a et b ; N est l'effectif total ;
- La solution m de l'équation est la médiane de la série statistique.

4 Polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère quantitatif regroupée en classes

4.1. Cas d'une série statistique regroupée en classes

Méthode

Pour construire dans un repère orthogonal le polygone des effectifs cumulés croissants :
- On place le point de coordonnées (borne inférieure de la 1ère classe ; 0).
- Pour chaque classe, on place le point dont les coordonnées sont de la forme : (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe).
- On relie ensuite successivement les différents points entre eux par des segments.

4.2. Détermination graphique de la médiane d'une série statistique

Méthode

Pour déterminer la médiane d'une série statistique d'effectif total N, à partir du polygone des effectifs cumulés croissants :
- on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $\left(0;\frac{N}{2}\right)$;
- on lit l'abscisse du point d'intersection de la droite et du polygone ;
- cette abscisse est la médiane de la série statistique.

5.1. Construction d'un diagramme circulaire

Méthode

Pour construire le diagramme circulaire correspondant à une série statistique d'effectif total N :
- on calcule la mesure $\alpha°$ du secteur angulaire correspondant à chaque modalité avec la formule : $\alpha = \frac{360}{N} \times$ effectif de la modalité ;
- on dessine ensuite les secteurs angulaires correspondants dans un cercle (le centre de ce cercle étant le sommet de chaque secteur angulaire).

5.2. Tableau des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes

Méthode

Pour dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et/ou des fréquences cumulées croissantes correspondant à une série statistique d'effectif total N, à partir du diagramme circulaire :
- on mesure le secteur angulaire correspondant à chaque modalité ;
- on calcule l'effectif de chaque modalité avec la formule :
effectif de la modalité = $\alpha \times \frac{N}{360}$, où α est la mesure du secteur angulaire correspondant à la modalité ;
- on calcule la fréquence de chaque modalité ;
- on dresse le tableau demandé.

EXERCICES

Exercices de renforcement

1 Lors d'un devoir de Mathématiques les élèves d'une classe de 3e ont obtenu les notes suivantes :
8 ; 7 ; 8 ; 4 ; 13 ; 13 ; 10 ; 4 ; 17 ; 4 ; 11 ; 8 ; 7 ; 8 ; 4 ; 13 ; 13 ; 13 ; 10 ; 4 ; 17 ; 4 ; 11 ; 15 ; 7 ; 18 ; 6 ; 9 ; 2 ; 19 ; 12 ; 12 ; 6 ; 5 ; 18 ; 13 ; 9 ; 5 ; 11.

1. Calcule la moyenne de la classe pour ce devoir.
2. Détermine la note médiane lors de ce devoir.

2 On donne ci-dessous les notes obtenues par 13 élèves lors d'une interrogation écrite en SVT.
8 ; 9 ; 19 ; 17 ; 6 ; 18 ; 18 ; 8 ; 14 ; 12 ; 9 ; 10 ; 11.

1. Calcule la moyenne m de ces élèves au cours de cette interrogation écrite.
2. Calcule la fréquence des notes supérieures à la moyenne m. Interprète ce résultat.
3. Détermine la note médiane.

3 Le tableau ci-dessous donne le nombre de clés USB vendues en un mois, dans un magasin de ventes de matériels informatiques, selon leurs capacités de stockage.

Capacité (en Go)	4	8	16	32	Total
Nombre	60	15	50	25	
Mesure d'angle (en °)					360

1. Calcule la moyenne de la série statistique définie par le tableau.
2. Détermine la médiane de cette série.
3. Recopie et complète le tableau, puis construis le diagramme circulaire représentant ces données.

4 Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues, lors d'un devoir de Physique-Chimie, par les 27 élèves de 3e d'un collège de proximité.

Notes	6	8	10	13	14	17
Effectifs	3	5	6	7	5	1

1. Calcule la moyenne de la classe à ce devoir.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.
3. Calcule le pourcentage des élèves ayant obtenu une note strictement inférieure à 13.

5 Le professeur de français d'une classe de 3e a demandé à chacun de ses élèves de donner le nombre de livres empruntés au CDI pendant l'année scolaire précédente. Les réponses sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Nombre de livres	1	2	3	6	7
Nombre d'élèves	1	4	8	5	3

1. Calcule le nombre moyen de livres empruntés.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.
3. Combien y a-t-il d'élèves ayant emprunté :
   a) moins de 6 livres ?
   b) plus de 6 livres ?

6 Dans une ferme, on a pesé les œufs pondus par les poules pendant une journée.
Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Masses des œufs (en g)	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[
Nombre d'œufs	60	70	30	40

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes de la série statistique définie par le tableau.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de la série.

7 Dans une ferme, on a pesé les œufs pondus par les poules pendant une journée.
Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Masses des œufs (en g)	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[
Nombre d'œufs	60	70	30	40

1. Calcule la masse moyenne des œufs pondus.
2. Construis le Diagramme circulaire représentant la série statistique définie par le tableau.

EXERCICES

8 On donne le tableau statistique suivant, qui classe les élèves de la promotion 3e d'un collège par tranche d'âges.

Tranches d'âge	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[
Effectifs	52	45	32	11

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Calcule l'effectif cumulé croissant de 14. Interprète ce résultat.

9 On donne le tableau statistique suivant, qui classe les élèves de la promotion 3e d'un collège par tranche d'âge.

Tranches d'âge	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[
Effectifs	52	45	32	11

1. Calcule l'âge moyen de cette promotion.
2. Calcule et interprète l'âge médian de cette promotion.

10 Lors du traitement statistique des notes qu'il a attribuées, lors d'une interrogation écrite d'une classe de 3ème, le professeur a dressé le tableau suivant :

Notes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ;20[
Mesure d'angle (en degrés)	36	50,4	201,6	72

1. Dresse le tableau des effectifs.
2. Calcule la moyenne de la classe pour cette interrogation écrite.
3. Construis le diagramme circulaire représentant ces données.

11 Le tableau ci-dessous donne la répartition des 150 employés d'une entreprise selon leurs âges.

Âges	[20 ; 24[	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[	[40 ; 44[
Effectifs	12	30	45	36	21	6
Centre de la classe						
Fréquences (en %)						
Fréquences cumulées croissantes						

Reproduis et complète le tableau.

12 Dans une entreprise, la répartition des salaires, en milliers de francs, est donnée par le tableau suivant :

Salaires	[1000 ; 1200[	[1200 ; 1400[	[1400 ; 1600[	[1600 ; 1800[	[1800 ; 2000[	[2000 ; 2200[
Effectifs	12	20	40	18	6	4

1. Calcule le salaire moyen dans cette entreprise.
2. Calcule le salaire médian dans cette entreprise.
3. Dresse le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.
4. Calcule la fréquence cumulée croissante de 1800. Interprète ce résultat.

13 La famille Srandan a noté la masse de ses ordures, tous les mois pendant une année. Cela a donné le tableau suivant :

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Dec
Masse (en kg)	40	25	20	15	24	30	32	28	36	24	35	51

1. Calcule la masse moyenne par mois.
2. Détermine la masse médiane des ordures de cette famille.
3. L'affirmation suivante est-elle exacte :
« 50% des masses mensuelles des ordures ménagères de cette famille sont comprises entre 29 kg et 30 kg » ? Justifie ta réponse.

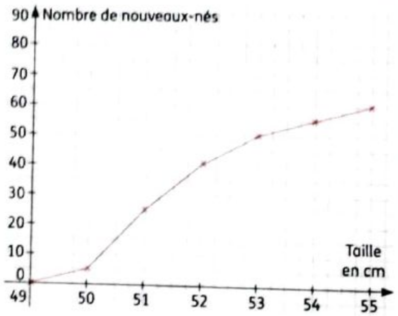
EXERCICES

14 Le tableau ci-dessous classe les 78 employés d'une entreprise suivant leur ancienneté dans l'entreprise.

Classes (en années)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[
Effectifs	20	24	14	10	8	2

1. Que signifie « Lucien appartient à la classe [15 ; 20[?
2. Dresse le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.
3. Calcule le pourcentage d'employés ayant strictement moins de 15 ans d'ancienneté.
4. Calcule le pourcentage d'employés ayant une ancienneté de 15 ans et plus.

15 Dans une maternité, les sages-femmes ont relevé la taille en cm des nouveaux-nés pendant une semaine.
Le médecin chef a construit le graphique ci-dessous représentant le polygone des effectifs cumulés croissants des données recueillies.
1. Lire sur le graphique et écris l'effectif total des nouveaux-nés.
2. À partir du graphique dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
3. Détermine graphiquement la taille médiane des nouveaux-nés.
4. Calcule la taille moyenne des nouveaux-nés.

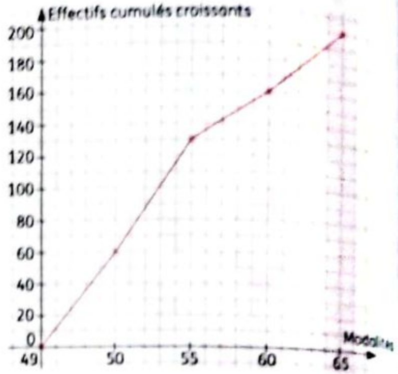


16 On donne le tableau statistique ci-dessous :

Modalités	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs							
Effectifs Cumulés Croissants	2	6	8	15	20	24	30

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
2. Calcule la moyenne de cette série statistique.
3. Calcule la médiane de cette série statistique.

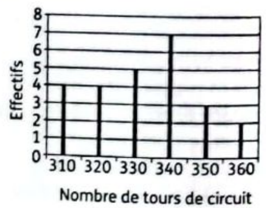
17 On donne ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique regroupée en classes dont les modalités sont des classes d'amplitude 5.



1. Lire sur le graphique et écris l'effectif total de cette série statistique.
2. Détermine graphiquement la médiane de cette série.
3. À partir du polygone ci-dessus, dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série.
4. Sachant que l'effectif de [50 ; 55[est 70, dresse le tableau des effectifs de cette série.

Exercices d'approfondissement

18 Une course automobile consiste à effectuer, en 24 heures, le plus grand nombre de tours possibles d'un circuit.
Le diagramme en bâtons ci-dessous donne le nombre de tours effectués par les 25 premières voitures.



EXERCICES

1. Recopie et complète le tableau le tableau suivant :
ECC signifie : Effectifs Cumulés Croissants

Nombre de tours	310	320	330	340	350	360
Effectifs	4					
ECC						

2. Détermine le nombre moyen de tours effectués (on en donnera ce résultat arrondi à l'ordre 0).
3. Calcule le nombre médian de tours effectués.
4. Construis le diagramme circulaire représentant ces données.

19 Dans une classe de 25 élèves, la moyenne des notes des filles lors d'une évaluation en gymnastique est égale à 11 sur 20. La moyenne des garçons pour la même évaluation est égale à 9,5 sur 20.
La moyenne de la classe lors de cette évaluation est égale à 10,4 sur 20.
Calcule le nombre de filles de cette classe.

20 On donne les informations suivantes sur deux entreprises familiales :

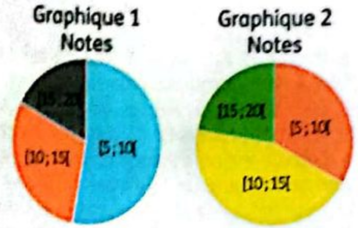
Entreprise Akolet :
- Le salaire moyen des hommes est 168 000 F CFA ;
- Le salaire moyen des femmes est 120 000 F CFA ;
- Il y a 50 hommes et 50 femmes.

Entreprise Kauphy
- Le salaire moyen des hommes est 180 000 F CFA ;
- Le salaire moyen des femmes est 132 000 F CFA ;
- Il y a 20 hommes et 80 femmes.

Détermine l'entreprise dans laquelle les employés sont, en moyenne, les mieux payés.

21 On donne, ci-dessous, les notes à l'épreuve de mathématiques au BEPC blanc des élèves de deux classes de 3ᵉ d'un collège.
3ᵉ A : 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 16 ; 18 et 19.
3ᵉ B : 11 ; 6 ; 10 ; 10 ; 13 ; 7 ; 11 ; 8 ; 7 ; 18 ; 11 ; 18 ; 12 ; 15 ; 15 ; 12 ; 7 et 8.

1. Regroupe les données de chaque classe dans un tableau des effectifs avec pour modalités des classes d'amplitude 5.
2. Calcule la moyenne en mathématiques de chacune des deux classes.
3. Calcule la note médiane dans chacune des classes.
4. Attribue à chaque classe le diagramme qui lui correspond, parmi les deux diagrammes ci-dessous. Justifie ta réponse.



22 Lors d'un concours de mathématiques comportant trois épreuves le candidat Bakan a obtenu les notes suivantes :

Épreuves	Coefficient	Notes
Configurations du plan	3	x
Activités numériques	2	7
Organisation de données	2	11

Sachant que Bakan a eu une moyenne de 12, calcule sa note x à l'épreuve de « Configurations du plan ».

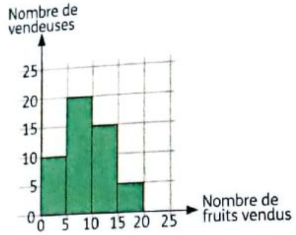
23 Pour l'admission à une école d'excellence, les élèves sont soumis à un test. Pour être admis il faut avoir au moins 12 de moyenne sur 20. Le concours comporte une partie écrite et une partie orale.
La moyenne à l'écrit étant notée x et celle de l'oral y, la moyenne générale m d'un candidat au concours est calculée par la formule : $m = \dfrac{3x+y}{4}$.

1. Gnissan a eu 10 à l'écrit et 14 à l'oral. Est-il admis ? Justifie ta réponse.
2. Koigni a été admis avec une moyenne de 8 à l'oral.
Calcule sa moyenne minimum à l'écrit.
3. Caufi a été admis avec une moyenne générale de 13 et une moyenne de 15 à l'écrit.
Calcule sa moyenne à l'oral.
4. Justifie qu'un candidat ayant les moyennes x et y est admis signifie que $3x + y \geq 48$.

EXERCICES

5. Cite deux couples $(x\ ;y)$ permettant à un candidat d'être admis dans cette école.

24 On a relevé le nombre de fruits vendus par chacune des vendeuses du marché aux fruits d'un quartier de Toumodi. Les résultats ont été illustrés par le diagramme à bandes ci-dessous.



1. À partir du diagramme, dresse le tableau des effectifs avec les modalités regroupées en classes d'amplitude 5 chacune.
2. Calcule le nombre moyen m de fruits vendus et le nombre médian m_e de fruits vendus. Construis le diagramme circulaire représentant cette situation.

Situations d'évaluation

25 Pour les épreuves physiques et sportives de l'examen du BEPC, un infirmier a fait passer des examens médicaux aux 30 élèves d'une classe de 3ᵉ d'un collège de proximité. Après les examens, l'infirmier a fait un traitement des données concernant les poids de ces élèves.

Il découvre que dans cette classe :
- Le poids moyen des élèves de cette classe est de 51 Kg.
- Le poids moyen des filles est de 55 Kg et celui des garçons est de 45 Kg.

En préparant son compte rendu à son médecin chef, il se rend compte qu'il a oublié le nombre des élèves par sexe. Inquiet, il se demande comment faire pour retrouver ces chiffres.
Sachant que tu as étudié la statistique, il sollicite ton aide.

1. En notant x le nombre de filles et y le nombre de garçons :
   a) Justifie que la somme des poids des filles est égale à $55x$ et que la somme des poids des garçons est égale à $45y$.
   b) Déduis-en l'égalité (E) : $\dfrac{55x+45y}{30}=51$.
   c) Justifie que l'égalité (E) peut être transformée en l'égalité $9x+11y=306$.
2. Justifie que x et y sont les solutions du système de deux équations du premier dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $\begin{cases}11x+9y=306\\ x+y=30\end{cases}$
3. Détermine le nombre de filles et le nombre de garçons de cette classe.

26 Un paysan met en germination 500 graines de maïs. Il doit suivre pour cela un protocole bien défini et révéler au bout de 15 jours la taille de chaque plant.
On considère qu'il a bien suivi le protocole si au bout des 15 jours :
- la taille moyenne des plants est supérieure ou égale 14 cm ;
- la taille médiane est supérieure à 15 cm ;
- moins de 25 % des plants ont une taille inférieure à 12 cm.

Au bout des 15 jours le paysan a relevé la taille de chaque plant et résumé ses résultats dans le tableau ci-dessous.

Taille (en cm)	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	30	40	70	50	60	50	50	30	50	40	30

Il veut savoir s'il a bien suivi ou pas le protocole. Ne sachant comment faire, il sollicite ton aide.
1. Calcule la taille moyenne des plants du paysan après 15 jours.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
3. Détermine la taille médiane des plants.
4. Dis en justifiant ta réponse, si le paysan a bien suivi le protocole de germination.

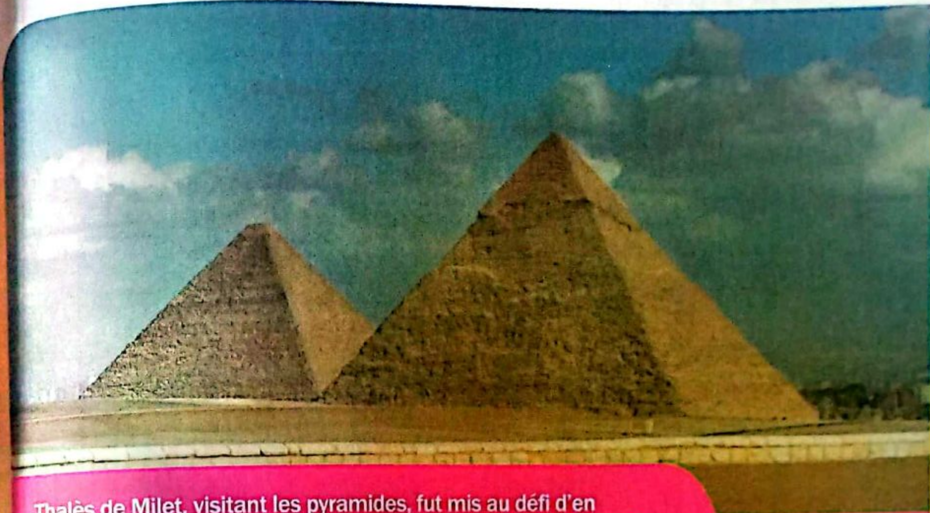
Coup de Pouce

19 En notant x le nombre de filles, complète l'égalité suivante et détermine x :
$\dfrac{11x+9,5(25-x)}{25}=\ldots$

20 Dans chaque entreprise, calcule le salaire moyen pour les deux sexes confondus.

Leçon **8**

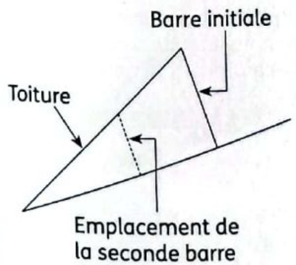
Propriété de Thalès dans un triangle



Thalès de Milet, visitant les pyramides, fut mis au défi d'en calculer la hauteur. Il aurait alors remarqué qu'à cette époque de l'année, à midi, l'ombre portée CE d'un bâton égalait la longueur DC du bâton.
Il en aurait déduit, suivant le principe de proportionnalité, qu'il en serait de même pour la hauteur AB de la pyramide et son ombre projetée BE.

Ainsi pour déterminer la hauteur de la pyramide, Thalès de Milet a utilisé l'ombre d'un bâton vertical, celle de la pyramide et une méthode de calcul basée sur une égalité de deux quotients de distances.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Un côté du toit d'une salle de classe étant défectueux, un charpentier est chargé de le renforcer. Pour ce faire, il doit fixer une barre verticale dont le pied est situé à 2 mètres de la barre verticale initiale. Malheureusement, il a oublié ses instruments de mesure à la maison et il n'arrive pas à déterminer la longueur exacte de la barre.
Les élèves d'une classe de troisième décident de l'aider à calculer la longueur de cette barre.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Propriétés de Thalès

Connaître :
- la propriété de Thalès ;
- la propriété réciproque de la propriété de Thalès ;
- la conséquence de la propriété de Thalès.

Reconnaître :
- une configuration de Thalès ;
- deux quotients égaux dans une configuration de Thalès.

Calculer :
des distances.

Démontrer :
le parallélisme de droites.

2 Partage d'un segment en des segments de même longueur

Partager :
un segment en des segments de même longueur.

Traiter :
une situation faisant appel aux propriétés de Thalès dans un triangle.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Propriétés de Thalès dans un triangle

1 Activité : Propriétés de Thalès

1\. a) - Place trois points distincts A, B et C, non alignés.
- Trace les droites (AB), (BC) et (CA).
- Place un point M sur la droite (AB) puis trace la parallèle à la droite (BC) passant par le point M ;
- Appelle N le point d'intersection de cette droite avec la droite (AC).

b) Quelles sont les différentes possibilités pour la position du point M par rapport à A et B? Pour chacune d'elles, fais un dessin sur ton cahier.

2\. Pour chaque figure ci-dessous :

a) Mesure à l'aide d'une règle graduée AM, AB, AN et AC.

b) Calcule : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

c) Compare les quotients : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

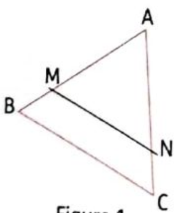


Figure 1

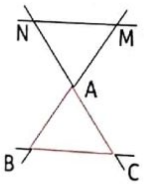


Figure 2

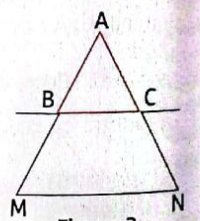


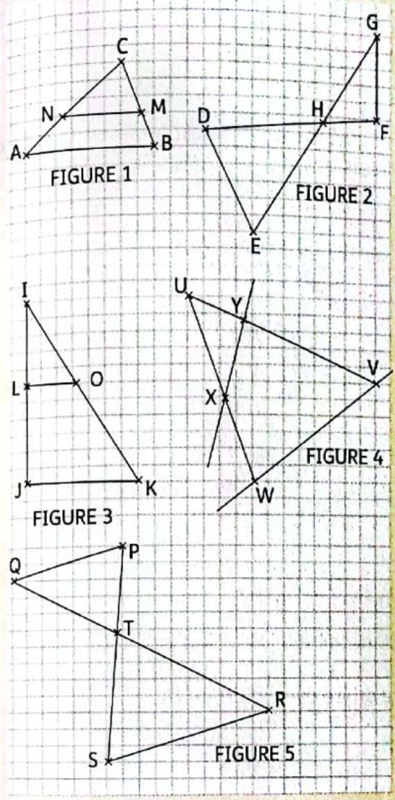
Figure 3

Synthèse

- Les trois figures obtenues à la consigne 1.b), s'appellent des configurations de Thalès.
- ABC est un triangle. Si M ∈ (AB) et N ∈ (AC) tels que (MN)//(BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Cette propriété est appelée propriété de Thalès.

Exercices de fixation

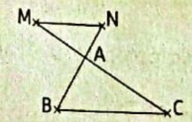
1 Parmi les figures ci-dessous, recopie les numéros de celles qui représentent une configuration de Thalès.



2 Dans chacune des configurations de Thalès ci-dessous, recopie et complète les égalités.

FIGURE 1

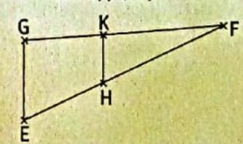
(MN) // (BC)



$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{...}$; $\frac{CM}{CA} = \frac{...}{BA}$

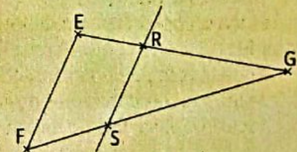
FIGURE 2

(KH) // (GE)



$\frac{FK}{...} = \frac{...}{FE}$; $\frac{GK}{GF} = \frac{...}{...}$

3 Sur la figure ci-dessous, les droites (EF) et (RS) sont parallèles. On donne : GF = 8 cm, GS = 5 cm et GE = 7 cm.
Calcule GR.



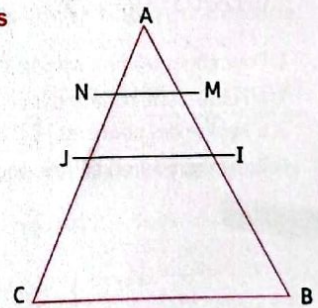
2 Activité : Conséquence de la propriété de Thalès

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et I est le milieu de [AB] et M est le milieu de [AI].
La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J et la parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

1\. Démontre que : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$.

2\. Démontre que : $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$.

3\. Déduis-en que : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

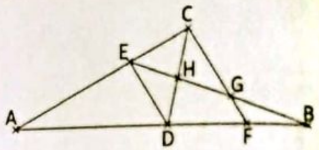


Synthèse

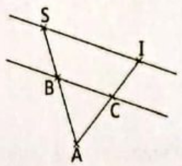
On admet que :
ABC est un triangle. Si M ∈ (AB) et N ∈ (AC) tels que (MN)//(BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exercices de fixation

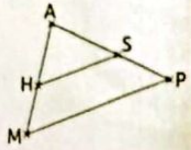
1 Écris le numéro de chaque ligne du tableau suivi de vrai si l'affirmation est Vraie ou de Faux si elle est fausse en t'appuyant sur la figure ci-dessous.

	Affirmation	Figure
1	$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AF} = \frac{ED}{CF}$	Dans la figure ci-dessous, on a (ED)//(CF) 
2	$\frac{HE}{HG} = \frac{HD}{HC} = \frac{ED}{CG}$	
3	$\frac{HC}{HD} = \frac{HE}{HG} = \frac{CE}{DF}$	

2 Sur la figure ci-dessous, les droites (SI) et (BC) sont parallèles.
Recopie et complète l'égalité suivante :
$\frac{AB}{AS} = ... = ...$



3 Sur la figure ci-dessous, AMP est un triangle, H ∈ (AM), S ∈ (AP) et (HS)//(MP).
On donne :
AS = 4 cm, AP = 7 cm et MP = 9 cm.
Calcule SH.



3 Activité : Propriété réciproque de la propriété de Thalès

Dans les deux cas de figure ci-dessous, ABC est un triangle, M ∈ (AB) et N ∈ (AC).
On donne : AB = 4 cm ; AC = 6 cm ; AM = 2 cm et AN = 3 cm.

FIGURE 1

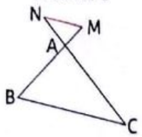
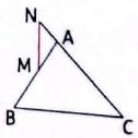


FIGURE 2



1. Pour chaque figure, compare $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.
2. À l'aide d'une règle et d'une équerre, dis dans quelle figure (MN) et (BC) sont parallèles.
3. L'égalité des quotients $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ suffit-elle pour conclure que (MN) // (AB) ?
4. Conjecture les conditions pour lesquelles les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Synthèse

On admet que :

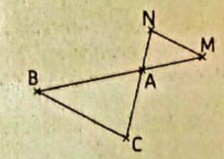
- ABC étant un triangle, M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN) // (BC).
- Il ne suffit pas de vérifier l'égalité des rapports, il faut s'assurer que les points sont bien placés dans le même ordre.

Exercices de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Si ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N un point de (AC) tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN)//(BC).
2. Si ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que les points A, B et M d'une part et les points A, C et N d'autre part, sont alignés dans le même ordre et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN)//(BC).
3. Si ABC est un triangle, M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et la position de M par rapport à A et B est la même que celle de N par rapport à A et C, alors (MN) // (BC).

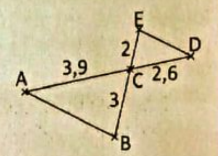
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle. M est un point de (AB) et N un point de (AC).
On donne AM = 3 cm, AN = 5 cm, AB = 12 cm et AC = 20 cm.
On veut démontrer que les droites (MN) et (AB) sont parallèles.
Recopie et complète la démonstration suivante :



$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{12} = \frac{...}{...}$; $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{20} = \frac{...}{...}$

On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{...}{...}$; de plus, la position du point M par rapport à A et B est la même que celle de .... par rapport à ..... et ..... .
Donc d'après ...., les droites...........et .... sont parallèles.

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles, les droites (AD) et (BE) sont sécantes en C.
Utilise les informations portées sur la figure pour démontrer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.



Activité 2 Partage d'un segment en des segments de même longueur

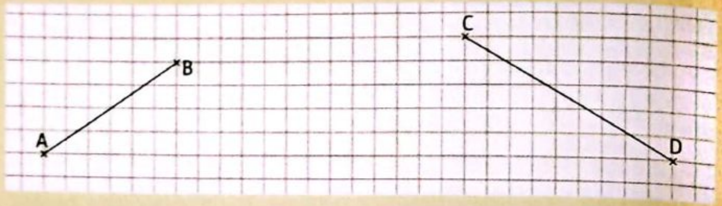
1. Construis un segment [AB]. A× ×B
2. On se propose de le partager en trois segments de même longueur avec une équerre, une règle non graduée et un compas.
   a) Trace une demi-droite d'origine A, de support sécant à la droite (AB).
   b) Choisis pour unité un écartement de compas et sur cette demi-droite, en partant du point A place trois traits de graduation puis marque le point M sur le dernier trait de graduation.
   c) Trace la droite (MB) puis toutes les parallèles à cette droite qui passent par les traits de graduation.
   d) Ces parallèles partagent le segment [AB] en trois segments. À l'aide du compas, compare les longueurs de ces trois segments.
   e) Justifie les constats faits précédemment.
3. Dégage une méthode pour partager un segment en des segments de même longueur.

Synthèse

Pour partager un segment en des segments de même longueur, on peut suivre les étapes de cette activité.

Exercices de fixation

1 Reproduis et partage le segment [AB] en 5 segments de même longueur et le segment [CD] en 7 segments de même longueur.

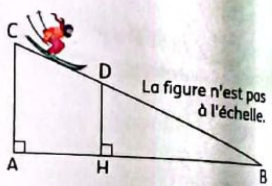


2 Trace un segment [PQ] de longueur 7 cm.
À la règle et au compas, partage [PQ] en six segments de même longueur.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Calculer des distances

Un skieur descend d'une piste rectiligne représentée ci-contre par le segment [BC] de longueur 1 200 m. À son point de départ C, le dénivelé par rapport au bas de la piste, donné par la longueur AC, est de 200 m. Après une chute, il est arrêté au point D sur la piste. Le dénivelé, donné par la longueur DH, est alors de 150 m.
Calcule la longueur DB qu'il lui reste à parcourir.



Corrigé

D'après les informations portées sur la figure, (AC) ⊥ (AB) et (DH) ⊥ (AB) ; on en déduit donc que (AC)//(DH).
ABC est un triangle. D est un point de (BC) et H est un point de (AB).

Comme (AC)//(DH), alors d'après la conséquence de la propriété de Thalès
$\frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BA} = \frac{DH}{CA}$

Soit $\frac{BD}{1200} = \frac{BH}{BA} = \frac{150}{200}$;

d'où $\frac{BD}{1200} = \frac{150}{200}$.

Par conséquent $BD = \frac{1200 \times 150}{200}$.

Donc $BD = \frac{180000}{200}$;

BD = 900.

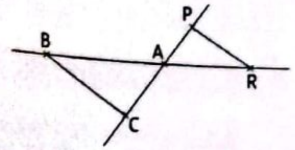
En conclusion, la longueur DB qu'il lui reste à parcourir est de 900 m.

Méthode

Pour calculer une distance dans une configuration de Thalès :
1. On énonce la propriété et on écrit les rapports égaux.
2. On remplace les longueurs connues par leurs valeurs numériques.
3. On réalise un produit en croix pour obtenir la distance cherchée.

Exercice 2 Justifier que des droites sont parallèles

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle, P est un point de (AC) et R est un point de (AB).
On donne : AC = 2,4 cm ; AB = 5,2 ; AR = 2,6 et AP = 1,2 cm.
Démontre que les droites (BC) et (PR) sont parallèles.



Corrigé

B, A, R d'une part et C, A, P d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On a : $\frac{AB}{AR} = \frac{5,2}{2,6} = 2$ et $\frac{AC}{AP} = \frac{2,4}{1,2} = 2$,

d'où $\frac{AB}{AR} = \frac{AC}{AP}$.

Ainsi ABC est un triangle, P est un point de (AC) et R est un point de (AB) tels que la position de P par rapport à A et C est la même que celle de R par rapport à A et B et $\frac{AB}{AR} = \frac{AC}{AP}$.

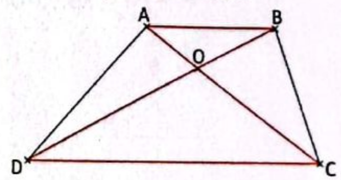
Donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (BC) et (PR) sont parallèles.

Méthode

Pour démontrer que les droites (BC) et (PR) sont parallèles :
- On s'assure que les points B, A, R et C, A, P sont alignés dans le même ordre.
- On compare $\frac{AB}{AR}$ et $\frac{AC}{AP}$.
- On conclut, à l'aide de la réciproque de la propriété de Thalès.

Exercice 3 Appliquer la réciproque de la propriété de Thalès pour justifier la nature d'une figure

Les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ci-contre se coupent en O.
On donne :
OA = 3 cm ; OB = 4,5 cm ; OC = 7 cm et OD = 10,5.
Démontre que le quadrilatère ABCD est un trapèze.



(Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles. Ces deux côtés parallèles sont appelés bases du trapèze).

Corrigé

D'après les données, les points B, O, D sur la droite (BD) sont dans le même ordre que les points A, O, C de la droite (AC).

On a : $\frac{OD}{OB} = \frac{10,5}{4,5} = \frac{7}{3} = \frac{OC}{OA}$.

DOC est un triangle, B est un point de (DO) et A est un point de (OC) tels que la position de B par rapport à O et D est la même que celle de A par rapport à O et C et $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA}$.

Donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Par conséquent le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC].

NB : On peut considérer le triangle AOB et appliquer la réciproque de la propriété de Thalès pour conclure que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Méthode

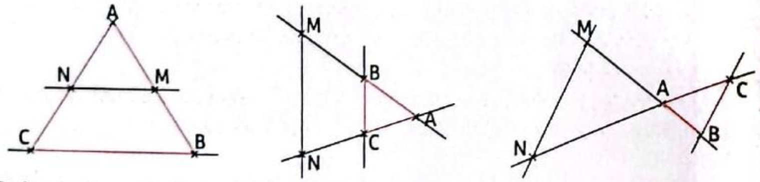
Pour démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze, on démontre que les droites (AB) et (DC) sont parallèles en utilisant la réciproque de la propriété de Thalès.

1 Propriétés de Thalès dans un triangle

1.1. Propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).
Si (MN) // (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

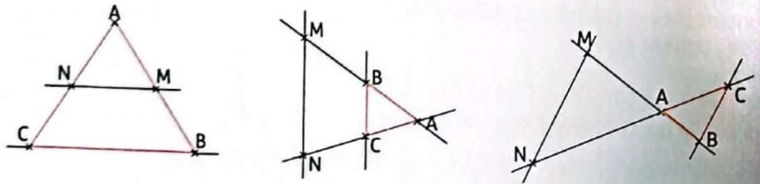


NB : Les trois cas de figure ci-dessus sont appelés configurations de Thalès.

1.2. Conséquence de la propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC).
Si (MN) // (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Remarque

La propriété de Thalès et la conséquence de la propriété de Thalès permettent de calculer des longueurs dans un triangle, à condition d'avoir deux droites parallèles.

1.3. Réciproque de la propriété de Thalès

Propriété

ABC est triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN) // (BC).

Remarque

La réciproque de la propriété de Thalès permet de justifier que deux droites sont parallèles.

2 Partager un segment en des segments de même longueur

Point méthode

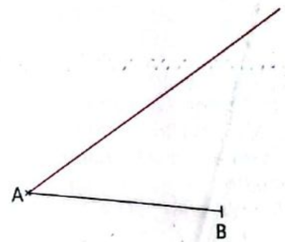
A et B sont deux points distincts, n est un entier naturel supérieur à 1.
Pour partager un segment [AB] en n segments de même longueur, on peut procéder comme suit :

- On trace une demi-droite d'origine A de support sécant à la droite (AB).
- On choisit pour unité un écartement de compas et, en partant du point A, on place sur cette demi-droite n traits de graduation puis on marque le point M sur le dernier trait.
- On trace la droite (MB).
- On trace toutes les parallèles à cette droite (BM) qui passent par les traits de graduation.
- Ces parallèles partagent le segment [AB] en n segments de même longueur.

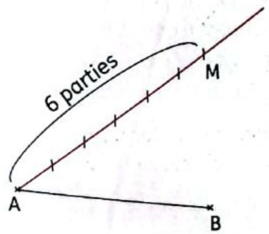
Exemple

Partageons le segment [AB] en six segments de même longueur.

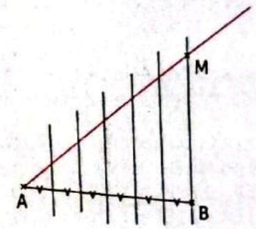
1.



2.



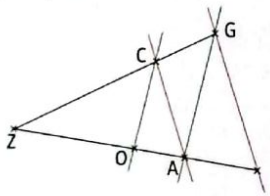
3.



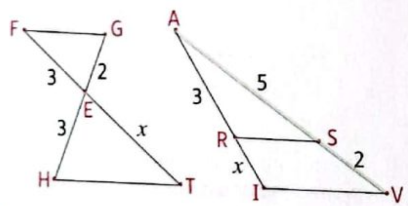
EXERCICES

Exercices de renforcement

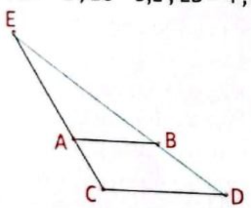
1 Sur la figure ci-dessous, les droites représentées en vert sont parallèles ainsi que celles en rouge.
a) Décris les deux configurations de Thalès présentes dans cette figure.
b) Écris tous les rapports de longueurs égaux à $\frac{ZC}{ZG}$. Tu préciseras les droites parallèles que tu as utilisées.



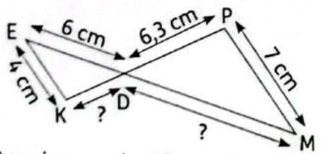
2 Calcule x dans chacune des configurations de Thalès ci-dessous :



3 Dis si dans les cas suivants, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Justifie ta réponse.
1er cas : EA = 12 ; EC = 23 ; EB = 3 ; ED = 4.
2ème cas : EA = 2 ; EC = 3,2 ; EB = 4 ; ED = 6.



4 Sur la figure ci-dessous :
D ∈ [PK], D ∈ [EM] et (PM)//(EK).

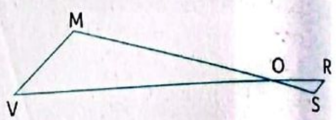


Détermine, en justifiant chaque réponse, les longueurs KD et DM.

5 Soit ABC un triangle tel que :
AB = 5,2 ; BC = 3,9 et AC = 4,8. M est le point du côté [AC] tel que AM = 4.
1. La parallèle à (BC) passant par M coupe le côté [AC] en N. Calcule MN.
2. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (MN) en I et (BC) en J. Calcule $\frac{AI}{AJ}$.

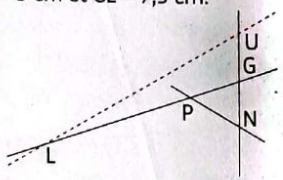
6 ABC est un triangle tel que :
AB = 7 cm ; BC = 6 cm et AC = 4 cm.
Soit E le point de [AC] tel que : CE = 3 cm.
La parallèle à (AB) passant par E coupe [BC] en F.
Calcule CF et EF.

7 Sur la figure ci-dessous,on a :



MO = 7,5 cm ; OV = 18 cm ; OS = 1,5 cm et OR = 3,6 cm ; RS = 3cm.
1. Justifie que les droites (MV) et (RS) sont parallèles.
2. Calcule : VM.

8 Sur la figure ci-dessous, G, P et L d'une part et G, N et U d'autre part sont alignés.
On suppose que : GP = 2,5 cm ; GU = 9 cm ; GN = 3 cm et GL = 7,5 cm.

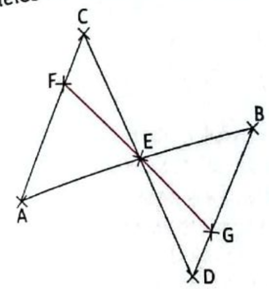


a) Calcule $\frac{GP}{GL}$ et $\frac{GN}{GU}$.
b) Pourquoi ne peux-tu pas utiliser ici la réciproque de la propriété de Thalès ?

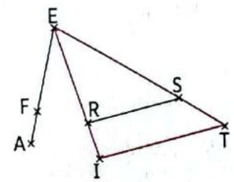
9 Sur la figure ci-après, qui n'est pas en vraie grandeur, les droites (AC) et (BD) sont parallèles. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en E. Le point G appartient au segment [BD] et le point F appartient au segment [AC] de telle sorte que les points F, E et G soient alignés. On donne également :
ED = 6 cm, EC = 6 cm, EF = 5 cm et EB = 5 cm.

EXERCICES

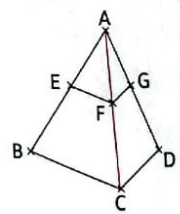
1. Calcule la longueur EA.
2. Calcule la longueur EG.
3. Les droites (BC) et (AD) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.



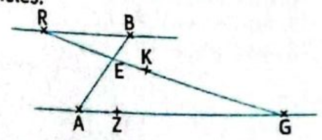
10 Sur la figure ci-dessous, EIT est un triangle et les droites (RS) et (IT) sont parallèles.
On donne : RS = 2,8 cm ; IT = 4,4 cm ; EF = 2,1 cm ; EA = 3,3 cm.
a) Calcule le rapport $\frac{ER}{EI}$.
b) Démontre que les droites (FR) et (AI) sont parallèles.



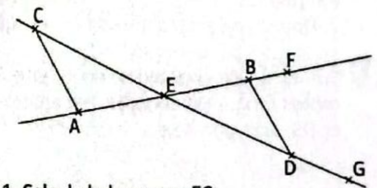
11 Sur la figure ci-dessous :
• ABC et ACD sont deux triangles ;
• E, F et G appartiennent respectivement aux segments [AB], [AC] et [AD] ;
• (EF)//(BC) et (FG)//(CD).
1. Démontre que : $\frac{AD}{AG} = \frac{AB}{AE}$.
2. Déduis-en que les droites (EG) et (BD) sont parallèles.



12 Sur la figure ci-après, les droites (AG) et (RB) sont parallèles ; les droites (AB) et (RG) se coupent en E.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : BE = 3 ; AE = 5 ; AG = 10 et EG = 8.
a) Calcule les distances RB et RE.
b) On donne : GK = 6,4 et GZ = 8.
Démontre que les droites (ZK) et (AE) sont parallèles.

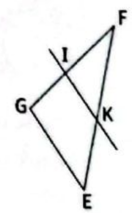


13 Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, les droites (AC) et (BD) sont parallèles. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en E. On donne également :
BE = 4 cm, AE = 5 cm, DE = 6 cm, DG = 2 cm et BF = 1 cm.



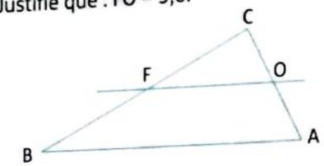
1. Calcule la longueur EC.
2. Les droites (AC) et (FG) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

14 Réordonne les séquences suivantes en recopiant simplement la lettre correspondante pour obtenir la rédaction d'un exercice traité portant sur la justification de deux droites parallèles :
a) tels que la position de I par rapport à F et G ;
b) EFG est un triangle ;
c) On a : $\frac{FI}{FG} = \frac{2}{3}$ et $\frac{FK}{FE} = \frac{2}{3}$;
d) et K appartient à la droite (FE) ;
e) les droites (IK) et (EG) sont parallèles ;
f) d'où on a : $\frac{FI}{FG} = \frac{FK}{FE}$;
g) I appartient à la droite (FG) ;
h) D'après la propriété de la réciproque de Thalès ;
i) est la même que celle de K par rapport à F et E.



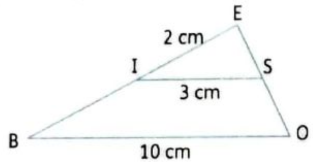
EXERCICES

15 L'unité de longueur est le centimètre.
Observe bien la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles.
On donne : CO = 3 ; CA = 5 ; CB = 8 ; AB = 6 et (OF) // (AB).
1. Justifie que : CF = 4,8.
2. Justifie que : FO = 3,6.



16 1. Trace un segment [AB] de longueur 8 cm puis partage-le en sept segments de même longueur.
2. Donne ton programme de construction.

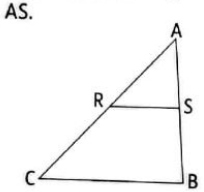
17 Sur la figure ci-dessous, on a noté différentes longueurs connues. Les droites (BO) et (IS) sont parallèles.



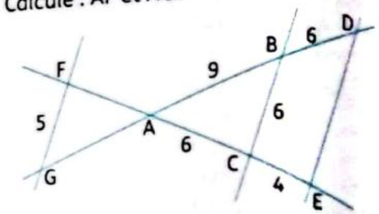
Calcule EB.

18 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles :
- ABC est un triangle.
- S ∈ [AB].
- R ∈ [AC].
- (SR)//(BC).
- AB = 8 ; AC = 12 et AR = 5.

Calcule AS.

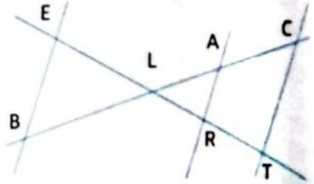


19 1. Observe la figure ci-après.
a) Calcule : $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{AC}{AE}$.
b) Déduis-en que : (BC) // (DE).
2. Détermine : DE.
3. Les droites (FG) et (BC) sont parallèles.
Calcule : AF et AG.

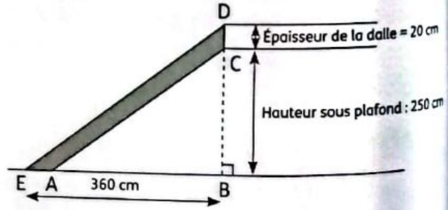


20 L'unité de longueur est le centimètre.
Dans la figure ci-dessous :
- Les droites (AR) et (CT) sont parallèles.
- Les points E, L , R et T sont alignés.
- Les points C, A , L et B sont alignés.

De plus, on donne : LC = 6 ; LA = 4,8 ; LE = 3 ;
LT = 9 et LB = 2.
1. Calcule LR.
2. Les droites (EB) et (CT) sont-elles parallèles. Justifie ta réponse.



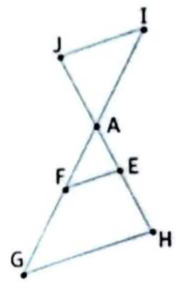
21 Jérémie souhaite réaliser un escalier pour monter à l'étage de son appartement. Il a besoin pour cela de connaître les dimensions du limon (planche dans laquelle viendront se fixer les marches de cet escalier).
Il réalise le croquis ci-dessous.
Sur ce croquis :
- Le limon est représenté par le quadrilatère ACDE.
- Les droites (AC) et (ED) sont parallèles.
- Les points E, A et B sont alignés.
- Les points B, C et D sont alignés.



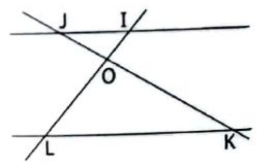
Sachant que ED = 450 cm, calcule les deux dimensions AE et AC.

EXERCICES

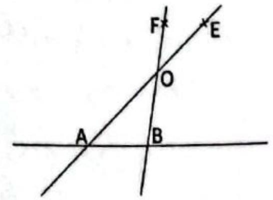
22 1. Les droites (IG) et (JH) se coupent en A.
Le point E est sur la droite (JH) et le point F appartient à la droite (IG).
On a : AE = 3 cm ; AF = 4 cm ; AH = 7 cm et EF = 6 cm.
Calcule AG et HG (Donne les résultats sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible).
2. On a : AI = 6 cm et AJ = 4,5 cm.
Les droites (IJ) et (EF) sont-elles parallèles ?
Justifie ta réponse.



23 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraies grandeurs, on a :
OI = 2,4 ; OJ = 5,2 ; OK = 7,8 ; OL = 3,6 ; KL = 9.
1. Justifie que les droites (KL) et (IJ) sont parallèles.
2. Calcule IJ.

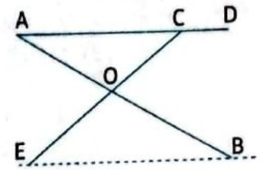


24 L'unité est le centimètre.
Les points E, O, A, C d'une part et F, O, B, D d'autre part sont alignés dans cet ordre.
De plus les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
OA = 2,4 ; OC = 6 ; OD = 5 ; AB = 1,5 ;
OE = 1,8 et OF = 1,5.
1. Calcule : OB et CD.
2. Démontre que : (EF) // (CD).



25 La figure ci-dessous donne le schéma d'une table à repasser. Le segment [AD] représente la planche. Les segments [AB] et [EC] représentent les pieds.
Les droites (AB) et (EC) se coupent en O.
On donne :

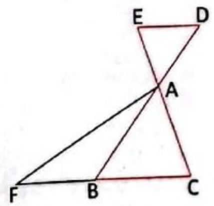
AD = 125 cm	OB = 72 cm
AC = 100 cm	OE = 60 cm
OA = 60 cm	OC = 50 cm



1. Démontre que : (AC) // (EB).
2. Calcule EB.

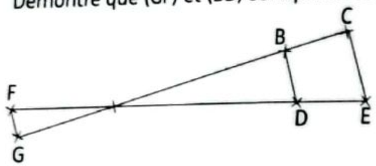
26 L'unité de longueur est le centimètre.
La figure suivante n'est pas réalisée en vraies grandeurs.
- Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
- C, B et F sont alignés dans cet ordre tel que BF = 6 ; AB = 8 ; BC = 9 ; AC = 6 et AE = 4.

1. Calcule AD .
2. a) Démontre que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
b) Justifie que : EF = $\frac{40}{3}$.

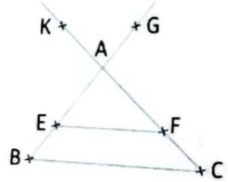


EXERCICES

27 Les longueurs sont données en centimètres.
On sait que les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
On donne : OB = 7,2 ; OC = 10,8 ; OD = 6 et CE = 5,1.
On ne demande pas de faire une figure en vraies grandeurs.
1. Calcule OE puis BD.
2. On donne : OG = 2,4 et OF = 2.
Démontre que (GF) et (BD) sont parallèles.

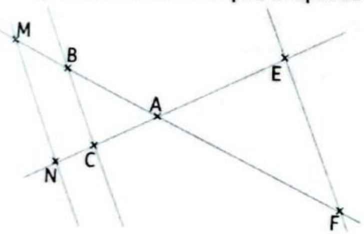


28 Sur la figure ci-dessous :
- les points K, A, F, C sont alignés ;
- les points G, A, E, B sont alignés ;
- (EF) et (BC) sont parallèles ;
- AB = 5 et AC = 6,5 ;
- AE = 3 et EF = 4,8 ;
- AK = 2,6 et AG = 2.



1. Démontre que : BC = 8.
2. Les droites (KG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

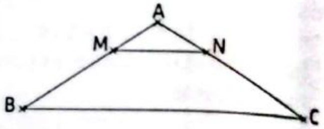
29 La figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraies grandeurs. Elle n'est pas à reproduire.



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. On donne : AB = 4,5 cm; AC = 3 cm; AN = 4,8 cm et MN = 6,4 cm.
1. Calcule AM et BC.
2. On sait de plus que AE = 5 cm et AF = 7,5 cm. Démontre que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercices d'approfondissement

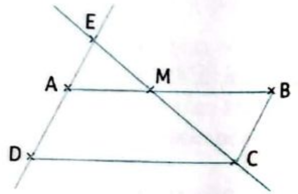
30 Dans le triangle ABC ci-dessous, on donne : AB = 6 cm et BC = 9 cm.
M est le point de [AB] tel que : AM = 2 cm.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.



a) Calcule MN.
b) Calcule la valeur exacte de $\frac{AN}{AC}$.
c) On suppose que [NC] mesure 4,4 cm. Calcule : AN et AC.

31 a) Construis un triangle ROC et un triangle ARC de telle sorte que les points A et O soient placés de part et d'autre de la droite (RC).
b) Place un point F sur [AR].
La parallèle à (AC) passant par F coupe [RC] en G et la parallèle à (OC) passant par G coupe [RO] en H.
c) Justifie que : $\frac{RF}{RA} = \frac{RG}{RC}$ et $\frac{RG}{RC} = \frac{RH}{RO}$.
d) Démontre que les droites (FH) et (OA) sont parallèles.

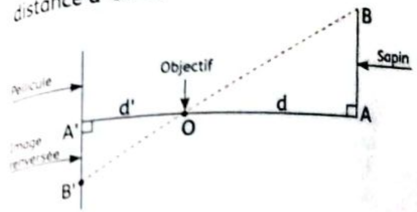
32 Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle :
- ABCD est un parallélogramme ;
- AB = 8 cm ; AD = 4,5 cm ;
- E est le point de la droite (AD) tel que AE = 1,5 cm ;
- E n'est pas sur le segment [AD] ;
- La droite (EC) coupe le segment [AB] en M.



1. Justifie que les droites (AM) et (DC) sont parallèles.
2. Calcule AM.

EXERCICES

33 Voici un schéma du fonctionnement d'un appareil photographique argentique : un objet [AB] situé à une distance d de l'objectif O a une image [A'B'] située à une distance d' de O.

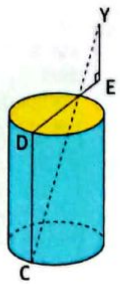


a) Démontre que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
b) Démontre l'égalité : $\frac{d}{d'} = \frac{AB}{A'B'}$.
c) Pour un certain appareil, d' = 50 mm. Un sapin d'une hauteur de 12 m se trouve à 15 m de l'objectif.
Quelle est la hauteur de l'image qui se forme sur la pellicule ?

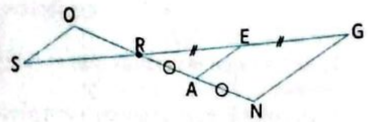
34 Soit ABC un triangle tel que : AC = 11 cm ; AB = 7 cm et BC = 8 cm.
Soit M un point du segment [BC]. On pose : BM = x.
La parallèle à (AC) passant par M coupe [AB] en P et la parallèle à (AB) passant par M coupe [AC] en Q.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M pour que MP + MQ soit égale à 9 cm.
a) Exprime MP et MQ en fonction de x.
b) Détermine la position du point M sur le segment [BC] à l'aide d'une résolution d'équation.

35 [AD] est un diamètre d'un puits de forme cylindrique.
Le point C est à la verticale de D, au fond du puits. Une personne se place en un point E de la demi-droite [DA) de sorte que ses yeux soient alignés avec les points A et C.

On note Y le point correspondant aux yeux de cette personne.
On sait que : AD = 1,5 m ; EY = 1,7 m et EA = 0,6 m.
a) Démontre que les droites (DC) et (EY) sont parallèles.
b) Calcule DC, la profondeur du puits.



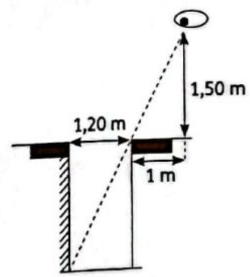
36 On donne la figure ci-dessous.



Calcule AE et RS sachant que :
GN : 5 cm ; OS = 3,2 cm ; RE = 5 cm ;
mes $\widehat{REA}$ = 36° ; mes $\widehat{RSO}$ = 36°.

37 L'unité de longueur est le centimètre.
EFG est un triangle tel que EF = 9 ; EG = 6 et FG = 6,9.
A ∈ [EF] et B ∈ [EG] tels que EA = 3 et EB = 2.
1. Faire la figure en grandeur réelle.
2. Justifie que les droites (AB) et (FG) sont parallèles.

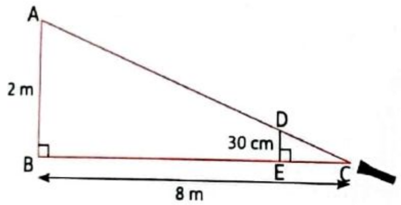
38 Voici une technique utilisée dans l'antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits.
En plaçant son œil à 1 m 50 de hauteur et à 1 m du bord du puits de 1 m 20 de diamètre, le bord du puits cache juste la ligne du fond.
Détermine la profondeur du puits.



39 Un marionnettiste doit faire un spectacle sur le thème de l'ombre. Pour cela, il a besoin que sa marionnette de 30 cm ait une ombre de 1,2 m.

La source de lumière C est située à 8 m de la toile (AB). La marionnette est représentée par le segment [DE].

1. Justifie que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
2. Calcule EC pour savoir où il doit placer sa marionnette.



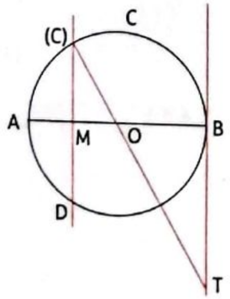
40 La figure ci-dessous n'est pas à refaire sur la copie. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.

Le rayon du cercle (C) de centre O est égal à 3 cm.

[AB] est un diamètre de ce cercle. Les points C et D appartiennent au cercle et la droite (CD) est la médiatrice du rayon [OA].

La droite (OC) coupe en T la tangente au cercle (C) au point B.

1. Justifie que (CM) et (BT) sont parallèles.
2. Calcule OT.



41 L'unité de longueur est le mètre.

Monsieur KANGA, un cultivateur dans la région de Daloa, invite son neveu Éric, élève en classe de troisième, à passer un week-end chez lui pour l'initier à l'hydroponie (culture de plantes réalisée sans le support sol).

Une fois chez son oncle, Éric remarque que celui-ci utilise une échelle en bois de longueur L construite sur un flanc de la maison soutenue par deux planches de longueurs 3,6 m et 5,4 m, lui permettant de faire l'hydroponie sur le toit de sa maison. (Voir figure ci-dessous).

Cependant, en regardant le plan de construction présenté par son oncle, il constate que certaines valeurs ont été effacées. Afin de faciliter une réhabilitation de la construction en cas de dégradation, Éric veut connaître la longueur précise de l'échelle.

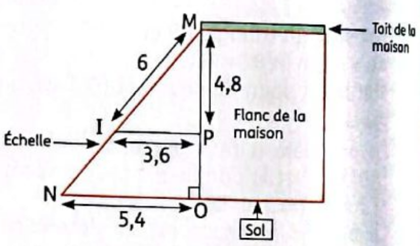
On donne :

MI = 6 ; MP = 4,8 ; IP = 4,8 ; NO = 5,4 et MN = L

1. Le triangle MNP est rectangle en P.

Justifie que les droites (IP) et (NO) sont parallèles.

2. Calcule la longueur de l'échelle utilisée par l'oncle d'Éric.



Plan de la construction

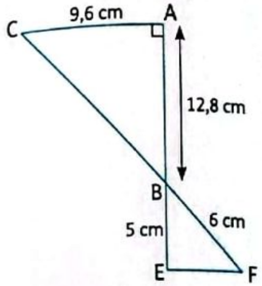
42 Sur la figure ci-après qui n'est pas en grandeurs réelles :

- ABC est un triangle rectangle en A.
- AC = 9,6 cm ; AB = 12,8 cm ; EB = 5 cm et BF = 6,25 cm.

1. Justifie que BC = 16 cm.
2. a) Calcule puis compare $\frac{BA}{BE}$ et $\frac{BC}{BF}$.

   b) Justifie que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

3. Justifie que le triangle BEF est rectangle.
4. Sachant que $\frac{AC}{EF} = 2,56$; Calcule EF.



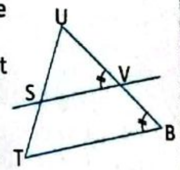
43 L'unité de longueur est le centimètre.

La figure ci-contre n'est pas en grandeurs réelles.

On donne :

US = 12 ; ST = 8 et SV = 9.

1. Justifie que les droites (BT) et (SV) sont parallèles.
2. Calcule TB.



44 Kpan se promène en montagne et aimerait connaître la hauteur d'un manguier situé devant lui. Pour cela, il utilise un bâton et prend quelques mesures au sol. Il procède de la façon suivante :

*Il pique le bâton en terre, verticalement, à 12 mètres du manguier.

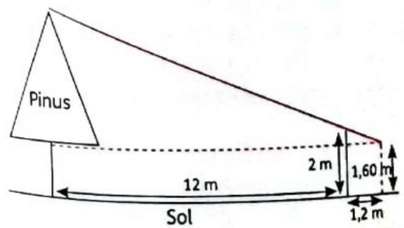
*La partie visible (hors du sol) du bâton mesure 2 m.

*Kpan se place derrière le bâton, de façon à ce que son œil, situé à 1,60 m au-dessus du sol, voit en alignement le sommet de l'arbre et l'extrémité du bâton.

*Kpan marque sa position au sol, puis mesure la distance entre sa position et le bâton. Il trouve 1,2 m.

On peut représenter cette situation à l'aide du schéma ci-dessous :

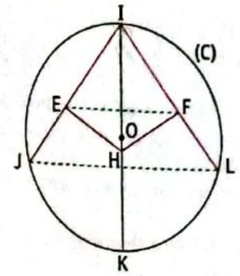
Calcule la hauteur du manguier au-dessus du sol.



45 On considère la figure ci-dessous.

- (EH) // (JK) et (HF) // (KL).
- [IK] est un diamètre du cercle (C).
- IJ = 6 ; IL = 9 ; IH = 7,5 et HK = 2,5.

1. Détermine la nature du triangle IKL.
2. Justifie que IE = 4,5.
3. Calcule IF.
4. Démontre que (JL)//(EF).
5. Sachant que JL = 10, calcule EF.



Situations d'évaluation

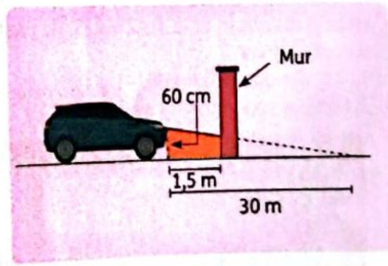
46 D'après le Code de la route : les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit, sur une distance minimale de 30 m.

Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Charles veut tracer un repère sur le mur au fond de son garage.

La figure n'est pas en grandeur réelle.

Les feux de croisement sont à 60 cm du sol.

Détermine la hauteur à laquelle il doit placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares.

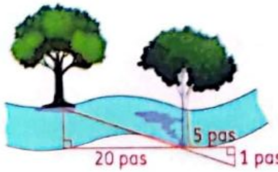


47 Par un beau dimanche ensoleillé, Hervé se promène au bord d'une rivière.

Il veut connaître la largeur de cette rivière.

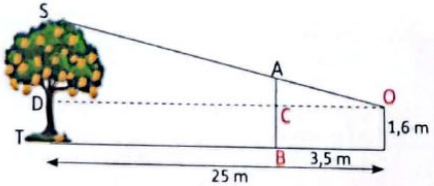
EXERCICES

Il prend des repères, compte ses pas et dessine le schéma ci-dessous.



a) Détermine en nombre de pas, la largeur de la rivière qu'obtient approximativement Hervé.
b) Hervé estime la longueur de son pas à 65 cm.
Donne une valeur approximative de la largeur de cette rivière, au centimètre près.

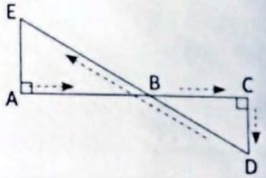
48 Au Lycée Municipal de Port Bouet, Hélène veut connaître la hauteur ST d'un manguier perpendiculaire au sol.



Pour cela, elle se place à 25 m du pied (T) de l'arbre sur un sol horizontal. Son œil (O) étant situé à 1,6 m du sol, sa sœur plante verticalement un bâton [AB], perpendiculaire au sol de 2,5 m de hauteur situé à 3,5 m d'elle de manière que son œil (O), l'extrémité A du bâton et le sommet (S) de l'arbre soient alignés.
1. Justifie que (ST) // (AB).
2. Déduis-en la hauteur de l'arbre.

49 Lors des olympiades organisées par le Lycée Moderne de Cocody, des élèves ont pris part à l'épreuve du marathon.

Jonas, un élève de 3^e, était avec le professeur d'EPS chargé de cette épreuve. Il a pu voir, sur une feuille, le trajet parcouru par les marathoniens comme l'indique la figure ci-dessous.



AC = 1000 m
BC = 200 m
DB = 160 m
EA = 600 m

Les coureurs partent de A en passant par les points B, C, D, B, E et reviennent en A. Jonas désire alors calculer la distance L parcourue par ceux-ci.
1. Justifie que : DE = 800 m.
2. Justifie que: (AE) // (DC).
3. Calcule DC.
4. Détermine la distance L parcourue.

Coup de Pouce

30 Utilise la propriété suivante : Si N appartient au segment [AC], alors AN + NC = AC.

32 Utilise la définition d'un parallélogramme.

33 Utilise la propriété suivante : Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

36 - Utilise la propriété de la droite des milieux.
- Utilise la réciproque de la propriété des angles alternes-internes.

47 Utilise la conséquence de la propriété de Thalès.

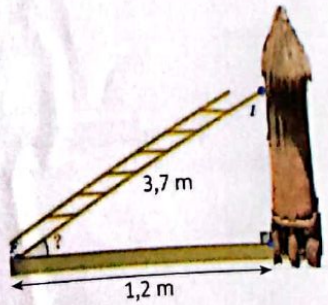
Leçon 9

Triangle rectangle

Dans la construction, les charpentiers et les ferronniers utilisent des angles droits pour obtenir une structure solide.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

En congés dans son village au nord de la Côte d'Ivoire, Tchémongon place une échelle de 3,7 m de long contre un grenier à 1,2 m du grenier. Il enlève le toit du grenier pour prendre du riz. Curieux, il décide de déterminer la hauteur du grenier. Il schématise la situation selon la figure ci-contre qu'il présente à ses camarades de classe. Ceux-ci décident de faire les calculs pour déterminer la hauteur du grenier.



HABILETÉS ET CONTENUS

1 Propriété de Pythagore

Connaître :
- la propriété de Pythagore ;
- la réciproque de la propriété de Pythagore.

Construire :
- un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a > 0$

Utiliser :
- la propriété de Pythagore pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle ;
- la propriété réciproque de la propriété de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle.

Justifier :
qu'un triangle est rectangle.

2 Propriété métrique déduite de l'aire

Connaître :
la propriété métrique déduite de l'aire.
Utiliser :
la propriété métrique déduite de l'aire pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle.

3 Cosinus et sinus d'un angle aigu

Identifier :
- le sinus d'un angle aigu ;
- le cosinus d'un angle aigu.

Connaître :
- la propriété relative à la somme des carrés du cosinus et du sinus ;
- la propriété relative au cosinus et au sinus de deux angles complémentaires.

Calculer :
le cosinus ou le sinus d'un angle aigu.

Utiliser :
le cosinus ou le sinus d'un angle aigu pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle.

4 Tangente d'un angle aigu

Identifier :
la tangente d'un angle aigu.
Calculer :
la tangente d'un angle aigu.
Utiliser :
la tangente d'un angle aigu pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle.

5 Utilisation de la calculatrice ou de la table trigonométrique

Encadrer :
- la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus ou son sinus ;
- la tangente d'un angle aigu.

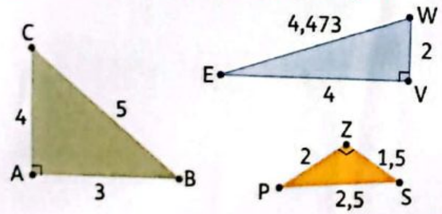
Utiliser :
- une table trigonométrique ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus ou son sinus ;
- une table trigonométrique ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant sa tangente.

Traiter :
une situation faisant appel au triangle rectangle.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 **Propriété de Pythagore**

1 Activité : Propriété de Pythagore



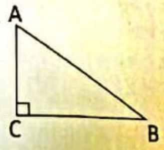
EVW, ACB et PSZ sont des triangles rectangles.
1. Calcule le carré de la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle ci-contre.
2. Calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés de chaque triangle.
3. Compare :
   a) EW^2 et $EV^2 + WV^2$.
   b) BC^2 et $AB^2 + AC^2$.
   c) PS^2 et $ZS^2 + PZ^2$.

Synthèse

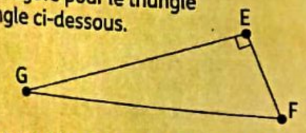
On admet que :
Lorsqu'un triangle est rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
C'est la propriété de Pythagore.
Remarque : Pour alléger les propriétés et les définitions, on confondra côté et longueur de côté d'un triangle.

Exercices de fixation

1 ABC est un triangle rectangle en C.
Parmi les égalités suivantes, recopie celle qui traduit la propriété de Pythagore.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$AC^2 = BC^2 + AB^2$



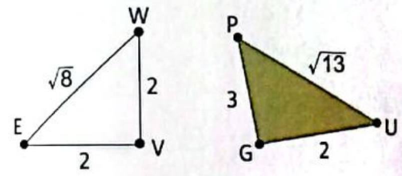
2 Écris l'égalité relative à la propriété de Pythagore pour le triangle rectangle ci-dessous.



3 EFG est un triangle rectangle en G tel que EG = 4, FG = 3.
Calcule EF.

2 Activité : Réciproque de la propriété de Pythagore

On donne les figures suivantes :



a) Calcule : EW^2 et PU^2.
b) Justifie que : $EV^2 + WV^2 = EW^2$ et $GP^2 + GU^2 = PU^2$.
c) Vérifie à l'aide de l'équerre que : (EV) ⊥ (WV) et (PG) ⊥ (WV).
d) Déduis la nature des triangles EWV et PGU.

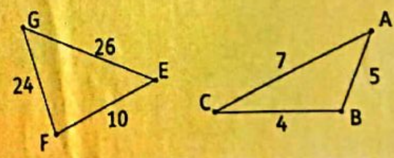
Synthèse

On admet que :
Lorsque le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, ce triangle est rectangle.
C'est la réciproque de la propriété de Pythagore.

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. La réciproque de la propriété de Pythagore permet de calculer des distances.
2. La réciproque de la propriété de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.

2 On donne les triangles suivants qui ne sont pas en dimensions réelles.
a) Calcule le carré de chaque côté des deux triangles ci-contre.
b) Déduis-en le (s) triangle(s) rectangle(s) en énonçant la propriété utilisée.



3 Activité : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$; $a > 0$

1. Construisons un segment de longueur $\sqrt{2}$.
   a) Trouve deux nombres entiers naturels non nuls dont la somme donne 2.
   b) Construis deux segments [AB] et [BE] tels que AB = 1 cm , BE = 1 cm dont les supports sont perpendiculaires.
   c) Justifie que : AE = $\sqrt{2}$.
2. Construisons un segment de longueur $\sqrt{3}$.
   a) Vérifie que $(\sqrt{3})^2 = 2^2 - 1^2$.
   b) Construis un cercle de diamètre un segment [EF] tel que EF = 2 cm puis place un point G sur le cercle tel que EG = 1 cm.
   c) Justifie que le triangle EFG est rectangle en G.
   d) Justifie que : FG = $\sqrt{3}$.

Synthèse

On admet que :
construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ revient à construire un triangle rectangle dont un des côtés mesure $\sqrt{a}$.

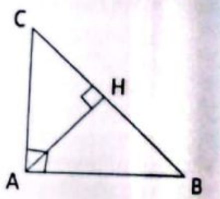
Exercices de fixation

1 Construis un segment de longueur $\sqrt{5}$.

2 Construis un segment de longueur $\sqrt{21}$.

Activité 2 Propriété métrique déduite de l'aire

ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
En utilisant l'aire du triangle ABC, justifie que : AH × BC = AB × AC.



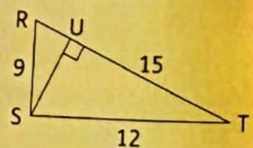
Synthèse

Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors AB × AC = AH × BC.

Exercices de fixation

1 EFG est un triangle rectangle en E et H le pied de la hauteur issue de E.
1. Justifie que : EF × EG = EH × FG.
2. On donne : EF = 8 ; EG = 6 et FG = 10.
Calcule EH.

2 On donne la figure codée ci-dessous :

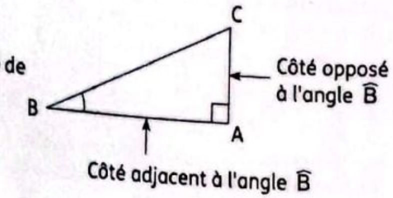


Calcule SU.

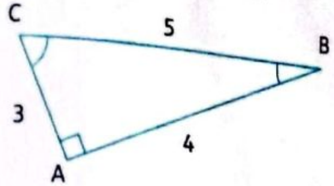
Activités 3 Cosinus et sinus d'un angle aigu

1 Activité : Définitions

1. Dans un triangle rectangle :
- le côté adjacent à un angle aigu est le côté de l'angle, qui n'est pas l'hypoténuse,
- le côté opposé à un angle aigu est le côté « situé en face de l'angle ».



2. On donne le triangle ABC rectangle en A ci-dessous :

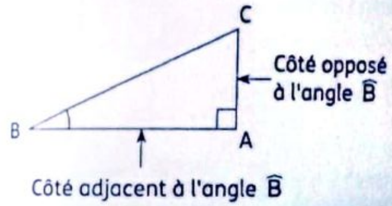


3. Calcule les rapports :

a) $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}}$; b) $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}}$

Synthèse

On admet que :



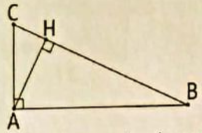
Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle est égal $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$ et le sinus d'un angle est égal $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$.

Exercices de fixation

1 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule réponse est juste. Écris le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'obtenir l'affirmation vraie.

		a	b	c
1	L'hypoténuse de ce triangle ABC est ...	[AC]	[AB]	[BC]
2	Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ est ...	[AC]	[AB]	[BC]
3	Le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$ est ...	[AC]	[AB]	[BC]
4	Le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ est ...	[AC]	[AB]	[BC]
5	Le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ est ...	[AC]	[AB]	[BC]
6	Le côté adjacent à l'angle $\widehat{CBA}$ est ...	[AC]	[AB]	[BC]

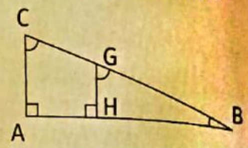
2 Sur la figure ci-dessous, ABC, AHB et AHC sont des triangles rectangles.



Recopie et associe chaque expression de la colonne A à sa valeur dans la colonne B.

Colonne A			Colonne B
$\cos\widehat{ABC}$	•	•	$\frac{AH}{AB}$
$\cos\widehat{ACB}$	•	•	$\frac{AC}{BC}$
$\cos\widehat{HAB}$	•	•	$\frac{AH}{CA}$
$\cos\widehat{HAC}$	•	•	$\frac{AB}{BC}$

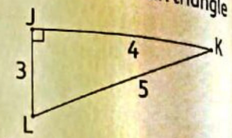
3 On donne la figure ci-dessous.



Recopie et complète :

$\sin\widehat{ACB}$ =.... ; $\sin\widehat{HGB}$ =.... ; $\sin\widehat{ABC}$ = ...

4 Sur la figure ci-dessous, KLJ est un triangle rectangle en J.



Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des égalités.

1. $\cos\widehat{K} = \frac{4}{3}$; 2. $\cos\widehat{K} = \frac{4}{5}$

3. $\cos\widehat{K} = \frac{3}{5}$; 4. $\cos\widehat{K} = \frac{3}{4}$

2 Activité : Somme des carrés du cosinus et du sinus d'un angle

ABC est un triangle rectangle en B.

1. Justifie que : $\sin\widehat{C}$ et $\cos\widehat{C}$ sont des nombres positifs.
2. Déduis-en que : $0 < \cos\widehat{C} < 1$ et $0 < \sin\widehat{C} < 1$.
3. Justifie que : $\cos^2\widehat{C} + \sin^2\widehat{C} = 1$.

Synthèse

$0 < \cos\widehat{C} < 1 \,;\, 0 < \sin\widehat{C} < 1$ et $\cos^2\widehat{C} + \sin^2\widehat{C} = 1$

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes :

1. $\cos^2 60° + \sin^2 30° = 1$
2. $\cos^2 49° + \sin^2 49° = 1$
3. $\cos^2 50° + \sin^2 50° = 0{,}5$

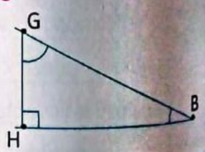
2 On donne : $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Détermine sin 30° sachant que sin 30° > 0.

3 Activité : Cosinus et sinus de deux angles complémentaires

GHB est un triangle rectangle en H.

1. Justifie que les angles $\widehat{G}$ et $\widehat{B}$ sont complémentaires.
2. Justifie que : $\sin\widehat{G} = \cos\widehat{B}$.



Synthèse

Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Exercices de fixation

On donne : $\cos a° = 0{,}3$.
Détermine $\sin(90° - a°)$.

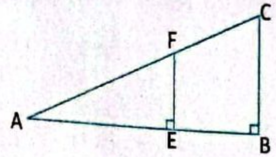
Justifie que : cos 25° = sin 75°.

Dans chaque cas, recopie et remplace les pointillés par l'angle qui convient :
a) cos 27° = sin ... ; b) sin 48° = cos ...

Activité 4 Tangente d'un angle aigu

On donne la figure codée ci-contre :

1. Justifie que : $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$.
2. Justifie que : $\frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} = \frac{BC}{AB}$.



Synthèse

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle est :
- le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent à cet angle.
- le quotient du sinus de cet angle par son cosinus.

Exercices de fixation

Réponds par vrai ou par faux.

1. $\tan 30° = \frac{\sin 60°}{\cos 30°}$
2. EFG est un triangle rectangle en E, $\tan\widehat{F} = \frac{EG}{FG}$.
3. EFG est un triangle rectangle en E, $\tan\widehat{F} = \frac{EG}{EF}$.

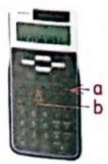
ABC est un triangle rectangle en A tel que ; AB = 3, AC = 4 et BC = 5.

1. Calcule $\tan\widehat{C}$.
2. Calcule $\tan\widehat{B}$.

On donne : $\cos a° = 0{,}8$ et $\sin a° = 0{,}6$.
Calcule $\tan a°$.

Activités 5 Utilisation de la calculatrice ou de la table trigonométrique

1 Activité : Détermination du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle à l'aide de la calculatrice



1. Pour calculer cos 30°, procède comme suit :
   a) mets la calculatrice en mode degré avec la touche DRG
   b) clique sur la touche COS et entre 30.
   On obtient le résultat à l'écran.
   c) Vérifie que l'arrondi d'ordre 2 de cos30° est 0,87.
2. Utilise la même méthode pour trouver sin30°.
3. Pour déterminer l'angle qui a pour cosinus 0,866, procède comme suit :
   a) clique sur la touche 2ndF
   b) ensuite clique COS et entre 0,866.
   On obtient la valeur de l'angle : 30°.
4. Utilise la même méthode pour déterminer l'angle qui a pour sinus 0,866.
   Certaines calculatrices fonctionnent différemment.
5. Utilise la méthode du 1) pour trouver tan 60°.

Synthèse

- On peut utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle.
- Connaissant le cosinus ou le sinus d'un angle, on peut retrouver l'angle en utilisant une calculatrice.

Exercices de fixation

1 À l'aide de la calculatrice, recopie et complète le tableau suivant :

Mesure d'angle en degrés	30	45		
Cosinus de l'angle			0,5	0,3

Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

2 À l'aide de la calculatrice, recopie et complète le tableau suivant :

Mesure d'angle en degrés	60	45		
Sinus de l'angle			0,5	0

Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

2 Activité : Détermination du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle aigu à l'aide de la table trigonométrique

On donne le tableau ci-contre.

Méthode

1. Pour lire cos4° ou cos80°, il faut identifier l'angle dans les colonnes de degré et lire la valeur correspondant à cet angle dans la colonne de cosinus.
Ainsi, cos4° = 0,998 et cos80° = 0,174
Idem pour le sinus d'un angle.
On a : sin82° = 0,99.

2. Pour trouver l'angle dont le cosinus est 0,105, il faut chercher la valeur dans les colonnes cosinus.
Si le cosinus est écrit en bas, la mesure de l'angle est à droite sur la même ligne.
Sinon sa mesure est à gauche dans la colonne degré.
L'angle dont le cosinus est 0,105 est 84°.
De la même manière, l'angle dont le sinus est 0,208 est 12°.

3. Pour lire tan10° et tan88°, on procède comme au 1).
tan10° = 0,176 ; tan88° = 28,63.

4. On donne cosα° = 0,984. Encadrons la mesure de α.
On a : 0,982 < 0,984 < 0,985. En utilisant le tableau, on obtient : cos10° < cosα° < cos11°.
Donc 10° < α° < 11°.
On donne sinα° = 0,06. En suivant la même stratégie, on obtient : 3° < α° < 4°.
On donne tanα = 5,425.
On a : 5,145 < 5,425 < 5,671 par suite 79° < α° < 80°.

Degrés	Cosinus	Sinus	Tangente		
0	1,000	0,000	0,000		90
1	1,000	0,017	0,017	57,29	89
2	0,999	0,035	0,035	28,63	88
3	0,999	0,052	0,052	19,08	87
4	0,998	0,070	0,070	14,30	86
5	0,996	0,087	0,087	11,43	85
6	0,995	0,105	0,105	9,514	84
7	0,993	0,122	0,123	8,144	83
8	0,990	0,139	0,141	7,115	82
9	0,988	0,156	0,158	6,314	81
10	0,985	0,174	0,176	5,671	80
11	0,982	0,191	0,194	5,145	79
12	0,978	0,208	0,213	4,705	78
	Sinus	Cosinus		Tangente	Degrés

Synthèse

- On peut utiliser la table trigonométrique pour déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle.
- Connaissant le cosinus ou le sinus d'un angle, on peut utiliser la table trigonométrique pour retrouver la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure de l'angle.

Remarque :

- Le sinus ou la tangente d'un angle aigu augmente pour la mesure augmentée.
- Le cosinus d'un angle diminue lorsque la mesure de l'angle augmente.

Exercices de fixation

À l'aide de la table trigonométrique, complète le tableau suivant :

Mesure d'angle en degrés	10	79		
Cosinus de l'angle			0,5	0,407

À l'aide de la table trigonométrique, complète le tableau suivant :

Mesure d'angle en degrés	60	45		
Sinus de l'angle			0,5	0,407

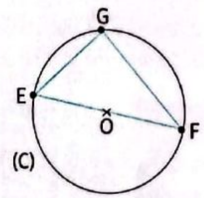
Détermine : cos7° ; sin10° puis donne un encadrement de l'angle dont le cosinus est égal à 0,992 à l'aide de la table trigonométrique.

À l'aide de la table trigonométrique trouve un encadrement des mesures des angles β et α tel que : sinβ = 0,3 et cosα = 0,65.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle

On donne un cercle (C) de centre O et de diamètre [EF].
G est un point du cercle, EF = 10 cm et EG = 6 cm.
1. Justifie que le triangle EFG est rectangle en G.
2. Calcule FG.



Corrigé

1. Justifions que EFG est rectangle en G.
Le triangle EFG est inscrit dans le cercle de diamètre [EF], donc le triangle EFG est rectangle en G.
2. Calculons FG.
Le triangle EFG est rectangle en G donc d'après la propriété de Pythagore on a :
$EF^2 = EG^2 + GF^2$.

$GF^2 = EF^2 - EG^2$
$GF^2 = 100 - 36$
$GF^2 = 64$
$GF = \sqrt{64} = 8$
Donc : FG = 8 cm

Méthode

- Ici on utilise la propriété de Pythagore pour calculer des longueurs.

Exercice 2 Construire un segment de longueur $\sqrt{21}$

Sachant que $21 = 5^2 - 2^2$, construis un segment de longueur $\sqrt{21}$.

Méthode

On utilise la propriété de Pythagore pour construire un triangle rectangle dont un côté mesure $\sqrt{21}$.

Corrigé

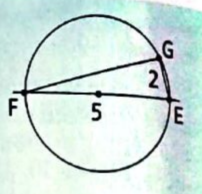
Programme :
- Construire un cercle de diamètre [EF] tel que EF = 5 cm.
- Placer à l'aide du compas, un point G sur le cercle tel que : EG = 2 cm.

Le triangle EFG est rectangle en G.

EG = 2 ; EF = 5 donc FG = $\sqrt{21}$.

- Tracer le segment [GF] : c'est un segment de longueur $\sqrt{21}$

On utilise la propriété de Pythagore.



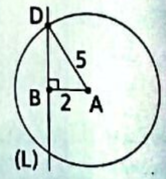
Autre méthode

$21 = 5^2 - 2^2$, donc $5^2 = (\sqrt{21})^2 + 2^2$.

Il s'agit de construire un triangle ABD rectangle en B tel que :

AB = 2 ; AD = 5 et BD = $\sqrt{21}$.

- Construire un segment [AB]; tel que : AB = 2 cm ;
- Tracer la droite (L) passant par B et perpendiculaire à (AB) ;
- Construire le cercle de centre A et de rayon 5.
- Ce cercle coupe la droite (L) en deux points. Je choisis l'un des points et je marque D.
- Le segment [BD] est un segment de longueur $\sqrt{21}$.

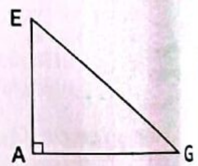


Exercice 3 Calculer le cosinus ou le sinus d'un angle aigu

On donne le triangle GAE rectangle en A tel que :

AE = 6 cm et GE = 9 cm

1. Calcule $\sin \widehat{G}$.
2. Déduis-en que : $\cos \widehat{G} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
3. Détermine la longueur AG arrondie au dixième près.



Corrigé

1. Calculons $\sin \widehat{G}$

$\sin \widehat{G} = \frac{AE}{GE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2. Déduisons $\cos \widehat{G}$

$\cos^2 \widehat{G} + \sin^2 \widehat{G} = 1$

$\cos^2 \widehat{G} = 1 - \sin^2 \widehat{G}$

$\cos^2 \widehat{G} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Comme $\cos \widehat{G} > 0$, on a : $\cos \widehat{G} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Déterminons AG

On sait que $\cos \widehat{G} = \frac{AG}{GE}$ et comme $\cos \widehat{G} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, on a $\frac{AG}{GE} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; d'où $AG = \frac{\sqrt{5}}{3} \times GE$

AG = 6,7 au dixième près.

Méthode

1. La longueur du côté [AG] adjacent à $\widehat{G}$ n'est pas donnée donc il faut calculer le cosinus à partir du sinus.

2. [AG] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{G}$ donc le cosinus permet de trouver la longueur de [AG].

Exercice 4 Construire un segment de longueur $\sqrt{13}$

Sachant que $13 = 4 + 9$, construis un segment de longueur $\sqrt{13}$ cm.

Corrigé

$13 = 2^2 + 3^2$.

<u>Programme de construction</u>

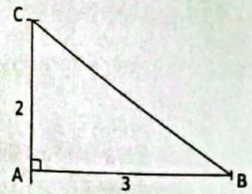
- Je construis un segment [AB] tel que : AB = 3 cm.
- Je construis la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par A.
- Je place sur cette dernière droite un point C à 2 cm du point A.
- Je trace le segment [BC].

<u>Justification</u>

Le triangle ABC est rectangle en A.

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'après la propriété de Pythagore.

$BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, donc $BC = \sqrt{13}$.



Méthode

On utilise la propriété de Pythagore pour construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut $\sqrt{13}$.

Exercice 5 Démontrer qu'un triangle est rectangle

On donne le triangle EFG tel que : EG = 10 cm, EF = 6 cm et FG = 8 cm.

Démontre que le triangle EFG est rectangle en F.

Corrigé

On a : $EF^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$EG^2 = 100$.

Ainsi, $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

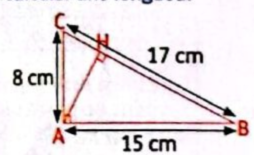
Méthode

On utilise la réciproque de la propriété de Pythagore après avoir justifié que : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

Exercice 6 Utiliser la propriété métrique déduite de l'aire pour calculer une longueur

On donne la figure codée ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle et où H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle rectangle ABC.

Calcule AH.



Corrigé

D'après la propriété métrique déduite de l'aire, $AC \times AB = AH \times BC$.

$AH = \frac{AC \times AB}{BC} = \frac{8 \times 15}{17}$.

$AH = \frac{120}{17}$.

Méthode

On utilise la propriété métrique déduite de l'aire.

$AC \times AB = AH \times BC$.

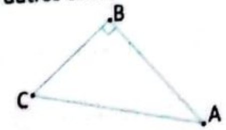
Résumé de cours

1 Propriété de Pythagore

1.1. Propriété de Pythagore

Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

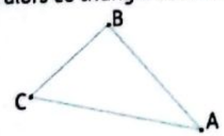


$$\boxed{\text{ABC est un triangle rectangle en B}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

1.2. Propriété réciproque de la propriété de Pythagore

Propriété

Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.



$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{ABC est un triangle rectangle en B}}$$

1.3. Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}\,; a > 0$

Méthode

Pour construire un segment de longueur $\sqrt{a}$, $(a > 0)$, on peut procéder comme suit :

1. Écrire a comme somme des carrés de deux nombres entiers naturels b et c, $(a = b^2 + c^2)$ ou comme la différence des carrés de deux nombres entiers naturels m et n $(a = m^2 - n^2)$.

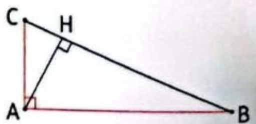
2.

Cas où $a = b^2 + c^2$	Cas où $a = m^2 - n^2$
Construire deux segments [AB] et [AC] de supports perpendiculaires en A tels que : AB = c et AC = b.	• Construire un cercle de diamètre [EF] tel que : EF = m. • Placer sur le cercle un point G tel que : EG = n
Tracer le segment [BC]. Le segment [BC] est le segment recherché.	Tracer le segment [FG]. Le segment [FG] est le segment cherché.

2 Propriété métrique déduite de l'aire

Propriété

Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors :
AC × AB = BC × AH



3 Cosinus et sinus d'un angle aigu

3.1. Définitions

Définitions

- Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

Notation : Le sinus de l'angle α se note $\sin\alpha$ et le cosinus de l'angle α se note $\cos\alpha$.

$\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$; $\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$

3.2. Somme des carrés du cosinus et du sinus

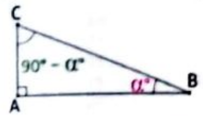
Propriété

Pour tout angle aigu de mesure $\alpha°$, on a :
$0 < \cos\alpha° < 1$; $0 < \sin\alpha° < 1$; $\cos^2\alpha° + \sin^2\alpha° = 1$.

3.3. Cosinus et sinus de deux angles complémentaires

Propriété

Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.



$\sin\alpha° = \cos(90° - \alpha°)$; $\cos\alpha° = \sin(90° - \alpha°)$

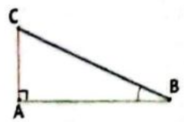
ou encore

$\sin\widehat{B} = \cos\widehat{C}$; $\cos\widehat{B} = \sin\widehat{C}$

4 Tangente d'un angle aigu

Définition

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par le côté opposé.



$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$

$\tan\widehat{ABC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}}$

5 Utilisation de la calculatrice ou de la table trigonométrique

5.1. Détermination du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle aigu à l'aide de la calculatrice

- On peut utiliser la calculatrice scientifique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle.
- Connaissant le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle, on peut retrouver la mesure de l'angle en utilisant une calculatrice scientifique.

5.2. Détermination du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle aigu à l'aide d'une table trigonométrique

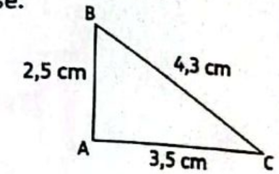
- On peut utiliser la table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle.
- Connaissant le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle, on peut utiliser la table trigonométrique pour retrouver la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure de l'angle.

TABLE TRIGONOMÉTRIQUE

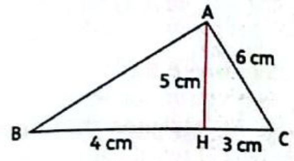
Degrés	Cosinus	Sinus	Tangente		
0	1,000	0,000	0,000		90
1	1,000	0,017	0,017	57,29	89
2	0,999	0,035	0,035	28,63	88
3	0,999	0,052	0,052	19,08	87
4	0,998	0,070	0,070	14,30	86
5	0,996	0,087	0,087	11,43	85
6	0,995	0,105	0,105	9,514	84
7	0,993	0,122	0,123	8,144	83
8	0,990	0,139	0,141	7,115	82
9	0,988	0,156	0,158	6,314	81
10	0,985	0,174	0,176	5,671	80
11	0,982	0,191	0,194	5,145	79
12	0,978	0,208	0,213	4,705	78
13	0,974	0,225	0,231	4,331	77
14	0,970	0,242	0,249	4,011	76
15	0,966	0,259	0,268	3,732	75
16	0,961	0,276	0,287	3,487	74
17	0,956	0,292	0,306	3,271	73
18	0,951	0,309	0,325	3,078	72
19	0,946	0,326	0,344	2,904	71
20	0,940	0,342	0,364	2,747	70
21	0,934	0,358	0,384	2,605	69
22	0,927	0,375	0,404	2,475	68
23	0,921	0,391	0,424	2,356	67
24	0,914	0,407	0,445	2,246	66
25	0,906	0,423	0,466	2,145	65
26	0,899	0,438	0,488	2,050	64
27	0,891	0,454	0,510	1,963	63
28	0,883	0,469	0,532	1,881	62
29	0,875	0,485	0,554	1,804	61
30	0,866	0,500	0,577	1,732	60
31	0,857	0,515	0,601	1,664	59
32	0,848	0,530	0,625	1,600	58
33	0,839	0,545	0,649	1,540	57
34	0,829	0,559	0,675	1,483	56
35	0,819	0,574	0,700	1,428	55
36	0,809	0,588	0,727	1,376	54
37	0,799	0,602	0,754	1,327	53
38	0,788	0,616	0,781	1,280	52
39	0,777	0,629	0,810	1,235	51
40	0,766	0,643	0,839	1,192	50
41	0,755	0,656	0,869	1,150	49
42	0,743	0,669	0,900	1,111	48
43	0,731	0,682	0,933	1,072	47
44	0,719	0,695	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	Sinus	Cosinus		Tangente	Degrés

Exercices de renforcement

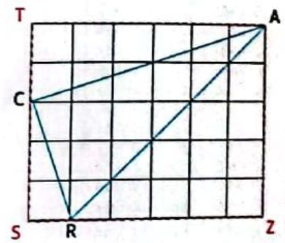
1 Le triangle suivant est-il rectangle ? Justifie ta réponse.



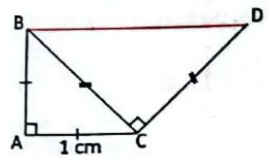
2 La droite (AH) est-elle une hauteur du triangle ABC ? Justifie ta réponse.



3 Le triangle CAR est-il rectangle ? Justifie ta réponse.



4 Calcule la longueur BD.



5 ABC est un triangle rectangle en B.
On donne : AB = 5 et BC = 2.
a) Justifie que : $AC = \sqrt{29}$.
b) Calcule : $\cos\widehat{A}$ et $\sin\widehat{B}$.

6 ABC est un triangle rectangle en C.
On donne : AB = 10 et BC = 8.
a) Justifie que : AC = 6.
b) Calcule : $\cos\widehat{A}$, $\sin\widehat{B}$ et $\tan\widehat{A}$
c) Détermine l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{A}$

7 Pour chaque numéro, fais correspondre la lettre qui désigne la bonne réponse. (Numéro – lettre)
1. ABC est un triangle rectangle en B :
a) $\cos\widehat{A} = \frac{AB}{AC}$ b) $\cos\widehat{A} = \frac{BC}{AC}$ c) $\cos\widehat{A} = \frac{BC}{AB}$
2. EFG est triangle rectangle en E.
On donne : $FG = 2\sqrt{3}$ et $EF = \sqrt{2}$.
a) $\sin\widehat{G} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\sin\widehat{G} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sin\widehat{G} = \frac{\sqrt{6}}{6}$
3. MNP est un triangle rectangle en M. On donne : $\tan\widehat{N} = \sqrt{3}$ et MN = 2.
a) $PM = 2\sqrt{3}$ b) $PM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $PM = 6\sqrt{3}$
4. ABC est un triangle rectangle en B. On donne : $AB = \sqrt{39}$, $AC = 3\sqrt{6}$ et $BC = \sqrt{15}$.
a) $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}$ c) $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

8 ABC est un triangle tel que : AB = 3 cm, AC = 4 cm et BC = 5 cm
1. Justifie que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calcule : $\cos\widehat{ABC}$ et $\sin\widehat{ABC}$.
3. Calcule : $\cos\widehat{ACB}$ et $\sin\widehat{ACB}$.

9 On donne cet extrait de la table trigonométrique :

a°	35	36	37	38
sin a°	0,574	0,588	0,602	0,616
cos a°	0,819	0,809	0,799	0,788

1. Encadre la mesure de l'angle a° dont le sinus vaut 0,6 par deux nombres entiers consécutifs.
2. Encadre la mesure de l'angle a° dont le cosinus vaut 0,81 par deux nombres entiers consécutifs.

10 Soit MPN un triangle rectangle en M tel que MN = 6 et mes $\widehat{N} = 30°$.
On donne : $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \frac{1}{2}$.
1. Calcule PN.
2. Calcule PM.
3. Calcule $\tan\widehat{N}$.

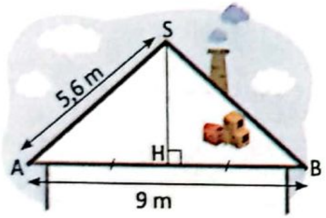
11 L'unité de longueur est centimètre.
ABC est un triangle tel que : AB = 12, AC = 20, BC = 16 et H est le pied de la hauteur issue de B.

EXERCICES

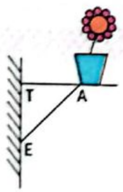
1. Fais une figure à l'échelle $\frac{1}{2}$.
2. Justifie que le triangle ABC est rectangle en B.
3. Calcule BH.

12 1. Trace un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que AB = 11 cm. Soit C un point de ce cercle tel que : BC = 6,6 cm.
2. Justifie que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Calcule la distance AC.

13 Calcule la hauteur SH de ce grenier au dixième de mètre près.

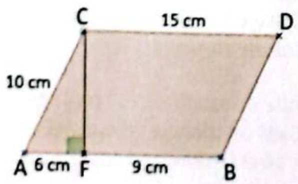


14 Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser des pots de fleurs.
Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes :
AT = 42 cm ; AE = 58 cm et TE = 40 cm.



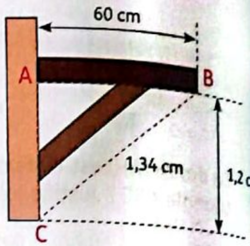
L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ?
Justifie ta réponse.

15 Calcule l'aire du parallélogramme ABDC.

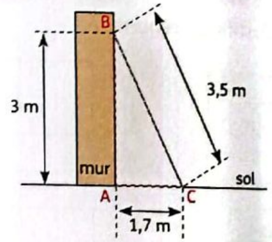


Exercices d'approfondissement

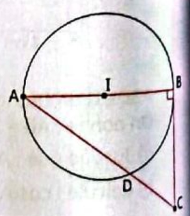
16 L'étagère est-elle perpendiculaire au mur ?
Justifie ta réponse.



17 Bols place une échelle de 3,50 m contre un mur. Sa hauteur sur le mur est de 3 m, et l'échelle est éloignée du mur sur le sol de 1,7 m. Le mur est-il perpendiculaire au sol ?
Justifie ta réponse.



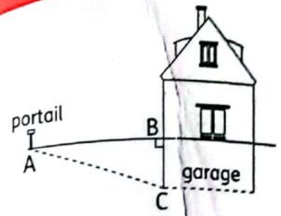
18 Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraies grandeurs, (C) est le cercle de centre I et de diamètre [AB]. D est un point de (C), (BC) ⊥ (AB) et C ∈ (AD).
On donne : AB = 4cm et BC = 3cm.



1. Justifie que : AC = 5 cm.
2. a) Justifie que le triangle ADB est rectangle en D.
b) Déduis-en que : BD = 2,4 cm.

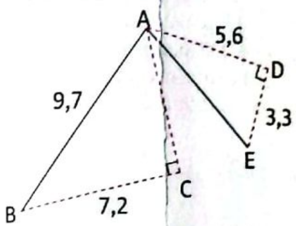
19 On accède au garage situé au sous-sol d'une maison par une rampe [AC].
On sait que : AC = 10,25 m ; BC = 2,25 m.

EXERCICES

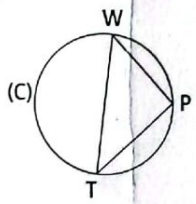


Calcule la distance AB entre le portail et l'entrée.

20 On considère le schéma ci-dessous (ne pas le reproduire).
a) Calcule AC et AE.
b) Déduis-en que le point A appartient à la médiatrice du segment [CE].

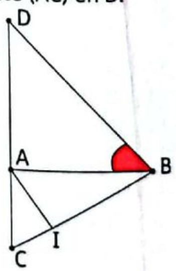


21 Soit (C) un cercle de diamètre [TW] et P un point de C.



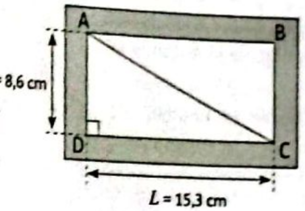
On donne : WP = 4,8 cm et TP = 5,5 cm.
Calcule la longueur TW.

22 On donne la figure suivante telle que :
AC = 4,2 cm ; AB = 5,6 cm ; BC = 7 cm.
I est le point du segment [CB] tel que :
CI = 3 cm.
La parallèle à la droite (AI) passant par B coupe la droite (AC) en D.



1. Démontre que le triangle ABC est rectangle.
2. a) Démontre que : CD = 9,8 cm.
b) Calcule AD et déduis-en la nature du triangle ADB.
c) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DBA}$.

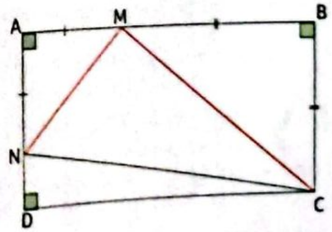
23 Un client a choisi un écran rectangulaire dont voici les dimensions :



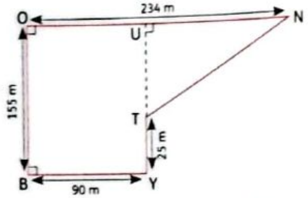
1. Calcule la diagonale AC de l'écran. Arrondis à 0,1 cm près.
2. Un écran est dit « 16/9ème » lorsque ses dimensions vérifient la relation $\frac{L}{l} = \frac{16}{9}$

L'écran précédent est-il un « 16/9ème » ?
Justifie ta réponse.

24 ABCD est un rectangle tel que :
AM = 3 cm et MB = 5 cm.
1. Calcule ND et DC.
2. Calcule les valeurs exactes des longueurs MN, MC et NC.
3. Démontre que les droites (MN) et (MC) sont perpendiculaires.

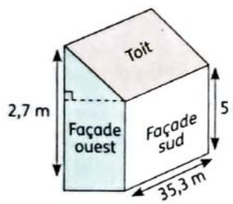


25 **Record de marathon**
Le trajet du Cross scolaire d'Abengourou est donné ci-dessous.

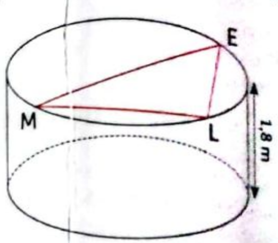


1. Démontre que la longueur NT est égale à 194 m.
2. Le départ et l'arrivée de chaque course du Cross sont au point B.
Calcule la longueur d'un tour de parcours.
3. Les élèves de 3ᵉ doivent effectuer 4 tours de parcours. Calcule la longueur totale de leur course.
4. Mathias, le vainqueur de la course des garçons de 3ᵉ, a effectué sa course en 10 minutes et 42 secondes.
Calcule sa vitesse moyenne et exprime-la en m/s. Arrondis au centième près.
5. Si Mathias maintenait sa vitesse moyenne, penses-tu qu'il pourrait battre le champion Georges Richmond qui a gagné dernièrement la course sur 15 km des Foulées du front de mer en 55 minutes et 11 secondes ? Justifie ta réponse.

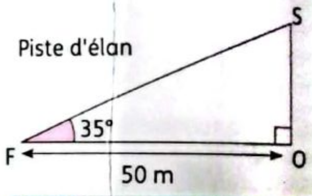
26 Paul doit faire un devis pour l'installation de panneaux solaires sur le toit d'une maison. Il dispose de dimensions écrites sur le schéma ci-dessous et il sait que la façade ouest a une aire de 22,86 m².
Calcule les dimensions du toit.



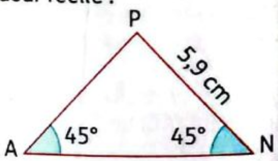
27 Mathys (M) et Ethan (E) sont assis en deux points diamétralement opposés sur le bord d'une piscine circulaire de profondeur 1,80 m. Lorsque Louna (L) prend place au bord du même bassin, tous deux nagent tout droit vers elle.
Après un parcours de 10 m, Mathys a déjà atteint Louna alors qu'Ethan devra nager 14 m de plus que Mathys pour la rejoindre.
Combien de litre d'eau y a-t-il dans la piscine ?
Explique.



28 Le schéma ci-dessous représente la piste d'élan d'un tremplin de saut à ski. Calcule le dénivelé SO, arrondi au centimètre près.

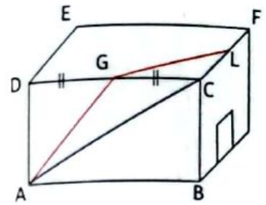


29 On donne la figure suivante qui n'est pas en grandeur réelle :

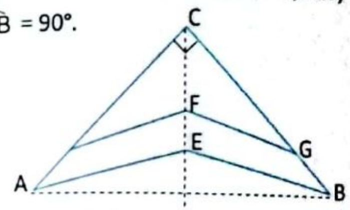


Calcule la longueur AN au dixième de centimètre près.

30 Une maison a la forme d'un pavé droit dont les dimensions en mètre sont :
AB = 5, BC = 3 et DE = 4. Un bricoleur doit amener un câble du point A au point L, milieu de [FC]. Il hésite entre deux possibilités marquées en couleur sachant que G est le milieu de [DC]. Quel doit être son choix pour utiliser le moins de câbles ?

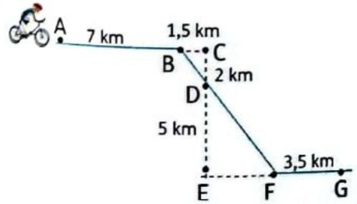


Un cerf-volant a la forme du quadrilatère AEBC dessiné ci-dessous. La figure n'est pas en dimensions réelles.
On donne : CA = CB = 2 m ; EA = EB = 1,5 m ; mes $\widehat{ACB}$ = 90°.



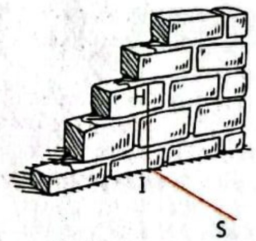
1. Démontre que la droite (CE) est médiatrice du segment [AB].
2. Démontre que : AB = $2\sqrt{2}$ m.
3. Une des armatures [FG] est parallèle à la droite (EB) et a pour extrémité le point G tel que : CG = 1,4 m.
Calcule la longueur de cette armature [FG].
4. S est un point du cerf-volant tel que :
CS = $3\sqrt{2}$ m et AS = $\sqrt{14}$ m.
Le triangle CAS est-il rectangle ?
Justifie ta réponse.

Michel participe à un rallye VTT sur un parcours balisé. Le trajet est représenté en traits pleins ci-dessous. Le départ du rallye est en A et l'arrivée en G.



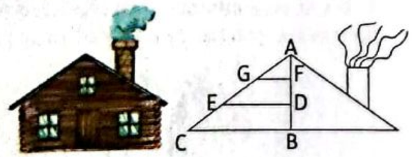
Les points A, B et C sont alignés.
Les points C, D et E sont alignés.
Les points B, D et F sont alignés.
Les points E, F et G sont alignés.
Le triangle BCD est rectangle en C.
Le triangle DEF est rectangle en E.
Calcule la longueur du parcours ABDFG.

33 Au lycée professionnel, Jacques et Patrick, futurs maçons, s'entraînent en construisant un mur chacun. Leur professeur, M. Koffi, vient vérifier si chaque mur est bien droit (c'est-à-dire perpendiculaire au sol). Ayant oublié sa caisse à outils dans son atelier, il ne possède que le mètre en ruban qu'il avait dans sa poche. Pour chacun des murs, M. Koffi place au pied un point I puis un point H à 60 cm de hauteur sur le mur et un point S à 80 cm de I, puis il mesure la longueur HI.



Pour le mur de Patrick, il trouve 1 m et pour celui de Jacques 95 cm.
1. Le mur de Jacques est-il droit ? Justifie ta réponse.
2. Et celui de Patrick ? Justifie ta réponse.

34 Dans un petit chalet de montagne, un berger aménage l'espace existant sous son toit en y posant des étagères matérialisées sur le schéma ci-dessous par les segments [ED] et [GF].



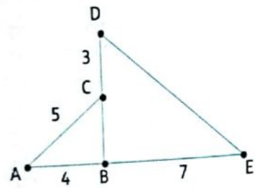
Le segment [CB] représente le plancher et le segment [AB] représente le mur où sont fixées les étagères.
Le berger fait des mesures et obtient :
AB = 1,80 m ; BC = 2,40 m ; AC = 3 m.
1. Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie à 0,1 près.

EXERCICES

3. Sachant que les droites (ED) et (CB) sont parallèles et que BD = 0,60 m ; détermine la longueur de l'étagère [ED].

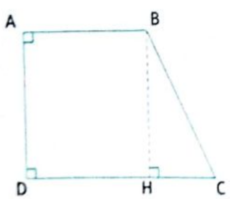
4. La deuxième étagère [GF] est placée telle que : AF = 0,72 m et AG = 1,20 m. Est-elle parallèle au plancher [CB] ? Justifie ta réponse.

35 Sur le dessin ci-dessous, les points A, B et E sont alignés et C est le milieu de [BD].

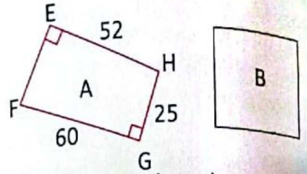


1. Justifie que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Déduis-en la nature du triangle BDE.
3. Calcule ED. Arrondis le résultat au dixième.

36 La famille Mathi possède un terrain dont la forme est un trapèze rectangle comme le montre le schéma ci-dessous. M. Mathi a acheté 90 m de grillage pour clôturer son terrain.
On donne : AB = 15 m ; AD = 20 m ; DC = 25 m.
1. Justifie que l'aire du terrain est égale à 400 m².
2. Calcule BC. Tu arrondiras au dixième de mètre près.
3. Dis si M. Mathi aura assez de grillages pour clôturer son terrain. Justifie ta réponse.



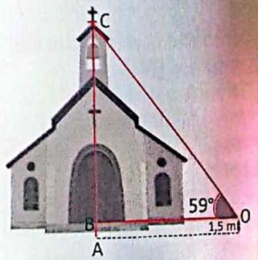
38 Les figures A et B suivantes représentent deux terrains. Le terrain A (EFGH) est tel que : EH = 52 m ; GH = 25 m et FG = 60 m.
Le terrain B est un carré.



Détermine les dimensions de B pour que les deux terrains aient la même aire.

Situation d'évaluation

39 M. SILUE fréquente une chapelle dont il veut connaître la hauteur et la distance entre la cloche et le sommet de la statue qui est dans la cour.
Il obtient le schéma ci-dessous sur lequel :
- la cloche est en C ;
- la hauteur de la chapelle est AC ;
- le sommet de la statue qui mesure 1,5 m est sur le point O ;
- la distance OB est 85 m ;
- la distance AB est 1,5 m.



Il présente ses préoccupations et le schéma à sa fille en classe de 3ᵉ. Celle-ci te sollicite pour l'aider.
1. Détermine la distance entre la cloche et le sommet de la statue.
2. Calcule CB.
3. Réponds à la deuxième préoccupation de M. Silué.

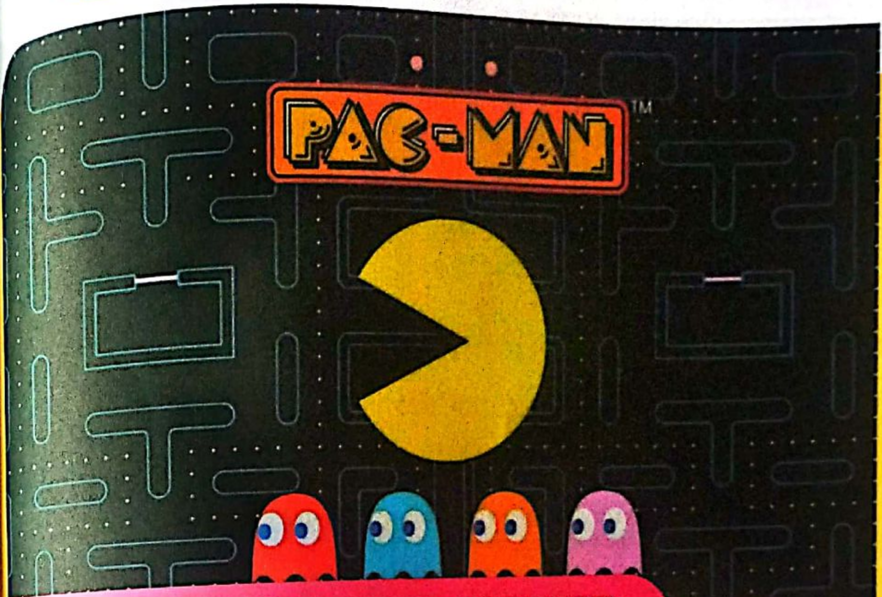
Coup de Pouce

32 Pour le tronçon entre B et F, calculer BD et DF à l'aide de la propriété de Pythagore.

38 Pour la figure A, calculer EF dans le triangle EFH, puis les aires des triangles EFH et FGH.

Leçon 10

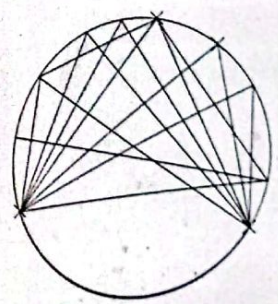
Angles inscrits



PAC-MAN est une série de jeux vidéo créée par TORU IWATANI et éditée par NAMCO. Le jeu consiste à déplacer PAC-MAN un personnage qui, vu de profil, ressemble à un diagramme circulaire à l'intérieur d'un labyrinthe afin de lui faire manger toutes les pac-gommes (petites boules) qui s'y trouvent en évitant d'être touché par des fantômes.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une araignée tisse sa toile au bout d'un tuyau cylindrique (forme circulaire) pour piéger les petits insectes qui y circulent. Des élèves de 3ᵉ qui rentraient un soir après leur cours furent émerveillés par l'œuvre de l'araignée dont une photo est représentée ci-contre. Ils décidèrent donc de reproduire sur une feuille de papier leur observation et de déterminer les mesures des angles dont les sommets sont sur le bord du tuyau.



HABILETÉS ET CONTENUS

1 Angle inscrit

Identifier :
- un angle aigu inscrit dans un cercle ;
- l'arc intercepté par un angle aigu inscrit.

2 Angle inscrit et angle au centre associés

Connaître :
la propriété relative à la mesure d'un angle inscrit et de celle de l'angle au centre associé.
Déterminer :
la mesure d'un angle.
Identifier :
- l'arc intercepté par un angle au centre ;
- un angle inscrit et l'angle au centre associé.

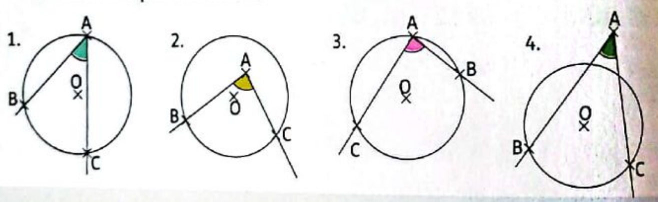
3 Angles inscrits interceptant le même arc

Connaître :
la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc.
Reconnaître :
des angles inscrits qui interceptent le même arc.
Justifier :
une égalité de mesure d'angle.
Traiter :
une situation faisant appel aux angles inscrits.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Angle inscrit

Parmi les figures suivantes, identifie celles dans lesquelles le sommet de l'angle est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle.

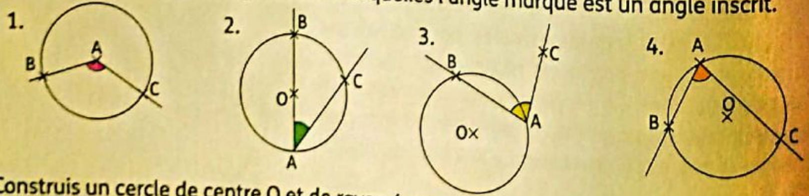


Synthèse

Dans les figures 1 et 3, le sommet de l'angle est sur le cercle et les côtés de l'angle coupent le cercle : on dit que c'est un angle inscrit.
Cet angle intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Exercices de fixation

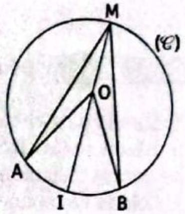
1. Recopie les numéros des figures dans lesquelles l'angle marqué est un angle inscrit.



2. Construis un cercle de centre O et de rayon 4 cm.
Place un point F sur le cercle.
Construis un angle inscrit de sommet F.
Place un point T sur l'arc intercepté par cet angle.

Activité 2 Angle aigu inscrit et angle au centre associés

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O.
A, B et M sont des points du cercle $(\mathscr{C})$ et I est le point diamétralement opposé à M.



1. Identifie deux angles qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2. a) Justifie que : mes $\widehat{AOI}$ + 2mes $\widehat{OAI}$ = 180°.
b) Justifie que : 2mes $\widehat{AMI}$ + 2mes $\widehat{OAI}$ = 180°.
c) Déduis-en que : mes $\widehat{AMI} = \dfrac{\text{mes}\widehat{AOI}}{2}$.
3. On admet que : mes $\widehat{IMB} = \dfrac{\text{mes}\widehat{IOB}}{2}$. Démontre que : mes $\widehat{AMB} = \dfrac{\text{mes}\widehat{AOB}}{2}$.

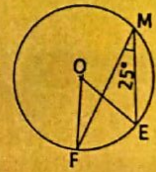
Synthèse

- Un angle aigu inscrit dans un cercle et un angle au centre du même cercle qui interceptent le même arc sont dits associés.
- Si l'angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ sont associés, alors mes $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}mes\widehat{AOB}$.

Exercices de fixation

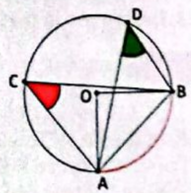
1. On considère la figure codée ci-contre.
1. Cite l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AIJ}$.
2. a) Cite l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{IAJ}$
b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

2. On donne la figure ci-contre.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{FOE}$.



Activité 3 Angles aigus inscrits interceptant le même arc

Observe la figure ci-contre.
1. Cite deux angles aigus inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2. Justifie que : mes $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}mes\widehat{AOB}$.
3. Justifie que : mes $\widehat{ADB} = \dfrac{1}{2}mes\widehat{AOB}$.
4. Justifie que : mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$.

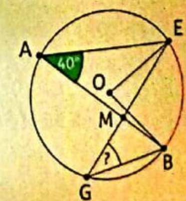


Synthèse

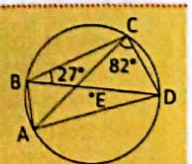
Des angles aigus inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Exercices de fixation

1. On donne la figure codée ci-contre.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BGE}$ inscrit dans le cercle.
Justifie ta réponse.



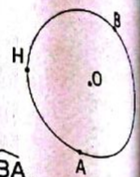
2. On donne la figure codée ci-contre.
1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$.



APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 **Déterminer des mesures d'angles**

1. Sur la figure ci-contre, les points H, A et B sont sur le cercle de centre O. Reproduis la figure.
2. Colorie en orange l'arc de cercle intercepté par l'angle inscrit $\widehat{HBA}$.
3. a) Colorie en vert l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{HBA}$.
   b) Sachant que mes $\widehat{HOA} = 70°$, détermine la mesure de l'angle $\widehat{HBA}$.



Corrigé

1. et 2. (Voir figure).
3. a) Voir figure
   b) Dans le cercle de centre O, $\widehat{HOA}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{HBA}$.

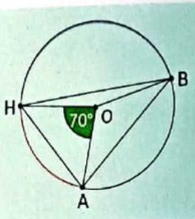
Ils interceptent l'arc en orange.

Comme mes $\widehat{HOA} = 70°$, on a :

$$\text{mes } \widehat{HBA} = \frac{\text{mes } \widehat{HOA}}{2} = \frac{70°}{2} = 35°.$$

Méthode

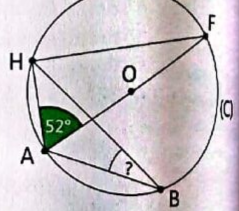
La mesure d'un angle aigu inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.



Exercice 2 **Justifier que deux angles ont la même mesure**
Déterminer la mesure d'un angle

Sur la figure ci-contre, A, B, F et H sont des points du cercle (C) de centre O et de diamètre [AF].

1. a) Justifie que le triangle AHF est rectangle en H.
   b) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{AFH}$.
2. Justifie que les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{AFH}$ ont la même mesure.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$.



Corrigé

1. a) AHF est un triangle inscrit dans un cercle dont le côté [AF] est un diamètre du cercle (C). Donc, le triangle AHF est un rectangle en H.
   b) Le triangle AHF étant rectangle en H, on a : mes $\widehat{AHF} = 90°$. Or dans un triangle, la somme des mesures des angles est 180°.
   On a : mes $\widehat{HAF}$ + mes $\widehat{AFH}$ + mes $\widehat{AHF} = 180°$.
   D'où : mes $\widehat{AFH} = 38°$.

Méthode

- Un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre du cercle est un triangle rectangle.
- La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.
- Deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

2. Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{AFH}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AH}$.
Donc : mes $\widehat{ABH}$ = mes $\widehat{AFH}$.
3. Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$.
On sait que mes $\widehat{ABH}$ = mes $\widehat{AFH}$ et mes $\widehat{AFH} = 38°$. D'où : mes $\widehat{ABH} = 38°$.

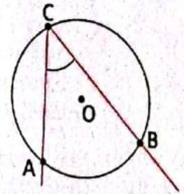
Résumé de cours

1 Angle inscrit

Définition

Un angle aigu inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle.

Exemple

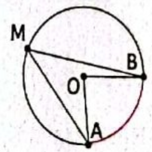


L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle aigu inscrit.
L'angle inscrit $\widehat{ACB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

2 Angle aigu inscrit et angle au centre associés

Définition

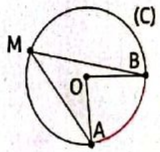
Un angle aigu inscrit dans un cercle et un angle au centre du même cercle qui interceptent le même arc sont dits associés.



L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ sont associés.

Propriété

La mesure d'un angle aigu inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

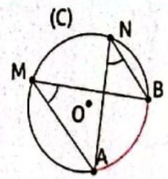


(C) est un cercle de centre O
$\widehat{AMB}$ est un angle aigu inscrit et $\widehat{AOB}$ l'angle au centre associé.
On a : mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

3 Angles aigus inscrits interceptant le même arc

Propriété

Dans un cercle, si deux angles aigus inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

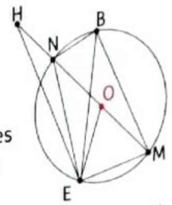


(C) est un cercle de centre O.
Les angles aigus inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.
On a : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$

EXERCICES

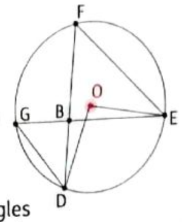
Exercices de renforcement

1 O est le centre du cercle ci-contre.
Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :



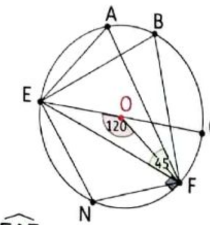
1. L'angle $\widehat{ENB}$ est inscrit dans le cercle (C).
2. L'angle $\widehat{ENO}$ est inscrit dans le cercle (C).
3. L'angle $\widehat{NOE}$ est inscrit dans le cercle (C).
4. L'angle $\widehat{BME}$ est inscrit dans le cercle (C).
5. L'angle $\widehat{NOM}$ est inscrit dans le cercle (C).
6. L'angle $\widehat{EOB}$ est inscrit dans le cercle (C).
7. L'angle $\widehat{EBM}$ est inscrit dans le cercle (C).
8. L'angle $\widehat{EHM}$ est inscrit dans le cercle (C).

2 O est le centre du cercle ci-contre.
Recopie les affirmations vraies.



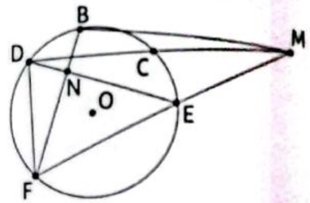
a) Les angles $\widehat{DFE}$ et $\widehat{DGE}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc.
b) Les angles $\widehat{DGE}$ et $\widehat{DOE}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc.
c) Les angles $\widehat{DBE}$ et $\widehat{DGE}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc.
d) Les angles $\widehat{FDG}$ et $\widehat{FEG}$ sont deux angles interceptant le même arc.
e) mes $\widehat{DFE}$ = $\widehat{DEG}$.
f) mes $\widehat{DFE}$ = mes $\widehat{DOE}$.
g) mes $\widehat{DEG} \neq$ mes $\widehat{DOE}$.

3 O est le centre du cercle ci-contre.



1. Détermine les angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{EF}$.
2. Détermine mes $\widehat{EAF}$.
3. Détermine mes $\widehat{ENA}$.
4. Réponds par vrai ou par faux :
   a) mes $\widehat{EAF}$ = mes $\widehat{EBF}$.
   b) mes $\widehat{EBF}$ = mes $\widehat{ENF}$.
   c) mes $\widehat{EOF}$ = 2 mes $\widehat{ECF}$.
   d) mes $\widehat{ENF}$ = $\frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOF}$.

4 O est le centre du cercle.
B, D, E et F sont des points de ce cercle.
Les droites (BF) et (DE) sont sécantes en N.
Les points D, C et M sont alignés.
Les points F, E et M sont alignés.



Recopie puis complète le tableau suivant :

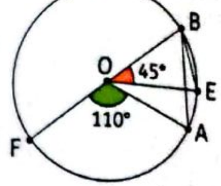
Angles	Inscrit (oui/non)	Arc intercepté	Angle au centre associé
$\widehat{DEF}$			
$\widehat{MDE}$			
$\widehat{BFM}$			
$\widehat{DMF}$			
$\widehat{EDF}$			
$\widehat{FNE}$			
$\widehat{CDE}$			

5 Le point O est le centre du cercle ci-contre.
A, B, D, E, F et K sont des points du cercle.
Les droites (AE), (BF) et (DK) sont sécantes en L.
En observant ce cercle :

a) Cite les angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{FA}$.
b) Cite les angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{KB}$.
c) Cite les angles inscrits de sommet K.

EXERCICES

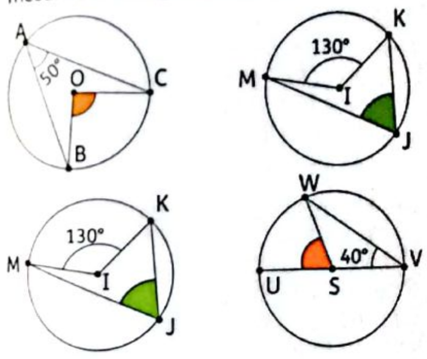
6 Sur la figure codée ci-dessous, A, B, E et F sont des points du cercle de centre O et de diamètre [BF].



1. Détermine un angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle que l'angle $\widehat{AOE}$.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{ABE}$.

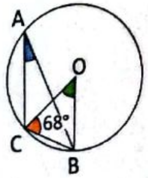
7 1. Trace un cercle (C) de centre I et de diamètre [AB] tel que : AB = 6 cm. Marque un point E sur (C) tel que : AE = 3 cm.
2. Détermine les natures des triangles ABE et AEI. Justifie tes réponses.
3. Détermine la mesure de chacun des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{BIE}$.

8 Dans chacun des cas suivants, calcule les mesures des angles coloriés.



9 ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle (C) de centre O tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit aigu. D est le point diamétralement opposé à A.
1. Fais une esquisse.
2. Démontre que : mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{ABC}$.
3. Démontre que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont complémentaires.

10 Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

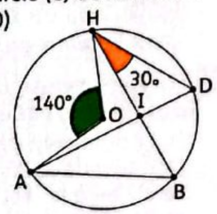


Le point O est le centre du cercle.

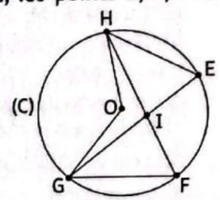
11 A, B et E sont trois points du cercle C (O ; r) tels que les points A et E soient diamétralement opposés et mes $\widehat{AEB}$ = 30°.
1. Fais une figure.
2. Calcule mes $\widehat{AOB}$.
3. Démontre que le triangle AOB est équilatéral.

12 Soit trois points non alignés A, B et C.
1. Construis le cercle (C) circonscrit à ce triangle. Soit O le centre de ce cercle et M le symétrique de B par rapport à O.
2. Donne la relation entre les mesures des angles suivants :
   a) mes $\widehat{MOC}$ et mes $\widehat{MBC}$.
   b) mes $\widehat{AOB}$ et mes $\widehat{AMB}$.
   c) Déduis-en mes $\widehat{AMB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.
3. Compare mes $\widehat{ACB}$ et mes $\widehat{AMB}$.
4. Déduis-en la nature de chacun des triangles ABM et MCB.

13 Sur la figure codée ci-dessous, les points D, B, A et H sont sur le cercle (C) de centre O.
Les droites (BH) et (AD) sont sécantes au point I.
Calcule la mesure de chaque angle du triangle ABI.



14 Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H sont sur le cercle (C) de centre O. Les droites (FH) et (EG) sont sécantes au point I.
mes $\widehat{HOG}$ = 130° et mes $\widehat{EHF}$ = 40°
Calcule la mesure de chaque angle du triangle FGI.



15 ABC est un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et tel que :
- les $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents ;
- mes $\widehat{AOB}$ = 60° et mes $\widehat{BOC}$ = 100°.

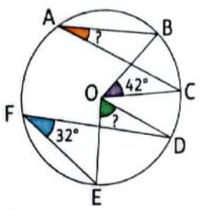
1. Fais une esquisse.
2. Calcule la mesure de chacun des angles du triangle ABC.

EXERCICES

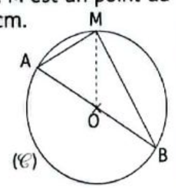
16 ABC est un triangle tel que : AB = 5 cm, mes $\widehat{ABC}$ = 60° et mes $\widehat{CAB}$ = 45°.
(C) est le cercle de centre O circonscrit à ABC.
1. Fais une figure.
2. Justifie que : mes $\widehat{BOC}$ = 90°.
3. Soit K le point diamétralement opposé à C.
   a) Calcule mes $\widehat{AKC}$.
   b) Démontre que (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAK}$.
4. Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AK}$.
   a) Quel est l'angle au centre associé à $\widehat{CMB}$?
   b) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{CMB}$.

Exercices d'approfondissement

17 Sur la figure codée ci-contre, A, B, C, D, E et F sont des points du cercle de centre O. Calcule les mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EOD}$.
O est le centre du cercle.

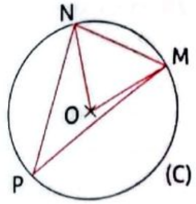


18 La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.
($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que : AB = 6 cm. M est un point du cercle tel que : BM = 4,8 cm.
a) Démontre que le triangle ABM est rectangle en M.
b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABM}$, arrondie au degré.
c) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$, arrondie au degré.



19 Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre. On considère la figure ci-après. Ses dimensions ne sont pas respectées, et on ne demande pas de la reproduire. M, N et P sont trois points d'un cercle (C) de centre O. On donne : OM = 3 cm ; mes $\widehat{MON}$ = 70°.
a) Démontre que le triangle OMN est isocèle. Précise le sommet principal.
b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{OMN}$.
c) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{MPN}$.

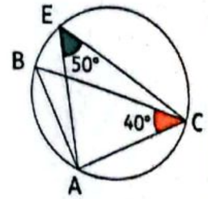
D'après brevet Paris, Amiens, Créteil, Lille, Rouen, Versailles, Septembre 2006.



20 On considère la figure codée ci-dessous où le cercle de centre O a pour diamètre [AC] de longueur 10 cm ; B est un point du cercle tel que : AB = 5 cm.
1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.
2. Calcule la valeur exacte de la distance BC.
3. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
4. La parallèle à la droite (AB) passant par O coupe le segment [BC] en H et le cercle en deux points D et E tels que : CD < CE.
   a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{HOC}$.
   b) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{DEC}$ et celle de l'angle $\widehat{DEA}$.

21 On considère un cercle (C) de centre O et A, M et B trois points distincts de (C) non diamétralement opposés deux à deux.
1. Justifie que les triangles AOB , AOM et BOM sont isocèles.
2. Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$.
3. On pose mes $\widehat{OAB} = \alpha$; mes $\widehat{OMA} = \beta$; mes $\widehat{OBM} = \gamma$.
   a) Exprime la somme des mesures des angles du triangle AMB en fonction de α, β et γ.
   b) En utilisant la propriété de la somme des angles dans un triangle, exprime 2α en fonction de β et γ.
   c) Déduis du b) et du 2) l'expression de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de β et γ.
   d) Déduis, en factorisant par 2, l'expression de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

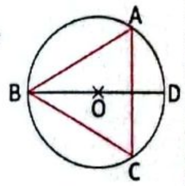
22 Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle en utilisant les informations fournies.



D'après brevet Nancy Metz, Besançon, Dijon, Lyon, Reims, Grenoble, Strasbourg, juin 2005.

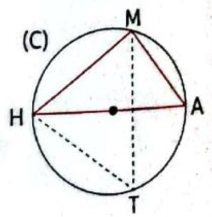
23 Sur la figure ci-dessous :
- ABC est un triangle équilatéral ;
- le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
- le point D est le point diamétralement opposé au point B sur ce cercle.

a) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifie.
b) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$? Justifie.



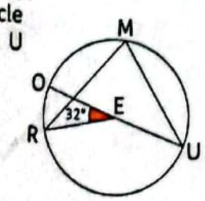
D'après brevet France métropolitaine, juin 2007

24 Sur la figure suivante, les mesures ne sont pas respectées.
On considère un cercle (C) de diamètre HA = 9 cm.
Soit M un point du cercle (C) tel que MA = 5,3 cm et T un autre point du cercle (C).
a) Justifie que MAH est un triangle rectangle.
b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{MHA}$, arrondie à l'unité.
c) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{HTM}$ (arrondie à l'unité).



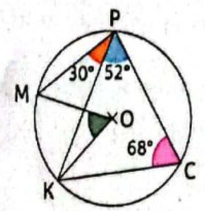
D'après brevet, Antilles Guyane, juin 2006.

25 Sur la figure ci-dessous, E est le centre du cercle et les points O, E et U sont alignés.



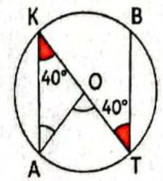
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{RMU}$.

26 En utilisant des informations portées sur la figure suivante, démontre que le triangle MOK est équilatéral.



O est le centre du cercle.

27 Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle et les points K, O et T sont alignés.



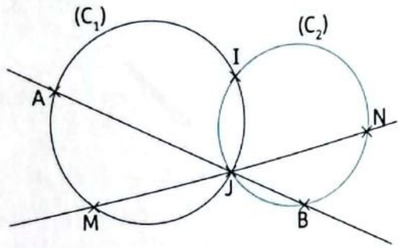
Démontre que les points A, O et B sont alignés.

28 Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC tel que : mes $\widehat{BAC}$ = 70° et BA = 5 cm et AC = 7 cm. On note O le centre de ce cercle.
1. Construis la figure.
2. On peut remarquer que $\widehat{BOC}$ est un angle au centre. Peut-on trouver un angle inscrit associé à l'angle au centre ?
3. D'après le cours, quelle relation y a-t-il entre cet angle inscrit et $\widehat{BOC}$?
4. Déduis-en la mesure de $\widehat{BOC}$.

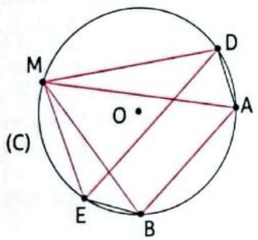
29 Sur la figure ci-après, les cercles (C_1) et (C_2) sont sécants en I et J. Les droites (AB) et (MN) se coupent en J.
1. Démontre que : mes $\widehat{IAJ}$ = mes $\widehat{IMJ}$.

EXERCICES

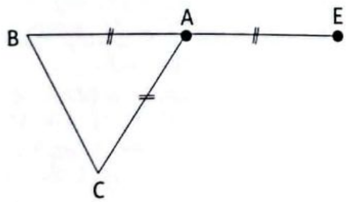
2. Démontre que : mes $\widehat{IBJ}$ = mes $\widehat{INJ}$.
3. Déduis-en que : mes $\widehat{AIB}$ = mes $\widehat{MIN}$.



30 Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O, les droites (AB) et (ED) sont parallèles telles que : mes $\widehat{ADE}$ = mes $\widehat{BED}$.
On se propose de démontrer que :
mes $\widehat{AMD}$ = mes $\widehat{BME}$.
1. Cite deux angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AE}$.
2. Cite deux angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{BD}$.
3. Déduis-en que : mes $\widehat{DMB}$ = mes $\widehat{AME}$.
4. Rédige la conclusion.



31 Dans cet exercice, on étudie la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur et sur laquelle :
- ABC est un triangle isocèle tel que AB = AC = 4 cm.
- E est le symétrique de B par rapport à A.

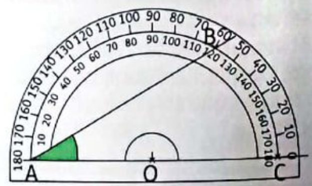


PARTIE 1
On se place dans le cas particulier où mes $\widehat{ABC}$ = 43 °.
1. Construis la figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifie ta réponse.
3. Prouve que l'angle $\widehat{EAC}$ mesure 86 °.

PARTIE 2
Dans cette partie, on se place dans le cas général où la mesure de $\widehat{ABC}$ n'est pas donnée. Jean affirme que pour n'importe quelle valeur de $\widehat{ABC}$, on a :
mes $\widehat{EAC}$ = 2mes $\widehat{ABC}$.
Jean a-t-il raison ? Donne ton avis par une démarche argumentée.

Situation d'évaluation

32 Léa, élève de 6e a mal placé son rapporteur pour mesurer l'angle $\widehat{BAC}$.
Sa grande sœur Noéli, élève de 3e observe le dessin et trouve la bonne mesure confirmée par leur maître de maison. Son frère jumeau en classe de 3e ne comprend pas comment cette dernière a pu trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
Détermine la mesure de l'angle trouvée par Noéli puis explique à son frère la stratégie qu'elle a utilisée.

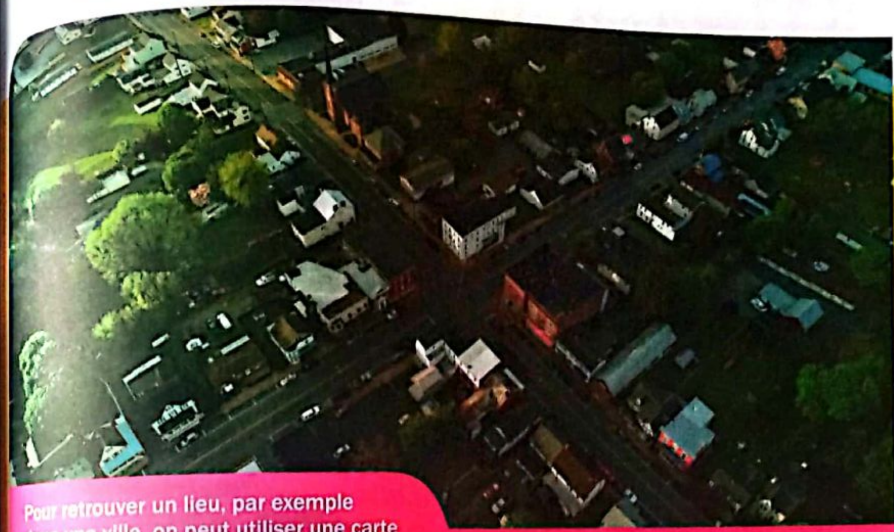


Coup de Pouce

30 4. Utiliser les angles adjacents.

31 Utiliser la propriété relative à la mesure d'un angle inscrit et de l'angle au centre associé.

Leçon 11 Vecteurs



Pour retrouver un lieu, par exemple dans une ville, on peut utiliser une carte indiquant des directions, des sens et des distances : c'est-à-dire des vecteurs.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de mathématiques d'une classe de 3e du lycée moderne de Cocody propose l'activité suivante à ses élèves :
Dans une équipe de deux personnes, l'une dispose de la figure 1 et l'autre de la figure 2.
La personne qui a la figure 1 donne des informations à l'autre pour placer les points P et Q.

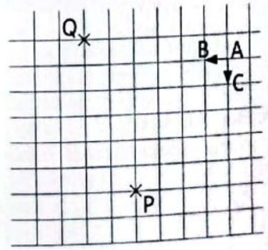


Figure 1

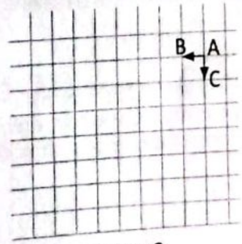


Figure 2

Un bonus est attribué à chaque équipe qui réussit l'activité.
Chaque élève veut participer à ce jeu. Pour cela, les élèves s'organisent par groupes de deux pour étudier les positions d'un point dans un quadrillage.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Rappels

Représenter :
- un vecteur ;
- des vecteurs égaux ;
- une somme de deux ou trois vecteurs.

Réduire :
des sommes de vecteurs.

2 Différence de deux vecteurs

Identifier :
La différence de deux vecteurs.
Construire :
une différence de deux vecteurs.

3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Identifier :
Le produit d'un vecteur par un nombre réel.
Connaître :
Les propriétés relatives au produit d'un vecteur par un nombre réel.
Construire :
Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel non nul et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné.

4 Vecteurs et configurations

Identifier :
- des vecteurs colinéaires ;
- des vecteurs orthogonaux ;
- des vecteurs directeurs d'une droite.

Connaître :
- la propriété de vecteurs de même direction.

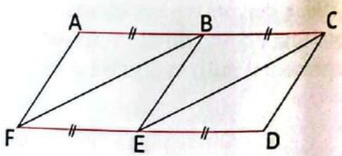
Démontrer :
- le parallélisme de droites ;
- la colinéarité de deux vecteurs ;
- l'alignement de points.

Traduire :
un langage géométrique par des égalités vectorielles et inversement.
Traiter :
une situation faisant appel aux vecteurs.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Rappels

Sur la figure codée ci-contre :
- ABEF et BCDE sont des losanges ;
- (AC) et (FD) sont deux droites parallèles.



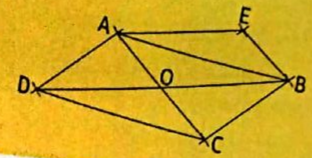
1. Cite des vecteurs égaux.
2. Cite un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}$.
3. Reproduis et construis un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$.
4. En utilisant l'égalité de Chasles, simplifie la somme suivante : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}$.

Synthèse

- Deux vecteurs sont égaux, s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
- Relation de Chasles. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les quadrilatères ABCD et AEBO sont des parallélogrammes.
1. Cite les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AO}$.
2. Simplifie la somme : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BE}$.



Activité 2 Différence de deux vecteurs

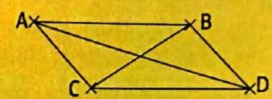
A, B et C sont des points du plan.
1. Recopie et complète l'égalité suivante : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{....}$
2. Donne l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Recopie et complète les égalités suivantes :
$\overrightarrow{CB}+\left(-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{....}=\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}=\overrightarrow{....}$.

Synthèse

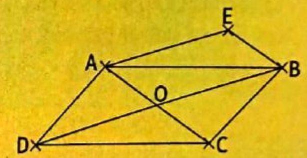
$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ est appelé différence des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
On pose par définition $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\left(-\overrightarrow{CA}\right)$.

Exercices de fixation

1 Observe la figure ci-contre et identifie :
a) le vecteur $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$;
b) le vecteur $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$.

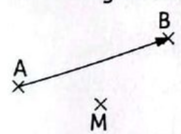


2 Sur la figure ci-contre, les quadrilatères ABCD et AEBO sont des parallélogrammes.
Réduis les écritures suivantes :
a) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{OA}$;
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$;
c) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}$.



Activité 3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

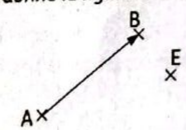
1. On donne la figure ci-dessous :



a) Reproduis et construis le point N tel que :
- (MN) et (AB) aient la même direction.
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ aient le même sens.
- MN = 2AB.

b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. On donne la figure ci-dessous :



a) Reproduis et construis le point F tel que :
- (EF) et (AB) aient la même direction.
- $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ aient des sens contraires.
- EF = 3AB.

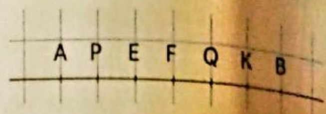
b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Synthèse

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$ se note $2\overrightarrow{AB}$.
  Le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel 2.
- Le vecteur $\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\right)$ se note $-3\overrightarrow{AB}$.
  Le vecteur $-3\overrightarrow{AB}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel −3.

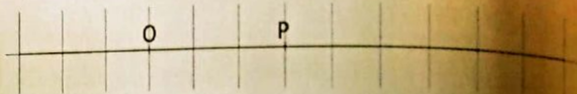
Exercices de fixation

1 On donne la figure ci-contre.
À l'aide du quadrillage, recopie les égalités qui sont vraies, parmi celles proposées ci-dessous.



$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{PK}=-4\overrightarrow{QF}$; $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AE}$.

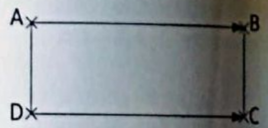
2 Reproduis la figure ci-dessous et place les points A, B et C tels que :
$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$; $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$
et $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{OP}$.



Activités 4 — Vecteurs et Configurations

1 Activité : Vecteurs de même direction

ABCD est un rectangle.
Recopie et complète les phrases ci-dessous.



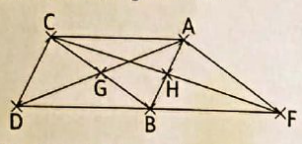
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour support la droite ....
Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour support la droite ....
Les droites (AB) et (DC) sont ....

Synthèse

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont des supports parallèles ; on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction.

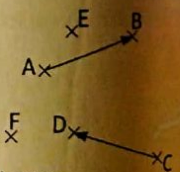
Exercices de fixation

1 Sur la figure ci-dessous, ABDC et BCAF sont des parallélogrammes.



1. Cite deux vecteurs de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Cite trois vecteurs de même direction que le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

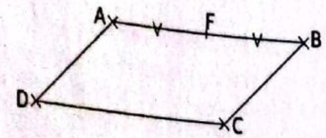
2 a) Reproduis la figure ci-contre.



b) Construis le point N tel que :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EN}$ aient la même direction ;
c) Construis le point M tel que :
Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FM}$ aient la même direction.

2 Activité : Vecteurs colinéaires

Sur la figure codée ci-contre :
- ABCD est un parallélogramme ;
- F est le milieu de [AB].



a) Cite des vecteurs de même direction.
b) Justifie que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AF}$.

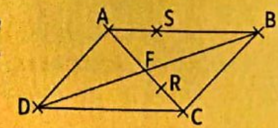
Synthèse

On dit qu'on a exprimé le vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AF}$.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsque l'un s'exprime en fonction de l'autre.

Exercices de fixation

1 Écris le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.
1. Deux vecteurs colinéaires ont toujours le même sens.
2. Deux vecteurs colinéaires ont toujours la même longueur.
3. Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

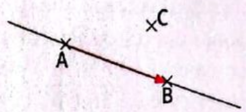
2 Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre F. S et R sont deux points tels que : S ∈ (AB) et R ∈ (AC).



a) Cite trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{DC}$.
b) Cite trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{RA}$.

3 Activité : Vecteur directeur d'une droite

A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Réproduis et construis la droite (D) qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (AB).

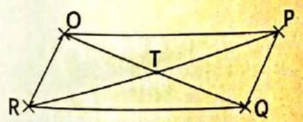


Synthèse

Les droites (D) et (AB) sont parallèles.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Exercices de fixation

1 Sur la figure ci-dessous, OPQR est un parallélogramme.



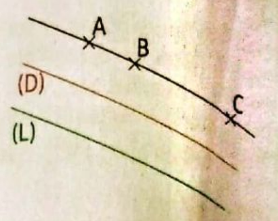
1. Réponds par **vrai** ou par **faux** à chacune des affirmations suivantes :

a) $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur directeur de la droite (OQ).
b) $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur directeur de la droite (RQ).
c) $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur directeur de la droite (RP).

2. Cite deux vecteurs directeurs de la droite (PQ).

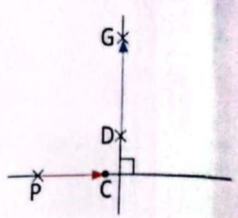
2 Sur la figure ci-contre, les trois droites (AB), (D) et (L) sont parallèles.
On donne les affirmations suivantes :
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) ;
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est un vecteur directeur de la droite (L) ;
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et de la droite (L).

Ces affirmations sont-elles vraies ? Justifie tes réponses.



4 Activité : Vecteurs orthogonaux

On donne la figure codée ci-contre.
Recopie et complète les phrases suivantes :
Le vecteur $\overrightarrow{PC}$ a pour support la droite ....
Le vecteur $\overrightarrow{DG}$ a pour support la droite ....
La droite (PC) et (DG) sont ....

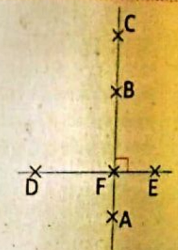


Synthèse

Les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{DG}$ ont des supports perpendiculaires ; on dit que les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont orthogonaux.

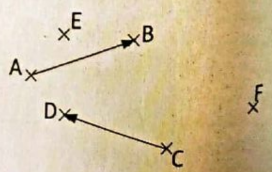
Exercices de fixation

1 Observe la figure ci-contre.
1. Trouve deux vecteurs orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{AF}$.
2. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
   a) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.
   b) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   c) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.



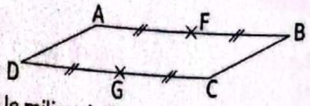
2 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

3 a) Reproduis la figure ci-contre.
b) Construis les points M et N tels que :
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM}$ soient orthogonaux ;
les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FN}$ soient orthogonaux.



5 Activité : Langage géométrique-langage vectoriel

ABCD est un parallélogramme ;
F est le milieu de [AB]. G est le milieu de [CD].
1. Donne des vecteurs égaux sur cette figure.
2. Traduis par une égalité vectorielle la phrase : " F est le milieu de [AB]".
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AF}$.
4. a) Justifie que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$.
   b) Donne une interprétation géométrique de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$.



Synthèse

- F est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ ou bien $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- A, F et B sont alignés équivaut à on peut trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AF}$.
- (AB) // (CD) équivaut à on peut trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ équivaut à dire que le quadrilatère AFGD est un parallélogramme.

Exercices de fixation

1 Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui indique la bonne réponse.

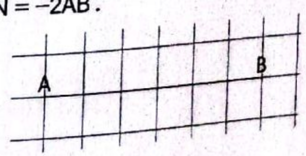
N°	Affirmations	Réponses
1	$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{PQ}$ équivaut à	a. (EF) // (PQ).
		b. P est le milieu du segment [EF].
		c. EF = PQ.
2	$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MD}$ équivaut à	a. N est le milieu du segment [MN].
		b. D est le milieu du segment [MN].
		c. MN = DM.

2 ABC est un triangle. On considère les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$.
Démontre que A, E et F sont alignés.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 **Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel non nul et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur donné**

Reproduis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ci-dessous puis construis les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$.

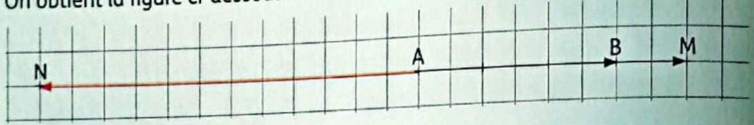


Corrigé

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ signifie que :
- $M \in (AB)$;
- Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens ;
$AM = \frac{4}{3}AB$.

L'égalité $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ signifie que
- $N \in (AB)$;
- Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires ;
- $AN = 2AB$.

On obtient la figure ci-dessous :



Méthode

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
- Si $k > 0$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction et le même sens.
- Si $k < 0$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction et de sens contraires.

Exercice 2 Réduire des sommes de vecteurs

Réduis la somme de vecteurs suivant : $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.

Méthode

On utilise l'égalité de Chasles.

Exercice 3 Démontrer la colinéarité de deux vecteurs

ABC est un triangle. Soit M et N deux points définis par : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AC}$.
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Corrigé

On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ (Egalité de Chasles) :

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = -\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Méthode

Pour Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, on détermine un nombre réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$.

Exercice 4 Démontrer l'alignement des points

DEF est un triangle.
Soit M et N deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DF}$.
Démontre que les points D, M et N sont alignés.

Corrigé

Méthode 1

On a :

$\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DF}\right)$

$\overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DN}$

Donc D, M et N sont alignés.

Méthode

Pour Démontrer que les points D, M et N sont alignés, on détermine un nombre réel k tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DN}$ où $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DM}$.

Méthode 2

On a : $\overrightarrow{DN} = -2\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{DE} - 2\overrightarrow{DF}\right)$

$\overrightarrow{DN} = -2\overrightarrow{DM}$

Donc D, M et N sont alignés.

Exercice 5 Démontrer le parallélisme de deux droites

ABC est un triangle.
Soit M et N deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.
Démontre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

Corrigé

On a :

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; donc les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

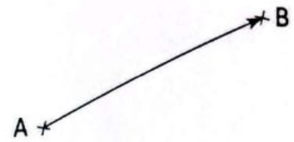
Méthode

Pour Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles, on détermine un nombre réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AC}$.

1 Rappels

1.1. Détermination d'un vecteur

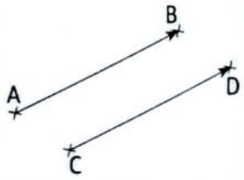
A et B sont deux points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :
- sa direction, celle de la droite (AB) ;
- son sens, de A vers B ;
- sa longueur, celle du segment [AB].



1.2. Égalité de vecteurs

Définition

On appelle vecteurs égaux, des vecteurs qui ont :
- la même direction ;
- le même sens ;
- la même longueur.



- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, **donc les vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.
- Les couples (A ; B) et (C ; D) ont le même, **donc les vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens.
- Les segments [AB] et [CD] ont **la même longueur ;**

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

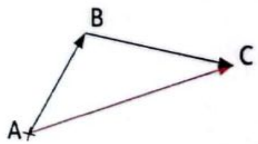
1.3. Somme de vecteurs, égalité de Chasles

Propriété

Égalité de Chasles

A, B et C sont trois points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Réduction d'une somme de vecteurs

Méthode

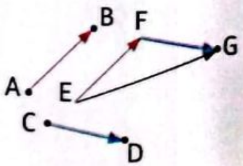
Pour réduire une somme de vecteurs on utilise l'égalité de Chasles.

1.4. Représentation de la somme de deux vecteurs

a. Construction d'un représentant d'origine un point E quelconque du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ grâce à la relation de Chasles

Méthode

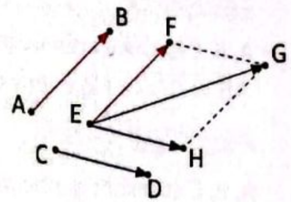
- À partir du point E, on construit le vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
- À partir du point F, on construit le vecteur $\overrightarrow{FG}$ tel que : $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CD}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.



b. Construction d'un représentant d'origine E du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ grâce à la règle du parallélogramme

Méthode

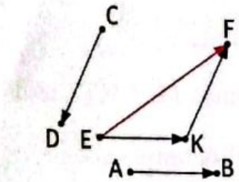
- À partir du point E, on construit le vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
- À partir du point E, on construit le vecteur $\overrightarrow{EH}$ tel que : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CD}$.
- On construit le point G tel que le quadrilatère EFGH soit un parallélogramme.
- Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.



2 Différence de deux vecteurs

Définition

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.
On appelle différence du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{CD}$, le vecteur noté $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ défini par : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right)$.

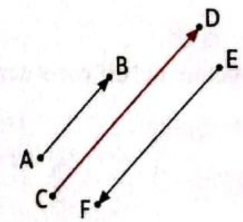


$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$

3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

A et B sont deux points distincts du plan.
On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$, noté $k\overrightarrow{AB}$ tel que :
- (MN) et (AB) ont la même direction ;
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens lorsque k est positif et sont de sens contraires lorsque k est négatif ;
- MN = kAB lorsque k est positif ou MN = $-k$AB lorsque k est négatif.



$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k > 0$ et
$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k < 0$

Remarques

- Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.
- Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.
- Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k\overrightarrow{AB}$.

Propriété

A, B, C et D sont des points du plan ; k et h sont des nombres réels.
On admet que :
- $k\left(h\overrightarrow{AB}\right) = (kh)\overrightarrow{AB}$;
- $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$;
- $k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k+h)\overrightarrow{AB}$;
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

4 Vecteurs et Configurations

4.1. Vecteurs de même direction

Définition

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Propriété

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction équivaut à on peut trouver un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Remarque

Lorsque : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

4.2. Vecteurs colinéaires

a) Définition

Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou lorsque l'un au moins des deux est le vecteur nul.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

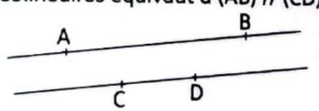
b) Propriétés

Propriété 1

A, B, C et D sont quatre points du plan.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Propriété 2

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à (AB) // (CD).



Propriété 3

A, B et M sont trois points du plan.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires équivaut à A, B et M sont alignés.

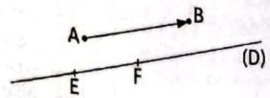
4.3. Vecteur directeur d'une droite

Définition

On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles ou confondues.

Exemple

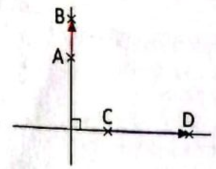
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (D).



4.4. Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Notation

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux se note : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

5 Langage géométrique-langage vectoriel

	Langage géométrique	Langage vectoriel
Milieu d'un segment	I milieu de [AB]	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Points alignés	A, B et M sont alignés	On peut trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Droites parallèles	(AB)//(CD)	On peut trouver un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
Parallélogramme	ABCD est un parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

EXERCICES

Exercices de renforcement

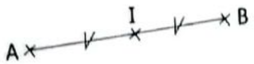
1 Complète les phrases ci-dessous par l'une des expressions suivantes : **colinéaires ; orthogonaux ; vecteur directeur ; la même direction.**

1. L'égalité $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont .... et sont deux vecteurs ....

2. Un vecteur non nul dont le support est parallèle à une droite donnée est un .... de cette droite.

3. Deux vecteurs sont dits .... lorsqu'ils sont des.............................. de cette droite.

2 I est le milieu du segment [AB].
Soit M et N deux points quelconques du plan.
Écris plus simplement les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$; $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}$;
$\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IA}$.



3 Réduis les sommes vectorielles suivantes :
a) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FG}$;
b) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FH}$;
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{FE}$.

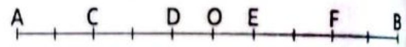
4 En utilisant les propriétés relatives au produit d'un vecteur par un nombre réel, simplifie les écritures suivantes :
a) $2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
c) $\frac{1}{3}\left(-12\overrightarrow{AB}\right)$;
d) $\frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{7}\overrightarrow{CB}$;
e) $10\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{CD}\right) - 5\left(2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}\right)$.

5 A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Dans chacun des cas suivants, construis le point M tel que :
a) $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{CM} = (-3)\overrightarrow{AB}$;
c) $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

6 Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Langage géométrique	Langage vectoriel
A est milieu du segment [IJ].	..............ou..............
	$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$
	$\overrightarrow{EF} = \frac{-4}{7}\overrightarrow{HK}$
EFGH est un parallélogramme.	

7 A, B, C, D, E, F et O sont des points du plan. Le segment [AB] est divisé en dix segments de même longueur.

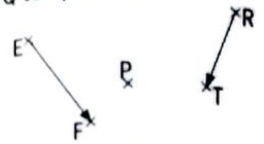


Recopie et complète les égalités suivantes par le nombre ou le point qui convient :
a) $\overrightarrow{DF} = ...\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{A....}$;
c) $\overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{....E}$, d) $\overrightarrow{CD} = ...\overrightarrow{EB}$;
e) $\overrightarrow{...O} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF}$.

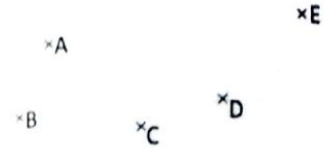
8 Dans chacun des cas ci-dessous, exprime le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
1. $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{BA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.
2. $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$.

9 A et B sont deux points du plan distants de 2,5 cm.
Construis les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$.

10 Reproduis la figure ci-dessous puis construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{RT}$.



11 Reproduis la figure ci-dessous puis construis le point G tel que : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE}$.



12 a) Trace un segment [CK].
b) Construis le point O tel que $\overrightarrow{CO} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{KC}$.
c) Donne ton programme de construction.

13 RST est un triangle.
1. Construis le point E tel que :
$\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TR}$.
2. Justifie que le quadrilatère RTSE est un parallélogramme.

14 L, M, N et O sont des points du plan tels que :
$\overrightarrow{LM} = 2\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LO} = 6\overrightarrow{LE}$.
Justifie que les points L, M et O sont alignés.

15 H, I et J sont des points non alignés. E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{HE} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{FH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{HI}$.
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

16 DEF est un triangle.
Soit P et Q deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{DP} = -3\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$.
Démontre que les points D, P et Q sont alignés.

17 ABCD est un parallélogramme de centre I.
1. Simplifie : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$.
2. Justifie que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AI}$.

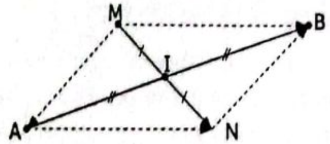
18 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN}$.
Justifie que les points A, B et N sont alignés.

19 [MN] est un segment de longueur 3 cm et T est un point du plan tel que :
$2\overrightarrow{TM} - 3\overrightarrow{TN} = \vec{0}$.
1. Justifie que : $\overrightarrow{TM} = -3\overrightarrow{MN}$.
2. Construis le point T.

20 ABC est un triangle équilatéral et I est un point extérieur à ce triangle.
1. Construis les points D, E et F tels que :
$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
2. Démontre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3. Démontre que le triangle DEF est équilatéral.

21 ABC est un triangle.
M et N sont deux points du plan tels que :
$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.
Démontre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

22 Soit I le milieu du segment [AB] et M un point n'appartenant pas à la droite (AB).



Démontre que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

23 On considère un triangle ABC et les points D et E définis par : $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
1. Fais une figure avec ces cinq points.
2. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$.
3. a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.
b) Que peut-on dire des droites (BE) et (DC) ? Justifie ta réponse.

24 L'unité de longueur est le cm.
1. a) Construis un segment [AB] de longueur 3.
b) Construis le point M de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Donne un programme de construction du point M.

25 L'unité de longueur est le cm.
1. a) Construis un segment [EF] de longueur 3.
b) Construis le point N de la droite (EF) tel que : $\overrightarrow{EN} = -2\overrightarrow{EF}$.
2. Donne un programme de construction du point N.

26 L'unité de longueur est le cm.
1. a) Construis un segment [RS] de longueur 4.
b) Construis le point T de la droite (RS) tel que : $\overrightarrow{RT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RS}$.
2. Donne un programme de construction du point T.

27 L'unité de longueur est le cm.
1. a) Construis un segment [OP] de longueur 4.
b) Construis le point Q de la droite (OP) tel que : $\overrightarrow{OQ} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}$.
2. Donne un programme de construction du point Q.

28 Soit ABC un triangle
1. Construis les points D et E tels que :
$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que (DE)//(BC).

29 A, B, C, D et E sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
1. Exprime $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. Déduis-en que : (ED)//(AB).

30 Trois points A, B et C sont tels que :
$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
1. Justifie que : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Après avoir placé deux points A et B, construis le point C.

31 Soit OAB un triangle.
1. Construis les points C et D tels que :
$\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.
2. Justifie que les points O, B et D sont alignés.

32 Soit CID un triangle.
1. Construis les points A et B tels que :
$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DI}$.
2. Justifie que I est le milieu de [AB].

33 Soit ABC un triangle.
1. Construis les points D et E tels que :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
2. Justifie que C est le milieu du segment [DE].

34 Les points A, B, C, D et O ne sont pas tous alignés tels que :
$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.
Justifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

35 L'unité de mesure est le centimètre.
ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = 7 et BC = 3.
1. a) Construis le point E tel que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
b) Construis le point D tel que :
$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. a) Démontre que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
b) Exprime $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c) Démontre que les points B, D et C sont alignés.

36 A, B, C, R et S sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
1. Justifie que : $\overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Déduis-en que (RS) // (AB).

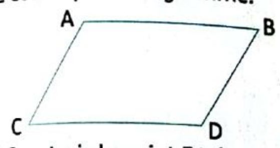
37 Trace un triangle ABC.
1. Construis le point E tel que : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$.
2. Construis le point D tel que :
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.
3. Construis le point H tel que : $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BC}$.

Exercices d'approfondissement

38 On donne les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{FA} = 3\left(\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{ED}\right)$ et $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CN} + 6\overrightarrow{DE}$.
1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{FG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.
3. Déduire de la consigne 2) que les droites (FG) et (MN) sont parallèles.

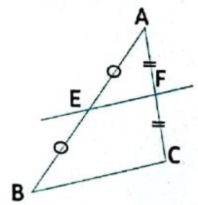
39 On considère un triangle ABD.
1. Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. a) Justifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$.
b) Déduis-en la nature du quadrilatère ABFD.
3. Justifie que le point D est le milieu du segment [EF].

40 ABFE est un parallélogramme.



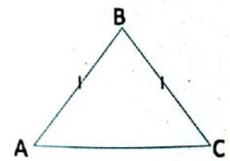
1. a) Construis le point F tel que :
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCF ? Justifie ta réponse.
2. a) Justifie que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CD}$.
b) Déduis-en que C est le milieu du [FD].

41 Sur la figure codée ci-dessous, ABC est un triangle, E et F sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].



1. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.
2. Déduis-en que : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.

42 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en B.
On donne : AB = BC = 4 et AC = 3.



1. a) Reproduis la figure ci-dessous.
b) Construis le point F tel que :
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + -3\overrightarrow{BC}$.
2. Justifie que :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$.

43 ABCD est un parallélogramme.
Soit I et J des points du plan tels que :
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.
1. Fais une figure en utilisant les indications données.
2. a) Démontre que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{BD}$.
3. Déduis-en que les points C, I et J sont alignés.

44 1. a) Construis un triangle ABC et place le point I milieu du segment [BC].
b) Sur cette figure, construis :
- Le point D tel que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$;
- Le point E tel que : $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BA}$;
- Que peux-tu conjecturer sur les points D, I et E ?

2. a) Démontre que $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$.
3. Calcule $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE}$.
Déduis-en que I est le milieu de [DE].

45 Soit O un point et A, B, M et N des points non alignés tels que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.
Démontre que AMBN est un parallélogramme.

46 Soit ABC un triangle.
1. Construis les points D et E tels que :
$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontre que le point C est le milieu du segment [AD].

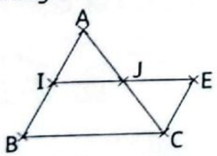
47 L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que : AB = 5, AC = 6 et BC = 4.
Construis les points E, F, G et K tels que :
$2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$; $4\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AC}$ et
$\overrightarrow{EK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICES

Situations d'évaluation

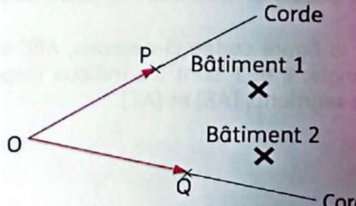
48 Deux amis, Max "M" et Alice "A", marchent ensemble sur une même voie rectiligne (D) jusqu'à un carrefour "C" où ils décident de se séparer. Max revient sur son chemin tandis qu'Alice continue son chemin sur cette même voie.
Mais avant de se quitter, la fille demande à son ami : « Dans quelle direction vas-tu ? » et le garçon répond : « Dans la même direction que toi ». Alice, étonnée, n'est pas satisfaite de la réponse de son ami qui tente de le lui expliquer.
a) En utilisant les points M, A, et C, représente sur une droite (D) la direction et le sens des deux au moment où ils se séparent.
b) La réponse de Max à Alice est-elle juste ? Justifie ta réponse.
c) Quelle devrait être la question d'Alice ?

49 Un élève a manqué le cours de mathématiques sur les propriétés relatives à la droite des milieux dans un triangle. Pour se mettre à jour, il prend le cahier de son voisin qui malheureusement a mélangé les différentes étapes d'une démonstration faite lors de cette séance.
Cet élève doit remettre les sept étapes du raisonnement dans le bon ordre afin d'éviter une sanction de la part de son professeur qui a promis contrôler les cahiers au prochain cours.
Sur la figure ci-dessous, AICE est un parallélogramme, le point I est le milieu du côté [AB] du triangle ABC.



Démontre que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

50 En vue de prendre part à l'opération « école propre » initiée par la DREN (Direction Régionale de l'Éducation Nationale), les membres du club de salubrité d'un établissement scolaire ont la lourde tâche d'abattre un grand arbre situé dans la cour de leur établissement. Pour éviter que cet arbre tombe sur les bâtiments, ils se répartissent en deux groupes et chaque groupe tire sur une corde attachée au même endroit de l'arbre représenté par le point O (voir figure).
Les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ représentent les différentes forces de traction. Pour prendre des précautions, ils souhaitent connaître la direction et le sens suivis par cet arbre dans sa chute.
1. Construis à partir de la figure ci-dessous, la direction et le sens suivis par cet arbre dans sa chute.
2. Dis si les bâtiments ne seront pas atteints.



Coup de Pouce

43 On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ comme suit :
- $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$.
- $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ}$.

et utiliser la propriété suivante : ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

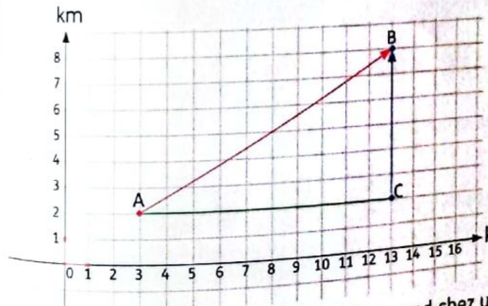
44 Vocabulaire : Conjecturer veut dire : faire une hypothèse.

Leçon

12 Coordonnées de vecteurs

Pour situer une rue sur le plan d'une ville, pour utiliser un tableur sur un ordinateur et dans de nombreuses circonstances de la vie quotidienne ou professionnelle, nous utilisons par habitude, un système de repérage dont la création date du 17^e siècle. La légende rapporte que le mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650) a eu cette idée en observant un insecte se déplacer sur les petits carreaux de sa fenêtre. Ainsi, naquirent « les coordonnées cartésiennes » et les « repères cartésiens ».

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Monsieur Koffi entreprend un voyage d'une ville A à une ville B. À son arrivée dans la ville B, il se rapproche du chauffeur pour savoir la distance parcourue entre ces deux villes. Le chauffeur regarde sur son tableau de bord et lui répond environ 10 km.

Pour avoir une idée plus nette, M. Koffi se rend chez un géographe de la ville de destination qui, après consultation du système de repérage, lui donne les coordonnées précises des villes A (3 ; 2) et B (13 ; 8) en kilomètres et la figure ci-dessus. Monsieur Koffi demande à son fils en classe de 3^e de calculer la distance parcourue. Avec l'aide de ses camarades de classe, ils décident de faire des calculs.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Coordonnées d'un vecteur

Identifier :
- les différents repères du plan ;
- les coordonnées d'un vecteur.

Lire :
le couple de coordonnées d'un vecteur dans un repère.

Calculer :
les coordonnées d'un vecteur.

2 Vecteurs égaux

Identifier :
l'égalité de deux vecteurs à partir de leurs couples de coordonnées.

3 Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

Identifier :
les coordonnées d'une somme de deux vecteurs.

4 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Identifier :
les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.

5 Vecteurs colinéaires

Connaître :
la propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs.

Démontrer :
- que deux vecteurs sont colinéaires ;
- que deux droites sont parallèles ;
- que des points sont alignés.

6 Distance de deux points

Connaître :
la propriété relative à la distance de deux points.

Calculer :
la distance de deux points.

7 Vecteurs orthogonaux

Connaître :
la propriété relative à l'orthogonalité de deux vecteurs.

Démontrer :
- que deux vecteurs sont orthogonaux ;
- que deux droites sont perpendiculaires.

8 Coordonnées du milieu d'un segment

Identifier :
les coordonnées du milieu d'un segment.

Calculer :
les coordonnées du milieu d'un segment.

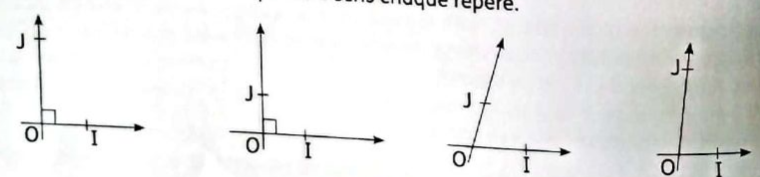
Traiter :
une situation faisant appel aux coordonnées de vecteurs.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Coordonnées d'un vecteur

1 Activité : Les repères du plan

Un repère du plan est un triplet (O, I, J) de points non alignés du plan. La droite (OI) est l'axe des abscisses, la droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point d'intersection O des axes est l'origine du repère.
Voici ci-dessous différents repères. Décris chaque repère.

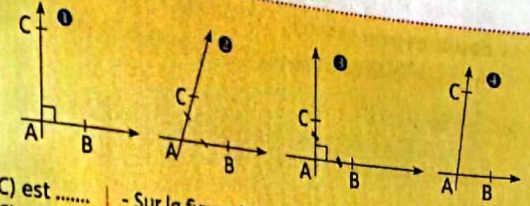


Synthèse

Repères du plan
- Un repère du plan est un triplet (O, I, J) de points non alignés du plan.
- Il est orthogonal lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
- Il est orthonormé lorsqu'il est orthogonal et OI = OJ.

Exercice de fixation

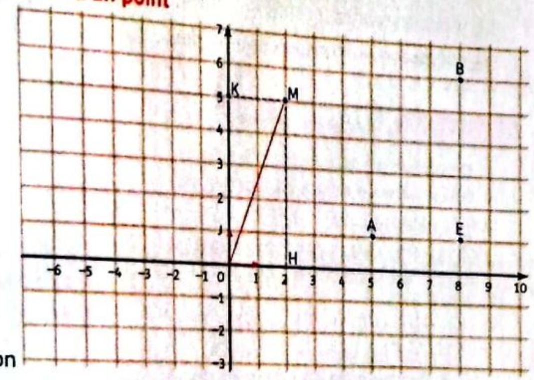
En observant les figures ci-contre, complète chacune des phrases suivantes par : *quelconque ; normé ; orthogonal* ou *orthonormé*.



- Sur la figure 1, le repère (A, B, C) est ......
- Sur la figure 2, le repère (A, B, C) est ......
- Sur la figure 3, le repère (A, B, C) est ......
- Sur la figure 4, le repère (A, B, C) est ......

2 Activité : Couple de coordonnées d'un point

On considère le repérage ci-contre dans le repère (O, I, J).



a) Reproduis la figure.
b) Écris le vecteur $\overrightarrow{OH}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$ et le vecteur $\overrightarrow{OK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
c) Écris le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$. Déduis-en l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
On dit que le point M a pour coordonnées (2 ; 5) dans le repère (O, I, J).
d) Donne les coordonnées des points A, B et E puis place les points C(4 ; −2) et D(−5 ; 3) dans le repère (O, I, J).

Synthèse

Coordonnées d'un point
- $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} + 5\overrightarrow{OJ}$ on dit que le point M a pour couple de coordonnées (2 ; 5) dans le repère (O, I, J) et on note M(2 ; 5) ou $M\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.
- A(5 ; 1) dans le repère (O, I, J) équivaut à $\overrightarrow{OA} = 5\overrightarrow{OI} + 1\overrightarrow{OJ}$.

Exercice de fixation

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), place les points A(−1 ; 2) ; B(3 ; 5) et C(4 ; 0).
2. Écris chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

3. Déduis des questions précédentes l'écriture de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

3 Activité : Couple de coordonnées d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ dans le repère (O, I, J). Justifie que : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et déduis-en que : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$.

b) Déduis de la question a) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J).

Synthèse

Coordonnées d'un vecteur

Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

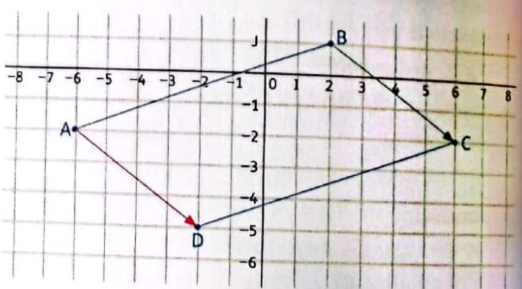
Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points E(12 ; −25) ; F(0 ; −4) et G (−7 ; −9).
Détermine les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FG}$.

Activité 2 Vecteurs égaux

On considère le parallélogramme ABCD dans un repère (O, I, J).

1. Justifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. a) Par une lecture graphique, donne les coordonnées des points A, B, C et D.
   b) Déduis-en les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   c) Compare les coordonnées de ces deux vecteurs.



3. Donne une condition relative aux coordonnées de deux vecteurs pour qu'ils soient égaux.

Synthèse

On admet que :
- Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coordonnées.
- Pour $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

Exercices de fixation

1 Complète les phrases suivantes :
- Deux vecteurs sont .... lorsqu'ils ont les mêmes ....
- Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KP}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\alpha = -5$ et $\beta = 8$ équivaut à ....

1 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux.
Dans un repère (O, I, J), le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées (2 ; −3).
Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J).

2 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont égaux.
Dans le repère (O, I, J), on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$. Détermine x et y.

Activité 3 Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

A, B, A' et B' sont quatre points du plan muni d'un repère (O, I, J).
On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. Recopie et remplace les pointillés par x, y, x' ou y'.
   - $\overrightarrow{AB} = ... \overrightarrow{OI} + ... \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{A'B'} = ... \overrightarrow{OI} + ... \overrightarrow{OJ}$.
   - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = (...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}) + (...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}) = (... + ...)\overrightarrow{OI} + (... + ...)\overrightarrow{OJ}$.
2. Déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$.

Synthèse

Si dans un repère, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exercices de fixation

1 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
2. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$.
3. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

2 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points :
$A\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Détermine les coordonnées du vecteur suivant : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Activité 4 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient k, x et y trois nombres réels.
On donne : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

1. Recopie et remplace les pointillés par les expressions qui conviennent.
On a : $k\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{OI} + ...\overrightarrow{OJ}$ donc le vecteur $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$.
2. Détermine les coordonnés du vecteur $-1 \times \overrightarrow{AB}$.
3. On donne $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Détermine les coordonnés de $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF}$.

Synthèse

- Soit k un nombre réel. Si dans un repère, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
- Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $-1 \times \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
- Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF})\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

Exercices de fixation

1. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Recopie et remplace les pointillés par les nombres qui conviennent :
   - Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ alors $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$
   - Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$ alors $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$
   - Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ alors $-5\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$
   - Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\\-10\end{pmatrix}$ alors $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\\cdots\end{pmatrix}$

2. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
   Sachant que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$,
   détermine les coordonnées des vecteurs suivants : $-\overrightarrow{AB}$; $5\overrightarrow{AB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

3. Dans le plan muni d'un repère, on donne : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
   Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{EF}$.

Activité 5 Vecteurs colinéaires

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

1. Démontre que :
   a) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.
   b) Déduis-en que : $x'y - xy' = 0$.
2. a) Démontre que : si $x'y - xy' = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.
   b) On suppose que : $x = 0$ et $y = 0$. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.
   c) On suppose que : $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On pose $k = \frac{x'}{x}$.
   Justifie que : $\frac{y'}{y} = k$.
   d) Déduis de c) que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.
3. Énonce la propriété démontrée.

Synthèse

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $x'y - xy' = 0$.

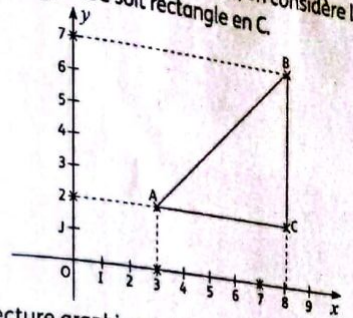
Exercices de fixation

1. Le plan est muni d'un repère.
   Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
   1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
   2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
   3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-10\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

2. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
   Justifie que les vecteurs suivants sont colinéaires :
   1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-10\\12\end{pmatrix}$.
   2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\21\end{pmatrix}$.
   3. $\overrightarrow{RB} = 8\overrightarrow{OI} - 12\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{PK} = -2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$.

Activité 6 Distance de deux points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$ tels que le triangle ABC soit rectangle en C.



1. a) Détermine par lecture graphique : AC et BC.
   b) Déduis-en la distance AB.
2. On considère le graphique ci-dessus.
   Détermine graphiquement :
   a) les coordonnées des points A, B et C.
   b) Soient : $a = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2}$; $b = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$ et $c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
   Calcule a, b et c.
   c) Compare les résultats avec les distances (c et AB) ; (b et AC) et (a et BC).

Synthèse

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
- Si $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Si $\overrightarrow{AB}(x, y)$, $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

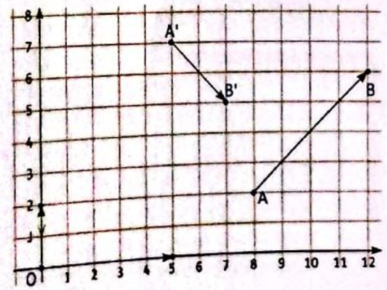
Exercices de fixation

1. Dans un repère orthonormé, on donne les points E(−5 ; 8) et F (−9 ; −1). Calcule la distance EF.
2. Dans un repère orthonormé, on donne : $\overrightarrow{AB}(2;4)$. Calcule la distance AB.
3. Dans un repère orthonormé, on donne : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$. Justifie que : $BC = 3\sqrt{2}$.

Activité 7 Vecteurs orthogonaux

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Posons : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{A'B'}$.



1. a) Reproduis la figure.
   b) Construis les points M et N.

2. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{MN}$.

3. En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en O, justifie que : $xx' + yy' = 0$.

$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + ... + ... + y^2$.

4. Justifie que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Synthèse

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) :
les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Exercices de fixation

1 Le plan muni d'un repère orthonormé.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI} + 11\overrightarrow{OJ}$ et $-13\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

2 Dans un repère orthonormé, on donne :
$\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont orthogonaux.

Activité 8 Coordonnées du milieu d'un segment

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne : $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$ et $K(x_K ; y_K)$ des points du plan. On suppose que K est le milieu du segment AB.

Justifie que : $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Synthèse

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) et $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$ et $K(x_K ; y_K)$ des points du plan.
K est le milieu du segment [AB] équivaut à $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exercices de fixation

1 Dans le plan muni du repère (O, I, J).
On donne les points E(−1 ; 7) et F(5 ; −2).
Calcule les coordonnées du milieu I du segment [EF].

2 Dans le plan muni du repère (O, I, J).
On donne les points A(−19 ; 4) et B(9 ; 2).
Justifie que le point K(−5 ; 3) est le milieu du segment [AB].

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Déterminer les coordonnées d'un point

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on donne les points A(−3 ; 2), B(2 ; −2) et C(5 ; 2).
Détermine les coordonnées $(x ; y)$ du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Corrigé

ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix}$

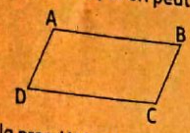
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix}$

équivaut à $\begin{cases} 5 = 5 - x \\ -4 = 2 - y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$

On en déduit que D(0 ; 6).

Méthode

- Pour ne pas se tromper on peut faire une figure.



- Utiliser la propriété suivante :
ABCD est parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exercice 2 Utiliser les coordonnées d'un vecteur pour justifier une propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(5 ; 2,5), B(1,25 ; 5) ; R(1 ; 3), S(7 ; 6) et K(4 ; 4,5).

1. a) Justifie que le point K est le milieu du segment [RS].
   b) Justifie que les points A, B et K sont alignés.
2. a) Justifie que les droites (AB) et (RS) sont perpendiculaires.
   b) Justifie que la droite (AB) est la médiatrice du segment [RS].

Corrigé

1. a) Soit E le milieu de [RS].
On a donc : $x_E = \frac{1+7}{2} = 4$ et
$y_E = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$.
On constate que E = K donc le point K est le milieu de [RS].

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 5-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et
$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 4-5 \\ 4,5-2,5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

on a : $-2 \times 2 - (-1) \times 4 = -4 + 4 = 0$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires, ainsi les droites (AB) et (AK) sont parallèles et ont le point A en commun donc les points A, B et K sont alignés.

2. a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a : $-2 \times 6 + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont orthogonaux. On en déduit que les droites (AB) et (RS) sont perpendiculaires.

b) La droite (AB) est la médiatrice du segment [RS] car (AB) est perpendiculaire (RS) en K milieu de [RS].

Méthode

- Utiliser la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segment.
- Utiliser une égalité vectorielle pour justifier que des points sont alignés.
- Pour justifier que des droites sont perpendiculaires à l'aide des coordonnées des vecteurs, on utilise la relation $xx' + yy' = 0$.

Exercice 3 — Utiliser les coordonnées d'un vecteur pour justifier qu'un quadrilatère est un losange

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points P(−1 ; −2), Q(3 ; 0) et S(1 ; 2).

1. Justifie que les points P , Q et S ne sont pas alignés
2. Justifie que : PQ = PS.
3. Soit A le milieu de [QS] et R le symétrique de P par rapport à A.
   a) Détermine les coordonnées de A et de R.
   b) Justifie que le quadrilatère PQRS est un losange.

Méthode

- Pour justifier que les points ne sont pas alignés on utilise $x'y - xy' \neq 0$.
- R est le symétrique de P par rapport à A signifie que A est le milieu du segment [RP].

Corrigé

1. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 3+1 \\ 0+2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a : $4 \times 4 - 2 \times 2 = 16 - 4$ et $12 \neq 0$, donc les points P, Q et S ne sont pas alignés.

2. $\left.\begin{array}{l} PQ = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ PS = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{array}\right\}$ donc PQ = PS.

3. a) A milieu de [QS] équivaut à $x_A = \dfrac{3+1}{2}$ et $y_A = \dfrac{0+2}{2}$

équivaut à $x_A = 2$ et $y_A = 1$ soit A(2 ; 1)

$S_A(P) = R$ équivaut à A est le milieu de [PR]

équivaut à $2 = \dfrac{-1+x_R}{2}$ et $1 = \dfrac{-2+y_R}{2}$

équivaut à $4 = -1 + x_R$ et $2 = -2 + y_R$

équivaut à $5 = x_R$ et $4 = y_R$ donc R(5 ; 4).

b) Démontrons que le quadrilatère PQRS est un losange.

Première méthode

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{A est le milieu de [PR]} \\ \text{A est le milieu de [QS]} \end{array}\right\} \text{PQRS est un parallélogramme} \\ \text{PQ = PS (deux côtés consécutifs de même longueur)} \end{array}\right\}$ PQRS est un losange.

Deuxième méthode

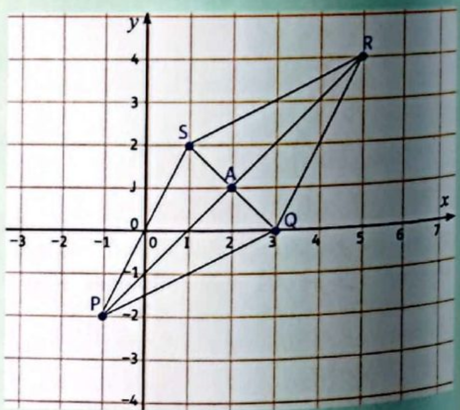
1. On a : $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 5+1 \\ 4+2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{QS}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

et on a : $-2 \times 6 + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$

donc $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QS}$ sont orthogonaux.

Ainsi A est le milieu des diagonales [PR] et [QS] et les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires donc PQRS est un losange (les diagonales sont perpendiculaires en leur milieu).

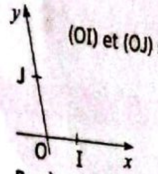


Résumé de cours

1 Coordonnées d'un vecteur

1.1. Repère du plan

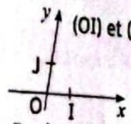
1.1.1. Un repère du plan est un triplet de points non alignés.



(OI) et (OJ) sécantes et OI ≠ OJ.

Repère quelconque

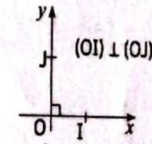
1.1.2. Un repère normé est un repère dont les axes sont gradués avec la même unité.



(OI) et (OJ) sécantes et OI = OJ.

Repère normé

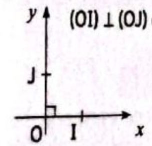
1.13. Un repère orthogonal est un repère dont les axes sont perpendiculaires.



(OI) ⊥ (OJ) et OI ≠ OJ

Repère orthogonal

1.1.4. Un repère orthonormé est un repère dont les axes sont perpendiculaires et sont gradués avec la même unité.



(OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ

Repère orthonormé

1.2. Couple de coordonnées d'un point

- On appelle couple de coordonnées d'un point M du plan dans le repère (O, I, J), le couple de nombres réels $(x ; y)$ tels que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
- On note $M(x ; y)$ et se lit « M de coordonnées x et y ». x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M.

1.3. Couple de coordonnées d'un vecteur

A et B étant des points du plan muni d'un repère (O, I, J). On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de nombres réels $(x ; y)$ tel que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB}(x ; y)$ et se lit « vecteur AB de coordonnées x et y ».

Recherche des coordonnées de vecteurs

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Résumé de cours

2 Vecteurs égaux

Dans un repère, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ équivaut à : $x = x'$ et $y = y'$.

3 Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère.

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

4 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Le plan est muni d'un repère.

- Soit k un nombre réel. Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
- Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y \end{pmatrix}$.

5 Vecteurs colinéaires

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à : $xy' - x'y = 0$.

6 Distance de deux points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Si $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

7 Vecteurs orthogonaux

Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à : $xx' + yy' = 0$.

8 Coordonnées du milieu d'un segment

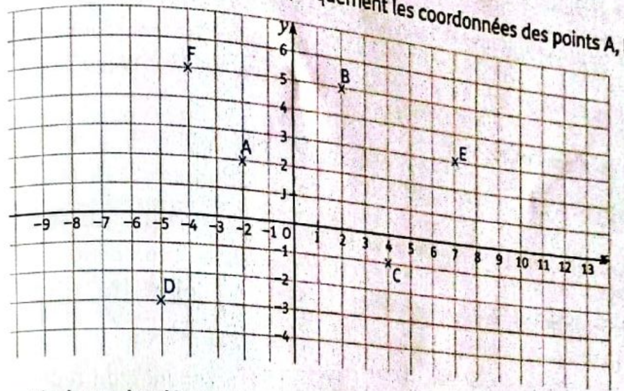
Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan. K est le milieu du segment [AB].

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

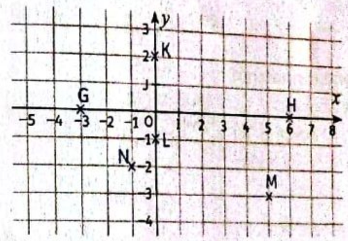
EXERCICES

Exercices de renforcement

1 Dans le repère (O, I, J), détermine graphiquement les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.



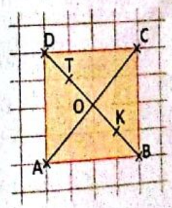
2 Écris à partir du repère (O, I, J) les coordonnées des points G, H, K, L, M et N.



3 Place dans un repère orthonormé (O, I, J) les points suivants :
A(3 ; 1), B(2 ; 2), C(1 ; 3), D(3,5 ; 5), E(3 ; 0) et F(0 ; 5).

4 Place dans un repère orthonormé (O, I, J) les points suivants : G(3 ; 1), H(−2 ; 1), K(−4 ; −2), L(0 ; −2), M(3 ; 0), N(1,5 ; −2,5), P(4 ; 5), Q(−7 ; 2), R(−8 ; −3), S(0 ; −3), T(5 ; −1) et U(−6 ; 2).

5



ABCD est un carré de centre O.

Détermine, dans le repère (A, B, D), les coordonnées des points A, B, D et O puis remplace les pointillés par les coordonnées des points.

a) A(.... ; ....), B(.... ; ....), D(.... ; ....), O(.... ; ....) ;

b) K milieu de [OB] : K(.... ; ....) ;

c) T milieu de [OD] : T(.... ; ....).

6 On considère les points des graphiques des exercices 1 et 2. Écris les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NL}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

7 Soit un rectangle ABCD. On considère le repère (A, B, D).

a) Donne les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Place le point E tel que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ ait pour coordonnées (−1 ; 2).

c) Place le point F tel que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ ait pour coordonnées (2 ; −2).

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point A(0 ; −1).

a) Calcule les coordonnées du point B tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ait pour coordonnées (−2 ; 4).

Place les points A et B.

b) Calcule les coordonnées du point C tel que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ait pour coordonnées (4 ; 2).

Place le point C.

9 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne A(1 ; 3,5) , B(5 ; 1) et C(−4 ; 7).

Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$.

10 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne : A(−2 ; 5) ; B(1 ; 3) et C(−3 ; 3).

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

11 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(−5 ; 2) et B(6 ; 8).

Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

12 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$.

Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}$.

13 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}$.

Détermine les coordonnées des vecteurs $5\overrightarrow{EF}$; $-\frac{3}{2}\overrightarrow{GH}$ et $4\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{RS}$ et $-\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{RS}$.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A(−11 ; 2) et B(5 ; 8).

Détermine les coordonnées des vecteurs $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ et $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IJ}$.

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point P(−4 ; 3).

1. Place le point P et construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

2. Calcule les coordonnées de Q.

16 Le plan muni d'un repère.

Calcule x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\x+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}6-y\\3\end{pmatrix}$ soient égaux.

17 Le plan muni d'un repère.

Calcule dans chaque cas les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

1. A(2 ; 3), B(5 ; 2) et C(6 ; 3).

2. A(−2 ; 1), B(2 ; 0) et C(1 ; −2).

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A(−1 ; 2) et B(−7 ; −4) et P(3 ; −2).

1. Détermine les coordonnées du point C tel que les points A et C soient symétriques par rapport à P.

2. Détermine les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

19 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne les points A, B et C tels que :
A(1 ; 2); B(3; −2) et C(−1; 6).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Justifie que C appartient à la droite (AB).

20 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Dans les différents cas ci-dessous, dis si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

b) A(1 ; 4), B(3 ; 5), C(−2 ; −1) et D(4 ; 2).

c) A(−2 ; 5), B(1 ; 3), C(−1 ; 2) et D(3 ; −1).

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soient les points A(2 ; −4), B(2 ; −3), C(1 ; 5) et D(2 ; 3).
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ont-ils la même direction ? Justifie ta réponse.

22 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), dis dans chaque cas si les vecteurs donnés sont orthogonaux

a) $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour A(−1 ; 3) et B(6 ; 2).

b) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour A(1 ; 1), B(−4 ; 2), C(2 ; 6) et D(3 ; −2).

23 Le plan muni d'un repère orthonormé.
Détermine le réel x tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2x\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

24 Dans un repère orthonormé on donne :
$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\1-x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Calcule x pour que les droites (AG) et (EF) soient parallèles.

2. Calcule x pour que les droites (AG) et (EF) soient perpendiculaires.

25 Le plan est muni d'un repère.
Calcule les coordonnées des milieux :

1. E de [AB], F de [AC] et G de [BC] pour les points A(3 ; 2), B(1 ; 4) et C(−1 ; −3).

2. L de [CD], M de [CE] et N de [ED] pour les points C(−4 ; 3), D(−5 ; 2) et E(−3 ; 2).

26 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points E(2 ; 3), F(8 ; 5), G(12 ; −1) et H(6 ; −3).

1. Justifie que les segments [EG] et [FH] ont le même milieu.

2. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Justifie ta réponse.

27 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A(−1 ; 2) et $B\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Calcule les distances OA ; OB et AB.

28 Soient A(2 ; 3), B(−4 ; −1), C(2 ; 4) et D(−5 ; 1) quatre points dans un repère orthonormé du plan.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2. Déduis-en les distances AB, CD, AC et BD.

29 Soient A(4 ; 2), B(7 ; −1) et C(12 ; 4) trois points dans un repère orthonormé du plan.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Déduis-en les distances AB , AC et BC.

3. Justifie que le triangle ABC est rectangle en B.

Exercices d'approfondissement

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soient A(−2 ; 2), B(−7 ; −3), C(0 ; −2) et D(5 ; 3).

1. Fais une figure.

2. Démontre que ABCD est un parallélogramme.

3. Justifie que CDB est isocèle en C.

4. Qu'en déduit-on sur le quadrilatère ABCD ? Justifie ta réponse.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Place les points R(−6 ; 3), S(−1 ; 5), T(3 ; −5).

1. Démontre que le triangle RST est rectangle.

2. Justifie que le point $K\left(-\frac{3}{2} ; -1\right)$ est le centre du cercle (C) circonscrit au triangle RST.

EXERCICES

3. Calcule les coordonnées du point U, symétrique de S par rapport au point K.
4. Justifie que U appartient au cercle (C).

32 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(2 ; 6), B(−4 ; 4), E(4 ; 0) et M(−2 ; 3).
1. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.
2. Justifie que : AB = AE.
3. Déduis de 1. et 2. la nature du triangle ABE.
4. Justifie que les points B, E et M sont alignés.

33 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$, B(0 ; −2), et D(2 ; $-x$) où x est un nombre réel.
1. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du point R milieu de [AB].
2. Détermine le réel x pour que le point D appartienne à la médiatrice de [AB].
3. Détermine les coordonnées du point F image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

34 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(−2 ; 2), B(2 ; 0) et C(1 ; 3).
1. Justifie que le point C appartient à la médiatrice de [AB].
2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre C et passant par les points A et B.
   a) Calcule le rayon de $(\mathscr{C})$.
   b) Détermine les coordonnées des points A' et B' diamétralement opposés respectivement à A et B.
   c) Justifie que le triangle ABC est rectangle et isocèle et déduis-en la nature du quadrilatère ABA'B'.

35 Place les points A(1 ; 3), B(−2 ; −3) et C(3 ; 2) dans un repère orthonormé (O, I, J).
1. Justifie que le point I appartient à la droite (BC).
2. Justifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
3. a) Détermine le couple de coordonnées du point F pour que ACFB soit un parallélogramme.
   b) Justifie que ACFB est un rectangle.

36 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne :
$\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = -4\overrightarrow{OJ}$;
$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{OI}$.
1. Démontre que le point C appartient au cercle de diamètre [AB].
2. a) Calcule les coordonnées du point D tel que : $2\overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{BC}$.
   b) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont orthogonaux.
3. Calcule les coordonnées du point Q image de C par la symétrie de centre I.
4. Détermine la nature du triangle QCP.

37 1. Place les points A(−2 ; 1), B(1 ; 2) et C(−3 ; 4) dans un repère orthonormé (O, I, J).
2. Justifie que le triangle ABC est rectangle.
3. Calcule les coordonnées du milieu E de [BC].
4. P est le symétrique de A par rapport à E. Détermine les coordonnées de P.
5. a) Justifie que les points A, B, C et P appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont tu préciseras le centre et le rayon.
   b) Le point J appartient-il à $(\mathscr{C})$? Justifie ta réponse.

38 1. Place les points A(6 ; 1), B(3 ; 5), C(11 ; 1) et $P\left(0;\frac{11}{4}\right)$ dans un repère orthonormé (O, I, J).
2. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
3. Détermine les coordonnées du point K milieu de [BC].
4. Détermine les coordonnées du point E centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABK.
5. Démontre que la droite (PB) est tangente en B au cercle (C).
6. Justifie que : le point $S\left(-\frac{7}{3};1\right)$ est un élément de la droite (PB).

39 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
1. Place les points suivants : A(−3 ; −4) ; B(1 ; −4) et C(−1 ; −2).
2. Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points $A(3\sqrt{3};-1-3\sqrt{3})$; B(−3 ; −4) ; C(3 ; 2).
1. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

2. Détermine les coordonnées :
   a) du milieu E de [BC] ;
   b) du point D tel que ABCD soit un losange.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points A(−3 ; −1), B(−4 ; 1), C(2 ; 4) et D(3 ; 2).
2. Démontre que ABCD est un rectangle.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points E(2 ; −5), F(−3 ; 0), G(−4 ; 7) et H(1 ; 2).
2. Démontre que EFGH est un losange.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points E(1 ; −2), F(−2 ; −4), G(−4 ; −1) et H(−1 ; 1).
2. Démontre que EFGH est un carré.

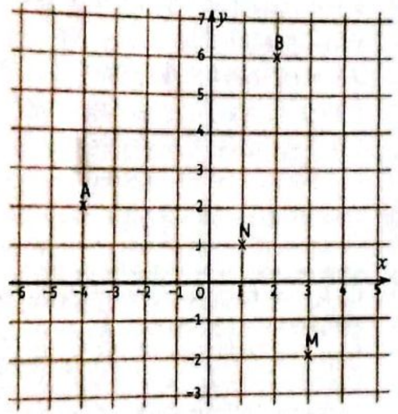
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points A(3 ; 4), B(5 ; −1), C(0 ; −3) et D(−7 ; 0).
2. Démontre que ABCD est un trapèze.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points suivants : A(−7 ; −1) et B(−4 ; 1).
2. a) Place le point C tel que C soit le symétrique de A par rapport à B.
   b) Place le point D tel que D soit le symétrique de B par rapport à C.
   c) Démontre que les points A, B et D sont alignés.
3. On donne le point E(4 ; −3). La parallèle à (DE) qui passe par B coupe (AE) en P.
Calcule la valeur exacte des longueurs AP et PB.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Calcule les longueurs AB, BC et AC pour A(−6 ; 0), B(−3 ; 1) et C(6 ; 4).
2. Déduis-en que les points A, B et C sont alignés.

47 **Droites des milieux**
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points suivants : A(2 ; 2) ; B(4 ; −4) et C(−1 ; −3).
2. Calcule les coordonnées du milieu M de [AC].
3. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe le côté [AB] en N.
Calcule les coordonnées du point N.

48 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Donne les coordonnées des points A, B, M et N de la figure suivante:



2. Calcule les longueurs NB et MB.
3. On admet que : NA = $\sqrt{26}$ et MA = $\sqrt{65}$.
   a) Que représente la droite (NM) pour le segment [AB] ? Justifie ta réponse.
   b) Détermine le symétrique du point A par rapport à la droite (MN).

49 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Place les points suivants : A(1 ; 4) ; B(2 ; −4) et C(−6 ; 0).
2. Justifie que le triangle ABC est isocèle.
3. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Calcule la valeur exacte de AH.
4. On suppose dans cette question que l'unité graphique est le centimètre. Calcule l'aire du triangle ABC.

EXERCICES

50 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A(−1 ; 3), B(3 ; $\sqrt{3}$), C(2 ; −3) et D(−2 ; $-\sqrt{3}$).
1. Détermine le couple de coordonnées du milieu de chacun des segments [AC] et [BD].
2. Calcule les distances AC et BD.
3. Détermine la nature du quadrilatère ABCD.

51 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
1. Place les points A(2 ; −2) et B(0 ; 4).
2. Détermine le couple de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3. Donne par simple lecture les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Construis les points C et D tels que $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ? Justifie ta réponse.

Situation d'évaluation

52 Trois villages Akossikro (A), Bomokoi (B) et Cimapleu (C) situés dans la même localité, sont peuplés respectivement de 500 habitants, 950 habitants et 350 habitants. Le gouvernement décide de construire un château d'eau dans cette localité appartenant aux trois villages à la fois. Le chef du village de Bomokoi affirme que le château doit être proche de son village à cause de l'effectif le plus élevé de sa population. Ce que refusent les deux autres chefs. Le gouvernement décide donc de placer le château (G) de sorte que $500\overrightarrow{GA} + 950\overrightarrow{GB} + 350\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On te demande de déterminer de manière exacte l'emplacement G de ce château d'eau et la distance de chaque village au château pour éviter les conflits.

Pour cela, on te donne une carte munie d'un repère orthonormé (O, I, J) où figurent les coordonnées des trois villages. On peut lire : A(−500 ; 300) ; B(100 ; 600) et C (2500 ; 0).

1. On pose G(x ; y).
Détermine x et y.
2. Calcule la distance du château à chacun des villages.

Coup de Pouce

31 2. Justifie que K est le milieu de [RT].

33 2. $\overrightarrow{RD} \perp \overrightarrow{AB}$.
3. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AJ}$.

36 Démontre que le triangle ABC est rectangle en C.

44 « Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles ».
Démontre donc que (AB) // (CD).

45 3. Utilise la propriété de Thalès.

49 Justifie que (AH) ⊥ (BC) et utilise la propriété de Pythagore.

Leçon 13

Équation de droite

Les combinaisons possibles pour payer des bonbons de 100 F et des chewing-gums de 150 F avec 1000 F sont représentées par une équation à deux inconnues.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour sa nouvelle activité, au marché Gouro d'ADJAMÉ, Massiata se rend dans un village pour acheter des arachides et du mil. Le kilogramme d'arachide coûte 300 F CFA et celui de mil 250 F CFA. Elle dispose de 30 000 F CFA qu'elle veut dépenser entièrement pour ces achats. Elle veut connaître le nombre de kilogramme de mil et d'arachide qu'elle peut avoir. Après plusieurs calculs fastidieux, elle dresse le tableau suivant :

Quantité de mil (en kg)	24	48	60	72
Quantité d'arachide (en kg)	80	60	50	40

Sa petite sœur, élève en classe de troisième au lycée Moderne de Lakota, se propose de lui trouver une méthode performante pour déterminer davantage de possibilités. Pour ce faire, la petite sœur demande la collaboration de ses camarades de classe.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Équations de droite

Identifier :
une équation de droite.

Déterminer :
- une équation d'une droite passant par deux points ;
- une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée ;
- une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné ;
- une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé.

Vérifier :
l'appartenance ou non d'un point à une droite.

Construire :
une droite dont on connaît une équation.

2 Coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Identifier :
le coefficient directeur d'une droite passant par deux points et non parallèle à l'axe des ordonnées.

Lire :
graphiquement le coefficient directeur d'une droite dans un quadrillage.

Déterminer :
l'équation réduite d'une droite.

3 Positions relatives de deux droites

Justifier :
- que deux droites sont parallèles ;
- que deux droites sont perpendiculaires.

Traiter :
une situation faisant appel aux équations de droite.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Équations de droite

1 Activité : Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(1 ; 6), B(4 ; 4), C(7 ; 2) et D(10 ; 1).

1. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit M $(x ; y)$ un point du plan.
   a) Exprime les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
   b) Trouve une relation (E) entre x et y pour que le point M appartienne à la droite (AB). Écris cette relation sous la forme : (E) : $ax + by + c = 0$.
3. a) Vérifie que les coordonnées du point C vérifient l'égalité (E).
   b) Vérifie que les coordonnées du point C ne vérifient pas l'égalité (E).

Synthèse

On admet que :
- Une relation de la forme (E) : $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels et $(a, b) \neq (0, 0)$ est une équation d'une droite.
- Tout point $F(x_0 ; y_0)$ vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$ appartient à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exercices de fixation

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) $2x - 3y = 0$ est une équation de droite.
b) $x^2 + y - 1 = 0$ et $2x + 5y^2 + 3 = 0$ sont des équations de droite.
c) $x + y + 1 = 0$ et $3x + 3y + 3 = 0$ sont des équations d'une même droite.

2 Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est correcte. Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre de la colonne indiquant la réponse correcte.

N°	Affirmations	a	b	c
1	On donne les points suivants : A (1 ; 0), B (1 ; 2) et G (0 ; 4). Le point qui appartient à la droite (D) d'équation $10x + y - 4 = 0$ est ...	A	B	G
2	On donne le point A(1 ; −3). Le point A est un point de la droite d'équation ...	$x + y - 5 = 0$	$-x + y + 4 = 0$	$10x + 8y - 4 = 0$

3 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Une droite (D) a pour équation : $-2x - y + 3 = 0$. On donne les points M(1 ; 1) et N(4 ; −3). Parmi ces points, détermine ceux qui appartiennent à la droite (D). Justifie ta réponse.

2 Activité : Équation d'une droite passant par deux points

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A (1 ; 2) et B (2 ; 0).
Soit le point M $(x ; y)$ appartenant à la droite (AB).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. Justifie que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
3. Déduis-en une équation de la droite passant par les points A et B.
4. Dégage une méthode pour déterminer une équation d'une droite passant par deux points distincts.

Synthèse

- L'équation $2x + y - 4 = 0$ est une équation de la droite AB.
- Pour déterminer une équation d'une droite passant par deux points distincts A et B, on peut utiliser la propriété : deux vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - yx' = 0$.

Exercices de fixation

1 Le plan est muni d'un repère, on donne les points A (1 ; −2) et B (0 ; −1).
Détermine une équation de la droite (AB).

2 Le plan est muni d'un repère. On donne les points E (1 ; −1) et F (−1 ; 1).
Détermine une équation de la droite (EF).

3 Activité : Équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Le plan est muni d'un repère, on donne A : (1 ; 2), B (1 ; 0) et E (2 ; −1).
Soit le point M $(x ; y)$ appartenant à la droite passant par A et parallèle à la droite (BE).

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BE}$.
2. Justifie que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
3. Déduis-en une équation de la droite passant par A et parallèle à la droite (BE).
4. Dégage une méthode pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée.

Synthèse

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et parallèle à une droite (BE) donnée, on utilise la propriété :
M ∈ (D) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(−5 ; −3), B(−1 ; 3) et C(6 ; 4).
Détermine une équation de la droite (D) passant par C et parallèle à (AB).

4 Activité : Équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

Le plan est muni d'un repère, on donne A(−1 ; 3) et un vecteur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit le point M $(x ; y)$ appartenant à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$.

1. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2. Justifie que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
3. Déduis que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires équivaut à $x + 3y - 8 = 0$.
4. Dégage une méthode pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné.

Synthèse

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ donné, on utilise la propriété :
M ∈ (D) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Exercices de fixation

1. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne le point G (1 ; 2) et un vecteur $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Détermine une équation de la droite passant par le point G et de vecteur directeur $\overrightarrow{HK}$.

2. Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne le point H(0 ; 3) et un vecteur $\overrightarrow{TS}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Détermine une équation de la droite passant par le point H et de vecteur directeur $\overrightarrow{TS}$.

5 Activité : Équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points : A (1 ; 3), B (−2 ; −6) et C (2 ; −2).
Soit le point M $(x ; y)$ appartenant à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

1. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM}$.
2. Justifie que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
3. Déduis-en que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux équivaut à $x + 3y + 4 = 0$.
4. Dégage une méthode pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.

Synthèse

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et perpendiculaire à une droite (EF) donnée, on utilise la propriété :
M ∈ (D) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EF}$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :
A (6 ; 3), B (−7 ; 2) et C (2 ; 1).
Détermine une équation de la droite passant par le point C et perpendiculaire à (AB).

6 Activité : Construction d'une droite dont on connaît une équation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne la droite (D) d'équation $-3x + 2y - 1 = 0$.

1. Vérifie que les points A (1 ; 2) et B (−1 ; −1) sont solutions de l'équation de (D).
2. Place les points A et B dans le repère (O, I, J).
3. Trace la droite (AB).
4. Dégage une méthode de construction d'une droite dont on connaît une équation.

Synthèse

Méthode :
Pour construire une droite dont on connaît une équation, il suffit de trouver deux points vérifiant l'équation de la droite et tracer la droite passant par ces deux points.

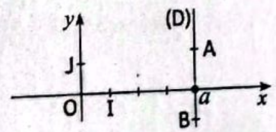
Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne la droite (D) d'équation : $2x + y - 1 = 0$.
Construis la droite (D).

Activités 2 Équations de droite et coefficient directeur d'une droite

1 Activité : Équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne une droite (D) parallèle à l'axe des ordonnées. A et B sont deux points de la droite (D).
A a pour abscisse a et pour ordonnée y_A, B a pour abscisse a et pour ordonnée y_B.



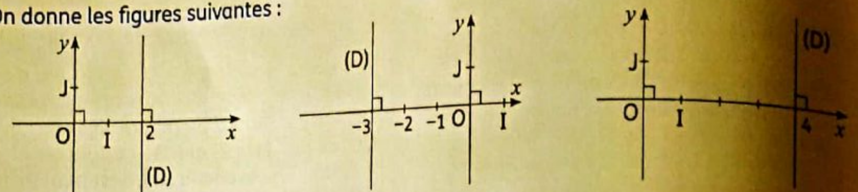
1. Détermine les coordonnées des points A et B.
2. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déduis des questions précédentes une équation de la droite (D).

Synthèse

L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $x = a$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

On donne les figures suivantes :

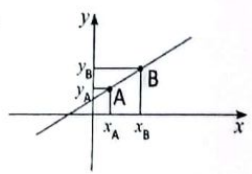


Dans chaque cas, détermine une équation de la droite (D).

2 Activité : Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$. On admet que lorsque $b \neq 0$, la droite (D) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
1. Lorsque $b \neq 0$, justifie que l'équation de la droite (D) peut s'écrire : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
2. Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts de la droite (D), $(x_A \neq x_B)$.

Justifie que : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{a}{b}$.



Synthèse

- L'équation $ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$ d'une droite (D) peut s'écrire $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$.
Cette équation est appelée l'équation réduite de la droite (D).
- Le nombre $\frac{-a}{b}$ est appelé coefficient directeur de la droite (D).
- Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts de la droite (D), alors $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{a}{b}$.
- Le nombre $-\frac{c}{b}$ est appelé l'ordonnée à l'origine.
- On admet que toute équation de la forme $y = \alpha x + \beta$ est l'équation réduite d'une droite. α est le coefficient directeur de cette droite et β l'ordonnée à l'origine de cette droite.
- Un vecteur directeur d'une droite d'équation réduite $y = \alpha x + \beta$ est $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Exercices de fixation

1 On donne dans le plan muni d'un repère (O, I, J), les droites (D) et (L) d'équations respectives : $2x + 3y + 1 = 0$ et $x - 3y - 7 = 0$.
Détermine pour chaque droite, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

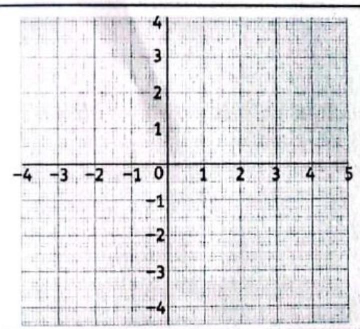
2 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine 3.
Détermine l'équation réduite de la droite (D) puis une équation de la droite (D) sous la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels à déterminer.

3 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation :
$2x + 5y - 3 = 0$.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. Le coefficient directeur de la droite (D) est $\frac{5}{2}$.
2. Le coefficient directeur de la droite (D) est $-\frac{5}{2}$.
3. Le coefficient directeur de la droite (D) est $\frac{2}{5}$.
4. Le coefficient directeur de la droite (D) est $-\frac{2}{5}$.
5. L'ordonnée à l'origine de la droite (D) est $\frac{3}{5}$.

4 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne : A(1 ; 2) et B(3 ; −1).
1. Détermine le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Déduis-en une équation réduite de la droite (AB).

3 Activité : Construire une droite passant par un point et connaissant son coefficient directeur

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne le point E(2 ; −1) et une droite (D) passant par le point E et de coefficient directeur 2.



a) Place le point E dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
b) Construis le point B (1 ; 2) où 2 est le coefficient directeur de la droite (D).
c) Construis la droite (D) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{OB}$ (1 ; 2).

Synthèse

Pour construire dans le plan muni d'un repère (O, I, J), une droite passant par un point et de coefficient directeur a, il suffit de construire la droite (D) passant ce point et de vecteur directeur $\overrightarrow{OF}$ où F(1 ; a).

Exercices de fixation

1. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Construis la droite (D) passant par H (1 ; 0) et de coefficient directeur −4.

2. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Construis la droite (D) passant par S (−1 ; −3) et de coefficient directeur 1.

Activités 3 Positions relatives de deux droites

1 Activité : Droites parallèles

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne les droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
1. Détermine un vecteur directeur de chacune de ces droites.
2. Justifie que (D) // (D') équivaut à $a = a'$.

Synthèse

On admet que :
Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

Exercices de fixation

1. Détermine dans chacun des cas ci-dessous si les droites (D) et (D') sont parallèles.
   1. (D) : $2x - y + 5 = 0$ et (D') : $3x - 6y + 4 = 0$;
   2. (D) : $9x + 5y = 0$ et (D') : $-4x + 3y - 2 = 0$;
   3. (D) : $y = x - 5$ (D') : $7x + 4y - 1 = 0$.

2. Détermine dans chacun des cas ci-dessous si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
   1. A(−1 ; 3), B(5 ; 3), C(−2 ; 0) et D(4 ; 1) ;
   2. A(−2 ; 3), B(4 ; −3), C(1 ; 5) et D(7 ; 17).

2 Activité : Droites perpendiculaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
1. Détermine un vecteur directeur de chacune de ces droites.
2. Justifie que (D) et (D') sont perpendiculaires équivaut à $a \times a' = -1$.

Synthèse

On admet que :
Deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à −1.

Exercices de fixation

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Les droites (T) et (D) ont pour équations respectives :
$y = -x + 10$ et $y = x + 2$.
Les droites (T) et (D) sont-elles perpendiculaires ? Justifie ta réponse.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Les droites (L) et (D') ont pour équations respectives $-2x + 5y = 0$ et $10x + 4y - 5 = 0$.
Justifie que (L) et (D') sont perpendiculaires.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Vérification de l'appartenance ou non d'un point à une droite

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). Une droite (L) a pour équation : $x - 2y + 3 = 0$. Les points E(2 ; 1) et F(7 ; 5) appartiennent-ils à la droite (L) ? Justifie ta réponse.

Corrigé

- Vérifions si E appartient à (L).

Vérifions si le couple (2 ; 1) est solution de l'équation $x - 2y + 3 = 0$
- Remplaçons x par 2 et y par 1 dans l'équation. On obtient :

$2 - 2 \times 1 + 3$
$= 2 - 2 + 3$
$= 3$
$3 \neq 0$.

Donc le couple (2 ; 1) n'est pas solution de l'équation $x - 2y + 3 = 0$.
Par conséquent E n'appartient pas à la droite (L).

- Vérifions si F appartient à (L).

Pour cela remplaçons x par 7 et y par 5.
On obtient :

$7 - 2 \times 5 + 3$
$= 7 - 10 + 3$
$= -3 + 3$
$= 0$.

Donc le couple (7 ; 5) est solution de l'équation $x - 2y + 3 = 0$.
F appartient à la droite (L).

Méthode

Pour vérifier l'appartenance ou non d'un point à une droite :
- Remplacer l'abscisse et l'ordonnée du point dans l'équation de la droite.
- Si l'égalité est vraie, on conclut que le point appartient à la droite.
- Sinon le point n'appartient pas à la droite.

Exercice 2 Déterminer une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne : R (4 ; 3) ; $\overrightarrow{AB}(-3 ; -2)$.
Détermine une équation de la droite (L) passant par R et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

Déterminons une équation de la droite (L) passant par R et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Soit M (x ; y) un point de (L) alors :

$\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires équivaut à
$-2(x - 4) + 3(y - 3) = 0$.
Ceci équivaut à :
$-2x + 8 + 3y - 9 = 0$
$-2x + 3y - 1 = 0$.

Donc $2x - 3y + 1 = 0$ est une équation de la droite (L).

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et un vecteur donné, il faut :
- Choisir un point quelconque M appartenant à cette droite.
- Calculer les coordonnées du vecteur défini par M et le point de la droite donnée.
- Poser la condition pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires et calculer pour obtenir l'équation cherchée.

Exercice 3 — Déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).
On donne : A(2 ; 1) ; B(−3 ; −5) et C(−1 ; 3). Déterminons une équation de la droite (D) passant par C et perpendiculaire à(AB).

Corrigé

Déterminons une équation de la droite (D) passant par C et perpendiculaire à (AB).
* Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-2 \\ -5-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

*Soit M(x ; y) un point de la droite (D) ;

on a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}$

* Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont orthogonaux équivaut à $-5(x+1)+(-6)(y-3)=0$.
On obtient $-5x-6y+13=0$ qui est une équation de la droite (D).

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée :
- Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite donnée.
- Choisir un point quelconque M appartenant à la droite dont on cherche une équation.
- Calculer les coordonnées du vecteur définies par M et ce point C.
- Poser la condition pour que le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et ce vecteur $\overrightarrow{CM}$ soient orthogonaux et calculer pour obtenir l'équation cherchée.

Exercice 4 — Déterminer une équation d'une droite non parallèle aux axes d'un repère et passant par deux points

On donne dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les points A(−2 ; −1) et B(0 ; 2).
Sachant que la droite (AB) n'est pas parallèle aux axes du repère, détermine une équation de la droite (D).

Corrigé

Soit M(x ; y) un point de (AB).

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à
$3(x+2)-2(y+1)=0$;
équivaut à $3x+6-2y-2=0$;
équivaut à $3x-2y+4=0$.
Donc une équation de la droite (AB) est :
$3x-2y+4=0$

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite passant par deux points A et B,
- On choisit un point M(x ; y) appartenant à la droite (AB).
- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
- Poser la condition de deux vecteurs colinéaires pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- Faire les calculs pour obtenir l'équation cherchée.

Exercice 5 — Construire une droite dont on connaît une équation

Le plan est muni d'un repère.
Construis les droites (Δ) ; (D) ; (L) et (P) d'équation respective $x=2$; $y=-3$; $2x-y-1=0$ et $y=\frac{1}{2}x+3$.

Corrigé

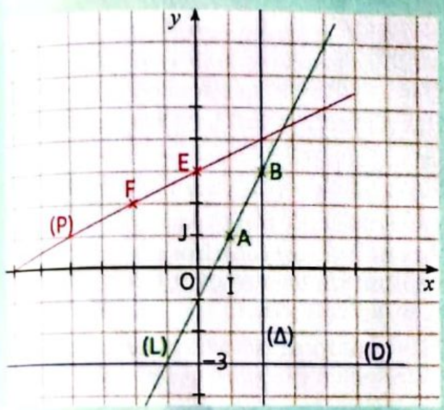
Pour les droites (L) et (P) on cherche deux points de chaque droite

(L)

	A	B
x	1	2
y	1	3

(P)

	E	F
x	0	−2
y	3	2



Méthode

- Pour les droites (L) et (P), trouver deux points de chacune des droites et tracer les droites passant par les deux points.
- Pour la droite (Δ), tracer la droite passant par le point de coordonnées (2 ; 0) et parallèle à l'axe des ordonnées.
- Pour la droite (D), tracer la droite passant par le point de coordonnées (0 ; −3) et parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 6 — Déterminer un vecteur directeur, un coefficient directeur d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les droites (D) et (L) d'équations respectives $2x+3y-1=0$ et $y=\frac{5}{4}x-3$.
1. Détermine le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite (D).
2. Détermine le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite (L).

Corrigé

1. On a (D) : $2x+3y-1=0$ équivaut à $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.
Le coefficient directeur (D) et $-\frac{2}{3}$ et un vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{AB}(3;-2)$.

2. On a : (L) : $y=\frac{5}{4}x-3$.
Le coefficient directeur de (L) est $\frac{5}{4}$ et un vecteur directeur de (L) est $\overrightarrow{EF}\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

Méthode

Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite connaissant une équation :
- on détermine une équation réduite de la droite de la forme $y=ax+b$;
- a est le coefficient directeur et le vecteur de coordonnées (1 ; a) ou (k ; ka) est un vecteur directeur de la droite.

1 Équation d'une droite

1.1. Définition

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On appelle équation de droite toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et le couple $(a, b) \neq (0, 0)$.

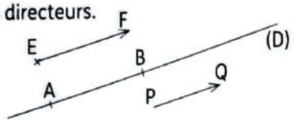
Remarque

On dit qu'un point $A(\alpha, \beta)$ appartient à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ lorsque le couple de coordonnées de A vérifie l'équation de la droite (D).

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit A et B deux points distincts d'une droite (D). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Remarque : Une droite a une infinité de vecteurs directeurs.



Les droites (AB), (EF) et (PQ) sont parallèles : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (D).

Propriété

Le plan est muni d'un repère, a et b sont des nombres non nuls.
- Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est une équation d'une droite.

Exemple

$x - y + 2 = 0$ est une équation de droite.

1.2. Équation d'une droite passant par deux points

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite connaissant deux de ses points, on peut procéder comme suit :
- Si les deux points ont la même abscisse a, alors la droite a pour équation : $x = a$.
- Si les deux points n'ont pas la même abscisse, alors pour déterminer une équation de la droite, on peut soit utiliser le fait que : M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

1.3. Équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite passant par un point A et parallèle à une droite (D) donnée, on peut procéder comme suit :
- Si la droite donnée est parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation cherchée est $x = a$, où a est l'abscisse du point donné.
- Si la droite donnée n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
  - on choisit un point M $(x\,;y)$ appartenant à la droite ;
  - on détermine un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite (D) ;
  - on utilise la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ pour déterminer l'équation cherchée.

1.4. Équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ donné :
- On choisit un point $M(x\,;y)$ appartenant à la droite.
- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
- On utilise enfin la condition de la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ pour déterminer l'équation cherchée.

1.5. Équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé

Méthode

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) est orthonormé.
Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point A et perpendiculaire à une droite (D') donnée, on peut procéder comme suit :
- **Si la droite donnée est parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation cherchée est $y = b$, où b est l'ordonnée du point donné.**
- **Si la droite donnée n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :**
  - **on choisit un point M$(x\,;y)$ appartenant à la droite ;**
  - **on détermine un vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ de la droite (D) ;**
  - **on utilise la condition d'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EF}$ pour déterminer l'équation cherchée.**

1.6. Construction d'une droite dont on connaît une équation

Méthode

Pour construire une droite dont on connaît une équation, on peut procéder comme suit :
- déterminer les coordonnées de deux points de la droite ;
- placer les deux dans le repère ;
- tracer la droite passant par ces deux points.

Remarque

- Il faut bien choisir x ou y afin d'obtenir des coordonnées (de préférence des nombres entiers) de deux points qui sont faciles à placer dans le repère.
- Pour une bonne précision du tracé, prendre deux points « assez éloignés ».

2 Équations de droite et coefficient directeur d'une droite

2.1. Équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Une équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme :
$x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

2.2. Équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

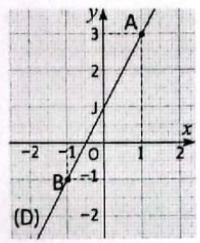
- Coefficient directeur d'une droite

Propriété

Dans le plan muni d'un repère :
- Une droite (Δ) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Définition

Une équation d'une droite (D) de la forme : $y = ax + b$ ou $x = k$ est appelée équation réduite de cette droite.
Lorsque (D) a pour équation : $y = ax + b$,
- a est appelé le coefficient directeur ou pente de (D).
- b est appelé ordonnée à l'origine de (D).
- Un vecteur directeur de (D) est vecteur $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.



Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), A et B sont des points tels que :
$A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.
Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Équation d'une droite connaissant son coefficient directeur et un de ses points

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite connaissant le coefficient directeur et un point, on peut écrire son équation réduite $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur donné puis déterminer b en remplaçant les coordonnées du point donné dans l'équation.

Résumé de cours

2.3. Construction d'une droite passant par un point et connaissant son coefficient directeur

Méthode

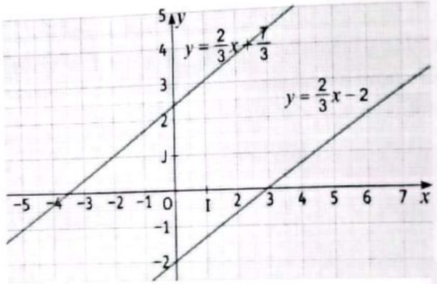
Pour construire une droite dont on connaît un point A et le coefficient directeur a, on peut :
- placer le point A ;
- construire le point B tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit égal au vecteur de coordonnées $(1 ; a)$;
- tracer la droite passant par A et B : c'est la droite cherchée.

3 Positions relatives de deux droites

3.1. Droites parallèles

Propriété

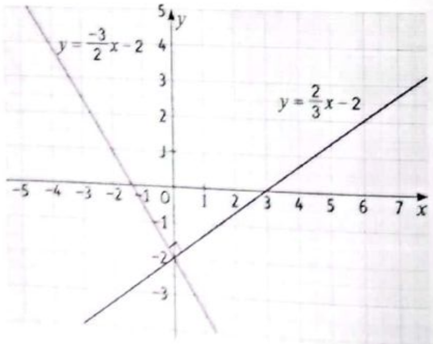
Dans le plan muni d'un repère, on donne deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$:
D)//(D') équivaut à $a = a'$.



3.2. Droites perpendiculaires

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$:
(D) ⊥ (D') équivaut à $a \times a' = -1$.



Exercices de renforcement

1 Recopie et complète le tableau suivant :

Représentation graphique	Équation cartésienne	Équation réduite $y = ax + b$	Coefficient directeur	A	B
(D_1)				$(-2 ; 7)$	$(4 ; 1)$
(D_2)	$3x - y - 4 = 0$				
(D_3)			-2	$(5 ; 1)$	

2 Dans chacun des cas suivants, détermine un vecteur directeur de la droite (D).
1. (D) : $2x - 3y + 7 = 0$.
2. (D) : $x - 3 = 0$.
3. (D) : $y = 7x - 5$.

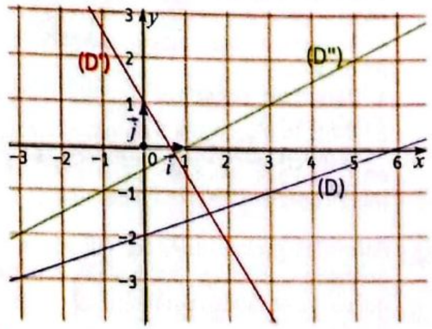
3 1. Les couples (5 ; 7) et (10 ; 4) sont-ils solutions de l'équation : $8x + 5y = 100$? Justifie tes réponses.
2. On donne l'équation (E) : $5x - 2y = 6$.
a) Trouve les couples solutions de (E) de la forme $(0 ; y)$ et $(x ; -4)$.
b) Trouve 4 autres solutions de (E).

4 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). (D_1) ; (D_2) ; (D_3) et (D_4) sont quatre droites d'équations :
$(D_1) : y = -5x + 2$; $(D_2) : 3x - 2y + 1 = 0$;
$(D_3) : 3x = 2$; $(D_4) : y = 3x$. Pour chacune de ces droites, donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine s'ils existent.

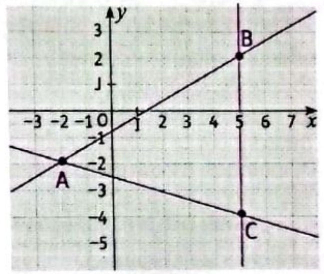
5 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne M(0 ; 3) ; E(−4 ; 5) et B(−4 ; 1).
1. Détermine une équation de la droite (D) passant par M et parallèle à (BE).
2. Détermine une équation de la droite (L) passant par B et perpendiculaire à (EM).

6 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne : P(−4 ; 0) ; L(−4 ; 5) et K(−4 ; 1).
1. Justifie que les points P, L et K sont alignés.
2. Détermine une équation de la droite (L) passant par P et ayant un vecteur directeur $\overrightarrow{LK}$.

7 Détermine graphiquement à l'aide de la figure ci-après, l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur des trois droites (D) ; (D') et (D'').



8 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère les points A(−2 ; −2), B(5 ; 2) et C(5 ; −4).



Détermine une équation cartésienne des droites (AB), (AC) et (BC).

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, dis si les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires. Justifie ta réponse.
1. $(D_1) : x - 2y + 4 = 0$ et $(D_2) : 6x + 3y - 7 = 0$.
2. $(D_1) : y = 2x + 5$ et $(D_2) : x - 2y + 1 = 0$.
3. $(D_1) : (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$ et $(D_2) : (1 - \sqrt{2})x + y = 0$.

10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(−1 ; 6), B(3 ; −2) et C(−5 ; 3).

EXERCICES

1. Détermine l'équation réduite de la droite (AB).
2. Détermine l'équation réduite de la droite (Δ) passant par C et parallèle à (AB).
3. Détermine l'équation réduite de la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (AB).

11 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère les points A(−1 ; 3) et B(7 ; −2).

1. Fais un graphique (prends un centimètre comme unité de longueur).
2. Détermine par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB).
3. Détermine l'ordonnée du point K de (AB) d'abscisse 1.
4. Détermine l'abscisse du point L de (AB) d'ordonnée 1.
5. La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en U et l'axe des ordonnées en V. Détermine l'abscisse de U et l'ordonnée de V.

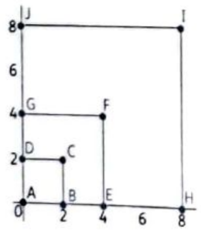
12 Parmi les droites dont les équations sont données ci-dessous dis quelles sont celles qui sont parallèles. Justifie tes réponses.

$(D_1) : y = -2x + 3$; $(D_2) : y = 2x + 1$;
$(D_3) : y = 1 - 2x$; $(D_4) : y = \frac{5-4x}{2}$;
$(D_5) : y = \frac{5-4x}{8}$; $(D_6) : y = \frac{3+4x}{2}$.

13 Le plan est muni d'un repère.
Écris une équation de la droite :

- (D_1) parallèle à la droite $(D) : y = -2x + 3$ et passant par le point A(−1 ; 2).
- (D_2) parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point B (0 ; −2).
- (D_3) parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$ et passant par C (−2 ; 3).
- (D_4) passant par A (1 ; −2) et parallèle à la droite passant par les points S(−2 ; 3) et T(4 ; 5).

14



Sur la figure ci-dessus, ABCD, AEFG et AHIJ sont trois carrés.

1. Démontre que les points C, F et I sont alignés.
2. Démontre que les points H, F et J sont alignés.

15 Le plan muni d'un repère orthonormé.
Parmi les droites dont les équations sont données ci-dessous, dis quelles sont celles qui sont perpendiculaires. Justifie ta réponse.

$(D_1)\ y = -2x + 3$; $(D_4)\ y = \frac{1}{2}x - 2$;
$(D_2)\ y = \frac{3-2x}{5}$; $(D_5)\ y = \frac{1+5x}{2}$;
$(D_3)\ y = 4x$; $(D_6)\ y = \frac{3+2x}{8}$.

16 Le plan muni d'un repère orthonormé.
Écris une équation de la droite

- (D_1) perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 3$ et passant par le point A (−1 ; 2).
- (D_2) perpendiculaire à la droite d'équation $y = \frac{1-2x}{4}$ et passant par O (0 ; 0).
- (D_3) passant par A(2 ; 3) et perpendiculaire à la droite passant par les points B(−2 ; 5) et C(1 ; −2).

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
(D) est la droite d'équation $y = ax + 1$.
Dans chacun des cas suivants, détermine a tel que :

1. (D) passe par le point B(1 ; −1) ;
2. (D) // (D_1) et l'équation de (D_1) est : $x - y + 2 = 0$;
3. (D) ⊥ (D_2) et l'équation de (D_2) est : $3y + x + 11 = 0$.

Exercices d'approfondissement

18 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
p est un nombre réel et (D) est une droite d'équation ; $(p - 1)x + py + p + 1 = 0$.

1. Détermine la valeur de p pour laquelle (D) est parallèle à (OI). Dans ce cas donne une équation de (D).
2. Détermine la valeur de p pour laquelle (D) est parallèle à (OJ). Dans ce cas donne une équation de (D).
3. Détermine la valeur de p pour laquelle (D) passe par O. Dans ce cas donne une équation de (D).

EXERCICES

19 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel k tel que les droites (D) et (D') soient parallèles puis trouve une équation de chacune des droites (D) et (D').

1. (D) a pour équation, $y = -2x + 1$;
(D') a pour équation $\sqrt{2}x + ky + 1 = 0$.
2. (D) passe par les points $E\left(-2 ; -\frac{3}{7}\right)$ et F(−3 ; 1).
(D') a pour équation $y = -2kx + 2$
3. (D) passe par les points A(0 ; 5) et B(k ; −3) ;
(D') passe par le point G(−1 ; 2) et admet un vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ (1 ; 2).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel n tel que les droites (D) et (D') soient perpendiculaires puis trouve une équation de chacune des droites (D) et (D').

1. (D) a pour équation : $3x - y + 2 = 0$;
(D') a pour équation $y = nx - 3$.
2. (D) passe par les points A(2 ; 1) et K(−2 ; 3)
(D') a pour équation $-x + ny + 5 = 0$.
3. (D) passe par les points $I\left(1 ; \frac{5}{2}\right)$ et N(n ; −2) ;
(D') passe par le point T(−2 ; 0) et admet un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.

21 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Les droites (D) et (D') ont pour équations respectives : $-2x - y - 3 = 0$ et $y = \frac{3}{2}x - 2$.
Démontre que les droites (D) et (D') sont sécantes et calcule le couple de coordonnées de leur point d'intersection.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé, E(−4 ; −3), B(−4 ;3), D(3 ; 2) sont trois points.
Détermine le couple de coordonnées de l'orthocentre H du triangle EBD.

23 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. Trace la droite (D) d'équation : $3x - 2y + 1 = 0$.
2. Trouve une équation de la droite (D'), image de (D) par la symétrie de centre A (0 ; −2).

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points M (−3 ; 2) ; E (6 ; 5) et R (2 ; 3).

1. Justifie que les points M, R et E ne sont pas alignés.
2. Détermine une équation de la hauteur du triangle MER qui passe par M.
3. Détermine le couple de coordonnées du milieu A de [ER].
4. Détermine une équation de la médiatrice (D) de [ER].

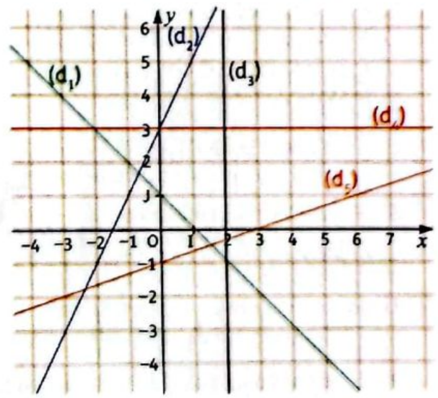
25 Le plan est muni d'un repère.
Indique dans chacun des cas ci-dessous, si le point appartient à la droite.

1. A(−2 ; 3) et $(D_1) : y = -x + 1$.
2. B$(\sqrt{2} ; \sqrt{6})$ et $(D_2) : y = \sqrt{3}x + \sqrt{6}$.
3. C(2 ; 1) et $(D_3) : y = 2$.

26 Le plan est muni d'un repère.
Précise dans chacun des cas si les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

1. $(D_1) : 7x + y - 1 = 0$ et $(D_2) : x + 5y - 3 = 0$.
2. $(D_1) : 2x + 3y - 1 = 0$ et $(D_2) : -4x + 6y - 3 = 0$.
3. $(D_1) : x - y - 1 = 0$ et $(D_2) : -2x + 2y - 3 = 0$.
4. $(D_1) : 7x - 1 = 0$ et $(D_2) : 7x + y - 3 = 0$.

27 Le plan est muni d'un repère.
Détermine graphiquement l'équation réduite de chacune des droites suivantes :



28 Le plan est muni d'un repère.
Représente dans le même repère chacune des droites dont l'équation réduite est fournie.

1. $(D_1) : y = -2x + 3$.
2. $(D_2) : x = -1$.
3. $(D_3) : y = \frac{1}{2} - 1$.
4. $(D_4) : y = 2$.

EXERCICES

29 Le plan est muni d'un repère.
On considère la droite (D) d'équation :
$3x + y - 5 = 0$.
1. Les points suivants appartiennent-ils à la droite (D) ? A(1 ; 2), B(−1 ; 8), C(−2 ; 10), E(0 ; 6). Justifie ta réponse.
2. Trouve l'ordonnée du point F de la droite (D) qui a pour abscisse 5.
3. Trouve l'abscisse du point G de la droite (D) qui a pour ordonnée 6.

30 Le plan est muni d'un repère.
Soit (D) la droite d'équation : $y = 2x - 7$.
1. Les points suivants sont-ils sur la droite (D) ? A(−1 ; 9) B(2 ; −3) C(3 ; 0) E(3 ; 1).
Justifie ta réponse.
2. Trouve l'ordonnée du point F de la droite (D) qui a pour abscisse −2.
3. Trouve l'abscisse du point G de la droite (D) qui a pour ordonnée 7.

31 Le plan est muni d'un repère.
Détermine dans chacun des cas l'équation réduite de la droite (AB).
1. A(2 ; 0) et B(4 ; 1).
2. A(−2 ; 1) et B(−3 ; 5).
3. $A\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right)$.
4. A(−1 ; 5) et B(−3 ; 5).

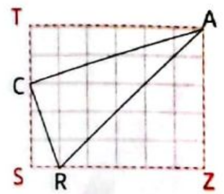
32 Le plan est muni d'un repère.
Détermine l'équation réduite des droites dans chacun des cas suivants :
1. La droite (D_1) passe par le point A(2 ; 3) et a pour coefficient directeur −1.
2. La droite (D_2) passe par le point B(−1 ; 2) et son ordonnée à l'origine est −3.
3. La droite (D_3) passe par le point C(2 ; 5) et est parallèle à la droite d'équation : $y = 3x - 1$.

33 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points A(6 ; −1), B(2 ; 7) et C(−4 ; −3).
1. Donne une équation réduite de chacune des médianes issues de A et de C du triangle ABC.
2. Détermine les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

34 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points suivants A(1 ; −2) ; B(4 ; 0) ; C(10 ; 4) ; D(−2 ; 2).
1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
Justifie ta réponse.
2. Détermine l'équation réduite de la parallèle (Δ) à (AD) passant par B.
3. Calcule la longueur AD.
4. Soit E le point d'intersection de (Δ) et (CD).
Déduis des questions précédentes la longueur BE.

35 Le plan est muni d'un repère.
On donne les points A(2 ; 3), B(6 ; 0) et C(0 ; −4).
1. Démontre que les points A, B, C forment un triangle.
2. Calcule les coordonnées du milieu I du segment [BC].
3. Détermine l'équation réduite de la droite (D) passant par B et parallèle à la médiane issue de A.
4. Vérifie les réponses précédentes à l'aide d'un graphique.

36 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
En utilisant les équations de droites, justifie que le triangle CAR est rectangle en C.



37 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite (Δ) d'équation réduite $y = 2x - 2$.
Pour le graphique, on prendra une demi-page et un centimètre pour unité graphique.
Le graphique sera complété au fur et à mesure.
1. Trace (Δ).
2. Soit A le point de (Δ) d'abscisse 1 et B le point de (Δ) d'ordonnée −6.
Calcule l'ordonnée de A et l'abscisse de B.
3. Soit (Δ') la droite passant par le point C(2 ; 9) et de coefficient directeur −3.
a) Trace (Δ') sur le même graphique que (Δ).
b) Détermine l'équation réduite de (Δ') par le calcul.
4. Soit D le point de (Δ') d'abscisse 3.
Calcule l'ordonnée de D.
5. Détermine la nature du quadrilatère ABOD.

EXERCICES

38 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point A(−2 ; −3) et les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ et $y = 4x + 14$.
1. Démontre que A n'appartient ni à D_1 ni à D_2.
2. Fais la figure.
3. Soit P, un parallélogramme dont un des sommets est A et dont des côtés ont pour supports (D_1) et (D_2).
a) Détermine les équations des droites portant les deux autres côtés de P.
b) Calcule les coordonnées du centre de P.

39 On considère un triangle ABC isocèle en A tel que : AB = 5 et BC = 6. On appelle :
- D est le milieu du segment [BC] ;
- H est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de D ;
- K le milieu du segment [DH].

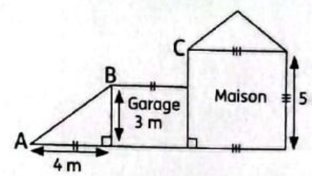
En choisissant un repère orthonormé adapté, démontre que les droites (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

40 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations réduites respectives $y = 1 - x$ et $y = 4 - x$.
1. Trace ces droites sur un graphique.
2. La droite (D_1) coupe l'axe des abscisses en A, la droite (D_2) coupe l'axe des abscisses en B, la droite (D_2) coupe l'axe des ordonnées en C, la droite (D_1) coupe l'axe des ordonnées en D. Calcule les coordonnées des points A, B, C, D.
3. Calcule l'aire du quadrilatère ABCD.

41 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(−3 ; −1), B(1 ; −2) et C(0 ; −7).
1. Fais une figure que tu compléteras au fur et à mesure de l'exercice (prendre le centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).
2. Détermine par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
3. Détermine l'équation réduite de la droite (AC).
4. Détermine par le calcul les coordonnées du point E, symétrique de D par rapport à C.
5. Détermine par le calcul l'ordonnée du point F de la droite (AC) d'abscisse −1.
6. Détermine par le calcul les coordonnées de K, milieu du segment [AE].
7. Démontre que les points D, K et F sont alignés. Que représente F pour le triangle ADE ? Justifie ta réponse.
8. Détermine l'équation réduite de la droite (DF).
9. La droite (DF) est-elle sécante à l'axe des abscisses ? Justifie ta réponse.
Si oui donne les coordonnées du point d'intersection G.

Situations d'évaluation

42



En observant la maison familiale schématisée ci-dessus, Koffi affirme que les points A, B et C sont alignés. Sa sœur pense le contraire.
On donne un repère orthonormé (A, I, J) avec AI = AJ = 1 m.
1. Donne les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.
2. Départage Koffi et sa sœur en justifiant ta réponse.

43 Dans une compétition, Eric et Muriel quittent le rivage à la nage en même temps pour atteindre le point H (voir figure ci-après).
Eric part du point O et suit le trajet rectiligne rouge en nageant à une vitesse constante v.
Muriel part du point A et suit le trajet rectiligne noir en nageant à une vitesse constante v'. Ils passent tous les deux au même point H, pas nécessairement au même moment.

EXERCICES

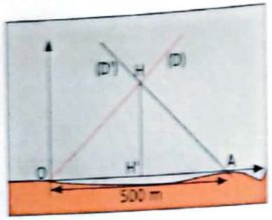
En H est placé un objet que chacun doit ramener pour gagner la partie.

Un spectateur affirme que les deux concurrents peuvent arriver au même instant en H.

Tu es sollicité(e) pour trouver une condition pour que Éric et Muriel arrivent au point H en même temps.

On choisit un repère orthonormé (O, A, J) tel que OI = OJ = 50 m.

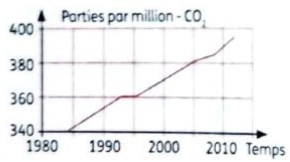
Le coefficient directeur de la droite (D) est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et celui de la droite (D') est −1.



1. Détermine une équation de chacune des droites (D) et (D').
2. Détermine OH et AH.
3. Détermine la valeur du rapport $\frac{v}{v'}$ pour que Éric et Muriel se rencontrent au même instant en H.

44 *Environnement et développement durable.*

Les activités humaines produisent du dioxyde de carbone (CO_2) qui contribue au réchauffement climatique. Le graphique suivant représente l'évolution de la concentration atmosphérique moyenne en CO_2 (en ppm) en fonction du temps (en années).



1 ppm de CO_2 = 1 partie par million de CO_2 = 1 milligramme de CO_2 par kilogramme d'air.

Source : Centre mondial de données relatives au gaz à effet de serre sous l'égide de l'OMS.

On veut modéliser l'évolution de la concentration de CO_2 à l'aide d'une droite (D) pour pouvoir déterminer l'année où le seuil critique de CO_2, qui est de 450 ppm sera atteint. Pour répondre à ces préoccupations, Koffi propose l'équation $y = 2x - 3630$ et Yéo l'équation $y = 2x - 2000$ pour la droite (D).

1. Détermine l'équation qui traduit le mieux la concentration en CO_2 entre 1995 et 2005.
2. Détermine l'année où le seuil critique sera atteint avec l'équation choisie.
3. Dis qui de Koffi ou Yéo a raison. Justifie ta réponse.

Coup de Pouce

33 Résoudre le système d'équation formé par les deux équations de droite.

35 1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. Déterminer le coefficient directeur de la médiane et l'ordonnée à l'origine de l'équation réduite de (D).

42 Déterminer une équation de la droite (AB) et vérifier si C ∈ (AB).

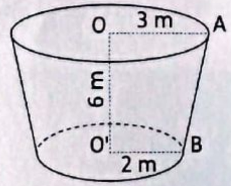
Leçon

14 Pyramides et Cônes

Chaque souverain égyptien a construit sa pyramide pour démontrer la grandeur de son règne. La plus grande est la Pyramide de Khéops (IVᵉ dynastie) : 230 m de base et 146 m de hauteur.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le père d'un élève en classe de 3ᵉ a construit un réservoir ayant la forme ci-contre.
Il veut le fait remplir d'eau. L'agence chargée de remplir le réservoir demande sa capacité. Le père ne sachant que répondre sollicite son fils.
Avec ses camarades de classe, ils décident de faire des calculs pour déterminer la capacité du réservoir.



Scanné avec CamScanner

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Pyramide régulière

Identifier :
- une pyramide régulière ;
- un patron d'une pyramide régulière ;
- les faces d'une pyramide régulière ;
- la base d'une pyramide régulière ;
- une arête d'une pyramide régulière ;
- la hauteur d'une pyramide régulière ;
- le tronc d'une pyramide régulière ;
- l'apothème d'une pyramide régulière.

Connaître :
- la formule du volume d'une pyramide régulière ;
- la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière.

Décrire :
une pyramide régulière.

Construire :
un patron de pyramide régulière.

Réaliser :
une pyramide régulière.

Calculer :
- le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide régulière ;
- des aires de troncs de pyramides régulières ;
- des volumes de troncs de pyramides régulières.

2 Cône de révolution

Identifier :
- un cône de révolution ;
- un patron d'un cône de révolution ;
- le sommet d'un cône de révolution ;
- la base d'un cône de révolution ;
- la hauteur d'un cône de révolution ;
- l'angle de développement d'un cône de révolution ;
- le tronc d'un cône de révolution ;
- une génératrice d'un cône de révolution.

Connaître :
- la formule du volume d'un cône de révolution ;
- la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution ;
- la relation entre longueur d'une génératrice et, l'angle de développement et le périmètre de la base d'un cône.

Décrire :
un cône de révolution.

Construire :
un patron d'un cône de révolution

Réaliser :
un cône de révolution

Calculer :
- le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône de révolution ;
- des aires de troncs de cône de révolution ;
- des volumes de troncs de cône de révolution.

3 Sections planes

Connaître :
les propriétés de réduction.

Extraire :
une figure plane d'une représentation d'un cône de révolution ou d'une pyramide régulière.

Calculer :
le coefficient de réduction.

Traiter :
une situation faisant appel aux pyramides régulières et aux cônes de révolution.

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Pyramide régulière

1 Activité : Présentation

On donne les figures ci-contre :

1. Décris chacune d'elles.
2. Nomme, à l'aide des lettres, la face sur laquelle est posée chaque figure.
3. Donne la particularité de la face sur laquelle repose la figure 1 et la figure 2.

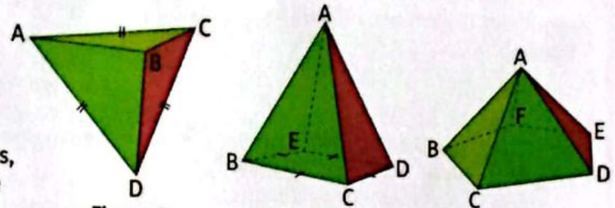


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Synthèse

Les figures ci-dessus sont des pyramides. Une pyramide a une base, un sommet et des faces triangulaires.
Une pyramide est dite régulière lorsque, sa base est un polygone régulier et ses faces sont des triangles isocèles.

Exercices de fixation

1 Parmi les figures ci-dessous identifie celles qui sont des pyramides.

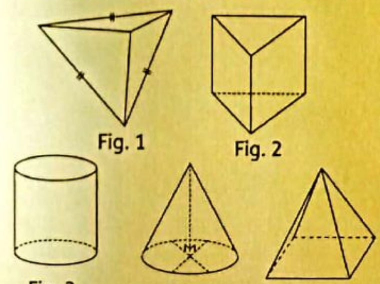
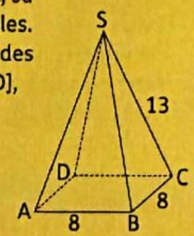


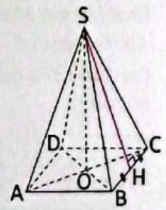
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig.5

2 Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide régulière.
1. Nomme son sommet, sa base et ses faces latérales.
2. Donne les longueurs des segments suivants : [AD], [CD], [SA], [SB] et [SD].



2 Activité : Hauteur et apothème d'une pyramide

On considère la pyramide régulière ci-contre.
1. a) Justifie que (SO) est perpendiculaire à la droite (AC) dans le plan (SAC).
   b) Justifie que (SO) est perpendiculaire à la droite (BD) dans le plan (SBD).
2. Que représente le segment [SH] pour le triangle SBC ?
Justifie ta réponse.

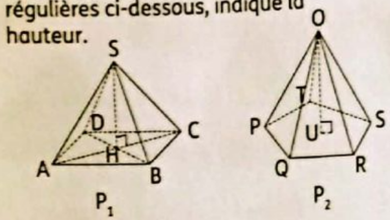


Synthèse

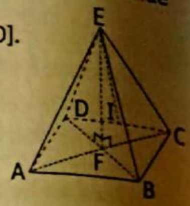
On admet que la droite (SO) est perpendiculaire au plan (ABC). La droite (SO) est appelé la hauteur de la pyramide.
On admet que dans une pyramide régulière la hauteur est la droite qui passe par le sommet de la pyramide et par le centre de la base.
[SH] est une hauteur d'une face de la pyramide : on l'appelle apothème.

Exercices de fixation

1 Pour chacune des pyramides régulières ci-dessous, indique la hauteur.

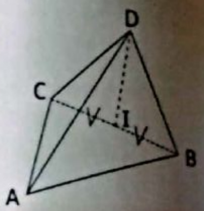


2 La figure codée ci-contre est la pyramide régulière EABCD et I est le milieu du segment [CD].
1. Cite la hauteur de la pyramide.
2. Cite un apothème de la pyramide.



3 **Activité : Aires d'une pyramide régulière**

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle DABC est une pyramide régulière de sommet D.



I est le milieu de [BC], BC = 6 et ID = $6\sqrt{2}$.

1. a) Calcule l'aire du triangle DBC.
   b) Calcule la somme des aires des triangles DAB, DBC et DCA.
   c) Soit p le périmètre du triangle ABC.

Calcule $\dfrac{p \times \text{ID}}{2}$ puis compare le résultat avec celui de la question précédente.

2. Calcule l'aire totale de la pyramide DABC.

Synthèse

Soit une pyramide régulière de périmètre de base p et d'apothème a.
- L'aire latérale est égale à la somme des aires des faces latérales.
- L'aire latérale est égale à $\dfrac{p \times a}{2}$.
- L'aire totale est égale à la somme de l'aire latérale et de l'aire de base.

Exercices de fixation

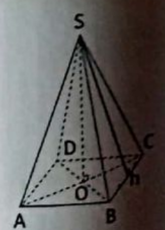
1 On considère une pyramide régulière de base un triangle équilatéral ABC. I est le milieu du segment [AB]. L'aire d'une face latérale est égale à 11 cm².
AB = 4 cm ; AI = $2\sqrt{3}$ cm.
Calcule l'aire totale de cette pyramide régulière.

2 On donne une pyramide régulière à base carrée de côté 4 cm, l'apothème est $3\sqrt{5}$ cm.
1. Calcule l'aire latérale.
2. Calcule l'aire de base.
3. Calcule l'aire totale de la pyramide.

4 **Activité : Volume d'une pyramide régulière**

On considère la pyramide régulière à base carrée ci-contre telle que :
AB = 4 cm et SO = 7 cm.

1. Sachant que le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme droit de même base et de même hauteur, donne la formule du volume de la pyramide SABCD.
2. Calcule le volume de la pyramide SABCD.

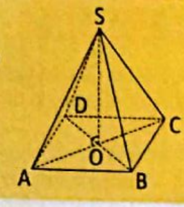


Synthèse

Le volume d'une pyramide régulière est $\dfrac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de base et h la hauteur de la pyramide.

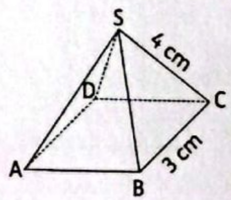
Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre.
SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base carrée ABCD de centre O.
On donne : SO = 12 et AB = 6.
Calcule le volume V de la pyramide SABCD.



5 **Activité : Patron d'une pyramide**

On donne la pyramide régulière de base carrée ci-contre.
Construis un patron de cette pyramide.

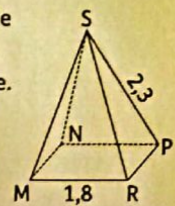


Synthèse

Un patron d'une pyramide régulière à base carrée est composé d'un carré et de quatre triangles isocèles.

Exercices de fixation

1 SMNPR est une pyramide régulière à base carrée.
L'unité est le centimètre.
Construis un patron de cette pyramide.

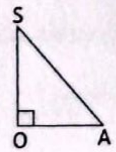


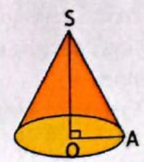
2 Construis un patron d'une pyramide dont la base est un triangle équilatéral de 3 cm de côté. Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables dont les côtés de même longueur mesurent 5 cm.

Activités 2 Cône de révolution

1 **Activité : Présentation**

On considère un triangle SOA rectangle en O. On fait tourner ce triangle autour de l'axe SO. Dis ce que tu observes.





Synthèse

En faisant tourner le triangle SOA autour de l'axe (SO), on engendre un solide appelé cône de révolution.
Sa base est le disque de rayon [OA].
[SA] est appelé une génératrice.
[SO] est la hauteur et S est le sommet du cône.

Exercices de fixation

Parmi les figures ci-dessous identifie celle qui représente un cône de révolution.

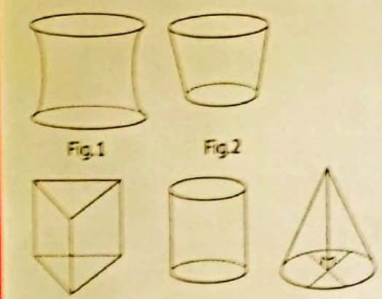
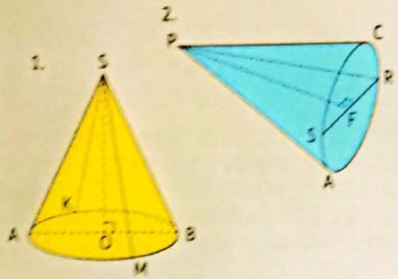
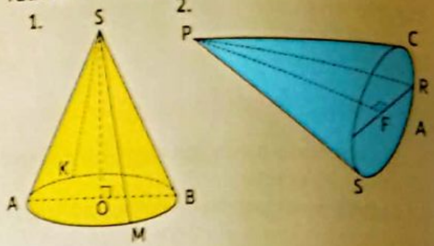


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5

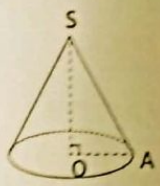
Observe les cônes ci-dessous et nomme pour chacun d'eux le sommet, le centre de la base et le diamètre de la base.



Observe les cônes ci-dessous et nomme pour chacun d'eux la hauteur et la génératrice.



On donne le cône de révolution ci-dessous où O est le centre du cercle de base, S le sommet et A un point du cercle.
SA = 10 et OA = 6.
Calcule la hauteur de ce cône de révolution.

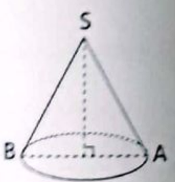


2 Activité : Aires d'un cône de révolution

La figure ci-contre représente un cône de révolution.
AB = 3 cm ; SA = 5 cm.

1. Calcule l'aire S_1 telle que :
$S_1 = \frac{P \times a}{2}$, où P désigne le périmètre du disque de base et a la génératrice.
2. Calcule l'aire S_2 du disque de base.
3. Calcule $S_1 + S_2$.

Tu prendras $\pi = 3,14$.



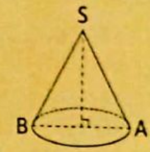
Synthèse

- L'aire latérale d'un cône de révolution est égale à $\frac{P \times a}{2}$, où P désigne le périmètre du disque de base et a la génératrice.
- L'aire totale est égale à la somme de l'aire latérale et de l'aire de base.

Exercice de fixation

On donne le cône de révolution ci-contre où [IA] est un rayon de la base et [SA] la génératrice.
IA = 3 cm et SA = 7 cm.

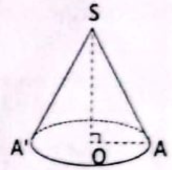
1. Calcule l'aire latérale de ce cône de révolution.
2. Calcule l'aire totale de ce cône de révolution.



3 Activité : Volume d'un cône de révolution

On donne le cône de révolution ci-contre.
SO = 5 et OA = 3.

1. Sachant que le volume d'un cône est le tiers du volume d'un cylindre droit de même base et de même hauteur, donne la formule du volume d'un cône de révolution (B est l'aire du disque de base et h la hauteur du cône).
2. Calcule l'aire B du disque de base.
3. Calcule h et le volume du cône.

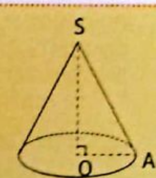


Synthèse

On admet que :
Le volume d'un cône de révolution d'aire de base B et de hauteur h est égal à : $\frac{B \times h}{3}$.

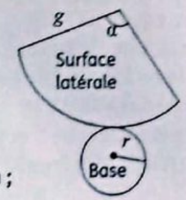
Exercice de fixation

On donne le cône de révolution ci-contre où [OA] est un rayon de la base et [SO] la hauteur.
SO = 7 et OA = 4.
Calcule le volume du cône de révolution.

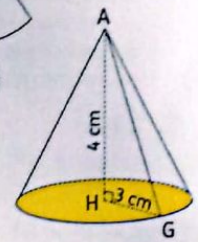


4 Activité : Patron d'un cône de révolution

Découpe un cône de révolution en carton et tu obtiens la figure ci-contre.

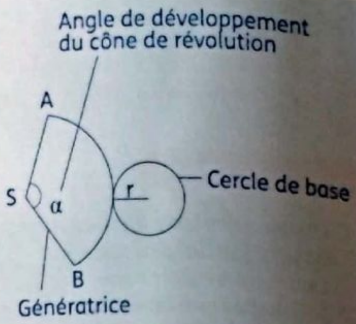


1. Décris cette figure.
2. On veut construire le patron d'un cône de révolution ci-contre de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm ;
   a) Calcule la longueur de la génératrice g.
   b) Pour construire la surface latérale on a besoin de connaître l'angle α de développement du cône.
   Justifie que : $\alpha = \frac{360° \times r}{g}$.
   c) Sachant que : $g = 5$; $r = 3$, calcule la mesure de l'angle α.
3. Construis le patron du cône.



Synthèse

- Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque qui est la base du cône et d'un secteur angulaire, qui est la face latérale.
- L'angle du secteur angulaire α du patron est l'angle de développement du cône.
$\alpha = 360° \times \frac{r}{g}$, où r est le rayon du disque et g est la génératrice du cône.
α est en degré.



Exercices de fixation

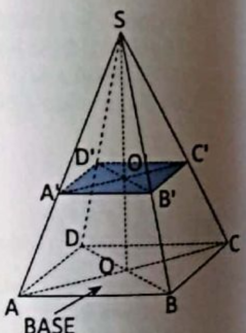
1. Construis le patron d'un cône de révolution dont le diamètre du disque de base est 6 cm et la génératrice est 5 cm.
2. Construis le patron du cône de révolution dont le diamètre du disque de base est 4 cm et de génératrice 7 cm.
3. Un secteur angulaire de mesure 130° et de rayon 3 cm est la surface latérale d'un cône de révolution. On donne $\pi = 3{,}14$.
Calcule le périmètre du disque de base P de ce cône.

Activités 3 Sections planes

1 Activité : Section plane d'une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de base

On considère la pyramide régulière SABCD, de sommet S et de hauteur [SO]. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base passant par A' où A' ∈ [SA].

1. Donne la nature du solide SA'B'C'D'.
2. Justifie que : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$, on note k cette valeur.
3. a) Donne la formule de $\mathcal{A}_B$, l'aire de la base, de la pyramide SABCD.
   b) Exprime en fonction de k et $\mathcal{A}_B$, l'aire $\mathcal{A}'_B$, l'aire de base, de la pyramide réduite SA'B'C'D'.
4. a) Donne la formule du volume V de la pyramide SABCD.
   b) Exprime en fonction de k et V, le volume V' de la pyramide réduite SA'B'C'D'.
5. Exprime en fonction de V et V' le volume V_T du tronc du A'B'C'D'ABCD de la pyramide.



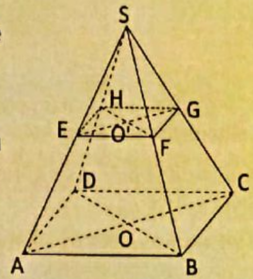
Synthèse

- La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que la base de la pyramide.
- Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

- Dans le cas d'un agrandissement le rapport k est plus grand que 1.
- Dans le cas d'une réduction le rapport k est petit que 1.

Exercices de fixation

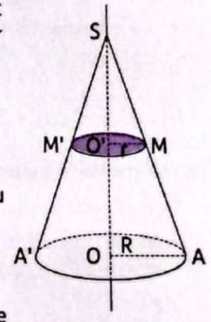
1. Recopie et complète les phrases ci-dessous avec les groupes de mots suivants : les volumes, les longueurs, les aires.
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k.
   - .... sont multipliées par k.
   - .... sont multipliées par k^2.
   - .... sont multipliés par k^3.
2. L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière de base le carré ABCD, de sommet S et de hauteur SO. On donne :
$AB = 6\sqrt{2}$ et SO = 8.
   1. Justifie que le volume de la pyramide est 192 cm³.
   2. On réalise une section plane parallèle au plan de la base au point E telle que : $SE = \frac{3}{4}SA$.
      a) Justifie que : $EF = \frac{9}{2}\sqrt{2}$.
      b) Calcule l'aire du carré EFGH.
      c) Calcule le volume du petit cône SEFGH.



2 Activité : Section plane d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de base

On considère un cône de révolution de rayon de base R, de sommet S et de hauteur SO de diamètre de base [AA']. On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par M.

1. Donne la nature de la figure SMM'.
2. Justifie que : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SM}{SA} = \frac{O'M'}{OA}$, on note k cette valeur ;
3. a) Donne la formule de $\mathcal{A}_B$, l'aire de la base, du cône.
   b) Exprime en fonction de k et $\mathcal{A}_B$, l'aire $\mathcal{A}_B$, de l'aire de base, du cône réduit.
4. a) Donne la formule du volume V du cône.
   b) Exprime en fonction de k et V, le volume V' du cône réduit.
5. Exprime en fonction de V et V' le volume V_T du tronc de cône de révolution.



Synthèse

- La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque dont le centre est situé sur l'axe du cône.
- Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

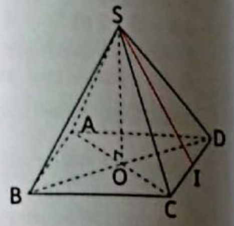
Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre.
On considère un cône de révolution de diamètre de base égale à 8 et de hauteur 6.
1. Justifie que le volume du cône est 32π cm³.
2. On réalise une section plane du cône de révolution par un plan parallèle ou plan de base.
On obtient un cône de révolution réduit de hauteur 3.
   a) Justifie que le diamètre du cône réduit est 4.
   b) Calcule le volume du cône réduit.
3. Calcule le volume du tronc de cône révolution.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Calculer les aires et le volume d'une pyramide régulière

L'unité de longueur est le centimètre. SABCD est une pyramide régulière à base carrée et de centre O telle que : AB = 4 et SI = 5.
1. Calcule l'aire latérale de SABCD.
2. Calcule son aire totale.
3. Calcule le volume de cette pyramide.



Corrigé

1. L'Aire latérale de la pyramide : $\mathcal{A}_L = \frac{P \times SI}{2}$;
La base étant un carré de côté 4cm ;
$P = C \times 4 = 4 \times 4 = 16$cm ;
Donc $\mathcal{A}_L = \frac{16 \times 5}{2} = 40$cm²
2. L'aire de la base est $B = C \times C = 4 \times 4 = 16$ cm²
L'aire totale est :
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_L + B$
$= 16$ cm² $+ 40$ cm² $= 56$ cm²
Donc : $\mathcal{A} = 56$ cm².
3. Le volume de la pyramide :
$V = \frac{B \times h}{3}$; On a : $B = 16$ cm².
Déterminons la hauteur SO.
On a : $AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm ;
Donc $OC = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.
Le triangle SCI est rectangle en I. D'après la propriété de Pythagore, on a : $SC^2 = IC^2 + SI^2$.
Donc $SC = \sqrt{IC^2 + SI^2}$; On en déduit que :
$SC = \sqrt{29}$ cm.

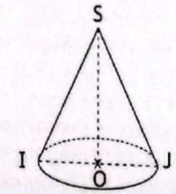
Le triangle SOC est rectangle en O.
D'après la propriété de Pythagore, on a :
$SC^2 = OC^2 + SO^2$.
Donc $SO^2 = \sqrt{(SC^2 - CO^2)}$; par suite :
$SO = \sqrt{29 - 8} = \sqrt{21}$ cm.
Le volume de la pyramide est :
$V = \frac{B \times SO}{3} = \frac{16 \times \sqrt{21}}{3}$ cm³ ;
Donc $V = 24{,}44$ cm³.

Méthode

• Appliquer les formules suivantes
$\mathcal{A}_L = \frac{P \times a}{2}$ où a est l'apothème et $P = 4c$;
$V = \frac{B \times h}{3}$ où $B = c^2$, c est le côté de la base et h la hauteur.
• Pour calculer le volume, il faut calculer d'abord la hauteur en utilisant la propriété de Pythagore.

Exercice 2 Calculer latérale et le volume d'un cône de révolution

L'unité de longueur est le centimètre. La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur est un cône de révolution de sommet S, de hauteur [SO] et de base le disque de diamètre [IJ].
On donne : IJ = 10 et SO = 12.
1. Démontre que : SI = 13.
2. Calcule l'aire latérale et le volume de ce cône.



Corrigé

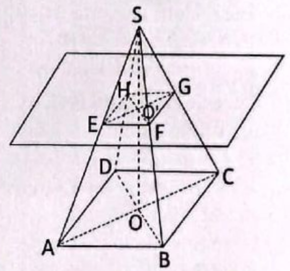
1. Le triangle SOI est rectangle en O, d'après la propriété la propriété de Pythagore, on a $SI^2 = OI^2 + OS^2$. Le point O est le milieu de [IJ] donc OI = 5 et on sait que OS = 12.
Donc $SI^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
$SI = \sqrt{169} = 13$ cm.
2. L'aire latérale : $\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2} = \frac{2 \times \pi \times r \times SI}{2}$
$= \frac{2 \times \pi \times 5 \times 13}{2} = 65\pi$cm².
Le volume : $V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times (\pi \times r^2) \times SO = \frac{1}{3} \times (\pi \times 5^2) \times 12$
$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 25 \times 12 = \frac{1 \times \pi \times 25 \times 12}{3} = \frac{300\pi}{3} = 100\pi$cm³.

Méthode

1. Utiliser la propriété de Pythagore sur le triangle rectangle SOI.
2. Appliquer les formules de l'aire latérale et du volume.

Exercice 3 Calculer le volume d'une pyramide réduite et le volume d'un tronc de pyramide

L'unité de longueur est le centimètre.
SABCD représente une pyramide régulière de base le carré ABCD et de centre O tel que : AB = 7 et SO = 12.
Un plan parallèle au plan de la base coupe la pyramide suivant le carré EFGH de centre O'.
1. Démontre que le volume V de la pyramide SABCD est 196 cm³.
On donne : SO' = 4.
2. Déduis-en la valeur approchée par excès d'ordre 1 du volume de la pyramide SEFGH.
3. Calcule le volume V_T du tronc de la pyramide.



Corrigé

1. Volume de la pyramide : $V = \frac{B \times h}{3}$
B = l'aire du carré ABCD
$AB^2 = 7^2 = 49$ cm² ; et $h = SO = 12$ cm,
donc $V = \frac{49 \times 12}{3} = \frac{588}{3} = 196$ cm³.
2. Calculons le volume V_p de la petite pyramide SEFGH :
L'échelle de réduction k est : $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $V_p = k^3 \times V = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 196 = \frac{196}{27}$ cm³.
$V_p = 7{,}259$ cm³ ; Donc 7,3 est une valeur approchée par excès d'ordre 1 de V_p.
Le volume V_T du tronc de la pyramide est :
$V_T = V - V_p = 196 - 7{,}3 = 188{,}7$ cm³.

Méthode

Appliquer la formule $V_T = V - V'$ et la formule $V = \frac{B \times h}{3}$ et $V' = k^3V$ où k est le coefficient de réduction.

Exercice 4 Déterminer les dimensions d'un cône de révolution connaissant les dimensions de sa surface latérale

Un secteur angulaire de mesure 120° et de rayon 3 cm est la surface latérale d'un cône de révolution.
1. Calcule le rayon de la base du cône.
2. Construis un patron.
3. a) Calcule le périmètre P du cercle de base et déduis-en l'aire latérale $\mathcal{A}$ du cône.
   b) Calcule la hauteur et le volume du cône.

Méthode

• On calcule le rayon de la base $r = \dfrac{g \times \theta°}{360°}$ et le périmètre $P = 2\pi r$.

• On utilise les formules suivantes $\mathcal{A}_L = \dfrac{P \times a}{2}$ et $V = \dfrac{1}{3} B \times h$.

Corrigé

1. Calculons r.

On a : $g \times \alpha = 2\pi r$

$r = \dfrac{g \times \alpha}{2\pi}$ comme α est en degré.

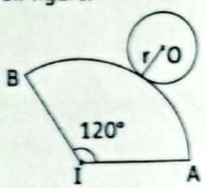
$r = \dfrac{g \times \alpha}{360}$

$r = \dfrac{3 \times 120}{360}$

$r = \dfrac{360}{360}$

$r = 1$ cm

2. Voir figure.



IA = IB = 3 cm
r ≈ 1 cm
r = 1 cm

3. a) $P = 2\pi r$
$= 2\pi \times 1$

$P = 2\pi$ cm

$\mathcal{A} = \dfrac{P \times a}{2} = \dfrac{2\pi \times 3}{2}$
$= 3\pi$

$\mathcal{A} = 3\pi$ cm².

b) La hauteur $h = \sqrt{IA^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 1^2}$

$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$h = 2\sqrt{2}$ cm

Le volume $V = \dfrac{B \times h}{3} = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

$V = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ cm³.

Résumé de cours

1 Pyramide régulière

1.1. Présentation

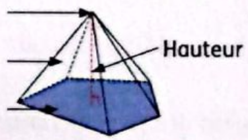
• **Une pyramide est un solide dont :**
- Une face est un polygone : c'est la base de la pyramide.
- Les autres faces, appelées faces latérales, sont des triangles qui ont un sommet commun. C'est le sommet de la pyramide.
- Les arêtes latérales sont les segments joignant les sommets de la base au sommet de la pyramide.

• **Pyramide régulière**

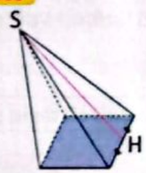
L'apothème d'une pyramide régulière est un segment qui joint le sommet et le milieu d'un côté de la base. Le segment [SH] est un apothème. On appelle aussi apothème la distance SH.

Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier (polygone inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur) Par exemple un triangle équilatéral ou un carré.

• Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.
• L'apothème d'une pyramide régulière est la hauteur d'une face.



Exemples



Pyramide à base carrée

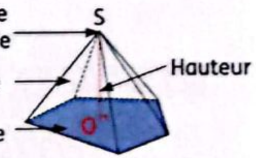
Pyramide à base triangulaire appelée tétraèdre

Pyramide à base hexagonale

1.2. Hauteur et apothème d'une pyramide régulière

Définition

La hauteur d'une pyramide est le segment issu de son sommet et dont le support est perpendiculaire à la base.
Le segment [SO] est la hauteur de la pyramide.
On appelle aussi hauteur la distance SO.



1.3. Aires d'une pyramide régulière

• **L'aire latérale**

Définition

L'aire latérale $\mathcal{A}_L$ d'une pyramide régulière est la somme des aires de toutes les faces latérales.

Résumé de cours

Propriété

$\mathcal{A}_L = \frac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre de la base et a l'apothème de la pyramide.

• **L'aire de la base**

Définition

L'aire de la base est l'aire du polygone régulier de la base de la pyramide, on la note souvent $\mathcal{A}_B$

• **L'aire totale**

Définition

L'aire totale d'une pyramide régulière est la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_L$.

1.4. Volume d'une pyramide régulière

Propriété

Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur :

$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

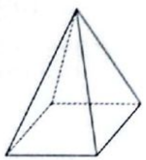
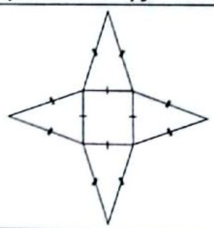
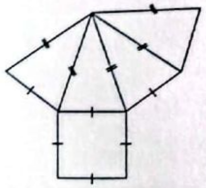
$V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

1.5. Patron d'une pyramide régulière

Définition

Un patron d'une pyramide est un **dessin qui permet après découpage et pliage de fabriquer la pyramide.** Il est constitué d'un polygone régulier qui correspond à la base de la pyramide et de triangles isocèles qui correspondent aux faces latérales de la pyramide.

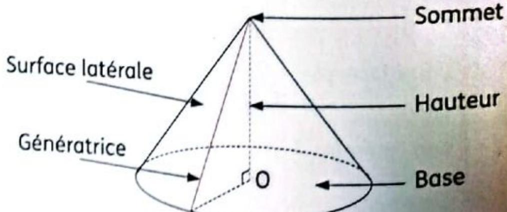
Exemple

Une pyramide 1	Un patron de la pyramide 1	Un autre patron de la pyramide 1
		

2 Cône de révolution

2.1. Présentation

Un cône de révolution est un solide composé :
- **d'une base** en forme de disque ;
- **d'un sommet** situé sur la perpendiculaire en son centre au disque de base ;
- d'une **seule face latérale,** non plane.



Résumé de cours

2.2. Hauteur et génératrice d'un cône de révolution

Définitions

- La **hauteur** d'un cône est le segment issu du sommet du cône et de support perpendiculaire au disque de base.
- La **génératrice** d'un cône est le segment joignant le sommet du cône et un point du cercle définissant le disque de base.

La génératrice est aussi **l'apothème** du cône.

2.3. Aires d'un cône de révolution

• **L'aire latérale**

Propriété

L'aire latérale d'un cône de révolution est égale à la moitié du produit du périmètre de base par la longueur d'une génératrice.

$\mathcal{A}_l = \frac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre du disque de base et a est la génératrice du cône.

• **L'aire de la base**

Définition

L'aire de la base est l'aire du disque de la base du cône, $\mathcal{A}_B$.

• **L'aire totale**

Définition

L'aire totale d'une pyramide régulière est la somme de l'aire latérale et de l'aire du disque de la base.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_L$.

2.4. Volume d'un cône de révolution

Propriété

Le volume d'un cône est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur.

$V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire du disque de base et h la hauteur.

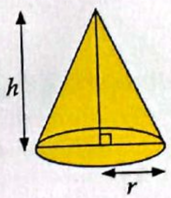
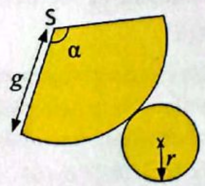
2.5. Patron d'un cône de révolution

Définition

Un patron d'un cône de révolution est formé d'un disque de base et d'un secteur circulaire.

La longueur de l'arc de cercle de ce secteur est égale au périmètre du cercle.

Exemple

Un cône	Un patron de cône
	

Méthode pour tracer le patron d'un cône de révolution connaissant le rayon du disque de base et la génératrice :

- Placer le sommet S de la pyramide.
- Tracer un segment d'extrémité S de longueur la génératrice g.
- Tracer un secteur angulaire de centre S et d'angle α à partir du segment tracé, avec $\alpha = \frac{360° \times r}{g}$, où r est le rayon du disque, g est la génératrice du cône.
- Placer un point M sur l'arc de cercle puis placer le point O sur la demi-droite [SM) tel que : MO est rayon du disque de base et O n'appartient pas au segment [SH].
- Tracer le disque de base de centre O et de rayon donné.

Remarque

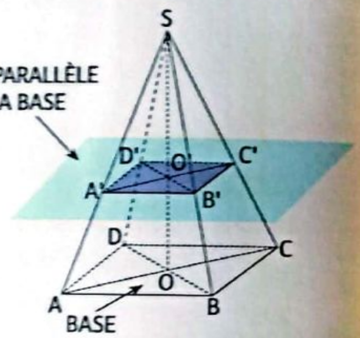
Il existe une relation entre le rayon r, la génératrice g et la hauteur h du cône. Ainsi on a : $g^2 = h^2 + r^2$.

3 Section plane

3.1. Section plane d'une pyramide régulière

Définition

La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que la base de la pyramide. Ce polygone est une réduction du polygone initial de base.
De plus, si la base de la pyramide est formée par un polygone régulier, le centre du polygone réduit appartient au segment dont les extrémités sont le sommet de la pyramide et le centre du polygone.
SA'B'C'D' est **la pyramide réduite** de SABCD.
Le solide ABCDA'B'C'D' est le **tronc** de la pyramide.



Coefficient de réduction

Soit SABCD une pyramide, de base ABCD et soit A'B'C'D' une réduction de ABCD, obtenue en sectionnant la pyramide par un plan parallèle à sa base.
Le coefficient de réduction k est :
$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO}$.

Agrandissement-Réduction :

Propriété

- Si L est la longueur d'un segment de la pyramide initiale et L' la longueur du segment correspondant de la pyramide réduite, alors $\frac{L'}{L} = k$.
- Si A est l'aire latérale ou l'aire de la base de la pyramide initiale et A' l'aire latérale ou l'aire de la base de la pyramide réduite, alors $\frac{A'}{A} = k^2$.
- Si V est le volume de la pyramide initiale et V' le volume de la pyramide réduite, alors $\frac{V'}{V} = k^3$.

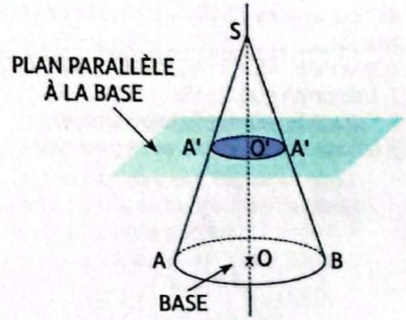
Tronc d'une pyramide

Si $\mathcal{A}_l$ est l'aire latérale de la pyramide initiale et $\mathcal{A}'_l$ est l'aire latérale de la pyramide réduite alors l'aire du tronc $\mathcal{A}_T$ est $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_l - \mathcal{A}'_l$.
Si V est le volume de la pyramide initiale et V' est le volume de la pyramide réduite alors le volume V_T du tronc de la pyramide est : $V_T = V - V'$.

3.2. Section plane d'un cône de révolution

Définition

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle ou un disque dont le centre est situé sur l'axe du cône.
De plus, si c'est un cercle alors, il est une réduction du cercle délimitant sa base. Si c'est un disque, il est une réduction de la base.
SA'B' est **le cône réduit** de SAB.
Le solide A'B'BA est le **tronc** du cône.



Coefficient de réduction

Propriété

Soit un cône de révolution de sommet S. Un cercle (C') de centre O' est une réduction du cercle délimitant la base du cône obtenue en sectionnant le cône par un plan parallèle à sa base. Soit A un point du cercle de centre O, délimitant la base du cône et A' le point de (C') appartenant au segment [SA]. Le coefficient de réduction k est :
$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'O'}{AO}$.

Agrandissement-Réduction :

Propriété

- Si L est la longueur d'un segment du cône initial et L' la longueur du segment correspondant du cône réduit, alors $\frac{L'}{L} = k$.
- Si A est l'aire latérale ou l'aire de la base du cône initial et A' l'aire latérale ou l'aire de la base du cône réduit, alors $\frac{A'}{A} = k^2$.
- Si V est le volume du cône initial et V' le volume du cône réduit, alors $\frac{V'}{V} = k^3$.

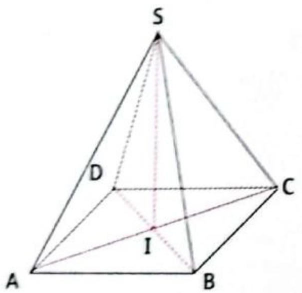
Tronc d'un cône

Propriété

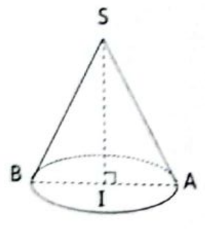
Si $\mathcal{A}_l$ est l'aire latérale du cône initiale et $\mathcal{A}'_l$ est l'aire latérale du cône réduit, alors l'aire du tronc du cône $\mathcal{A}_T$ est $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_l - \mathcal{A}'_l$.
Si V est le volume du cône initiale et V' est le volume du cône réduit alors le volume V_T du tronc du cône est : $V_T = V - V'$.

Exercices de renforcement

1 On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle :
• SABCD représente une pyramide régulière de base le carré ABCD de centre I et de hauteur [SI].
• On donne : $AB = 4$; $AC = 4\sqrt{2}$; $SA = 6\sqrt{2}$.
1. Démontre que $SI = 8$.
2. Calcule le volume de la pyramide.
3. Calcule l'aire latérale de la pyramide.

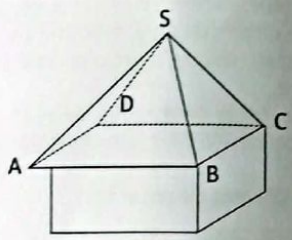


2 La figure ci-dessous représente un cône de révolution dont [AB] est un diamètre de base et I est le milieu de [AB].
1. Calcule l'aire latérale de ce cône de révolution.
2. Calcule son aire totale.
3. Calcule son volume
(tu prendras $\pi = 3{,}14$).

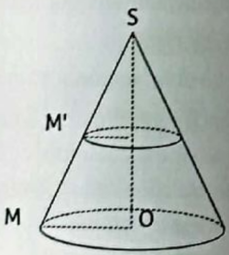


On donne :
$AB = 4$ cm
$SA = 5$ cm

3 La figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles représente le kiosque de la jeune Aya. Le toit de son kiosque a la forme d'une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD. L'unité de longueur étant le mètre (m).
On donne : $AB = 4$; $AS = \sqrt{13}$.
1. Justifie que l'apothème de cette pyramide est 3.
2. Aya désire recouvrir le toit de son kiosque avec des feuilles de tôles de 2 m² chacune.
Calcule le nombre minimum de feuille dont elle a besoin.

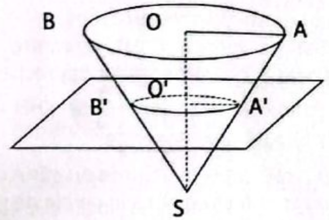


4 On ne demande pas de reproduire la figure.
L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles représente un cône de révolution de sommet S et de base le cercle de centre O et de rayon OM ;

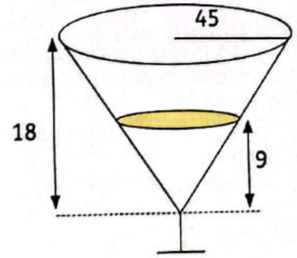


On donne : $SO = 10$; $OM = 6$.
(tu prendras $\pi = 3{,}14$)
1. Démontre qu'une valeur approchée par excès du volume du cône est 377 cm³.
2. On sectionne le cône par un plan parallèle au plan de sa base et qui passe par le point M', du segment [SM] tel que : $SM' = \frac{1}{2}$ SM.
Calcule une valeur approchée à l'unité près du volume V' du tronc de cône.

5 On ne demande pas de reproduire la figure.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : $\pi \approx 3{,}1$.
Un forgeron veut fabriquer une cuvette à partir d'un cône métallique de sommet S et de base le cercle de centre O et de rayon OA.
Il coupe le cône suivant un plan parallèle à sa base. La figure ci-dessous représente le cône et le plan.
On donne : $SO = 60$; $OA = 45$; $SA' = \frac{1}{3}$ SA.
Le volume du cône initial est 125.550 cm³.
1. Calcule SO'.
2. Calcule le volume de la cuvette représentée par le tronc de cône.

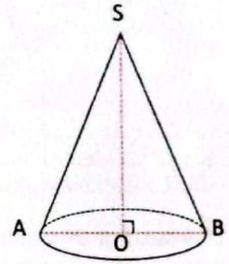


6 L'unité de longueur est le centimètre.
La partie supérieure du verre représentée ci-dessous a la forme d'un cône de révolution de hauteur 18 et dont la base a pour rayon 4,5.
1. Justifie que le volume du verre est 381,51 cm³. (Tu prendras $\pi \approx 3{,}14$).
2. On remplit ce verre jusqu'à son bord avec du lait. Puis, après en avoir bu, René constate que la hauteur du liquide restant est 9 cm.
a) Calcule le volume de lait restant.
b) Calcule le volume de lait bu par René.

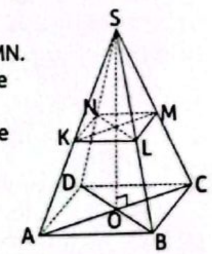


7 L'unité de longueur est le centimètre.
SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre H.
On donne : $AS = 9$ et $AB = 6$.
1. Fais une figure.
2. Justifie que : $AC = 6\sqrt{2}$.
3. Sachant le triangle SAH est rectangle en H :
a) Démontre que : $SH = 3\sqrt{7}$.
b) Calcule le volume de cette pyramide.

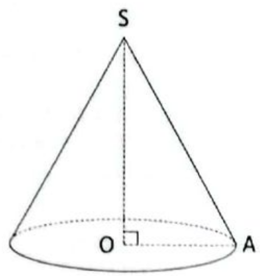
8 L'unité de longueur est le centimètre.
Un cône de révolution a pour rayon de base 3 et pour génératrice 4.
1. Calcule l'aire latérale de ce cône.
2. a) Calcule la hauteur de ce cône.
b) Calcule le volume de ce cône.



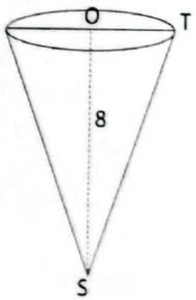
9 L'unité de longueur est le centimètre, la figure n'est pas en vraie grandeur. SABCD est une pyramide régulière à base carrée.
Le plan parallèle à la base qui passe par le point K milieu de [SA] coupe les arêtes [SB], [SC] et [SD] respectivement en L, M et N.
On donne : $AB = 12$ et $SO = 18$.
1. Justifie que le coefficient de réduction est $\frac{1}{2}$.
2. Justifie que $KL = 6$.
3. Calcule l'aire de KLMN.
4. Calcule le volume de SABCD.
5. Calcule le volume de la pyramide régulière SKLMN.
6. Calcule le volume du tronc ABCDKLMN.



10 La figure ci-dessous représente un cône de révolution de volume 339,12 cm³. L'aire de sa base est de 113,04 cm².
1. Justifie que la hauteur de ce cône est 9 cm.
2. Justifie que le rayon de sa base est 6 cm.
(On prendra : $\pi = 3{,}14$).
3. Déduis-en sa génératrice et écris-la sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels avec b le plus petit possible.



11 L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles représente un cône de révolution de sommet S et de base le cercle de centre O et de rayon OT.
V est le volume du cône. On donne :
• OS = 8 ;
• $V = \frac{400}{3}\pi$ cm³.
1. Justifie que : $OT = 5\sqrt{2}$.
2. Sachant que $(5\sqrt{2})^2 = 5^2 + 5^2$, construis le triangle SOT en dimensions réelles.



12 L'unité de longueur est le centimètre (cm).
On donne ci-après un cône (figure 1) dont un patron de la surface latérale est le quart de disque de rayon 8 (figure 2).
1. Justifie que : OB = 2.
2. a) Justifie que : $OS = 2\sqrt{15}$.
b) Calcule le volume de ce cône.

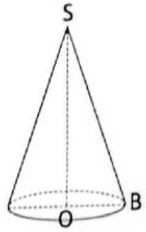


Figure 1

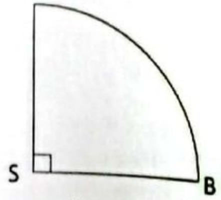
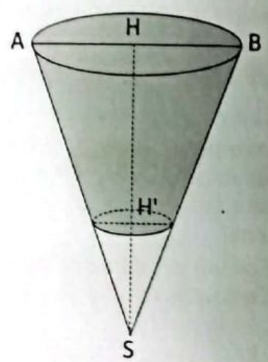


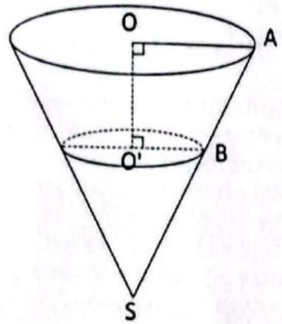
Figure 2

13 Un éleveur de moutons dispose d'un abreuvoir qui a la forme du tronc de cône (en gris) comme l'indique la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles.
L'unité de longueur est le mètre (m), tu prendras 3,1 comme valeur approchée de π.
On donne : AB = 6 ; $SH' = \frac{1}{3}SH$; HH' = 0,6.
1. a) Justifie que : SH = 0,9.
b) Justifie que le volume du cône de sommet S et de base le cercle de diamètre [AB] est 8,37 m³.
2. Calcule la quantité d'eau que contient l'abreuvoir lorsqu'il est plein.



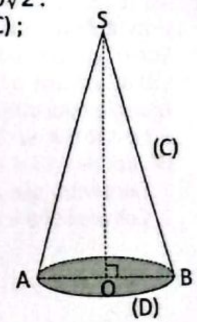
14 L'unité de longueur est le centimètre.
On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
Sur la figure suivante qui n'est pas en dimensions réelles :
• OABO' est un trapèze de bases [OA] et [O'B] ;
• (OO') ⊥ (OA) ;
• OA = 5 ; $O'B = \frac{10}{3}$; OO' = 4.

En faisant tourner à grande vitesse autour de la droite (OO'), le trapèze OABO', on obtient le tronc du cône de sommet S et de base le disque de rayon [OA].
On donne : SA = 13 ; $\pi = 3{,}1$.
1. Justifie que : $SB = \frac{26}{3}$.
2. Sachant que l'aire latérale de ce cône est 201,5 cm², calcule l'aire latérale du tronc de ce cône obtenu.

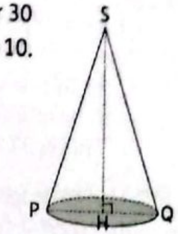


Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés de support parallèles.

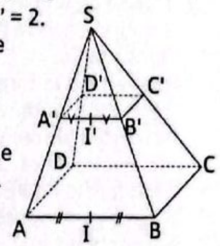
15 L'unité de longueur est le centimètre.
On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie. Sur la figure ci-dessous :
• (C) est un cône de révolution de base le disque (D) de centre O et de rayon [OA].
• S est le sommet de (C) et [SO] en est la hauteur.
On donne : SA = 15 et OA = 5.
1. Justifie que : $SO = 10\sqrt{2}$.
2. V est le volume de (C) ; calcule V.
Tu donnes $\pi = 3{,}1$ et $\sqrt{2} = 1{,}4$).



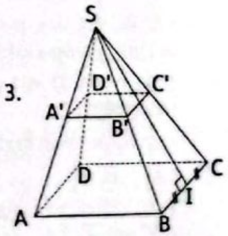
16 L'unité de longueur est le centimètre.
On ne te demande pas de reproduire la figure sur ta copie. La figure ci-après qui n'est pas en grandeur réelle, représente le chapeau du père Noël qui a la forme d'un cône de révolution de hauteur 30 et de base, le disque de rayon 10.
1. Justifie que : $SQ = 10\sqrt{10}$.
2. Calcule l'aire latérale A de ce chapeau.



17 L'unité de longueur est le cm.
On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
Sur la figure suivante qui n'est pas en grandeur réelle :
• SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD ;
• un plan parallèle au plan de base coupe [AS] en A' ;
• I est le milieu de [AB].
On donne : AB = 6 ; $\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}$; SI = 6 et SI' = 2.
1. a) Justifie que : A'B' = 2.
b) Justifie que l'aire latérale de la pyramide SA'B'C'D' est égale à 8 cm².
2. Calcule l'aire latérale du tronc de pyramide.



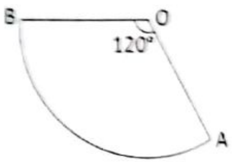
18 L'unité de longueur est le centimètre.
On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur :
• SABCD est une pyramide régulière de base le carré ABCD ;
• la section de cette pyramide par un plan parallèle au plan (ABC) est le carré A'B'C'D' ;
• le point I est le milieu du segment [BC] et les droites (SI) et (BC) sont perpendiculaires.
On donne :
AB = 4 ; A'B' = 2 ;
$SI = 4\sqrt{2}$ et SB = 6.
1. Justifie que : SB' = 3.



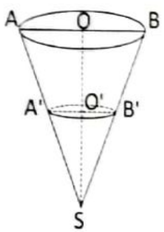
2. a) Justifie que l'aire latérale de la pyramide SABCD est $32\sqrt{2}$ cm².

b) Calcule une valeur approchée de l'aire latérale du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' (Tu prendras $\sqrt{2} = 1,4$).

19 L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-dessous est le patron inachevé d'un cône de révolution.
On donne : mes $\widehat{AOB} = 120°$ et OB = OA = 6.
1. Justifie que le rayon r de la base de ce cône est 2.
2. Reproduis la figure puis termine ce patron.



20 L'unité de longueur est le centimètre.
On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
Un verre a la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu en coupant un cône de révolution de sommet S et de base un cercle de centre O et de diamètre [AB] comme l'indique la figure ci-dessous.
- Le point A' appartient au segment [SA].
- Le plan de coupe passant par A' est parallèle au plan de la base de ce cône.
- On donne : AB = 8, A'B' = 4 et SO' = 7,5.

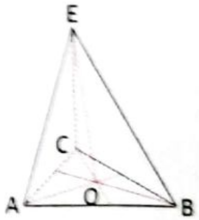


1. a) Justifie que : SO = 15.
   b) Démontre que le volume V du cône est égal à 240 cm³. (Tu prendras $\pi = 3$).
2. Calcule le volume V' du verre.

21 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-après :
- EABC est une pyramide régulière de base le triangle équilatéral ABC ;
- Le point O est le centre de gravité du triangle ABC ;
- Le volume de la pyramide est $24\sqrt{3}$ cm³ ;
- AC = 6.

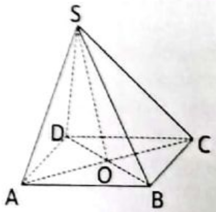
1. a) Démontre que la hauteur du triangle ABC est $3\sqrt{3}$.

b) Déduis de la question précédente, que l'aire de la base de la pyramide est $9\sqrt{3}$ cm².
2. Calcule la hauteur EO de la pyramide.



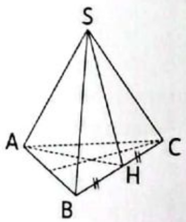
22 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles :
- SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.
- On donne : SO = 12 ; AB = 6.

1. Calcule le volume V de la pyramide SABCD.
2. Construis en dimensions réelles le triangle SAC.

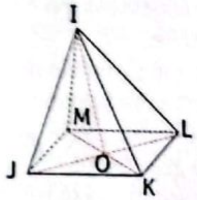


23 On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous :
- SABC est une pyramide régulière de base le triangle équilatéral ABC ;
- H est le milieu du segment [BC].

On donne : AB = 12 ; SC = 10
1. Démontre que AH = $6\sqrt{3}$.
2. Calcule l'aire latérale de la pyramide.

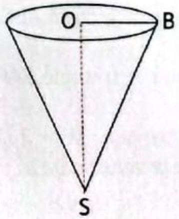


24 L'unité de longueur est le centimètre.
La figure IJKLM ci-dessous est une pyramide régulière de centre O.
On donne :
JK = 4 ; IJ = $6\sqrt{2}$ et JO = $2\sqrt{2}$.
1. a) Justifie que le triangle IOJ est rectangle en O.
   b) Démontre que : OI = 8.
2. Calcule le volume de la pyramide.

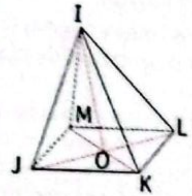


25 On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie. L'unité de longueur est le centimètre.
Tu prendras 3,14 comme valeur de π. La figure ci-dessous représente un moule en forme de cône utilisé par un fabricant de glace « Frigolo ». Le moule est tel que :
- O est le centre de la base ;
- OB est le rayon et SO la hauteur ;

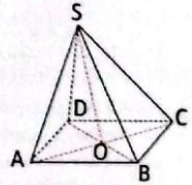
On donne : OB = 2 ; SO = 12.
1. a) Justifie que le triangle SOB est rectangle.
   b) Calcule SB.
2. Démontre que 50,24 cm³ est le volume du moule.



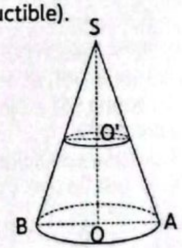
26 On ne te demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
L'unité de longueur est le centimètre.
IJKLM est une pyramide régulière de base le carré JKLM de centre O.
On donne : JK = 10 ; OI = 15
1. Calcule la distance JO.
2. Démontre que le volume de la pyramide est 500 cm³.



27 On ne te demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.
On donne : AB = 5 ; SO = 5 ; AC = $5\sqrt{2}$.
1. Calcule AS.
2. a) Démontre que $\tan \widehat{ASO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b) Déduis de la question précédente un encadrement de mes $\widehat{ASO}$.
   Tu prendras 1,414 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.



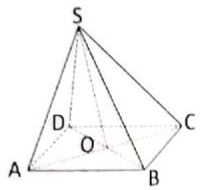
28 On ne demande pas de reproduire la figure sur la copie. L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-dessous représente un cône de révolution de sommet S et de base le cercle de centre O.
On donne : OA = 3 ; SO = 10.
1. Démontre que le volume V_1 du cône est 30π cm³.
2. On coupe le cône par un plan parallèle au plan du cercle de base. Ce plan passe par le point O' du segment [SO] tel que : SO' = $\frac{2}{3}$SO.
Calcule le volume V_2 du tronc du cône.
Tu écriras le résultat sous la forme $a\pi$, où a est une fraction irréductible).



EXERCICES

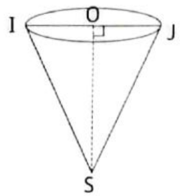
29 On ne te demande pas de reproduire la figure sur ta copie.
L'unité de longueur est le centimètre. Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles :
- SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.
- $AB = 4$; $SO = 6$; $AC = 4\sqrt{2}$.

1. a) Justifie que le triangle ASO est rectangle.
   b) Calcule AS.
2. Calcule le volume de la pyramide.

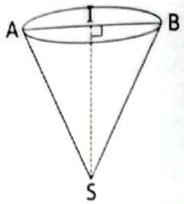


30 L'unité de longueur est le centimètre (cm).
La figure ci-dessous, qui n'est pas en grandeurs réelles, est un cône de révolution de sommet S, de hauteur [SO] et de base le cercle de diamètre [IJ].
- On donne : $IJ = 10$ et $SO = 12$.

1. Démontre que : $SI = 13$.
2. Calcule l'aire latérale de ce cône.

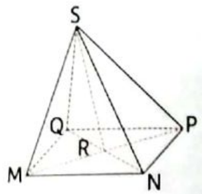


31 L'unité de longueur est le centimètre (cm).
La figure ci-après, qui n'est pas en grandeur réelle, est un cône de révolution de sommet S, de hauteur [SI] , de base le cercle de diamètre [AB] et de volume 310 cm³.
On donne : $SI = 12$. Tu prendras 3,1 comme valeur de π.
3. Justifie que l'aire de la base est 77,5 cm².
4. a) Justifie que $IA = 5$.
   b) Calcule SA.



32 L'unité de longueur est le centimètre (cm).
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles :
- SMNPQ est une pyramide régulière de base le carré MNPQ et de hauteur [SR].
- $MN = 4$; $SM = \sqrt{33}$; $MP = 4\sqrt{2}$.

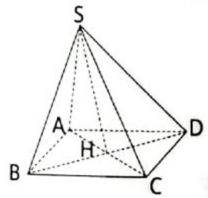
1. Démontre que : $SR = 5$.
2. Calcule le volume de la pyramide.



Exercices d'approfondissement

33 L'unité de longueur est le centimètre (cm).
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle :
- SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre H.
- $AS = 9$; $AB = 6$; $AC = 6\sqrt{2}$.

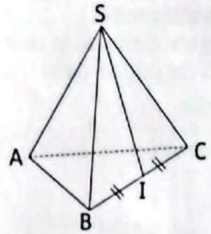
1. Justifie que le triangle SAH est rectangle en H.
2. a) Démontre que : $SH = 3\sqrt{7}$.
   b) Calcule le volume de la pyramide.



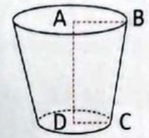
EXERCICES

34 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle :
- SABC est une pyramide régulière de sommet S et de base le triangle équilatéral ABC.
- I est le milieu de [BC].
- $SB = 9$; $AB = 6$.

1. a) Justifie que le triangle SIB est rectangle en I.
   b) Justifie que : $SI = 6\sqrt{2}$.
2. Calcule l'aire latérale de la pyramide SABC.

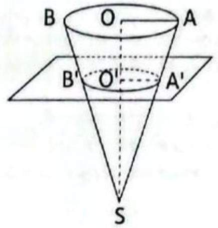


35 On ne te demande pas de reproduire cette figure qui n'est pas en grandeur réelle sur ta copie.
L'unité est le centimètre.
Un père de famille dispose d'un seau en forme de tronc de cône dont la droite (AD) est le support de la hauteur (voir figure ci-dessous).
On donne :
$AB = 20$; $AD = 45$; $DC = 10$; $\pi \approx 3$.
1. a) Justifie que le coefficient de réduction est $\frac{1}{2}$.
   b) Justifie que la hauteur du cône est 90.
2. Détermine le volume du seau.



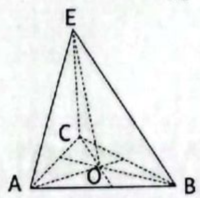
36 La figure ci-après qui n'est pas en grandeur réelle est un cône de 9 cm de hauteur et dont la base a pour diamètre 8 cm.
1. Justifie que le volume V du cône est 48π cm³.
2. On verse dans ce cône un liquide de volume V_1 tel que : $\frac{V_1}{V} = \frac{8}{27}$.
   a) Justifie que le coefficient de réduction est $\frac{2}{3}$.
   b) Calcule la hauteur du liquide dans le verre.

37 On ne demande pas de reproduire la figure sur ta copie. Tu prendras 3,1 comme valeur de π.
L'unité de longueur est le centimètre.
Un forgeron veut fabriquer une cuvette à partir d'un cône métallique de sommet S et de base le cercle de centre O et de rayon OA. Il coupe le cône suivant un plan parallèle à sa base. La figure ci-dessous représente le cône et le plan.
On donne : $SO = 60$; $OA = 45$; $SA' = \frac{1}{3}SA$.
Le volume du cône initial est égal à 125 550 cm³.
1. Calcule SO'.
2. Calcule le volume de la cuvette représentée par le tronc de cône.



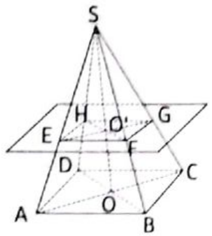
38 L'unité de longueur est le centimètre. Sur la figure ci-dessous :
- EABC est une pyramide régulière de base le triangle équilatéral ABC ;
- [EO] est la hauteur de la pyramide.
- Le volume de la pyramide est $24\sqrt{3}$ cm³ ;
- $AC = 6$.

1. a) Démontre que la hauteur du triangle ABC est $3\sqrt{3}$.
   b) Déduis de la question précédente, que l'aire de la base de la pyramide est $9\sqrt{3}$ cm².
2. Calcule la hauteur EO de la pyramide.

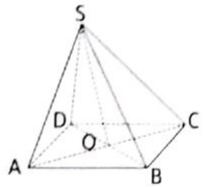


EXERCICES

39 On ne demande pas de reproduire la figure sur la copie.
L'unité de longueur est le centimètre.
• SABCD représente une pyramide régulière de base le carré ABCD de centre O.
• Un plan parallèle à la base coupe la pyramide suivant le carré EFGH de centre O'.
• AB = 7 ; SO = 12 et SO' = 4.
1. Démontre que le volume de la pyramide SABCD est 196 cm³.
2. Déduis-en la valeur approchée par excès d'ordre 1 du volume de la pyramide SEFGH.



40 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle :
• SABCD représente une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.
• On donne : SO = 12 ; AB = 6.
1. Calcule le volume V de la pyramide SABCD.
2. Construis en dimensions réelles le triangle SAC.



Situation d'évaluation

41 Ali, élève de 3ᵉ veut aider son père à construire une tente dans sa ferme.
Cette tente a la forme d'un cône de révolution de 3 mètres de diamètre de base et de 3 mètres de hauteur. Son père veut recouvrir cette tente d'une bâche et doit déterminer l'aire et la forme de la bâche à acheter. Pour aider son père, Ali et ses camarades décident de construire le patron de cette tente.
1. Calcule le volume de la tente.
2. Construis le patron de la tente en prenant pour échelle $\frac{1}{100}$.
3. Détermine l'aire latérale de la tente.

Coup de Pouce

36 2.a
k étant le coefficient de réduction : $\frac{V_1}{V} = k^3$

41 2. La base du cône ne fait pas partie de la tente.

Mémento

Calcul littéral

Puissances

a et b sont des nombres réels non nuls. n et m sont des entiers naturels.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$; ▪ Par convention : $a^0 = 1$.
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; ▪ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; ▪ $(ab)^n = a^n \times b^n$;
- $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ fois}}$; ▪ $10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ fois}}1$.

Quotients

a, b, c et d sont des nombres réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; ▪ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Égalités remarquables

a et b sont des nombres réels.

Développer

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Factoriser

Racines carrées

Propriétés

a et b sont des nombres réels positifs.

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; ▪ $(\sqrt{a})^2 = a$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec $b \neq 0$.

Valeur absolue d'un nombre réel

- $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \text{ est positif} \\ |x| = -x \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}$
- Si a est un nombre réel, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

Calcul numérique

Comparaison

- a, b, c et d sont des nombres réels, si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- a, b, c et d sont des nombres réels positifs, si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.
- a et b sont des nombres positifs, $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.
- a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0, $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Équations et Inéquations dans ℝ

Équations dans ℝ

a, b, c et d sont des nombres réels.

- $ax + b = 0$ équivaut à $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$.
- $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.
- $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, $a \geq 0$.

Inéquations dans ℝ

a, b et c et étant des nombres réels :

- Si $a > 0$ alors $ax + b \geq c$ équivaut à $x \geq -\frac{c-b}{a}$.
- Si $a < 0$ alors $ax + b \geq c$ équivaut à $x \leq -\frac{c-b}{a}$.
- On résout de la même façon les inéquations des types : $ax + b \leq c$; $ax + b > c$ et $ax + b < c$.

Équations et Inéquations dans ℝ×ℝ

Équations dans ℝ × ℝ

Pour déterminer une solution d'une équation du 1ᵉʳ degré dans ℝ × ℝ, on remplace l'une des inconnues par un nombre réel, puis on résout l'équation obtenue pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

Inéquations dans ℝ × ℝ

Pour déterminer une solution d'une inéquation du 1ᵉʳ degré dans ℝ × ℝ, on remplace l'une des inconnues par un nombre réel, puis on résout l'inéquation obtenue pour trouver les valeurs possibles de l'autre inconnue.

Système d'équations dans ℝ × ℝ

Pour résoudre un système d'équations du 1ᵉʳ degré dans ℝ × ℝ, on utilise généralement trois méthodes :
- la méthode par combinaison ;
- la méthode par substitution ;
- la méthode graphique.

Système d'inéquations dans ℝ × ℝ

Pour résoudre un système d'équations du 1ᵉʳ degré dans ℝ × ℝ, on utilise généralement la méthode graphique.

Application affine

Application affine

- a et b sont deux nombres réels.

f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

  - f est croissante lorsque $a > 0$.
  - f est décroissante lorsque $a < 0$.
  - f est constante lorsque $a = 0$.

Application linéaire

- On appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$, a étant un nombre réel.

Statistique

- **L'effectif cumulé croissant** d'une modalité est la somme des effectifs de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- **La fréquence cumulée croissante** d'une modalité est la somme des fréquences de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- **La médiane d'une série statistique** est un nombre qui partage cette série statistique en deux groupes de même effectif ; l'un contient les valeurs plus petites que ce nombre et l'autre les valeurs plus grandes que ce nombre.
- **La moyenne d'une série statistique** regroupée en classes est le nombre noté $\overline{x}$, tel que :

$\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_pc_p}{n}$; où $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont les centres des classes d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Propriété de Thalès

Propriété de Thalès

ABC est un triangle. Si M ∈ (AB) et N ∈ (AC) tel que (MN)//(BC), alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Réciproque de la propriété de Thalès

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.

Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors (MN) // (BC).

Triangle rectangle

Théorème de Pythagore

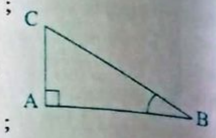
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Trigonométrie

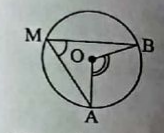
Dans un triangle ABC rectangle en A :



- $\cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$;
- $\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$;
- $\tan\widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$;
- $0 < \cos\widehat{B} < 1$ et $0 < \sin\widehat{B} < 1$;
- $\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1$;
- $\tan\widehat{B} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$.

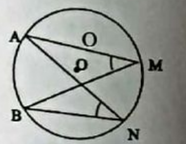
Angles inscrits

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre associé.



$\text{mes}\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$

Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ces deux angles ont la même mesure.



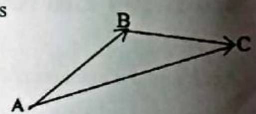
$\text{mes}\widehat{AMB} = \text{mes}\widehat{ANB}$.

Vecteurs

Égalité de Chasles

A, B et C sont trois points distincts du plan.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriétés

- A, B, C et D sont quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction équivaut à on peut trouver un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
- A, B, C et D sont quatre points du plan. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- A, B et M sont trois points du plan.

M appartient à la droite (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

- A, B et M sont trois points du plan.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si on peut trouver un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

- A, B et I sont trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Coordonnées de vecteurs

Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan. Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à $xy' - x'y = 0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Équations de droites

- Une équation de droite de la forme : $y = ax + b$ ou $x = c$ est appelée **équation réduite** de cette droite.

a est appelée **coefficient directeur** de la droite (D) ou pente de la droite (D).

b est appelée **ordonnée à l'origine** de la droite (D).

- Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Le plan est muni du repère.

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

(D) // (D') équivaut à $a = a'$.

- Le plan est muni du repère orthonormé.

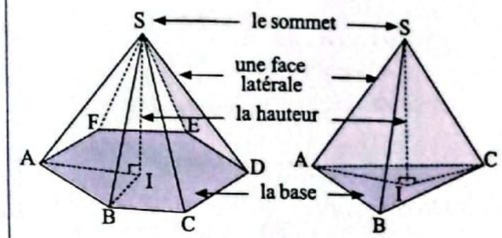
Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b$.

(D)⊥(D') équivaut à $a \times a' = -1$.

Pyramides et Cônes

Pyramide régulière

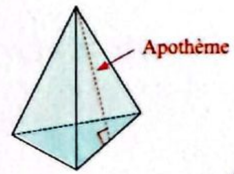
Présentation

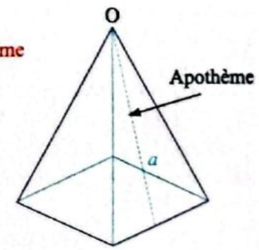


Aire latérale

L'aire latérale $\mathcal{A}_l$ d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre de la base par l'apothème de la pyramide.

$\mathcal{A}_l = \dfrac{\mathcal{P} \times a}{2}$ où $\mathcal{P}$ est le périmètre de la base et a l'apothème de la pyramide.





Aire de la base

L'aire $\mathcal{A}_B$ de la base est égale l'aire du polygone régulier qui est la base de la pyramide.

Aire totale

L'aire totale $\mathcal{A}_T$ d'une pyramide régulière est égale à la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B$

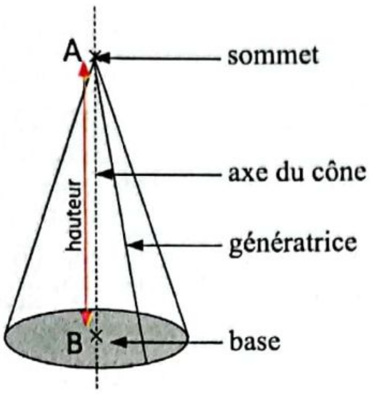
Volume

Le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide régulière est égal au tiers du produit de l'aire de base par la hauteur.

$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

Cône de révolution

Présentation



Aire latérale

L'aire latérale $\mathcal{A}_\ell$ d'un cône de révolution est égale à la moitié du produit du périmètre de la base par la longueur d'une génératrice.

$\mathcal{A}_\ell = \dfrac{\mathcal{P} \times a}{2}$ où $\mathcal{P}$ est le périmètre du disque de base et a est la longueur d'une génératrice.

Aire de la base

L'aire $\mathcal{A}_B$ dde la base d'un cône de révolution est égale à l'aire du disque de la base du cône.

Aire totale

L'aire totale $\mathcal{A}_T$ d'un cône de révolution est la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_T + \mathcal{A}_B$

Volume

Le volume $\mathcal{V}$ d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire de base par la hauteur.

$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur du cône de révolution.

CRÉDITS PHOTOGRAPHIQUES

© Freepik :
9-2 ; 9-3.

© Internet :
68-2 ; 87-2 ; 139 ; 140-1 ; 140-2 ; 140-4 ; 141-2 ; 147 ; 156 ; 157 ; 158 ; 159 ; 160 ; 161 ; 206.

© Pixabay
25-1 ; 25-2 ; 36 ; 55-2 ; 55-3 ; 67-1 ; 67-2 ; 67-3 ; 68-1 ; 68-3 ; 68-4 ; 71-1 ; 71-2 ; 85-1 ; 85-2 ; 85-3 ; 85-4 ; 85-5 ; 85-6 ; 86-1 ; 86-2 ; 86-3 ; 101 ; 123 ; 137 ; 138 ; 140-3 ; 188 ; 207-1 ; 207-2 ; 207-3 ; 225 ; 227.

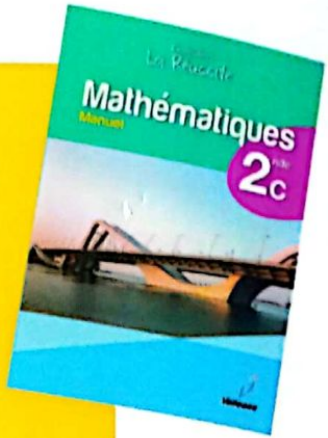
© Shutterstock
9-1 ; 37 ; 55-1 ; 66 ; 87-1 ; 103 ; 141-1 ; 171 ; 189 ; 226.

Mise en page : Vallesse Éditions
info@vallesse.ci
Achevé d'imprimer HOODA Graphics _ Côte d'Ivoire
3e trimestre 2023
Dépôt légal N° 18907 du 17 Août 2022

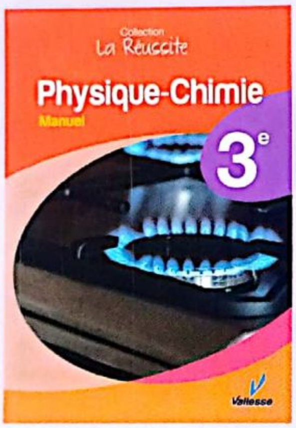
Collection
La Réussite

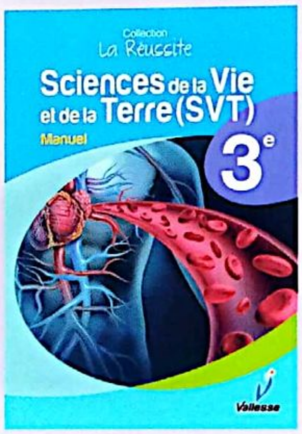
Une collection pour vous conduire sur le chemin de la Réussite.
On trouve dans chaque leçon :

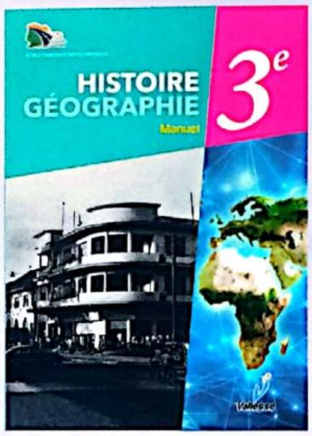
- *Situation d'apprentissage*
- *Habiletés et contenus*
- *Installation des habiletés*
- *Apprentissage de la rédaction*
- *Résumé du cours*
- *Exercices*
- *Coup de pouce*

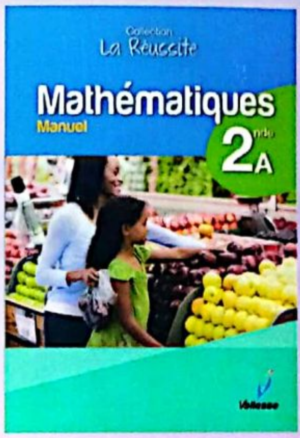


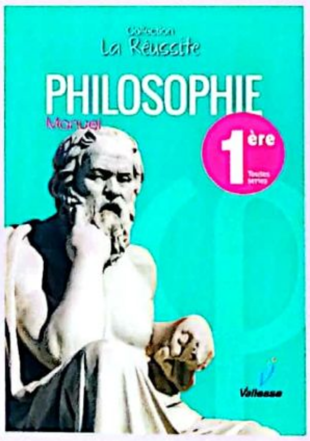
Nos manuels

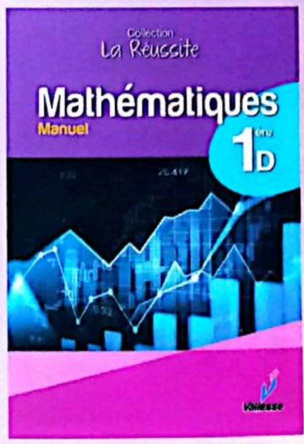












9 782384 030378

ISBN : 978-2-38403-037-8