GUIDE DE L'ENSEIGNANT

INSTALLATIONS DES HABILETES

Activité 1 : Intégrale d'une fonction continue

1.1.Notion d'intégrale

1. $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ $avec$ $k \in \mathbb{R}$
2. $\forall a, b \in I$, $G(a) = F(a) + k$ (1)

$G(b) = F(b) + k$ (2)

En faisant (2)-(1), on obtient :$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

Correction des exercices de fixation

1.1.1 Calculons les intégrales suivantes:

- $\int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$;
- $\int_3^1 \left(u + \frac{1}{u}\right) du = -\left[\frac{1}{2}u^2 + lnu\right]_1^3 = -(4 + ln3)$;
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2x)e^{(\sin x + x^2)}dx = \left[e^{(\sin x + x^2)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^2}{16}} - 1$;
- $\int_{10}^{10} (x + 5)dx = 0$;
- $\int_0^4 \frac{e^t}{e^t+1} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^4 = \ln\left(\frac{e^4+1}{2}\right)$;
- $\int_2^{-3} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt = -\left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_{-3}^2 = \left[\frac{1}{e^t+1}\right]_{-3}^2 = \frac{1-e^5}{(e^2+1)(e^3+1)}$.

1.1.2 Réponds par vrai ou faux

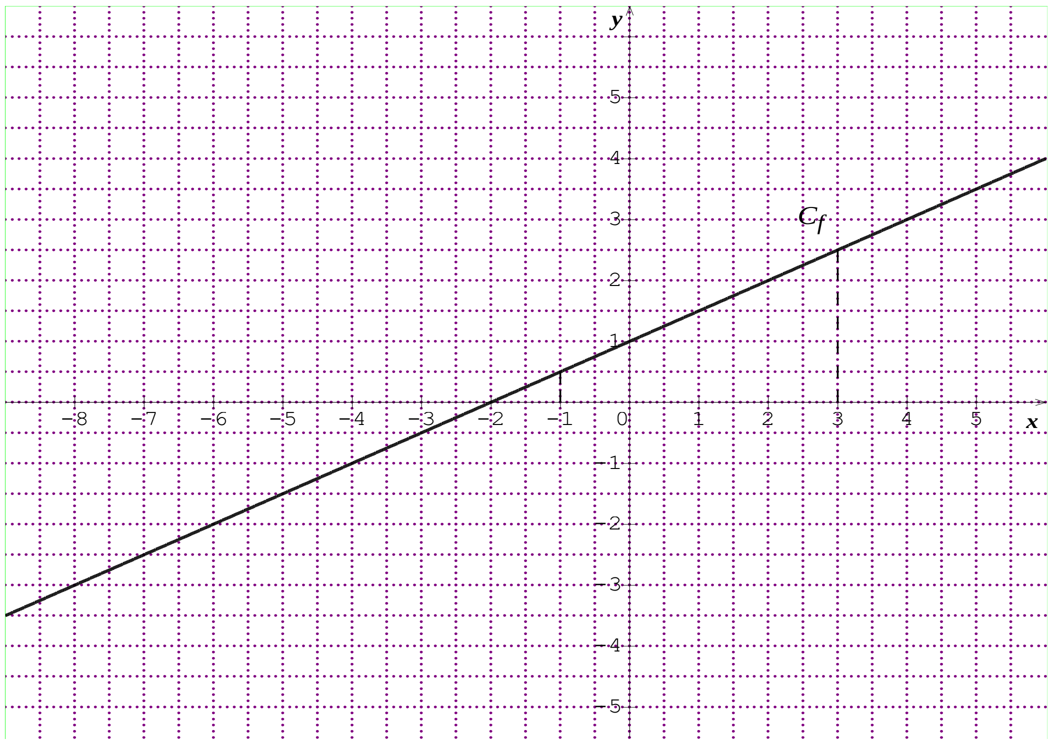
a) vrai ; b) vrai ; c) faux

1.1.3 Recopie puis relis chaque phrase à l'écriture mathématique qui lui correspond.

Phrases	**Ecritures mathématiques**
1. L'intégrale de -3 à 6 de $g(x)dx$ est égale à 9	a) $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$
2. L'intégrale de 0 à 5 de $(t^2 - 3)dt$	b) $\int_{-3}^6 g(x)\, dx = 9$
3. L'intégrale de 1 à x de $\frac{1}{t}dt$ est égale à $\ln x, avec\ x > 0$.	c) $\int_0^5 (t^2 - 3)\, dt$

1.2.Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

1.



2.On a : $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$; $F(3) - F(-1) = \frac{9}{4} + 3 + \frac{3}{4} = 6$

3. L'aire du trapèze est : (0,5+2,5) × 2 = 6 = $F(3) - F(-1)$

Correction des exercices de fixation

1.2.1. $A = \int_{-2}^{3} f\ (x)\, dx\ \times u.a = 2\int_{-2}^{3}(-x^2 + x + 6)\, dx = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{3}$ cm²

1.2.2. $A = \int_{1}^{5} f\ (x)\, dx\ \times u.a = 4\int_{1}^{5}\frac{1}{x^2}\ dx = 4\left[\frac{-1}{x}\right]_{1}^{5} = 4(\frac{-1}{5} + 1) = \frac{16}{5}$ cm²

1.3. Propriétés de l'intégrale

1.

a) On a : $\int_{a}^{a} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{a} = F(a) - F(a) = 0$

b) $\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$ et

$\int_{b}^{a} f(x)dx = [F(x)]_{b}^{a} = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$

Donc $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$ et $\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$

c) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$

$$donc \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

d) $\int_a^b \alpha f(x)dx = [\alpha F(x)]_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha\big(F(b) - F(a)\big) = \alpha \int_a^b f(x)dx$

e) $\int_a^b \big(f(x)dx + g(x)\big)dx = [F(x) + G(x)]_a^b = \big(F(b) + G(b) - F(a) - G(a)\big) =$
$F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$

Donc $\int_a^b \big(f(x)dx + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a g(x)dx$

2. On suppose que $a < b$

a) On suppose que $\forall x \in [a;b], f(x) \geq 0$

Par définition : $F'(x) = f(x) \geq 0$ donc F est strictement croissante sur $[a;b]$

Ainsi $a < b$ entraine $F(a) < F(b)$

$F(a) < F(b) \Leftrightarrow F(b) - F(a) \geq 0$ donc $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

b) On suppose que $\forall x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$

Donc $\forall x \in [a;b], f(x) - g(x) \leq 0$ d'où $g(x) - f(x) \geq 0$

Donc $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$

$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x) \geq 0$

Ainsi $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)$

c) Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont continues sur $[a;b]$ donc $\forall x \in [a;b]$

$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$

D'où $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

d) $\forall x \in [a;b], |f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow$
$-M(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$
$\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$

Correction des exercices de fixation

1.3.1.

1. Justifions que , pour tout nombre réel t, $cos^3 t = cost(1 - sin^2 t)$.

On sait que : $cos^3 t = cost \times cos^2 t = cost(1 - sin^2 t)$. Car $cos^2 t = 1 - sin^2 t$

2. Calculons : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2cos^3 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2cost(1 - sin^2 t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(cost - cost\, sin^2 t)dt =$
$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} costdt - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(cost\, sin^2 t)dt = 2[sint]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\left[\frac{1}{3}sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{5}{6}\sqrt{2}$

1.3.2. Calculons :

On a : $\forall x \in [-4; -2], |x^2 - 4| = x^2 - 4$

$\forall x \in [-2; 2], |x^2 - 4| = -x^2 + 4$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{2}|x^2 - 4|dx &= \int_{-4}^{-2}|x^2 - 4|dx + \int_{-2}^{2}|x^2 - 4|dx \\ &= \int_{-4}^{-2}(x^2 - 4)dx + \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-4}^{-2} + \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{-8}{3} + 8 - \left(\frac{64}{3} + 16\right) + 8 - \frac{16}{3} - (-8 + \frac{16}{3}) = \frac{80}{3}\end{aligned}$$

1.3.3.

On admet que pour tout $x$élément de $[0; +\infty[$:

$$1 - x \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 - x + x^2$$

D'où $\int_0^1 (1 - x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \leq \int_0^1 (1 + x^2)dx$ car les fonctions $x \mapsto 1 - x$; $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont continues sur $[0; 1]$

$$\int_0^1 (1 - x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}dx \leq \int_0^1 (1 + x^2)dx$$

$$\Leftrightarrow \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}dx \leq \left[x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}dx \leq \frac{4}{3}$$

1.4. Valeur moyenne d'une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos^2 x$. Calculons $\frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} f(x)dx$

On a :

$\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi cos^2xdx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\frac{cos2x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin2x\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Correction des exercices de fixation

1.4.1. Calculons la valeur moyenne de f sur $[-2;4]$

On a :$\mu = \frac{1}{4+2}\int_{-2}^4 (3x^2-x+2)dx = \frac{1}{6}\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^4 = \frac{1}{6}(64+14) = 13$

1.4.2. Calculons la valeur moyenne de f sur $[0;ln3]$

On a :$\mu = \frac{1}{ln3}\int_0^{ln3}\frac{1}{1+e^{-x}}dx = \frac{1}{ln3}\int_0^{ln3}\frac{e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{ln3}[ln(1+e^x)]_0^{ln3} = \frac{1}{ln3}(ln4-ln2) = \frac{ln2}{ln3}$

Activité 2 : Techniques de calcul d'une intégrale

1. a) soit F cette primitive

   on a : $F(x) = \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$

   b) $\int_0^3 \frac{t^3}{1+t^4}dt = \frac{1}{4}[\ln(1+x^4)]_0^3 = \frac{\ln 82}{4}$

2. a) $(uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

   b) $\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

D'où

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

3. Calculons $\int_1^5 (2x-3)^4dx$

Posons $t = 2x-3,\ dt = 2dx\ et\ quand\ x = 1, t = -1\ et\ quand\ x = 5, t = 7$

$$\int_1^5 (2x-3)^4dx = \int_{-1}^7 \frac{1}{2}t^4dt = \left[\frac{1}{10}t^5\right]_{-1}^7 = \frac{7^5+1}{10}$$

4. a) Justifions que la fonction $x \mapsto \cos 2x$ est paire

cette fonction a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.
De plus : $\cos(-2x) = \cos\big((-x)+(-x)\big) = \cos(-x)\cos(-x) - \sin(-x)\sin(-x) \quad =$
$\cos xcosx - \sin x \sin x = \cos(x+x) = \cos 2x$ car les fonctions $x \mapsto \cos x\ et\ x \mapsto \sin x$ sont respectivement paire et impaire.

Donc on peut conclure que la fonction $x \mapsto \cos 2x$ est paire.

On a : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, dx$

b) Justifions que la fonction x↦ sin2x est impaire
cette fonction a pour ensemble de définition ℝ donc ∀x∈ ℝ,-x∈ ℝ. De plus : $\sin(-2x) = \sin 2(-x) = 2\sin(-x)\cos(-x) = -2sinxcosx = -sin2x$
on peut conclure que la fonction x↦ $\sin 2x$ est impaire

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

4.c) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$$\int_{0}^{\pi} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0$$

Donc $\int_{0+\frac{\pi}{3}}^{\pi+\frac{\pi}{3}} \cos 2x\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos 2x\, dx = 0$

Correction des exercices de fixation

2.1.

- $\int_{-1}^{2} xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}e(e^3 - 1)$

- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \int_{0+\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [\ln(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\cos\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{4} = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}ln2$

2.2. Calcule les intégrales suivantes en utilisant une ou deux intégrations par parties

$\int_0^3 (x+1)e^x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xsinxdx$; $\int_2^5 lnxdx$ et $\int_{-3}^2 x^2e^xdx$

- $\boldsymbol{\int_0^3 (x+1)e^x dx}$

$posons\ u(x) = x+1 \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$

$$donc \int_0^3 (x+1)e^x dx = [(x+1)e^x]_0^3 - \int_0^3 e^x\,dx = [(x+1)e^x]_0^3 - [e^x]_0^3$$

$$= 4e^3 - 1 - (e^3 - 1) = 3e^3$$

- $\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xsinxdx}$

$posons\ u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = sinx \qquad v(x) = -cosx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx = [-xcosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = [-xcosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + [sinx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\boldsymbol{\int_2^5 lnxdx}$

$posons\ u(x) = lnx \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$

$$\int_2^5 lnxdx = [xlnx]_2^5 - \int_2^5 dx = [xlnx]_2^5 - [x]_2^5 = 5ln5 - 2ln2 - 3$$

- $\boldsymbol{\int_{-3}^2 x^2e^xdx}$

$posons\ u(x) = x^2 \quad , \quad u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^x \quad , \quad v(x) = e^x$

$$\int_{-3}^2 x^2e^xdx = [x^2e^x]_{-3}^2 - \int_{-3}^2 xe^x\,dx$$

$posons\ z(x) = x \qquad z'(x) = 1$

$w'(x) = e^x \qquad w(x) = e^x$,

$\int_{-3}^{2} xe^x\, dx = [xe^x]_{-3}^{2} - \int_{-3}^{2} e^x dx = [xe^x]_{-3}^{2} - [e^x]_{-3}^{2}$

$par\ conséquent,\ \displaystyle\int_{-3}^{2} x^2e^x dx = [x^2e^x]_{-3}^{2} - 2([xe^x]_{-3}^{2} - [e^x]_{-3}^{2}) \ = 2e^2 - \frac{17}{e^3}$

2.3. Calcule les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable affine :

$\boldsymbol{\int_1^2 x\sqrt{3x+2}dx}$

Posons : $t = 3x + 2$; $x = \frac{t-2}{3}\ et\ \ \frac{1}{3}dt = dx$;

$quand\ x = 1\ alors\ \ t = 5\ et\ x = 2\ alors\ t = 8$

D'où $\int_1^2 x\sqrt{3x+2}dx = \int_5^8 \frac{1}{3}\frac{t-2}{3}\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\left(\int_5^8 \frac{t\sqrt{t}}{3}dt - \frac{2}{3}\int_5^8 \sqrt{t}dt\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\int_5^8 t^{\frac{3}{2}}dt - \frac{2}{3}\int_5^8 t^{\frac{1}{2}}dt\right) =$

$\frac{1}{9}\left(\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_5^8 - 2\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^8\right) = \frac{1}{9}\left(\left[2\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_5^8 - 2\left[2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_5^8\right) = \frac{1}{9}\left(\left[2\frac{t^2\sqrt{t}}{5}\right]_5^8 - 2\left[2\frac{t\sqrt{t}}{3}\right]_5^8\right)$

$$\boldsymbol{\int_1^2 x\sqrt{3x+2}dx} = \frac{2}{135}(224\sqrt{2} - 25\sqrt{5})$$

2.4.

- $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cosxdx}$

Sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ la fonction cosinus est paire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cosxdx\ = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosxdx\ = 2[sinx]_0^{\frac{\pi}{4}}\ = \sqrt{2}$

- $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sinxdx}$

Sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ la fonction sinus est impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sinxdx\ = 0$

- $\boldsymbol{\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} tanxdx}$

$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} tanxdx = \int_{\frac{-\pi}{3}+\pi}^{\frac{\pi}{3}+\pi} tanxdx$

Sur $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$ la fonction tan est périodique de période π

Donc $\int_{\frac{-\pi}{3}+\pi}^{\frac{\pi}{3}+\pi} tanxdx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tanxdx\ \ et$ comme la fonction tan est impaire , $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tanxdx\ = 0$

Par suite , $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} tanxdx = 0$

Activité 3 : Calculs d'aires

1. a) $\int_{-1}^{2}(x+2)dx\ \times 4\ cm^2 = 4\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2} = 18\ cm^2$

   b) $\int_{-1}^{2}x^2dx\ \times 4\ cm^2 = 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 12\ cm^2$

   c) $\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx\ \times 4\ cm^2 = 4\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 6\ cm^2$

2. a) $\int_{2}^{4}x^2dx\ \times 4\ cm^2 = 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{2}^{4} = 74{,}67\ cm^2$

   b) $\int_{2}^{4}(x+2)dx\ \times 4\ cm^2 = 4\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{2}^{4} = 40\ cm^2$

   c) $\int_{2}^{4}((x+2)-x^2)dx\ \times 4\ cm^2 = 34{,}67\ cm^2$

3. $\int_{-1}^{4}(x+2-x^2)dx\ \times 4\ = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx\ \times 4\ + \int_{2}^{4}(x+2-x^2)dx\ \times 4\ =$

Correction des exercices de fixation

3.1. $\mathcal{A}(\Delta) = \int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx.ua = 4\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}cm^2 = \frac{4}{3}cm^2$

3.2.

1) a)$f(x)=\frac{3}{2}$; b) $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; c)$f(x)=|x|$
2) C'est l'aire de la partie du plan délimitée par(C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$

   a)$x=-2\ et\ x=1$; b)$x=-1\ et\ x=2$; c) $x=-2\ et\ x=\frac{3}{2}$

3) a)$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{1}\frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}[x]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$;

   b) $\mathcal{A}(\Delta) = 2\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx{=}2\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$;

   c) $\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{\frac{3}{2}}|x|\,dx = \left(\int_{-2}^{0}-x\,dx\right)+\left(\int_{0}^{\frac{3}{2}}x\,dx\right) = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}} = \frac{25}{8}$

3.3. $\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{3}(x^2-1)\,dx \times u.a = 4\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{3} = \frac{80}{3}cm^2$

Activité 4 : Fonctions du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Soit la fonction g définie par $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ et

la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

1. D'après la définition de l'intégrale d'une fonction, $g'(x) = f(x)$
2. a) Vrai c) Vrai
   b) Vrai d) Vrai

   e) Vrai

   Démontrons que : $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

   On a : $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x \frac{1}{1-t} dt + \int_0^x \frac{1}{1+t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-\ln(1-x) + \ln(1+x)]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Correction des exercices de fixation

4.1.Soit la fonction h définie par :$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ et la fonction f définie par :$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$
h est l'unique primitive de f qui s'annule en *0* **;**

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \epsilon\, \mathbb{R}$, $h'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et comme $\forall\, x \epsilon\, \mathbb{R}$,$f(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **.**

4.2. F est dérivable sur$[0 ; +\infty[$ et $\forall\, x \epsilon\, [0 ; +\infty[$, $F'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

Correction des exercices de renforcement

1. Calculons les intégrales suivantes :

- $\int_{-3}^{2} (x+2)^5 dx = \left[\frac{1}{6}(x+2)^6\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{6}(4^6 - 1) = \frac{1365}{2}$;
- $\int_0^2 -3e^{(1+q)} dq = -3[e^{1+q}]_0^2 = -3e(e-1)(e+1)$;
- $\int_{-1}^{1} 5e^{-4t} dt = \frac{-5}{4}[e^{-t}]_{-1}^{1} = \frac{5}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$;

- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^5(2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t)(1 - sin^2(2t))^2 dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos(2t) - 2\cos(2t)\sin^2(2t) + \cos(2t)sin^4(2t)]dt \; = \ldots$$

- $\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cosxsinxdx = \left[\frac{1}{2}sin^2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$;
- $\int_0^{-\frac{\pi}{3}} cos^5tsin^5tdt =$
  $\int_0^{-\frac{\pi}{3}} cost\,(1 - sin^2t)^2 sin^5tdt = \int_0^{-\frac{\pi}{3}} (costsin^5t - 2costsin^7tdt + costsin^9t)dt = \ldots$

- $\int_5^2 \frac{-5u}{1+u^2} du = \int_5^2 (\frac{-5}{2} \times \frac{2u}{1+u^2}) du = \int_2^5 (\frac{5}{2} \times \frac{2u}{1+u^2}) du = \frac{5}{2}[\ln(1 + u^2)]_2^5$;

- $\int_1^e \frac{lnt}{t} dt = \left[\frac{1}{2}(lnt)^2\right]_1^e$;

- $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + x\right) dx = \left[lnx + \frac{1}{2}x^2\right]_1^e$;

- $\int_6^4 \frac{5}{t^2} dt = 5\int_4^6 (-\frac{1}{t^2}) dt = 5\left[\frac{1}{t}\right]_4^6 = \frac{5}{6} - \frac{5}{4} = \frac{-5}{12}$;

- $\int_4^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} dx = \int_4^2 (2x + 1)(x^2 + x - 2)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\left[\sqrt{x^2 + x - 2}\right]_4^2 = 2(2 - 3\sqrt{2})$;

- $\int_{-3}^1 (5x^4 - 3x^2 + x - 2)dx = \left[x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-3}^1 = \frac{-3}{2} + \frac{411}{2} = 204$;

- $\int_6^2 \sqrt{x-2}^5 dx = \int_6^2 (x - 2)^{\frac{5}{2}} dx = \left[\frac{(x-2)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_6^2 = \frac{2}{7}\left[(x - 2)^3\sqrt{x - 2}\right]_6^2 = -\frac{256}{7}$;

- $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [ln(e^x + 1)]_0^2 = ln(e^2 + 1) - ln2 = ln\,\frac{(e^2+1)}{2}$.

- $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln t+2}}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t}(lnt + 2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(lnt+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^e = \frac{2}{3}\left[(lnt + 1)\sqrt{lnt + 1}\right]_1^e = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

2. Calculons les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

- $\boldsymbol{\int_{-3}^1 (t + 1)e^t dt}$

$posons\; u(x) = t + 1 \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^t \qquad v(x) = e^t$

$\int_{-3}^{1}(t+1)e^{t}dt=[(t+1)e^{t}]_{-3}^{1}-\int_{-3}^{1}e^{t}\,dt=[(t+1)e^{t}]_{-3}^{1}-[e^{t}]_{-3}^{1}=e+3e^{-3}$;

- $\int_{1}^{4}\mathbf{ln}\,(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\boldsymbol{dx}$

$posons\ u(x)=\ln(x+1) \qquad u'(x)=\frac{1}{x+1}$

$\qquad v'(x)=1 \qquad v(x)=x$

$$\int_{1}^{4}\ln(x+1)\,dx=[xln(x+1)]_{1}^{4}-\int_{1}^{4}\frac{x+1-1}{x+1}dx=[xln(x+1)]_{1}^{4}-[x-\ln(x+1)]_{1}^{4}$$

$$=4ln5-ln2-(4-\ln5-1+\ln2)=5\ln5-2\ln2-3\ ;$$

- $\int_{1}^{3}(\boldsymbol{lnx})^{2}\boldsymbol{dx}$

$posons\ u(x)=(lnx)^{2} \qquad u'(x)=\frac{2}{x}lnx$

$\qquad v'(x)=1 \qquad v(x)=x$

$$\int_{1}^{3}(lnx)^{2}dx=[x(lnx)^{2}]_{1}^{3}-2\int_{1}^{3}lnxdx=[x(lnx)^{2}]_{1}^{3}-2[xlnx]_{1}^{3}+2[x]_{1}^{3}$$

$$=3(ln3)^{2}-6ln3+4\quad ;$$

- $\int_{6}^{4}\frac{\boldsymbol{tlnt}}{(\boldsymbol{t}^{2}+\mathbf{1})^{2}}\boldsymbol{dt}$

$posons\ \ u(t)=lnt \qquad u'(x)=\frac{1}{t}$

$\qquad v'(t)=\frac{t}{(t^{2}+1)^{2}} \qquad v(t)=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^{2}+1}$

$\int_{6}^{4}\frac{tlnt}{(t^{2}+1)^{2}}dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{lnt}{t^{2}+1}\right]_{6}^{4}+\frac{1}{2}\int_{6}^{4}\frac{1}{t^{3}+t}dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{lnt}{t^{2}+1}\right]_{6}^{4}+\frac{1}{2}\int_{6}^{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^{2}+1}\right)dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{lnt}{t^{2}+1}\right]_{6}^{4}+\frac{1}{2}[lnt]_{6}^{4}-\frac{1}{4}[ln(t^{2}+1)]_{6}^{4}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2ln2}{17}-\frac{ln6}{37}\right)+\frac{1}{2}(2ln2-ln6)-\frac{1}{4}(ln17-ln37)=\ldots$;

- $\int_{1}^{e}\boldsymbol{x}^{2}\boldsymbol{lnxdx}$

$Posons\ \ u(x)=lnx \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$donc \int_1^e x^2 lnx dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

3. Calculons les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties :

- $\boldsymbol{\int_{-1}^{2} t^2 e^t dt}$

1ère intégration par partie
$posons \quad u(t) = t^2 \qquad u'(t) = 2t \qquad v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$
$\int_{-1}^{2} t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_{-1}^{2} - 2\int_{-1}^{2} te^t\, dt$ (1)

2ème intégration par partie

$posons\ z(t) = t \qquad z'(t) = 1$
$w'(t) = e^t \qquad w(t) = e^t$, $\int_{-1}^{2} te^t\, dt = [te^t]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} e^t dt = [te^t]_{-1}^{2} - [e^t]_{-1}^{2}$
$par\ conséquent$

$$d'après\ (1), \int_{-1}^{2} t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_{-1}^{2} - 2([te^t]_{-1}^{2} - [e^t]_{-1}^{2})$$
$$= 4e^2 - \frac{1}{e} - 2\left(2e^2 + \frac{1}{e}\right) + 2\left(e^2 - \frac{1}{e}\right) = 2e^2 - \frac{5}{e}$$

- $\boldsymbol{\int_0^{\pi} x^2 cos2xdx}$

1ère intégration par partie
$posons\ u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$

$$v'(x) = cos2x \qquad v(x) = \frac{1}{2}sin2x$$

$\int_0^{\pi} x^2 cos2xdx = \frac{1}{2}[x^2 sin2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xsin2xdx$ (1)

2ème intégration par partie

$posons \qquad z(x) = x \qquad z'(x) = 1$
$w'(t) = sin2x \qquad w(x) = -\frac{1}{2}cos2x$,

$$\int_0^{\pi} xsin2xdx = \left[-\frac{1}{2}xcos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos2xdx = \left[-\frac{1}{2}xcos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi} = \frac{-\pi}{2}$$

Donc d'après (1)

$\int_0^{\pi} x^2cos2xdx = \frac{1}{2}[x^2sin2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xsin2xdx = \frac{\pi}{2}$

- $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx}$

1ère intégration par partie

$posons\ u(x) = e^{-2x} u'(x) = -2e^{-2x}$

$$v'(x) = sin3x \qquad v(x) = -\frac{1}{3}cos3x$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \left[-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos3xdx$ (1)

2ème intégration par partie

$posons\ k(x) = e^{-2x} k'(x) = -2e^{-2x}$

$$l'(x) = cos3x \qquad l(x) = \frac{1}{3}sin3x$$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}cos3xdx = \left[\frac{1}{3}e^{-2x}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx$, par suite d'après (1) on a :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \left[-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{1}{3}e^{-2x}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \left[-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{-2x}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx + \frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \left[-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{-2x}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{13}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \left[-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{-2x}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{13}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \frac{1}{3} + \frac{2e^{-\pi}}{9} = \frac{3+2e^{-\pi}}{9}$ d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}sin3xdx = \frac{3+2e^{-\pi}}{13}$$

4. Soit les intégrales J et K définies par : J =$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xcos^2(2x)dx$et K =$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xsin^2(2x)dx$.

a) Calculons : J - K.
on a :
J - K= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xcos^2(2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xsin^2(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(xcos^2(2x) - xsin^2(2x)\right)dx =$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(cos^2(2x) - sin^2(2x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xcos(4x)dx$
posons $u(x) = x$ $u'(x) = 1$

$$v'(x) = \cos(4x) \qquad v(x) = \frac{1}{4}\sin(4x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xcos(4x)dx = \frac{1}{4}[xsin(4x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,dx = \frac{1}{4}[xsin(4x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}[\cos(4x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Donc $J - K = -\frac{1}{2}$
b) Calculons : J + K.

on a :

J + K= $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xcos^2(2x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} xsin^2(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(xcos^2(2x) + xsin^2(2x)\right)dx =$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(cos^2(2x) + sin^2(2x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$
c) Déterminons la valeur exacte de J et celle de K.

D'après a) et b) on a :$\begin{cases} J - K = -\frac{1}{2} \\ J + K = \frac{\pi^2}{32} \end{cases}$

Donc $J = \frac{\pi^2-16}{64} \quad et\ K = \frac{\pi^2+16}{64}$

5. Calculons les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable affine

- $\boldsymbol{\int_1^2 x\sqrt{2x+4}dx}$

Posons $t = 2x + 4$ $dx = \frac{1}{2}dt$ $; qd\ x = 1; t = 6\ et\ qd\ x = 2; t = 8$

Donc $\int_1^2 x\sqrt{2x+4}dx = \int_6^8 \frac{1}{2}(t-4)\sqrt{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int_6^8 t\sqrt{t}dt - \int_6^8 \sqrt{t}dt$

$$= \frac{1}{4}\int_6^8 t^{\frac{3}{2}}dt - \int_6^8 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_6^8 - \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_6^8 = \frac{1}{10}\left[t^2\sqrt{t}\right]_6^8 - \frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_6^8$$

$$= \frac{1}{10}\left(128\sqrt{2} - 36\sqrt{6}\right) - \frac{2}{3}\left(16\sqrt{2} - 6\sqrt{6}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{4}{10}\sqrt{6}$$

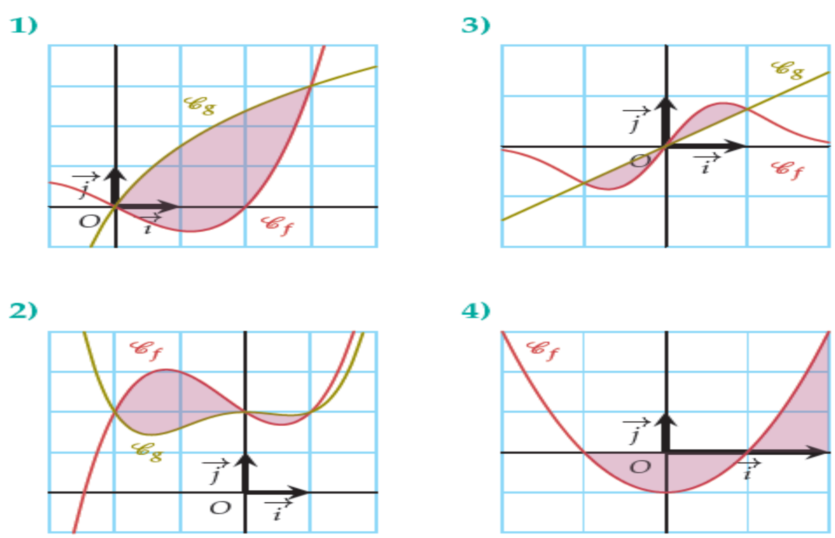
- $\boldsymbol{\int_1^2 x^2\sqrt{2x+4}dx}$

Posons $t = 2x + 4$ $\quad dx = \frac{1}{2}dt \quad ; si\ x = 1; t = 6\ et\ si\ x = 2; t = 8$

Donc $\int_1^2 x^2\sqrt{2x+4}dx = \int_6^8 \left(\frac{1}{2}(t-4)\right)^2 \sqrt{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{8}\int_6^8 (t^2 - 8t + 16)\sqrt{t}dt \quad =$
$\frac{1}{8}\int_6^8 t^2\sqrt{t}dt - \int_6^8 t\sqrt{t}\,dt + 2\int_6^8 \sqrt{t}dt = \frac{1}{8}\int_6^8 t^{\frac{5}{2}}dt - \int_6^8 t^{\frac{3}{2}}\,dt + 2\int_6^8 t^{\frac{1}{2}}dt \quad =$
$\frac{1}{8}\left[\frac{2}{7}t^3\sqrt{t}\right]_6^8 - \left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_6^8 + 2\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_6^8 \quad =$
$\frac{1}{28}\left(1024\sqrt{2} - 216\sqrt{6}\right) - \frac{2}{5}\left(128\sqrt{2} - 36\sqrt{6}\right) + \frac{4}{3}\left(16\sqrt{2} - 6\sqrt{6}\right) \quad = \frac{704}{105}\sqrt{2} - \frac{46}{35}\sqrt{6}$

6. On a : $\int_{-2}^0 \left(\frac{3}{2}x + 3\right) dx + \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_0^2 = 6$

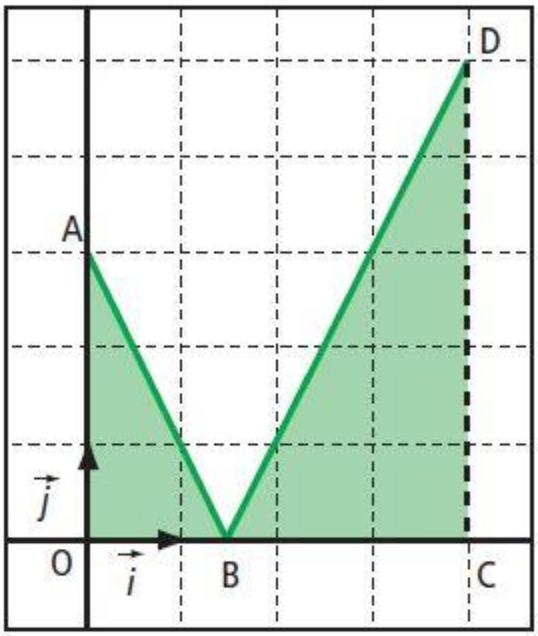
7. Dans chacun des cas suivants, exprime l'aire du domaine colorié sous forme d'intégrale (on ne demande pas de calculer l'intégrale)



1- $A(\Delta) = \int_0^3 (g(x) - f(x))dx\,.u.a$
2- $A(\Delta) = \left(\int_{-2}^0 (f(x) - g(x))dx + \int_0^1 (g(x) - f(x))dx\right).u.a$
3- $A(\Delta) = \left(\int_{-1}^0 (g(x) - f(x))dx + \int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right)u.a$

4- $A(\Delta) = \left(\int_{-1}^{1}(-f(x))dx + \int_{1}^{2} f(x)dx\right) u.a$

8.Soit la fonction g définie par :$g(x) = |2x-3|$ dont la représentation graphique$\left(C_g\right)$ est ci-dessous (en vert)



Calculons l'aire (en unités d'aire) de la partie (Δ)du plan délimitée par la courbe $\left(C_g\right)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$

On a: $A = \left[\int_0^{\frac{3}{2}}(-2x+3)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4}(2x-3)dx\right] \times u.a = \left([-x^2+3x]_0^{\frac{3}{2}} + [x^2-3x]_{\frac{3}{2}}^{4}\right) u.a$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 16 - 12 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{17}{2} u.a$$

9.

1- Considérons la fonction g définie par : $g(x) = \frac{e^x}{x^4}$. Elle est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2- déterminons le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

On sait que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{e^x}{x^4}$ donc $\forall x \in D_f, f'(x) > 0$

3.a) f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

3.b) On sait que $f(2) = 0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]-\infty; 2[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) > 0$

10.

11. On considère la fonction numérique f définie par : $\int_1^x \frac{\sqrt{\ln t + 2}}{t} dt$

1. Posons $h(t) = \frac{\sqrt{\ln t + 2}}{t}$

$D_h = \{t \in \mathbb{R}, t > 0 \; et \ln t + 2 > 0\} =]e^{-2}; +\infty[$

Pour $x \in D_h$, h est continue et dérivable donc $D_f =]e^{-2}; +\infty[$

2. $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x}$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\sqrt{\ln x + 2}$ car $x > 0$. Or $\forall x \in D_f, \sqrt{\ln x + 2} > 0$.

Donc $\forall x \in D_f, f'(x) > 0$

3.a) Sens de variations de f

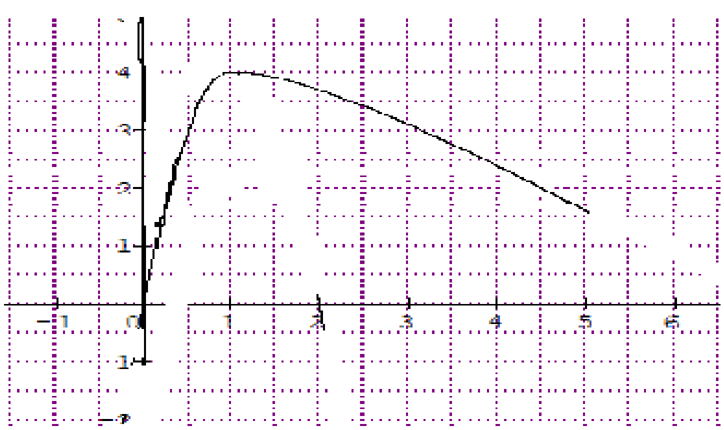
$\forall x \in D_f, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]e^{-2}; +\infty[$

Correction des exercices d'approfondissement

12.

- $f(x) = -4x^2 + 8x \quad pour \; x\epsilon[0; 1]$
- $f(x) = \ln x - x + 5 \quad pour \; x\epsilon[1; 5]$

1. Courbe



2. Vérifions que f est continue en 1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-4x^2+8x) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(\ln x - x + 5) = 4$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = 4 = f(4)$

Donc f est continue en 1.

3. Soit N le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.

$$N = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 (-4x^2+8x)dx + \int_1^5 (\ln x - x + 5)dx$$

$$N = \left[-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^1 + [x\ln x - x]_1^5 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_1^5$$

$$N = \frac{20}{3} + 5\ln 5$$

13.

On considère la fonction numérique f de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3}dt$

Partie A

1. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (e^x \times \frac{1}{x^3}) = +\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^3} = +\infty \end{cases}$

   et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

2. sens de variation de g

$\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{x^3e^x - 3x^2e^x}{x^6} = \frac{x^2e^x(x-3)}{x^6} = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$

$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{e^x}{x^4} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ *est du signe de* $(x-3)$

$\forall x \in]0;3[,\ g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;3[$

$\forall x \in]3;+\infty[,\ g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]3;+\infty[$

3. tableau de variation de g

x	0		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

Le reste des questions à traiter……….

Partie B

1. déterminons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

On considère la fonction numérique f de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt$.

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{e^x}{x^3} > 0$ donc $\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt > 0$. D'où $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$

2. a) Démontrons que : $\forall x \in]5; +\infty[, f(x) > \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

14.

15. On a : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

1a) On a : $g(x) = \sqrt{x^2+2}$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

On a : $f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

1b) Calculons la valeur de I

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right]_0^1 = \ln\left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}\right)$$

2a) On a : $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}{x^2+2} dx =$
$\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

Donc : $J + 2I = K$

2b) Démontrons que $K = \sqrt{3} - J$

On a : $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

Posons $u(x) = \sqrt{x^2+2}$ $\quad u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$v'(x) = 1$ $\quad v(x) = x$

$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \sqrt{3} - J$

2c) On a : : $J + 2I = K$ et $K = \sqrt{3} - J$

Donc $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}\right)$

Et $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}\right)$