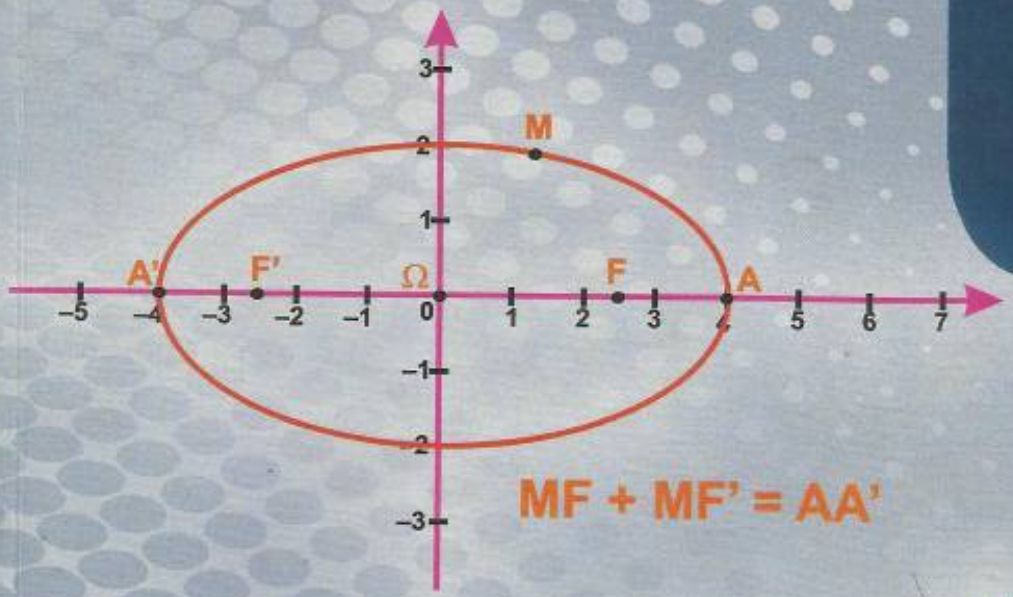
Mathématiques



$$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};\ F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$\mathbf{PGCD}(a;b)\times\mathbf{PPCM}\ (a;b)=|a|\times|b|$$

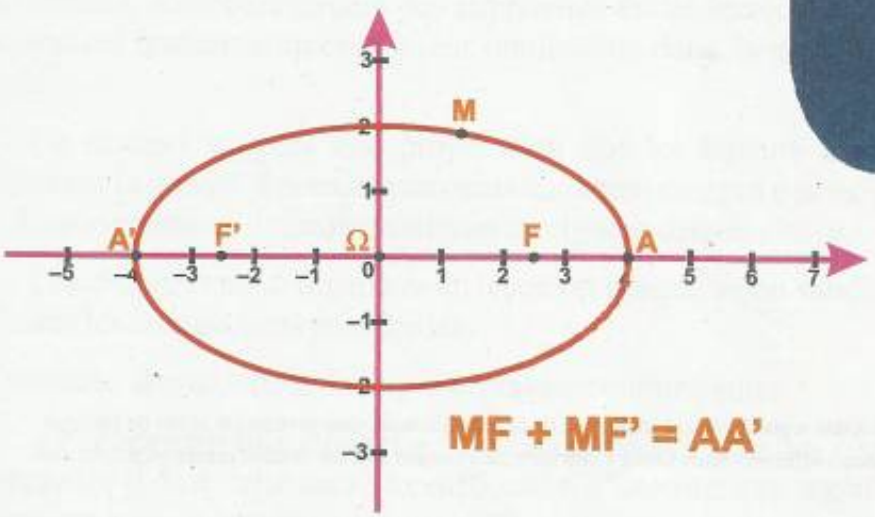
LIVRE DE L'ÉLÈ

Valentin TEGN
Damase SIELI
Albert BOUDA
Roger POKAM
Raoul BOUDY
Chamberlain FO

Nmi Education

Mathematiques

C &



$$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};\ F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+}}$$

$$\mathbf{PGCD}(a;b)\times\mathbf{PPCM}\,(a;b)=|a|\times|b|$$

LIVRE DE L'ÉLÈV

Valentin TEGNINK
Damase SIELINOU
Albert BOUDA
Roger POKAM
Raoul BOUDY
Chamberlain FOUO

Nmi Education

Tous droits de production réservés. Aucune reproduction ni traduction de cette publication sans permission écrite de l'éditeur ni des auteurs ne sera permise. Les auteurs affirment leurs droits à être identifiés comme auteurs de cette œuvre en accord avec les lois sur les droits d'auteurs.

Première édition 2014
© NMI Education
B.P. 31267
Yaoundé - Cameroun
Email : frontdesk@nmieducation.org
Site Web : www.nmieducation.org

Conception maquette : Raymond Ndjofang Bagzé
Responsable éditoriale : Mela Fokam Gisèle
Assistante éditoriale : Makowo Momo Solange
Infographie : Raymond Ndjofang Bagzé
Illustrations : Nmi Education

ISBN: 9956-802-93-x

Avant-propos

Le développement des trois éléments clés que sont les savoirs, les savoir faire et les savoir être a été la préoccupation de tous les instants dans le présent ouvrage.

La procédure d'acquisition des savoirs a privilégié la capacité de tout apprenant à pouvoir mobiliser des connaissances nécessaires aux fins d'acquérir les connaissances nouvelles qui représentent une portion très réduite pour tout apprentissage qu'il soit théorique ou pratique. Considérer un apprenant comme un spectateur au sens large du terme des étapes du processus d'apprentissage serait une bévue pédagogique et didactique qui enfreindrait à l'efficacité et à l'efficience des résultats attendus .Ce manuel s'inscrit dans la logique d'accompagnement, d'encadrement, d'encouragement des apprenants et des lecteurs de manière générale sur l'accès aux connaissances mathématiques et à leur implication dans la gestion des problèmes de la vie courante.

Ce manuel suggère une progression que les auteurs estiment être à même de fluidifier efficacement la qualité des enseignements en tenant compte des exigences à court, à moyen et à long terme des programmes de mathématiques en vigueur dans la classe.

Les chapitres sont organisés en leçons et chaque leçon subdivisée en unités didactiques qui en constituent les articulations principales.

L'ossature d'une unité didactique se présente comme suit :

a) « **Prendre un bon départ** » : Une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant, dans lesquelles il doit faire face aux difficultés, s'interroger et mobiliser ses connaissances et autres moyens pour répondre aux différentes interrogations posées.

b) « **Retenir** » : Cette partie très courte, dégage les principales recommandations assorties des activités menées dans « **Prendre un bon départ** » .

c) « **Exemples et exercices résolus** » : Des exemples diversifiés, liés à une capacité donnée y sont traités et largement commentés, parfois consolidés par des exercices résolus. On voudrait que ce manuel soit aussi une espèce d'annales et donc de repère pour les utilisateurs.

d) « **S'exercer** » : Des évaluations directes des capacités des apprenants à la mise en œuvre des savoirs sont proposées dans cette partie. Les éventuelles difficultés devraient être résolues en recourant aux commentaires faits dans les exemples traités.

A la fin d'un chapitre, est proposé un nombre assez important et diversifié d'exercices, regroupés en thèmes, pour faciliter l'exploitation du manuel, reprenant de manière directe ou indirecte des capacités acquises tout au long du chapitre.

Le souci d'avoir une forte culture de rigueur et une simplicité dans le raisonnement, celui d'amélioration de la communication(qualité de la rédaction des productions des élèves), le renforcement des capacités de muter les connaissances savantes en puissants outils de résolution des problèmes de la vie et le décloisonnement des enseignements disciplinaires sont des extrants impératifs pour tout apprenant d'une série scientifique qui rêve d'une insertion réussie dans le circuit de développement individuel et sociétal.

Les auteurs.

Sommaire

Chapitres	Contenu d'apprentissage	Pages
1- Calculs vectoriels	1- Calculs barycentriques	8
	2- Lignes de niveau et surfaces de niveau	14
	3- Produit vectoriel	23
2- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	1- Ensemble des entiers naturels	43
	2- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	58
3- Limites et continuité	1- Limites et continuité	75
	2- Fonctions continues et strictement monotones	87
	3- Branches infinies de la courbe d'une fonction	93
4- Nombres complexes	1- Étude algébrique de $\mathbb{C}$	106
	2- Forme trigonométrique et forme exponentielle	118
	d'un nombre complexe non nul	118
	3- Équations dans $\mathbb{C}$	134
5- PGCD et PPCM de deux entiers non nuls	1- PGCD et PPCM de deux entiers non nuls	152
	2- Nombres premiers et équations dans $\mathbb{Z}^2$ du type $ax + by = c$	166
6- Dérivation – primitives sur un intervalle d'une fonction continue	1- Dérivation	180
	2- Étude et représentation de quelques fonctions	194
	3- Primitives sur un intervalle d'une fonction continue	200
7- Espaces vectoriels et applications linéaires	1- Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$	216
	2- Applications linéaires	221
8- Fonctions logarithmes	1- Fonction logarithme neperien	237
	2- Logarithme de base quelconque	253.
9- Fonctions exponentielles	1- Fonction exponentielle népérien	263
	2- Fonction exponentielle de base quelconque	273
	3- Fonctions puissances $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ où x est un réel	
	strictement positif et α est un nombre réel	278

10- Suites numériques	Suites numériques	294
11- Calcul intégral	1- Calculs pratiques des intégrales	315
	2- Quelques applications du calcul intégral	333
12- Isométries et similitudes directes du plan	1- Isométries du plan	353
	2- Similitudes directes du plan	374
13- Applications affines	1- Généralités sur les applications affines	398
	2- Projections, symétries et affinité d'un espace affine.	413
14- Équations différentielles	Équations différentielles	435
15- Applications affines dans l'espace	1- Applications affines dans l'espace	452
	2- Homothéties – Translations	467
16- Coniques	1- Généralités sur les coniques	479
	2- Étude analytique des paraboles	490
	3- Étude analytique des ellipses et des hyperboles	497
17- Calculs des probabilités	1- Résolution de certains problèmes de dénombrement	520
	2- Probabilité d'un événement	527
	3- Variables aléatoires	537

Sujets de synthèse..... 560

Chapitre 1

CALCULS VECTORIELS

LEÇON 1 CALCULS BARYCENTRIQUES

1.1 BARYCENTRE DES POINTS PONDÉRÉS.

1.2 BARYCENTRES PARTIELS-ENSEMBLE DES BARYCENTRES DE POINTS PONDÉRÉS

LEÇON 2 LIGNES DE NIVEAU ET SURFACES DE NIVEAU

2.1 LIGNES DE NIVEAU - SURFACES DE NIVEAU DE L'APPLICATION $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$

2.2 LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION $M \mapsto Mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$.

LEÇON 3 PRODUIT VECTORIEL

3.1 ORIENTATION DE L'ESPACE : BASES ORTHONORMÉES DIRECTES OU INDIRECTES.

3.2 PRÉSENTATION DU PRODUIT VECTORIEL

3.3 PROPRIÉTÉS ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU PRODUIT VECTORIEL

3.4 CALCULS DES DISTANCES, D'AIRES ET DES VOLUMES

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 CALCULS BARYCENTRIQUES

▸ Manipuler les barycentres dans l'espace

Dans tout le chapitre, nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan et par $\mathcal{E}$ celui des points de l'espace ; V l'ensemble des vecteurs du plan et W celui des vecteurs de l'espace.

1.1 BARYCENTRE DES POINTS PONDÉRÉS.

Prendre un bon départ

1) Soit ABCD un tétraèdre et M un point de $\mathcal{E}$

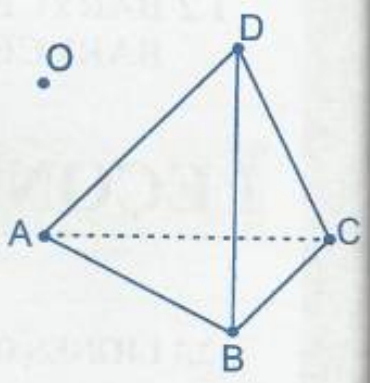
• Montrer que pour tout point O de on a :

$2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{CO}+3\overrightarrow{DO}.$

• Soit I le point de $\mathcal{E}$ tel que $-\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Montrer que :

$2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{IO}.$

• Construire le point M tel que $2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{DM}=\vec{0}$



2) Soit A, B, C, D et E cinq points de $\mathcal{E}$ et le vecteur

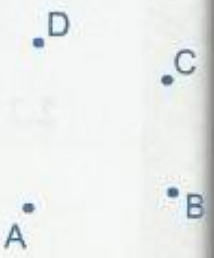
$\vec{u}=2\overrightarrow{AN}-3\overrightarrow{BN}-2\overrightarrow{CN}+4\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{EN}$ où N est un point quelconque de $\mathcal{E}$.

• Montrer que le vecteur u ne dépend pas du point N.

• Vérifier que $\vec{u}=2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{JB}$

où J est un point tel que $4\overrightarrow{DJ}-\overrightarrow{EJ}=\vec{0}$.

• Construire le vecteur $\vec{u}$



Notations

• L'ensemble des n points pondérés $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3),\ldots(A_n,\alpha_n)$ est noté $\{(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$

• La somme $\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\alpha_3\overrightarrow{MA_3}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ est notée $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$.

• L'égalité $2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EM}=\vec{0}$ est notée $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}$.

$(A_1,\alpha_1)=(A,2)$; $(A_2,\alpha_2)=(B,-1)$; $(A_3,\alpha_3)=(C,-2)$, $(A_4,\alpha_4)=(D,3)$ et $(A_5,\alpha_5)=(E,1)$.

Retenir

Soit $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$, n points pondérés

(1) Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ alors il existe **un unique point G** tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

• Cet unique point G est barycentre des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ et est noté $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)\}$

• Si les α_i sont tous égaux, G est appelé isobarycentre des points A_i

(2) Le barycentre de plusieurs points pondérés **ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul** :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^*.$$

(3) Pour tout point M, on a :

• Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$ où $G=bar\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)\}$

• Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$, alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ ne dépend pas du point M. Pour tout point O on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$$

S'en convaincre

Soit O un point du plan $\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$ donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MO}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$

a) Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$.

b) Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\vec{O}\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MO}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}=O$ et en particulier si l'on remplace O par A_1 on a : $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MA_1}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}=O\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1M}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1A_i}$.

Le point M ne dépend que des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ c'est leur barycentre G.

c) Par ailleurs : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MO}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$ en remplaçant O par G.

Remarque

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathscr{E}$, si $G=\text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)\}$ et (x_i,y_i,z_i) les coordonnées du point A_i, alors

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\Leftrightarrow\boxed{G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\right)}$$

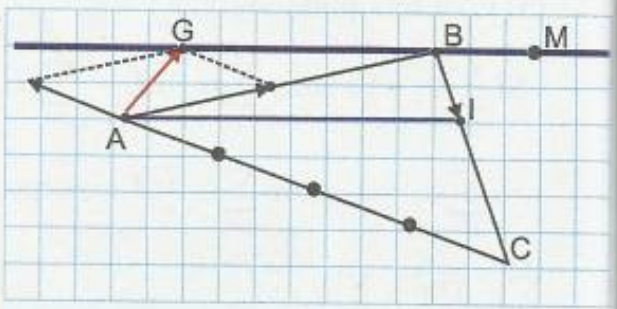
Exemple

1) A, B et C sont trois points non alignés de $\mathscr{E}$. Déterminons l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que les vecteurs $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ et $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

• Puisque $3+2-1=4$, notons G le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B ; 2) et (C, −1). On a : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(3+2-1)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}$.

• $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(3-2-1)\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AI}$ où I est le barycentre de points pondérés (B, 2) et (C, 1).

Ces deux vecteurs sont colinéaires si les droites dirigées par $4\overrightarrow{MG}$ et $-3\overrightarrow{AI}$ sont parallèles donc l'ensemble des points M cherchés est la droite passant par G et parallèle (AI).



2) Soit ABCD un tétraède. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

Soit G son centre de gravité; on a :

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

S'exercer

1.a Écrire chacun des points A, B et C comme barycentre des deux autres.

1.b ABCD est un carré , E le milieu de [BD]. Construire le barycentre des points pondérés dans chaque cas.

a) (A,2),(B,2),(C,4) et (E,–4)
b) (A,1),(B,–1),(C,1) et (E,–2)
c) (A,–1),(B,2),(C,4) et (E,–2)
d) (A,1),(B,1),(C,–2) et (E,–2)

1.c ABCD est un parallélogramme.

• Réduire le vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}$.

• Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MD}$ soient colinéaires.

1.d Soit A, B et C trois points non alignés. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ; D le point du plan (ABC) tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les droites (AA') , (B'C') et (CD) sont concourantes.

1.e Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 2),(B, −3),(C,1) et (D,4). A tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\vec{u}$ tel que :

$\vec{u}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}$.

a) Démontrer que $\vec{u}=4\overrightarrow{MG}$.

b) Déterminer les coordonnées de G dans le repère (A, B, C, D).

1.2 BARYCENTRES PARTIELS-ENSEMBLE DES BARYCENTRES DE POINTS PONDÉRÉS

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$, n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Soit $p\in\mathbb{N}$, $1<p<n$

tels que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i \neq 0$.

Soient G et K les barycentres respectifs des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le p}$ et $(A_i,\alpha_i)_{p+1\le i\le n}$.

- Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA}=0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{GK}+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$
- En déduire que G est le barycentre du système des points pondérés

$\left(K,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)$, (A_{p+1},α_{p+1}), (A_{p+2},α_{p+2}), ...,(A_n,α_n).

Activité 2

Soit A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

- Soit I le centre de gravité du triangle ABC. Justifier que I $\in$ $\mathscr{B}$.
- Soit G le barycentre des points pondérés (A,α),(B,β) et (C,γ). Montrer que G appartient au plan (ABC). En déduire que $\mathscr{B}\subset$ (ABC).
- Soit M un point du plan (ABC), on sait qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Écrire M comme barycentre des points A, B et C. En déduire que (ABC) $\subset\mathscr{B}$.
- Déduire de ce qui précède l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

Retenir

(1) Le barycentre d'un système de n points pondérés ($n\ge 3$) ne change pas si l'on remplace un sous-système par son barycentre lorsque c'est possible en lui affectant la somme des coefficients associés aux points du sous-sytème

- Si $\sum_{i=1}^{p}\alpha i\neq 0$ alors

$$\text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)\}$$

$$=bar\left\{\left(K,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right),(A_{p+1},\alpha_{p+1}),(A_{p+2},\alpha_{p+2}),...,(A_n,\alpha_n)\right\} \text{ où K= bar}\{(A_1,\alpha_1),....,(A_p,\alpha_p)\} \text{ et } \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\neq 0$$

(2) L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).

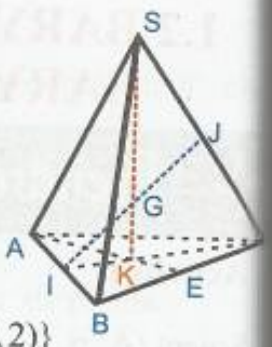
(3) L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

Exemple

• Construisons le centre de gravité G du tétraèdre SABC.

Soit K le centre de gravité du triangle ABC. On a :

$G = bar\{(S,1),(A,1),(B,1),(C,1)\} = bar\{(S,1),(K,3)\}$ donc $\overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SK}$.



• Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [SC]. Alors

G est le milieu de [IJ] car $G = bar\{(S,1),(C,1),(A,1),(B,1)\} = bar\{(I,2),(J,2)\}$

Remarque

L'ensemble des barycentres de quatre points non coplanaires de $\mathscr{E}$ est l'espace $\mathscr{E}$.

Exercice résolu

A,B,C,D sont quatre points non coplanaires, E est le milieu de [AB] ; F est un point tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et G = bar{(C,1);(D,3)}.

Montrons qu'il existe un unique point H de la droite (AD) tel que les droites (HF) et (EG) soient sécantes.

Solution

Détermination de H.

Si un tel point H existe alors il est un barycentre des points A et D car (AD) est l'ensemble des barycentres de A et D.

$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow F = bar\{(B,1);(C,2)\}$; et $E = bar\{(A,1);(B,1)\}$

$G = bar\{(C,1);(D,3)\} = bar\{(C,2);(D,6)\}$ car le barycentre est homogène.

Soit K=bar{(A,1);(B,1); (C,2) ; (D,6)}.

• On a : $K = bar\{(E,2);(G,8)\} \Rightarrow K \in (EG)$

• Par ailleurs , K = bar{(B,1); (C,2); (A,1); (D,6)} = bar{(F,3),(A,1); (D,6)}

En posant H = bar{(A,1);(D,6)} , on a K = bar{(F,3) ;(H,7) }, c'est-à-dire $K \in (FH)$.

L'unique point H cherché est H = bar{(A,1);(D,6)}

S'exercer

1. f ABCDE est une pyramide de sommet A, I et J les centres de gravité respectifs des faces ABC et ADE, G est le barycentre des points pondérés (A,3);(B,2); (C,2) ; (D,1) (E,1).

• Démontrer que les points G, I et J sont alignés.

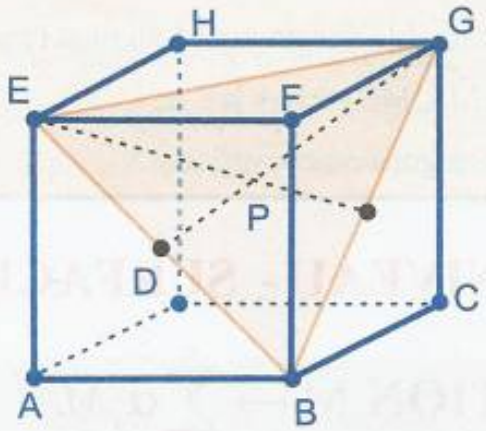
• En déduire une construction du point G.

1.g Soit ABCD un tétraèdre, G le centre de gravité de la face BCD. On note I, J et K les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les points I, J, K et D sont coplanaires.

1.h Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube de centre de gravité K.

Soit P le centre de gravité du triangle EBG. On considère le repère orthonormé (A, B, D , E).



a) Calculer les coordonnées de P et K.

b) Les points F , P et D sont-ils alignés ? En est-il de même pour les points D, K, P et F ?

c) Le plan (EBF) est-il orthogonal à la droite (DF) ?

d) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

e) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DF).

LEÇON 2 LIGNES DE NIVEAU ET SURFACES DE NIVEAU

- Consolider les lignes de niveau définies par une fonction scalaire dans le plan.
- Déterminer les surfaces de niveau associées à des fonctions scalaires définies dans l'espace.
- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + k \times 2\pi$ ou $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \alpha + k \times \pi$;
- Montrer que des points sont alignés ou cocycliques.

2.1 LIGNES DE NIVEAU - SURFACES DE NIVEAU DE L'APPLICATION $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$

Prendre un bon départ

Activité 1

1. Soit A un point de $\mathscr{E}$ et r un réel. Déterminer suivant les valeurs de r l'ensemble (S) des points M de $\mathscr{E}$ tels que $AM = r$.

2. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}$, A$(-1;1;2)$ et M$(x; y; z)$.

Déterminer la relation qui lie x, y et z pour que $AM = \sqrt{2}$

3. Soit λ un réel. Déterminer suivant les valeurs de λ, l'ensemble (S') des points M$(x; y; z)$ de $\mathscr{E}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + \lambda = 0$.

Activité 2

Soient ABC un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$ et λ un réel.

1. Soit (Γ_1) l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$.

a) Démontrer que $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 2GA^2 + GB^2 - GC^2$ où G est un point à déterminer.

b) En déduire suivant les valeurs de λ l'ensemble (Γ_1).

2. a) Démontrer que :

$2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 2\overline{MA} \cdot (\overline{AB} - 3\overline{AC}) + AB^2 - 3AC^2$

b) En déduire que $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AG_1} = \frac{\lambda+6}{2}$ où $G = \text{bar}\{(B,1);(C,-3)\}$.

c) Pour $\lambda = -6$, déterminer (Γ_1).

d) Pour $\lambda = 2$,

- Démontrer que $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow AH \cdot AG_1 = 2$

où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AG_1)

- Calculer AG_1

- En déduire que (Γ_1) est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AG_1}$.

Vocabulaire

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ deux applications. Soit k un réel.

- L'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que $f(M) = k$ est appelé ligne de niveau k de f.
- L'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $g(M) = k$ est appelé surface de niveau k de g.

Retenir

(1) Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}$, A$(a;b;c)$ un point de $\mathscr{E}$ et r un réel strictement positif.

- L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de tels que $AM = r$ est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$.
- L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ peut-être $\varnothing$ ou le singleton {A} ou une sphère de centre A$(a; b; c)$.

(2) Soit $(Ai,\alpha_i)_{1\le i\le n}$, n points pondérés tels que $\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

- Pour tout point M, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$ où G est le barycentre des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$.
- Si les points $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ sont dans le plan $\mathcal{P}$, alors la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ est $\varnothing$, {G} ou un cercle de centre G.
- Si les points $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ sont dans l'espace $\mathscr{E}$, alors la surface de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ peut-être $\varnothing$, {G} ou une sphère de centre G.

(3) Soit $(Ai,\alpha i)_{1\le i\le n}$, n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ et O un point.

- Pour tout point M, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - 2\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ où le vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ et est indépendant de M.

- Dans le plan $\mathcal{P}$, la ligne des niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ est :
  - $\varnothing$ ou le plan $\mathcal{P}$ si $\vec{u} = \vec{o}$.
  - Une droite de vecteur normal $\vec{u}$, si $\vec{u} \neq \vec{o}$.
- Dans l'espace $\mathcal{E}$, la surface de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha i MA_i^2$ est :
  - $\varnothing$ ou l'espace $\mathcal{E}$ si $\vec{u} = \vec{o}$.
  - Un plan de vecteur normal $\vec{u}$, si $\vec{u} \neq \vec{o}$.

S'en convaincre

(2) Soit $(Ai,\alpha i)1 \leq i \leq n$, n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Soit G est le barycentre des points pondérés $(Ai,\alpha i)1 \leq i \leq n$.

Pour tout i, on a : $\alpha_i MA_i^2 = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = \alpha_i MG^2 + 2\alpha_i \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{GA}_i + \alpha_i GA_i^2$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 \text{ car } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \lambda \text{ car } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

Si $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$ c'est-à-dire $\lambda = 0$ alors $M = G$. Si $\lambda < 0$ alors on a $\varnothing$ et si $\lambda > 0$ alors $MG = \sqrt{\lambda}$

Ainsi l'ensemble cherché est $\varnothing$, le singleton {G} ou le cercle $C(G,\sqrt{\lambda})$ dans le plan $\mathcal{P}$ ou bien la sphère $S(G,\sqrt{\lambda})$ dans l'espace $\mathcal{E}$.

(3) Soit $(A_i,\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Soit O un point quelconque.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2$$

car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha i OA_i^2$ où $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = 0$, alors tout point M satisfait à l'égalité encadrée ci-dessus.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 \neq 0$, il n'existe pas un tel point M.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = 0$, alors $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = \vec{0}$ et l'ensemble des points M cherché est :

- dans le plan $\mathcal{P}$, la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$.
- dans l'espace $\mathscr{E}$, le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 1.

1) Soit (Γ) l'ensemble des points M de tels que $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3$.

- **Montrons que A** $\in (\Gamma)$.

$3AA^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ donc A $\in (\Gamma)$

- **Détermination et construction de** (Γ).

Soit $G = bar\{(A,3),(B,1),(C,1),(D,1)\}$

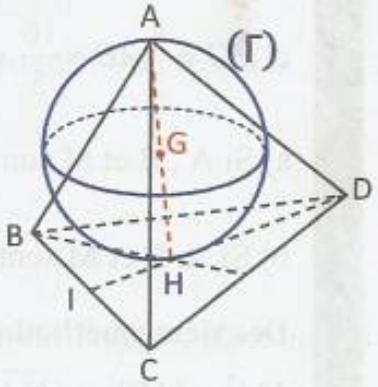
$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 3GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 3GA^2 + 3GH^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ où H est le centre de gravité du triangle BCD.

$G = bar\{(A,3),(B,1),(C,1),(D,1)\} = bar\{(A,3),(H,3)\}$ donc G est le milieu de [AH] c'est-à-dire que GA = GH.

Par ailleurs, $HB = HC = HD = \frac{2}{3} \times DI = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

car $DI = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La droite (AH) est orthogonale au plan (BCD),



donc $AH^2 = AD^2 - HD^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}$

donc $GA^2 = \left(\frac{1}{2} AH\right) 2 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MG^2 + 6GA^2 + 3HB^2 = 6MG^2 + 6 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} = 6MG^2 + 2$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 6MG^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow MG = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Ainsi (Γ) est la sphère de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

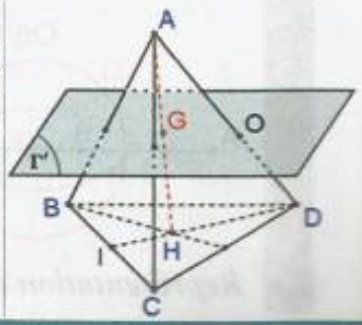
2) Soit (Γ') l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 1$.

Déterminons et construisons (Γ').

$-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + AB^2 + AC^2 + AD^2$

or H est le centre de gravité du triangle BCD. Donc

$-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 1 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AH} + 3 = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}$



Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite (AH) alors

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3\overrightarrow{AH}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

donc (Γ') est le plan passant par P tel que $\overrightarrow{AP}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AH}$. En effet P est confondu avec G.

(3) L'intersection de (Γ) et (Γ') est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Exercice résolu

Soit A et B deux points tels que $AB=4$ cm. Déterminer et construire l'ensemble (Σ) des points M tels que $\frac{MA}{MB}=2$.

a) A , B et M sont des points du plan $\mathcal{P}$.

b) A , B et M sont des points de l'espace $\mathscr{E}$.

Solution

Détermination de (Σ) : $\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow MA^2-4MB^2=0$

Première méthode

$MA^2-4MB^2=-3MG^2+GA^2-4GB^2$ où G est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,

et $AG=\frac{4}{3}AB=\frac{16}{3}$ et $BG=\frac{1}{3}AB=\frac{4}{3}$. Ainsi $M\in(\Sigma)\Leftrightarrow MG^2=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$

a) Si A , B et M sont des points du plan $\mathcal{P}$ alors (Σ) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{8}{3}$

b) Si A, B et M sont des points de l'espace $\mathscr{E}$ alors (Σ) est la sphère de centre G et de rayon $\frac{8}{3}$

Deuxiéme méthode

$MA^2-4MB^2=(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=-3\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}$ où $I=bar\{(A,1);(B,-2)\}$

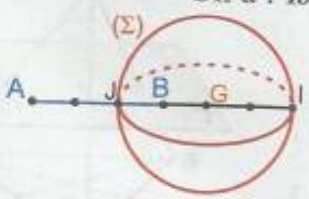
et $J=bar\{(A,1);(B,2)\}$. Ainsi $M\in(\Gamma)$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$.

c) Si A , B et M sont des points du plan $\mathcal{P}$ alors (Σ) est le cercle diamètre [IJ] .

d) Si A, B et M sont des points de l'espace $\mathscr{E}$ alors (Σ) est la sphère dont un diamètre est [IJ].

Montrons que G est le millieu du segment [IJ].

On a : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

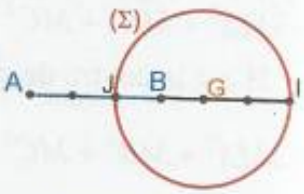


$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IG}$: **G est milieu de [IJ]**

Représentation dans $\mathscr{E}$



Représentation dan

Remarque

Soit k un nombre réel strictement positif et différent de 1. Soient A et B deux points distincts, $I = bar\{(A,1);(B,-k)\}$, $J = bar\{(A,1);(B,k)\}$ et $G = bar\{(A,1);(B,-k^2)\}$. L'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est :

- Dans le plan $\mathcal{P}$, **le cercle de diamètre** [IJ] ou de centre G et de rayon $\frac{k}{|1-k^2|}$AB.
- Dans l'espace, **la sphère de diamètre** [IJ] ou de centre G et de rayon $\frac{k}{|1-k^2|}$AB.
- Le milieu de [IJ]est le barycentre G des points pondérés (A,1) et $(B,-k^2)$.

S'exercer

2.a ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = 12$ cm.

a) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E') des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient même norme.

2.b ABC est un triangle isocèle tel que : $AB = AC = 6$ et $BC = 4$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA + MB + MC = 0$

2.c Soit SABC un tétraèdre régulier d'arête a. Soit (F) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS^2 + 2MA^2 + 3MB^2 - 6MC^2 = 6a^2$.

a) Montrer que C ∈ (F) et S ∉ (F). En déduire que (F) ≠ ϕ et (F) ≠ $\mathcal{S}$.

b) Déterminer et construire (F).

2.d L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

a) Soient les points A(3; −5;7) et B(1;−3 ; 9). Déterminer une équation de la sphère dont un diamètre est [AB].

b) Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble (H) des points M$(x;y;z)$ de $\mathcal{S}$ tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z = \frac{29}{4}a.$

2.2 LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION $M \mapsto Mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$

Prendre un bon départ

Soit A et B deux points distincts du plan.

Activité 1

a) Représenter sur une même figure, l'ensemble des points :

• P tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) = 0$.

• N tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = \pi$.

b) En déduire l'ensemble des points M tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) A et B font-ils partie de cet ensemble ? Justifier.

Activité 2

a) Construire l'ensemble des points M du plan tel que mes$(\widehat{AMB})$=60°.

b) Représenter sur la même figure, l'ensemble des points :

• P tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) = \frac{\pi}{3} + k(2\pi)$

• N tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi)$

• Les points A, B, P et N sont-ils cocycliques ? Si oui caractériser ce cercle.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

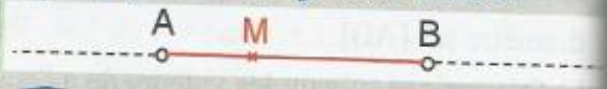
d) A et B font partie de cet ensemble ? Justifier.

Retenir

(1) Soit A et B deux points distincts du plan.

• L'ensemble des points M tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 0$ est *la droite (AB) privée du segment [AB].*

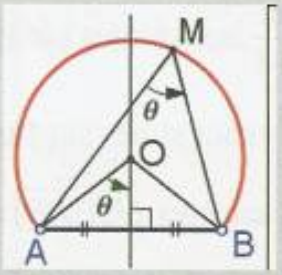
• L'ensemble des points M tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \pi$ est *le segment [AB] privé des points A et B.*



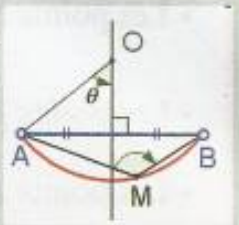
• L'ensemble des points M tels que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 0[\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.

(2) Soit A et B deux points distincts et θ un élément de $]-\pi;\ 0[\cup]0,;\pi[$. On note O le point de la médiatrice de [AB] tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 2\hat{\theta}$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et passant par A et B.

• Si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 2\theta$ est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de cercle $(\mathcal{C})$.



• Si $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 2\theta$ est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de cercle $(\mathcal{C})$.



• L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 2\theta\ [\pi]$ est le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points A et B.

(3) Quatre points A, B, C et D du plan sont *alignés* ou *cocycliques* si et seulement si : $Mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv Mes\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)\ [\pi]$.

S'en convaincre

Soit A, B et M trois points du plan,

(1) A, B et M alignés $\Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 0 \Leftrightarrow 2 \times Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ on a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 0$ ou $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pi$

(2) Soit $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, soit (C) le cercle de centre O et passant par A et B tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta$.

$M \in (C) \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2\theta$

$\Leftrightarrow 2 \times \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2 \times \theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \theta\ [\pi]$.

• Comme $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ alors θ est une mesure principale de $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$.

• $\theta \in]-\pi, 0[\Leftrightarrow \theta + \pi \in]0, \pi[$ donc $\boxed{\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \theta + \pi \text{ si } \theta \in]-\pi, 0[}$.

• $\theta \in]-\pi, 0[\Leftrightarrow \theta - \pi \in]-\pi, 0[$ donc $\boxed{\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \theta - \pi \text{ si } \theta \in]0, \pi[}$.

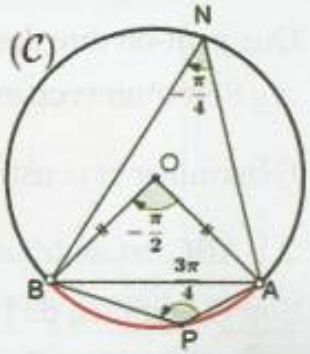
Exemple

Soit A et B deux points distincts du plan
Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

a) $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

On a: $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\frac{\pi}{4}$ ou $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{3\pi}{4}$.

Soit OAB le triangle rectangle isocèle en O et (C) le cercle de centre O et passant par A et B on a : $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{2}$



• Les points N tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = -\frac{\pi}{4}$ sont situés sur l'arc $\overset{\smile}{AB}$ privé de A et B.

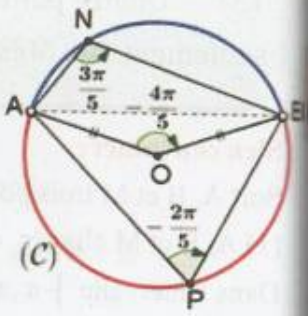
• Les points P tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) = \frac{3\pi}{4}$ sont situés sur l'arc $\widehat{AB}$ privé de A et B.

• Les points A, B, P et N sont cocycliques car $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) \equiv Mes\ (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}})[\pi]$

b) $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{3\pi}{5}[\pi]$.

On a: $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{3\pi}{5}$ ou $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = -\frac{2\pi}{5}$.

Soit OAB le triangle isocèle en O tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{4\pi}{5}$ qui est la mesure principale de $2\times\frac{3\pi}{5}$ et (C) le cercle de centre O et passant par A et B.



• Les points N tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = \frac{3\pi}{5}$ sont situés sur l'arc $\widehat{AB}$ privé de A et B.

• Les points P tels que $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) = -\frac{2\pi}{5}$ sont situés sur l'arc $\overset{\smile}{AB}$ privé de A et B.

• Les points A, B, P et N sont cocycliques car $Mes\ (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) \equiv Mes\ (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}})[\pi]$

S'exercer

2.e A et B sont deux points distincts du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des points N du plan tels que :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$; b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]$; d) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv \frac{3\pi}{4}[\pi]$

2.f A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \neq 0[\pi]$.

Construire le point D sachant que $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) \equiv Mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})[\pi]$.

Que peut-on dire des points A, B, C, et D ?

2.g Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et O un point fixé.

Déterminer et construire l'ensemble des points P du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OP},\vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

2.h ABC est un triangle rectangle en A tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$.

Soit O le milieu de [BC] et E le point du plan tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CA}$. Exprimer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ en fonction de α.

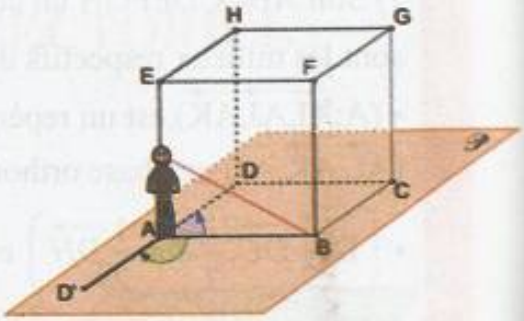
LEÇON 3 PRODUIT VECTORIEL

- Comprendre l'orientation de l'espace ;
- Déterminer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté ;
- Déterminer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté, relativement à une base orthonormée directe ;

3.1 ORIENTATION DE L'ESPACE : BASES ORTHONORMÉES DIRECTES OU INDIRECTES.

Prendre un bon départ

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et D' est le symétrique de D par rapport à A. On considère dans $\mathscr{E}$ les repères $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ et $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AE})$. Un observateur placé en A et la tête sur la demi-droite[AE) observe le point B.



- Justifier que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est repère orthonormé de $\mathscr{E}$.
- Le point D se trouve-t-il à gauche ou à droite de l'observateur ?
- Nommer un point qui se trouve à droite de l'observateur lorsqu'il regade le point B.
- Y-a-il des points de l'espace, non situés sur les droites (AB) et (AE) qui ne se trouvent ni à gauche , ni à droite de l'observateur ?

On convient que le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est direct de l'espace et que $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est direct du plan $(\mathscr{P})$.

Retenir

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$ et les points I, J et K tels que $\vec{i}=\overrightarrow{OI}, \vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$. On note $(\mathscr{P})$ le plan (OIJ).

- le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est de sens ***direct*** dans $\mathscr{E}$.

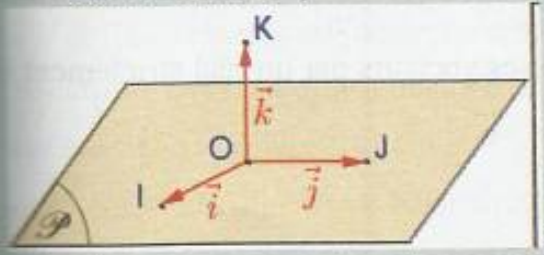


Fig. 1

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une ***base directe*** de $\mathscr{W}$.

Le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens ***indirect*** dans $\mathscr{E}$.

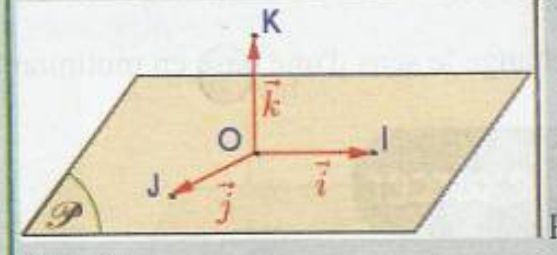


Fig.2

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une ***base indirecte*** de $\mathscr{W}$.

- *Orientation de l'espace* $\mathscr{E}$

Orienter l'espace $\mathscr{E}$, c'est choisir l'un des deux types de repères ou de bases.

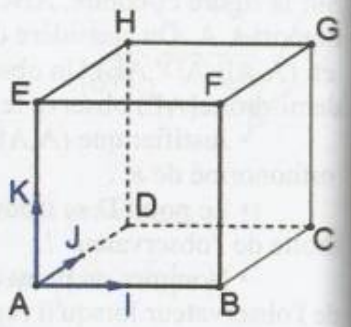
- *Orientation d'un plan de* $\mathscr{E}$

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère ***direct de*** $(\mathscr{P})$ si et seulement si $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère ***direct de*** $\mathscr{E}$. Un plan de $\mathscr{E}$ est orienté par le choix d'un de ses vecteurs normaux.

- $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthogonal si et seulement si $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ et $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.
- $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé si et seulement si $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un *repère orthogonal* et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$.

Exemple

1) Soit ABCCDEFGH un cube d'arête 2cm. I,J et K sont les milieux respectifs de [AB], [AD], et [AE]



- $(A;\vec{AI},\vec{AJ},\vec{AK})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

$(\vec{AI},\vec{AK},\vec{AJ})$ une base orthonormée indirecte de $\mathcal{W}$.

- $\left(D,\frac{1}{2}\vec{DC},\frac{1}{2}\vec{DA},\frac{1}{2}\vec{DH}\right)$ est un repère orthonormé indirect de $\mathscr{E}$ $(\vec{DC},-\vec{DA},\vec{DH})$ une base directe de $\mathcal{W}$.

2) Dans le retenir ci-dessus, le plan $(\mathscr{P})$ est orienté direct dans la figure 1 et indirect dans la figure 2.

Remarque

- Si on intervertit deux vecteurs d'une base, alors on change de sens de l'orientation de cette base.
- Si on remplace un vecteur d'une base par son opposé, alors on change l'orientation de cette base.
- On ne change pas le sens d'une base en effectuant entre ses vecteurs une permutation circulaire.
- On ne change pas de sens d'une base en mutipliant un de ses vecteurs par un réel strictement positif.
- On change le sens d'une base en mutipliant un de ses vecteurs par un réel strictement négatif

S'exercer

3.a $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de $\mathscr{E}$. Les repères ci-dessus sont-ils directs ?

a) $(O,-\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ b) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ c) $(O,-\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e) $(O,-\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

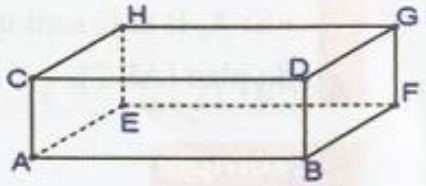
$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$. On considère les vecteurs

$\vec{u}=\frac{1}{9}(-7\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{1}{9}(4\vec{i}-\vec{j}-8\vec{k})$ et $\vec{w}=\frac{1}{9}(4\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k})$.

Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

ABCDEFG est un pavé droit tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et AB = 3.

L'unité de mesure est la longueur du segment $[AC]$



Soit $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

Déterminer l'orientation de chacune des bases suivantes de $\mathcal{W}$:

i) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HC},\overrightarrow{BD})$; ii) $(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{BF})$.

Ces bases sont-elles orthogonales ? Orthonormées ?

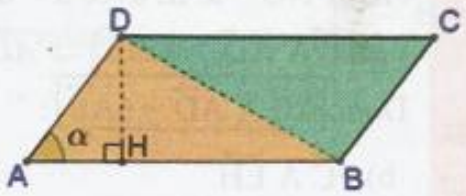
3.2 PRÉSENTATION DU PRODUIT VECTORIEL

Prendre un bon départ

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de $\mathcal{E}$.

• Démontrer que l'aire de ce parallélogramme est $\mathcal{A}$=AB ×AD × sinα.

• Placer sur la figure un point E tel que la $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base directe de $\mathcal{W}$.



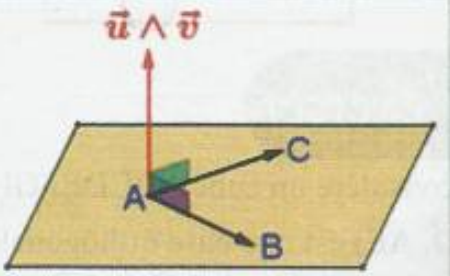
Retenir

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Soient A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

On appelle **produit vectoriel des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est caractérisé par :

- **Direction** : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et a $\vec{v}$;
- **Norme** : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin\widehat{BAC}$;
- **Sens** : $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe.



Remarque et vocabulaire

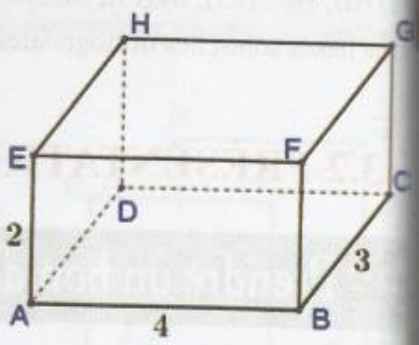
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit «$\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$» et sa définition ne dépend pas du point A.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires et orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonor directe de $\mathcal{W}$.
- Si A, B et C sont trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur nor du plan (ABC).

Exemple

(1) Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$. On a :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{i} \wedge (-\vec{j}) = -\vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ et $-\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

(2) On considère un pavé droit ABCDEFGH.



1) Déterminons les produits vectoriels suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

- C'est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AD}$ donc dirigé par la droite (AE).
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$ est une base directe donc il a même sens que le vecteur $\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$ avec $k > 0$.
- $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \|k\overrightarrow{AE}\| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \sin 90° = K\overrightarrow{AE} \Rightarrow 4 \times 3 = k \times 2 \Rightarrow k = 6$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AE}}$.

b) $\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{EH}$

$\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FG}$ car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

En suivant toutes les étapes du a), on aboutit à $\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FG} = k\overrightarrow{FE}$.

L'observateur, couché sur $[EF]$ les pieds en F et la tête vers E, regardant le point C tourne sa tête vers la main droite (sens indirect) pour regarder le point G donc $k < 0$.

$\|\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FG}\| = \|k\overrightarrow{FE}\| \Rightarrow \overrightarrow{FC} \times \overrightarrow{FG} \times \sin \widehat{CFG} = |k| \times \overrightarrow{FE}$.

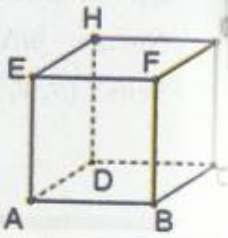
Or $FC = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$ et $\sin \widehat{CFG} = \dfrac{CG}{FG} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ donc $\sqrt{13} \times \dfrac{2}{\sqrt{13}} = 4|k|$; ainsi $k = -\dfrac{1}{2}$

Finalement $\boxed{\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{EH} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FE}}$.

S'exercer

3.d On considère un cube ABCDEFGH d'arête a tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base orthogonale directe de $\mathcal{W}$.

Déterminer les vesteurs $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EG} \wedge \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{BC}$.

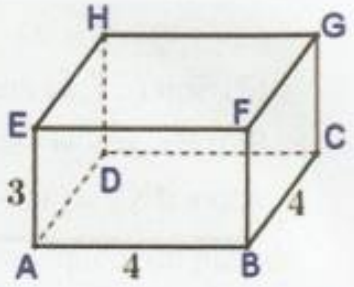


On considère le pavé droit ABCDEFG ci-contre.

a) Déterminer les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{GH}$.

b) Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (EAC).

c) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{AC}$.



3.3 PROPRIÉTÉS ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU PRODUIT VECTORIEL

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

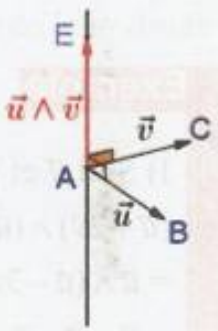
1. Montrer que si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Soit A, B, C

des points de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

a) Justifier que les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ ont même direction et même norme.

b) Soit le point E tel que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AE}$. À l'aide de la règle d'observateur d'Ampère, placer sur la figure ci-contre le point E' tel que $\vec{v} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AE'}$.

Justifier alors que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.



Activité 2

On admet que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et w de $\mathcal{W}$ et pour tout nombre réel k on a :

- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$. Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Démontrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$.

Retenir

(1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(2) Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathcal{W}$. Soit λ un nombre réel.

- $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

• $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$ et $\vec{w}\wedge(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{v}$.

(3) Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

Alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$.

Remarque et notation

• Trois points A, B et C de sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

• La formule de calcul du produit vectoriel dans une base orthonormé est plus facile à reten à l'aide des déterminants ci-dessous :

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$, soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

On a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$.

Exemple

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de.

$(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(\vec{u}-3\vec{v})$

$=\vec{u}\wedge(\vec{u}-3\vec{v})+(2\vec{v})\wedge(\vec{u}-3\vec{v})$

$=\vec{u}\wedge\vec{u}+\vec{u}\wedge(-3\vec{v})+(2\vec{v})\wedge\vec{u}+(2\vec{v})\wedge(-3\vec{v})$

$=\vec{o}-3\vec{u}\wedge\vec{v}+2\vec{v}\wedge\vec{u}-6\vec{v}\wedge\vec{v}$ car $\vec{u}\wedge\vec{u}=o$ et $\vec{u}\wedge(-3\vec{v})=-3u\wedge v$.

$=-5\vec{u}\wedge\vec{v}$.

2) Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$.

L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ est la droite (AB).

3) Soit $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}$.

On a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}\left(\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -3 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\right)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=-17\vec{i}-13\vec{j}-7\vec{k}$.

Exercice résolu 1

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(–3 ,0 ,1) , B(–2 ,5 ,1) et C(1 ,–1 ,2).

Démontrer que les points A, B et C définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne.

Solution

- Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ (5, -1, -21)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq o$ donc les points ne sont pas alignés , ils déterminent par conséquent un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

- Équation du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace .

$M \in (ABC) \Leftrightarrow 5x - y - 21z + k = 0$, or le point A est sur ce plan donc

$5 \times (-3) - 0 - 21 \times 1 + k = 0$ c'est-à-dire que $k = 36$ donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$5x - y - 21z + 36 = 0$.

Exercice résolu 2

$\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les plans (P) et (P') d'équations respectives $2x - 3y + 2z = -1$ et $x + 2y + 4z = 2$.

Les plans (P) et (P') sont-ils parallèles ? Sinon déterminer un vecteur directeur u de leur droite d'intersection.

Solution

Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}\ (2, -3, 2)$ et celui de (P') est $\vec{n}'(1,2,4)$.

$\vec{n} \wedge \vec{n}' \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right)$; $\vec{n} \wedge \vec{n}'(-16, -6, 7)$.

$\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires et par conséquent (P) et (P') ne sont pas parallèles.

Un vecteur directeur de leur droite d'intersection est $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$.

S'exercer

1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$. Développer et réduire les vecteurs suivants :

a) $(-2\vec{u} + \vec{v}) \wedge \left(\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} \right)$; b) $(-3\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (-\vec{u} + 4\vec{v})$; c) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$.

2 Soit A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

3 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$. Vérifier dans chacun des cas ci-dessous si le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

a) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$; $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$.

b) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$; $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2}$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$.

3.i L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(−1 ,1 ,1), B(−1 ,−1 ,1) et C(1 ,1 ,−1).

Démontrer que les points A, B et C définissent un plan dont on donnera une équation cartés

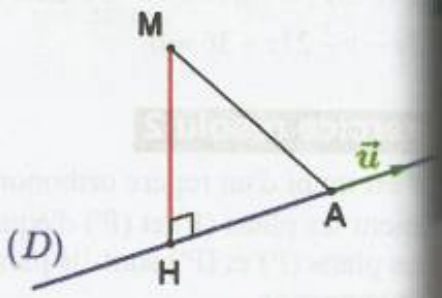
3.4 CALCULS DES DISTANCES, D'AIRES ET DES VOLUMES

Prendre un bon départ

Activité 1

1. Sur la figure ci-contre, (D) est une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et M un point de $\mathscr{E}$.

H est le projeté orthogonale de M sur (D).



- Justifier que $\overrightarrow{HA}\wedge\vec{u}=\vec{0}$
- Montrer que $\overrightarrow{MA}\wedge u=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$.
- En déduire que $MH=\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

2. Montrer que l'aire d'un triangle ABC de $\mathscr{E}$ est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

Activité 2

1. Soit (Π) un plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le point P est le projeté orthogonal de M sur le plan (Π).

- Justifier que $\overrightarrow{PA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$.
- Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})=\overrightarrow{MP}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
- En déduire que $MP=\dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.

2. Démontrer que le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à $\frac{1}{6}|AD\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|$.

Retenir

Dans l'espace $\mathscr{E}$,

- Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$, M un point de $\mathscr{E}$ et H son projeté orthogonal sur (D).

La **distance de M à la droite** (D) est $MH=\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

- Soit (Π) un plan passant par A et dirigée parles vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, M un point de et P son projeté orthogonal sur (Π).

La **distance du point M au plan** (Π) est $MP = \dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.

- **L'aire d'un triangle ABC** est $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$.
- **Le volume d'un tétraèdre** ABCD est $\boxed{V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}$.

Notations

- La distance d'un point M à une droite (D) est aussi notée d(M,(D)).
- La distance d'un point M à un plan (Π) est aussi notée d(M,(Π)).

Remarque

Si l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct dans lequel le plan (Π) a pour équation $ax+by+cz+k = 0$ alors la distance d'un point $M(x_0,y_0,z_0)$ au plan (Π) est

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

S'en convaincre

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct dans lequel on a $(\Pi) : ax+by+cz+k=0$.

Notons $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur normal à (Π), comme $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est aussi un vecteur normal de (Π) alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u}\wedge\vec{v} = \lambda\vec{n}$. Notons $A(\alpha,\beta,\gamma)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

D'après le retenir ci-dessus $d = \dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot\lambda\vec{n}|}{\|\lambda\vec{n}\|} = \dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Notons $A(\alpha,\beta,\gamma)$ dans le repère $\mathcal{R}$ le point de (Π), on a :

$|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}| = |(\alpha-x_0)a+(\beta-y_0)b+(\gamma-z_0)c| = |ax_0+by_0+cz_0+k|$ car

$A\in(\Pi)\Rightarrow a\alpha+b\beta+c\gamma = -k$ donc $d = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exemple

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(−4,6,−1); B(1,2,2); C(−1,4,3) et D(−5,7,0).

a) Démontrons que ABCD est un tétraèdre.

Il suffit de démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}5 & 3\\ -4 & -2\end{vmatrix}\right)$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-10,-11,2)$;

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 10-11+2 = 1$. $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$; donc D n'appartient pas au plan (ABC) et par conséquent, ABCD est un tétraèdre.

b) Calculons la distance de D à la droite (AB) et la distance de D au plan (ABC).

$d(D,(AB)) = \dfrac{|\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{AB})|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et $\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{AB}(-7,-8,7)$ donc $\boxed{d(D,(AB)) = \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{22}}}$.

$d(D,(ABC)) = \dfrac{|\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$; $\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 1\times(-10)+(-1)\times(-11)+(-1)\times 2 = -1$.

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-10)^2+(-11)^2+2^2} = \sqrt{225} = 15$. Donc $\boxed{d(D,(ABC)) = \dfrac{|-1|}{15} = \dfrac{1}{15}}$

c) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC et le volume V du tétraèdre ABCD.

$\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{15}{2}}$ et $\boxed{V = \dfrac{1}{6}|\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})| = \dfrac{1}{6}}$.

Exercice résolu 1

$\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A, B, C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que A, B et C ne sont pas alignés.

Montrer que A, B , C et D sont coplanaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

Solution

Soit A, B, C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que A, B et C ne sont pas alignés.

• Si A, B, C et D sont coplanaires alors $D \in (ABC)$.

Donc $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur du plan (ABC) et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du même plan donc $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

• Réciproquement si $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ alors D appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ qui n'est autre que le plan (ABC).

Remarque

W est muni d'une base orthonormée directe.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = 0$.

Exercice résolu 2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0$ et le plan (P_λ) d'équation $-x+4y-z+\lambda = 0$.

Étudions suivant les valeurs de λ les positions relatives de (S) et (P_λ).

Solution

Déterminer $(S)\cap(P\lambda)$ suivant les valeurs de λ.

• Déterminons le centre Ω et le rayon de (S).

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 12$

Donc le centre de (S) est $\Omega\ (1,-2,3)$ et son rayon est égal $2\sqrt{3}$.

• Calculons la distance d_λ de Ω à (P_λ).

$d_\lambda = \dfrac{|-1\times1+4(-2)+1\times3+\lambda|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}} = \dfrac{|-6+\lambda|}{\sqrt{18}} = \dfrac{|-6+\lambda|}{3\sqrt{2}}$.

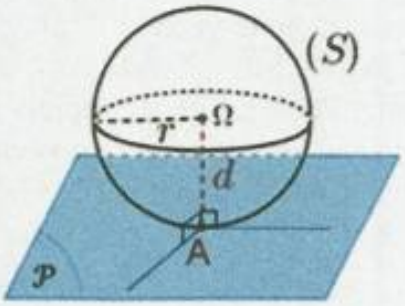
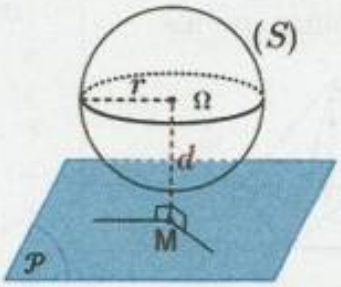
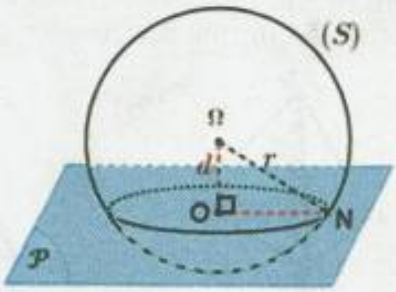
$d_\lambda = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |-6+\lambda| = 6\sqrt{6} \Leftrightarrow \lambda = 6\sqrt{6}+6$ ou $\lambda = 6-6\sqrt{6}$ dans ce cas (S) et (P_λ) ont un seul point d'intersection donc (S) et (P_λ) sont tangents.

$d_\lambda < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |-6+\lambda| < 6\sqrt{6} \Leftrightarrow -6\sqrt{6}+6 < \lambda < 6\sqrt{6}+6$. $(S)\cap(P_\lambda)$ est un cercle.

Si $\lambda \in]-\infty, -6\sqrt{6}+6[\cup]6\sqrt{6}+6, +\infty[$ alors $d_\lambda > 2\sqrt{3}$ et $(S)\cap(P_\lambda) = \varnothing$

Remarque

Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre Ω et de rayon r, $(\mathcal{P})$ un plan et d la distance de Ω au plan.

Si $d = r$ alors $(\mathcal{S})\cap(\mathcal{P})$ est un singleton $\{A\}$. On dit que $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ sont tangents au point A.	Si $d > r$ alors $(\mathcal{S})\cap(\mathcal{P}) = \varnothing$. On dit que $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ sont disjoints	Si $d < r$ alors $(\mathcal{S})\cap(\mathcal{P})$ est un cercle $(\mathcal{C})$. On dit que $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
		
$A \in (\mathcal{P})$ et $A\Omega = d$.	$\Omega M = d$.	$(\mathcal{C})$ est de centre O et de rayon $\sqrt{r^2-d^2}$. $(\mathcal{P}) \perp (O\Omega)$ et $(\mathcal{P})\cap(O\Omega) = \{O\}$.

S'exercer

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dans les exercice 3.j et 3.k.

3.j Soit les points A(–1,1,3), B(2,1,0) et C(4,–1,5)

a) Déterminer la distance du point C à la droite (AB).

b) En déduire qu'il existe un plan contenant les points A, B et C.

c) Montrer que le point H(–2 ,–1,–2) n'appartient pas au plan (ABC).

d) Calculer le volume du tétraèdre ABCH.

3.k On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x - 2y + z = 2$ et le point A(1 ,–2 ,1). On note S(A,2) la sphère de centre A et de rayon 2.

a) Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

b) En déduire la position relative du plan $(\mathcal{P})$ et de la sphère (S).

c) Écrire une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{P})\cap(S)$.

3.l ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.

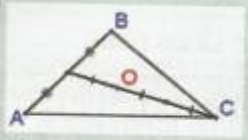
Calculer la distance du point A au plan (BCD).

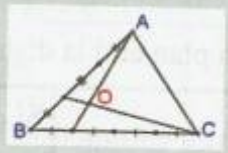
S'ENTRAÎNER

CALCULS BARYCENTRIQUES

1

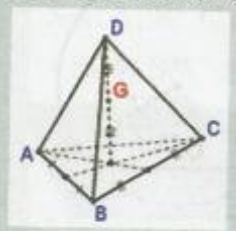
Ecrire O comme barycentre des points A, B et C.

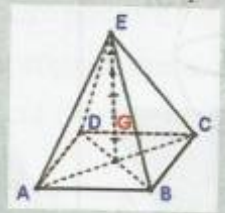




2

Sur chacun des solides de l'espace ci-dessous, écrire G comme barycentre des autres points.





3

ABCD est un parallélogramme de centre O, construire le barycentre des points pondérés dans chaque cas.

a) (A,–1),(B,2),(C,2) et (O,–2) ;
b) (A,–1),(B,1),(C,2) et (O,–1) ;
c) (A,1),(B,1),(C,2) et (O,–2) ;
d) (A,2),(B,4),(C,–2) et (O,–2).

4

ABC est un triangle du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

5

Soit ABC un triangle du plan.

Construire les points O,P et Q tels que

$\overrightarrow{BO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les droites (AO), (BP) et (CQ) sont concourantes.

6

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les centres respectifs des faces ABD et BDC. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

7

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,1),(B,3),(C,1) et (D,–3). À tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\vec{u}$ tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$.

a) Déterminer l'ensembles des points M tels que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Déterminer les coordonnées de G dans le repère (A, B, C, D).

8

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

les points A $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b) Déterminer les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés (A,–1) ; (B,2) (C ,3) et (D ,–2) .

9

Soit ABC un triangle du plan. À tout nombre réel a on associe le barycentre G_a lorsqu'il existe des points pondérés (A,2), (B,a –1) et (C, a +1).

a) Calculer les coordonnées de G_a dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
b) Déterminer l'ensemble des points G_a

10

Soit ABC un triangle équilatéral ; I milieu de [AB] et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. Soit G le

NER

BCD un tétraèdre. On note I et J les respectifs des faces ABD et BDC. trer que les droites (IJ) et (AC) sont les.

BCD un tétraèdre. On désigne par G le ntre des points pondérés (B,3),(C,1) et (D,–3). À tout point M d e, on associe le vecteur $\vec{u}$ tels que : $\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$. erminer l'ensembles des points M tels vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AG}$ erminer les coordonnées de G dans le (A, B, C, D).

ace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. S nts A $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ ntrer que les points A, B, C et D ne son planaires. erminer les coordonnées du point G, entre des points pondérés (A,–1) ; (B,2) et (D ,–2) .

ABC un triangle du plan. À tout nombre on associe le barycentre G_α lorsqu'il xiste des points pondérés (A,2), (B,α –1) et (C,1). culer les coordonnées de G_α dans le (A,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$). erminer l'ensemble des points G_α

ABC un triangle équilatéral ; I milieu de et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. Soit G le

int d'intersection de (CI) et (BJ).
éterminer trois réels α , β et γ tels que G it barycentre des points pondérés (A,α); B,β) et (C ,γ).

BC est un triangle. D et E sont des points s que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
s droites (BD) et (EC) se coupent en F.
Déterminer les réels α , β et γ tels e F soit le barycentre des points pondérés A,α; (B,β) et (C ,γ).
Montrer que si ABC est un triangle uilatéral alors (ED) ⊥ (AC) et (AF) ⊥ (AC)

BCD est un tétraèdre. E, F , G , H, J, K sont s milieux respectifs des segments [AB], D], [AC], [BD], [AD],[BC].
Démontrer que les droites (EF) et (GH) se upent en I, isobarycentre des points A, B , C D.
Soit P le centre de gravité de la face ABC. ontrer que les points P, I et D sont alignés.
Montrer que I est le milieu de [JK].

BCD est un tétraèdre. I, J et K sont les nts de $\mathscr{E}$ tels que :
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KC}$.
Déterminer le point P de (AD) tels que les droites (KP) et (BJ) soient sécantes.

A, B, C et D sont quatre points de l'espace $\mathscr{E}$.
λ un réel ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] ; R et S sont définis par $\overrightarrow{AR} = \lambda\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BS} = \lambda\overrightarrow{BD}$. G est le milieu de [RS]. Montrer que les points I, J et G sont alignés.

15

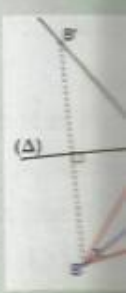
A, B, C et D sont des points de $\mathscr{E}$ et α λ sont des réels non nuls dont la somme nulle. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et le vecteur que $\vec{U} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} + \lambda\overrightarrow{MD}$
Démontrer que si $\vec{U} = \vec{0}$ alors M est barycentre des points pondérés (A,α) (C,δ) et (D,λ).

16

ABCD est un tétraèdre de centre de Soit P le barycentre des points pondé et (B, 1). On se propose de préciser d'intersection K de la droite (PG) a plan (BCD).
1. Soit O le centre de gravité du trian BCD, I et J les milieux respectifs des [AB] et [CD].
Montrer que G est le barycentre des pondérés (A,1) et (O, 3) et que G est milieu de [IJ].
2. Montrer que la droite (PG) est inc dans le plan (ABJ) et que le point K l'intersection des droites (PG) et (BJ
3. On considère le repère (B; $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$
a) Calculer les coordonnées des point
b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (PG).
4. Démontrer alors que $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BJ}$.

17

Soit ABC un triangle. (AD) et (BE) sont les bissectrices internes respectives des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$. On note G le point d'intersection de (AD) et (BE).



point d'intersection de (CI) et (BJ).
Déterminer trois réels α , β et γ tels que G soit barycentre des points pondérés (A,α); (B,β) et (C ,γ).

14

ABC est un triangle. D et E sont des points tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
Les droites (BD) et (EC) se coupent en F.
a) Déterminer les réels α , β et γ tels que F soit le barycentre des points pondérés (A,α); (B,β) et (C ,γ).
b) Montrer que si ABC est un triangle équilatéral alors (ED) $\perp$ (AC) et (AF) $\perp$ (AC)

15

ABCD est un tétraèdre. E, F , G , H, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [AC], [BD], [AD],[BC].
a) Démontrer que les droites (EF) et (GH) se coupent en I, isobarycentre des points A, B , C et D.
b) Soit P le centre de gravité de la face ABC. Montrer que les points P, I et D sont alignés.
c) Montrer que I est le milieu de [JK].

16

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les points de $\mathscr{E}$ tels que :
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KC}$.
Déterminer le point P de (AD) tels que les droites (KP) et (BJ) soient sécantes.

17

A, B, C et D sont quatre points de l'espace $\mathscr{E}$.
α un réel ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] ; R et S sont définis par $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BS} = \alpha\overrightarrow{BD}$. G est le milieu de [RS]. Montrer que les points I, J et G sont alignés.

15

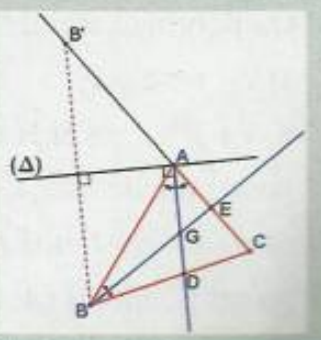
A, B, C et D sont des points de $\mathscr{E}$ et α, β, δ et λ sont des réels non nuls dont la somme est nulle. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et le vecteur $\vec{U}$ tel que $\vec{U} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} + \lambda\overrightarrow{MD}$
Démontrer que si $\vec{U} = \vec{0}$ alors M est le barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β) ; (C,δ) et (D,λ).

16

ABCD est un tétraèdre de centre de gravité G. Soit P le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 1). On se propose de préciser le point d'intersection K de la droite (PG) avec le plan (BCD).
1. Soit O le centre de gravité du triangle BCD, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Montrer que G est le barycentre des points pondérés (A,1) et (O, 3) et que G est le milieu de [IJ].
2. Montrer que la droite (PG) est incluse dans le plan (ABJ) et que le point K est l'intersection des droites (PG) et (BJ).
3. On considère le repère (B; $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$).
a) Calculer les coordonnées des points P et G.
b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (PG).
4. Démontrer alors que $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BJ}$.

17

Soit ABC un triangle. (AD) et (BE) sont les bissectrices internes respectives des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$. On note G le point d'intersection de (AD) et (BE).



montrer que $(AD) \perp (\Delta)$ et que le triangle
' est isocèle en A.

stifier que $\frac{DB}{DC} = \frac{AC}{AB}$, puis en déduire que
t le barycentre des points pondérés
C) et (C , AB).

utilisant la même démarche, démontrer
est le barycentre des points pondérés
B) et (A , BC).

it F le point d'intersection de (AB) avec
sectrice interne de l'angle $\widehat{C}$.

ontrer que G appartient à la droite (CF).

déduire que les bissectrices internes
triangle ABC sont concourantes et leur
de concours est le barycentre des points
et C affectés des coefficients que l'on
sera.

et C sont trois points non alignés de
ace $\mathscr{E}$. Soit H un point de $\mathscr{E}$ et x, y et z
réels.

rminer les points M de $\mathscr{E}$ tels que
$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$) soit un repère de $\mathscr{E}$ dans
el x, y et z sont les coordonnées
ectives de H.

ourra examiner les cas suivants :
$+y+z \neq 1$.
$+y+z=1$ et H est barycentre des
ts pondérés (A,x) , (B, y) et (C, z).
$+y+z=1$ et H n'est pas barycentre des
ts pondérés (A,x) , (B, y) et (C, z).

pour les exercices du n° 19 au n° 24

19

Soit A(–2, 3, 1) et B(1, 7, –2).
Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) dont un diamètre est [AB].

20

Soit A(0,4,–1) , B(–2 ,4 ,–5) ; C(1 ,1 ,–5) et D(1 ,0 ,–4) des points de $\mathscr{E}$.
Écrire une équation cartésienne de la sphère (Σ) passant par les points A, B, C et D.

21

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

a) $x^2+y^2+z^2-x-3y-4z+\frac{13}{2}=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-2x+y-6z+\frac{21}{2}=0$;

c) $2(x^2+y^2+z^2)+6x-2y+8z+1=0$.

22

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$.
Quel est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que :
a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

23

Soit la sphère (S') d'équation :
$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ et (D) la droite passant par le point A(1; 1;1) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,-2,1)$.
Déterminer l'intersection de (S') et (D).

24

Montrer que la droite (Δ) passant par le point A(3 ;–3 ; 1) et dirigée par $\vec{u}$(–2;1 ; 2) est tangente à la sphère d'équation
$x^2+y^2+z^2-x+2y-4z+3=0$

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 4$. L'unité est le cm

1. Construire le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, – et 2.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

a) $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32$

b) $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

Soit ABC un triangle isocèle en A et G son centre de gravité. Soit G' le symétrique de G par rapport à la droite (BC).

1. Déterminer les nombres réels α et β tels que G' soit le barycentre des points pondérés (A , 1) ; (B , α) et (C, β).

2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que :

$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

Vérifier que B et C appartiennent à (Γ)

Dans le plan, on considère les points A, B et C tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4a$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2a$ où a est un nombre réel strictement positif.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, on note $G_\alpha = bar\{(A,\alpha),(B,1),(C,1)\}$ et I le milieu du segment [BC].

1. Démontrer que l'ensemble (Γ_α) des points G_α lorsque α décrit $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ est la droite (AI) .

2. Construire G_{-1}.

3. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que $MB^2 + MC^2 = MA^2$

28

Dans le plan $\mathcal{P}$, ABC est un triangle équilatéral de côté a avec $a > 0$.

Démontrer que pour tous réels α et β le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} - (\alpha+\beta)\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.

1. Soit $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

On désigne (Γ) l'ensemble des points M tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ et (Σ) l'ensemble des points M tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 - (\alpha+\beta)MC^2 = k'$.

Pour chacun des cas ci-après déterminer et construire les ensembles (Γ et (Σ) :

a) $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $k = 6a^2$ et $k' = a^2$;

b) $\alpha = 2$; $\beta = -1$; $\gamma = 1$; $k = 4a^2$ et $k' = -a^2$;

c) $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $\gamma = 1$, $k = 16a^2$ et $k' = 2a^2$;

d) $\alpha = -2$; $\beta = -1$; $\gamma = 1$; $k = -2a^2$ et $k' = -4a^2$.

29

Soit A et B deux points du plan P tels que $AB = 2a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer et construire l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

i) $\frac{MA}{MB} = 1$; ii) $\frac{MA}{MB} = 3$; iii) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

30

Soit A et B deux points du plan P tels que $AB = 2a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer et construire l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

i) $\frac{MA}{MB} = 1$; ii) $\frac{MA}{MB} = \sqrt{3}$; iii) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

31

ABC est un triangle équilatéral de côté a avec $a > 0$.

1. Construire le point G barycentre des points pondérés (A, 2), (B , 1) et (C , 1).

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$;

b) $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}$.

32

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un carré ABCD tel que $AC = BD = a$ avec $a > 0$.

Soit t un réel.

1. Déterminer une condition sur t pour que les points pondérés (A,t) ; (B ,1−2t) ; (C ,t) et (D,3−t) admettent un barycentre.

Déterminer la position de ce barycentre.

2. On désigne par (Γ_t) l'ensemble des points M du plan tels que

$tMA^2 + (1-2t)MB^2 + tMC^2 + (3-4t)MD^2 = a^2(1-t)$

a) Vérifier que le centre du carré ABCD appartient à (Γ_t).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ_t).

33

Soit ABC un triangle non équilatéral du plan.

On donne $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB].

1. Soit le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{AC} + c^2\overrightarrow{AB}$

Montrer que $\vec{u} = (a^2-b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2-a^2)\overrightarrow{AB}$.

En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

2. Pour tout point M du plan on pose :

$f(M) = a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$

a) On désigne par O le centre du cercle

Montrer que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA} = \frac{1}{6}(b^2-c^2)$.

En déduire la valeur de $f(G)$.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = 0$.

34

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et O un point fixé.

Déterminer et construire l'ensemble des point

M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi$

35

A et B sont deux points distincts du plan.

Déterminer et construire l'ensemble des point N du plan tels que :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = -\frac{3\pi}{5}[2\pi]$;

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = \frac{7\pi}{8}[2\pi]$;

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$;

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = -\frac{3\pi}{4}[\pi]$.

36

Soit A et B deux points du plan P orienté. À tout point M distinct de B d'un demi-cercle de diamètre [AB] on associe le point P de la demi-droite [AM) n'appartenant pas au segment [AM] tel que PM=MB.

a) Déterminer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}})$.

b) Où se trouve le point P lorsque M est confondu à A.

c) Déterminer le lieu géométrique des points P lorsque M décrit le demi-cercle (

37

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un tri ABC. Soit G le barycentre des points pond

Démontrer que les droites (BQ) et (CR) sécantes par G.

P le milieu de [BC], Démontrer que les points A, P et G sont alignés.

Déterminer $\overrightarrow{PG}$ en fonction de $\overrightarrow{PA}$.

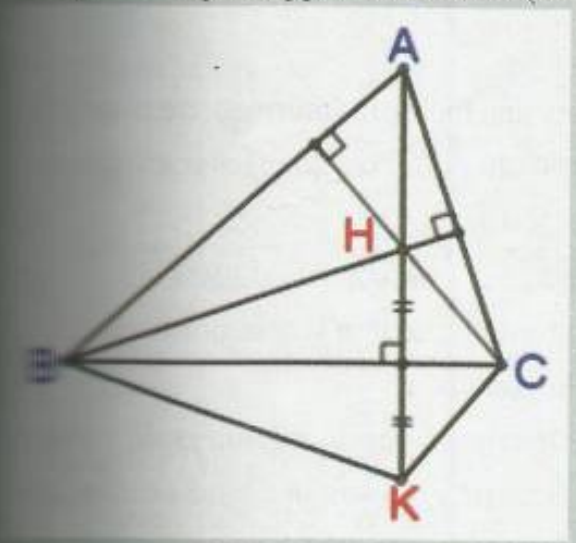
On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Déterminer alors l'ensemble (Γ') décrit par le point G.

B deux points distincts. (D) et (D') sont deux droites dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que $(\overrightarrow{NA},\vec{u}) = (\overrightarrow{NB},\vec{v})$.

ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).



Démontrer que $(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB})$.

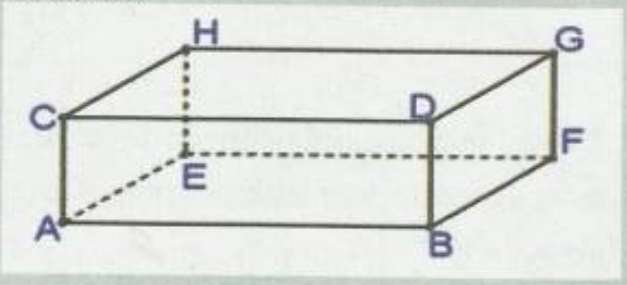
Démontrer que $(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ou $(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \hat{\pi}$.

En déduire que les points A, B , C et K sont cocycliques.

PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEHGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

a) $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$;b) $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})$;

c) $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{GH},\overrightarrow{AE})$.

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que AB =AS=a.

Soit I le centre du carré ABCD.

a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan(ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}$.

c) On prend $a = 1$. Soit K le point de tel que $\overrightarrow{AK} = \sqrt{2}\overrightarrow{IS}$. Démontrer que $(A, \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête, a strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} \wedge \overrightarrow{AI}$.

Démontrer que les droites (BQ) et (CR) ssent par G.

Soit P le milieu de [BC], Démontrer que s points A, P et G sont alignés.

Exprimer $\overrightarrow{PG}$ en fonction de $\overrightarrow{PA}$.

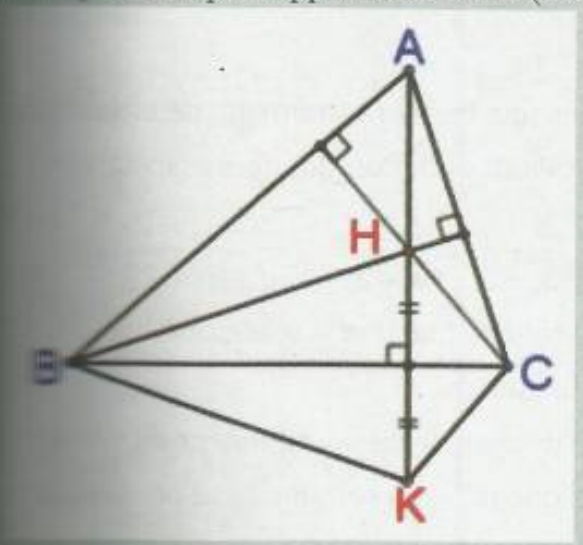
On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Déterminer alors l'ensemble (Γ') décrit par le point G.

Soit A et B deux points distincts. (D) et (D') deux droites dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que $(\overrightarrow{NA},\vec{u}) = (\overrightarrow{NB},\vec{v})$.

ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).



Montrer que $(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB})$.

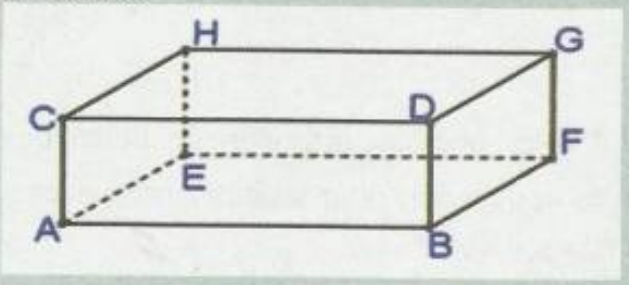
Montrer que $(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ou $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \hat{\pi}$.

En déduire que les points A, B , C et K sont cocycliques.

PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEHGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

a) $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$;b) $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})$;

c) $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{GH},\overrightarrow{AE})$.

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que AB =AS=a.

Soit I le centre du carré ABCD.

a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan(ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}$.

c) On prend $a = 1$. Soit K le point de tel que $\overrightarrow{AK} = \sqrt{2}\overrightarrow{IS}$. Démontrer que $(A, \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête, a strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} \wedge \overrightarrow{AI}$.

Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.

Soit P le milieu de [BC], Démontrer que les points A, P et G sont alignés.

Exprimer $\overrightarrow{PG}$ en fonction de $\overrightarrow{PA}$.

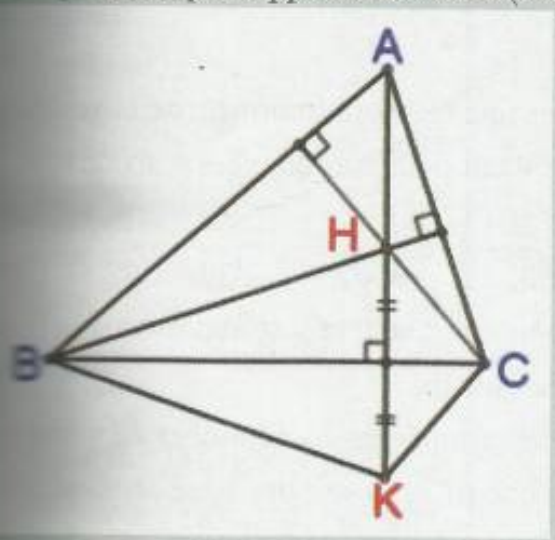
On suppose que B et C sont fixes et A décrit l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Déterminer alors l'ensemble (Γ') décrit par le point G.

A et B deux points distincts. (D) et (D') deux droites dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que $(\overrightarrow{NA},\vec{u}) = (\overrightarrow{NB},\vec{v})$.

ABC est un triangle, H son orthocentre et K le symétrique de H par rapport à la droite (BC).



Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}}) = (\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}})$.

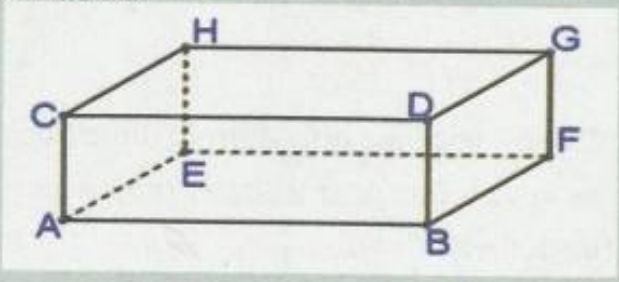
Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ ou $(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \hat{\pi}$.

En déduire que les points A, B , C et K sont cocycliques.

PRODUIT VECTORIEL

40

Sur la figure ci-dessous ABCDEHGH est un pavé droit.



Donner l'orientation de chacune des bases orthogonales suivantes :

a) $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$;b) $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})$;

c) $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{GH},\overrightarrow{AE})$.

41

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base ABCD de sens direct tel que AB =AS=a.

Soit I le centre du carré ABCD.

a) Justifier que la droite (SI) est orthogonale au plan(ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}$.

c) On prend $a = 1$. Soit K le point de tel que $\overrightarrow{AK} = \sqrt{2}\overrightarrow{IS}$. Démontrer que $(A, \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$.

42

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête, a strictement positif, et qui repose sur sa base ABC de sens direct. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

Soit O l'isobarycentre des points A, B et C.

a) Justifier que la droite (OD) est orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} \wedge \overrightarrow{AI}$.

) Soit le point H tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{a\sqrt{6}}{4}\overrightarrow{DO}$.

a base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH})$ est-elle orthogonale ?

réciser son orientation.

3

$\vec{i},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

n est-il de même pour les bases proposées :

$(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{u}+\vec{w})$;

$(\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}+\vec{u})$;

$\left(\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}),\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}-\vec{v}),-\vec{w}\right)$.

4

B,C et D sont quatre points de $\mathcal{E}$.

it le vecteur

$=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$

ontrer que :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$;

$\vec{u}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$;

$\vec{u}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

Donner une interprétation géométrique

la norme de $\vec{u}$.

5

it $\mathcal{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe

$\mathcal{W}$.

lculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans chacun des cas ci-après :

$\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ et $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$;

$\vec{u}=\vec{j}-2\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{k}$;

$\vec{i}=\vec{i}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\vec{k}$ et $\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{4}{9}\vec{j}+\frac{1}{6}\vec{k}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

Que peut-on en déduire sur l'associativité du produit vectoriel

47

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe de

Dans chacun des cas suivants, justifier sans calculer les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ que $\vec{w}\neq\vec{u}$

a) $\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}\\ \vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}\\ \vec{w}=\vec{i}-3\vec{k}\end{cases}$;

b) $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}\\ \vec{v}=\vec{i}+2\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{0}\end{cases}$;

c) $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{i}-4\vec{k}\\ \vec{v}=\vec{i}+\vec{k}\end{cases}$;

d) $\begin{cases}\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+2\\ \vec{u}=\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$

e) $\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\end{cases}$.

48

Dans une base orthonormée, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives

$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{-3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$.

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont normaux et orthogonaux.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tels que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base orthonormée indirecte.

49

$\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Soit $\vec{t}=(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$.

1. Montrer que :

es des vecteurs

sur l'associativité du

onormée directe de
nts, justifier sans
de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ que $\vec{w}\neq\vec{u}$

b) $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}\\ \vec{v}=\vec{i}+2\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{0}\end{cases}$;

d) $\begin{cases}\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+2\\ \vec{u}=\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{w}=\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$

rmée, deux vecteurs
nées respectives
$\left(\frac{4}{\sqrt{29}};\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$.
ont normaux et

données du vecteur $\vec{u}$
e base orthonormée

els que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne so
$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$.

$\vec{v}$;
$\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$;
et $\vec{w}=\vec{u}$.

sont deux vecteurs de $\mathcal{W}$.
ontrer que si $\vec{u}\perp\vec{v}$ alors le vecteur
$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$.
déduire si $\vec{u}\perp\vec{v}$ alors $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$.

et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.
ontrer que :
$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\times\|\vec{v}\|^2$.
exprimer cette relation à l'aide des
données.

repère orthonormé direct, on
sidère les points A(1 ; 2 ;0) , B(0 ; 0 ;1) et
5 ;5).
ontrer les points A, B et C définissent un
.
mine une équation cartésienne de ce plan.

mêmes questions qu'au 52 pour les points :
$\sqrt{2}$; 1 ;3) , B($2\sqrt{5}$; 0 ;2) et
$3\sqrt{3}$; −2).

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de
l'espace $\mathcal{E}$.
On considère la droite (D) dont une
représentation paramétrique est
$x=-2$
$y=-2t+1$, le plan (P) d'équation
$z=3t-1$
$x+2y+2z=-1$ et la sphère (S) d'équation
$x^2+y^2+z^2-6x+5y-2z+8=0$.
Déterminer les ensembles (D)∩(P) ,
(D)∩(S) et (P)∩(S).

55

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.
On considère les points
$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Calculer la distance :
   a) du point C à la droite (AB) ;
   b) du point D au plan (ABC) .
3. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

56

A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{E}$.
Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :
a) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{o}$;
b) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC})$;
c) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{BC}=\vec{o}$;
d) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=\vec{o}$.

57

Même question que dans l'exercice 56
a) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC})=\vec{0}$
b) $\overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC})=\vec{0}$; c) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$.

58

A, B, C et D sont quatre points coplanaires de $\mathcal{E}$ tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point O.
a) Montrer que
$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}\wedge(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$
b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$.

50

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

a) Montrer que si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$.

b) En déduire si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$.

51

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

a) Montrer que :

$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$.

b) Exprimer cette relation à l'aide des coordonnées.

52

Dans un repère orthonormé direct, on considère les points A(1 ; 2 ;0), B(0 ; 0 ;1) et C(1 ; 5 ;5).

a) Montrer les points A, B et C définissent un plan.

b) Écrire une équation cartésienne de ce plan.

53

Mêmes questions qu'au 52 pour les points :

A($2\sqrt{2}$; 1 ;3), B($2\sqrt{5}$; 0 ;2) et C(1 ; $3\sqrt{3}$; −2).

54

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

On considère la droite (D) dont une représentation paramétrique est

$\begin{cases} x = t-2 \\ y = -2t+1 \\ z = 3t-1 \end{cases}$, le plan (P) d'équation $x-2y+2z=-1$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-6x+5y-2z+8=0$.

Déterminer les ensembles (D) ∩ (P), (D) ∩ (S) et (P) ∩ (S).

55

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

On considère les points

$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Calculer la distance :
   a) du point C à la droite (AB) ;
   b) du point D au plan (ABC).
3. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

56

A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{E}$.

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

a) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{o}$;

b) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC})$;

c) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{o}$;

d) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) \wedge (2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}) = \vec{o}$.

57

Même question que dans l'exercice 56

a) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) \wedge (3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$; c) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$.

58

A, B, C et D sont quatre points coplanaires de $\mathcal{E}$ tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point O.

a) Montrer que

$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} \wedge (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

Chapitre 2

DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

LEÇON 1 ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

1.1 QUELQUES PROPRIETÉS DE $\mathbb{N}$

1.2 VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE, CARACTÈRE HÉRÉDITAIRE D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE

1.3 PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

1.4 DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{N}$

1.5 NUMÉRATION

LEÇON 2 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

2.1 DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$

2.2 CONGRUENCES

2.2.1 Présentation

2.2.2 Compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

2.2.3 Critères de divisibilité par 2 ;3 ;5 ;9 ;11.

LEÇON 1 ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

- Faire une preuve par récurrence ;
- Écrire un entier dans une base donnée.

1.1 QUELQUES PROPRIETÉS DE ℕ

Prendre un bon départ

Étant donné un entier naturel n, peut-on toujours trouver son suivant immédiat dans ℕ ? Peut-on toujours trouver un entier naturel qui le précède ? Sinon, quelle condition doit-on imposer à n pour que son prédécesseur existe ? ℕ admet-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Peut-on compter tous les éléments de ℕ ?

Retenir

ℕ admet un plus petit élément qui est 0.

ℕ n'admet pas de plus grand élément.

Tout élément n de ℕ admet un suivant immédiat. (ce nombre est $n+1$)

Tout élément n de ℕ* admet un prédécesseur dans ℕ. (ce prédécesseur est $n-1$)

Toute partie non vide de ℕ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide et majorée de ℕ admet un plus grand élément.

ℕ est un ensemble infini.

Remarque

0 n'a pas de prédécesseur dans ℕ.

S'exercer

Pour chacun des nombres suivants, donner son suivant immédiat et son prédécesseur : 235 ; 554 ; 2028 ; 554682 ; 89564896 ; 9654896544 .

1.b soient E = {n tel que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$} et F = {n tel que $n \in \mathbb{N}$ et $n < 10$}.

(i) Donner lorsqu'il existe le plus petit élément de E et celui de F.

(ii) Donner lorsqu'il existe le plus grand élément de E et celui de F.

1.2 VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE, CARACTÈRE HÉRÉDITAIRE D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE.

Prendre un bon départ

Soient les affirmations A_1: «$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$» ; A_2: «7^n-1 est divisible par 6»;

A_3: «$2 \geq n^n$ »; A_4: «$\frac{n^2}{n+1}$ est une fraction irréductible » où n est un entier naturel.

Activité 1

a) Montrer que ces affirmations sont vraies pour $n \in \{3;4;5;8\}$.

b) Justifier que l'affirmation : « $\frac{n}{2n+1}+(n+1)$ est un entier naturel » est fausse pour $n \in \{11;10;4\}$.

c) Soit n un entier naturel tel que l'affirmation A_1 soit vraie.

- Justifier que $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
- En déduire que $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$.
- L'affirmation A_1 reste-t-elle vraie si on y remplace n par $n+1$?

Activité 2

Retenir

• ***La valeur de vérité*** d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être donnée chaque fois qu'on connaît la valeur de l'entier naturel.

• ***Le successeur d'un entier naturel*** n est $n+1$. Si p est un entier naturel non nul, alors le prédecesseur de p est $p-1$.

• ***Une propriété est héréditaire*** si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier naturel quelconque, alors elle est aussi vraie pour son successeur.

Exemple

On considère l'assertion (P) : «$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n\geq 2$».

a) Montrons que l'assertion (P) est vraie pour $n=2$ et $n=6$.

Tout comme une fonction à variable réelle, l'assertion (P) est définie pour les entiers naturels au moins égaux à deux.On devra remplacer les pointillés par la somme des carrés des entiers en commençant par celui qui succède à 3 et on s'arrête à celui qui précède n.

- Pour $n=2$: $1^2+2^2=1+4=5$ et $\dfrac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}=5$ donc $1^2+2^2=\dfrac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}$.

- Pour $n=6$:

$1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=1+4+9+16+25+36=91$ et $\dfrac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6}=\dfrac{6\times 7\times 13}{6}=7\times 13=91$.

Donc $1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=\dfrac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6}$

b) Montrons que cette assertion est héréditaire.

Soit n un entier naturel supérieur à 2, tel que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Montrons que $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left(2(n+1)+1\right)}{6}$.

Le terme qui précède le dernier de la somme est n^2. On a donc

$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$

Or on a supposé que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

Retenir

• ***La valeur de vérité*** d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être donnée chaque fois qu'on connaît la valeur de l'entier naturel.

• ***Le successeur d'un entier naturel*** n est $n+1$. Si p est un entier naturel non nul, alors le prédecesseur de p est $p-1$.

• ***Une propriété est héréditaire*** si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier naturel quelconque, alors elle est aussi vraie pour son successeur.

Exemple

On considère l'assertion (P) : «$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n\geq 2$».

a) Montrons que l'assertion (P) est vraie pour $n=2$ et $n=6$.

Tout comme une fonction à variable réelle, l'assertion (P) est définie pour les entiers naturels au moins égaux à deux.On devra remplacer les pointillés par la somme des carrés des entiers en commençant par celui qui succède à 3 et on s'arrête à celui qui précède n.

• Pour $n=2$: $1^2+2^2=1+4=5$ et $\dfrac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}=5$ donc $1^2+2^2=\dfrac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}$.

• Pour $n=6$:

$1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=1+4+9+16+25+36=91$ et $\dfrac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6}=\dfrac{6\times 7\times 13}{6}=7\times 13=91$.

Donc $1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=\dfrac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6}$

b) Montrons que cette assertion est héréditaire.

Soit n un entier naturel supérieur à 2, tel que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Montrons que $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left(2(n+1)+1\right)}{6}$.

Le terme qui précède le dernier de la somme est n^2. On a donc

$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$

Or on a supposé que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+n+6n+6)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6)$$

Si on développe l'expression $(n+1)(2n+3)$, on trouve $2n^2+7n+6$ ou si on Cherche les ra du polynôme du second degré en n dans $\mathbb{R}$: $2n^2+7n+6$, on trouve -2 et $\frac{-3}{2}$; Ainsi,

$2n^2+7n+6 = 2(n+2)(n+\frac{3}{2}) = (n+2)(2n+3)$.

$1^2+2^2+3^2+...+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$.

L'égalité (P) est donc héréditaire.

S'exercer

1.c $1+3+5+7=16$ ($16=4^2$ et 4 est la moitié de 8, qui est le successeur de 7).

Conjecturer le résultat de la somme $1+3+5+7+...+25$.

Montrer que l'égalité $1+3+5+...+(2p+1)=(p+1)^2$ $p \in \mathbb{N}^*$ est héréditaire.

1.d On définit une suite u par $u_{n+1}=\sqrt{u_n+9}$ et $u_0=2$

- Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
- Soit l'affirmation : «$u_n \leq u_{n+1}$» pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette affirmation est vraie pour $n \in \{0;1;2;3\}$.
- Montrer que si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

1.3 PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit P une assertion définie pour les entiers naturels supérieurs ou égaux à l'entier naturel n_0 telle que :

(1) P soit vraie pour n_0 ;

(2) Si P est vraie pour un entier naturel quelconque $n \geq n_0$, alors P est vraie pour $n+1$.

a) Supposons par exemple que $n_0 = 0$. Expliquer pourquoi P est-elle vraie pour les entiers 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

b) Peut-on trouver un entier naturel pour lequel P n'est pas vraie ?

c) Supposons que Q est l'ensemble des entiers naturels $n \geq n_0$ pour lesquels la propriété P est fausse est non vide.

d) Justifier pourquoi le plus petit élément noté q de ℚ existe.

e) Montrer que $q > n_0$ et donc $q \neq n_0$.

f) En déduire que :

- $q \in Q$;
- $q-1 \notin Q$;
- $q-1 \geq n_0$;
- P est vraie pour $q-1$;
- P est vraie pour $(q-1)+1=q$.
- $q \notin Q$.

g) Déduire alors que Q est vide. Que peut-on en conclure ?

Activité 2

Soit l'égalité $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 5.

a) Donner la valeur de n_0 (plus petit entier pour lequel l'assertion est vraie).

b) Montrer que cette assertion vérifie a les propriétés (1) et (2).

c) Que peut-on donc conclure pour cette égalité ?

Retenir

Soit une l'assertion portant sur les entiers naturels consécutifs d'une partie non vide A de ℕ telle que :

(I) L'assertion est vraie pour le plus petit élément de A;
(ii) Si l'assertion est vraie pour un élément quelconque *n* de A, alors elle est aussi vraie pour l'entier (*n* +1).

Alors l'assertion est vraie pour tout entier de A.

Ce principe qui permet de montrer qu'une propriété est vraie sur une partie non vide constituée d' entiers naturels consécutifs est dit **de la démonstration par récurrence**.

Exemple

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$1+2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Considérons la proposition (P) définie par : P: " $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ "

pour tout $n \geq 2$ Montrons que (P) est vraie.

Pour $n=2$, $1+2=3$ *et* $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(2+1)}{2}=3$. (P) est donc vraie pour $n=2$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $1+2+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que

$1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$

$1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n+1)=(1+2+\ldots+n)+(n+1)$.

Or $1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

Ainsi, $(1+2+\ldots+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$=\frac{(n+1)+\left[(n+1)+1\right]}{2}$

On peut conclure d'après le principe de la démonstration par récurrence,

que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $1+2+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 5$, on a :

$1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n-1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Désignons par (Q) la proposition :

« Pour tout entier naturel $n\geq 5$, $1\times 2+2\times 3+\ldots+(n-1)n=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$»

• Montrons que cette proposition est vraie pour $n=5$.

Les termes du premier membre de cette égalité est le produit d'un entier par son suivant et le dernier terme est $5\times(5-1)=20$.

D'une part, $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5=2+6+12+20=40$;

D'autre part, $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}=\frac{5(5-1)(5+1)}{3}=\frac{5\times 4\times 6}{3}=\frac{120}{3}=40$

donc $1\times 2+2\times 3+\ldots+4\times 5=\frac{5(5-1)(5+1)}{3}$.

L'égalité (Q) est vraie pour $n=5$.

• Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 5 tel que

$1\times 2+2\times 3+\ldots+(k-1)k=\frac{k(k-1)(k+1)}{3}$.

Montrons que $1\times 2+2\times 3+\ldots\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

$1\times 2+2\times 3+\ldots n(n+1)=(1\times 2+2\times 3+\ldots+(k-1)k)+k(k+1)$

Or $1\times 2+2\times 3+\ldots+(k-1)k=\frac{k(k-1)(k+1)}{3}$;

d'où $1\times 2+2\times 3+\ldots+(k-1)k+k(k+1)=\frac{k(k-1)(k+1)}{}$

$$= \frac{k(k+1)[(k-1)+3]}{3}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)-1\right]\left[(k+1)+1\right]}{3}$$

Donc (Q) reste vraie si on remplace n par $n+1$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ on a $1\times2+2\times3+...+n(n-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,
$1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$.
Posons $S_n = 1+3+5+...+(2n+1)$.
Notons $p(n)$ la proposition $S_n = (n+1)^2$.

Première étape : $(1+1)^2 = 4$ et $1+(2\times1+1) = 1+3 = 4$ donc $S_1 = (1+1)^2$.

Deuxième étape : Supposons que pour un entier naturel quelconque n non nul
$S_n = (n+1)^2$ et montrons que $S_{n+1} = \left[(n+1)+1\right]^2$.
$S_{n+1} = 1+3+5+...+(2(n+1)+1)$.
$S_{n+1} = 1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)$.
$= [1+3+5+...+(2n+1)]+(2n+3)$
$= S_n + (2n+3)$
$= (n+1)^2 + (2n+3)$
$= n^2+2n+1+2n+3$
$= n^2+4n+4 = (n+2)^2 = [(n+1)+1]^2$.

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, si $p(n)$ est vraie alors $p(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2$
(d'après le principe de la démonstration par récurrence).

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Première étape :

$2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ et $16 \geq 16$. Donc $2^4 \geq 4^2$.

Deuxième étape :

Supposons que pour un entier naturel quelconque $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Montrons que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

$2^{n+1} = 2\times2^n$. Or $2^n \geq n^2$; donc $2\times2^n \geq 2n^2$.

Pour montrer que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$, il suffit de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$; soit $2n^2-(n+1)^2 \geq 0$;
$2n^2-(n+1)^2 = 2n^2-n^2-2n-1 = n^2-2n-1$

Considérons le polynôme $p : x \mapsto x^2-2x-1$.

Ses racines sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

$p(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}\ ;+\infty\right[$

Pour $x \geq 4$, $p(x) \geq 0$ (car $4 \geq 1+\sqrt{2}$).

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, d'où $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

3) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2U_n + 35} \end{cases}$.

Montrons que la suite (u_n) est croissante et majorée par 7.

a) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Première étape : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2u_0 + 35} = \sqrt{35}$. $u_0 \leq u_1$ car $0 \leq \sqrt{35}$.

Deuxième étape : Supposons pour tout entier naturel $n \geq 1$,$u_n \leq u_{n+1}$ et montrons que $u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(2x+35)}$.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+35}}$, $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$; donc $u_n \in [0;+\infty[$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$. Or u_n et u_{n+1} sont tous dans l'intervalle $[0;+\infty[$

f étant croissante sur $[0;+\infty[$, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. D'où $u_{n+1} \leq u_{n+2} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante.

b) Montrons que La suite (u_n) est majorée par 7.

Première étape: $u_0 \leq 7$ car $u_0 = 0$

Deuxième étape : Supposons que $u_n \leq 7$ pour tout entier naturel $n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \leq$

$u_n \leq 7 \Leftrightarrow 2u_n \leq 14 \Leftrightarrow 2u_n + 35 \leq 14+35 \Leftrightarrow 2u_n + 35 \leq 49$. On en déduit que

$\sqrt{2u_n + 35} \leq \sqrt{49} = 7$ d'où $U_{n+1} \leq 7$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \leq 7$.

La suite (u_n) est majorée par 7.

Exercice résolu 1 :

1) n est un entier naturel non nul. On pose $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \ldots + \dfrac{1}{4n^2-1}$.

a) Calculer S_1; S_2; S_3; S_4.

$S_1 = \dfrac{1}{4\times 1^2 - 1} = \dfrac{1}{3}$; $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4\times 2^2 - 1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$;

$S_4 = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{4\times4^2-1} = \frac{3}{7}+\frac{1}{63} = \frac{27+1}{63} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$.

On peut remarquer que :

$S_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\times1+1}$; $S_2 = \frac{2}{5} = \frac{2}{2\times2+1}$; $S_3 = \frac{3}{7} = \frac{3}{2\times3+1}$; $S_4 = \frac{4}{9} = \frac{4}{2\times4+1}$.

On peut conjecturer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Première étape : On a d'après ce qui précède $\frac{1}{2\times1+1} = \frac{1}{3}$ et $S_1 = \frac{1}{3}$ donc $S_1 = \frac{1}{2\times1+1}$, donc, la proposition est vraie pour $n = 1$.

Deuxième étape : Supposons que pour un entier naturel $n \geq 1$ quelconque, $S_n = \frac{n}{2n+1}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$; soit $S_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

$S_{n+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}$

$= S_n + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$

$= \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$

$= \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

D'où $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{(2n+1)}$.

Exercice résolu 2 :

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

- Pour $n = 1$,$1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$ et $1 \geq 2^{1-1}$ donc $1! \geq 1$ et la propriété est vraie au rang 1.
- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Supposons $k! \geq 2^{k-1}$ *on a* : $(k+1)! = (k+1)k!$ *et* $k+1 \geq 2$.

Ainsi $(k+1)k! \geq 2k! \geq 2\times2^{k-1}$; d'où $(k+1)! \geq 2^k$; soit $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}$.

La propriété est vrai au rang $k+1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n non nul $n! \geq 2^{n-1}$

d'après le principe de la démonstration par récurrence.

2) (V_n) est la suite définie par : $V_1 = 1$ et la relation de récurrence $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel $n > 1$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel , $V_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$.

• Pour $n=1$, $V_1 = 1$; $\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{2} = 1$, d'où $V_1 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^1$; donc la propriété est vraie pour $n=1$

• Supposons que pour $n \geq 1$, la propriété est vraie et montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$; Donc pour tout $n \geq 1, V_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$

D'après le principe de la démonstration par récurrence.

b) Soit (w_n) définie par $w_n = 1$ et $w_n = w_{n-1} + \frac{1}{n^n}$ pour $n > 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq w_n \leq V_n$.

• Démontrons que pour $n \geq 2$, $0 \leq w_n \leq V_n$

Au rang $n=2$ $w_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $V_2 = \frac{5}{4}$; $0 \leq \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$ et $0 \leq w_2 \leq V_2$,

donc la proposition vraie pour $n=2$

• Supposons que $0 \leq W_n \leq V_n$ pour $n \geq 1$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2^{n+1}}; \; W_{n+1} = W_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Puisque $0 \leq W_n \leq V_n$ ajoutons à chaque membre $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq W_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ or } \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$$

donc $0 < W_{n+1} \leq V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ or $n \geq 2 \Leftrightarrow n+1 \geq 3 > 2$

$$(n+1)^{n+1} > 2^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow V_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < V_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

par suite, $0 < W_{n+1} < V_n + \frac{1}{2^{n+1}} = V_{n+1}$ d'où $0 < W_{n+1} < V_{n+1}$.

Ainsi la proposition est vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion: $0 < W_n < V_n$ pour tout $(n \in \mathbb{N})$ $n \geq 2$, d'après la démonstration par récurrence.

S'exercer

1.e Montrer par récurrence que :

a) $2+4+6+\ldots\ldots\ldots\ldots+2n = n(n+1)$, *pour* $n \geq 6$;

...Cette égalité reste-t-elle vraie pour $n \geq 1$?

...Evaluer la somme des carrés des 99 premiers nombres entiers naturels non nuls.

...Donner sans aucun calcul la somme des 100 premiers nombres entiers naturels.

...a) Montrer par récurrence que $2^n \geq n$, pour $n \geq 3$;

...b) Sans faire de calcul, comparer 2^{2035} et 2034.

...a) Montrer par récurrence que : $1^3+2^3+3^3+\cdots\ldots\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, *pour* $n \geq 4$

...b) En déduire que : $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=(1+2+3+\cdots\ldots\ldots+n)^2$.

...Evaluer la somme $C=1^3+2^3+\ldots+49^3$. Quelle est la somme des cubes des 50 premiers ...mbres entiers naturels ?

...Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

...a) Pour tout entier naturel $n \geq 4, 3^n > n^3$;

...b) Pour tout entier naturel $p \geq 1$, $1^2+2^2+3^2+\ldots+p^2=\dfrac{1}{6}p(p+1)(2p+1)$;

...Pour tout entier naturel $p \geq 1$, $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+p(p+1)=\dfrac{1}{3}p(p+1)(p+2)$.

...a est un réel strictement positif.

...Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.

...On définit une suite par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n-3$.

...Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=3-2^n$.

...Démontrer par récurrence que $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7, pour tout n $\in \mathbb{N}$.

...Démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}=(n-1)\,2^n+1$, pour tout n $\in \mathbb{N}$.

...Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k(n-k)=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

1.4 DIVISION EUCLIDIENNE DANS ℕ

Prendre un bon départ

Activité 1

a) Dresser la liste des multiples de 31 compris entre 50 et 250.

b) Dresser la liste des diviseurs positifs des nombres 15, 30 et 60.

c) a et b étant deux entiers naturels, dans chacun des cas écrire a sous la forme $a=bq+r$ ...q est un entier naturel et r un entier naturel tel que $0 \leq r < b$.

...$a=2372$ et $b=44$; b) $a=235$ et $b=34$.

Activité 2

Soient a un entier naturel et b un entier naturel non nul ; B l'ensemble des entiers naturels n ...els que $a < nb$.

a) Montrer que $0 \notin B$ et $a \in B$.

b) En déduire que B admet un plus petit élément non nul p.

c) Soit q le prédécesseur de p. Montrer que $q \notin B$.

d) Montrer que $0 \leq a - qb < b$.

e) En posant $r = a - qb$, déduire que $a = qb + r$ et $0 \leq r < b$.

Retenir

Soient a et b deux entiers naturels, b non nul.

Il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

q est le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste.

S'exercer

1.o Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de a par b. Préciser dans chaque cas le quotient et le reste de cette division.

- a =1925; b =524
- a =2014; b =192 .

1.5 NUMÉRATION

Prendre un bon départ

Activité 1

Dans le système décimal,

$2125 = 2000 + 100 + 20 + 5 = 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 10^0$;

En s'inspirant de l'écriture ci-dessus, écrire chacun des nombres suivants en fonction des puissances de 10 : 145654 ; 25487896 ; 3564895 ; 5428954765.

Activité 1

Dans le système de numération de base 2, on utilise uniquement les chiffres 0 et 1.

Exemple : $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$.

15 s'écrit en base deux $\overline{1111}$.

$19 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1$. $83 = 2^6 + 2^4 + 2 + 1$.

S'inspirer de l'exemple ci-dessus pour écrire chacun des nombres 19 et 83 dans le système de numération de base 2.

Retenir

Soit N un entier naturel

a_0, a_1,..., a_{n-1}, a_n éléments de l'ensemble {0;1}.

- Plus généralement, N s'écrit $\overline{a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}...\ a_0}$ en base α où α est un entier naturel supérieur ou égal à 2 si et seulement si

$N = a_n \times \alpha^n + a_{n-1} \times \alpha^{n-1} + a_{n-2} \times \alpha^{n-2} + ... + a_1 \times \alpha + a_0$ où a_0, a_1,..., a_{n-1}, a_n sont des éléments de l'ensemble {0;1;2...; α −1} et $a_n \neq 0$

Méthode

Le nombre qui s'écrit 97 dans le système décimal est égal à $1 + 2^5 + 2^6$ qui peut encore s'écrire $1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$.

97 s'écrit donc en base deux $\overline{1100001}$.

En effectuant les divisions successives, on peut écrire

$97 = 2 \times 48 + 1$; $48 = 2 \times 24 + 0$; $24 = 2 \times 12 + 0$; $12 = 2 \times 6 + 0$

$6 = 2 \times 3 + 0$; $3 = 2 \times 1 + 1$; $1 = 2 \times 0 + 1$.

On effectue les divisions successives jusqu'à obtenir un quotient nul.

On retrouve l'écriture de 97 dans le système binaire en écrivant de la gauche vers la droite les différents restes successifs en partant du dernier reste.

Plus généralement lorsqu'un nombre N est écrit dans le système décimal, pour l'écrire en base *a*, on effectue les divisions successives par *a* comme l'exemple ci-dessus jusqu'à obtenir un quotient nul. L'écriture du Nombre N en base *a* est obtenue en en écrivant de la gauche vers la droite les différents restes successifs en partant du dernier reste.

Exemple 1

1) Écrire le nombre 473 en base dix dans le système de numération de base 4.

En effectuant les divisions successives par 4, on a :

$473 = 4 \times 118 + 1$

$118 = 4 \times 29 + 2$

$29 = 4 \times 7 + 1$

$7 = 4 \times 1 + 3$

$1 = 4 \times 0 + 1$

473 s'écrit en base quatre $\overline{13121}$.

2) Soit N = $\overline{5243101201}$ en base 7. Écrire ce nombre dans le système décimal.

N est écrit avec 10 chiffres.

$N = 5 \times 7^9 + 2 \times 7^8 + 4 \times 7^7 + 3 \times 7^6 + 1 \times 7^5 + 0 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 1$

N = 136254791 dans le système décimal.

3) Le nombre $\overline{2131}$ est écrit en base quatre. Écrire ce nombre en base trois sans passer par le système décimal.

Première solution

Dressons les tables d'addition et de multiplication en base 4.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	12
3	0	3	12	21

Par division euclidienne: $\overline{2131}^4 = 3\times\overline{310}^4 + 1$

on a $\overline{310}^4 = 3\times\overline{101}^4 + 1$; $\overline{101}^4 = 3\times\overline{11}^4 + 2$; $\overline{11}^4 = 3\times 1 + 2$ et $1 = 3\times 0 + 1$

donc $\overline{2131}^4 = \overline{12211}^3$

Deuxième solution.

$4 = 3+1$; $5 = 3+2$; $6 = 2\times 3$

$$\overline{2131}^4 = 2\times 4^3 + 1\times 4^2 + 3\times 4 + 1 = 2(3+1)^3 + 1(3+1)^2 + 3(3+1) + 1$$
$$= 2(3^3 + 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1) + (3^2 + 2\times 3 + 1) + 3(3+1) + 1$$
$$= 2(2\times 3^3 + 3^2 + 1) + 3^2 + 2\times 3 + 1 + 3^2 + 3 + 1$$
$$= 4\times 3^3 + 4\times 3^2 + 3\times 3 + 4 = (3+1)3^3 + (3+1)3^2 + 3^2 + 3 + 1$$
$$= 3^4 + 2\times 3^3 + 2\times 3^2 + 4 = 1\times 3^4 + 2\times 3^3 + 2\times 3^2 + 1\times 3 + 1$$
$$= \overline{12211}^3$$

2131^4 s'écrit 12211 en base trois.

4)17315 est écrit dans le système décimal. Écrire ce nombre dans le système de base 12.
Les chiffres utilisés en base 12 sont les éléments de l'ensemble $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;\alpha;\beta\}$

$17315 = 12\times 1442 + 11$
$1442 = 12\times 120 + 2$
$120 = 12\times 10 + 0$
$10 = 12\times 0 + 10$.
Les différents restes successifs en partant du bas sont $10 = \alpha$; 0 ; 2 ; $11 = \beta$
d'où $\overline{17315}^{10} = (\overline{\alpha 20\beta})^{12}$.
Ecrire le nombre $\overline{1101010011}_2$ en base 8 (on remarquera que $8 = 2^3$).
$$\overline{1101010011}^2 = 1\times 2^9 + 1\times 2^8 + 1\times 2^6 + 1\times 2^4 + 1\times 2 + 1$$
$$= (2^3)^3 + 4\times(2^3)^2 + (2^3)^2 + 2\times 2^3 + 3$$
$$= 1\times 8^3 + 4\times 8^2 + 1\times 8^2 + 2\times 8 + 3$$
$$= \overline{1\times 8^3 + 5\times 8^2 + 2\times 8 + 3}$$
$$= 1523^8 .$$

Exemple 2

1) Déterminer tous les entiers naturels compris entre 0 et 100 dont le reste dans la division euclidienne par 12 est 3.

On cherche $a \in \mathbb{N}$, $0 \le a \le 100$ tel que $a = 12q + 3$ *car* $0 \le 3 \le 12$

$0 \le a \le 100 \Leftrightarrow 0 \le 12q + 3 \le 100 \Leftrightarrow -3 \le 12q \le 97 \Leftrightarrow 0 \le q \le 8$ $(q \in \mathbb{N})$

$q \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ d'ou $a \in \{3,15,27,39,51,63,75,87,99.\}$

2) Déterminer l'entier naturel x tel que le reste dans la division euclidienne de 6425 par x soit 100.

$6425 = qx + 100$ $(q \in \mathbb{N}$ *et* $0 \le x \le 100)$, donc $qx = 6425 - 100 = 5425$

ainsi x est un diviseur de 5425 compris entre 1 et 100 or $5425 = 5^2 \times 7 \times 31$,

d'où $x \in \{1,5,7,25,31,35\}$.

S'exercer

Déterminer le nombre entier naturel qui s'écrit $N = \overline{xyz}^{7} = \overline{zyx}^{11}$

Utiliser les tables d'addition et de multiplication en base 5 pour écrire directement en base 3 le nombre $N = \overline{24}^{5}$.

Déterminer le nombre entier nature l x tel que $\overline{53}^{x} + \overline{46}^{x} = \overline{132}^{x}$

Calculer directement $\overline{213}^{5} \times \overline{41}^{5}$.

Prouver que $\overline{121}^{x}$ est le carré d'un nombre a $(x > 2)$. Donner a en base x.

LEÇON 2 DIVISIBILITÉ DANS ℤ
(Série C uniquement)

- Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un autre.
- Utiliser les congruences pour montrer qu'un entier est divisible par un autre, ou pour déterminer le reste de la division euclidienne d'un entier par un autre.

2.1 DIVISION EUCLIDIENNE DANS ℤ

Prendre un bon départ

Activité 1

• Dresser la liste des multiples de 31 compris entre 50 et 250.

• Combien y a-t-il de multiples de 47 compris entre -750 et 750.

• Dresser la liste des diviseurs positifs des nombres 15, 30 et 60.

• a et b étant deux entiers relatifs, dans chacun des cas écrire a sous la forme $a = bq + r$ où q est un entier relatif et r un entier naturel tel que : $0 \leq r < |b|$.

a) $a = 2372$ *et* $b = 44$;

b) $a = 2372$ *et* $b = -44$;

c) $a = -2372$ *et* $b = 44$;

d) $a = -2372$ *et* $b = -44$.

Activité 2

Soient a et b deux entiers relatifs avec b non nul.

a) Montrer qu'il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers naturels $|a| = q \times |b| + r$ *où* $0 \leq r < |b|$.

b) Montrer que :

(i) si $a \geq 0$ *et* $b > 0$, *alors* $a = bq + r$;

(ii) si $a \leq 0$ *et* $b > 0$, *alors* $a = b(-q-1) + b - r$;

(iii) si $a \geq 0$ *et* $b < 0$, *alors* $a = b(-q) + r$;

(iv) si $a \leq 0$ *et* $b < 0$, *alors* $a = b(q+1) - b - r$.

Retenir

• Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;r) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tel que $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < |b|$. On dit que l'on a effectué la division euclidienne de a par b. q est le quotient et r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Remarque

- L'ensemble des multiples d'un entier relatif a est noté $a\mathbb{Z}$. $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des diviseurs d'un entier relatif non nul b est souvent noté D(b).
- Si $a = kb (k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*)$, on a aussi $-a = (-k)b$; donc si b divise a alors b divise $-a$, et réciproquement.
- Deux entiers relatifs a et $-a$ ont le même ensemble de diviseurs dans $\mathbb{Z}$.
- $a = a \times 1$, donc a divise a.
- Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si a divise b et b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$; soit $|a| = |b|$.

En effet a divise b si et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $b = ak$.

De même b divise a si et seulement si, il existe un entier relatif k' tel que $a = bk'$.

$ba = (ak)(bk')$; soit $ba = (ba)(kk')$; a et b n'étant pas nuls, ba ne l'est pas et par suite $kk' = 1$.

Donc $k = k' = 1$ 0u $k = k' = -1$ car k et k' sont des entiers relatifs.

Si $k = k' = 1$, alors $a = b$. Si $k = k' = -1$, alors $a = -b$.

D'où $a = b$ ou $a = -b$.

- Soient a, b et c trois entiers relatifs.
  - Si a divise b alors a divise cb.
  - Si a divise b, ca divise cb.
  - Si a divise b et a divise c, alors a divise $b + c$ et $b - c$.
  - Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

En effet :

- a divise b, donc il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.

Alors $cb = c(ka) = a(ck)$, donc a divise cb.

De même $cb = k(ca)$ et par conséquent ca divise cb.

- a divise b et divise c, donc il existe un entier relatif k

tel que $b = ka$ et il existe un entier relatif k' tel que $c = k'a$.

De plus $b + c = ka + k'a = a(k + k')$ *et* $b - c = ka - k'\ a = a(k - k')$.

$k + k'$ *et* $k - k'$ sont des entiers relatifs. Donc a divise $b + c$ et a divise $b - c$.

- a divise b et b divise c, il existe un entier relatif k tel que $b = ka$ et il existe un entier relatif k' tel que $c = k'b$. Alors $c = k'\ b = k'\ (ka) = a(kk')$.

Or kk' est un entier relatif comme produit de deux entiers relatifs. Donc a divise c.

Exemple

1) $-88 = 11 \times (-8)$, donc 11 divise -88 et -8 divise -88.

2) Pour tout entier naturel n, $n(n+1)$ est divisible par 2.

En effet si n est pair, alors 2 divise n et par conséquent $n(n+1)$.

Si n est impair, alors $n+1$ est pair et 2 divise $n+1$ et par conséquent $n(n+1)$.

3) Combien y a-t-il de multiples de 13 compris entre -500 et 500. Soit x un multiple de 13 il existe k élément de $\mathbb{Z}$ tel que $x=13k$ et $-500<13k<500$ donc k est compris entre -38 et 38. Entre -38 et 38 il y a 38+38+1=77 entiers relatifs.

4) Déterminer les couples (x,y) d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y=2 \end{cases}$.

$xy=1$ signifie que x et y divisent 1 et x et y sont de même signe et.

$x\in\{-1,1\}$ et $y\in\{-1,1\}$ donc $(x,y)\in\{(-1,-1);(-1,1).(1,-1);(1,1)\}$.

Les couples vérifiant l'égalité $x^2+y=2$ sont : $(-1,1)$ et $(1,1)$. Or $xy=1$ donc (1;1) est le seul couple solution de ce système.

5) Effectuons la division euclidienne de 3758 par 125 puis de -3758 par 125.

$3758=125\times30+8$ *et* $0\le8<125$; donc le quotient de la division euclidienne de 3758 par 125 est 30 et le reste est 8.

D'autre part $-3758=125\times(-30)-8=125\times(-31)+125-8$

D'où $-3758=125\times(-31)+117$ *et* $0\le117<125$.

Donc -31 est le quotient de la division euclidienne de -3758 par 125 et le reste est 117.

6) Effectuons la division euclidienne de 50764 par 327 puis -50764 par 327.

$50764 = 327\times155+79$

$-50764=327\times(-155)-79$

$-50764=327\times(-156)+327-79$

$-50764=327\times(-156)+248$.

$248<327$. Le quotient de la division euclidienne de -50764 par 327 est -156 et le reste est 248.

S'exercer

2.a Déterminer les couples (x,y) d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} (x+2)(y-1)=17 \\ 5x-y=1 \end{cases}$

2.b Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

2.c Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de a par b :

$a=6941$ *et* $b=358$;

$a=6941$ *et* $b=-358$;

$a=-6941$ *et* $b=358$;

$a=-6941$ *et* $b=-318$.

2.2 CONGRUENCES

2.2.1 Présentation

Prendre un bon départ

Soient le couple d'entiers relatifs $(a;b)$ et n un entier naturel non nul.
Montrer dans chacun des cas ci-dessous que $a-b$ est un multiple de n.

- $a=4$; $b=1$ et $n=3$;
- $a=2$; $b=-1$ et $n=3$;
- $a=-4$; $b=6$ et $n=10$;
- $a=-2$; $b=-24$ et $n=11$.

Retenir

Soit n un entier naturel non nul ; a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n, lorsque $a-b$ est un multiple de n. On note $a \equiv b[n]$ et on lit "a congru à b modulo n". Cette relation est appelée relation de congruence.

Remarque

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.

- $a \equiv a[n]$.
- Si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$.
- $a \equiv 0[n]$ équivaut à n divise a.
- Soit d un entier naturel, diviseur de n.

Si $a \equiv b[n]$ alors $a \equiv b[d]$.

En effet

- $a-a=0=n\times 0$, donc $a \equiv a[n]$.
- $a \equiv b[n]$ équivaut à il existe un entier relatif k tel que $a-b=nk$.

$b-a=n\times(-k)$ avec $(-k)$ entier relatif. Donc $b \equiv a[n]$.

- $a \equiv 0[n]$ équivaut à il existe $q \in \mathbb{Z} / a=qn$, donc n divise a.
- $a \equiv b[n]$ équivaut à il existe un entier relatif k tel que $a-b=nk$.

d étant un diviseur de n, il existe un entier relatif k' tel que $n=k'd$.

$a-b=nk = (k'd)n = d(k'n)$ et $k'n$ est un entier relatif comme produit de deux entiers relatifs ; $a-b$ est donc un multiple de d et par suite $a \equiv b[d]$.

- Soient a, b et c trois entiers relatifs.

Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$, alors
il existe un entier relatif k tel que $a-b=nk$.

il existe un entier relatif k' tel que $b-c=nk'$.

$(a-b)+(b-c)=nk-nk'=n(k-k')$; soit $a-c=n(k-k')$ avec $k-k'$ élement de $\mathbb{Z}$.

Donc $a-c$ est un multiple de n et par suite $a\equiv c[n]$.

S'exercer

2.d Montrer que $-8\equiv(-5)[3]$; $-8\equiv(+1)[3]$; $-8\equiv 4[3]$; $-8\equiv 7[3]$.

2.2.2 Compatibilité de la relation de congruence avec l'addition e la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient a,a',b,b' quatre entiers relatifs, n un entier naturel non nul tels que $\equiv b[n]$ et $a'\equiv b'[n]$. Montrer que :

i) $a+a'\equiv(b+b')[n]$;

ii) $a\times a'\equiv(b\times b')[n]$;

iii) $a^p\equiv b^p\ [n]$, pour tout entier naturel p.

Activité 2

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; $a_1,a_2,...,a_p,b_1,b_2,...,b_p$ sont $2p$ entiers relatifs els que $a_1\equiv b_1\ [n],a_2\equiv b_2\ [n],...,a_p\equiv b_p[n]$.

). Montrer que $a_1+a_2+...+a_p\equiv b_1+b_2+...+b_p[n]$.

i). Montrer que $a_1\times a_2\times...\times a_p\equiv b_1\times b_2\times...\times b_p[n]$.

Retenir

Soient a,a',b,b' quatre entiers relatifs, n un entier naturel non nul.

• Si $a\equiv b[n]$ et $a'\equiv b'\ [n]$, alors

$a+a'\equiv(b+b')[n]$;(on dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$)

$a\times a'=b\times b'[n]$; (on dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$)

Si $a_1 \equiv b_1\ [n], a_2 \equiv b_2\ [n], ..., a_p \equiv b_p\ [n]$, alors

$a_1 + a_2 + ... + a_p \equiv b_1 + b_2 + ... + b_p\ [n]$.

$a_1 \times a_2 \times ... \times a_p \equiv b_1 \times b_2 \times ... \times b_p\ [n]$.

Remarque

Si a et b sont deux entiers tel que b est non nul ; $(q;r)$ l'unique couple d'entiers tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, alors $a \equiv r[b]$ et $a \equiv b\ [n]$ équivaut à $a \equiv r[n]$ pour tout entier naturel non nul.

Exemple

1) Déterminons le reste dans la division euclidienne de 2^{32} par 5

$2 \equiv 2[5]$

$2^2 \equiv 4[5]$

$2^3 \equiv 2 \times 4[5]$, soit $2^3 \equiv 3[5]$ car le reste de la division euclidienne de 8 par 5 est 3.

Par suite $2^4 \equiv 3 \times 2[5]$, or le reste de la division euclidienne de 6 par 5 est 1 ;

d'où $2^4 \equiv 1[5]$.

$(2^4)^8 \equiv 1^8[5]$; donc $2^{32} \equiv 1[5]$ et $0 \leq 1 < 5$;

donc le reste dans la division euclidienne par 5 de 2^{32} est 1.

2) Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 5^n par 3.

$5^0 \equiv 1[3]$; $5^1 \equiv 2[3]$; $5^2 \equiv 1[3]$; pour tout entier naturel p, $5^{2p} \equiv 1[3]$.

$5^{2p+1} \equiv 5[3]$; par suite $5^{2p+1} \equiv 2[3]$ car $5^1 \equiv 2[3]$. Donc

Si n est pair, alors $5^n \equiv 1[3]$. Si n est impair, alors $5^n \equiv 2[3]$. Par suite

le reste de la division euclidienne de 5^n par 3 est 1, si n est pair et 2 si n est impair.

3) Démontrer que pour tout entier relatif n, $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0[9]$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \equiv k[9]$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3[9]$

Si $k = 0$ alors $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = -1 + 1 \equiv 0[9]$

Si $k = 1$ alors $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 0[9]$

Si $k = 2$ alors $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 1 + 8 + 27 \equiv 0[9]$

Si $k = 3$, alors $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 8 + 27 + 16 \equiv 99[9] \equiv 0[9]$

Si $k = 4$, alors $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 27 + 64 + 125 \equiv 0 + 1 + 8 \equiv 0[9]$

Si $k=5$ alors $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 64+125+216 \equiv 1+8+0 \equiv 0[9]$

Si $k=6$ alors $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 125+216+343 \equiv 8+0+1 \equiv 0[9]$

Si $k=7$ alors $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 216+343+512 \equiv 0+1+8 \equiv 0[9]$

Si $k=8$ alors $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 343+512+0 \equiv 1+8+0 \equiv 0[9]$.

Ainsi, pour tout n $\in \mathbb{Z}$, $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 0[9]$.

Exercice résolu 1

1) a)Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^4 par 13.

b) Déduire que pour tous entiers naturels k et r, on a $5^{4k+r} \equiv 5^r$ [13].

c) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 5^n par 13?

2) Soit A_n l'entier défini par : $A_n = 5^{3n}+5^{2n}+5^n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que A_n est divisible par 13 si, et seulement si, n n'est pas un multiple de 4.

Solution :

1) a) $5 \equiv 5[13]$; $5^2=25 \equiv -1[13]$; $(5^2)^2 \equiv (-1)^2$ [13] ; $5^4 \equiv 1[13]$.

Le reste de la division euclidienne de 5^4 par 13 est 1.

b) $5^{4k} \equiv 1[13]$ d'où $5^{4k+r} \equiv 5^r$ [13].

c) Tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme $n=4k+r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$.

Pour $n=4k$, $5^n \equiv 1[13]$. Le reste de la division euclidienne de 5^n par 13 est 1.

Pour $n=4k+1$, $5^{4k+1} \equiv 5[13]$. Le reste de la division euclidienne de 5^n par 13 est 5.

Pour $n=4k+2$, $5^{4k+2} \equiv 12[13]$. Le reste de la division euclidienne de 5^n par 13 est 12.

Pour $n=4k+3$, $5^{4k+3} \equiv -5[13]$ or $-5 \equiv 8[13]$; Le reste de la division euclidienne de 5^n par 13 est 8.

2) $A_n = 5^{3n}+5^{2n}+5^n+1$

1er cas : $n=4k$, $A_n = 5^{3\times 4k}+5^{2\times 4k}+5^{4k}+1 \equiv 1+1+1+1[13]$; $A_n \equiv 4[13]$.

2ème cas : $n=4k+1$, $A_n = 5^{3(4k+1)}+5^{2(4k+1)}+5^{4k+1}+1$

$A_n = 5^{4\times 3k+3}+5^{4\times 2k+2}+5^{4k+1}+1 = 5^3+5^2+5+1 \equiv -5-1+5+1[13]$

$A_n \equiv 0[13]$.

3ème cas : $n=4k+2$,

$A_n = 5^{3(4k+2)}+5^{2(4k+2)}+5^{4k+2}+1 = 5^{4(3k+1)+2}+5^{4(2k+1)}+5^{4k+2}+1 \equiv 5^2+1+5^2+1[13]$

$A_n \equiv -1+1-1+1[13]$ soit $A_n \equiv 0[13]$.

4ème cas : $n=4k+3$, $A_n = 5^{3(4k+3)}+5^{2(4k+3)}+5^{(4k+3)}+1$.

$A_n = 5^{(4(3k+2)+1)}+5^{4(2k+1)+2}+5^{4k+3}+1 \equiv 5-1-5+1[13]$

S'exercer

2e Pour tout entier naturel n, déterminer le reste dans la division euclidienne de 7^n par 6.

2f En utilisant les congruences, démontrer que $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

2g Démontrer que pour tout entier naturel n, n^7-n est un multiple de 7

2h Déterminer les entier relatifs n tels que $n^2+4n+18\equiv 0[7]$.

2.2.3 CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ PAR 2 ;3 ;5 ;9 ;11.

Prendre un bon départ

Soit $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}^{10}$ un entier écrit en numération décimale.

a)Ecrire N suivant les puissances de 10.

Montrer que $10^p\equiv 1[3]$ et $10^p\equiv 1[9]$, pour tout entier p.

En déduire que $N\equiv(a_n+a_{n-1}+...+a_0)[3]$ *et* $N\equiv(a_n+a_{n-1}+...+a_0)[9]$.

Montrer que $N\equiv a_0\ [2]$, $N\equiv a_0[5]$ et $N\equiv a_0\ [10]$.

Montrer que $10\equiv -1[11]$ et que $(10)^n\equiv(-1)^n\ [11]$.

Retenir

• Un entier naturel N est divisible par 3 ou divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres dans le système décimal est divisible par 3 ou divisible par 9.

• Un entier naturel N est divisible par 2 ou divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 ou divisible par 5.

• Un entier naturel N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

Remarque

- Pour démontrer que a est un multiple de n dans $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $a\equiv 0[n]$.
- Pour déterminer le reste dans la division euclidienne d'un entier naturel $P(n)$ par un entier b $(b>1)$ on peut distinguer les cas $n\equiv 0[b]$, $n\equiv 1[b]...n\equiv(b-1)[b]$.

Exemple

Enoncé 1 :

1. Montrer que $C=\overline{xy}^{10}+\overline{yx}^{10}$ est divisible par 11.

2. Soient x, y, z trois entiers naturels, non nuls. $B = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10}$ (ces nombres sont écrits en base 10).

Montrer que B est divisible par 111.

Solution :

1) $C = \overline{xy}^{10} + \overline{yx}^{10} = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$.

x et y étant des entiers naturels, $x + y$ est un entier naturel. C est donc divisible par 11.

2) $A = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10} = (100x + 10y + z) + (100y + 10z + x) + (100z + 10x + y)$

$111x + 111y + 111z = 111(x + y + z)$, or $x + y + z$ est un entier naturel. A est donc divisible par 111.

Enoncé 2 :

Soit A = $5x3y$ dans le système décimal. Déterminer les nombres A qui sont pairs et divisibles par 11.

A est pair si, et seulement si $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

A est divisible par 11 si, et seulement si $x + y - (5 + 3)$ est divisible par 11. Soit $x + y - 8$ est divisible par11, soit $x + y \equiv 8[11]$.

Or x et y appartiennent à $\{0;2;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Pour $y = 0$, $x \equiv 8[11]$; $x = 8$ et A = 5830.

Pour $y = 2$, $x \equiv 6[11]$; $x = 6$ et A = 5236.

Pour $y = 4$, $x \equiv 4[11]$; $x = 4$ et A = 5434.

Pour $y = 6$, $x = 2$ et A = 5632.

Pour $y = 8$, $x = 0$ et A= 5038.

Les nombres cherchés sont donc *5038 ; 5236 ; 5830 ; 5434 ; 5632.*

Exercice résolu 2

1) Déterminer le chiffre des unités du nombre $N = (3548)^9 \times (2537)^{37}$.

$3548 \equiv 8[10]$; $(3548)^9 \equiv 8^9$ [10] ;

$2537 \equiv 7[10]$ donc $(2537)^{37} \equiv 7^{37}[10]$;

$(3548)^9 \times (2537)^{37} \equiv 8^9 \times 7^{37}[10]$;

$7^1 \equiv 7[10]$; $7^2 \equiv 9[10]$, $7^3 \equiv 3[10]$; $7^4 \equiv 1[10]$;

$3^7 = 4 \times 9 + 1$, donc $7^{36} \equiv 1[10]$; d'où $7^{37} \equiv 7[10]$

$8^1 \equiv 8[10]$; $8^2 \equiv 4[10]$; $8^3 \equiv 2[10]$; $(8^3)^3 \equiv 8^9 \equiv 8[10]$

$8^9 \times 7^{37} \equiv 8 \times 7[10]$ et $8^9 \times 7^{37} \equiv 6[10]$, d'où $N \equiv 6[10]$.

avec $a>3$ et $b>3$ et $3a^2=3b+3$.

$3b=3a^2-3$; or la plus petite valeur possible de a est 4 ; par conséquent la plus petite valeur de $3b$ est $3\times4^2-3=3\times16-3=45$. La plus petite valeur de b donc 15.

Pour $b=15, a^2=16$ et $a=4$; $n=\overline{300}^4=3\times4^2=16\times3=48$.

Le plus petit entier naturel cherché est $n=48$.

3) Établir le caractère de divisibilité par 25 dans le système de numération décimale.

Soit x un entier naturel tel que $x=\overline{a_n a_{n-1}a_{n-2}...a_0}$ en base 10.

$x=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10^1+a_0\times10^0$; $10^0\equiv1[25]$; $10^1\equiv10[25]$; $10^2\equiv0[25]$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $10^n\equiv0[10]$; donc $x\equiv a_0+10a_1\ [25]$.

Un nombre qui s'écrit $\overline{a_n a_{n-1}a_{n-2}...a_0}$ en base 10 est divisible par 25 si le nombre $\overline{a_1a_0}$ est divisible par 25.

4) Soit $x_n=2^{n+1}\times5^n+1$. Combien de chiffres a x_n en base dix ? déduire que x_n est divisible par 3.

$x_n=2^n\times5^n+1=2\times10^n+1$; $x_n=2\underbrace{00...0}_{(n-1)\text{fois }0}1$ en base 10.

x_n a $n+1$ chiffres en base dix et la somme de ses chiffres est 3 donc x_n est divisible par 3.

5) Un entier naturel N s'écrit $\overline{1x1yxy}^{dix}$. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 9 et par 5.

N est divisible par 5 si et seulement si($y=0$ *ou* $y=5$).

N est divisible par 9 si et seulement si $1+x+1+y+x+y$ est divisible par 9 ;

soit $2x+2y+2\equiv0[9]$; $2(x+y)\equiv-2[9]$; soit $2(x+y)\equiv7[9]$.

N est divisible par 5 et par 9 si et seulement si $y=0$ ou $y=5$ et $2(x+y)\equiv7[9]$.

Pour $y=0$, on a $2x\equiv7[9]$, soit $x=8$ car $x\in\{0;1;2;...;9\}$.

Pour $y=5$, on a $2x+10\equiv7[9]$; soit $2x\equiv-3[9]$; soit $2x\equiv6[9]$.

D'où $x=3$. Les couples (x,y) cherchés sont (8,0) et (3,5).

Les nombres entiers qui sont divisibles par 5 et par 9 sont 181080 et 131535.

Exercice résolu 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10^{3n}-1$ est multiple de 37.

- Pour $n=0$, $10^{3n}-1=10^{3(0)}-1=1-1=0=0\times37$

donc la proposition est vraie pour $n=0$.

- Supposons que la proposition est vraie pour un entier naturel k quelconque et montrons qu'est est vraie pour $k+1$.

$10^{3(k+1)}-1=10^{3k+3}-1$ or par hypothèse de récurrence $10^{3k}\equiv1[37]$

donc $10^{3k}\times10^3\equiv10^3\ [37]$ or $1000=37\times27+1$

on a : $1000\equiv1[37]$ donc $10^{3k+3}\equiv1[37]$ donc $10^{3k+3}-1\equiv0[37]$ d'où la proposition est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de la démonstration par récurrence.

S'exercer

.i Établir le caractère de divisibilité par 99 dans le système de numération décimale.

.j Calculer x et y pour que le nombre qui s'écrit $\overline{2xyy}^{\text{base dix}}$ soit divisible par 5 et par 11.

.k Déterminer le nombre entier naturel n pour que le nombre $(275423)^n+(372121)^n$ soit ivisible par 3.

.l Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^3(x^2+(x+1)^2)=18360$.

Déterminer alors l'entier naturel b tel que $\overline{442003}^{b} = \overline{36723}^{\text{base dix}}$.

.m Un entier naturel s'écrit $\overline{xyz0}^{cinq}$ et $\overline{xyz}^{douze}$.

) Démontrer que $19x-13y=4z$;

) En déduire que $3(x+y)\equiv 0[4]$;

) Déterminer les nombres entiers naturels x, y et z.

.n Pour tout entier naturel n, déterminer le reste dans la division euclidienne de 11^n par 4.

.p En utilisant les propriétés de la congruence, démontrer que $3^{n+3}+16^{2n+1}$ est divisible par11.

.q Démontrer que pour tout entier naturel n, n^5-n est un multiple de 5.

.r Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^2+3n+25\equiv 0[7]$.

S'ENTRAÎNER

NUMÉRATION ET DIVISIBILITÉ

5

Soit A l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent $\overline{xyxyxy}$ en base 10, avec x non nul.

1) Donner le nombre d'éléments de A.

2) Montrer que tout élément de A est multiple de 10101.

6

Déterminer les entiers naturels non nuls n dont la division euclidienne par 125 donne un reste égal au cube du quotient.

7

1) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ en base sept. Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 6.

2) Un nombre s'écrit $\overline{x32y}$ en base cinq. Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 4.

3) Un nombre s'écrit $\overline{123456234}$ en base huit. Déterminer le reste de la division euclidienne de ce nombre par 7.

4) Déterminer le chiffre des unités de l'entier naturel $(3548)^9\times(2537)^{31}$

8

Pour tout entier naturel n, on considère l'entier naturel, $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 7.

2) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 7.

3) Soit les nombres suivants dont l'écriture est donnée en base deux : $A=\overline{1110}$; $B=\overline{10010100}$ et $C=\overline{1001001000}$.

Ces nombres sont-ils divisibles par 7 ?

9

n est un entier naturel quelconque.

1) Quel est le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 37 ?

NB : On pourra remarquer que $999 = 27\times37$.

2. En déduire le reste dans la division euclidienne de $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ par 37.

3. b est un entier naturel supérieur à 3. On donne $A=\overline{211}^b$; $B=\overline{312}^b$; $C=\overline{133032}^b$

a) Sachant que $C=A\times B$, démontrer que l'on a : $b^3-3b^2-2b-8=0$

b) En déduire que b divise 8 et en déduire b.

6

a) Trouver les entiers naturels dont le cube divise 18360.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante :

$b^3[b^2+(b+1)^2]=18360$

c) Déterminer l'entier naturel x tel que $C=\overline{36723}^{10}=\overline{442003}^x$

7

b est un entier naturel supérieur ou égal à b.

1. a) Établir que pour tout entier naturel n nom nul, on a : $\sum_{k=0}^{n-1}(b-1)b^k = b^n-1$

b) En déduire que si N est un entier naturel supérieur ou égal à 2 dont l'écriture en base b comporte n chiffres, alors $b^{n-1}\le N<b^n$

2. le nombre 8842 (en base 10) s'écrit : $\overline{21212}$ en base b.

a. Établir que $8840\equiv 0[b]$

b. Donner un encadrement de 8842 par des puissances de b et déterminer b.

8

1. Établir le critère de divisibilité par 99.

2. Donner le reste dans la division euclidienne de $(10)^{100}$ par 99.

3. Un nombre s'écrit $\overline{xxyy}^{10}$.

Calculer x et y pour que ce nombre soit divisible par 99.

9

1.Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste dans la division euclidienne de 4^n puis de 5^n par 7.

2.Pour quelles valeurs de n $100+102^n+103^n$ est divisible par 7 ?

3.Pour quelles valeurs de n $n\times 4^n+2n+1$ est divisible par 7 ?

4.Démontrer en utilisant les résultats sur les congruences que :

$\forall_n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2\times 4^{2n+1}$ est un multiple de 11.

10

Démontrer en utilisant les congruences, les propositions a, b, c et d.

a.$\forall n \in \mathbb{N}$,$17^{4n+1}+3\times 9^{2n+1}$ est un multiple de 11,

b.$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7,

c.$\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7,

d.$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17,

e.Retrouver ces résultats en utilisant un raisonnement par récurrence.

11

1.Dans le système de numération décimal, on considère les nombres suivants : A = abc ; $B= bca$ et C=cb$a$. On admet que A, B et C sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

a.Démontrer que $4(b-a)=3(c-b)$.

b.En déduire les valeurs possibles de $b-a$ et de $c-b$.

c.Déterminer tous les triplets (a,b,c) et écrire tous les triplets (A;B ; C).

12

1. Déterminer la liste des diviseurs positifs de 81.

13

a. Démontrer par récurrence que $a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+...+a^{n-1})$

b. Écrire $3^{16}-1$ en base 9.

14

Montrer que pour tout entier naturel n, 4^n+6^n-1 est divisible par 9.

15

1) Étudier les restes des divisions euclidien des puissances de 5, par 6.

2) Pour quelles valeurs de n (entier naturel), nombre

A = $(153791)^n + 2753n+1$ est divisible par 6

16

Déterminer l'écriture en base cinq de :

a) 126 ; b) 221 ; c) 1000.

a est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Déterminer l'écriture en base a des nombres

1) a^2+2 ; 2) $(a+1)^2$; 3) $(a-1)^2$.

17

Un nombre N s'écrit $\overline{xx}$ en base 11. (les chiffres en base 11 sont notés 0, 1, 2, …, 9,

Déterminer selon la valeur de x l'écriture du nombre N en base 10.

18

Calculer dans le système binaire $\overline{110}\times\overline{11}$, $(\overline{101})^2$; $\overline{1001}\times\overline{101}$.

19

Calculer, dans le système de numération binaire, la somme

S = $\overline{1101}+\overline{1011}$, et la différence $\overline{1101}-\overline{1011}$

20

Existe-t-il une base b de numération où le nombre 2600 s'écrit 40400 en base b?

...ifier que 999 est divisible par 27.
...duire que, pour tout entier naturel n,
$\equiv 1[27]$.
$= 10^{100}+100^{10}$. Quel est le reste dans la
...sion euclidienne de A par 27 ?
...ntrer que $3^5 \equiv 1[11]$.
...duire que $3^{5k+r} \equiv 3^r$ [11].
...un entier naturel. Quels sont les restes
...division de 3^n par 11 ?
...erminer les valeurs de n pour lesquels
...soit divisible par 11.

...entier naturel et P un nombre premier
...ur ou égal à 3. a et b sont les nombres
...par $a = 2^n$ et $b = a \times P$. S(a) est la
...des diviseurs de a et S(b) la somme
...diviseurs de b.
...erminer les ensembles D(a) et D(b) des
...rs de a et b.
...ontrer que
$-2^{n+1} = 1 + 2S(a)$ et calculer S(a).
...imer S(b)en fonction de S(a) et
...ler S(b).

...est un nombre premier.
...ntrer que pour tout entier k tel que
$\leq p-1$, C_p^k est divisible par p.
...Soit x, y deux entiers naturels non nuls,
...ntrer que $(x+y)^p \equiv x^p + y^p[p]$.
...ntrer par récurrence que pour tout entier
$x_1, \ldots x_n$ non nuls, on a
$+x_2+\ldots+x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p[p]$.

...sidère dans l'ensemble Q des nombres
...els l'équation
$x^2 - 48x - 2^{n-2} = 0$ où n est un nombre entier naturel et x un nombre rationnel inconnu.

1. Démontrer que (E_n) admet deux solutions rationnelles si, 2^n+48^2 est un carré parfait.

2. Soit k l'entier naturel tel que : $2^n + 48^2 = k^2$.

a. Démontrer l'existence de deux nombres entiers naturels p et q tels que :

b. $k-48 = 2^q$; $k+48 = 2^p$; $p+q = n$ et $96 = 2^p\ (2^{p-q}-1)$.

c. Décomposer 96 en produit des facteurs premiers et en déduire les valeurs de p, q et n.

3. Résoudre (E_n) pour la valeur de n ainsi trouvée.

26

On se propose de déterminer les couples $(n;m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3\times 2^m = 1(E)$.

On suppose $m \geq 5$

a.Montrer que si $(n;m)$ est solution de (E) alors $7^n \equiv 1[32]$.

b.En étudiant les restes dans la division par 32 des puissances de 7, montrer que si (n,m) est solution de (E), alors, n est divisible par 4.

c.En déduire que $7^n \equiv 1[5]$.

d.Résoudre (E) pour $m \geq 5$.

e.Déterminer tous les couples solutions de (E).

27

On considère dans $\mathbb{N}^3$ le système

$$(S): \begin{cases} p^2+q^2 = r^2 \\ q+p+r = 24. \\ r < p+q \end{cases}$$

1. Démontrer qu'un triplet $(p;q;r)$ est solution de (S) si et seulement si r < 12 et $(p;q)$ sont les solutions de l'équation :
$n^2 - (24-r)n + 24(12-r) = 0$, où n est l'inconnue.

2. Résoudre le système (S).
3. ABC est un triangle rectangle en A tel que les côtés AB,BC et AC soient des multiples de 12. On plante sur le périmètre triangulaire de ABC 24 arbustes de manière qu'à chaque sommet du triangle un arbre soit planté et que les arbres soient plantés et également espacés de 12m. Calculer AB,BC et AC.

28

P est un nombre premier supérieur ou égal a 7.
On veut démontrer que l'entier naturel
$n=(P^2+1)(P-1)(P+1)$ est divisible par 240
1. Montrer que $P\equiv -1[3]$ *ou* $P\equiv[3]$.
2. En remarquant que P est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que
(i). $P^2-1=4k(k+1)$;
(ii). En déduire que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes de la division euclidienne de P par 5, démontrer que 5 divise n.
4. En déduire que n divise 240
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $P_1, p_2..., P_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A=P_1^4+P_2^4+...+P_{15}^4$ soit un nombre premier ?

29

n est un entier naturel non nul
1. Donner la liste des diviseurs de 7^n.
2. Calculer la somme S_n des diviseurs de 7^n et montrer que $6S_n+1=7^{n+1}$
3. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 7^n par 10
4. Déterminer suivant les valeurs de n le chiffre des unités de S_n

30

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k)=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

3. Calculer :

$$\sum_{k=100}^{2013} k(n-k)$$

31

1) Déterminer les diviseurs positifs de 28.
2) On appelle diviseur strict d'un entier natu n tout diviseur positif de n différent de n.
a. Déterminer les diviseurs strictsde 28.
b. Montrer que 28 est égal à la somme de ses diviseurs stricts.
3) On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts.
Montrer que 6 est le plus petit nombre parfa

32

1. Montrer que $C=\overline{xy}^{10}+\overline{yx}^{10}$ est divisible par
2. Soient x, y, z trois entiers naturels, non nuls.
$B=\overline{xyz}^{10}+\overline{yzx}^{10}+\overline{zxy}^{10}$
(ces nombres sont écrits en base 10).
Montrer que B est divisible par 111.

33

Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$A=n^4-1$.
1) Montrer que $n-1$, $n+1$, n^2+1 sont des diviseurs de A.
2) Déterminer d'autres diviseurs de A que les précédents.

34

$k\in\mathbb{Z}$
1) Montrer que pour tout entier a et b, a/b équivaut à $a/b-ka$
2) Trouver $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n-5/n+7$.

Soient a et b deux entiers naturels.
Montrer que $N'=(a-b)ab(a+b)$ est un multiple de trois.

40

1) Déterminer les diviseurs de 25.
2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=25$.

41

Soient a et b deux entiers naturels.
Montrer que, si 3 divise a^3+b^3, alors 3 devise $(a+b)^3$.

42

1) Déterminer les diviseurs positifs de 98.
2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^3-b^3=98$.

43

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1) Développer par la formule du binôme de Newton $(n+1)^n$.
2) Soit $A_n=(n+1)^n-1$.
Montrer que n^2 divise A_n et déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par n^2.

44

1) Montrer que, quels que soient les entiers naturels a, b, n, $a-b$ divise a^n-b^n.
2) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3 divise 2^n-1.
3) Montrer alors que, pour tout entier naturel n, $A_n=\dfrac{2^{2^{n+1}}+2^{2n}+1}{3}$ est un entier naturel.

41

1) Vérifier que 7 divise les nombres 2^6-1 ; 3^6-1 ; 4^6-1; 5^6-1.
2) Soit n n entier naturel, et $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n$.
Montrer que $A_{n+6}-A_n$ est divisible par 7.
3) Soit n, un entier naturel, q et r son quotient et son reste dans la division euclidienne par 6.
4) Montrer que A_n et A_r ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
5) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7.
6) Soit $B_n=100^n+101^n+102^n+103^n$.
a. Montrer que $A_n\equiv B_n[7]$.
b. Déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7.

42

Soit a un entier naturel., non multiple de 3.
1) Montrer que $a^3\equiv -1[9]$ ou $a^3\equiv 1[9]$.
2) Soient a,b et c trois entiers relatifs.
Déduire de 1) que si $a^3+b^3+c^3\equiv 0[9]$, alors l'un des entiers a,b et c est divisible par 3.
3) Soit k un entier naturel. Justifier les congruences :
$3^{2k}+1\equiv 2[8]$ et $3^{2k+1}+1\equiv 4[8]$.
4) On considère l'équation (E) , à inconnues les n et m : $2^n-3^m=1$.
a) Montrer qu'il n'ya pas de solution telle que m soit pair.
b) Déduire de la question 3) que la seule solution de (E) est le couple (2,1).

Chapitre 3

LIMITES ET CONTINUITÉ

LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1 LIMITES D'UNE FONCTION.

1.3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

LEÇON 2 FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

- Consolider les notions sur les calculs des limites et sur la continuité d'une fonction ;
- Déterminer graphiquement ou à partir d'un tableau des variations l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence des solutions dans un intervalle des solutions de l'équation $f(x) = a$.

1.1 LIMITES D'UNE FONCTION.

Prendre un bon départ

Activité 1

Pour chacune des fonctions ci-dessous , déterminer son ensemble de définition et calculer les limites à ses bornes.

1) $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 8$;

2) $g(x) = \dfrac{2x-3}{-5x+9}$;

3) $h(x) = \dfrac{3x-5}{-x^2-x+6}$;

4) $l(x) = -2x+1-\dfrac{x^2-3}{2x+4}$.

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+3}{x+2}}$. On pose $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=\dfrac{4x+3}{x+2}$.

1) Vérifier que $f(x) = u \circ v(x)$.

2) Déterminer les réels a et b définis par : $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+3}{x+2}$ et $b = \lim\limits_{X\to a} \sqrt{X}$ puis en déduire la limite de f en $-\infty$.

3) Determiner de la même manière les limites de f aux autres bornes de son ensemble de définition.

Activité 3

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.

1) Montrer que $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Activité 4

Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=2x-\cos(x^2+2)$ et $g(x)=\dfrac{2+\sin(x)}{x^2+3}$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $2x-1\le f(x)\le 2x+1$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Montrer que $|g(x)|\le\dfrac{3}{x^2+3}$; calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2+3}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Retenir

Quelques limites de référence

Soit n un entier naturel.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty \text{ si } n \text{ est pair}\\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$.

Opérations sur les limites.

Soient f et g deux fonctions,
ℓ et ℓ' deux réels; a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

limite de f en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
limite de g en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de $f+g$ en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut à priori conclure.	

limite de f en a	ℓ	ℓ	$\ell(\ell\neq0)$	∞	∞	0
limite de g en a	$\ell'(\ell'\neq0)$	∞	0	ℓ'	∞	0
Limite de $\frac{f}{g}$ en a	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	On ne peut à priori conclure.	

limite de f en a	ℓ	$\ell(\ell\neq0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
limite de g en a	ℓ'	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
limite de $f.g$ en a	$\ell\ell'$	∞	$+\infty$		$-\infty$		On ne peut à priori conclure.

Le signe précédant "∞" lorsqu'il n'est pas précisé va dépendre du signe de f et de celui de g au voisinage de a.

Limite d'une fonction composée.

Soient u et v deux fonctions numériques a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} v(x) = b \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to b} u(x) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} u(v(x)) = c$.

Limite et comparaison.

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même voisinage I de a, a étant un réel ou $+\infty$, ou $-\infty$; ℓ est un reéel.

- Si pour tout $x \in I, f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(Théorème de minoration)

- Si pour tout $x \in I, f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

(Théorème de majoration)

- Si pour tout $x \in I$, $h(x) \le f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Cette propriété est encore connue sous le non de théorème des gendarmes.
- Si pour $x \in I$, $|f(x) - l| \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- En particulier si pour $x \in I$, $|f(x)| \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Exemple 1

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 - 3x^2 + 5\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2 - 2x + 7}{3x^2 + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x + 1 - \dfrac{3}{x+5}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \dfrac{2x-5}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} 2x - 5 = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} x - 2 = 0$ et $x - 2 < 0$ lorsque $x < 2$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\sqrt{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exemple 2

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$. On peut encore écrire $\dfrac{\sin(3x)}{2x} = \dfrac{3x}{2x} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x}$

$\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$, par composition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x} = \dfrac{3}{2}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. Pour tout réel x, $-1 \le \sin(x) \le 1$. Si $x > 0$, en divisant par x on obtient $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Exemple 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+3x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}3x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}3x-|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3x-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\text{ car }|x|=x\text{ quand }x\to+\infty$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}2x+|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\text{ car }|x|=-x\text{ quand }x\to-\infty$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x2}}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}.$$

Exercice résolu

soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{3-\sin x}$.

1) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3-\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sin x}{3-\sin x}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ puis en déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{2x+1}-1}$ et $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-1\right)$.

Solution

1) Pour tout réel x on a : $-1 \leq -\sin x \leq 1$ et donc $2 \leq 3-\sin x \leq 4$; par suite $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{1}{2}$.

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$

2)

- Lorsque x tend vers $+\infty$, $x > 1$ et donc $x-1 > 0$.

  L'inégalité $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{1}{2}$ implique donc $\frac{x-1}{4} \leq \frac{x-1}{3-\sin x} \leq \frac{x-1}{2}$.

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{4} = +\infty$, par comparaison on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{3-\sin x} = +\infty$.

- Pour tout réel x on a : $-1 \leq -\sin x \leq 1$ et donc $3x-1 \leq 3x-\sin x \leq 3x+1$.

  Lorsque x tend vers $-\infty$, $x < -\frac{1}{3}$ et donc $3x+1 < 0$.

  L'inégalité $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{1}{2}$ implique donc $\frac{-(3x+1)}{4} \leq \frac{-(3x-\sin x)}{3-\sin x} \leq \frac{-(3x-1)}{2}$

  D'où $\frac{(3x-1)}{2} \leq \frac{3x-\sin x}{3-\sin x} \leq \frac{3x+1}{4}$; comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{4}\right) = -\infty$, par comparaison on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-\sin x}{3-\sin x}\right) = -\infty$

3)

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1$

$$\lim_{x\to0} \frac{5x}{\sqrt{2x+1}-1} = \lim_{x\to0} \frac{5}{\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}} = \frac{5}{1} = 5.$$

- Posons $X = \frac{1}{x}$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$; $x\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-1\right) = \frac{1}{X}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{X}+2}{\frac{1}{X}}}-1\right) = \frac{1}{X}\left(\sqrt{2X+1}-1\right)$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-1\right) = \lim\limits_{X\to0} \frac{\sqrt{2X+1}-1}{X} = 1$.

Remarque

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, et f une fonction définie dans le voisinage de a.

- Si f admet au voisinage de a une limite égale à $+\infty$, alors f n'est pas majorée dans le voisinage de a.
- Si f admet au voisinage de a une limite égale à $-\infty$, alors f n'est pas minorée dans le voisinage de a.

S'exercer

1.a Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x)=\dfrac{x^2-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}$; $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{(2-x)(x-1)}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$; $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$; $f(x)=\dfrac{3x^2-x-1}{3x^2+2x+1}$; $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$.

1.b Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos(x)-1}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+3}-3x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x-3\sqrt{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to0}x\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{6}}$; $\lim\limits_{x\to0}x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+7}-2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-5\sqrt{x^2+3}$.

1.2 CONTINUITÉ

Prendre un bon départ

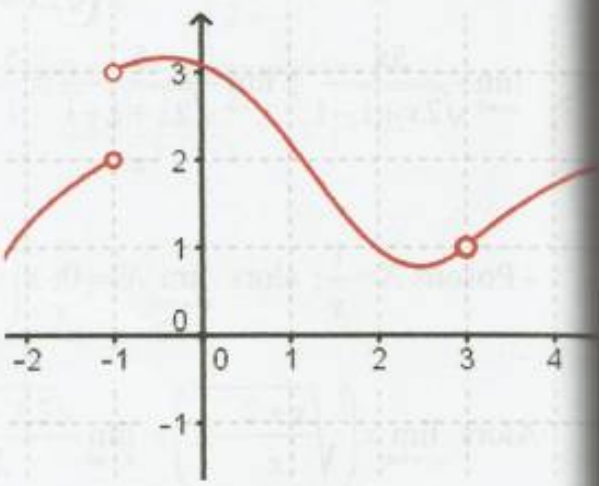
Activité 1

f est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1) Citez deux réels en lesquels f est discontinue.

2) Donner un intervalle sur lequel f est continue.

3) Quelle modification apportée à la fonction f en $x=3$ pour qu'elle soit continue sur l'intervalle [0;4]? une telle modification est-elle possible en $x=-1$?



Activité 2

1) Étudier la continuité de la fonction f suivante en x_0 et sur l'intervalle I.

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{si } x<1\\ \sqrt{2x-1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$. $x_0=1$ et $I=[-5;0]$.

2) On donne $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2x-3} & \text{si } x<0\\ x^2-1 & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ \sqrt{2x^2+x-1} & \text{si } x>2\end{cases}$.

a) Expliquer pourquoi g est continue sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty;0[$; $]0;2[$ et $]2;+\infty[$.

b) Étudier la continuité de g en 0 et en 2.

c) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Activité 3

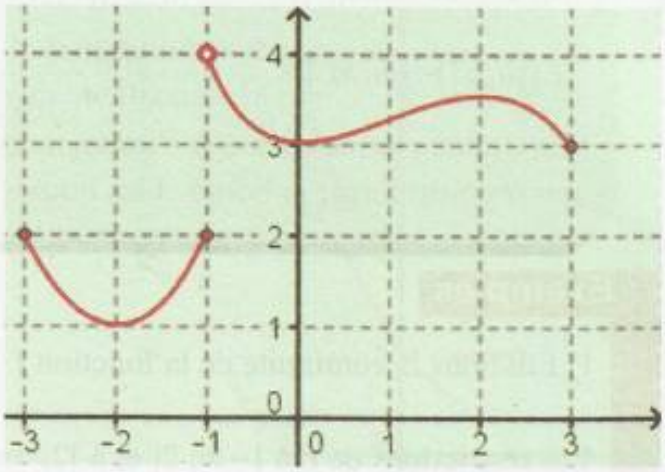
1) f est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée sur le graphique ci-contre.

Déterminer graphiquement les images par f des intervalles suivants :

$[-3;3]$; $]-2;0]$; $[-1;3]$; $[-3;-1]$.

2) Dresser le tableau des variations de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$; en déduire les images par f des intervalles suivants :

$]-\infty;-1]$; $[-1;1]$; $[1;+\infty[$; $[-2;1]$; $[0;2]$.



Retenir

Définition et propriété

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est continue à gauche en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue à droite en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel x_0 de I.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

- Les fonctions $f + g$, αf, fg sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

3) Si f est continue sur I, et g continue sur J, si de plus $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

4) Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition .

Prolongement par continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f définie sur $I\setminus\{x_0\}$ est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0. La fonction g définie par:

$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I\setminus\{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est appelée **un prolongement par continuité de f en x_0.**

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors, f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

Plus précisément, il existe deux réels m et M tels que :

$$f([a;b])=[m;M] \begin{cases} m = \text{minimum de } f \text{ sur } [a;b] \\ M = \text{maximum de } f \text{ sur } [a;b] \end{cases}$$

En d'autres termes, l'image d'un segment fermé et borné par une fonction continue est un segment fermé et borné et les bornes sont atteintes.

Exemples

1) Étudions la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -2x+3 \text{ si } x<2 \\ \frac{1}{2}x-2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$.

Les restrictions de f à $]-\infty;2[$ et à $]2;+\infty[$ sont respectivement définies par :

$f_1(x) = -2x+3$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}x-2$; ces restrictions sont des fonctions affines donc continues sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$. f est donc continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. Il reste donc à étudier la continuité de f en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -2x+3 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{2}x-2 = -1$, comme $f(2) = \frac{1}{2}(2)-2 = -1$ alors f est continue en 2. Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; montrons que g est prolongeable par continuité en 0.

Pour tout réel x non nul on a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$; d'où $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$. $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$; d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Un prolongement par continuité de g est donc possible en 0; ce prolongement par continuité est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice résolu

Énoncé

Étudions sur $\mathbb{R}$ la continuité de la fonction f définie par :

$f(x) = xE(x) - x + 2$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Solution

soit n un entier relatif. Si $x \in [n;n+1[$ alors $E(x) = n$.

ainsi $\begin{cases} f(x) = xn - x + 2 = (n-1)x + 2 \text{ si } x \in [n;n+1[\\ f(x) = x(n-1) - x + 2 = (n-2)x + 2 \text{ si } x \in [n-1;n[\end{cases}$

La restriction de f à tout intervalle de la forme $[n;n+1[$, où n est un entier, est une fonction affine donc continue. Étudions la continuité de f en $n \in \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} (n-2)x+2 = n^2-2n+2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(n-1)x+2 = n^2-n+2$.

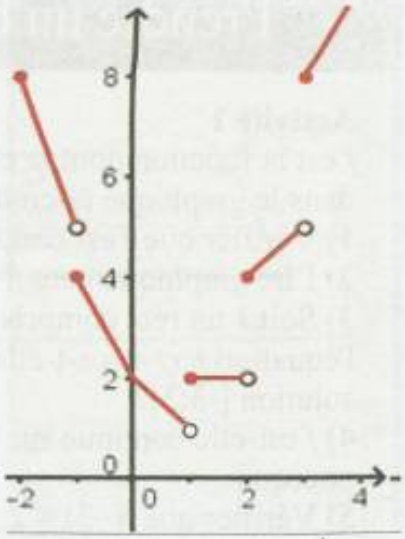
$f(n) = nE(n)-n+2 = n^2-n+2$. f est donc continue à droite en n.

Pour que f soit continue à gauche en n on doit avoir

$n^2-2n+2 = n^2-n+2$ c'est-à-dire $n=0$.

f est donc continue en tout $x_0 \notin \mathbb{Z}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$

ci-contre est un aperçu de la courbe de f.



S'exercer

1 Indiquer si les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous sont continues sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 2x-3+5x\sqrt{x^2+1}$; $g(x) = \dfrac{-3x+5}{3x^2+2x+4}$; $h(x) = \begin{cases} x^2-1 \text{ si } x<1 \\ x-1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$;

$k(x) = |x^2-3x|+2x-9$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2x+5} \text{ si } x\leq -1 \\ \dfrac{x-6}{x+1} \text{ si } x>-1 \end{cases}$

2 Déterminer parmi les fonctions définies ci-dessous celles qui sont prolongeables par continuité en x_0, puis, définir un prolongement par continuité.

$a(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 0$; $b(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$; $x_0 = -\dfrac{1}{2}$; $c(x) = \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$; $x_0 = 1$;

$d(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$; $x_0 = 2$.

3 Déterminer les valeurs des réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \begin{cases} ax-2 \text{ si } x<0 \\ \sqrt{x+3} \text{ si } 0\leq x\leq 1. \\ \dfrac{2x-b}{-x-1} \text{ si } x>1 \end{cases}$

La restriction de f à tout intervalle de la forme $[n;n+1[$, où n est un entier, est une fonction affine donc continue. Étudions la continuité de f en $n \in \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} (n-2)x+2 = n^2-2n+2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(n-1)x+2 = n^2-n+2$.

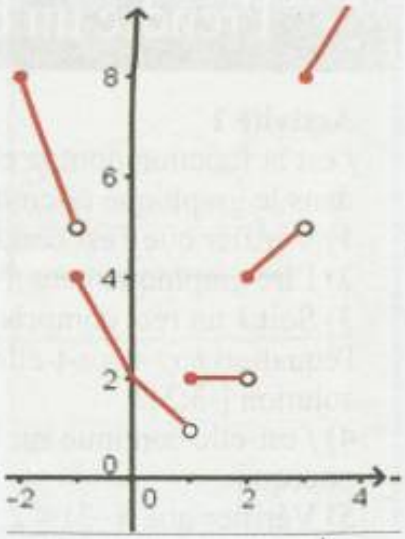
$f(n) = nE(n)-n+2 = n^2-n+2$. f est donc continue à droite en n.

Pour que f soit continue à gauche en n on doit avoir

$n^2-2n+2 = n^2-n+2$ c'est-à-dire $n=0$.

f est donc continue en tout $x_0 \notin \mathbb{Z}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$

ci-contre est un aperçu de la courbe de f.



S'exercer

1 Indiquer si les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous sont continues sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 2x-3+5x\sqrt{x^2+1}$; $g(x) = \dfrac{-3x+5}{3x^2+2x+4}$; $h(x) = \begin{cases} x^2-1 \text{ si } x<1 \\ x-1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$;

$k(x) = |x^2-3x|+2x-9$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2x+5} \text{ si } x\leq -1 \\ \dfrac{x-6}{x+1} \text{ si } x>-1 \end{cases}$

2 Déterminer parmi les fonctions définies ci-dessous celles qui sont prolongeables par continuité en x_0, puis, définir un prolongement par continuité.

$a(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 0$; $b(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$; $x_0 = -\dfrac{1}{2}$; $c(x) = \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$; $x_0 = 1$;

$d(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$; $x_0 = 2$.

3 Déterminer les valeurs des réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \begin{cases} ax-2 \text{ si } x<0 \\ \sqrt{x+3} \text{ si } 0\leq x\leq 1. \\ \dfrac{2x-b}{-x-1} \text{ si } x>1 \end{cases}$

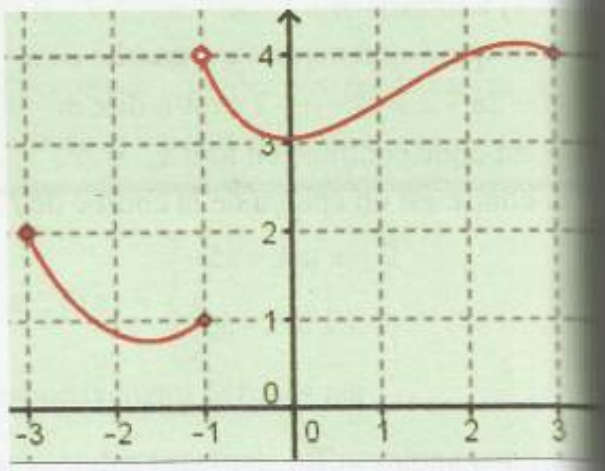
1.3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

Prendre un bon départ

Activité 1

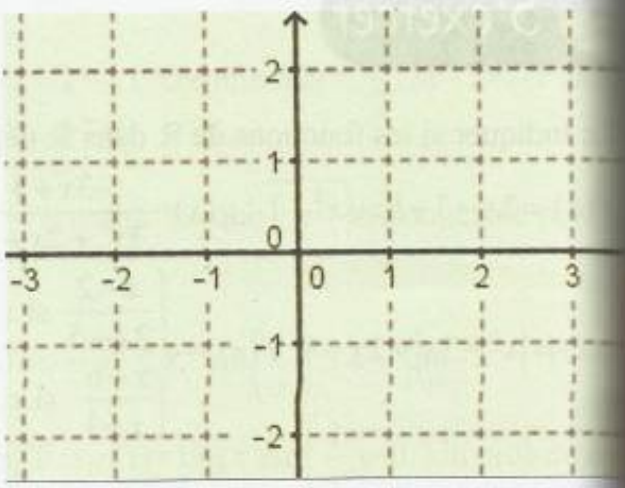
f est la fonction dont la courbe est dessinée dans le graphique ci-contre.

1) Vérifier que *f* est continue sur[–2:–1].
2) Lire graphiquement $f(-3)$ et $f(-1)$.
3) Soit *k* un réel compris entre $f(-3)$ et $f(-1)$; l'équation $f(x) = k$ a-t-elle toujours une solution [-3;3]?
4) *f* est-elle continue sur [-3;3] ? expliquer pourquoi.
5) Vérifier que $f(-3) < 2{,}5 < f(3)$.
6) L'équation $f(x) = 2{,}5$ a-t-elle une solution dans [-3;3]?



Activité 2

1) Sur le graphique ci-contre construire la courbe d'une fonction *f* continue sur [–2;3] et qui change de signe sur [–2;3].
2) Vérifier que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans [–2;3].
3) Construire la coubre d'une fonction g définie sur [–2;3] et telle que l'équation $g(x)=0$ n'ait pas de solution.
4) Une telle fonction peut-elle être continue sur [–2;3] ?



Activité 3

Soit la fonction *f* dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-5	↗	-1

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;-3[$.
2) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ a au-moins une solution sur $]-3;2]$.
3) Démontrer que l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ a au-moins une solution sur $]-\infty;-3[$.
4) Quelle est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$.

Exercice résolu 2

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$, pour tout n ∈ N*, par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle]0 ;1[.

On note u_n la solution de l'équation $f_n(x) = 0$. dans l'intervalle]0;1[.

Étude de la suite(u_n).

2) Montrer que la suite (u_n) est majorée.

3) Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = (u_n)^n (u_n - 1)$

4) Déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis montrer que (u_n) est croissante.

5) Démontrer que (u_n) est une suite convergente et converge vers une limite $l \in]0;1]$.

6) Vérifier que $l = 1$

Solution

1) f_n est une fonction polynôme de dégrés n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que $f_n(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle]0 ;1[. De plus, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.

Cette dérivée étant strictement positive sur cet intervalle pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement croissante sur $[0;1]$et la solution de l'équation est unique.

2) Par définition, u_n est dans l'intervalle]0;1[, donc (u_n) est bornée.

3) $f_n(u_n) = 0$ est équivalent à $(u_n)^n = -u_n + 1 = -(u_n - 1)$.

Donc $f_{n+1}(u_n) = (u_n)^{n+1} + u_n - 1 = (u_n)^{n+1} - (u_n)^n = (u_n)^n (u_n - 1)$.

4) De ce qui précède, le signe de $f_{n+1}(u_n)$ est celui de $(u_n)^n(u_n - 1)$.

Comme $u_n \in]0;1[$, $f_{n+1}(u_n) \leq 0$. Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction étant stritement croissante sur]0;1[, on obtient $u_{n+1} \leq u_n$, c'est à dire (u_n)est croissante.

5) La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite l.

Comme $u_n \in]0;1[$, on a $l \in]0;1]$.

Remarque

Par une fonction continue :

• L'image d'un intervalle borné n'est pas toujours un intervalle borné :

pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;1[$, on a $f(]0;1[) =]1;+\infty[$.

• L'image d'un ouvert n'est pas toujours un ouvert :

Pour $f : x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ on a $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$ou pour $f : x \mapsto x^2$ sur $]-1;1[$, on a $f(]-1;1[) = [0;1[$.

S'exercer

1.f Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10$.

1) Justifier qu'il existe un réel c appartenant à $[-3;0]$ tel que $f(c) = 5$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans [3;4].

3) Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = k$ $(k \geq -10)$coupe au-moins une fois la courbe (C) sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

LEÇON 2 FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

- Montrer qu'une fonction réalise une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer le nombre de solutions dans un intervalle de $\mathbb{R}$, de l'équation $f(x)=a$.
- Donner un encadrement des solutions de l'équation $f(x)=a$ par la méthode de dichotomie ou celle du balayage.
- Etudier la continuité et construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé les courbes respectives d'une application bijective et de sa bijection réciproque.
- Utiliser les puissances rationnelles d'un nombre réel dans diverses opérations.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. soient a et b deux réels distincts appartenant à I. on suppose $a < b$.

1) On suppose que f est strictement croissante sur I. Montrer que $f(a) \neq f(b)$ et en déduire que f est injective sur I.

2) Montrer de même que si f est strictement décroissante sur I, alors f est injective sur I.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; soit f(I) l'image de I par f. Montrer que f est une surjection de I vers f(I).

Activité 3

f est une fonction dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	-5	↗	-1

1) Montrer à l'aide des résultats des deux activités précédentes que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;-3[$ est une bijection de $]-\infty;-3[$ vers un intervalle à préciser.

2) En déduire que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;-3[$.

3) Montrer de même que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $]-3;2]$.

Retenir

Théorème de la bijection

Si une fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors :

1) f réalise une bijection de I sur J = f(I).

2) De plus, la bijection réciproque : $f^{-1}: f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone et varie dans le même sens que f.

3) Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. .

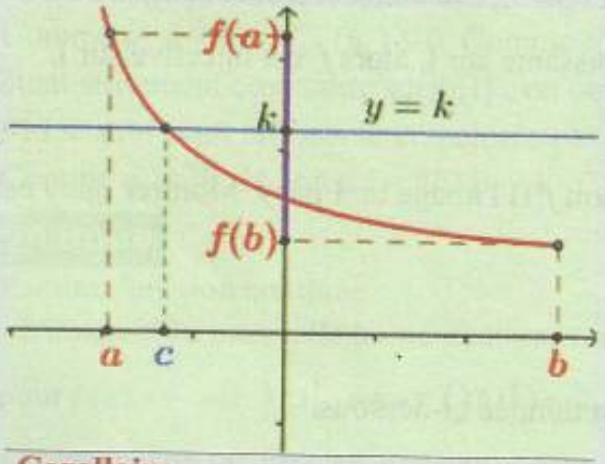
Conséquence

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction **continue et strictement monotone** sur I. soient $a, b \in \mathrm{I}$, $a < b$, alors :

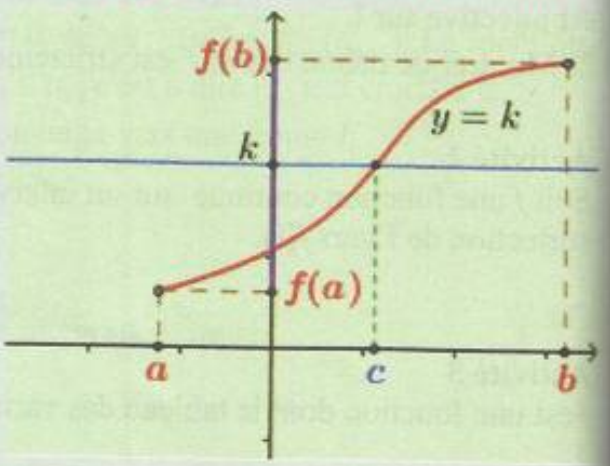
Pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ **et** f**(b)**, il existe un unique réel c appartenant à $[a\ ;b]$, tel que $f(c)=k$;

ainsi, pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ **et** f**(b)**, l'équation $f(x) = k$ a une **unique solution** dans l'intervalle $[a;b]$.

Cas où f est strictement décroissante



Cas où f est strictement croissante



Corollaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue et strictement monotone sur I. soient $a, b \in \mathrm{I}$, $a < b$, tels que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** dans l'intervalle $[a;b]$.

Méthode

Lorsque qu'on étudie certaines fonctions, il est parfois difficile, voire impossible de donner les solutions exactes de certaines équations associées. Mais on peut avoir besoin (par exemple pour une représentation graphique plus précise) d'avoir une valeur approchée des solutions. La méthode de dichotomie et la méthode de balayage permettent d'en donner une valeur approchée.

Exemple

Montrons que l'équation $(x-4)^3+3(x-4)+2=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ puis donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

Posons $f(x)=(x-4)^3+3(x-4)+2$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme et sa fonction dérivée est définie par $f'(x)=3(x-4)^2+3$. Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

D'après le théorème de bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Comme l'intervalle image contient 0, l'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. Déterminons une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

La méthode de balayage.

On commence un balayage des valeurs de x par pas de 1 pour un encadrement à l'aide de deux entiers consécutifs;

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	−74	−34	−12	−2	2

Comme $f(3)<0$ et $f(4)>0$ le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $3<x_0<4$. On fait un nouveau tableau qui commence par 3 par pas de 0,1 pour un encadrement à 10^{-1} près;

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	−2	−1,43	−0,91	−0,44	−0,02	0,34

Comme $f(3,4)<0$ et $f(3,5)>0$alors $3,4<x_0<3,5$. On fait un nouveau tableau qui commence par 3,4 par pas de 0,01 pour un encadrement à 10^{-2} près.

x	3,4	3,41	3,42
$f(x)$	−0,02	0,02	0,06

Ce dernier tableau permet de conclure que $3,40<x_0<3,41$.

3,40 et 3,41 sont donc des valeurs approchées de x_0 à 10^{-2} près.

La méthode par dichotomie.

Le balayage est une méthode efficace, mais laborieuse. On s'épargne de nombreux calculs intermédiaires en visant tout de suite le milieu de l'intervalle : c'est le principe de la dichotomie

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^n$.

Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

f est dérivable et $f'(x)=nx^{n-1}$; comme $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)\geq 0$.

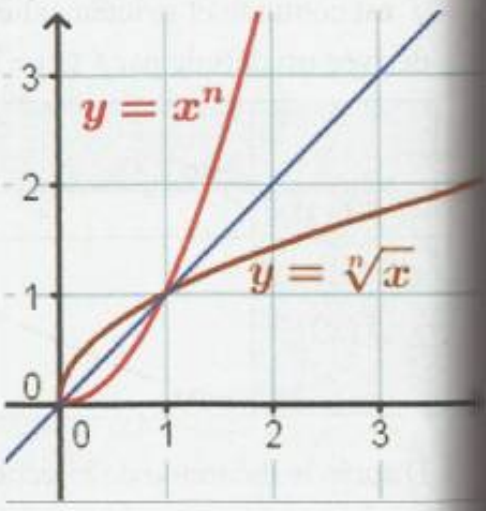
D'où le tableau de variation.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

Pour tout réel positif a l'équation $x^n = a$ a donc une unique solution dans $[0;+\infty[$.

Cette solution est notée $\sqrt[n]{a}$ (lire racine $n^{ième}$ de a) ou $a^{\frac{1}{n}}$.



Ainsi $x^n = a$ équivaut à $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} (a \geq 0)$

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

$x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

$x^4 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$.

Tout comme f la réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante.

La courbe de f^{-1} et celle de f sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

Remarque 1

La fonction $f: x \to x^n$ est stritement monotone sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = nx^{n-1}$

Si n est impair, n-1 est pair et $x^{n-1} \geq 0$.

f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

La fonction: $f: x \to x^n$ (pour n entier naturel impair) est une bijestion de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Remarque 2

Quelques propriétés de la fonction $\sqrt[n]{\ }$

- Pour tout réel positif ou nul x, on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$.
- Quels que soient les entiers naturels non nuls n et p et les réels positifs ou nuls a et b, on a :
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ équivaut à $a = b$ et $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ équivaut à $a > b$.
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$;
  - $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$;
  - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$;
  - $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
  - $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. $(b > 0)$

Exemple 1

1) Simplifions le réel $A = \dfrac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt{\sqrt{64}}}{\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$.

$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{3}}$; $\sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$;

$\sqrt{\sqrt[3]{256}} = \sqrt[6]{2^8} = 2^{\frac{8}{6}} = 2^{\frac{4}{3}}$;

On a donc $A = \dfrac{2^{\frac{10}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{10}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}$.

2) Etudions le comportement de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}$ au voisinage de $+\infty$.

Pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x} = \sqrt[3]{x^4\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} = x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}}\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{4}{3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^4} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1$. Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^4 = 2$ est $S = \left\{\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}\right\}$.

4) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^4 = -2$ est $S = \varnothing$.

5) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est $S = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$.

6) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^3 = -2$ est $\left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$.

7) L'ensemble S des solutions de l'inéquation $x^4 \geq 2$ est $S = \left]-\infty; -\sqrt[4]{2}\right] \cup \left[\sqrt[4]{2}; +\infty\right[$.

8) L'ensemble S des solutions de l'inéquation $x^3 \geq -2$ est $\left[-\sqrt[3]{2}; +\infty\right[$.

Exercice résolu

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1) Dresser le tableau des variations de f.

2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution telle que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

3) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Solution

1) f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 + 2x$. D'où le tableau des variations.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, d'après le tableau des variations $f(x) \leq -\frac{26}{27}$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $f(]0;+\infty[) =]-1;+\infty[$. Comme l'intervalle $]-1;+\infty[$ contient 0 l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution et cette solution appartient à $]0;+\infty[$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Soit α cette solution.

$f(0,65) = -0,02825$ et $f(0,66) = 0,010592$; comme $f(0,65) \cdot f(0,66) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $0,65 < \alpha < 0,66$.

3) Signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On obtient le signe de $f(x)$ en parcourant la troisième ligne du tableau de variation de f. (le principe suivant peut être appliqué une fonction continue qui ne s'annule pas dans un intervalle ne change pas de signe, dans cet intervalle et une fonction continue et strictement monotone change de signe au moment où elle s'annule dans un intervalle).

S'exercer

2.a On considère l'équation (E): $x^3 - 3x + 2 = 0$

1) Justifier que (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont l'une est connue et l'autre notée α.

2) Proposer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

2.b Montrer que l'équation $x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions réelles.

2.c Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$.

a)Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

b)Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on notera α.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

a) $f(x) = 1$;
b) $f(x) = 2$;
c) $f(x) = 0$.

2.e Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes:

a) $2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt{36}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5} \times \left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{(a^2)^2 \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{a^3}}$; c) $\dfrac{10^{\frac{3}{2}} \times 8^{-\frac{4}{3}}}{5 \times 4^{\frac{7}{3}}}$.

2.f Déterminer les limites éventuelles en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{12}{5}}}$; $g : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$.

LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION

- Donner en fonction des limites, l'allure des branches infinies de la courbe d'une fonction dans un voisinage donné.

Dans cette partie nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Prendre un bon départ

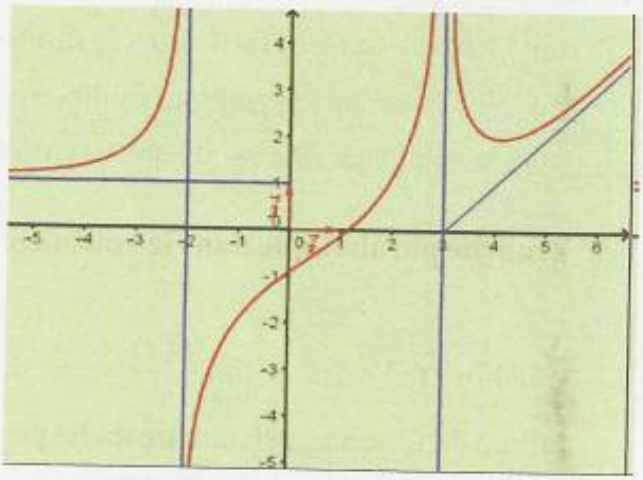
Activité 1

Soit f une fonction définie par $f(x) = x-2-\dfrac{4}{x+1}$.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition
2) Donner une interprétation graphique des limites de f aux voisinages de -1.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)$; interpretrer graphiquement les résultats obtenus.

Activité 2

1) f est une fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
2) Ecrire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.
3) Même question avec la fonction g dont le tableau des variations est donné ci-dessous.



x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	-5	↗	-1

Activité 3

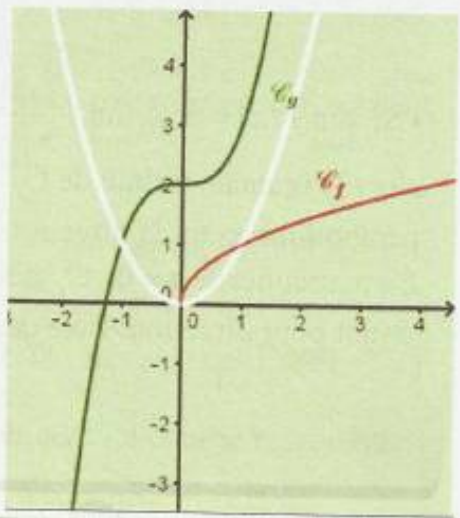
Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^3+2$. La courbe de la fonction f et celle de g sont représentées dans le graphique ci-contre.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Que constate-t-on ?

2) Donner les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.

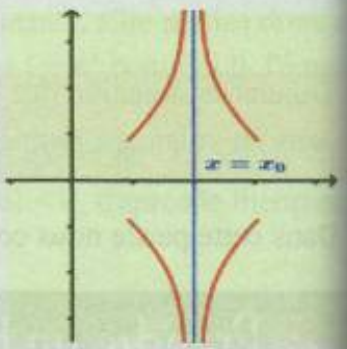


Retenir

Dans le voisinage d'un réel.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Soit C_f la représentation graphique de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$) alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à C_f.

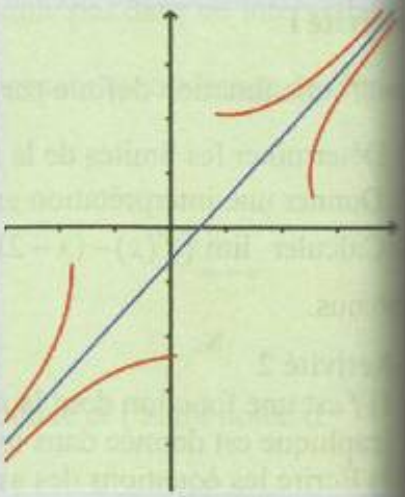


Asymptote dans le voisinage de l'infini

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Soit C_f la représentation graphique de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

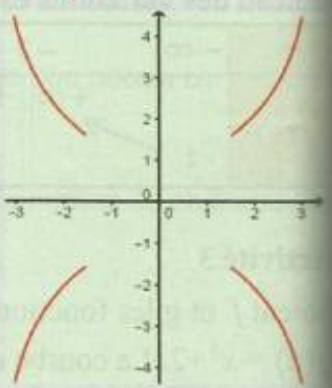
1) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$) alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à C_f dans le voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

2) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)-(ax+b)\big) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-(ax+b)\big) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote (oblique) à C_f dans le voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$).



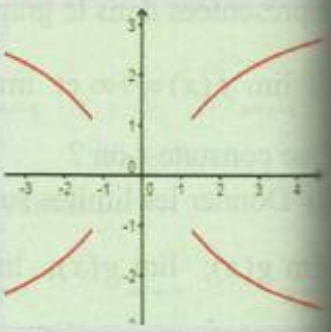
Branche parabolique dans le voisinage de l'infini : soit $x_0 \in \{-\infty;+\infty\}$

• Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la branche infinie de C_f en x_0 est une **branche parabolique** ayant pour direction l'axe des ordonnées.



• Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x)-ax\big) = \pm\infty$ alors la branche infinie de C_f en x_0 est une branche parabolique ayant la direction de la droite d'équation $y = ax$.

En particulier si $a = 0$, C_f admet une branche parabolique ayant pour direction, l'axe des abscisses.



Exemple

1) Étudions les branches infinies de la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{x-1}$.

L'ensemble de définition de f est : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x^2+3x+2}{x-1}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1}\left(-2x^2+3x+2\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$ et $x-1<0$ lorsque $x<1$.

de façon analogue, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{-2x^2+3x+2}{x-1}\right)=+\infty$.

Interprétation graphique : la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe de f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x=+\infty$ on calcule alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x(-x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$. On calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=1$.

Interprétation graphique : la droite d'éqaution $y=-2x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f dans le voisinage de $-\infty$.

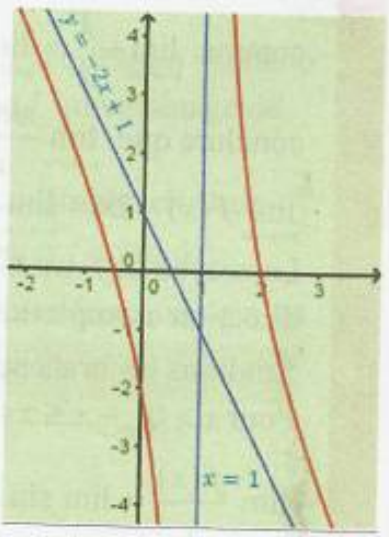
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$. On calcule alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$.

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=1$.

Interprétation graphique : la droite d'équation $y=-2x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f dans le voisinage de $+\infty$. Ci-contre un aperçu de la courbe de f



2) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x-\sqrt{x+1}$. Etudions les branches infinies de la courbe de f.

L'ensemble de définition de f est $[-1;+\infty[$. Lorsque x tend vers $+\infty$, x est positif, on peut donc écrire : $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$; on calcule alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}=2$. On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x+1}\right)=-\infty$. Interprétation graphique: La courbe représentative de f à $+\infty$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=2x$.

Étudions les branches infinies de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt{x}$.

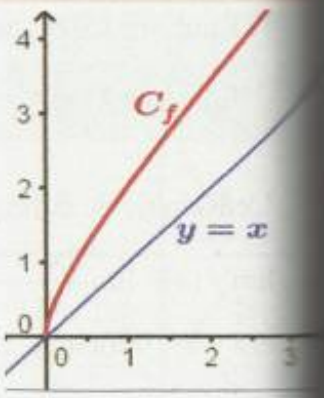
L'ensemble de définition de f est $D_f = [0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$; on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$; on calcule ensuite

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Interprétation : la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$. Ci-contre est un aperçu de la courbe de f.



Étudions les branches infinies de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - \sin x$.

Pour tout réel x, $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ alors par comparaison

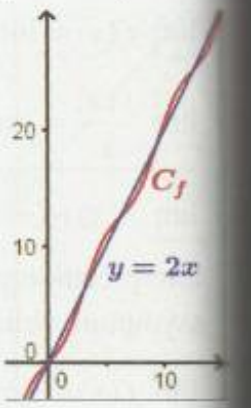
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{\sin x}{x} = 2$.

En effet lorsque x tend vers $+\infty$, $x > 0$ et donc $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$;

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. On calcule ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\sin x$; cette dernière limite n'existe pas.

La courbe de f n'a ni branche parabolique, ni asymptote. La droite d'équation $y = 2x$ est une direction asymptotique pour la courbe de f. Ci-contre un aperçu de la courbe de f.



Étudions les branches infinies de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin x$.

Pour $x > 0$, $-x \leq x \sin x \leq x$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ qui n'existe pas. La courbe de f n'a donc ni direction asympotique, ni branche parabolique, ni asymptote mais oscille entre les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

On a le même raisonnement à $-\infty$

Méthode

Soit $x_0 \in \{-\infty; +\infty\}$.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ est un réel b alors la droite horizontale d'équation $y = b$ est une asymptote à C_f en x_0 .
- Sinon, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ on calcule $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x}$.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors C_f a en x_0 une branche parabolique ayant la direction de l'axe des ordonnées.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors C_f a en x_0 une branche parabolique ayant pour direction l'axe des abscisses (qui est une direction asymptotique).
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}$ est un réel a différent de 0 alors C_f a une direction asymptotique qui est la droite d'équation $y=ax$. On calcule ensuite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax$.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax$ est un réel b alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique en x_0 à C_f .
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax=\pm\infty$ alors C_f en x_0 est une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax$ n'existe pas alors C_f n'a ni branche parabolique, ni asymptote.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas alors C_f n'a ni direction asymptotique, ni branche parabolique, ni asymptote.

Remarque

L'étude des branches infinies d'une fonction f pourrait se résumer à la question suivante : "Existe-t-il une fonction plus simple que f qui se comporte comme f au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) " ?

Pour répondre à cette question, on cherche donc une fonction g plus simple telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$. Dans cette leçon, on s'est contenté de comparer f avec des fonctions affines (i.e. des droites). Mais on pourrait comparer f à des fonctions qui ne sont pas affines (racines carrés, ln...)

Exemple:

$f(x)=\sqrt{x^4+\cos x}$ et $g(x)=x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x^4+\cos x}+x^2}=0$$

car $\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^4+\cos x}+x^2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Note : La courbe C_g de g est une courbe asymptote à C_f à $+\infty$

S'exercer

Etudier les branches infinies si possible aux courbes des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par:

$a(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$; $b(x)=\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}$; $c(x)=\dfrac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$; $d(x)=\dfrac{x+x+1}{x^2+4}$;

$e(x)=x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$; $g(x)=\dfrac{\sqrt{9x^4+3x^3-1}}{x^2+1}$.

S'ENTRAÎNER

LIMITES DE FONCTIONS

Dans tous ces exercices, les fonctions sont définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-3}+x$.

2

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{-1+5x^3}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-2}+x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{-2+3x^3}$.

3

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2\sqrt{x}}{2+3x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-3x}{2x-4}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}$.

4

Déterminer dans chaque cas les limites de la fonction f en x_0.

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x\cos x}$; $x_0=0$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x-1}$; $x_0=\dfrac{5\pi}{6}$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x)=\dfrac{-x^2+5x}{2x}$; $x_0=0$; $x_0=-\infty$.

$f(x)=\dfrac{x-3}{5\sin x}$; $x_0=0$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{5x^2}$; $x_0=0$; $x_0=\pi$.

$f(x)=\dfrac{\cos x-1}{2x-\pi}$; $x_0=0$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$; $x_0=0$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

5

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(1+x)^2}{x^2-2}$.

6

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}$;

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}$.

7

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x^2+x-6}{-3x^2+7x+6}$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^2+3x+1}{1-x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x}$.

8

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x+2)^3}{x^2-3}$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{x^2+3}{2-x}$;

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \dfrac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}$.

les limites suivantes :

$\sqrt{x^2-x+1}-2x$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$;

$\dfrac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$;

$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$.

les limites suivantes :

$\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$;

$\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos\dfrac{1}{x}$;

$\dfrac{2x^2-3x+1}{1-3x^2}$.

les limites suivantes :

$\dfrac{-3x^2+7x-5}{1+x+x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{-5x}{x+1}$;

$\dfrac{2x^2-5x}{x^2+4x+3}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$;

$\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$.

la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$. $x_0=+\infty$;

$f(x)=x^3\left(\cos\dfrac{1}{x}-2\right)$. $x_0=+\infty$;

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$. $x_0\in\{2,\ 5,+\infty,-\infty\}$.

les limites éventuelles de :

$f(x)=(x-2)\left(1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$

respectivement en 2, en $+\infty$ et en $-\infty$;

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ respectivement en 1, en $+\infty$ et en $-\infty$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{ax}{(x^2-1)^2}$ respectivement en 1, en $+\infty$, et en $-\infty$. (on discutera éventuellement suivant les valeurs de a).

14

Déterminer les limites éventuelles de :

a) $\dfrac{\tan 3x}{\sin 3x}$ en 0;

b) $\dfrac{1-\cot anx}{x-\frac{\pi}{2}}$ en $\dfrac{\pi}{2}$;

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ en 0;

d) $\dfrac{2\tan x+\sin x}{x}$ en 0;

e) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ en 0;

f) $\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$ en $\dfrac{\pi}{3}$;

g) $(x+1)\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$;

15

Déterminer les limites eventuelles respectives en 1 et en $+\infty$ de la fonction f dans chaque cas :

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x-1}$;

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}-\sqrt[3]{x^3-7x+6}}{x-1}$;

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x^3+2}-\sqrt[5]{x^2+2x}}{x^3-x^2+5}$.

16

Déterminer la limite eventuelle en $-\infty$ de $f(x)=\sqrt[3]{-8x^3-8x+16}+2x$.

17

Déterminer la limite eventuelle en 0 de

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

18

Déterminer la limite eventuelle en 2 de

$h(x)=\sqrt{|x-2|}+2$.

19

Déterminer la limite eventuelle en 0 de

$i(x)=\sqrt{|x|-4}-2$.

LIMITES ET COMPARAISON

20

On considère la fonction

$f:x\mapsto\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

1) Démontrer que pour tout x, on a :

$\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

21

On considère la fonction

$f:\ \mapsto x^2-3\sin x$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

22

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x)\ge x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

23

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{1+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\cos x}{2+x}$.

24

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{E(x)}{x}$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Démontrer que pour tout réel x, $x-1\le E(x)\le x$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

25

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction f dans chacun des cas suivants:

1) $f(x)=(2-\sin x)x^2$;

2) $f(x)=\dfrac{3x}{\cos x-3}$.

26

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-2x)\tan x$;

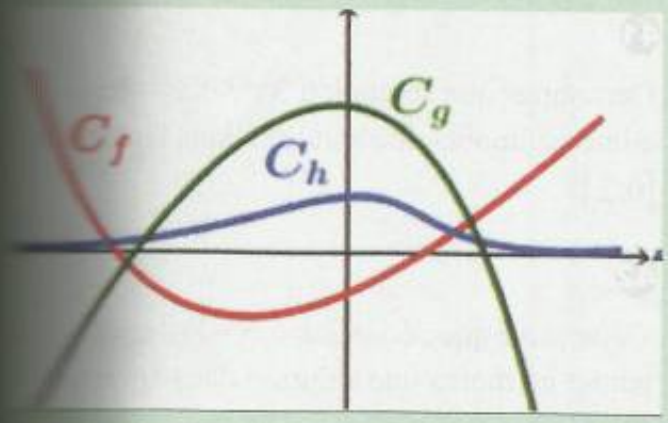
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

LECTURE GRAPHIQUE

27

Le graphique donne les courbes de trois fonctions f, g et h définie sur $\mathbb{R}$. Conjectu si possibles sur les limites éventuelles à $-\infty$ à $+\infty$ des fonctions : $f+g$;

$f-g$; fg ; fh ; $g-h$; $\dfrac{f}{g}$; $\dfrac{f}{h}$; $\dfrac{g}{h}$; $f\circ$



CONTINUITÉ

1

...quer dans chaque cas si la fonction f est ...e sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$;

$f(x) = \dfrac{-3x^2+6}{x^2-2x+5}$;

$f(x) = \begin{cases} -2x+3 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$;

$f(x) = x|x-3| + 2x - 9$;

$f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$;

$f(x) = \begin{cases} x-2 \text{ si } x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} \text{ si } x > -1 \end{cases}$.

2

...me question avec la fonction définie par :

$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

3

...aque cas, determiner la valeur ... m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \begin{cases} m \text{ si } x = -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} \text{ si } x \neq -1 \end{cases}$;

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \text{ si } x \neq 0. \\ f(o) = m \end{cases}$

PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

31

Dire si les fonctions suivantes admette un prolongement par continuité en x_0, si oui la définir.

$f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}$; $x_0 = 0$.

$f(x) = 2\dfrac{\cos 2x - 1}{x}$; $x_0 = 0$.

32

Même question avec la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ *en* $x_0 = 0$.

$b)\ f(x) = x\tan\dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 0$.

33

Déterminer le prologement par continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left[(1+x)^n - 1 - nx\right]$ où $n \geq 2$.

34

Les fonctions f et g suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$f(x) = x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$; $g(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$.

35

Étudier le prologement par continuité de la fonction f définie par

$f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

FONCTIONS CONTINUES ET SRICTEMENT MONOTONES

36

Soit f une fonction continue sur I=[−1;5].

On suppose que $f(-1) = -4$; $f(5) = 3$.

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.
2) Quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire pour que cette solution soit unique ?

37

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$;
on suppose que $f(-5)=-1$; $f(-3)=-2$; $f(0)=1$; $f(2)=4$; $f((5)=-5$; $f(6)=1$.
Recopier et compléter les phrases suivantes :

- L'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins .... solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=0$ admet au moins .... solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=4,5$ admet .... solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=3$ admet au moins .... solution(s) dans $\mathbb{R}$.

38

On considère le polynôme p définie pour tout réel x par $p(x)=2x^3-3x^2-1$.
1) Étudier les variations de p.
2) Montrer que l'équation $p(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,6:1,7[$.
3) Dresser le tableau de signe de $p(x)$.

39

On considère l'équation (E): $x^3+3x-2=0$.
Justifier que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

40

On considère la fonction
$f(x)=x^3+4x^2+4x$.
Démontrer, que l'équation $f(x)=-1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3;0]$.

41

Démontrer que l'équation $3x^4-8x^3+6x^2=3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;2]$.

42

Démontrer que l'équation $(3x-1)\sqrt{x}=1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$.

43

Montrer que l'équation $x^2=x\sin x+\cos x$ admet deux solutions réelles.

44

Pour tout entier $n\geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur par $f_n(x)=x^3-2nx+1$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $[0;1]$.

45

Le tableau suivant est le tableau des variations d'une fonction f continue sur l'intervalle I=[–5;8]. Déterminer le nombre de solutions dans I de l'équation $f(x)=0$.

x	-5		0		8
$f(x)$	1	↗	2	↘	-6

IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE.

46

Dans chacun des cas suivants déterminer $f(I)$
- $f(x)=x^2-3x+2$ K=[2,1];
- $f(x)=\frac{-2x+5}{x-3}$ K=[–4,–1];
- $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}$ K=$[0,+\infty]$;

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ K=[−4,4];
$f(x) = 2\cos x$ K=ℝ;
$f(x) = |3x^2 - 1|$ K=]−∞,0].

5

On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction f. f est continue sur]−∞;8[et sur]8;+∞[.

x	−∞		0		2		8		+∞
$f(x)$	1	↗		↘	−∞		−∞	↗	+∞

Dans chacun des cas suivants déterminer $f(I)$.
I=]−∞;0]; I=[0;8[; I=]8;+∞[; I=]−∞;8[;
I=]−∞[; I=ℝ.
Montrer que la restriction de f à I=[0;8[est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
Donner en justifiant le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Même question avec l'équation $f(x) = 3$.

6

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

7

Montrer que la fonction $f: \mapsto 1 - \cos x$ est une bijection de $[0,\pi]$ vers $[0;2]$.
Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

8

Montrer que la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers un intervalle que l'on précisera.
Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES.

51

Etudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}; \quad f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^4 + 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}; \quad f(x) = \frac{2x^3 + x - 1}{x^2 + 1};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^9 + 2x}}{x^2 + 1}; \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x}.$$

52

Etudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x^2 + 2\cos 2x; \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x};$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}; \quad f(x) = \sqrt{|x^4 - x^2|}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 2};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x2-1}}{x} - \frac{1}{2}x.$$

53

Etudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = 2x - \sqrt{x}; \quad f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}};$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{x-2}{x^2 + 2x + 5};$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 6}{x^2 + 1}$$

54

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
1) Montrer que f est une fonction impaire.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3) f admet-elle un prolongement par continuité en 0. Justifier votre réponse.

4) On désigne par g la restriction de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

a) Montrer que la droite $(D): y = x$ est une asymptote à la courbe de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-1}{x}$ et préciser l'allure de la courbe de g au voisinage du point A(0;1).

c) Montrer que $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ et dresser le tableau de variation de g.

5) Construire C_f.

55

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,59 < \alpha < 0,6$

Chapitre 4

NOMBRES COMPLEXES

LEÇON 1 ÉTUDE ALGÉBRIQUE DE $\mathbb{C}$

1.1 INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES-PRÉSENTATION

1.2 ÉGALITÉ ET OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÉBRIQUE

1.3 INTERPRÉTATION GÉOMETRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 Représentation

1.3.2 Nombres complexes conjugués

1.4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

LEÇON 2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

2.1 ARGUMENT ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

2.1.1 Présentation

2.1.2 Argument d'un produit et d'un quotient des nombres complexes.

2.3 TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES.

2.4 RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.4.1 Racines n-ièmes de l'unité.

2.4.2 Racines n-ième d'un nombre complexe non nul.

LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

3.1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{C}$

3.1.1 Équations du type $az + b = 0$, où a et b sont des nombres complexes et systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$.

3.2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

3.2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

3.2.3 Somme et produit des racines

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ÉTUDE ALGÉBRIQUE DE $\mathbb{C}$

- Reconnaitre l'écriture algébrique d'un nombre complexe
- Effectuer l'addition, le produit, l'inverse, la puissance, le rapport de deux nombres complexes
- Donner une interprétation géométrique des nombres complexes.
- Déterminer le conjugué, le module d'un nombre complexe.
- Résoudre certains problèmes de lieux géométriques à l'aide des nombres complexes.

1.1 INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES-PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution, car $x^2+1\geq 1>0$.

Plus généralement on ne peut pas trouver un réel x tel que $x^2+b=0$ avec $b>0$.

On admet l'existence d'un nombre i appartenant à un nouvel ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ tel que $i^2=-1$.

Montrer que dans ce nouvel ensemble, en conservant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2+1=0$ admet deux racines et que plus généralement il en est de même de toute équation de la forme $x^2+b=0$ avec $b>0$.

Retenir

- On appelle nombre complexe tout nombre qui peut s'écrire de la forme $a+ib$ où a et b sont des nombres réels et i un nombre appelé imaginaire tel que $i^2=-1$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}=\{a+ib, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$.
- Pour tout nombre complexe z il existe un unique couple (a,b) de nombre réels tels que $z=a+ib$
- L'écriture du nombre complexe z sous la forme $a+ib$ est appelée forme algébrique (ou cartésienne) de z.
  - a est la partie réelle de z notée $R_e(z)$.
  - b est la partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque

- Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.
  - Si $b=0$, alors z est un réel. Donc $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
  - Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$, z est appelé un imaginaire pur.
  - z est nul si et seulement si $R_e(z)=0$ et $\mathcal{J}m(z)=0$.
- Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont des nombres réels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$

Exemple

Considérons les nombres complexes suivants :

- $z_1 = -2i$; $z_2 = -3$; $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_4 = \cos\theta + i\sin\theta$

z_1 est imaginaire pur car $\mathcal{J}m(z_1) = -2$ et $R_e(z_1) = 0$;

z_2 est réel car $\mathcal{J}m(z_2) = 0$; $R_e(z_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathcal{J}m(z_3) = -\frac{1}{2}$;

$R_e(z_4) = \cos\theta$ et $\mathcal{J}m(z_4) = \sin\theta$.

- Considérons le nombre complexe $z = x^2 - x + 2 + (x+2)i$ où x est un réel.
- z est nul si et seulement si $x^2 + x - 2 = 0$ *et* $x + 2 = 0$.

Or $x+2=0$ entraine $x=-2$ et $(-2)^2-(-2)-2 = 4-4 = 0$

Donc z est nul si $x=-2$.

S'exercer

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

Nombre complexe z	Partie réelle de z, $R_e(z)$	Partie imaginaire de z, $\mathcal{J}m(z)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0
$z = -\sqrt{3}i$	0	$-\sqrt{3}$
$z = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$

2) Existe-t-il un couple (x, y) de nombres réels tels que $\left(\frac{1}{x}+y^2\right)+\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)i$ soit égal à 1 + i?

3) On considère le nombre complexe $z = x^2 + x - 2 + (x+2)i$.

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est un imaginaire pur ?

1.2 ÉGALITÉ ET OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÉBRIQUE

N.B : Les calculs se feront dans $\mathbb{C}$ exactement comme dans $\mathbb{R}$ mais en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

Prendre un bon départ

Soient les nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des nombres réels.

1) Donner une condition sur a et a', b et b' pour que deux nombres complexes soient égaux.

1) Donner la forme algébrique de $z + z'$.

2) Donner la forme algébrique de $z \times z'$.

3) Montrer que $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

4) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Montrer que l'inverse de z peut s'écrire $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Retenir

- Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

$z = z'$ si et seulement si $R_e(z) = R_e(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$;

$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

- $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul.

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{(-b)}{a^2+b^2}.$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. tels que $z' \neq 0$,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Remarque

$i^2 = -1$; $(i^2)^2 = 1$; *soit* $i^4 = 1$.

Pour tout entier naturel p, $i^{4p} = 1$; $i^{4p+1} = i$; $i^{4p+2} = -1$; $i^{4p+3} = -i$

S'exercer

1.b Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a = (2+3i)(1-2i)$; $b = \left(2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + 5i\sqrt{3}\right)$; $c = (2+4i)(5+3i)^2$; $d = (5+4i)(3+5i)(2-3i)$

$e = \frac{4-5i}{6+5i}$; $g = \frac{(2-5i)(3+2i)}{3-2i}$.

Donner la forme cartésienne de $(2-i)^2$; $(1+i)^7$; $(2-i)^5$.

1.3 INTERPRÉTATION GÉOMETRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 REPRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{u},\vec{v})$. $\vec{P}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
On considère les applications φ et ψ définie par :

$\varphi : C \longrightarrow \vec{P}$ et $\psi : \vec{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$a+ib \mapsto a\vec{u}+b\vec{v}$ $a\vec{u}+b\vec{v} \mapsto M(a;b)$

a) La bijection $\psi o \varphi$ permet de placer dans le plan $\mathcal{P}$, l'image du nombre complexe $a+ib$, puis de donner aussi l'image réciproque du point $M(x;y)$.

i) Placer dans le plan $\mathcal{P}$, les images respectives des nombres complexes $2-3i;3+4i;-5+2i$.

ii) Donner sous forme algébrique les nombres complexes dont les images sont respectivement les points $A(2;-1)$; $B(\sqrt{2};3)$; $C(4;0)$

b) Montrer que $\varphi(z+z')=\varphi(z)+\varphi(z')$; $\varphi(xz)=x\varphi(z)$ où x est un nombre réel, z et z' deux nombres complexes.

Retenir

Le nombre complexe $z=a+ib$ est représenté dans le plan par le point $M(z)$ de coordonnées $(a;b)$. z est appelée affixe du point M, tandis que $M(z)$ est appélé point image du nombre complexe z dans le plan $\mathcal{P}$. On note aussi $a+ib=z_M$.

Le plan $\mathcal{P}$ est appélé plan complexe ou encore plan de Cauchy. Les droites $(o;\vec{u})$ et $(o;\vec{v})$ sont respectivement l'axe des réels et l'axe des imaginaires du repère $(o;\vec{u},\vec{v})$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}=a\vec{u}+b\vec{v}$ est le vecteur image du nombre complexe z.

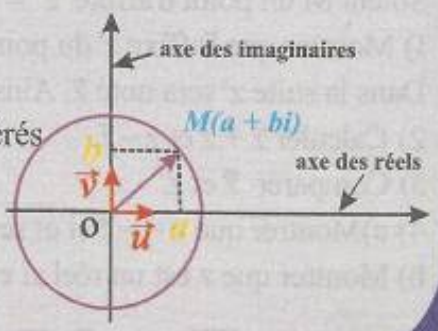
On note aussi $a+ib=z_{\overrightarrow{OM}}$. Soient $\vec{u};\vec{v}$ deux vecteurs du plan, un nombre réel k.

On a $Z_{\vec{u}+\vec{v}}=Z_{\vec{u}}+Z_{\vec{v}}$ et $Z_{k\vec{u}}=kZ_{\vec{u}}$.

Pour tout bipoint $(M;N)$, $Z_{\overrightarrow{MN}}=Z_N-Z_M$.

Si un point G est le barycentre d'un système des points pondérés $\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);\ldots;(A_n,a_n)\}$ alors

$$Z_G=\frac{a_1\times Z_{A_1}+a_2\times Z_{A_2}+\ldots+a_n\times Z_{A_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$



Exemple

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

1) Déterminer les affixes des points A, B et C de coordonnées respectives $(2,-2)$; $(-3,0)$ et $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Désignons par z_A, z_B et z_C les affixes des points A,B et C.

$z_A = 2-2i$; $z_B = -3$; $z_C = \frac{5}{2}i$.

2) L'affixe du point A' symétrique à A par rapport à la droite de repère $(O,\vec{u})$ est $z_{A'} = 2+2$

3) L'affixe du point A" symétrique de A par rapport à O est $z_{A''} = -2+2i$.

4) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A = -3-2+2i$; soit $-5+2i$.

S'exercer

1.d On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i\sqrt{3}$; $z_2 = 1+2i$;
$z_3 = -2-3i$; $z_4 = -1-2i$, affixes respectives des points A, B, C et D.
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.e On donne les nombres complexes $z = -2+3i$ et $z' = 2+i$.

a) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $z+z'$, zz' et z^2.

b) Déterminer le nombre complexe z tel que $3iz + \frac{2i-5}{3i} = -15+13i$.

c) Déterminer les nombres complexes z et z' tels que $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1-i)z + (2+i)z' = 1+4i. \end{cases}$

1.f Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $Z = z^2+2z-3$ soit un réel.

1.3.2 NOMBRES COMPLEXES CONJUGUÉS

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient M un point d'affixe $z = a+ib$ et M' le symétrique de M par rapport à la droite de repère

1) Montrer que l'affixe z' du point M' est le nombre complexe $z' = a-ib$.

Dans la suite z' sera noté $\overline{z}$. Ainsi $\overline{z} = a-ib$.

2) Calculer $\overline{z}+z$ et $z-\overline{z}$.

3) Comparer $\overline{\overline{z}}$ et z.

4) a)Montrer que $z = -\overline{z}$ si et seulement si, z est un imaginaire pur.

b) Montrer que z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

5) Comparer $\overline{z+z'}$ et $\overline{z}+\overline{z'}$, $\overline{zz'}$ et $\overline{z}.\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$ et $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Retenir

- Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le nombre $\overline{z} = a - ib$ est le conjugué de z.
- Quel que soit le nombre complexe z on a :
  $z + \overline{z} = 2\mathrm{R_e}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.
  $z = -\overline{z}$ si et seulement si z est un imaginaire.
  $z = \overline{z}$ si et seulement si, z est un réel.
- Quels que soient les nombres complexes z et z' on a :
  $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
  $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Remarque

- Si $z = a + ib$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}$ est un nombre complexe, alors $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.
- M(z) et M'($\overline{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

1) Mettons le nombre complexe $\frac{3-2i}{2-i}$ sous la forme algébrique.

$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$

2) Mettons $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'}$ sous la forme algébrique.

D'après la remarque ci-dessus $z' \times \overline{z'} = a'^2 + b'^2$.

$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{(a+ib)(a'-ib)}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{(aa'+bb')+i(a'b-b'a)}{a'^2+b'^2}$.

$\frac{z}{z'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\frac{a'b-b'a}{a'^2+b'^2}$.

S'exercer

On considère les nombres complexes $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z' = \frac{1}{2\sqrt{3}+2i}$.

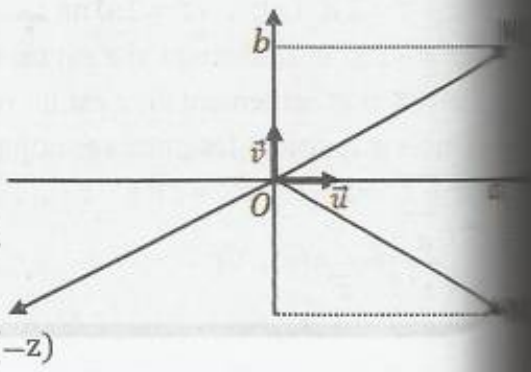
a) Calculer les conjugués des nombres complexes z et z'.

b) Calculer sous forme algébrique zz'; $\frac{z}{z'}$; z'^3; $z^6 \times z'^{12}$; $\frac{z^3}{z'^{13}}$.

1.4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Prendre un bon départ

Soit z = $a + ib$ un nombre complexe.
M son point image dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan.
N le point d'affixe –z et M' d'affixe $\bar{z}$.



1) Calculer $\|\overrightarrow{OM}\|, \|\overrightarrow{ON}\|$ et $\|\overrightarrow{OM'}\|$ en fonction de a et b.
2) Comparer $\|\overrightarrow{OM}\|, \|\overrightarrow{ON}\|$ et $\|\overrightarrow{OM'}\|$.
3) Montrer que $\overrightarrow{OM}^2 = z.\bar{z}$.

Retenir

- Le module du nombre $z = a + ib$ est le nombre réel positif ou nul $\sqrt{z\bar{z}}$.

On le note $|z|$ et on le lit «module de z».

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Pour tout nombre complexe z, $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.
- $(|z| = 0)$ équivaut à $(z = 0)$.
- Si M a pour affixe z et M' a pour affixe z' alors $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $|z' - z| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

Remarque 1

- Quels que soient les nombres complexes z et z',
  - $|zz'| = |z||z'|$.
  - $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$.

En effet $|zz'| = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{z\bar{z}} \times \sqrt{z'\bar{z}'} = |z||z'|$.

D'autre part si $z' \neq 0$, $z' \times \frac{1}{z'} = 1$, d'où $\left|z' \times \frac{1}{z'}\right| = 1$; $|z'| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = 1$.

D'où $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$. Par suite $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $|z^n| = |z|^n$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

En effet $\|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| \leq \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{OM'}\|$, par suite $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Remarque 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives a et b.

- L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-a|=|z-b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

En effet $|z-a|=|z-b|$ est équivalent à $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$ ou MA=MB.

- L'ensemble des points M(z) du plan tels que : $|z-a|=r$ (r>0) est le cercle de centre A et de rayon r.

En effet $|z-a|=r$ est équivalent à $\|\overrightarrow{MA}\|=r$ ou MA= r.

- La recherche de l'ensemble des points M(z) du plan tels que : $\dfrac{|z-a|}{|z-b|}=r$ (r > 0) se ramène à la ligne de niveau r de $\mapsto \dfrac{MA}{MB}$.

Exemple 1

1) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|z-1+i|=2$.

$|z-1+i|=2$ équivaut à $|z-(1-i)|=2$.

Soit A le point d'affixe $z_A=1-i$.

$|z-(1-i)|=2$ équivaut à $|z-z_A|=2$, qui est équivalent à $\|\overrightarrow{AM}\|=2$.

(Γ) est le cercle de centre A(1;−1) et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que

$|z+2+3i| = |z+1-2i|$.

$|z+2+3i| = |z+1-2i|$ équivaut à $|z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)|$;

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=-2-3i$ et $z_B=-1+2i$.

$|z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)|$ équivaut à $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$.

$\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{BM}\|$ signifie que M appartient à la médiatrice de [AB].

(D) est donc la médiatrice du segment [AB].

Exemple 2

1) Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z\bar{z}+i(z-\bar{z})-3=0$.

Posons : $z=x+iy$

On a $z\times\bar{z}=x^2+y^2$ et $z-\bar{z}=x+iy-x+iy=2iy$.

$z\bar{z}+i(z-\bar{z})-3=0$ équivaut à $x^2+y^2-2y-3=0$.

$x^2+(y-1)^2=4$ est une équation cartésienne de l'ensemble cherché. C'est le cercle de centre (0;1) et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble des points M(z) tels que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ soit réel.

$\frac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $\frac{2z-1}{z^2}=\frac{\overline{2z-1}}{z^{\overline{2}}}$.

On a : $\overline{z}^2(2z-1)=z^2(2\overline{z}-1)$; $2z\overline{z}^2-\overline{z}^2=2z^2\overline{z}-z^2$;

$2z\overline{z}(\overline{z}-z)=(\overline{z}-z)(\overline{z}+z)$; $(\overline{z}-z)(2z\overline{z}-(z+\overline{z}))=0$;

$z=\overline{z}$ *ou* $2\overline{z}z-(z+\overline{z})=0$.

Posons : $z=x+iy$

On a : $z\in\mathbb{R}$ ou $2(x^2+y^2)-2x=0$; $z\in\mathbb{R}$ *ou* $x^2+y^2-x=0$;

$$z\in\mathbb{R} \text{ ou } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des réels et du cercle de centre de cercle $\Omega\left(\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point O.

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $\frac{z+i}{z-i}=3$.

Considérons $A(-i)$; $B(i)$.

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB}=3$.

$\frac{MA}{MB}=3$ est équivalent successivement à $MA^2-9MB^2=0$;

$(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})=0$.

Soit $G=bar$ | A | B | et $H=bar$ | A | B |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | | 1 | 3 |

On a : $-2\overrightarrow{MG}\cdot 4\overrightarrow{MH}=0$; soit $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH}=0$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [GH].

$Z_G=\frac{-3Z_B+Z_A}{-2}=\frac{-3(i)+-i}{-2}=\frac{1i}{-2}=2i$

$Z_H=\frac{3Z_A+Z_B}{4}=\frac{-i+3i}{4}=\frac{1}{2}i$

Soit I le centre de ce cercle : $z_I=\frac{1}{2}\left(2i+\frac{1}{2}i\right)=\frac{5}{4}i$.

Le rayon de ce cercle est $\frac{GH}{2}=\frac{|Z_H-Z_G|}{2}=\frac{|2i-\frac{1}{2}i|}{2}=\frac{3}{4}$.

Exercice résolu

1)Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $\frac{2z-4}{z-i}$ soit un réel.

1ère méthode :

$\frac{2z-4}{z-i}$ est défini si $z \neq i$. Ainsi le point A(0;1) ne peut pas appartenir à l'ensemble (E).

Posons $z = x+iy$.

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{2(x+iy)-4}{x+iy-i} = \frac{(2x-4)+2iy}{x+(y-1)i} = \frac{[(2x-4)+2iy][x-(y-1)i]}{[x+(y-1)i][x-(y-1)i]}$$

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{(2x^2-4x+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2}.$$

$\frac{2z-4}{z-i}$ est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

C'est-à-dire $\frac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2} = 0$; soit $2x+4y-4=0$ avec $(x;y) \neq (0;1)$.

(E) est la droite d'équation $x+2y-2=0$ privée du point A(0;1).

2ème méthode :

Posons $Z = \frac{2z-4}{z-i}$.

Z est un réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$.

On a $Z = \overline{Z}$ si et seulement si $\frac{2z-4}{z-i} = \frac{2\bar{z}-4}{\bar{z}+i}$, soit successivement, avec $z \neq i$.

$(2z-4)(\bar{z}+i) = (z-i)(2\bar{z}-4)$;

$2z\bar{z}+2iz-4z-4i = 2z\bar{z}-4z-2i\bar{z}+4i$;

$i(z+\bar{z})+4(z-\bar{z}) = 8i$;

$4\mathrm{Re}(z)+4(2i\mathrm{Im}(z) = 8i$;

$\mathrm{Re}(z)+2\mathrm{Im}(z) = 2$;

$z = x+iy$, alors $x+2y = 2$.

(E) est une droite d'équation $x+2y=2$ privée du point A(o;1).

Déterminons l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $\frac{2z-4}{z-i}$ soit un imaginaire pur.

3ème méthode :

$\frac{2z-4}{z-i}$ soit un imaginaire pur si et seulement si $\frac{(2x^2-4x+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2} = 0$.

$\frac{2x^2-4x+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2} = 0$ équivaut à $\begin{cases} 2x^2-4x+2y^2-2y=0 \\ x^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$.

$2x^2-4x+2y^2=0$ équivaut à $x^2-2x+y^2-2y=0$.

$x^2-2x+y^2-y=0$ équivaut à $(x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$.

$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. Cette équation est l'équation du cercle de centre le point $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(F) est le cercle de centre $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A(0;1).

$2^{ème}$ méthode :

Z est un imaginaire pur si et seulement si $Z=-\overline{Z}$.

Or $Z=-\overline{Z}$ si et seulement si $\frac{2z-4}{z-i}=-\frac{2\bar{z}-4}{\bar{z}+i}$, soit successivement, avec $z\neq i$.

$(2z-4)(\bar{z}+i)=-(z-i)(2\bar{z}-4)$

$2z\bar{z}+i(z-\bar{z})-2(z+\bar{z})=0$.

En posant $z=x+iy$.

$2z\bar{z}+i(z-\bar{z})-2(z+\bar{z})=0$ est équivalent à $2(x^2+y^2)+i(2iy)-2(2x)=0$;

$x^2+y^2-y-2x=0$. On retrouve l'équation du cercle de la première méthode.

(F) est le cercle de centre $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A(0;1).

S'exercer

1.h Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M d'affixe $z=x+iy$ le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que $z'=\frac{z+2i}{z-2}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

1.i A tout nombre complexe z on associe, le nombre complexe $z'=(1+i)z+2$.

On désigne par M le point d'affixe z et M' d'affixe de z'.

i. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que O soit situé sur la médiatrice du segment [MM'].

ii. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=0$.

1.j Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$|3z-9-3i|=|z+1-i|$.

A tout nombre complexe z distinct de $-1+2i$, on associe le nombre complexe $z'=\dfrac{z-2+4i}{z+1-2i}$.

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant la condition exigée:

a) z' est un nombre réel ;

b) z' est un nombre imaginaire pur ;

c) $|z'|=1$;

d) $|z'|=2$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

a) $|z-1+2i| = 3$; b) $|z-4| = |z+2i|$; c) $|z-5+3i| = |z-4i|$;

d) $|z+5-i| = |z-4i|$.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $|z+z'| = |z|+|z'|$.

LEÇON 2 FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

- Déterminer et interpréter graphiquement un argument d'un nombre complexe non nul ;
- Déterminer des arguments du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe non nul ;
- Déterminer des arguments d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes non nuls ;
- Montrer que :
  - trois points sont alignés ;
  - deux droites sont parallèles ;
  - deux droites sont perpendiculaires ;
  - quatre points sont cocycliques.
- Écrire sous fome trigonométrique et sous fome exponentielle un nombre complexe non nul ;
- Utiliser la formule de Moivre et les formules d'Euler pour faire des linéarisations et des développements.

2.1 ARGUMENT ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

2.1.1 PRÉSENTATION

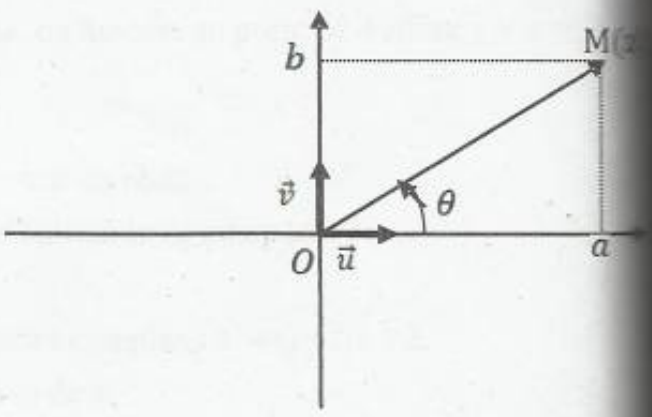
Prendre un bon départ

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit M un point du plan d'affixe z non nul et de coordonnées $(a;b)$.

Soit θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)$

Soit M′ le point d'intersection de $[O,M(z)]$ et du cercle trigonométrique.



1) Montrer que l'affixe de M' est $\frac{z}{|z|}$.

2) Montrer que les coordonnées de M' sont $(\cos\theta,\sin\theta)$.

3) En déduire que $\frac{z}{|z|}=\cos\theta+i\sin\theta$.

4) Exprimer cos θ et sinθ respectivement en fonction de a et b.

Retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit M un point du plan d'affixe non nul z.

- Une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)$ est appelée argument du nombre complexe z.
- Le nombre complexe z peut s'écrire $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe z.
- Un argument de z est noté arg(z) alors que Arg(z) est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)$

Remarque 1

1) Si θ est un argument d'un nombre complexe non nul z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En effet $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique.

Soit $z = a + ib$ la forme algébrique d'un nombre complexe non nul et $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique.

$a = R_e(z) = |z|\cos\theta$ *et* $b = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\theta$.

On a donc $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments qui diffèrent d'un multiple de 2π.

Remarque 2

1) Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $z = 0$ ou $\arg z = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit z un nombre complexe non nul. z est un imaginaire pur si et seulement si

$$\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

3) $\arg\overline{z} = -\arg z + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.

L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est le nombre complexe $z' - z$. Donc un argument de $z' - z$ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{MM'})$.

6) Deux nombres complexes $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $\rho'(\cos\theta' + i\sin\rho')$ sont égaux si et seulement si ($\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta'[2\pi]$), c'est-à-dire ($\rho = \rho'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Notations

Si $|z|=\rho$, $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ se note $[\rho;\theta]$ où ρ et θ désignent respectivement le module et un argument du nombre complexe z .

Exemple

1) Posons $z_1=2-2i$ *et* $z_2=1-i\sqrt{3}$;

$|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $|z_2|=\sqrt{1+3}=2$

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

$$z_1=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right].$$

$$z_2=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right].$$

2) α est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

Posons $z_1=1+i\tan\alpha$ *et* $z_2=1-i\tan\alpha$.

$$z_1=1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha);\ \text{comme}\ \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[,\ \cos\alpha>0\ \text{et}\ z_1=\left[\frac{1}{\cos\alpha};\alpha\right].$$

$$z_2=1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha-i\sin\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha)-i\sin(-\alpha))\ \text{et}\ z_2=\left[\frac{1}{\cos\alpha};-\alpha\right].$$

3) Prenons $z=\left[2\sqrt{3};-\frac{\pi}{3}\right]$

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-3i.$$

4) $[1;\pi]=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ et $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$

Exercice résolu

Déterminons en fonction de $0\le\alpha<2\pi$ et $\alpha\neq\pi$, le module et un argument du nombre complexe $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; soit $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$.

Par suite $1+\cos\alpha=1+\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

D'autre part $\sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

$z = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

Remarque : Pour que cette forme soit la forme trigonométrique de z il faut que $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ car le module d'un nombre complexe est toujours positif.

1er cas : Pour $0 \leq \alpha < \pi, 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, par suite :

$|z| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $\arg z = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. $z = \left[2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \frac{\alpha}{2}\right]$.

2ème cas : Pour $\pi < \alpha < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ et $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$,

$z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

$z = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ avec $-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$. Par suite, $|z| = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$;

$\arg z = \pi + \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $z = \left[-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \pi + \frac{\alpha}{2}\right]$.

S'exercer

2. a Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) 8 ; b) -8 ; c) $-4\sqrt{3} - 12i$; d) $6 + i\sqrt{12}$.

2. b Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a) $\left[1; \frac{\pi}{4}\right]$; b) $\left[2; \frac{2\pi}{3}\right]$; c) $\left[\sqrt{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; d) $\left[1; -\frac{\pi}{4}\right]$.

2. c Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; b) $-\sin\alpha + i\cos\alpha$; c) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ où $\alpha \in [0, \pi[$ (on discutera selon les valeurs de α).

2. d Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2 + 2i$; $2 - 2i$ et $2 + 2i\sqrt{3}$.

1) Écrire chacun des nombres complexes précédents sous forme trigonométrique.

2) Représenter avec précision les points A, B et C dans ce plan complexe.

2. e z est un nombre complexe d'argument α.

Exprimer en fonction de α un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$\bar{z}$; $-z$ et $-\bar{z}$.

2.1.2 ARGUMENT D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT DES NOMBRES COMPLEXES.

Prendre un bon départ

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

1) Montrer que $zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$;

2) Montrer que $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$.

3) Montrer par récurrence que quels que soient le réel θ et l'entier naturel n, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Retenir

Soient $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta]$ deux nombres complexes non nuls.

- $zz' = [r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr',\theta + \theta']$;
- $\frac{z}{z'} = \frac{[r,\theta]}{[r',\theta]} = \left[\frac{r}{r'},\theta - \theta'\right]$;
- Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel θ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. **Cette formule est dite de Moivre.**

Notation

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ, est noté $e^{i\theta}$.

L'écriture $re^{i\theta}$ est une forme exponentielle du complexe z de module r et dont un argument est θ. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Conséquences :

- Pour tout réels θ et θ' :

$[\rho;\theta] = \rho e^{i\theta}$; $[\rho';\theta'] = \rho' e^{i\theta'}$; $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

- $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$.
- Pour tout entier naturel n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Exemple

1) Soit $z = [r,\theta] = re^{i\theta}$; $1 = [1;0]$.

$$\frac{1}{z} = \frac{[1,0]}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r},0-\theta\right] = \left[\frac{1}{r},-\theta\right] = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

2) $-1=e^{i\pi}$, $-z=-1\times z=e^{i\pi}\times e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$.

$(1+i)(-1+i\sqrt{3})=-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})$.

$(1+i)(-1+i\sqrt{3})=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$.

$-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

On en déduit que : $\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12}=-1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}=-1+\sqrt{3}\end{cases}$;

d'où $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;

soit $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice résolu 1

Soit le nombre complexe $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Mettre z sous la forme exponentielle.

2) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^2, z^3.

3) Soit p un entier naturel, donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^{3p}, z^{3p+1} et z^{3p+2}.

4) En déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^{2012}, z^{2013} et z^{2014}.

Solution

1) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

Soit θ un argument de z. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta=\frac{2\pi}{3}$, $z=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

2) $z^2=\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^2=e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$z^2=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$z^3=\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3=e^{i\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i(2\pi)}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$.

3) p étant un entier naturel,

$z^{3p}=1^p=1$; $z^{3p+1}=z^{3p}\times z=z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$z^{3p+2} = z^{3p} \times z^2 = z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $2012 = 3\times 370 + 2$; $2013 = 3\times 671$; $2014 = 3\times 671 + 1$.

La question 3 permet d'écrire :

$z^{2012} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z^{2013} = 1$ *et* $z^{2014} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice résolu 2

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c.

Soit le nombre complexe $z = \frac{c-a}{c-b}$.

1) Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Donner le module de z en fonction de AC et BC.

3) Montrer qu'un argument de z est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})$.

Solution :

1) L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est $c-a$ et celui de $\overrightarrow{BC}$ est $b-c$.

2) $|z| = \left|\frac{c-a}{c-b}\right| = \frac{|c-a|}{|c-b|} = \frac{AC}{BC}$.

3) $\arg z = \arg(c-a) - \arg(b-c) = mes(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - mes(\vec{u}, \overrightarrow{BC})$

$\arg z = mes(\overrightarrow{BC}, \vec{u}) + mes(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = mes(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$.

Remarque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. z_u et z_v sont les affixes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; a, b, c et d sont les affixes respectives des points A, B, C et D.

- $mes(\vec{u}, \vec{v}) = \arg \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$;
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel non nul.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = i$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}^*$

Exemple

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a=1-i$;

$b=3+2i$; $c=-4-i$ et $d=2-5i$.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

$$\frac{d-c}{b-a}=\frac{2-5i+4+i}{3-2i-1+i}=\frac{6-4i}{2+3i}=\frac{(6-4i)(2+3i)}{(2-3i)(2-3i)}=-\frac{26i}{13}=-2i.$$

$\frac{d-c}{b-a}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. $arg\frac{d-c}{b-a}=-\frac{\pi}{2}$; donc $mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{2}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$a=2-2i$; $b=2i$; $c=-1+i$ et $d=-1-i$.

Montrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

$$\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}=\left(\frac{-1+i-2i}{-1+i-2+2i}\right):\left(\frac{-1-i-2i}{-1-i-2+2i}\right)=\frac{-1-i}{-3+3i}:\frac{-1-3i}{-3+i}=\frac{-1-i}{-3+3i}\times\frac{-3+i}{-1-3i}$$

$$=\frac{(-1-i)(-3+i)}{(-3+3i)(-1-3i)}=\frac{3-i+3i+1}{3+9i-3i+9}=\frac{4+2i}{12+6i}=\frac{4+2i}{3(4+2i)}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}^*.$$

$\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}\in\mathbb{R}^*$. Donc $mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}})=mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}})$ $[\pi]$ et les points A, B, C et D sont cocycliques.

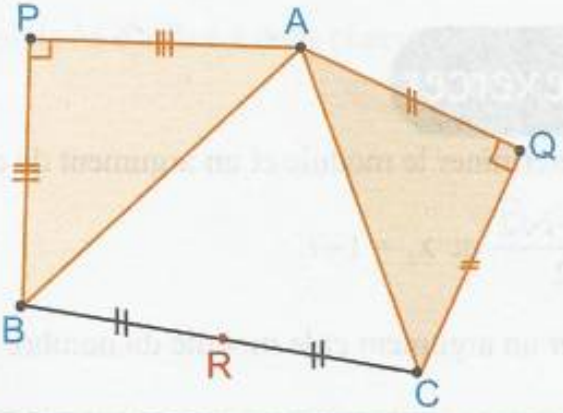
3. a est un nombre complexe non nul et $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Montrons que les points A(a) ; B(ja) et C(j^2a) sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On pose $b=ja$ et $c=j^2a$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{j^2a-a}{ja-a}=\frac{j^2-1}{j-1}=j+1=\frac{-1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- Le triangle ABC étant donné, on construit les points P et Q tels que les triangles APB et ACQ soient isocèles et rectangles directs de sommets respectifs P et Q. On désigne par R le milieu du segment [BC].



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. Démontrer que (PR) et (QR)sont orth

On a $\frac{Z_C-Z_Q}{Z_A-Z_Q}=i$ et $\frac{Z_A-Z_P}{Z_B-Z_P}=i$ et $Z_R=\frac{Z_B+Z_C}{2}$.

$\frac{Z_C-Z_Q}{Z_A-Z_Q}=i$ entraîne $Z_C-Z_Q=i(Z_A-Z_Q)$; d'où $Z_Q=\frac{Z_A+Z_C}{2}+i\frac{Z_C-Z_A}{2}$.

$\frac{Z_A-Z_P}{Z_B-Z_P}=i$ entraine $Z_P=\frac{Z_A+Z_B+i(Z_A-Z_B)}{2}$.

$$Z_P-Z_R=\frac{Z_A+Z_B+i(Z_A-Z_B)}{2}-\frac{(Z_B+Z_C)}{2}=\frac{Z_A-Z_C+i(Z_A-Z_B)}{2}$$

$$Z_Q-Z_R=\frac{Z_A+Z_B+i(Z_C-Z_A)}{2}-\frac{Z_B+Z_C}{2}=\frac{Z_A-Z_B+i(Z_C-Z_A)}{2};$$

$$Z_P-Z_R=i\left[\frac{(Z_A-Z_B)-i(Z_A-Z_C}{2}\right]=i\left[\frac{(Z_A-Z_B)+i(Z_C-Z_A)}{2}\right];$$

$Z_P-Z_R=i[Z_Q-Z_R]$ donc $(Z_P-Z_R)/(Z_Q-Z_R)=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$;

$\arg(Z_P-Z_R)/(Z_Q-Z_R)=\frac{\pi}{2}$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RP}})=\frac{\pi}{2}$ et $(RQ)\perp(RP)$ et $\frac{PR}{QR}=1$.

4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre complexe z défini par $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$ soit imaginaire pur.

z' imaginaire pur si et seulement si $\arg z'=\frac{\pi}{2}[\pi]$ $(z'\neq 0)$ or $z'\neq 0$ si $z\neq 0$

Pour $z\neq 0$ posons $z=re^{+i\alpha}$; $z'=re^{i\frac{-\pi}{3}}e^{i\alpha}=re^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$

$\arg z'=\frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}[\pi]$

D'où $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}[\pi]$; $\text{mes}(\widehat{\vec{e_1},\overrightarrow{OM}})=\frac{\pi}{6}$.

Le point M est situé sur la droite passant par O et de coefficient directeur $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ privée du point O.

S'exercer

2.f a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

b) Donner un argument et le module du nombre complexe $z=\frac{z_1}{z_2}$.

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2 b) Donner la forme exponentielle et la forme cartésienne de chacun des nombres complexes $(1+i\sqrt{3})^5$ et de $(1-i\sqrt{3})^5$.

a) Donner la forme cartésienne de chacun des nombres complexes

$u=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$ et $v=(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$2+2i$; $\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i$; $-1+\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{4}+\frac{11}{4}i$

- Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas alignés.
- Montrer que D appartient au cercle de diamètre [AC].

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{iz}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ soit réel.

Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants:

a) $(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$; b) $(1+i)^4$; c) $(-1+i\sqrt{3})/(\sqrt{3}+i)$; d) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^4$.

Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a) $-2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i)}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; c) $\frac{10e^{-i\frac{\pi}{4}}}{5-5i}$; d) $\frac{2e^{-i\frac{2\pi}{8}}}{1-i\sqrt{3}}$.

On donne : $z=(1+i\sqrt{3})(1+i)$.

Écrire z sous forme algébrique.

Écrire $1+i$ et $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Représenter dans le plan complexe les points M d'affixe z tels que $|z|=2$

$\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}[\pi]$.

Déterminer et construire l'ensemble les points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

i. $\arg(i-z)=0[\pi]$;

ii. $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$;

iii. $\arg\left(\frac{1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$.

2.3 TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES

Prendre un bon départ

n est un entier relatif.

On rappelle que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

Pour tout entier naturel n, $e^{in\alpha} = \cos\ n\alpha + i\sin n\alpha$; $e^{-in\alpha} = \cos\ n\alpha - i\sin n\alpha$

a) Exprimer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction de $e^{i\alpha}$ et de $e^{-i\alpha}$.

b) Calculer $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}$; $e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}$; $e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha}$.

Retenir

- Pour tout nombre réel α , $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Ces deux formules sont les formules d'Euler.

- Pour tout nombre réel α et pout tout entier naturel n ,
  - $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = 2\cos(n\alpha)$; $e^{in\alpha} - e^{in\alpha} = 2i\sin(n\alpha)$.
  - $e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} = 1$.

Exemple

1) Exprimons $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$

$\cos 4x + i\sin 4x = (\cos x + i\sin x)^4$. Posons $A = (\cos x + i\sin x)^4$

$A = (\cos x)^4 + 4i\cos^3 x\sin x + 6\cos^2 x(i\sin x)^2 + 4\cos x(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4$;

$A = (\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x) + i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)$.

D'où $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$ et $\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$.

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2$

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$:

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

2) Linéarisons :

a) On rappelle que $\cos a = \left(\dfrac{1}{2}\right)(e^{ia} + e^{-ia})$.

$\cos a\ \cos b = \left(\dfrac{1}{2}\right)(e^{ia} + e^{-ia}) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)(e^{ib} + e^{-ib})$

$\cos a \cos b = \frac{1}{4}\left[e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right]$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$

b) $\sin a \sin b = \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ia} - e^{-ia}) \times \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ib} - e^{-ib})$

$= -\frac{1}{4}[e^{ia}e^{ib} - e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}\ e^{-ib}]$

$= -\frac{1}{4}[(e^{i(a+b)} - e^{-i(a-b)} - e^{i(a-b)} + e^{-i(a+b)}]$

$= -\frac{1}{4}\left[\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) - \left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right)\right]$

$= -\frac{1}{4}\left[2\cos(a+b) - 2\cos(a-b)\ \right] = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$

c) $\sin a \cos b = \left(\frac{1}{2i}\right)(e^{ia} - e^{-ia})\frac{1}{2}(e^{ib} + e^{-ib})$

$= \frac{1}{4i}(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})$

$= \frac{1}{4i}[e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{ib} - e^{-ia}\ e^{-ib}]$

$= \frac{1}{4i}[(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}]$

$= \frac{1}{4i}[2i\sin(a+b) + 2i\sin(a-b)\ ].$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$

d) Linéarisons $\cos^5 x$ et $\sin^5 x$.

$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}(e^{ix} + e^{-ix})^5$

$= \frac{1}{2^5}[e^{5ix} + 5e^{4ix}\ e^{-ix} + 10e^{3ix}\ e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix}]$

$= \frac{1}{2^5}[e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}]$

$= \frac{1}{2^5}[(e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{ix})]$

$$= \frac{1}{2^5}(2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 100\cos x).$$

e) $\sin^5 x = \frac{1}{2^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5$

$$= \frac{1}{(2i)^5}[e^{5ix} - 5e^{4ix}\, e^{-ix} + 10e^{3ix}\, e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5}[e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5}[(e^{5ix} - e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{ix})]$$

$$= \frac{1}{(2i)^5}[(2i\sin 5x) + 5(2i\sin 3x) + 10(2i\sin x)]$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}[\sin 5x + 5\sin 3x + 10\sin x].$$

S'exercer

2.o À l'aide de la formule de Moivre justifier que le nombre $(1+i\sqrt{3})^{2001}$ est un nombre réel.

2.p Calculer les valeurs exactes des produits

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$.

2.q On pose : $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a)Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$;

b)Écrire sous forme algébrique $(1+j)^{1995}$ et $(1+j^2)^{1995}$.

2.r Linéariser :

a) $\cos^3 x \sin^3 x$; b) $\sin^5 x$; c) $\cos^7 x$.

2.4 RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.4.1 Racines n-ièmes de l'unité.

Prendre un bon départ

1) Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 1$. Écrire ces nombres sous la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

a) Déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.

Écrire ces nombres sous la forme trigonométrique et la forme exponentielle et placer dans un repère orthonormé direct les images A, B, C de ces nombres.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Soit z un nombre complexe 1 tel que $z = \rho e^{i\theta}$.

Donner la forme trigonométrique z^n.

Déduire que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1$ et z a pour argument $2\dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Expliquer pourquoi il y a exactement n nombres complexes z tels que $z^n = 1$ qui sont $w_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

Retenir

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$ est appelée racine n-ième de l'unité.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes $w_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$ où k prenant tour à tour n valeurs consécutives entières .
- Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les n racines n-ièmes de l'unité sont $\omega, \omega^2,...,\omega^{n-1}$.
- La somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle.

$1+\omega+\omega^2+....+\omega^{n-1} = 0$.

S'exercer

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

$z^4 = 1$; $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.

2.4.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Prendre un bon départ

On considère les nombres complexes $z' = re^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$.

On suppose $z^n = z'$.

a) Utiliser l'égalité de deux nombres complexes écrits sous la forme trigonométrique pour trouver une relation entre ρ^n et r, puis entre $n\theta$ et α.

b) En déduire que $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

c) Montrer qu'il y a exactement n nombres complexes tels que $z^n = z'$.

Retenir

Tout nombre complexe $z = re^{i\alpha}$ admet n racines n-ièmes distinctes; ce sont les nombres $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0;\ 1;\ 2;...;n-1\}$.

Remarque

Les n racines n-ièmes d'un nombre complexe ont toutes le même module, et des arguments qui diffèrent de $\dfrac{2k\pi}{n}$. Leurs images dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct sont les sommets d'un polygone régulier.

Exemple

1) Déterminons les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$.

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Soit $z = re^{i\alpha}$ où $r > 0$.

z est une racine carrée de $1+i\sqrt{3}$ si et seulement si $(re^{i\alpha})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$r^2e^{2i\alpha} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ équivaut $\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\alpha = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$; $\begin{cases} r^2 = \sqrt[3]{2} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$ sont les nombres complexes

$z_k = \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)}$ avec $k \in \{0;1\}$.

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_1 = \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i.$

Déterminons les racines cubiques du nombre complexe $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

$1+i\sqrt{3} = \left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $1-i\sqrt{3} = \left[2;-\dfrac{\pi}{3}\right]$; d'où $z = \dfrac{\left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]}{\left[2;-\dfrac{\pi}{3}\right]} = \left[\dfrac{2}{2};\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right] = \left[1;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Déterminons les nombres complexes $z = [r;\theta]$ tels que $z^3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

$z^3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ équivaut à $[r^3;3\theta] = \left[1;\dfrac{2\pi}{3}\right]$; c'est-à-dire $\begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$;

$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Les racines cubiques de z sont les nombres complexes $z_k = \left[1;\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\right]$; $k \in \{0;1;2\}$.

Ce sont donc les nombres complexes :

$z_0 = \left[1;\dfrac{2\pi}{9}\right]$, $z_1 = \left[1;\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}\right] = \left[1;\dfrac{8\pi}{9}\right]$, $z_2 = \left[1;\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3}\right] = \left[1;\dfrac{14\pi}{9}\right]$.

Recherchons les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z .

Si z_k est l'une d'entre elles, on a $z_k \neq 0$ d'où $z_k^n = Z$.

$z^n = Z$ équivaut à $(z^n = z_k{}^n)$; soit $\left(\dfrac{z}{z_k}\right)^n = 1$.

Autrement dit $\dfrac{z}{z_k}$ est une racine n-ième de l'unité.

Par conséquent les racines n-ièmes de z s'obtiennent en faisant les produits de l'une d'entre elles par les n racines n-ième de 1.

Exemple : Cherchons à résoudre $z^4 = (1+3i)^4$.

$z^4 = (1+3i)^4$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{1+3i}\right)^4 = 1$.

$\dfrac{z}{1+3i}$ est une racine quatrième de 1. Or les racines quatrièmes de 1 sont, 1; i; -1; $-i$.

Donc les solutions de l'équation proposée sont :

$1(1+3i) = 1+3i$; $i(1+3i) = i+3i^2 = -3+i$; $-1(1+3i) = -1-3i$ et $-i(1+3i) = 3-i$.

Les racines quatrième de $1+3i$ sont $1+3i$; $-3+i$; $-1-3i$; $3-i$.

LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$.

- Résoudre les équations du premier degré dans $\mathbb{C}$;
- Résoudre les systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$;
- Résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$;
- Déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à trois.

3.1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{C}$

3.1.1 Équations du type $az + b = 0$, où a et b sont des nombres complexes et système d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$.

Prendre un bon départ

1) Déterminer si possible le nombre complexe z dans chacun des cas suivants:

a) $(2+3i)z-2+5i=3$;

b) $(2-3i)z+1+2i=2z-3iz-2+5i$;

c) $(2-i)z=2(z+1)-iz-5i.$

2) Déterminer les nombres complexes z et z' tels que:

$$\begin{cases}(1+i)z+2iz'=1+i\\ iz-(3-2i)z'=-i\end{cases}$$

Retenir

• Une équation de la forme $az+b=0$ où a et b sont des nombres complexes dans $\mathbb{C}$:

admet une seule solution unique si $a \neq 0$. Cette solution est $-\frac{b}{a}$. Dans ce cas l'équation est dite du premier degré.

• admet une infinité de solutions si $a=b=0$.

• n'admet aucune solution si $a=0$ et $b \neq 0$.

• Tout système de la forme $\begin{cases}az+bz'=c\\ a'z'+b'z'=c'\end{cases}$ où a,b,c,a',b' *et* c' (a et b' non tous nuls) [illegible] des nombres complexes est un système d'équations linéaires à 2 inconnues dans $\mathbb{C}$.

S'exercer

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnues z suivantes:

a) $(2+5i)z = 4-2i$; b) $iz-2 = 2z+1+i$; c) $(2+i)(z+3+i)\left(iz+\frac{1}{2i}\right)=0$;

d) $\frac{2-i}{1-2i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$; e) $(2+3i)z = (1+2i)^2$.

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'équations linéaires $\begin{cases}(2+3i)z-3iz'=1-i\\(-1+2i)z+(3-i)z'=i\end{cases}$

3.2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Prendre un bon départ

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 = 16$; b) $z^2 = -49$; c) $z^2 = -3$; d) $z^2 = -\sin^2 t$.

Activité 2

Soit le nombre complexe $a = 3-4i$.

Soient $z = x+iy$ tel que $z^2 = 3-4i$.

1) Montrer que l'on a $\begin{cases}x^2-y^2=3\\2xy=-4\end{cases}$.

2) A partir de la deuxième équation du système, exprimer x en fonction de y

puis substituer dans la première équation. Résoudre l'équation bicarré obtenue d'inconnue y.

En déduire les solutions du système, puis les valeurs de z.

3) Calculer $|a|$ et montrer que $x^2+y^2=5$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}x^2-y^2=3\\x^2+y^2=5\\2xy=-4\end{cases}$ et en déduire tous les nombres complexes dont

les carrés sont égaux à a.

Retenir

Soit un nombre complexe $Z = a + ib$ tel que $|Z| = r$.

- Un nombre complexe $z = x + iy$ est une racine carrée de Z si et seulement si $z^2 = Z$.
- Pour déterminer les valeurs de x et y il suffit de résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ 2xy = b \end{cases}$.

Remarque

- Tout nombre complexe non nul admet toujours deux racines carrées opposées.
- Pour résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ 2xy = b \end{cases}$, il suffit de résoudre les deux premières équations et ensuite tenir compte du signe de b pour choisir les couples $(x; y)$.

Si $b > 0$, x et y sont de même signe.

Si $b < 0$, x et y sont de signes contraires.

Exemple

1) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $Z = -3 - 4i$.

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z.

$z^2 = Z$ équivaut à $(x + iy)^2 = -3 - 4i$;

$x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$. Cette égalité est réalisée si et seulement si $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$.

D'autre part $Z = z^2$ entraine $|Z| = |z^2|$. Or $|z^2| = (|z|)^2 = x^2 + y^2$.

$|3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Résolvons le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$.

En additionnant membre à membre les deux premières équations on trouve $2x^2 = 2$; soit $x^2 = 1$ d' où $x = 1$ où $x = -1$.

En multipliant la première équation par -1 et la deuxième par 1 et en additionnant membre à membre les équations obtenues on a $2y^2 = 8$;soit $y^2 = 4$; d'où $y = 2$ ou $y = -2$.

xy étant négatif, x et y sont de signes contraires.

pour $x=1; y=-2$ et pour $x=-1; y=2$.

Les racines carrés du nombre complexe $-3-4i$ sont $1-2i$ et $-1+2i$.

Déterminons les racines carrées de $z=-\cos^2\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$

$(-\cos^2\theta)=(i^2\cos^2\theta)=(i\cos\theta)^2=(-i\cos\theta)^2$.

Les racines carrées de $(-\cos^2\theta)$ sont $(i\cos\theta)$ et $(-i\cos\theta)$.

S'exercer

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=48+14i$.

Soit b un nombre réel strictement négatif. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2=b$.

2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Prendre un bon départ

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$Z^2+3=0$; b) $Z^2+4Z+8=0$; c) $Z^3+8=0$ et d) $Z^3-i=0$

Activité 2

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients complexes $az^2+bz+c=0$.

Montrer que $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

Montrer que l'équation $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ admet dans $\mathbb{C}$ soit une racine soit deux racines distinctes.

Retenir

Pour résoudre une équation du second degré $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes dans $\mathbb{C}$,

- On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$
- On détermine une racine carrée de Δ.
- si $\Delta=0$, cette équation admet une racine qui est $z_0=\frac{-b}{2a}$ et

$az^2+bz+c=a(z-z_0)^2=a(z-z_0)(z-z_0)$.

• si $\Delta \neq 0$, alors cette équation admet deux racines distinctes

$z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant Δ.

Dans ce cas $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

Exemple

1) Considérons l'équation $2Z^2+2Z+3=0$, équivalente à $z^2+z+\dfrac{3}{2}=0$.

On a : $\left[\left(Z+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\right]=0$

$\left(Z+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}=0 \Leftrightarrow \left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(i\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=0$

$\left(Z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z+\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}\right)=0$

$Z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$ ou $Z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$

L'équation admet deux racines complexes conjuguées $Z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$ *et* $Z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$

2) Considérons l'équation $iz^2+z-3+i=0$.

$\Delta=1^2-4i(-3+i)=1+12i+4=5+12i$.

Déterminons une racine carrée de Δ.

Soit $x+iy$ une racine carrée de Δ .

On a : $(x+iy)^2=5+12i$

D'où : $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=12 \\ x^2+y^2=\sqrt{5^2+11^2}=13 \end{cases}$.

D'où $x=3$ *ou* $x=-3$ et $y=2$ ou $y=-2$.

Or $xy>0$ donc x et y sont de même signe.

Les racines carrées de Δ sont $3+2i$ et $-3-2i$.

Choisissons $\delta=3+2i$ l'une de ces racines carrées.

$z_1=\dfrac{-1-\delta}{2i}=\dfrac{-1-3-2i}{2i}=\dfrac{-4-2i}{2i}=-1+2i$

$z_2=\dfrac{-1+\delta}{2i}=\dfrac{-1+3+2i}{2i}=\dfrac{2+2i}{2i}=\dfrac{1+i}{i}=1-i$.

Les solutions de cette équation sont : $-1+2i$ et $1-i$.

Remarque : En choisissant comme racine carrée du discriminant $-3-2i$, on trouve les mêmes solutions.

3) Soit l'équation (E): $z^3+(1-i)z^2+(4-i)z-4i=0$

Cherchons une solution de cette équation de la forme ib $(b\neq 0)$ et $(b\in\mathbb{R})$

On a : $(ib)^3+(1-i)(ib)^2+(4-i)(ib)-4i=0$;

$-ib^3-b^2(1-i)+(4i+1)b-4i=0$;

$(-b^2+b)+i(-b^3+b^2+4b-4)=0$.

D'où $\begin{cases}-b^2+b=0\\-b^3+b^2+4b-4=0\end{cases}$; $\begin{cases}b(-b+1=0\\-b^3+b^2+4b-4=0\end{cases}$; $\begin{cases}b=0 \text{ ou } b=1\\-b^3+b^2+4b-4=0\end{cases}$.

0 ne vérifie pas l'équation $-b^3+b^2+4b-4=0$, par contre -1 est solution de l'équation $-b^3+b^2+4b-4=0$. Le système ci-dessus a donc une seule solution qui est 1. Donc i est une solution de cette équation.

- Trouvons un polynôme $\mathcal{P}$ du second degré tel que : $z^3+(1-i)z^2+(4-i)z-4i=(z-i)\mathcal{P}(z)$

Posons $\mathcal{P}(z)=az^2+bz+c$

On a : $z^3+(1-i)z^2+(4-i)z-4i=(z-i)(az^2+bz+c)$.

Par égalité de deux polynômes on obtient : $\mathcal{P}(z)=z^2+z+4$. soit $a=1$, $b=1$ et $c=4$

- Résolvons (E).

(E) est équivalent à $(z-i)(z^2+z+4)=0$.

Résolvons $z^2+z+4=0$.

Son discriminant est $\Delta=1-4\times 4=-15=15i^2=\left(i\sqrt{15}\right)^2$.

Les solutions de l'équation (E) sont : i, $\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$.

Exercice résolu 1

1) Soit θ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(2\cos\theta)z+1=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=(2\cos\theta)^2-4=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)$.

Or $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta=i^2\sin^2\theta$. Donc $\Delta=(2i\sin\theta)^2$.

Une racine carrée de Δ est $2i\sin\theta$.

Les solutions de l'équation (E) sont $z_1=\frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}=\cos\theta+i\sin\theta$

et $z_2=\frac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}=\cos\theta-i\sin\theta$.

2) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles des imaginaires purs ?

Ces solutions sont des imaginaires purs si et seulement si $\cos\theta=0$; soit $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles des réels.

Ces solutions sont des réels si et seulement si $\sin\theta=0$; soit $\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice résolu 2

1) Soit P un polynôme dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout nombre complexe z :

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ des réels.

Démontrer que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z}_0$ est aussi une racine de P.

Supposons que z_0 est une racine de P. On a $P(z_0)=0$.

a) Démontrons que $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)}$.

$P(\overline{z_0}) = (a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 = \overline{a_n}\,\overline{z}^n + \overline{a}_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0}$. car $a_i = a_i$

$= \overline{a_n z}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{z}^{n-1} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$ car le conjugué d'un nombre réel est égal à lui-même

D'autre part $(\overline{z}^n = \overline{z}^n$ pour tout entier naturel n.

On en déduit que $P(\overline{z_0}) = \overline{a_n z_0{}^n + a_{n-1} z_0{}^{n-1} + ... + a_1 z_0\ a_0} = \overline{P(z_0)}$.

b) Déduisons que z_0 est aussi une solution de P(z) = 0.

D'après l'hypothèse z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$. Donc $P(z_0) = 0$ et par suite

$P(\overline{z_0}) = \overline{0}$; donc $P(\overline{z_0}) = 0$. D'où $\overline{z}_0$ est aussi une solution

de P(z)=0 ; $\overline{z}_0$ est donc une racine de P.

Exemple : Soit l'équation $P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18$.

$P(1+i) = (1+i)4 - 6(1+i)3 + (1+i)^2 + 10(1+i) - 18$

$= (2i)^2 - 6(2i)(1+i) + 2i + 10 + 10i - 18$

$= -4 - 12i + 12 + 12i - 8 = 0.$

$P(1+i) = 0$, donc $1+i$ est une solution de $P(z) = 0$.

Comme $1+i$ est solution de cette équation, $1-i$ l'est aussi car tous les monômes de ce polynôme ont des coefficients réels.

$P(z) = (z-(1+i)\ )(z-(1-i)\ )(az^2 + bz + c).$

$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c).$

Développons $(z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c)$.

$(z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c) = az^4 + (b-2a)\,z^3 + (c - 2b + 2a)z^2 + (-2c + 2b)z + 2c$

Or $P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18$.

Par identification, on a le système $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -6 \\ 2b - 2c = 10 \\ 2a - 2b + c = 1 \\ 2c = -18 \end{cases}$;

Soit $a = 1$; $b = -4$ *et* $c = -9$.

$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z - 9).$

$P(z) = 0$ équivaut à $(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z - 9) = 0$, qui est équivalent à $z^2 - 2z + 2 = 0$ ou $z^2 - 4z - 9 = 0$.

Résolvons l'équation $z^2-4z-9=0$.

Son discriminant $\Delta=16+36=52=\left(2\sqrt{13}\right)^2$.

Les solutions de cette équation sont $\frac{4+2\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{4-2\sqrt{13}.}{2}$

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont $1+i$; $1-i$; $2+\sqrt{13}$ et $2-\sqrt{13}$.

S'exercer

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$z^2+9=0$; b) $z^2+4z+29=0$; c) $z^2-2z+3=0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$z^4-8=0$; b) $z^4-16=0$; c) $z^4+2z^2=0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$z^2=-4i$; b) $z^2=44+16i\sqrt{3}$; c) $z^2=15+8i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^4-4iz^2-4=0$; b) $z^4+6z^2+25=0$; c) $z^4-10z^2+169=0$.

P est le polynôme défini par : $P(z)=z^3-3z^2+(3-i)z-2+2i$.

i. Vérifier que P admet une racine réelle α.

ii. Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z)=(z-\alpha)(z^2+az+b)$.

iii. Résoudre alors l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

3.2.3 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Prendre un bon départ

Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes ($a\neq 0$);

δ un nombre complexe tel que $\delta^2=b^2-4ac$, $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$

les solutions de cette équation. Calculer z_1+z_2 et z_1z_2.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

(a est un nombre complexe non nul).

Montrer que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $(z-z_2)(z-z_2)=0$ et en déduire que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Retenir

Les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes ($a\neq 0$) sont des nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{b}{a} \\ z_1z_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Remarque

Si S et P sont deux nombres complexes donnés, les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1+z_2=S \\ z_1z_2=P \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $Z^2-SZ+P=0$.

Exemple

1) Soit l'équation du second degré (E) : $z^2+(-5+2i)z+9-7i=0$.

a) Montrons que $3+i$ est une solution de (E).

$(3+i)^2+(-5+2i)(3+i)+9-7i=9+6i-1-15-5i+6i-2+9-7i=0$.

$3+i$ est donc une solution de (E).

b) Sans calculer le discriminant, déterminons la deuxième solution de (E).

Soit z' l'autre racine de (E). On a $z'+3+i=5-2i$ et $(3+i)\,z'=9-7i$ car la somme S des racines de cette équation est $\dfrac{-(-5+2i)}{1}=5-2i$ et le produit est $\dfrac{9-7i}{1}=9-7i$.

$z'+3+i=5-2i$; $z'=2-3i$. On peut aussi utiliser le fait que $(3+i)\,z'=9-7i$ et en déduire

$z'=\dfrac{9-7i}{3+i}=\dfrac{(9-7i)(3-i)}{9+1}=\dfrac{27-7-30i}{10}=2-3i$.

Remarque : l'expression du produit ou de la somme des racines peut permettre de trouver la deuxième racine connaissant la première. Mais il préférable de choisir l'expression la plus simple.

Pour l'exemple ci-dessus l'expression de la somme permet de trouver plus facilement la deuxième racine.

2) Soit m un paramètre réel. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux réels x_1 et x_2 distincts tels que $x_1+x_2=2$ et $x_1x_2=m^2$

Il existe deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $x_1+x_2=2$ et $x_1x_2=m^2$ si et seulement si $2^2-4m^2>0$. C'est-à-dire $4-4m^2\geq 0$; soit $m\in\,]-1;1[$.

3) Soit m un paramètre réel. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux nombres complexes z_1 et z_2 distincts tels que $z_1+z_2=2$ et $z_1z_2=m^2$

deux réels distincts z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = 2$ et $z_1 z_2 = m^2$ si et seulement $-4m^2 \neq 0$; soit $m \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$.

S'exercer

déterminer les racines de l'équation à coefficients complexes

$z^2 + (-1+3i)z + 4 - 5i = 0$, déterminer la somme et le produit des racines de cette

Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = -4 + i$ et $z_1 z_2 = 1 + 13i$

S'ENTRAÎNER

FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1-i)z - 2i.$

Calculer et mettre sous forme algébrique:

$f(1+i)$; $f(i)$ et $f(2i)$.

2

Déterminer la forme cartésienne de z dans chacun des cas suivants:

a) $z = \dfrac{2-3i}{1+i\sqrt{3}}$; b) $z = (3-i)(5+2i)$;

c) $z = (2-3i)^2$; d) $z = (1+2i)^4$;

e) $z = (2i-1)(2+5i)(2+3i)^2$.

3

Écrire le nombre complexe z sous forme algébrique dans chacun des cas suivants:

a) $z = -3(-2+3i)(5-2i)$;

b) $z = \dfrac{\sqrt{3}+3i}{2+i}$; c) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$; d) $z = \dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$.

4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+3i}{z-4}$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

5

Dans le plan complexe rapporté à un repère le point M´ d'affixe z´ tel que $z' = (z-3)(z-2i)$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

6

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des réels, et M le point image de z dans le plan complexe. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{z+3}{\overline{z}+3}$.

1. a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b) Construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

7

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des réels, et M le point image de z dans le plan complexe. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{iz^2}{\overline{z}+1}$.

2.a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b) Construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

ÉCRITURE SOUS FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET SOUS FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

...sous la forme trigonométrique ...mbres complexes suivants:

$-i\sqrt{3}$; b) $z=\dfrac{1-i}{2i}$;

$\dfrac{2-3i}{7+2i}$; d) $z=\dfrac{(2-3i)(3+i)}{2i}$;

$\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$; f) $z=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$.

...me $Z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=1-i$.

...ire Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

...ire $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ sous forme exponentielle.

...déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

$Z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}$

...miner le module et un argument de Z

...fier que le point M d'affixe Z est situé ...rcle de centre O et de rayon 1.

...quelles valeurs de l'entier naturel ... $=1$

...quelles valeurs de l'entier naturel ... $=-i$?

...miner l'entier naturel p tel que ... $=Z^n$.

...nombre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

...miner le module et un argument de ...les nombres complexes :

$\dfrac{-e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}}$; b) $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$; c) $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.

12

On pose $z=\sqrt{3}+i$, $z'=i-1$ *et* $Z=\dfrac{z}{z'}$.

1) Calculer les modules et les arguments de z et z'.

2) a) Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique de z et z'.

b) Déterminer l'écriture sous forme trigonométrique et exponentielle de Z.

3) Déterminer l'écriture sous forme exponentielle, sous forme trigonométriques, et algébriques de Z^3.

13

Soit le nombre complexe : $z=1+i\sqrt{3}$, démontrer que les images dans le plan complexe des nombres z, $-z$, z^2, $\dfrac{2}{z}$ sont cocycliques.

14

Soient les nombres complexes :

$z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2=\dfrac{i}{2i\sqrt{3}-2}$.

Calculer z_1+z_2, $z_1\times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1^6\times z_2^{12}$ et $\dfrac{z_1^8}{z_2^3}$. (On donnera tous les résultats sous la forme algébrique la plus simple).

15

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument α.

1) Calculer, en fonction de α, le module et l'argument du nombre complexe $Z=1+z+z^2$.

2) Représenter dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

a. L'ensemble (E_1) des points M(z) tels que :

$arg\,Z\equiv\left(\dfrac{\pi}{3}\right)(2\pi)$.

b. L'ensemble (E_2) des points M(z) tels que :

$arg Z \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)(\pi)$.

c. L'ensemble (E_3) des points M(z) tels que :

$|Z| = 2$ et $R_e(Z) = 1$.

d. L'ensemble (E_4) des points M(z) tels que :

$|Z| = 1$ et $arg Z = \left(\frac{2\pi}{3}\right)(\pi)$.

16

En utilisant l'égalité qui semble la plus adaptée, déterminer :

a. L'ensemble (F) des points M(z) tels que :

$\frac{z+1}{z+1}$ soit un réel strictement positif.

b. L'ensemble (G) des points M(z) tels que :

$\frac{iz+1}{iz-1}$ soit imaginaire pur.

c. L'ensemble (H) des points M(z) tels que :

$\frac{iz}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ soit imaginaire pur.

17

α est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ et z le nombre complexe défini par : $z = 1 + e^{-i\alpha}$.

1. Calculer |z|, argz, arg $\frac{1}{z}$ en fonction de α.

2. Soient les points M(z) et $M'\left(\frac{1}{z}\right)$.

Déterminer le lieu géométrique de M puis de M' lorsque α d'écrit $]-\pi,\pi[$.

18

Calculer les racines cubiques du nombre complexe $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.

19

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{1-\cos\theta+i\tan\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$. ($\pi <$

20

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1+i)$.

21

Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $8\sqrt{2}(-1-i)$.

22

Déterminer les racines cinquième du nombre complexe $z = 32i$.

23

Déterminer les racines sixièmes du nombre complexe $z = 32(i-\sqrt{3})$.

24

1) Résoudre et discuter l'équation :

(E) : $2(1+\cos 2\theta)z^2 - 2(\sin 2\theta)z + 1 = 0$, θ un paramètre réel donné tel que $0 \leq \theta \leq$

2) Quel est, dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points images des solutions de cette équation quand $\theta \in$

25

Donner la forme algébrique et la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z suivant:

$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$z = (1 - i\sqrt{3})(1+i)$; $z = 2i(\sqrt{3}-i)$; $z =$

$z = \frac{1}{2+2i}$; $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$;

$z = (\sqrt{3}+i)^2$; $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

l'argument du nombre

$\frac{\cdots + i\tan\theta}{\cdots - i\sin\theta}$. $(\pi < \theta < 2\pi$

es cubiques du nombre

es quatrièmes du nombre

$-i$).

es cinquième du nombre

es sixièmes du nombre

$-\sqrt{3}$).

cuter l'équation :

$z^2 - 2(\sin 2\theta)z + 1 = 0$, où

donné tel que $0 \leq \theta \leq \pi$

un plan rapporté à un

emble des points image

équation quand $\theta \in$

algébrique et la forme

chacun des nombres

vant:

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$z = 2i(\sqrt{3} - i)$; $z =$

$\frac{1+i}{\cdots + i\sqrt{3}}$;

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

le nombre complexe z sous la forme

ielle.

-3 ; b) $z = \sqrt{3} + 3i$;

$\frac{\sqrt{2}}{\cdots - i}$; d) $z = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}}$.

les points d'affixes z_1; z_2 et z_3 dans un

thonormé direct du plan affine.

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{3}e^{-5i\frac{\pi}{6}}$.

$-i$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_3 = \frac{2}{1-i}$.

$\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

uler z^2.

miner le module et un argument de z^2.

uire un module et un argument de z.

xercices qui suivent le plan est

à un repère orthonormé direct

, B , C trois points d'affixes respectives

$-i$, $6 + 5i$, I le milieu de [BC].

miner l'affixe de I.

uler AB, BC, AC et AI.

ier que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

miner l'ensemble des points M d'affixes z

$\left|\frac{2i - z}{z + 1 + i}\right| = 1$.

31

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $1+i, 1+\frac{1}{2}i, \frac{3}{2}+i$.

a) Calculer une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

b) Donner la nature du triangle ABC.

32

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$, $(2+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

Calculer une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

33

Soient A et B les points d'affixes $\frac{1}{2}$ et -1.

Déterminer l'affixe z du point M tel que $\frac{MA}{MB} = 2$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{4}$.

34

Linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$;

b) $\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$;

c) $\cos^5 x \sin^3 x$.

35

On considère le nombre complexe $a = -\sqrt{3} + i$

1. déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels a^n est un nombre réel.

4. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

nombre complexe z sous la forme
nielle.

; b) $z=\sqrt{3}+3i$;

$\frac{\sqrt{2}}{1-i}$; d) $z=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$.

les points d'affixes z_1; z_2 et z_3 dans un
orthonormé direct du plan affine.

$; z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3=\sqrt{3}e^{-5i\frac{\pi}{6}}$.

$-i$; $z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_3=\frac{2}{1-i}$.

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.
uler z^2.
miner le module et un argument de z^2.
duire un module et un argument de z.

**exercices qui suivent le plan est
rté à un repère orthonormé direct**

, B , C trois points d'affixes respectives
$-1-i$, $6+5i$, I le milieu de [BC].
miner l'affixe de I.
uler AB, BC, AC et AI.

ier que $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$.

ner l'ensemble des points M d'affixes z
: $\left|\frac{2i-z}{z+1+i}\right|=1$.

31

Soient A, B, C les points d'affixes respectives
$1+i, 1+\frac{1}{2}i, \frac{3}{2}+i$.

a) Calculer une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

b) Donner la nature du triangle ABC.

32

Soient A, B, C les points d'affixes respectives
$1+2i$, $2+i$, $(2+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.
Calculer une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

33

Soient A et B les points d'affixes $\frac{1}{2}$ et -1.
Déterminer l'affixe z du point M tel que
$\frac{MA}{MB}=2$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})=\frac{\pi}{4}$.

34

Linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$;

b) $\sin^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x$;

c) $\cos^5 x\sin^3 x$.

35

On considère le nombre complexe $a=-\sqrt{3}+i$

1. déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.

2. En déduire les valeurs exactes de
$\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels a^n est un nombre réel.

4. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

36

Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{C}^2$.

a) $\begin{cases} z+z'=3 \\ 2z-z'=i \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3z+z'=5+2i \\ -z+z'=1-2i \end{cases}$;

c) $\begin{cases} z-2iz'=5i \\ 2z-(1+i)z'=-2+6i \end{cases}$;

d) $\begin{cases} (1+i)z+(1-i)z'=2+i \\ 3z-2iz'=4-i \end{cases}$;

37

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$; b) $z^2-1=0$;

c) $z^2+2z+2=0$; d) $(z+1)^3=z^3$.

e) $z^3-1=0$; f) $z^4+z^2+1=0$.

38

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3+(6-3i)z^2+(13-18i)z-39i$.

1. Démontrer que P admet une solution imaginaire z_0.

2. Démontrer l'existence de deux réels α et β tels que : $P(z)=(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

39

P est le polynôme de variable complexe z défini par : $P(z)=z^4-2z^3+6z^2-2z+5$

1. Établir que pour tout nombre complexe z, $P(\overline{z})=\overline{(P(z))}$.

2. En déduire que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z}_0$ l'est aussi.

3. Calculer P(i) et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

40

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par $P(z)=z^3-2z^2-iz+3-i$.

1) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

2) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne : A$(1-i)$; B$(2+i)$ et C(-1).

a)Démontrer que l'origine du repère est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1,1 et 3.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$|z-z_A|^2+|z-z_B|^2+3|z-z_C|^2=55$

41

P est le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$P(z)=z^4+3z^3+\frac{9}{2}z^2+3z+1$.

1. Montrer que $P(\overline{z})=\overline{(P(z))}$ et en déduire si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$ alors $\overline{z}_0, \frac{1}{Z_0}, \frac{1}{\overline{Z}_0}$ sont aussi des solutions de cette équation.

2. Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution de la forme $a+i$ où a est réel à déterminer.

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

42

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{2Z+1}{Z-1}\right)$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Pour tout point M du plan d'affixe z on pose $Z'=\frac{z^2}{z+i}$

i) Déterminer et représenter l'ensemble

M(z) tels que Z' soit imaginaire pur.

dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$-2az-2a=0$ où a est un réel.

que les points images des

de (E) sont les éléments de (Γ).

était-il prévisible ?

dère les équations suivantes :

$=\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

$\left(\dfrac{1+iZ}{1-iZ}\right)^n=\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

trer que toutes les solutions de

pour module 1.

trer que toutes les solutions de

des nombres réels.

dre (E_2) pour $a=3$ et $n=4$.

complexe est rapporté à un repère

é direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne :

B(1);C$\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et D(2). À tout point

$=2$), on associe le point M'(Z') tel que

$\dfrac{z-1}{z-z}$.

trer que $|Z'|=\dfrac{2CM}{DM}$.

miner l'ensemble des points

tel que; $|Z'|=1$.

miner l'ensemble des points M(z)

que Z' est un réel strictement positif.

un réel ; calculer z^n pour tout entier

nel n.

$=1+\cos\theta+i\sin\theta$;

$=1-\cos\theta+i\sin\theta$.

45

Soit z un nombre complexe non réel ; A, B, C sont les points d'affixes z, z^2 et z^3.
Trouver l'ensemble des points A tel que le triangle ABC soit rectangle en C.

46

θ désigne un réel appartenant à $[0;2\pi]$.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z :
$z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$.
b) Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
c) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;u,v)$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

47

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A , B et M les points d'affixes respectives ,1,−2 et z,où z représente un nombre complexe différent de 1 et de −2. On pose $Z=\dfrac{z+2}{z-1}$; |Z| désigne le module de Z et arg Z désigne un argument de Z appartenant à $[-\pi;\pi[$.

1) Justifier que $|Z|=\dfrac{BM}{AM}$ et que arg Z est une mesure, en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.
Utilise la question 1) pour déterminer géométriquement les ensembles suivants :
(E) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que Z est un réel.
(F) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que Z est un imaginaire pur.

(G) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$.

(H) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|Z|=1$.

48

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$.

1) Sachant que (E) admet une solution réelle, la déterminer puis résoudre l'équation (E) dans C.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, les trois points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) définissent un triangle. Démontrer que ce triangle est rectangle isocèle.

49

Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$P(z) = z^4 - 3z^3 + 9/2\, z^2 - 3z + 1$.

(E) désigne l'équation $P(z) = 0$.

1) Montrer que si un nombre complexe z est solution de (E), alors le conjugué de z et $\frac{1}{z}$ sont aussi des solutions de (E).

2)Vérifier que $1+i$ est une solution de (E), puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

3) Ecrire P(z) sous forme d'un produit de deux polynômes de deuxième degré à coefficients réels.

50

On donne $z = -8(1+i\sqrt{3})$.

1) Montrer que $z_1 = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de z.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 8 -$ Donner le module et un argument de chaque solution.

51

1) Déterminer, sous forme exponentielle, les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}\ (-1+$

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

52

1) Montrer que pour tout nombre complexe différend de 1 on a l'égalité

$$\frac{z^4-1}{z-1} = z^3 + z^2 + z + 1.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

3) En déduire l'ensembles des solutions dans l'équation dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$

Chapitre 5

PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS NON NULS

(Série C uniquement)

LEÇON 1 PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS NON NULS

1.1 PGCD DE DEUX ENTIERS NON NULS

1.1.1 Détermination du pgcd de deux entiers non nuls.

1.1.2 Écriture du pgcd($a;b$) comme combinaison linéaire de a et de b.

1.1.3 Relation entre pgcd($ka;kb$) et pgcd($a;b$).

1.1.4 Identité de bezout et quelques unes de ses applications

1.2 PPCM DE DEUX ENTIERS

1.2.1 Détermination du PPCM de deux entiers

1.2.2 Relation entre PPCM($ka;kb$) et PPCM($a;b$).

1.2.3 Relation entre PGCD($a;b$) et PPCM($a;b$).

LEÇON 2 NOMBRES PREMIERS ET ÉQUATIONS DANS $\mathbb{Z}^2$ DU TYPE $ax + by = c$

2.1 ÉQUATIONS $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.

2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION DE TOUT ENTIER EN PRODUIT DES PUISSANCES ENTIÈRES DES NOMBRES PREMIERS.

2.3 DIVISEURS D'UN ENTIER NON NUL.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 PGCD ET PPCM DE DEUX ENTIERS NON NULS

- Consolider la détermination du PGCD et du PPCM de deux entiers à partir de leurs décompositions en produit de puissances des nombres premiers
- Calculer le PGCD de deux entiers par l'algorithme d'Euclide ;
- Reconnaître deux entiers premiers entre eux et savoir mettre une fraction sous forme irréductible ;
- Utiliser l'identité de Bezout pour :
  - montrer que deux entiers sont premiers entre eux ;
  - déterminer une solution particulière de l'équation $ax + by = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$.
- Utiliser la relation $pgdc(ka;kb)=|k|\,p\gcd(a,b)$ pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes d'équations du type : $\begin{cases} pgdc(x;y)=d \\ x+y=c \end{cases}$.
- Utiliser les relations $ppcm(ka;kb)=|k|\,ppcm(a;b)$ et $|ab|=pgcd(a,b)\times ppcm(a,b)$ pour résoudre des équations et système d'équations dans $\mathbb{Z}$.

1.1 PGCD DE DEUX ENTIERS NON NULS

1.1.1 Détermination du pgcd de deux entiers non nuls.

Prendre un bon départ

Activité 1 :
Déterminer les ensembles $D^+(48)$ et $D^+(18)$ de tous les diviseurs positifs de 48 et de 18.
Donner le plus grand des diviseurs positifs, communs à 48 et à 18.
Retrouver ce résultat en utilisant les écritures respectives de 48 et de 18 sous forme de produ des puissances entières de nombres premiers.
Calculer PGCD(1 ; n); PGCD(16;32); PGCD(1024;100).

Activité 2 :
Soit a et b deux entiers non nuls, d un entier.
Montrer que si d divise à la fois a et b, alors d devise $a-b$
Montrer que si d divise a et $a-b$, alors d divise a et b.
Conclure que tout diviseur commun à a et à b, est aussi commun à a et à $a-b$.
En déduire que si r est le reste de la division euclidienne de a par b,
alors PGCD($a;b$)=PGCD($b;r$).
Calculer PGCD(6300;820).

Retenir

- Le plus grand commun diviseur de deux entiers relatifs non nuls a et b est l'entier naturel noté PGCD$(a;b)$ ou pgcd$(a;b)$ qui est le plus grand des diviseurs positifs de a et de b.
- Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors PGCD$(a;b)$=PGCD$(b;r)$.
- PGCD$(a;b)$ = PGDC$(b;a)$ = PGCD$(|a|;|b|)$;
- PGCD$(1;a)$ = 1.
- a divise b si et seulement si PGCD$(a;b) = |a|$.
- Deux entiers non nuls sont dits **premiers entre eux ou encore étrangers** , lorsque leur PGCD vaut 1.
- Si un entier d divise a et divise b alors d divise pgcd(a,b).

Exemple

1) Calculons PGCD(1250 ;80) par l'algorithme d'euclide.

On peut écrire :

$1250 = 15\times 80 + 50$; $80 = 1\times 50 + 30$; $50 = 1\times 30 + 20$; $30 = 1\times 20 + 10$;

$20 = 2\times 10 + 0$.

$PGCD(1250;80) = PGCD(80;50) = PGCD(50;30) = PGCD(30;20) = PGCD(20;10) = 10$

car 10 divise 20. Cette illustration du calcul du PGCD de deux entiers est l'algorithme d'Euclide. Parmi les différents restes des divisions successives obtenues, on a retenu l'avant dernier, soit le dernier reste non nul.

2) Soit n un entier non nul. Montrons que pgcd$(n;n+1) = 1$.

$n+1 = 1\times n + 1$. pgcd$(n;n+1)$ = pgcd$(n;1)$=1 .

Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, et la fraction $\frac{n+1}{n}$ est irréductible.

3) Soient p et q deux entiers premiers distincts. Montrons que p et q sont premiers entre eux.

Soit d un diviseur de p et de q. $d \in \{1;p\} \cap \{1;q\}$. Puisque $p \neq q$, $d = 1$. p et q sont alors premiers entre eux.

S'exercer

1) Calculer :PGCD(165;337); PGCD(1680;225); PGCD(–84;200).

2) Montrer que PGCD$(5n - 3; n + 1)$ est un diviseur de 8. Donner sa valeur dans les cas n pair et n impair.

3) Montrer que si p est un nombre premier et a un entier quelconque non nul, alors si p ne divise pas a, alors p est étranger avec a.

4) Montrer que si p est un entier premier tel que p devise $a \times b$, alors p divise a ou p devise b.

1.1.2 Écriture du pgcd($a;b$) comme combinaison linéaire de a et

Prendre un bon départ

i) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer PGCD(1024;65);PGCD(750;60).
Trouver dans chacun des cas suivants un couple $(x;y)$d'entiers.
a) $1024x + 65y = 1$; b) $1024x - 65y = 7$; c) $750x - 60y = 30$; d) $-750x + 60 = 0$.
ii) Énoncer une conjecture sur l'existence d'un entier égal à la combinaison de deux entiers donnés.

Retenir

Soient a et b sont deux entiers non nuls et $\delta = \text{pgcd}(a;b)$ tout multiple de δ peut s'écrire comme combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers.

Exemple

Prenons $a = 300$ et $b = 26$. Recherchons leur PGCD par l'algorithme d'Euclide.

Détermination du pgcd par divisions successives	Présentattion des restes dans les divisions successives	Détermination des coefficients de combinaison donnant le pgcd
$300 = 26 \times 11 + 14$	$14 = 300 - 26 \times 11$	$14 = a - 11b$
$26 = 14 \times 1 + 12$	$12 = 26 - 14 \times 1$	$12 = b - (a - 11b) = -a + 12$
$14 = 12 \times 1 + 2$	$2 = 14 - 12 \times 1$	$2 = a - 11b - (-a + 12b) = 2a$
$12 = 2 \times 6 + 0$ PGCD $(300,26) = 2$	$0 = 12 - 6 \times 2$	

On a donc PGCD$(a;b) = 2a - 23b = a \times 2 + b(-23)$
2) Cherchons un couple $(x;y)$ tels que $13x - 17y = -6$.
$17 = 1 \times 13 + 4$; $13 = 3 \times 4 + 1$; $4 = 4 \times 1 + 0$. Pgcd(17 ;13)=1.

$$1 = 13 - 3 \times 4$$
$$= 13 - 3 \times (17 - 1 \times 13)$$
$$= -3 \times 17 + 4 \times 13.$$

Ainsi, $13 \times 4 - 17 \times 3 = 1$ et donc $13 \times (4 \times (-6)) - 17 \times (3 \times (-6)) = -6$;
soit $13 \times (-24) - 17 \times (-18) = -6$.
On prend $x = -24$ et $y = -18$. D'autres choix sont possibles !
Le couple $(-24;-18)$ est une solution particulière de l'équation
$13x - 17y = -6$ dans $\mathbb{Z}^2$.

S'en convaincre

Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent comme combinaisons linéaires à coefficients entiers des entiers a et b,

E est par définition une partie de $\mathbb{N}$;

Puisque $a = a \times 1 + b \times 0$, a est un élément de E. E est non vide . Par conséquent, E admet un plus petit élément qu'on note p. Il existe deux entiers c et d tels que $p = ca + db$.
Soit m un multiple de PGCD($a;b$); r le reste de la division euclidienne de m par p. On peut écrire $m = pq + r$ où $0 \leq r < p$. $r = m - pq = m - apc - bpd$. Puisque m est multiple de a, il existe $q \in \mathbb{Z}$ $m = aq'$. D'où, $r = a(q' - pc) + b(-pd)$. Ainsi, $r \neq 0$, et r est un élément de E et est plus petit que le plus petit élément p de E. Ce qui est absurde.

Conséquence
Tout entier divise à la fois a et b, alors il divise PGCD($a;b$).

S'exercer

Montrer que $23 \times (-3) + 17 \times 4 = -1$. En déduire que PGCD(23;17)=1.
On pose $a = 200$ et $b = 36$. Déterminer PGCD($a;b$) et l'écrire comme combinaison linéaire de a et b.

1.3 RELATION ENTRE PGCD(*ka;kb*) et PGCD(*a;b*).

Prendre un bon départ

Calculer PGCD(400 ;125), puis PGCD(3 ×125; 3 × 400).
Compléter PGCD(3 × 125; 3 × 400) =...× PGCD(125; 400).
Soit d' = PGCD($a;b$) et d =PGCD($ka;kb$) où k est un entier non nul.
Montrer que kd' divise d.
Soit k' l'entier non nul tel que $d = k'kd'$.
Montrer qu'il existe deux entiers e et f tels que $ka = de$ et $kb = df$.
En déduire que $a = k'd'e$ et $b = k'd'f$, et que $k'd'$ divise a et b.
Montrer que k' d' divise d' et donc que k'=1.
En déduire que $d = kd'$.
Soit a et b le pgcd des entiers non nuls a et b; il existe deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Montrer que PGCD($a';b'$) =1.

Retenir

Pour tous entiers non nuls a, b et k, PGCD($ka;kb$) = |k| PGCD($a;b$)
Si d = PGCD($a;b$), alors il existe a' et b' deux entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$, et PGCD($a';b'$) =1.
Si d divise a et d divise b alors, d devise toute combinaison $ax + by$ de a et de b à coefficients $x,y \in \mathbb{Z}$.

Exemple

PGCD(100 ;80) = PGCD(20 × 5; 20 × 4) = 20 × PGCD(5;4) = 20 × 1=20
Déterminons tous les couples$(x;y)$ d'entiers naturels tels que PGCD$(x;y)$=10 et $x+y=$
Il existe x' et y' deux entiers tels que $x=10x'$ et $y=10y'$.
PGCD$(x';y')$=1 et $x'+y'=7$.

x'	1	2	3	4	5	
y'	6	5	4	3	2	

d'où

x	10	20	30	40	50	
y	60	50	40	30	20	

Les couples demandés sont :(10;60); (20;50); (30;40):(40;30); (50;20) et (60;10).
Du tableau on a éliminé les couples (x',y') tels que PGCD$(x',y') \neq 1$.

S'exercer

1.g Montrer que pour tout entier n,

PGCD$(n^2+n-2;2n^2-n-1) = PGCD((n-1)(n+2),(1-1)(2n+1)) = |n-1|$PGCD$(n+2;3)$

1.h Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, Chacun des systèmes (S) $\begin{cases}\text{PGCD}(x;y)=5\\x+y=60\end{cases}$;(S') $\begin{cases}\text{PGCD}(x;y)=\\x+y=182\end{cases}$

1.1.4 IDENTITÉ DE BEZOUT ET QUELQUES UNES DE SES APPLICATIONS

Prendre un bon départ

a)
(i) a et b sont deux entiers étrangers. Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $au+$
(ii) Montrer que si deux entiers a et b sont tels qu'il existe deux entiers u et v tels $au+bv=1$ alors a et b sont premiers entre eux.
b) Soit a, b et c trois entiers tels que a divise bc et a premier avec c. Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que $abu+bcv=b$. En déduire que l'entier a divise b.
c) Soit a, b et c trois entiers tels que a soit premier avec b et avec c.
Montrer qu'il existe deux entiers A et B tels que $aA+Bbc=1$.
En déduire que a est premier avec bc.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, si a et b sont premiers entre eux a^n et b^n sont premiers entre eux et de même pour a et b^n.

Retenir

Identité de Bezout :

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tels que $au + bv = 1$.

(i) Théorème de Gauss :

Soit a, b et c trois entiers non nuls . Si a divise bc, et si a est premier avec b, alors a divise c.

(ii) Soit a, b et c trois entiers non nuls . Si a est premier avec b et avec c, alors a est premier avec bc.

(iii) si a et b sont premiers entre eux, alors a^n et b^m sont premiers entre eux, pour tout couple (n;m) d'entiers supérieurs à 1.

(iv) PGCD $(a^n;b^n)$ = [PGCD $(a;b)$], pour tout entier $n \geq 1$, pour tous les entier a et b.

pgcd(a,b,c) = pgcd$(a$,pgcd(b,c) = pgcd[pgdc$(a;b),c]$.

Exemple

a et b sont deux entiers premiers entre eux. Montrons que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

Il suffit de montrer que $a + b$ est premier avec a et avec b et d'appliquer (ii).

En effet, $a + b = 1 \times a + b$. D'après l'algorithme d'euclide,

PGCD$(a + b; a)$ = PGCD$(a;b)$. Or, par hypothèse, PGCD$(a;b)$ =1.

Donc, $a + b$ et a sont étrangers .

De façon analogue on montre que $a + b$ et b sont étrangers.

On conclut que les entiers $a + b$ et ab sont premiers entre eux. Ainsi, la fraction $\frac{a+b}{ab}$ et son inverse sont irréductibles. (si a et b sont premiers entre eux)

PGCD$(a^2;b^2)$ = (PGCD$(a;b)$)^2. Puisque PGCD$(a;b)$=1,PGCD$(a^2;b^2)$ =1.

a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux.

Exercice résolu 1

Dans un système de numération de base n, on considère les nombres

A = 212, B = 312, C = 133032.

1) Sachant que C =AB, montrer que n divise huit. En déduire la valeur de n.

2) Ecrire A, B et C dans le système décimal.

3) Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation (E) : $Ax + By = 1$.

Solution :

1) A = $2n^2+n+1$, B = $3n^2+n+2$, C= $n^5+3n^4+3n^3+3n+2$.

AB = $(2n^2+n+1)(3n^2+n+2) = 6n^4+2n^3+4n^2+3n^3+n^2+2n+3n^2+n+2$.

AB = $6n^4+5n^3+8n^2+3n+2$.

C = AB équivaut à $n^5+3n^4+3n^3+3n+2 = 6n^4+5n^3+8n^2+3n+2$; Soit

$n^5-3n^4-2n^3-8n^2=0$; l'entier n devant être strictement supérieur à 3, on a $n^3-3n^2-2n=8$; soit $n(n^2-3n-2)=8$.

n et n^2-3n-2 sont des diviseurs strictement positifs de 8

L'ensemble des diviseurs de 8 est $\{1;2;4;8\}$. $n>3$. Les seuls diviseurs possibles sont 4 et 8.

Si $n=4$, $n^2-3n-2=16-12-2=2$, donc 4 est une solution.

Par contre on ne peut pas trouver un entier naturel tel que $n=8$ et $n^2-3n-2=64-24-2\neq 1$. Donc 8 n'est pas solution

Conclusion : La seule valeur de n est 4.

2) Ecrivons A , B et C dans le système décimal.

A= $32+4+1=37$, B = $3n^2+n+2=48+4+2=54$,

C=1998.

3) Déterminons les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation (E) : $37x+54y=1$.

Par divisions successives, on a :

$54=1\times 37+17$; $37=2\times 17+3$; $17=5\times 3+2$; $3=1\times 2+1$

$17=B-A$; $3=A-2\times 17=A-2(B-A)=3A-2B$;

$2=17-5\times 3=B-A-5(3A-2B)=-16A+11B$;

$1=3-1\times 2=3A-B+16A-11B=19A-13B$.

D'où $37\times 19+54\times(-13)=1$. Une solution particulière de l'équation $37x+54y=1$ est le couple $(19;-13)$.

(E) est équivalente à $37x+54y = 37\times 19+54\times(-13)$; soit $37(x-19)=54(-y-13)$.

37 divise $54(-y-13)$ et pgcd(37;54)=1. D'après le théorème de Gauss, 37 divise $-y-13$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $-y-13=37k$.

D'où $y=-13-7k$.

D'autre part $37(x-19)=54(-y-13)$ est équivalent à $37(x-19)=57(37k)$.

On a alors $x-19=57k$; soit $x=19+57$k.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{(19+54k;\ -13-37k), k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice résolu 2

Déterminer les couples d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ p\,\text{gcd}(a;b)=3 \end{cases}$$

Solution :

$p\,\text{gcd}(a;b)=3$. Il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a=3a'$ et $b=3b'$

$a^2-b^2=405$ équivaut à $(a-b)(a+b)=405$, qui est équivalent à $9(a'-b')(a'+b')=405$

$(a'-b')(a'+b')=45$. $a'-b'$ et $a'+b$ sont des diviseurs de 45.

$1\times45=45$; $3\times15=45$; $5\times9=45$.

donc les systèmes suivants : $\begin{cases}a'-b'=1\\a'+b'=45\end{cases}$; $\begin{cases}a'-b'=3\\a'+b'=15\end{cases}$; $\begin{cases}a'-b'=5\\a'+b'=9\end{cases}$; Les couples solutions

systèmes sont : (23;22); (9;6); (7;2). a' et b' étant premiers entre eux le couple (9;6) peut être solution.

couples (23;22); (7;2) sont solutions de $a'^2 - b'^2 = 45$ et $\text{pgcd}(a',b')=1$.

ensemble des solutions du système est S = {(69;66); (21;6) }.

ice résolu 3

n un entier naturel strictement supérieur à 1. On pose $a=n-1$ et $b=n^2-3n+6$.

Déterminer deux entiers α et β tels que $n^2-3n+6=(\alpha n+\beta)(n-1)+4$ et déduire que tout diviseur de a et b est un diviseur de a et de 4.

Montrer que tout diviseur de a et de 4 est un diviseur de a et de b et en déduire que PGCD(a;b)=PGCD(a;4).

Donner, suivant les valeurs de n, le PGCD de a et 4.

Pour quelles valeurs de n le nombre $\dfrac{(n^2-3n+6)(2n-1)}{n-1}$ est-il un entier ?

ution :

En effectuant la division euclidienne de n^2-3n+6 par $n-1$, on trouve $-3n+6=(n-2)(n-1)+4$. Donc $\alpha=1$ et $\beta=-2$.

d un diviseur commun à a et à b. C'est-à-dire que d divise $n-1$ et d divise n^2-3n+6 ; d divise $n-1$, alors d divise $(n-2)(n-1)$ et par suite d divise $n^2-3n+6-(n-2)(n-1)$; donc d divise 4. d divise donc a et d divise 4.

Ainsi tout diviseur commun à a et b est un diviseur de a et 4.

Soit d un diviseur de a et 4.

divise $(n-1)(n-2)$ et 4 ; donc d divise $(n-1)(n-2)+4$. Par suite d divise b. D'où tout diviseur de a et 4 est un diviseur commun à a et à b.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs communs à a et 4.

Par suite PGCD(a;b) = PGCD(a;4).

Donnons, suivant les valeurs de n, le PGCD de a et 4. PGCD(a;b) = PGCD($n-1$;4).

$p\gcd(n-1,y)\Rightarrow\begin{cases}\delta\in\mathbb{N}^*\\ \delta \text{ divise 4 et } \delta \text{ divise } n-1\end{cases}$ donc $\delta=1$ ou $\delta=2$ ou $\delta=4$.

$=2$, alors 4 divise $n-1$ équivaut à il existe $q\in\mathbb{Z}/n-1=2q\Leftrightarrow n=2q+1$ donc n impair

$\text{pgcd}(a,b)=2$ $\text{pgcd}(q,2)=\begin{cases}2 \text{ si q impair } (n=4t+3)\\4 \text{ si q pair } (n=4t+1)\end{cases}\Leftrightarrow p\gcd(a,b)=\begin{cases}2 \text{ si } n=4t+3\\4 \text{ si } n=4t+1\\1 \text{ si } n\neq4t+3 \text{ et } n\neq4t+1\end{cases}$

Si $\delta = 4$, alors 4 divise $n-1$, donc il existe $k \in \mathbb{N} / n-1 = 4k \Leftrightarrow n = 4k+1$ alors pgcd(a;b)

Si 4 ne divise pas $n-1$, alors $n-1 = 4k+1$ ou $n-1 = 4k+2$ ou $n-1 = 4k+3$.

Si $n = 4k'+1$ ou $n = 4k'+3$, PGCD$(a;b) = 2$.

Conclusion :

Pour n pair, n peut s'écrire $n = 2(2k') = 4k$ ou $n = 2(2k'+1) = 4k'+2$.

Pour $n = 4k$ avec k $\in \mathbb{N}^*$, PGCD$(a;b) = 1$;

Pour $n = 4k+1$ avec k $\in \mathbb{N}^*$, PGCD$(a;b) = 4$;

Pour $n = 4k+2$ avec k $\in \mathbb{N}^*$, PGCD$(a;b) = 1$;

Pour $n = 4k+3$ avec k $\in \mathbb{N}$, PGCD$(a;b) = 2$;

4) Pour que $\dfrac{(n^2-3n+6)(2n-1)}{(n-1)}$ soit un entier naturel il faut que $n-1$ divise (n^2-3n+6)

$2n-1 = 2(n-1)+1$; soit $1(2n-1)+(-2)(n-1) = 1$.

D'après l'identité de Bézout $2n-1$ et $n-1$ sont premiers entre eux.

$n-1$ divise n^2-3n+6 . Donc $n-1$ divise $(n-2)(n-1)+4$. Par suite $n-1$ divise 4.

$n-1 \in \{1;2;4\}$; ce qui donne $n = 2$ ou $n = 3$ ou $n = 5$.

Pour que $\dfrac{(n^2-3n+6)(2n-1)}{(n-1)}$ soit un entier naturel il faut que n $\in \{2;3;5\}$.

S'exercer

1.i Montrer que 17^{500} et 13^{500} sont étrangers.

1.j Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ est irréductible, alors $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ est aussi irréductible.

1.k Montrer que si c est multiple de a et de b, et si a et b sont étrangers, alors c est multiple

1.l Déterminer tous les couples $(x;y)$ d'entiers tels que l'entier qui s'écrit $\overline{x357y}$ en base 10 est divisible par 15.

1.m Montrer à l'aide de l'identité de Bézout que $2n+5$ et $3n+7$ sont premiers entre eux.

1.2 PPCM DE DEUX ENTIERS

1.2.1 Détermination du PPCM de deux entiers

Prendre un bon départ

a) Dresser dans l'ordre croissant les listes de quelques multiples non nuls et positifs de 8 et 3. Donner le premier entier naturel non nul figurant sur les deux listes.

b) En utilisant les écritures sous forme de produits de puissances entières des nombres premiers calculer : PPCM(75 ;125) ; PPCM(4536 ;251).

c)Donner : PPCM$(1;n)$; PPCM$(a;b)$ si a divise b.

Retenir

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels non nuls a et b, noté PPCM($a;b$) ou PPCM($b;a$), est le plus petit multiple positif et non nul commun à a et à b .

- PPCM($a;b$) = PPCM($|a|;|b|$).
- PPCM($1;a$) = $|a|$.
- si a divise b, alors PPCM($a;b$) = $|b|$.

Exemple

PPCM(1 ;–5) = 5 ; PPCM(8 ;–32) = 32.

Remarques

Soient a et b deux entiers non nuls ; m leur PPCM et M un autre multiple de a et de b.
Par définition, $M \geq m$. Soit deux entiers q et r tels que $M = mq + r$ et $0 \leq r < m$.
$M - mq$ est aussi multiple de a et de b.si $r \neq 0$, alors r doit être au moins égal à m. Comme $r < m$, $r = 0$ et donc $M = mq$.
Donc tout multiple commun à deux entiers est nécessairement multiple de leur PPCM.
Supposons a et b premiers entre eux. On sait que ab est multiple de m car ab est multiple de a et de b. Puisque a et b divisent m, et sont premiers entre eux , ab divise aussi m.
Donc $m = |ab|$ car $m > 0$. En conclusion, le PPCM de deux entiers premiers entre eux est égal à la valeur absolue de leur produit.
Soient a et b deux entiers non nuls et distincts. Si d et m désignent respectivement leur PGCD et leur PPCM, alors d divise m et donc $0 < d \leq m$.

S'exercer

Calculer PPCM($a;b$) pour : (i) . a =15 et b = 20 ; (ii). a = 30 et b = –90 ; a = –1 et b = –13.

2.2 Relation entre PPCM($ka;kb$) et PPCM($a;b$).

Prendre un bon départ

Calculer PPCM(15×16;15×24) ; PPCM(16;24).
Compléter PPCM(15×16;15×24) = ... × PPCM (16;24).
Soient a, b et k trois entiers naturels non nuls . m = PPCM($a;b$) et m'= PPCM($ka;kb$).
Montrer que km est multiple de ka et de kb.
En déduire que km est un multiple de m' et donc $km \geq m'$.
Montrer qu'il existe deux entiers α et β tels que $m' = ka\alpha = kb\beta$.
En déduire que $a\alpha$ est multiple commun à a et b.
Conclure que $a\alpha \geq$ m et que $m' \geq km$. Déduire de (ii) et de (v) que $m'=km$.

Retenir

Pour tout entier a,b et k non nul,
PPCM$(ka;kb) = |k|$PPCM$(a;b)$.

Exemple

PPCM$(30;70) = 10 \times$ PPCM$(3;7) = 10 \times 21 = 210$.

S'exercer

1.o Calculer plus simplement PPCM$(16\times15;16\times17)$ et PPCM$(200; -250)$.

1.2.3 Relation entre PGCD$(a;b)$ et PPCM$(a;b)$.

Prendre un bon départ

1- Calculer PGCD$(16;24)\times$PPCM$(16;24)$; puis comparer le résultat obtenu au produit 16
2- a) a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux.
Montrer que PGCD$(a;b)\times$PPCM$(a;b) = ab$.
b) a et b sont deux entiers naturels quelconques ; d leur PGCD ; a' et b' deux entiers tels que
$a = da'$ et $b = db'$.
Montrer que PGCD$(a;b) \times$ PPCM$(a;b) = a \times b$.

Retenir

Si a et b sont deux entiers non nuls, alors PGCD$(a;b) \times$ PPCM$(a;b) = |a \times b|$.

Exemple

1) Calculons PPCM(845 ; 220).
Calculons d'abord PGCD(845 ; 220).
$845 = 3\times220+185$; $220 = 1\times185+35$; $185 = 5\times35+10$;
$35 = 3\times10+5$; $10 = 2\times5+0$.
PDCD(220 ; 845)=5.
On sait que PGCD(220 ; 845) $\times$ PPCM(220 ;845) $= 220 \times 845$.
D'où, $5 \times$ PPCM$(220;845) = 185900$. Ainsi, PPCM(220 ; 845) = 37180.

Déterminons tous les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que

$PGCD(a;b)=10$

$PPCM(a;b)=280$.

Soient a' et b' deux entiers naturels tels que $a=10a'$ et $b=10b'$.

La deuxième relation du système donne : $10PPCM(a';b')=280$. Or a' et b' étant premiers entre eux, $PPCM(a';b')=a'b'$. D'où $a'b'=28$.

a' et b' sont des éléments de l'ensemble $\{1;2;4;7;14;28\}$ avec $pgcd(a',b')=1$; d'où $(a';b')$ est élément de l'ensemble $\{(1;28);(4;7);(7;4);(28;1)\}$.

Ainsi, $(a;b)$ est élément de l'ensemble $\{(10;280);(40;70);(70;40);(280;10)\}$.

Exercice résolu 1

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a;b)$ tels que $\begin{cases}(a-b=22932\\ ppcm(a;b)=98280\end{cases}$.

Solution :

Soit $\delta = pgcd(a;b)$. Il existe deux entiers premiers entre eux a' et b' tels que $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$.

Posons $\mu = ppcm(a;b)$.

On sait que ab ; soit $\mu\delta=(\delta a')(\delta b')$. On en déduit que $\mu=\delta a'b'$.

Or $pgcd(a-b;\mu)=pgcd[\delta(a'-b');\ \delta a'b']=\delta\, pgcd(a'-b';a'b')$. Or $pgcd(a';b')=1$ donc $pgcd(a'-b';a'b')=1$. Par suite $pgcd(a-b;\mu)=pgcd(22932;98280)=\delta$.

Cherchons δ.

Par divisions successives, on a :

$98280=4\times22932+6552$;

$22932=3\times6552+3276$;

$6552=2\times3276+0$.

Par suite $\delta=3276$.

Le système $\begin{cases}a-b=22932\\ ppcm(a;b)=98280\end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases}3276(a'-b')=22932\\ 3276a'b'=98280\\ pgcd(a';b')=1\end{cases}$;

$\begin{cases}a'-b'=7\\ a'b'=30\\ pgcd(a';b')=1\end{cases}$. Or $1\times30=30$; $2\times15=30$; $3\times10=30$.

$a'b'=30$ et $pgcd(a',b')=1$, $a'>b'$ équivaut à $(a';b')\in\{(15;2);\ (30;1);\ (10;3),(6,5)\}$.

Le seul couple qui vérifie $a'-b'=7$ est le couple $(10;3)$.

L'ensemble solution du système proposé est $S=\{(32760;9828)\}$.

Exercice résolu 2

Calculer pour tout entier naturel n, $ppcm[n(n+2);(n+1)]$, puis $ppcm[n(n+1);(n+2)]$.

Solution :

• Calculons $p\gcd(n(n+1);n+2)$.

$n+2=(n+1)+1$; soit $1\times(n+2)+(-1)(n+1)=1$. On en déduit d'après l'identité de Bézout que $n+2$ et $n+1$ sont premiers entre eux.

Si d divise n et d divise $n+2$, alors d divise $n+2-n$, donc d divise 2.

Les seuls diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.

Si n est pair, $n+2$ est pair et $\text{pgcd}(n;n+2)=2$ et $ppcm[n(n+2);(n+1)]=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

Si n est impair $n+2$ est impair et $p\gcd(n;n+2)=1$ et $p\gcd[n(n+2);(n+1)]=1$.

Par suite $ppcm[n(n+1);(n+2)]=n(n+1)(n+2)$.

• $n(n+2)=(n+1)^2-1\Leftrightarrow(-1)\cdot n(n+2)+(n+1)\times(n+1)=1$, donc $\text{pgcd}(n(n+2),(n+1)=$ d'où $\text{ppmc}(n(n+2),n+1)=n(n+2)(n+1)$ pour tout entier naturel n.

Exercice résolu 3

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases}a+b=84\\ppcm(a;b)=[p\gcd(a;b)]^2\end{cases}$.

Solution :

Soit $\delta=\text{pgcd}(a,b)$. Il existe a' et b' deux entiers naturels tels que $a=\delta a'$ et $b'=\delta b'$.

D'où le système

$\begin{cases}\delta(a'+b')=84\\ \delta a'\ b'=\delta^2\\ p\gcd(a';b')=1\end{cases}$; $\begin{cases}a'b'(a'+b')=84\\ a'\ b'=\delta\\ p\gcd(a';b')=1\end{cases}$. $84=2^2\times3\times7$. δ est un diviseur de 84.

Les diviseurs positifs de 84 sont 1,2,4,3,6,7,12,14,28,21,42,84

Décomposons 84 en produits de deux facteurs représentant $a'\ b'$ et $a'+b'$.

$a'b'$	1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	
$a'+b'$	84	42	28	21	14	12	7	6	4	3	2	

Or a' et b' étant premiers entre eux, il en est de même de $a'b'$ et $a'+b'$.

Les couples $(a'b',a'+b')$ solutions sont : (1;84) ; (3;28); (4;21); (7;12) ; (12;7) ; (21;4) et (84;1).

$p\gcd(a';b')=1$ et connaissant la somme $a'+b'$ et le produit $a'b'$ on trouve $(a';b')\in\{(3;4);(4;3)\}$. D'où $\delta=a'\ b'=12$ et L'ensemble des solutions proposées est S= {(36;48);(48;36) }.

Exercice résolu 3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, tels que $a < b$ et PGCD $(a;b)=\delta$ et $PPCM(a;b) = \mu$.

Déterminer les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que $2\mu + 3\delta = 78$.

Solution :

PGCD $(a;b) = \delta$. Il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que

$a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. De plus $\mu\delta = ab = \delta^2 a' b'$. D'où $\mu = \delta a'b'$.

$2\mu + 3\delta = 78$ peut donc s'écrire $2\delta a' b' + 3\delta = 78$; soit $\delta(2a' b' + 3) = 78$.

De plus $78 = 2 \times 3 \times 13$. 78 peut donc s'écrire : 1×78 ; 2×39 ; 6×13.

Or $2a' b' + 3$ est impair et n'est pas égal à 1. Donc $2a' b' + 3 = 13$ ou $2a' b' + 3 = 39$;

soit $a'b' = 5$ ou $a'b' = 18$.

Si $a'b' = 5$, alors $\delta = 6$. Si $a' = 1, b' = 5$ et $(a;b) = (6;30)$.

Si $a'b' = 18$, $\delta = 2$ et alors $a' = 1$ et $b' = 18$ ou bien $a' = 2$ et $b' = 9$ car a' et b' sont premiers entre eux et a plus petit que b.

Les couples d'entiers naturels demandés sont (6;30);(2:36) et (4;18).

S'exercer

Calculer PGCD$(a;b)$, puis PPCM$(a;b)$ dans chacun des cas suivants :

$a = 3675$ et $b = 5145$;

$a = 16$ et $b = 16$;

$a = 151$ *et* $b = 77$;

$a = 560$ *et* $b = 200$;

$a = -51$ et $b = -68$.

Trouver tous les couples $(a;b)$ d'entiers naturels, tels que $\begin{cases} ab = 12950 \\ ppcm(a;b) = 2590 \end{cases}$.

LEÇON 2 NOMBRES PREMIERS ET ÉQUATIONS DANS $\mathbb{Z}^2$ DU TYPE $ax + by = c$

- Utiliser le théorème de Gauss pour :
  - résoudre des problèmes de divisibilité ;
  - résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations linéaires $ax + by = c$ dont les coefficients sont des entiers décomposés en produits de facteurs premiers;
  - reconnaître si un nombre est premier ;
  - déterminer les diviseurs de l'entier $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers naturels non nuls.
- Déterminer des entiers connaissant leur pgcd et leur ppcm.

2.1 ÉQUATIONS $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Prendre un bon départ

On considère les équations (E) : $51x - 69y = 7$ et (E') : $-4x + 46y = -10$.

a) Calculer PGCD(51 ;69). Montrer que PGCD(51 ;69) divise toujours $51x - 69y$, mais ne divise pas 7. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Calculer PGCD(34 ;64), puis montrer que l'équation (E') est équivalente à $17x - 23y = 5$.

c) (i) Montrer que le couple (3;2) est une solution de l'équation $17x - 23y = 5$.

(ii) Soit $(x; y)$ une solution de $17x - 23y = 5$. Du système $\begin{cases} 17x - 23y = 5 \\ 17 \times 3 - 23 \times 2 = 5 \end{cases}$, vérifier que $17(x-3) - 23(y-2) = 0$.

(iii) Déduire que 17 divise $23(y-2)$ et donc qu'il existe un entier k tel que $y = 17k + 2$. Déduire que $x = 23k + 3$.

(iv) Vérifier que tout couple de la forme $(23k + 3; 17k + 2)$ est solution de $17x - 23y = 5$.

(v) Donner la forme générale des solutions de (E'). Peut-on avoir des couples d'entiers premiers entre eux, solutions de (E')?

Retenir

Soit (E) l'équation $ax + by = c$ où a et b sont deux entiers tous non nuls et $c \in \mathbb{Z}$.

- Si PGCD$(a;b)$ ne divise pas c, alors (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
- Si PGCD$(a;b)$ divise c, alors l'équation (E) est équivalente à $a'x + b'y = c'$ où a' et b' sont premiers entre eux. $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, $c = \delta c'$ où $\delta = \text{pgcd}(a,b)$.

Soit $(u;v)$ une solution particulière de $a'x + b'y = c'$. L'ensemble des solutions de $a'x + b'y = c'$ est l'ensemble des couples qui s'écrivent $(-b'k + u; a'k + v)$ où k est un entier arbitraire.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$, les équations $12x+8y=-52$ (1) et $12x-8y=35$(2).

PGCD(12 ;8) = 4.

Puisque 4 ne divise pas 35, l'équation (2) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Comme $-52(-52=4\times(-13))$ et donc l'équation (1) est équivalente à l'équation $3x+2y=-26$ (3)

On a 2=1 ;

1-1=2.

$1(-26)+2(26)=1\times(-26)=-26$. Le couple $(-26;26)$ est une solution

particulière) de l'équation (3).

$(x;y)$ est solution de (3) si et seulement si $3x+2y=-26$.

$3(-26)+2\times(26)=-26$. D'où $3(x+26)+2(y-26)=0$.

$3(x+26)=-2(y-26)$. 2 divise $3(x+26)$ et 2 Premier avec 3. Daprès le théorème de Gauss,

2 divise $x+26$. Il existe un entier k tel que $x+26=2k$;

$x=2k-26$ et donc $y=-3k+26$.

L'ensemble des solutions de (2) est l'ensemble des couples

$(2k-26;\ -3k+26)$ où k est un entier.

Organigramme de la resolution de l'équation diophantienne $ax+by=c$,

On sait si le PGCD$(a;b)$ divise c, sinon pas de solutions;

On utiliser l'égalité de Bézout pour trouver une solution particulière;

On utiliser le théorème de Gauss pour écrire les solutions de l'équation.

Note : On peut résoudre l'équation $ax+by=c$ par d'autre méthodes (dont celle des congruences).

En général, on utilise l'alghorithme d'euclide pour déterminer le pgcd de 2 entiers relatifs.

Déterminons les entiers x tels que $x\equiv a(n)$ *et* $x\equiv b(p)$ où a,b,n,p sont donnés.

On peut écrire $x=nx'+a=py'+b$. D'où $x'-py'=b-a$.

C'est une équation diophantienne dont la valeur de x' ou celle de y' suffit pour déterminer

celle de x.

Exercer

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

a) $x=16y$;b) $151x-77y=1$; c) $151x-77y=7$; d) $195x+48y=-9$.

Calculer le PGCD(3675;5145).

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $3675x-5145y=4410$.

Déduire les solutions (x,y) de cette équation; x et y premiers entre eux.

Déterminer les entiers x tels que $x\equiv 3[5]$ et $x\equiv(-2)[7]$, par deux méthodes différentes.

2.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA DÉCOMPO DE TOUT ENTIER EN PRODUIT DES PUISSA ENTIÈRES DES NOMBRES PREMIERS.

Prendre un bon départ

Soit n un entier naturel non premier distinct de 0 et 1; D l'ensemble des diviseu au moins égaux à deux.

(i) Donner un élément de D ;

(ii) Justifier que D admet un plus petit élément qu'on note p.

(iii) Soit q un diviseur de p, distinct de 1. Montrer que q est un élément de D. En déduis est premier.

(iv) Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $n = k \times p$. En déduire que k est un de D et déduire que $p^2 \leq n$.

(i) Ecrire 113 et 2700 comme produit des puissances entières des nombres premiers.

(ii)Soit p(n) la proposition : n peut se mettre sous forme d'un produit de facteurs du pre degré pour tout entier naturel n, $n \geq 2$.

• Montrer que P(n) est vraie pour $n = 2$; • Supposons que P(n) est vraie pour un en Montrer que P est vraie pour $n + 1$ si $n + 1$ est premier.

Si $n + 1$ n'est pas premier, alors justifier qu'il existe un entier q premier tel que $n + 1 =$ En déduire que la propriété est vraie en n et par suite en $n + 1$.

Retenir

• Pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1,

- Soit n est un nombre premier,
- Si n n'est pas un nombre premier et alors il existe un nombre premier p qui n avec $p^2 \leq n$.

• Tout entier naturel non nul et distinct de 1 peut s'écrire de manière unique comme p fini des puissances entières des nombres premiers.

• $p \in \mathbb{Z}$ est un nombre premier si et seulement si $p \notin \{-1,0,1\}$ et les seuls diviseurs de p $-1,1,-p$ et p.

Remarque

Pour montrer qu'un nombre n est premier, il suffit de montrer que parmi tous les entier premiers dont le carré est inférieur ou égal à n, aucun ne divise n.

Exemple

Montrons que 101 est un nombre premier.

Cherchons tous les entiers premiers p tels que $p^2 \leq 101$.

On a $p \leq \sqrt{101}$ et p premier. $p \in \{2;3;5;7\}$. En utilisant les critères de divisibilté par 2 ; 3 et 5, et la division de 101 par 7, aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{101}$ ne Donc, 101 est un nombre premier.

S'exercer

Montrer que 313 est un entier premier.

2.3 DIVISEURS D'UN ENTIER NON NUL.

Prendre un bon départ

Déterminer tous les diviseurs positifs de 1.

Soit N un entier naturel non nul et distinct de 1, $p_1, p_2, ..., p_n$ des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < ... < p_n$ et $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ où (α_i) est une suite d'entiers naturels non nuls.

Soit $q = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times ... \times q_m^{\beta_m}$ un entier naturel, diviseur de N. Montrer que $q_1^{\beta_1}$ est un diviseur de l'un des facteurs $p_i^{\alpha_i}$ de N. En déduire que $q_1 = p_i$ et ainsi, $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_i$.

Soit $E_1 = \{p_1^0; p_1^{\alpha_1}; ...; p_1^{\alpha_1}\}$; $E_2 = \{p_2^0; p_2^1; ...; p_2^{\alpha_2}\}$; ....; $E_n = \{p_n^0; p_n^1; ...; p_n^{\alpha_n}\}$.

Montrer que l'ensemble D_N^+ des diviseurs positifs de N est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent $a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n$ où $a_i \in E_i$. $(1 \leq i \leq n)$

En déduire que $D_N^+ = \left\{ \prod_{i=1}^{n} a_i / a_1, ..., a_n \in E_1 \times ... \times E_n \right\}$

En déduire que $Card(D_N^+) = (\alpha_1+1) \times \alpha_2+1) \times \alpha_3+1) \times ... \times (\alpha_n+1)$.

Retenir

Soit N un entier naturel non nul tel que $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ où (αi) est une suite d'entiers naturels non nuls , $p_1, p_2, ..., p_n$ des entiers premiers tels que $p_1 < p_2 < ... < p_n$.

N admet $(\alpha_1+1) \times \alpha_2+1) \times (\alpha_3+1) \times ... \times (\alpha_n+1)$ diviseurs positifs

Les diviseurs positifs de N sont les termes de la somme, du développement du produit :

$(p_1^0 + p_1^1 + ... + p_1^{\alpha_1}) \times (p_2^0 + p_2^1 + ... + p_2^{\alpha_2}) \times ... \times (p_n^0 + p_n^1 + ... + p_n^{\alpha_n})$

Exemple

Déterminons les diviseurs positifs de 72.

$72 = 2^3 \times 3^2$.

$(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ diviseurs postifs.

Les diviseurs positifs sont les termes de la somme S.

$S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)$.

$S = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9) = 1 + 3 + 9 + 2 + 6 + 18 + 4 + 12 + 36 + 8 + 24 + 72$.

Les diviseurs positifs de 72 sont :1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ;12 ;18 ;24 ; 36 ;72.

Exercice résolu

1. Déterminons les entiers naturels a et b tels que $ab = 560$ et PGCD$(a;b) = 4$.
Soient les entiers a' et b' tels que $a = 4a'$ et $b = 4b'$. a' et b' sont premiers entre eux.
De $ab = 560$, on a $a'b' = 35$.
Or $35 = 5 \times 7$. Les diviseurs de 35 sont les termes du developpement $(1 + 5)(1 + 7)$.
Les diviseurs positifs de 35 sont : 1 ;5 ;7 et 35.
Comme a' et b' sont premiers entre eux, $a' = 1$ et $b' = 35$; $a' = 5$ et $b' = 7$;
$a' = 35$ et $b' = 1$; $a' = 7$ et $b' = 5$.
Les couples $(a;b)$ correspondants sont :(4;140);(20;140);(140;4);(20;28).
2. Déterminons les entiers x et tels que $5x - 2y = 357$ et PPCM$(x;y) = 119$.
Soit d = PGCD$(x;y)$. d divise $5x - 2y$, donc 357 .
On peut montrer que 119 est premier.
Or $357 = 3 \times 119$. 357 a pour diviseurs positifs 1 ;3 ;119 et 357.
d est aussi un diviseur de 119.
d peut prendre les valeurs 1 ou 119.
si $d = 1$, alors x et y sont premiers entre eux et $xy = 119$.
$x = 1$ et $y = 119$ ou $x = 119$ et $y = 1$.
Aucun des couples solutions correspondants n'est solution de l'équation $5x - 2y = 357$.
Si $d = 119$, alors en posant $x = 119x'$ et $y = 119y'$, $5x' - 2y' = 3$.
Un couple de solution particulière est (5;6).
x' et y' sont tels que $5(x' - 5) - 2(y' - 6) = 0$.
2 devise $5(x' - 5)$. Comme 2 devise $5(x' - 5)$, 2 et 5 premiers entre eux, 2 divise $(x' - 5)$
$x' = 2a + 5$ et $y' = 5a + 6$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Déterminons a tels que x' et y' sont premiers entre eux.
$y' = 2x' + a - 4$; $x = 2(a - 4) + 4$.
PGCD$(x';y')$ = PGCD$(a - 4 ; 4)$et PGCD$(a - 4 ; 4) \in \{1;2;4\}$. PGCD$(a - 4 ; 4) = 1$
a doit être impair . Par conséquent , $x = 238a + 5$ et $y = 590a + 6$.
L'ensemble des couples $(x;y)$ est l'ensemble des couples de la forme
$(238a + 5;590a + 6)$ où a est un entiers naturel impair.

S'exercer

2.e a) Montrer que les entiers $x - y$ et $x + y$ sont de même parité.

b) En déduire la résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $x^2 - y^2 = 1969$.

2.f Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $9x^2 - (y+1)^2 = 32$.

2.g Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a;b) tels que $a \times b = 12950$
et ppcm$(a;b) = 2590$.
2.h Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a;b)$ tels que pgcd$(a;b) = 36$ et ppcm$(a;b)$ =
2.i 1) Décomposer les nombres 720 ;2860 ;8040 et 1 323 en produit des facteurs premiers.
Déterminer le nombre de diviseurs entiers relatifs de chacun d'eux.
2) Déterminer les expressions générales de la décomposition en produit de nombres premiers des entiers naturels qui ont 24 diviseurs positifs. Quel est le plus petit d'entre eux ?
3) Décomposer $E = n + n^2 + 1$, n étant un entier positif et non nul, en produit de deux facteurs du second degré et démontrer que ces facteurs sont premiers entre eux.
Le nombre E peut-il être premier ?

S'ENTRAÎNER

PGCD ; PPCM

tous les couples d'entiers relatifs
de $11x - 5y = 14$.
qu'il existe un couple et un seul
tion de cette équation avec

les couples d'entiers relatifs
de $65x = 16y$.
que le couple (1;4) est une
particulière de l'équation
$= 1$, déterminer tous les couples
de $65x - 16y = 7$.

relatif non nul et différent de 1.
$+ 1)$, ppcm$(n; n+1)$,
$+ 1)$, ppcm$(n; 2n+1)$,
$+ 1; 2n + 1)$, ppcm$(n; n+1; 2n+1)$,
$+ 1)$, ppcm$(n-1; n+1)$.

les couples d'entiers relatifs
de $65x = 16y$.
que le couple (1;4) est une solution
de l'équation $65x - 16y = 1$,
tous les couples $(x;y)$ solution de

strictement positifs a,b,c et d
termes consécutifs d'une suite
dont la raison q est un nombre
avec a. On se propose de
ces nombres sachant qu'ils
entre la relation $10a^2 = d - b$.
que $q(q+1)(q-1) = 10a$.
les valeurs possibles de q et en
déduire les valeurs correspondantes de a,b,c et d.

6

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b définis par $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1) Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 19.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers naturels n pour lesquels pgcd$(a;b)$=19.

7

Soient n un entier naturel non nul et A le nombre défini par $A = \dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{n+2}$.

a) Déterminer deux entiers α et β tels que, pour tout n,on ait:

$2n^2 + 3n - 1 = (\alpha n + \beta)(n+2) + 1$.

b) Que peut-on en déduire pour les nombres $2n^2 + 3n + 1$ *et* $n+2$?

2) Déterminer n de façon que A soit un entier naturel.

8

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b définis par $a = n^2 + 3$ *et* $b = n + 2$.

1) Vérifier que : $n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$.

2) Déduire que tout diviseur de a et b est un diviseur de 7.

3) Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{n^2+3}{n+2}$ est-elle irréductible ?

4) Déterminer n de façon que $\dfrac{n^2+3}{n+2}$ soit un entier naturel.

9

Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

1) l'équation (E) : $3x \equiv 1[5]$;

2) l'équation (F) : $5x \equiv 2[5]$;

3) le système $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[5] \end{cases}$.

10

1) Calculer le plus grand diviseur commun des nombres 5145 ; 4410 ; 3675.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation

$3675x - 5145y = 4410$.

11

Déterminer tous les couples d'entiers naturels solutions de l'équation
$9y^2 - (x+1)^2 = 32$.

12

Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels $(a;b)$ tels que

$\begin{cases} ab = 12950 \\ ppcm(a;b) = 2590 \end{cases}$.

13

Déterminer les nombres entiers naturels a et b tels que $\begin{cases} a+b = 182 \\ ppcm(a;b) = 13 \end{cases}$.

14

Soient deux entiers quelconques a et b.
On considère les nombres :
$A = 5a + 4b$ et $B = 11a + 9b$.
1) Démontrer que pgcd$(a;b)$ = pgcd (A;B).
2) On considère les nombres A' et B' tels que
$A' = pa + qb$ et $B' = ra + sb$ avec
$ps - qr = 1$.
Montrer que pgcd$(a;b)$ = pgcd (A';B').

15

Un nombre entier naturel N non nul s'écrit $\overline{zyx}$ en base 7 et $\overline{zyx}$ en base 9.
1) Montrer que $y = 24x - 40z$.
2) Déduire que $y = 0$.
3) Déterminer x et z.
4) Ecrire N dans le système décimal.

16

1) Déterminer les couples $(a;b)$ d'entiers relatifs tels que $3b - 3a = 1$.
2) Un entier naturel A s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base cinq et dans le système de numération de base b. Déterminer a,b etc, puis donner l'écriture de A dans le système décimal.

17

Soit b un entier naturel, strictement supérieur à 1.
1) En remarquant que
$b^2 = (b-1)(b+1) + 1$, déterminer le plus grand commun diviseur de b^2 et $b-1$.
2) Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tels que $b^2x + (b-1)y = 1$.
3) Application numériques :
4) Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tels que $1024x + 31y = 1$,
avec $0 \leq y \leq 5000$.

18

x et y sont deux entiers relatifs, on considère l'équation
(E) : $324x - 245y = 7$.
1) Montrer que, pour toute solution $(x;y)$ de (E), l'entier x est multiple de 7.
2) Déterminer une solution particulière et en déduire toutes les solutions de (E).
3) Soit δ le PGCD des éléments d'un couple $(x;y)$ solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de δ Déterminer les solutions telles que x et y soient premiers entre eux.

tous les couples d'entiers naturels
dans chacun des cas suivants :

$\begin{cases} \\ =600 \\ (a;b)=50 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a<b \\ a+b=5664 \\ p\gcd(a;b)=354 \end{cases}$;

$\begin{cases} -b^2=7244 \\ (a;b)=12 \end{cases}$.

pose de déterminer les entiers relatifs

que $\begin{cases} n\equiv 1[5] \\ n\equiv 5[7] \end{cases}$ (S).

Montrer que si n est solution du système (S)

$\begin{cases} 4n+1\equiv 0[5] \\ 4n+1\equiv 0[7] \end{cases}$.

Montrer que tout entier n, solution de (S)
vérifie la relation $35k-4n=1(1)$, où $k\in\mathbb{Z}$.
Déterminer les solutions de (1), puis celle
du (S).

Soit un entier naturel non nul n , on pose
$A=2n$ et $B=2n^2+n$.
Déterminer pgcd(A;B).
Trouver les couples d'entier naturels $(a\ ;b)$
tels que $2a^2+b^2=16072$ et $p\gcd(a;b)=14$.
Trouver deux entiers p et q dont le pgcd
et le rapport est $\frac{7}{9}$.

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $\begin{cases} x^2-y^2=5\ 440 \\ p\gcd(x;y)=8 \end{cases}$.

Déterminer deux entiers naturels x et y
tels que :

a) $xy=1\ 350$ et $ppcm(x\ ;y)=90$;

b) $xy=2\ 352$ et $ppcm(x\ ;y)=168$.

1) Trouver les couples d'entiers naturels $(a;b)$
tels que : $\begin{cases} p\gcd(a;b)=15 \\ ppcm(a;b)=90 \end{cases}$.

2) Trouver les couples d'entiers naturels $(a;b)$
tels que : $\begin{cases} p\gcd(a;b)=7 \\ ppcm(a;b)=84 \end{cases}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x-5y=3$.

b) Trouver le nombre N s'écrivant $\overline{xy}$ en base 6, x, y vérifiant $4x-5y=3$.

3) Trouver le nombre N s'écrivant xy en base 10, x, y vérifiant $4x-5y=3$.

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que : $a+b=70$ PGDC$(a,b)=7$.

23

On veut comparer PGDC(a,b) et PGDC$(7a+2b,\ 17a+5b)$.

1. Soit d diviseur commun des deux nombre a et b.

a) Montrer d divise aussi $7a+2b$ et $17a+5b$.

b) Déduire que :

$\mathcal{D}(a,b)\subset\mathcal{D}(7a+2b,\ 17a+5b)$.

2. Posons $A=7a+2b$ et $B=17a+5b$

a) Exprimer a et b en fonction de A et B.

b) En déduire que tout diviseur d' commun à a et b est un diviseur commun à A et B.

3. Conclure.

24

On considère la fraction rationnelle

$R=\frac{5n^3-n}{n+2}$ où n est un entier relatif distinct de -2.

1. a)Démontrer que :

$PGCD(5n^3-n,n+2)=PGCD(n+2,38)$.

b)En déduire les valeurs possibles des

$PGCD(5n^3-n,n+2)$.

2) Déterminer les valeurs de n pour les quelles

a) $\frac{5n^3-n}{n+2}$ est un entier relatif.

b) la fraction $\frac{5n^3-n}{n+2}$ est irréductible.

$PGCD(5n^3-n, n+2)=19$.

25

Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

$2x^2-2x+1\equiv 0[5]$.

1) Justifier que 503 est un nombre premier.

2) Déterminer deux entiers x et y tels que $x^2-y^2=503$.

Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numérotation de base n.

On donne $a=\overline{2310}$ et $b=\overline{252}$.

On pose : $PGCD(a;b)=d$.

1. a) Démontrer que $2n+1$ divise a et divise b.

b) Montrer que si n est pair alors $d=2(2n+1)$.

c) Montrer que si n est impair alors $d=2n+1$.

2) On prend $n = 6$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax+by=26$.

$5a-2b=357$ et $PPMC(a,b)=119$.

26

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} PGCD(a,b)=5 \\ PPMC(a,b)=720 \end{cases}$

et $\exists r\in\mathbb{Z}/\, r^2=\frac{a}{b}$

NOMBRES PREMIERS

27

n est un entier naturel et P un nombre premier supérieur ou égal à 3. a et b sont les nombres définis par $a=2^n$ et $b=a\times P$. S(a) est la somme des diviseurs de a et S(b) la somme des diviseurs de b.

1) Déterminer les ensembles D(a) et D(b) des diviseurs de a et b.

2) Démontrer que $S(a)+2^{n+1}=1+2S($ calculer S(a).

3) Exprimer S(b)en fonction de S(a) et calculer S(b).

28

p est un nombre premier.

1) Montrer que pour tout entier k tel que $1\le k\le p-1$,alors C_p^k est divisible par p.

2) Soit x, y deux entiers naturels non nuls montrer que $(x+y)^p\equiv x^p+y^p\ [p]$.

3) Montrer par récurrence que pour tous $x_1, x_2 ... x_n$ non nuls, on a :

$(x_1+x_2+...+x_n)^p\equiv x_1^p+x_1^p+...+x_n^p$

29

On considère dans l'ensemble Q des nombres rationnels l'équation $(E_n)\ x^2-48x-2(n$ où n est un nombre entier naturel et x un nombre rationnel inconnu.

1) Démontrer que (E_n) admet deux solutions rationnelles si, $2n+48^2$ est un carré parfait.

2) Soit k l'entier naturel tel que : $2n+48^2=k^2$

a. Démontrer l'existence de deux nombres entiers naturels p et q tels que : $k-48=2q$; $k+48=2p$; $p+q=n$ et $96=2p\ (2(p-$

b. Décomposer 96 en produit des facteurs premiers et en déduire les valeurs de p et q.

3. Résoudre dans (E_n) pour la valeur de n trouvée.

30

On se propose de déterminer les couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation $7^n-3\times 2^m=1(E)$.

1)Pour $m\le 4$, montrer qu'il y a exactement 2 couples solutions.

2) On suppose $m\ge 5$.

que si (n,m) est solution de (E)
$\equiv 1[32]$.
diant les restes de la division de 32
uissances de 7, montrer que si (n,m)
de (E), alors, n est divisible par 4.
ire que $7^n \equiv 1[5]$.
udre (E) pour $m \geq 5$.
ner tous les couples solutions de (E).

dère dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant :
$q^2 = r^2$
$p+r = 24$.
$p+q$
rer qu'un triplet (p,q,r) est solution
et seulement si $r < 12$ et (p,q) sont les
de l'équation :
$(12-r)n + 24(12-r) = 0$, où n est
re le système (S)
est un triangle rectangle en A tel que
AB,BC et AC soient des multiples
plante sur le périmètre triangulaire
arbustes de manière qu'à chaque
triangle un arbre soit plantés et que
soient planté et également espacés
alculer AB,BC et AC.

deux entiers premiers entre eux, on
de montrer que $a+b$ et $a \times b$ sont
ntre eux.
et v deux entiers relatifs tels que
$= 1$ (1)
er que la relation (1) est équivalente
relations suivantes :
$+b(u+v) = 1$ (2)
$+(b+a)v = 1$ (3).

b. Que traduisent les relations (2) et (3)

2) Justifier que si a est premier avec b et a premier avec c, alors a est premier à $b \times c$.

3) Démontrer alors que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

4) Application : démontrer que $PGDC(m^2+m, 2m+1) = 1$.

33

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation suivante : $5x - y = -3$.

NB : on remarquera que (1;8) est une solution particulière.

2) On considère deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1) \end{cases}$$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n, y_n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer que (x_n, y_n) est solution de l'équation $5x - y = -3$.

c) En déduire que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors x_n et y_n sont premiers entre eux.

3) On pose $u_n = x_n + \frac{2}{3}$ et $v_n = y_n + \frac{1}{3}$

a) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont des suites géométriques et exprimer u_n et v_n puis x_n et y_n en fonction de n.

b) Étudier les convergences des suites (x_n) et (y_n).

34

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation suivante :

(E): $35x - 27y = 2$.

2) Un astronome a observé un jour j_0 le corps céleste A. si n jours plus tard il observe un corps céleste B. la période d'apparition du corps A est de 105 jours et la période de

l'apparition du corps B est de 81 jours. On désigne par j_1 le jour de l'apparition simultanée des objets A et B aux yeux de l'astronome. Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre j_0 et j_1.

a. Montrer que (u,v) est solution de (E).

b. Déterminer la solution de (u_0,v_0) permettant de trouver j_1

c. Combien de jours s'écoulent entre j_0 et j_1 ?

35

Soit a,b deux entiers naturels et p un nombre premier tel que PGDC(a + b, ab)=p².

a) Montrer que P² divise a^2. (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$.

b) En déduire que P divise a.

c) Démontrer que P divise b.

d) Démontrer que PGDC(a,b)∈{P,P²}.

On cherche à déterminer les entiers naturels n tels que : PGDC(a + b,ab) = 49 et PPMC(a,b) = 231

Montrer que si (a,b) est une solution de ce problème, alors PGDC(a,b) = 7

En déduire toutes les solutions du problème posé.

36

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a^2 - 2b^2 = 1$.

1. Démontrer que a est impair.
2. Démontrer que b est pair

37

n est un entier naturel non nul

1) Donner la liste des diviseurs de 7^n.

2) Calculer la somme S_n des diviseurs de 7^n et montrer que $6S_n + 1 = 7^{n+1}$.

3) Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 7^n par 10.

Déterminer suivant les valeurs de n le chiffre des unités de S_n.

Déterminer tous les couples (a,b)d'entiers naturels tels que :

$5a - 2b = 357$ et PPMC(a,b) =119.

38

Déterminer tous les couples (a,b)d'entiers naturels tels que : $a + b = 70$ PGDC(

39

Pour tout entier naturel n, on pose u_n =

1)Démontrer l'existence de deux entiers a et b tels que $au_{n+1} + bu_n = 1$. Que peut-on dire de u_n et u_{n+1}?

2) n et P étant deux entiers naturels dist on pose $\delta = PGDC(n,p)$.

3) Démontrer que u_δ divise u_n et u_p.

NB : On rappelle que

$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + ... + a^n)$.

4) Soit d un diviseur commun à u_n et

On admet l'existence de deux entiers u et v tels que $nu + pv = \delta$

4)Démontrer $\delta = PGDC(u_n, u_p)$

5) Déterminer $PGDC(22015 - 1\ ;\ 210$

40

$f(x) = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{2}$ et

$A = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tel que } f(x) \in \mathbb{Z}\}$

1. a) Montrer que A n'est pas vide.

b) Déterminer A.

2. Déterminer

$B = \{x \in A \text{ tel que } 4x^2 - 9(f(x))^2 \equiv 0$

41

p est un nombre premier supérieur ou

On veut démontrer que l'entier naturel $n = (p^2+1)(p-1)(p+1)$ est divisible

a. Montrer que $p \equiv -1[3]$ ou p

b. En remarquant que p est impair prouver qu'il existe un entier naturel k $P^2 - 1 = 2k(k+1)$ en déduire que n est par 16.

...sidérant tous les restes de la division ...ne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
...En déduire que n divise 240.
...Existe-t-il quinze nombres premiers P_1 ... P_{15} superieurs ou egaux a 7 tels que $A = P_1^4 + P_2^4 + ... + P_{15}^4$ soit un nombre ... ?

...cherche tous les couples d'entiers naturels ...uls tels que : $a \leq b$ vérifiant la ... (E): $m + 10d = 142$ où $d = PGDC(a,b)$ ... $PPMC(a,b)$ on pose : $a = da'$ et $b = db'$ ... $PGDC(a',b') = 1$.
...ontrer que si (a,b) est un couple ... de (E), alors $d(a'b'+10) = 142$.
...duire que les valeurs possibles de d ... et 2.
...erminer les valeurs possibles de a et b

... $\in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
...ntrer par récurrence que pour tout ... $2^{2^n} \equiv 6[10]$. En déduire que pour tout ... le chiffre des unités de F_n est en base dix

... $x \in \mathbb{N}^*$; $m \in \mathbb{N}^*$.
...ontrer que $\frac{x^{2^m} - 1}{x+1}$ est un entier ...

...déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{F_{n+k} - 2}{F_n}$ ... entier et que F_n divise F_{n+1}.
...ontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ... $F_{n+k}, F_n)$ divise 2.
...déduire que F_{n+k} et F_n sont premiers ...

... p et q deux nombres donnés. E est ...ble des nombres premiers admettant ...ment deux diviseurs premiers positifs p

1. Soit n un élément de E, justifier que $n = p^\alpha q^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels.
2. Exprimer en fonction de α et β le nombre de diviseurs de n.
3. Soit x, y deux éléments de E tels que le nombre de diviseurs de x soit 21 et celui de y soit 11.

a) Donner toutes les formes de décompositions x et y en produit des facteurs premiers,

b) Déterminer x, y, a et b sachant que $PGDC(x, y) = 18$.

45

On pose $A = 2013! + 1$. (n! désigne factorielle n).
1. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq 2013$. $A + k$ n'est pas un nombre premier.
2. En déduire 2013 entiers naturels consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construire n entiers consécutifs parmi lesquels aucun n'est premier.

46

On veut montrer que :
$PGDC(a,b) = PGDC(a, b+\lambda a)$. $\lambda \in \mathbb{Z}$, $b + \lambda \in \mathbb{N}^*$; $a \in \mathbb{N}^*$.
1. Démontrer que $D(a,b) \subset D(a, b+\lambda a)$.
2. Démontrer que $D(a, b+\lambda a) \subset D(a,b)$.
3. Conclure.

47

n est un entier naturel, on pose $a = n^2 + n$ et $b = n^2 - n$
a) Montrer que $PGDC(a,b) = PGDC(n^2+n, 2n)$
b) En déduire que $PGDC(a,b) = n\ PGDC(n+1, 2)$
c) Donner suivant la parité de n, $PGDC(a,b)$.

48

1) Soit p et q deux nombres réels. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

on a : $p^{n+1}-q^{n+1}=(p-q)(p^n+p^{n-1}q+...$

$+pq^{n-1}+q^n)$.

2) Soit n,a,b trois entiers relatifs non nuls. Montrer que si n divise a et $a-b$, alors n divise b

3) On pose $a=27^{n+1}-26n-27$ *et*

$b=27^{n+2}-26(n+1)-27$.

- Montrer que 676 divise $a-b$.

4) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 676 divise a

49

Soit l'équation (E) d'inconnue rationnelle x :

(E) $78x^3+ux^2+vx-14=0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose que $\frac{14}{39}$ est solution de (E).

a) Prouver que les entiers u et v sont liés par la relation $14u+39v=1129$.

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple (x,y) d'entiers relatifs vérifiant : $14x+39y=1$. Vérifier que $(-25,9)$ est solution de cette équation.

c) En déduire un couple (u_0,v_0) solution particulière de $14u+39v=1129$. Donner la solution générale de cette équation.

d) Déterminer parmi les couples (u,v) précédents, celui pour lequel le nombre u est le plus petit entier naturel.

2. a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (E). Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c) En déduire les nombres rationnels qui sont entiers, pouvant être solution de (E) et parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

50

On pose : $u=2+\sqrt{3}$ *et* $v=2-\sqrt{3}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur où égal à 1, on peut écrire $u^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ et $v^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Établir les égalités : $a^2_n-3b^2_n=1$ *et* $a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n=1$.

En déduire que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux, qu'il est de même pour les deux entiers a_{n+1} et a_n puis pour l'entier b_{n+1} et b_n.

51

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $8x-105y=30$.

2) Soit (x_0, y_0) un couple solution de (E) tel que y_0 divise x_0. Démontrer que y_0 divise 30 et en déduire les valeurs possibles de y_0 puis de x_0.

3)Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur est d et le plus petit commun multiple m vérifie la relation $8m=105d+30$.

NB : on pourra utiliser la question précédente

Chapitre 6

DÉRIVATION – PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE

LEÇON 1 DÉRIVATION

1.1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - CALCUL DES DÉRIVÉES.

1.2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.

1.3 DÉRIVÉES SUCCECIVES ET LEURS APPLICATIONS

1.4 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION DE QUELQUES FONCTIONS

LEÇON 3 PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE

3.1 PRÉSENTATION ET DÉFINITION

3.2 RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES SUR DES INTERVALLES DE CERTAINES FONCTIONS CONTINUES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 DÉRIVATION

- Étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.
- Calculer et utiliser la dérivée ou les dérivées successives d'une fonction.
- Calculer et utiliser la dérivée de la composée de deux fonctions et de la réciproque d'une fonction sur un intervalle.
- Connaître et savoir utiliser les égalités et inégalités des accroissements finis.

1.1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - CALCUL DES DÉRIVÉES.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$.

- Vérifier que f est définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
- Montrer que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{-|x|}{x(\sqrt{1-|x|}+1)}$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1.
- Soit $x_0 \in]0 ; 1[$, montrer que f est dérivable en x_0.
- Peut-on dire que f est dérivable en tout $x_0 \in [0 ; 1[$?
- Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0 ; 1[$. (f' désigne la fonction dérivée de f).

Activité 2

1) Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser le plus grand ensemble sur lequel elle est dérivable et y définir sa fonction dérivée.

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin(2x - \dfrac{\pi}{4})$.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

- La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto x^n$ est la fonction : $x \mapsto nx^{n-1}$.
- La dérivée sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est la fonction : $x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$.

Retenir

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ où a et b sont deux réels tels que a $<b$.

- On dit que ***f est dérivable sur l'intervalle*** $]a\ ;\ b[$ si f est dérivable en tout $x_0 \in]a\ ;\ b[$.
- On dit que ***f est dérivable sur l'intervalle*** $[a\ ;\ b]$ si f est dérivable sur $]a\ ;\ b[$, dérivable droite en a et dérivable à gauche en b.
- On dit que ***f est dérivable sur l'intervalle*** $]a\ ;\ b]$ si f est dérivable sur $]a\ ,b[$ et dérivable gauche en b. on dit que f est dérivable sur $[a\ ;\ b[$ si f est dérivable sur $]a\ ,b[$ et dérivable à droite en a.

On dit qu'***une fonction est dérivable sur un intervalle K*** si elle est dérivable en tout ment x_0 de K.

mple 1

Soit f la fonction numérique définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.

diions la dérivabilité de f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Soit $x_0 \in]1;\ +\infty[$.

$x_0-1 \in]0;\ +\infty[$ et la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ dérivable en x_0. Par ailleurs , la fonction : $x \mapsto x-1$ est dérivable en x_0 ; donc la fonction f dérivable en x_0 comme produit de fonctions dérivables en x_0. On en déduit que f est dérivable ntervalle $]1;\ +\infty[$.

Pour $x \neq 1$ on a $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{x-1}$; donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$ et par conséquent f est ivable à droite en 1.

Ainsi, d'après a) et b), la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Soit h la fonction numérique définie sur $]-\infty\ ;3]$ par $h(x)=\sqrt{3-x}+1$.

diions la dérivabilité de h sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3]$.

De même qu'au 1. a), la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3[$.

$\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3}=\dfrac{-1}{\sqrt{3-x}}$ pour tout $x \neq 3$; donc $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}=-\infty$

n'est pas dérivable en 3. Ainsi, h n'est pas dérivable sur $]-\infty\ ;\ 3]$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$ est continue sur $[-1;\ 1]$ mais n' y est pas dérivable car elle n'est pas dérivable en 0.

Remarque 1

• **Dérivabilité sur un ensemble**

On dit qu'une fonction est dérivable sur un ensemble E si elle est dérivable en tout élément

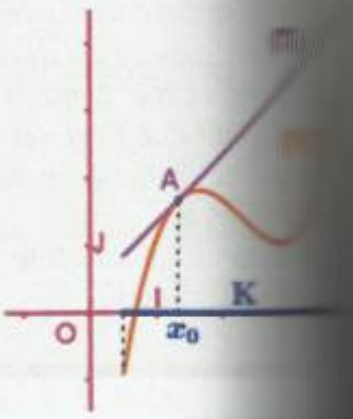
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto (1-|x|)$ de l'activité 1 ci-dessus est dérivable sur l'ensemble $E =]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 1[$.

• Dérivabilité sur un intervalle et courbe représentative

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère (O, I, J).

a) Si f est dérivable sur un intervalle K, alors $(\mathscr{C})$ admet en tout point d'abscisse x_0 de K une tangente non parallèle à l'axe (OJ) des ordonnées .

b) On montre que si $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente non parallèle à l'axe (OJ), alors la fonction f est dérivable en x_0 .



1) Tableau récapitulatif des dérivées et opérations sur les fonctions.

Dérivée des fonctions usuelles		
Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$x \longmapsto c$ (c, constante)	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto cosx$	
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto -sinx$	
$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$	
$x \mapsto tanx$	$x \mapsto 1+tan^2x$; $x \mapsto \frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;+\infty[$

Dérivées et opérations sur les fonctions		
Fonctions u et v dérivables sur un intervalle K	dérivée	Conditions d'existence
$u+v$	$u'+v'$	
ku ;	ku'	
$u \times v$	$u'v+uv'$	
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$	$ax+$
u^n, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$nu'u^{n-1}$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	
$\frac{1}{v^n}$ $(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2)$	$-n \times \frac{v'}{v^{n+1}}$	v est
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u strictement positive

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K . Montrons que : pour tout entier naturel n ≥ 2, la fonction u^n est dérivable sur K et sa fonction dérivée est $nu'u^{n-1}$.

Par récurrence sur n.

a) Pour $n=2$, la fonction $u^2 = u \times u$ est dérivable sur K comme produit des fonctions

$(u^2)' = u' \times u + u \times u' = 2u'u = 2u'u^{2-1}$.

entier naturel tel que $k \geq 2$. Supposons que la propriété est vraie au rang k et qu'elle l'est au rang $(k+1)$.

et par hypothèse de récurrence u^k est dérivable sur K donc u^{k+1} dérivable sur K comme produit de deux fonctions dérivables sur K.

$(u^{k+1})' = (u^k \times u)' = (u^k)'\, u + u^k u' = ku'u^{k-1}u + u^k u'$

hypothèse on a $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.

$(u^{k+1})' = ku'u^{k-1}u + u^k u' = ku'u^k + u'u^k = (k+1)u'u^{(k+1)-1}$

propriété est vraie au rang (k+1).

principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 2$ est dérivable sur K et sa fonction dérivée est $nu'u^{n-1}$.

fonction dérivable et non nulle sur K. v^n est dérivable et non nulle

et $\frac{1}{v^n}$ est donc dérivable sur K et on a :

$$\frac{(v^n)' - 1(v^n)'}{(v^n)^2} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{2n}} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{(n+1)+(n-1)}} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{(n+1)} \times v^{(n-1)}} = -n \times \frac{v'}{v^{n+1}}.$$

...ue 2

...dérivable et non nul sur K, alors pour $n \in \mathbb{Z}^*$, la fonction u^n est dérivable sur K et sa ... est $nu'u^{n-1}$.

$\in \mathbb{Z}^*$, on pose $p = -n$ et $u^n = \frac{1}{u^p}$ donc $(u^n)' = \left(\frac{1}{u^p}\right)' = -p \times \frac{u'}{u^{p+1}} = nu'u^{n-1}$.

...e 2

...lculons la dérivée sur $[1, +\infty[$ de la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}$.

$= \sqrt{x-1} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$= \sqrt{x-1} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}$ avec $x \neq 1$; $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}$

...ssons la dérivée sur $E =]-1,0[\cup]0,1[$ et sur $F = [0,1[$ de la fonction dérivée de la ... $x \mapsto \sqrt{1-|x|}$.

... sur $E =]-1,0[\cup]0;1[$

... $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$; car $f(x) = \sqrt{1+x}$.

... $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$; car $f(x) = \sqrt{1-x}$.

• Dérivée sur $F = [0;1[$, $f(x) = \sqrt{1-x}$, *car* $x \geq 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Donc sur E on a : $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ si } x\in]-1,0[\\ f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \text{ si } x\in]0,1[\end{cases}$

Donc f est dérivable à droite en 0. Ainsi $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$.

S'exercer

1.a On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2-2|x|+3$.

• Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.

• Définir la fonction dérivée de f sur chacun des ensembles suivants :

$[0\ ;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[\cup]0\ ;+\infty[$.

• f admet-elle une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$? Justifier.

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sur son ensemble de définition et définir sa dérivée.

a) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$; b) $f(x)=(x-3)\sqrt{3-x}$; c) $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1}$

d) $f(x)=2x^2+|x|-1$, e) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{|x|-1}$

1.c Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous:

$f(x)=x^3+2\sqrt{x^2+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$; $h(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$; $p(x)=(x^2-3x+2)^5$;

$t(x)=\cos\left(3x+\dfrac{2\pi}{5}\right)$; $s(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+3}$.

1.2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit K un intervalle ; f une fonction dérivable sur K et g une fonction dérivable sur $f(K)$.

• Montrer que $f(K)$ est un intervalle.

• Soit $(x_0;\ x)\in K^2$ tels que $x\neq x_0$. Vérifier que si $f(x)\neq f(x_0)$ alors: .

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• Montrer que g est dérivable en $f(x_0)$.

Montrer que $\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \times g' \circ f(x_0)$.

En déduire que la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et que son nombre dérivé en x_0 est :
$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$.

Activité 2

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$.

Déduire que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

Montrer que la bijection réciproque de f est définie sur J par $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} en 1.

Retenir

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur $f(K)$, $g \circ f$ est dérivable sur K et pour tout $x \in K$ on a :
$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K.
La fonction f réalise une bijection de K dans $f(K)$.
Soit a un réel de f(K). f^{-1} est dérivable en a si et seulement si $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.
Dans ce cas, on a : $\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]}$

Soit r un nombre rationnel non nul; u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.
La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$.
La fonction u^r est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $ru'u^{r-1}$.

Se convaincre

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K.
f est continue et strictement monotone sur K et donc f réalise une bijection de K vers $f(K)$.
Supposons que pour tout $x \in K$, on a $f'(x) \neq 0$ et montrons que f^{-1} est dérivable sur $f(K)$
$y = f(x)$.
Soit y et y_0 deux réels distincts de $f(K)$. Il existe $(x_0 ; x) \in K^2$ tels que $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$.
Comme $y \neq y_0$, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ car f^{-1} est injective, c'est-à-dire que $x \neq x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

f étant dérivable sur K, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. De plus, $f'(x_0)\neq 0$ car $x_0\in$ K.

Donc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi, la fonction f^{-1} admet une limite finie en

y_0 de f(K) tel que $y_0=f(x_0)$ et $f'(x_0)\neq 0$. $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$

Remarque

c) S'il existe $y_0\in$ K tel que $f'\left(f^{-1}(y_0)\right)=0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe (C^{-1}) admet au point d'abscisse y_0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées dans un repère orthonormé.

La fonction $x\mapsto x^r$ avec $r\in\mathbb{Q}^*$ est dérivable en 0 si et seulement si $r\geq 1$.

Exemple

1. Soit la fonction définie par $f:x\mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

Étudions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

Posons $u:x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$ et $v:x\mapsto\sin x$ on a $f=v\circ u$ et $Df=\mathbb{R}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0<\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$ donc $u(\mathbb{R})=]0;\ 1]$.

v est dérivable sur $]0;\ 1]$; donc $f=v\circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

2. Soit la fonction g définie de $[0;\pi]$ dans $[-1;\ 1]$ par : $g(x)=\cos x$.

a. Démontrons que g admet une bijection réciproque.

g est dérivable sur $[0;\pi]$ et $g'(x)=-\sin x\leq 0$; donc g est strictement décroissante sur

$g([0;\pi])=[\cos\pi;\cos o]=[-1;\ 1]$. Ainsi, g est une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;\ 1]$, donc admet une bijection réciproque.

b) Déterminer un ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable et déterminons $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x\in J$.

$g'(x)=-\sin x$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$ car $x\in[0;\pi]$

$g(0)=1$ et $g(\pi)=-1$, donc g^{-1} n'est pas dérivable en 1 et -1 d'où g^{-1} est dérivable sur J=$]-1;\ 1[$ et $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\dfrac{1}{-\sin\left[g^{-1}(x)\right]}$.

Par ailleurs, $\sin^2\left[g^{-1}(x)\right]=\left[\sin(g^{-1}(x))\right]^2=1-\left[\cos(g^{-1}(x))\right]^2=1-\left[g(g^{-1}(x))\right]^2=1-$

or $x\in\left]-1;1\right[\Rightarrow 1-x^2>0$. $\sqrt{\sin^2\left[g^{-1}(x)\right]}=\sqrt{1-x^2}$. donc $\sin\left[g^{-1}(x)\right]=\sqrt{1-x^2}$ car g

$(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in J$

fonctions $u : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ et $v : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et ont pour dérivées

ves les fonctions $u' : x \mapsto -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ et $v' : x \mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. La fonction $w : x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ est dérivable

$[+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $w : x \mapsto \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

$f : x \mapsto (x^3-1)^{-\frac{5}{4}}$. Étudions la dérivabilité de f sur D_f et définissons sa fonction dérivée.

$\Leftrightarrow x^3-1>0$ car $-\frac{5}{4}<1$. Ainsi, $x>1$ et donc $D_f =]1;+\infty[$.

fonction $x \mapsto x^3-1$ est dérivable et est strictement positives sur D_f. Par conséquant, f est

sur D_f.

$=-\frac{5}{4}(u'(x))(x^3-1)^{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{5}{4}\times 3x^2(x^3-1)^{-\frac{9}{4}}$ où $u(x) = x^3-1$.

$=-\frac{15}{4}x^2(x^3-1)^{-\frac{9}{4}}$.

ice résolu

la fonction f de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

que f est une bijection et déterminer l'ensemble de dérivabilité J de f^{-1}.

f^{-1} et déterminer sa fonction dérivée sur J.

g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$

g comme composée de deux fonctions puis en déduire que g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

miner la dérivée de g sur $]0,+\infty[$.

un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement

sur un intervalle K. Démontrer que la fonction u^r est dérivable sur K et que sa dérivée

u^{r-1}.

$=x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

ons que f est une bijection dans $[0;+\infty[$ et déterminons l'ensemble de dérivabilité J

rivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=nx^{n-1}$, donc f est strictement

sur $[0;+\infty[$.

si $n \geq 2$, alors $n-1 \geq 1$ et donc $f'(0)=0$. f^{-1} n'est pas dérivable en 0

d'où $J=]0\ ;+\infty[$.

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

b) Définition de f^{-1} et calcul de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

Soit $y \in [0\ ,+\infty[$ cherchons $x \in [0\ ;+\infty[$ tel que $y=f(x)$.

$y=f(x) \Leftrightarrow y=x^n \Leftrightarrow y^{\frac{1}{n}}=x.f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ sur $[0;+\infty[$.

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad . \quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

pour tout $x \in]0;+\infty]$.

2.a Écriture de g comme composée de deux fonctions et dérivabilité sur $]0;+\infty[=J$.

Comme $r \in \mathbb{Q}^*$, $r=\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$g(x)=x^{\frac{p}{q}}=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p=v\left(u(x)\right)$ où $u(x)=x^{\frac{1}{q}}$ et la fonction v telle que $v(x)=x^p$ est

sur $]0;+\infty[$ et $u\left(]0;+\infty[\right)=]0;+\infty[$, donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme compo

des fonctions dérivables.

b) Dérivée de g sur $]0;+\infty[$.

$$g'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}\times p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{1}{q}-1+\frac{p}{q}-\frac{1}{q}}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} \quad . \quad g'(x)=rx^{r-1}$$

3.On peut écrire $u^r=g\circ u$ et par ailleurs, $u(K)\subset]0,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0,+\infty[$

u^r est dérivable sur K et pour tout $x \in K$, $(u^r)'(x)=(g\circ u)'(x)=u'(x)\times g'\left(u(x)\right)=u'$

$(u^r)'=ru'u^{r-1}$

S'exercer

1.d Étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants:.

a) $f: x \mapsto \cos(x^3+2x)$; b) $f: x \mapsto x^{-\frac{4}{3}}$; c) $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4}$; d) $x \mapsto (x-1)^{\frac{3}{2}}$; e) $f: x \mapsto$

1.e Montrer que la fonction $f: x \mapsto \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{2}{\pi};\frac{2}{\pi}\right[$.

1.f Soit f la fonction définie de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

...soit la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=x\sqrt{x}$.

...montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble ...définition.

...déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.

...calculer de deux façons différentes, le nombre dérivée $\left(g^{-1}\right)'(x)$, pour tout $x\in J$.

DÉRIVÉES SUCCECIVES ET LEURS APPLICATIONS

Prendre un bon départ

...numéro 1

...la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{\frac{5}{2}}+x^3+2x+1$

...déterminer les fonction dérivées f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$ de f. Justifier que chacune de ...fonctions est dérivable sur $]0;+\infty[$ avant de calculer les dérivées précédentes.

...numéro 2

...une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K. Soit $x_0\in K$ et ...$=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point M_0 d'abscisse x_0.

...la fonction $h: x\mapsto f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$.

...montrer que h est dérivable sur K et vérifier que $\forall x\in K,\ h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$

...calculer $h'(x_0)$.

...suppose que f'' est strictement négative sur K.

...montrer que f' est décroissante sur K.

...soit $x\in K$, Montrer que : $x>x_0\Rightarrow h'(x)<0$ et $x<x_0\Rightarrow h'(x)>0$. Dresser un ...des variations de h sur K.

...déduire que sur K, $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (T).

...suppose que f'' est strictement positive sur K. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (T).

...déduire de b) et c) que si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors M_0 est un point ...à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Retenir

...soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et K un intervalle de $\mathbb{R}$.

...est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée f' est appelée dérivée première de f ...et on la note aussi $f^{(1)}$.

...est dérivable sur K, alors sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f sur K et ...note aussi $f^{(2)}$.

• De façon récurrente, la dérivée n-ième de f sur K, ou la fonction dérivée d'ordre n sur K notée $f^{(n)}$ si elle existe est la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$ de f sur K.

On note aussi $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ pour tout $n \geq 1$ et $f^{(0)} = f$.

(2) Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion à la courbe représentative de f.

Exemple

1) Soit $f : x \mapsto \sin x$.

$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; $f''(x) = -\sin(x) = \sin(\pi + x) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + x\right)$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{2} + x\right)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin\left(4 \times \frac{\pi}{2} + x\right)$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$.

Soit la proposition : « $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Pour $n = 1$, 2 et 3 la proposition est vraie d'après les calculs ci-dessus .

• Supposons la proposition vraie au rang k, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$.

Montrons qu'elle est aussi vraie au rang $k+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $f^{(k)}(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\right)$.

$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{k\pi}{2} + x\right)\right)$.

d'où $f^{(k+1)}(x) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + x\right)$; donc la proposition est vraie au rang $k+1$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$.

Exercice résolu

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

f est n fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$.

Solution

Désignons par $\mathcal{P}(n)$ la proposition: " La fonction f est n fois dérivables sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et pour tout $x>\frac{1}{2}$, $f^{(n)}(x)=\frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$ ".

- Pour $n=1$, f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ car $2x-1\neq 0$

$f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{-2}{(2x-1)^2}=\frac{1!(-2)^1}{(2x-1)^{1+1}}$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Supposons que la proposition soit vraie au rang k $(k\geq 1)$ et montrons qu'elle l'est au rang $(k+1)$.

Donnés l'hypothèse de récurrence, f est k fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

et $f^{(k)}(x)=\frac{k!(-2)^k}{(2x-1)^{k+1}}=k!(-2)^k\times\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{k+1}$

la fonction $u:x\mapsto\frac{1}{2x-1}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $u\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=]0;+\infty[$

la fonction $v:x\mapsto x^{k+1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $v\circ u$ est dérivable et comme $f^{(k)}=k!(-2)^k\ v\circ u$ alors $f^{(k)}$est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ on a alors

$f^{(k+1)}(x)=k!(-2)^k\ (k+1)\frac{-2}{(2x-1)^{k+1+1}}=\frac{(k+1)!(-2)^{k+1}}{(2x-1)^{(k+1)+1}}$. D'où $\mathcal{P}$(k+1) est vraie.

En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f^{(n)}(x)=\frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$, pour tout $x>\frac{1}{2}$; d'après le principe de démonstration par récurrence.

S'exercer

Soit la fonction $g:x\mapsto\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x+1$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction g admet deux points d'inflexion.

Définir la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que f est n fois dérivable sur $]-\infty; 0[$ et que sa fonction dérivée d'ordre n est définie sur $]-\infty; 0[$ par $f^{(n)}: x \mapsto \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

1.g Soit la fonction $h: x \mapsto \cos(x)$

- Donner l'expression de h', h'', $h^{(3)}$ et $h^{(4)}$ à l'aide de la fonction cosinus (ou h).
- En déduire une expression de la dérivée $n^{ième}$ de h en fonction de n.

1.4 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

Prendre un bon départ

Activité 1

Le débit d'un robinet est compris entre 15 l/min et 20 l/min. Déterminer en litres les volumes minimal et maximal d'eau qui s'écoule de ce robinet en 1 heures.

Activité 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, f' bornée sur K.

Soient a et b deux éléments de K tels que $a < b$; m et M deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $m \leq f'(x) \leq M$.

On considère les fonctions g et h définies par $u: K \to \mathbb{R}$ et $v: K \to \mathbb{R}$
$x \mapsto mx - f(x)$ $x \mapsto Mx - f(x)$

- Montrer que u est dérivable sur K et que $u'(x) = m - f'(x)$ pour tout $x \in$ K.
- En déduire que u est décroissante sur K et que $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$.
- Montrer de façon analogue que $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
- En déduire que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Retenir

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K. Soient a et b deux éléments de K tels que $a < b$.

- S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $m \leq f'(x) \leq$ M alors on a l'inégalité : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Ces dernières inégalités sont dites des accroissements finis.

- Autre version

S'il existe un nombre réel A positif tel que pour tout $x \in [a\ ;b]$, $|f'(x)| \leq$ A, alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq A|b-a|$ (Inégalité des accroissement finis).

vaincre

pour tout $x \in [a\ ;b]$, $|f'(x)| \leq A$ alors $-A \leq f'(x) \leq A$ et d'après l'inégalité des accroissements finis on a : $-A(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq A(b-a)$ d'où $|f(b)-f(a)| \leq A|b-a|$.

Montrons que $\forall x \in [1\ ;\ 2]$ on a :

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1}-\sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$; b) $\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. f est dérivable sur $[1\ ;\ 2]$ et Pour tout $x \in [1\ ,2]$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. En encadrant $f'(x)$, on a $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$.

Soit $x \in [1\ ;\ 2]$

l'intervalle $[x\ ;\ 2] \subset [1\ ;\ 2]$. Ainsi, pour tout $a \in [x\ ;\ 2]$ on a $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$.

En appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[x\ ;\ 2]$, on a :

$\sqrt{2}(2-x) \leq f(2)-f(x) \leq \sqrt{2}(2-x)$ d'où $\sqrt{2}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1}-\sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$.

l'intervalle $[1;x] \subset [1\ ;\ 2]$; donc pour tout $a \in [1;\ x]$ on a $-\sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$.

$|f'(a)| \leq \sqrt{2}$ pour tout $a \in [1;\ x]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[1\ ;\ x]$ on a $|f(x)-f(1)| \leq \sqrt{2}(x-1)$:

c'est-à-dire $\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$ d'où b).

S'exercer

Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0\ ;\ 1]$ on a :

a) $\frac{x}{2}+1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{x}{2}+1$; b) $\left|\sqrt{x+1}-1\right| \leq \frac{x}{2}$

Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$ montrer que : $-\alpha \leq \sin\alpha \leq \alpha$.

Démontrer que pour tout couple $(a\ ;\ b)$ de réels, on a : $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$.

LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIO

- Utiliser les résultats sur la notion de continuité pour mieux représenter une fonction et utiliser la fonction dérivée sur un intervalle pour y étudier les variations d'une fonction.
- Utiliser les branches infinies pour donner l'allure de la courbe d'une fonction.

Prendre un bon départ

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sin|x| - \frac{1}{2}x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \cos(x) - x$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 1

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$, puis en déduire le signe de g dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Activité 2

- Étudier la branche infinie de la courbe représentative de f en $+\infty$.
- Étudier la dérivabilité de f en 0.
- Montrer que f est une fonction paire.
- Dresser le tableau des variations de f sur $[0 ; +\infty[$ puis sur son ensemble de définition.
- Représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé. On prendra $\alpha \simeq 0{,}73$ et $f(0{,}73) \simeq$

Retenir

Soit f une fonction, d'ensemble de définition D_f et de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère du plan.

(1) Pour étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau des variations, il faut :

- étudier éventuellement la parité, la périodicité de f sur D_f.
- étudier la continuité et la dérivabilité de f sur chaque intervalle de D_f.
- étudier le signe de f'.
- calculer les limites aux bornes du domaine d'étude, puis dresser le tableau des variations de f.

(2) Pour représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il est nécessaire:

- d'étudier éventuellement les branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$.
- de déterminer les points particuliers de $(\mathcal{C}_f)$: les extréma, les points d'intersection avec les axes et les positions relatives avec les tangentes

et représentons la fonction $f : x \mapsto -x^4 + 2x^2 + 2x + 2$.

ensemble de définition et limites aux bornes.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^4) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$

Continuité et dérivabilité de f sur D_f.

dérivable sur D_f donc continue, car fonction polynôme et $f'(x) = -4x^3 + 4x + 2$

gne de f' et tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+\infty$		$0,46$		$3,54$	$-\infty$

$= -12x^2 + 4$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *ou* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-8\sqrt{3}+18}{9} \approx 0,46$; $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}+18}{9} \approx 3,54$ et $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$

continue et strictement décroissant de $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

vers $]-\infty; 3,54[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

réalise une bijection $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ vers $]-\infty; 3,54[$.

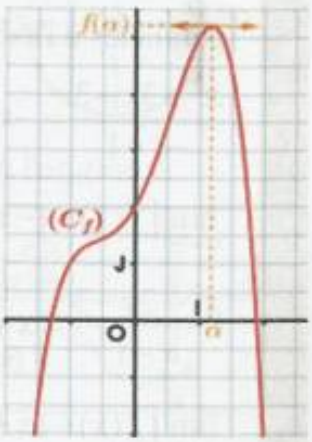
$0 \in]-\infty; 3,54[$, il existe un unique $\alpha \in]3,54; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

$\left(\left]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\right) =]0,46, +\infty[$ qui ne contient pas 0.

$f'(x) = 0$ n'a aucune solution dans $\left]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$. Par conséquent, α est l'unique réel

$f'(\alpha) = 0$.

$f'(x) \geq 0$ *si* $x \in]-\infty; \alpha]$ et $f'(x) \leq 0$ *si* $x \in [\alpha; +\infty[$



représentation graphique

$\frac{f(x)}{x} = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe représentative de f admet une

parabolique de direction (OJ).

du théorème des valeurs intermédiaires on montre que

$;2[$ et que $\alpha \approx 1,19$ à 10^{-2} près. De même, on

les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

résolu 1

les variations et représenter graphiquement la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 3}{|x| - 1}$.

Solution

• Ensemble de définition de la fonction f.

Soit $x \in \mathbb{R}, f(x)$ existe si et seulement si si $|x|-1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -1$ et $x \neq 1$

$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{x-1}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

• Continuité et dérivabilité de f.

Sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ on a $f(x)=\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}$ et sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a $f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0\}$ comme fonction rationnelle.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 3 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+6}{-x-1} = -6$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-1}$

donc f est continue sur D_f, dérivable à gauche et à droite en 0 mais pas en 0.

• Dérivée et tableau des variations

$f'(x) = \dfrac{-x^2-2x-6}{(x-1)^2}$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ si $x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	-6	0	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	3	↘	‖	↘
		$-\infty$	‖	$-\infty$			‖	$+\infty$

• Représentation graphique de f.

D'après le calcul des limites, les droites d'équation respectives $x=-1$ et $x=1$ sont les asymtotes à $(\mathcal{C}_f)$ parallèles à l'axe des ordonnées.

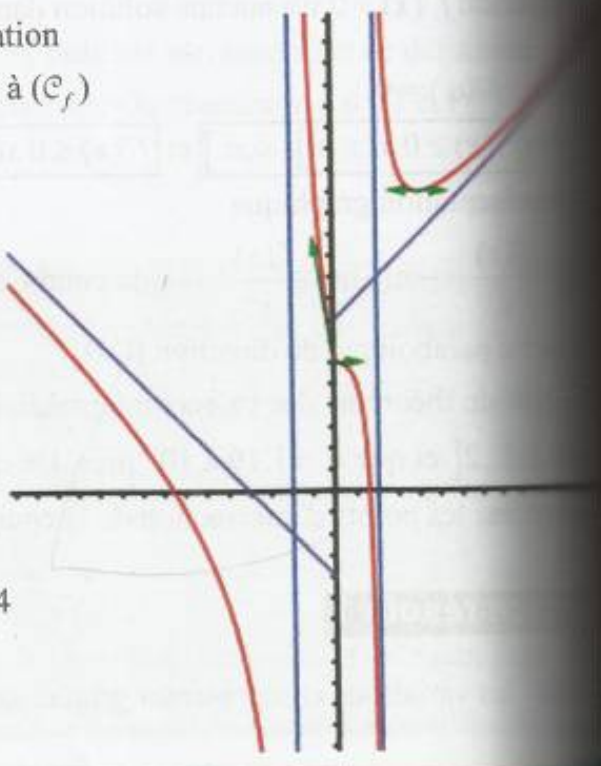
$\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1} = -x-2+\dfrac{5}{x+1}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x+1}\right) = 0$

$\dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x+4+\dfrac{1}{x-1}$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+4)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0.$

Les droites d'équations $y = -x-2$ et $y = x+4$ sont les asymtotes à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.



résolu 2

variations et représenter la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) - 2\sin x$

de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$.

périodicité de f :

$x \in D_f$ on a $x + 2\pi \in D_f$ et $f(x+2\pi) = \sin[2(x+2\pi)] - 2\sin(x+2\pi)$

$= \sin(2x) - 2\sin x$

$= f(x)$

odique et de période 2π. On peut donc réduire l'ensemble d'étude de f à un intervalle

2π (par exemple $D=[-\pi\ ;\ \pi]$).

$x \in D$ on a $-x \in D$ et $f(-x) = \sin(-2x) - \sin(-x) = -(\sin(2x) + 2\sin x)$

$= -f(x)$.

re. Son ensemble d'étude peut être réduit à $D_e = [0\ ;\ \pi]$.

té, dérivabilité et tableau des variations sur $[0\ ;\pi]$

ctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto -2\sin x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f

ue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

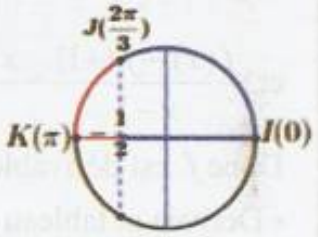
$= 2\cos(2x) - 2\cos x.$

$= 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1)$

$= 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}\right)$ dans $[0;\pi]$.

$x \in \mathbb{R}$, $\cos x - 1 \leq 0$ et le cercle ci-dessous permet de déterminer le signe de

$\frac{1}{2}$.



$\frac{2\pi}{3}\Big]$ alors $f'(x) \leq 0$ et si $x \in \left[\frac{2\pi}{3};0\right]$ alors $f'(x) \geq 0$

des variations et représentation graphique de

de f.

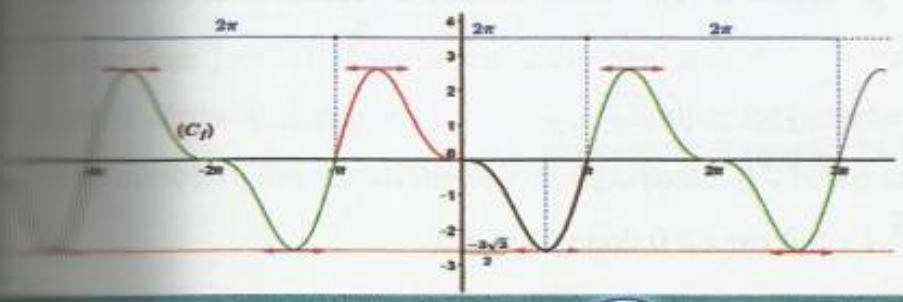
intervalle $[-\pi;0]$ le morceau de $(\mathcal{C}_f)$ est le symétrique par rapport à l'origine 0

de celui de l'intervalle $[0;\pi]$ car la fonction f est impaire.

$(\mathcal{C}_f)$ est completée sur $\mathbb{R}$ par les translations successives

$2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$ car f est périodique de période 2π.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0



Exercice résolu 3

Étudier ses variations et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{|x^2-1|}$

• Ensemble de définition et limites aux bornes.

$D_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2-1| \geq 0$.

$f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ si $x \in]-\infty;1] \cup [1;+\infty[$ et $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ si $x \in [-1,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\infty$

$x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = 0.$

• Continuité et dérivabilité de f sur D_f.

La fonction $x \mapsto |x^2-1|$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto (|x^2-1|)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ car $x^2-1>0$.

La fonction $x \mapsto x - \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1;1[$ car $1-x^2>0$.

Sur $]-\infty;-1[$ on a $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}+1}{x+1} = 1 - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Sur $]1;+\infty[$ on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Sur $]-1;1[$ on a : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}+1}{x+1} = 1 - \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

et $\dfrac{f(x)-f(+1)}{x-1} = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}-1}{x-1} = 1 + \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(+1)}{x+1} = +\infty$

Donc f est dérivable sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

• Dérivée et tableau des variations.

Sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ on a : $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$

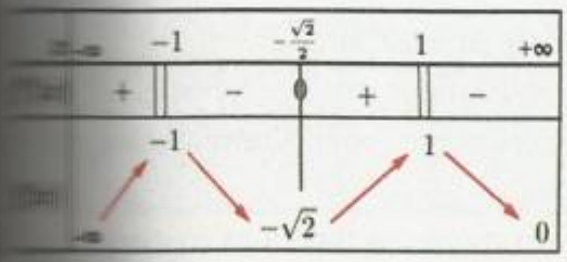
- si $x \in]-\infty,-1[$ alors $\sqrt{x^2-1}-x>0$ car $-x>0$ donc $f'(x)>0$

- si $x \in]1,+\infty[$ alors $\sqrt{x^2-1}-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \geq x \Leftrightarrow -1 \geq 0$ ceci est faux e donc pour $x \in]1,+\infty[$ on a $f'(x)<0$.

Sur $]-1;1[$ on a : $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$.

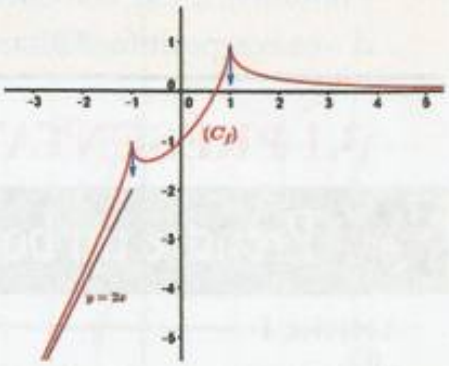
- Si $x \in [0;1[$ alors $\sqrt{1-x^2}+x>0$ car $x \geq 0$ donc $f'(x)>0$.

$x \in]-1;0[$ alors $\sqrt{1-x^2}-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq -x \Leftrightarrow 1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$



Représentation graphique de $(\mathcal{C}_f)$.

Dans le calcul des limites, la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}\right) = 0$$

La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$

Exercer

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1$.

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{x^2-2|x-2|}{x^2-1}$.

Etudier la dérivabilité de g en 2.

Etudier les variations de g et représenter sa courbe ($\mathcal{C}$ g) dans un repère orthonormé.

On considère la fonction $h : x \mapsto \cos(2x) - 2cox(x)$

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$ l'inéquation $\sin(2x)-\sin(x) \geq 0$.

Etudier et représenter graphiquement la fonction h.

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x+1+\sqrt{|x-1|}$

Résoudre dans $]-\infty\ ;1]$ l'inéquation $2\sqrt{1-x}-1 \geq 0$.

Etudier la dérivabilité de f en 1. c) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

Dresser le tableau des variations de f et représenter $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

LEÇON 3 PRIMITIVES D'UNE FONCTION

- Déterminer les primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Mobiliser les connaissances sur les opérations de dérivations, pour déterminer les primitives de certaines fonctions continues sur des intervalles.
- Maîtriser les propriétés sur les opérations de primitivations des fonctions continues (primitive d'une combinaison linéaire des fonctions, d'un produit de fonctions, d'une composition de fonctions,...)

3.1 PRÉSENTATION ET DÉFINITION

Prendre un bon départ

Activité 1

Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle K que l'on déterminera et ayant pour fonction dérivée f :

$f : x \mapsto 5$; $f : x \mapsto 2x$; $f : x \mapsto 5x^2$; $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$; $f : x \mapsto -\sin x$; $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Activité 2

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $F : x \mapsto x + \tan x$ sur l'intervalle K= $\left]-\frac{\pi}{2}\right.$
- On définit les fonctions G et H sur K par : $H(x) = F(x) + 1$ et $G(x) = F(x) - 2$.

  Determiner les fonctions dérivées G' et H' sur K. En déduire trois fonctions dérivables sur K et ayant toutes pour dérivée la fonction $x \mapsto 2 + \tan^2 x$.
- Déterminer une isométrie du plan qui transforme la courbe de G en celle de H dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
- Soit la fonction $P : x \mapsto F(x) + k$. Déterminer k pour que la courbe de P passe par le point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et d'ordonnée 1.

Retenir

(1) soit f une fonction définie sur un intervalle K.

- On appelle primitive de f sur K, toute fonction F dérivable sur K et telle que : Pour tout $x \in K$, on ait : $F'(x) = f(x)$.
- Si f est une fonction continue sur K alors f admet une primitive sur K.

La continuité est suffisance mais pas nécessaire c'est-à-dire qu'une fonction peut admettre une primitive sur K sans être continue sur K.

ne fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.

- Pour tout nombre réel m indépendant de x, toute fonction: $x \mapsto F(x) + m$ est une de f sur K.
- Toute primitive de f sur K est sous la forme $x \mapsto F(x) + m$ où m est une constante réelle.
- Soit $x_0 \in K$ et y_0 un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur K, nd la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire telle que $F(x_0) = y_0$.

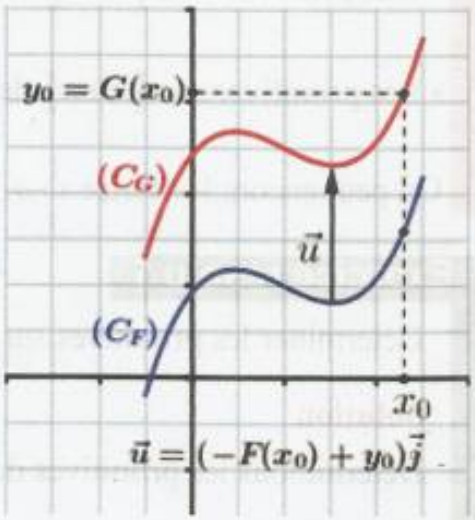
ue 1

une fonction admettant une primitive F sur un ntervalle K. Si G est une autre primitive de f sur K, alors un réel c tel que $G(x) = F(x) + c$.

Dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe de G est de celle de F par la translation de vecteur $c\vec{j}$.

Si $x_0 \in K$ et $y_0 = G(x_0)$ alors $c = -F(x_0) + y_0$.

mme fixé dans K et la translation étant bijective, la $x \mapsto F(x) - F(x_0) + y_0$ est l'unique primitive ur K qui prend la valeur y_0 en x_0.



le 1

La fonction $F : x \mapsto x^2 + \sin x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $G : x \mapsto x^2 + \sin x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ (à compléter)

Soit H la primitive de f qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$.

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\frac{\pi}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{\pi^2}{4} \text{ donc } H(x) = x^2 + \sin x - \frac{\pi^2}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Les fonctions $x \mapsto x \mapsto x^2 + \sin x - 3$ et $x \mapsto x \mapsto x^2 + \sin x + \sqrt{2}$ sont aussi des primitives de f.

Toutes les dérivées des fonctions élémentaires vues à la leçon 1, on peut dresser le tableau des primitives de chacune d'elles. c est une constance réelle.

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto x^r$ où $r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0; +\infty[$ si $r \geq 0$ $]0; +\infty[$ si $r < 0$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$

$x \mapsto sinx$	$x \mapsto -cosx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto sinx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$	$x \mapsto tanx + c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$

Exemple 2

- Une primitive sur $]-\infty; 0[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{6x^6}$.
- Les primitives sur $[0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$ avec

On peut encore les écrire $x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice résolu 1

Déterminer les primitives sur $]0, +\infty]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x + x\sin x}{x^2}$

Solution

Déterminons les primitives de f sur $]0; +\infty]$.

Cherchons une primitive de f sous la forme $\frac{u}{v}$. Or $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

On voudrait que $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = f(x)$. Il suffit de prendre $v : x \to x$ et $u(x) = -\cos x$.

On a donc les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{-\cos x}{x} + c$

avec c une constante réelle.

Exercice résolu 2

On considère les fonctions F et f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = x^2\cos\frac{1}{x} - x^2 \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} - 2x \text{ si } x \neq 0 \\ f(o) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est dérivable en 0. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas continue en 0.
4. Donner l'exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une primitive sur

Solution

1. Démontrons que F est dérivable en 0, puis sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = x\cos\frac{1}{x} - x \text{ et } 0 \leq \left|x\cos\frac{1}{x} - x\right| \leq |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| + |x| \leq 2|x| \text{ car } \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1,$$

pour tout $x \neq 0$ et $\lim_{x\to 0} 2|x| = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 0$ donc F est dérivable en 0 et F'(0) =0.

La fonction $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0;+\infty[$ comme

composée de fonctions dérivables donc la fonction : $x \mapsto x^2 \cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$

comme produit de fonctions dérivables. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$

comme somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

pour $x \neq 0$ $F'(x) = 2x\cos x\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right) - 2x = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} - 2x = f(x)$

et $F'(0) = f(0)$.

donc $\begin{cases} F'(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ F'(0) = f(0) \end{cases}$ donc F est une primitives de f sur $\mathbb{R}$

donc $F' = f$.

Montrons que f n'est pas continue en 0.

Supposons que f continue en 0, alors on a $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Or

pour $x \neq 0$, $f(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\right) = 2\lim_{x\to 0}\left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x\right) = 0$

par ailleurs $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - \left(2x\cos\frac{1}{x} - 2x\right)$. Donc f est continue en 0 si la

fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite en 0, ce qui est absurde car $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$

et la fonction sinus n'admet pas de limite en ∞.

Donc f est une fonction discontinue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

Exercer

Déterminer les primitives F de f sur les intervalles K indiqués dans chacun des cas suivants:

$K=\mathbb{R}$; d) $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$ $K=]0 ; +\infty[$;

$K=\mathbb{R}$; e) $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$ $K=]0 ;+\infty[$;

$K=]-\infty ;0[$; f) $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ $K=\left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.

3.b On considère la fonction $f : x \mapsto x\tan^2 x + \tan x + x$ et $g : x \mapsto x\tan x$.

a) Montrer que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I= $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer la dérivée de g sur I. En déduire une primitive de f sur I.

c) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 0 en $-\frac{\pi}{4}$.

3.2 RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES S... DES INTERVALLES DE CERTAINES FONCT... CONTINUES.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient f et g deux fonctions admettant pour primitives sur un intervalle K, les fonctions F et G respectivement.

a. Déterminer la dérivée (F+G)' sur K . En déduire une primitive de $f+g$ sur K.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; déterminer la dérivée (λF)' sur K. En déduire une primitive de λf sur K.

Activité 2

a.Déterminer les réels a et a' pour que les fonctions $F : x \to a\cos(7x+\pi)$ et $G : x \to a'\sin(-3x+2)$ soient des primitives des fonctions $f : x \mapsto 3\sin(7x+\pi)$ et $g : x \mapsto 5\cos(-3x+2)$ respectivement.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur f(K).

b. Déterminer la dérivée $(g \circ f)'$ sur K. En déduire une primitive sur K de la fonction $f' \times g' \circ f$

c. Soit la fonction $h : x \mapsto 2x\cos(x^2+3)$.

(i)Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = u'(x) \times \sin'(u(x))$ où u est une fonction à déterminer

(ii) Déterminer une fonction H dérivalble sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $H'(x) = h(x)$.

En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Activité 3

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^7}$.

On peut écrire $f(x) = (4x+2) \times (x^2+x+1)^{-7}$. soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit u une fonction dérivable telle que $F = au^r$ où r est un nombre rationnel distinct de -1.

a) Calculer la dérivée F' de F en fonction de u.

b) Déterminer les réels r et a, et la fonction u pour que la fonction F soit une primitive de f

c) Donner alors une primitive de la fonction : $x \mapsto 3\cos(x)(\sin x)^4$.

Retenir

Soient f et g deux fonctions admettant pour primitives sur un intervalle K, fonctions F et G respectivement.

La fonction $f+g$ admet pour primitive sur K, la fonction F+G.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf admet pour primitive sur K la fonction λF.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur f(K).

La fonction $f' \times g' \circ f$ admet pour primitive sur K, la fonction $g \circ f$.

Pour tout triplet $(A;a;b)$ de réels tels que $a \neq 0$,

une primitive de la fonction $x \mapsto A\cos(ax+b)$ est la fonction : $x \to \frac{A}{a}\sin(ax+b)$;

une primitive de la fonction $x \mapsto A\sin(ax+b)$ est la fonction : $x \to -\frac{A}{a}\cos(ax+b)$.

Si r est un nombre rationnel distinct de -1, alors une primitive de $au'u^r$ est $\frac{a}{r+1}u^{r+1}$.

Exemple 1

Les primitives de la fonction $x \mapsto -5x^6$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonction F dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $F(x) = -5 \times \frac{1}{6+1}x^{6+1} + c = -\frac{5}{7}x^7 + c$ avec c $\in \mathbb{R}$.

Les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto$: $-\sqrt{x} + \frac{3}{x^5} + \frac{5}{4}x^2 - \sqrt{7}$ sont les fonctions définies par: $G(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} - 3\frac{1}{(5-1)x^{5-1}} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2+1}x^{2+1} - x\sqrt{7} + c$ avec c $\in \mathbb{R}$ soit également $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4x^4} + \frac{5}{12}x^3 - x\sqrt{7} + c$ avec c $\in \mathbb{R}$

Remarque

Les (3) et (4) du retenir ci-dessus permettent de déterminer des primitives de certaines fonctions particulières.

Forme de la fonction	Une primitive	Contraintes
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^n}{n+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'u^r$ avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^r}{r+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et positive. [Si $r < 0$, on doit avoir $u > 0$]
$\frac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et *non nulle*
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et *strictement positive*.

$u'\cos u$	$\sin u$	Sur tout intervalle où u est
$u'\sin u$	$-\cos u$	

Exemple 2

• Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto 2x\ \cos(x^2+3)$ sont les fonctions $H : x \mapsto \sin(x^2+3)+c$ avec $c \in \mathbb{R}$ car $h(x) = (u'(x))\cos(u(x))$ où $u(x) = x^2+3$.

• Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x^2+3x-4)^3}$. f est définie et continue sur l'ensemble $Df =]-\infty;-4[\cup]-4\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et par conséquent admet des primitives sur chacun des trois intervalles. Notons les F. On peut écrire $f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^3}$ où $u(x) = x^2+3x-4$

donc $F(x) = -\dfrac{1}{(3-1)(x^2+3x-4)^{3-1}}+c = -\dfrac{1}{2(x^2+3x-4)^2}+c$ où $c \in \mathbb{R}$.

• Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$. g est continue sur $]-2\ ;2[$ donc y admet des primitives

On peut écrire $g(x) = (3x)(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}$. Posons $u(x) = 4-x^2; u'(x) = 2x$. D'où $x = \dfrac{u'(x)}{-2}$

$g(x) = \dfrac{-3}{2} \times u'(x)\left[u(x)\right]^{\frac{-1}{2}}$. ; $\dfrac{-1}{2}+1 = \dfrac{1}{2}$; Une primitive de g est la fonction G définie par

$G(x) = \dfrac{2}{1}\left[4-x^2\right]^{\frac{1}{2}}+c = (-3)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}+c = -3\sqrt{4-x^2}+c$ où $c \in \mathbb{R}$

$\dfrac{1}{2}$

Les primitives de g sur $]-2\ ;\ 2[$ sont les fonctions G telles que pour tout $x \in]-2\ ;2[$, $G(x) = -3\sqrt{4-x^2}+c$ avec c une constante réelle.

Méthode

Pour déterminer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle K, un chemin consiste à l'identifier :

- soit à la dérivée d'une fonction élémentaire,
- soit à la dérivée d'une fonction composée,
- ou encore à la dérivée d'une somme, d'un quotient ou d'un produit de deux fonctions.

Dans certains cas une réorganisation préalable de l'expression de f est nécessaire pour une éventuelle identification.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f : x \mapsto x\sin x$. Déterminer les primitives F de f sur $\mathbb{R}$

Solution

déterminons les primitives F de f sur $\mathbb{R}$

Posons les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \sin x$, on a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$

$=u(x)v'(x)=[uv]'(x)-u'(x)v(x)=[uv]'(x)+\cos x$. Or la fonction : $x\mapsto\cos x$ a pour
la fonction : $x\mapsto\sin x$.
les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F:x\mapsto -x\cos x+\sin x+c$ avec $c\in\mathbb{R}$

résolu 2

er les primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f:x\mapsto\cos^2 x\sin^4 x$ et
$\to\cos 5x\sin 3x$.

inons les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

$=\cos^2 x\sin^4 x=(\sin x\cos x)^2\sin^2 x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\times\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$2x)^2(1-\cos 2x)$

$(\sin 2x)^2-\cos 2x(\sin 2x)^2\Big]=\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-\cos 2x(\sin 2x)^2\Big]$

$1-\cos 4x-2\cos 2x(\sin 2x)^2\Big]$

$1-\cos 4x-(u'(x)\times(u(x))^2\Big];(u(x)=\sin(2x))$ donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les
ctions $F:x\mapsto\frac{1}{16}\Big[x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}(\sin 2x)^3\Big]+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.
inons les primitives de g sur $\mathbb{R}$.

$=\frac{1}{2}\big[\sin(5x+3x)-\sin(5x-3)x\big]=\frac{1}{2}\big[\sin(8x)-\sin(2x)\big]$.

primitive sur $\mathbb{R}$ de g est la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{8}\sin(8x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\Big]$.

ensemble des primitives de g sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions G_k définies:

$=-\frac{1}{16}\cos(8x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+k$ où k est une constante

méthode

$=\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}$ et $\sin 3x=\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}$.

montre que $g(x)=\frac{1}{2}\big[\sin(8x)-\cos(2x)\big]$

Remarque

calculer une primitive d'une fonction trigonométrique f du type $x\mapsto\sin^p x\cos^n x$ avec
$\in\mathbb{N}$ on peut procéder comme ci-dessous :

• Si $p=n=0$ alors f se ramène à une fonction constante.

• Si $p=1$ ou $n=1$ alors on peut écrire f sous la forme $u'u^q$ où q est un entier naturel.

• Si $p\neq 1$ et $n\neq 1$ alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme dont les termes sont de la forme $a\sin kx$ ou $a\cos kx$ en utilisant les formules trigonométriques ou les relations d'Euler. $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Dans ce dernier cas on pourra alors écrire $f(x)=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^p\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ et utiliser ainsi les binômes de Newton ou d'autres techniques pour le développement, puis la réduction.

S'exercer

3.c Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués

$f(x)=-3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right)$, K=ℝ; $g(x)=2\sqrt{2x+1}$, $K=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$u(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $K=\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$; $v(x)=(1+\tan^2 x)\tan x$, $K=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$s(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x-3}}$, $K=]1;+\infty[$; $r(x)=(2x-1)(x^2-x+1)^3$, K=ℝ

3.d Déterminer les primitives sur les intervalles indiqués de chacune des fonctions suivantes

a) $f(x)=-x\sin(x^2+1)$ $K=\mathbb{R}$; d) $t(x)=3x^2\sqrt{x^3+1}$ $K=]-1;+\infty[$;

b) $g(x)=\dfrac{-x-2}{(x^2+4x-1)^3}$ $K=]1;+\infty]$; e) $p(x)=\dfrac{3}{(2x+3)^2}$ $K=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$;

c) $h(x)=(2x-1)^{-\frac{3}{2}}$ $K=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right]$; f) $q(x)=2+2\tan^2(2x)$ $K=\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$.

3.e Déterminer la primitive F de f sur ℝ et satisfaisant à la condition indiquée.

a) $f(x)=\sin x\cos 3x$ et $F(\pi)=2$; c) $f(x)=\cos 4x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;

b) $f(x)=-2x(x+2)^2$, et $F(0)=3$; d) $f(x)=\sin^5 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$.

S'ENTRAÎNER

...ILITÉ D'UNE FONCTION SUR ...ALLE - DÉTERMINATION DES ...IVÉES-DÉRIVÉES DES ...CTIONS COMPOSÉES

...la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ... $f(x)=x^2+3|x-1|-2$.

...l'ensemble de dérivabilité de f.

...la fonction dérivée de f sur ...ensembles suivants :

...]l , $+\infty$[.

...elle une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$?

...des cas suivants, étudier la ...la fonction f sur son ensemble ...définir sa fonction dérivée.

...$\sqrt{1-x-x^2}$;

...$-2\sqrt{2-x}$;

...$+\sqrt{x^2-4}$;

...$|x-2|$; e) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{|x|-1}$;

...$\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+2$.

...la fonction dérivée de chacune des ...ci-dessous définies :

...$\sqrt{x^2+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x^6+1}$;

...$\dfrac{1}{x^2-9}$; $p(x)=(x^3-3x-2)^4$;

...$\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{5}\right)$; $s(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+3}$.

4

Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée.

a) $f:x\mapsto \sin(x^4+2x^2+3)$; b) $f:x\mapsto (2x)^{\frac{4}{3}}$;

c) $f:x\mapsto \sqrt[5]{x^4}$; d) $f:x\mapsto (1-x^2)^{\frac{2}{3}}$;

e) $f:x\mapsto (-2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

5

Montrer que la fonction $f:x\mapsto 1+\tan 2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas dériable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{\pi};\dfrac{2}{\pi}\right[$.

Pour chacun des exercices de 6 à 9, étudier la continuité et la dérivabilité de h sur son ensemble de définition.(h fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

6

$h(x)=\sqrt{x-1}-x$;

7

$h(x)=\sqrt{2-x}+x$;

8

$h(x)=\sqrt{|x-2|}+2$;

8

$h(x)=\sqrt{|x|-4}-2$;

10

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=\sqrt{2-|x|}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

2. Déterminer la fonction dérivée de f sur chacun des l'intervalles $]-2\ ;\ 0]$ et $[0\ ;\ 2[$.

DÉRIVÉS DES FONCTIONS RÉCIPROQUES

11

Soit g la fonction définie de]0 ;+∞[vers ℝ par : $g(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Montrer que g est une bijection de]0 ;+∞[vers]1 ,+∞[.

b) Montrer que $\forall x\in]1\ ;+\infty[,\ g^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$.

c) g^{-1} est-elle dérivable sur]1 ; +∞[?

12

Soit h la fonction définie de $]-\infty\ ;\ 0]$ vers ℝ par : $h(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Montrer que h est une bijection de $]-\infty\ ;0]$ vers [1 ;+∞[.

b) Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[;\ h^{-1}(x)=-\sqrt{x^2-1}$.

c) h^{-1} est-elle dérivable sur [1;+∞[?

13

Soit f la fonction définie de $[0;\pi]$ vers $[-1;1]$ par $f(x)=\cos(x)$.

a) Montrer que f réalise une bijection g de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$.

$\left(\forall x\in[0;\pi],g(x)=f(x)\right)$.

b) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $]-1\ ;1[$.

c) Démontrer que $\forall x\in]-1\ ;1[$, on a

$(g^{-1})(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14

Soit la fonction numérique g définie de [1 ; +∞[dans [0 ; +∞[par : $g(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition.

c) Déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Déterminer de deux façons différentes $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x\in J$.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

15

Soit la fonction $g:x\mapsto\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-$

a) Montrer que la fonction g admet deux points d'inflexion sur son ensemble de définition.

b) Calculer la dérivée d'ordre 10 de g

16

a) a) Déterminer la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f:x\mapsto\sin x$.

b) Vérifier que $f^{(5)}(x)=\sin\left(x+5\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que f est dérivable sur ℝ et que sa dérivée d'ordre n définie sur ℝ par $f^{(n)}:x\mapsto\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

17

a) déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$.

b) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que f est dérivable sur]0; +∞[et que sa dérivée d'ordre n est définie sur]0,+∞[par $f^{(n)}:x\mapsto\dfrac{(-1)n(n+1)!}{x^{n+2}}$.

18

Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$

a)Démontrer que f est dérivable sur

b) Définir $f^{(1)}$; $f^{(2)}$; $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

c) Conjecturer en fonction de n et en

me expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout
$-1;+\infty[$.
émontrer cette conjecture par récurence
$(n \geq 1)$

EGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

nsidère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + x$
montrer que pour tout t $\in [1, 4]$,
$\frac{5}{4} \leq f'(t) \leq \frac{3}{2}$.
$x \in [1 ; 4]$, en appliquant :
inégalités des accroissements finis sur
alle $[1 ; x]$ en déduire que
$(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{2}(x-1)$.
alors un encadrement de x par deux
ns affine sur $[1 ; 4]$.
l'inégalité des accroissements finis
ntervalle $[x ; 4]$,en déduire que
$|x-6| \leq \frac{3}{2}|x-4|$.

fonction $f : x \mapsto \cos x$.
$\in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant les inégalités
issements finis à f sur l'intervalle
montrer que : $-\alpha \leq \cos\alpha - 1 \leq \alpha$.
que pour tout $(a ; b)$ de $\mathbb{R}^2$,
$\cos a - \cos b \ | \leq | a - b|$.

nction f définie de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par
t .
que $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $f'(t) \geq 1$.
nsidère la fonction φ définie de
vers $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t - f(t)$.

Montrer que φ est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
on a $0 \leq \tan x \leq x$.

ÉTUDES ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

Pour chacun des exercices de 22 à 27, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthnormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

22
$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1;$

23
$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1};$

24
$f(x) = 1 + 2\sqrt{x^2 - 1};$

25
$f(x) = \sqrt[3]{|x-3|};$

26
$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x;$

27
$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$

28
$g(x) = \frac{x^2 + 2|x-2|}{x^2 - 2}.$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 2.

b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$, courbe représentative de g.

c) Dresser le tableau des variations de g.

d) Construire la courbe de $(\mathcal{C}_g)$.

29

Soit la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

a) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$, courbe représentative de g.

b) Déterminer la dérivée de g et dresser son tableau des variations .

c) Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g.

30

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-2.$

a) Étudier la parité de f.

b)Dresser le tableau des variations de f.

En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau des variations de f et tracer la courbe représentative de f.

31

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé, définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f et écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{D})$ à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. Étudier les positions relatives de la droite $(\mathcal{D})$ et de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. En déduire que$(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

3. Démontrer que le point de coordonnées (1; 2) est un centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.

4. Dresser le tableau des variations de f et tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente $(\mathcal{D})$.

32

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{|x^2+3x-4|}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité aux points d'abscisses -4 et 1 respectivement

2. Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3. Montrer que la droite $\Delta : x=-\dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.

4. a) Déterminer la fonction dérivée de f

b) Dresser le tableau des variations de f

5. On considère le point $A\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

a) Soit M$(x;y)$ un point de $(\mathcal{C}_f)$ tel que $x\in[-4\,;\,1]$. Montrer que AM=2,5.

b) Soit g la fonction définie par : $g(x)=-f(x)$.

Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie de centre A.

6. a) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

b) En déduire la construction de l'ensemble des points du plan de coordonnée $(x;y)$ tels que : $y^2-|x^2+3x-4|=0$.

33

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$ de courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité aux points d'abscisses respectives -1 et 1.

2. Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3. Résoudre dans]0; 1[l'inéquation $\sqrt{1-x^2}-2x>0$ et l'inéquation $\sqrt{x^2-1}+2x>0$ dans l'intervalle $]-\infty$

...déterminer la fonction dérivée de f.
...dresser le tableau des variations de f.
...g la fonction numérique définie par :
$x \mapsto x - \sqrt{|1-x^2|}$.
...montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par
...métrie de centre O.
...cer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère
$(\mathcal{C}_f)$.

PRIMITIVES D'UNE FONCTION

...miner les primitives F de f sur les
...lles K indiqués dans chacun des cas :
$x \mapsto 5x^3$ $\quad K = \mathbb{R}$;
$x \mapsto -\pi$ $\quad K = \mathbb{R}$;
$x \mapsto -\dfrac{2}{x^6}$ $\quad K =]-\infty;0[$;
$x \mapsto -\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$ $\quad K =]0;+\infty[$;
$x \mapsto 8x^{-\frac{3}{4}}$ $\quad K =]0;+\infty[$;
$x \mapsto -\dfrac{4}{5\cos^2 x}$ $\quad K = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

...considère la fonction
$x \mapsto \cos x - x \sin x$; $g : x \mapsto x\cos x$.
...stifier que la fonction f admet une
...itive sur $\mathbb{R}$.
...déterminer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$.
...en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
...déterminer la primitive de f qui prend
...aleur 1 en $-\dfrac{\pi}{3}$.

36

Soient f et g les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} g(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par l'absurde que g n'est pas continue en 0.

3. Calculer la dérivée de g et en déduire que f est une fonction non continue sur $\mathbb{R}$ qui admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

37

Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer un intervalle K sur lequel f admet une primitive puis calculer les primitives de f sur K.

$f : x \mapsto (x-1)^4$; $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$;

$f : \mapsto -\sqrt{2} + \dfrac{1}{x}$; $f : x \mapsto \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

$f : \mapsto -\dfrac{1}{(x+2)^5}$; $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\cos^2(x+4)}$;

$f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x^3+27)^4}$;

$f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

38

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$f(x) = (2x+1)\cos(x^2+x)$, $K = \mathbb{R}$;

$g(x) = 2\sqrt{(2x-1)^3}$, $K = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$u(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, K=$]0;\pi[$;

$v(x)=(1+\tan^2 2x)\tan 2x$, K=$]-1;1[$

$s(x)=\dfrac{x}{(2x^2-2)^{\frac{2}{3}}}$, K=$]-1;1[$;

$r(x)=(2x-1)(x^2-x+1)^3$, K=$\mathbb{R}$

39

Déterminer sur les intervalles indiqués une primitive de chacune des fonctions suivantes : de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a) $f(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{3}\right)\sin(x^3+x)$ $K=\mathbb{R}$;

b) $g(x)=\dfrac{4x^3-2x}{(x^4-x^2+1)^3}$ $K=\mathbb{R}$;

c) $h(x)=(2x+3)(x^2+3x+2)^{\frac{4}{3}}$ $K=]-\infty;-1[$;

d) $t(x)=x^2(x^3-1)^{-\frac{2}{3}}$ $K=]1;+\infty[$;

e) $p(x)=\dfrac{4x+3}{(2x^2+3x-5)^3}$ $K=]1;+\infty[$;

f) $q(x)=(1+\tan^2 x)\tan^3 x$ $K=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

40

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant à la condition indiquée.

a) $f(x)=\cos x\sin^3 x$ *et* $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$;

b) $f(x)=\sin^4 x$, $F(\pi)=0$;

c) $f(x)=-2x^2(x+2)^2$, $F(0)=-1$;

d) $f:x\mapsto\cos^4 x\sin 2x$, $F(\pi)=0$;

e) $f(x)=\cos^5 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

41

Soit $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. En remarquant que $\tan^2 x=-1+(1+\tan^2 x)$, déterminer la primitive de la fonction $x\mapsto\tan^2 x$ qui prend la valeur 0 en $\dfrac{\pi}{4}$.

42

Soit la fonction $g:x\mapsto\dfrac{1}{1-\sin x}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\dfrac{1}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$.

b) En déduire les primitives de g sur

43

Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous :

1) $x\mapsto(x-1)\sqrt{x-1}$ sur $]1;+\infty[$;

2) $x\mapsto\sin x+x\cos x$ sur $\mathbb{R}$;

3) $x\mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$;

4) $x\mapsto\sin^2 x\cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$;

5) $x\mapsto\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)^3}$ sur $]1;2[$;

6) $x\mapsto\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$ sur $]0;\pi[$.

44

Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{(x-1)^2}$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=ax+b+$

2. En déduire les primitives de f sur

45

Soit g la fonction définie dans l'intervalle par : $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1. Détermine deux réels a et b indépendants de x tels que $g'(x)=\dfrac{a}{cox^4 x}+\dfrac{b}{\cos^2 x}$ où g' est la dérivée de g.

2. En déduire la primitive G de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^4 x}$ qui prend la valeur 1 en

Chapitre 7

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

LEÇON 1 ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

1.1 SOUS-ESPACES VECTORIELS D'UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$.

1.2 BASES ET DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL.

1.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES D'UN ESPACE VECTORIEL.

LEÇON 2 APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 APPLICATIONS LINÉAIRES

2.2 NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

2.3 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

2.4 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES VECTORIELLES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

- Consolider les méthodes pour :
  - montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est sous espace vectoriel;
  - montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est libre ou génératrice;
  - déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel .
- Montrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires.

1.1 SOUS-ESPACES VECTORIELS D'UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$.

Prendre un bon départ

Montrer que :

a) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'ensemble F des triplets $(x;y;z)$ tels que $2x-y+3z=0$ est un sous-espace vectoriel ;

b) Dans l'ensemble V_2 des vecteurs du plan de base $(\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent $x(2\vec{i}+3\vec{j})$ est un sous espace vectoriel ;

c) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'ensemble F des triplets $(x;y;z)$ tels que $2x-y+3z=-1$ n'est pas un sous-espace vectoriel ;

d) Dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2, l'ensemble des matrices inversibles n'est pas un sous-espace vectoriel.

Retenir

Une partie H d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E si :

(i) H est non vide ;

(ii) la somme de deux vecteurs de H est un vecteur de H;(partie stable pour +)

(iii) le produit d'un vecteur de H par un réel est un vecteur de H.(partie stable pour .)

Remarque

- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel ;
- La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel

...que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble E des triplets $(x;y;z)$ tels que $...2y+z=0$ est un sous-espace vectoriel.

...est un élément de E. H est non vide.

...$(x;y;z)$ et $(a;b;c)$ deux éléments de E.

$...)+(a;b;c)=(x+a;y+b;z+c)$.

$...-2(y+b)+(z+c)=(a-2b+c)+(x-2y+z)=0+0=0$.

$...)+(a;b;c)$ est vecteur de E . E est stable pour l'addition des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

...$(x;y;z)$ un vecteur de E et a un nombre réel.

$...)=(ax;ay;az)$.

$...-2(ay)+(az)=a(x-2y+z)=a\times 0=0$.

...est un vecteur de E : E est stable pour le produit d'un vecteur par un réel.

...un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

...On aurait du montrer que E est stable pour les combinaisons linéaires.

...et $(a;b;c)$ sont deux éléments quelconques de E, α et β deux nombres réels ...quelconques, alors le vecteur $\alpha(x;y;z)+\beta(a;b;c)$ est aussi un vecteur de E.

...donné qu'un sous-espace vectoriel doit nécessairement contenir le vecteur nul, l'ensemble ...vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui s' écrivent $(a;b;c)$ tels que $a+b+c=7$ n'est pas un sous-espace vectoriel ...car $(0;0;0)$ n'est pas un vecteur de cet ensemble. En effet, $0+0+0=0$ et $0\neq 7$.

S'exercer

...l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux, montrer que l'ensemble des matrices de la ...forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel.

...l'ensemble des vecteurs du plan, montrer que l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées ...une base donnée vérifient $3x-4y=0$ est un sous-espace vectoriel.

...BASES ET DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL.

...Prendre un bon départ

...des bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$.

...comment détermine-t-on la dimension lorsqu'elle existe d'un espace vectoriel ?

...elles sont alors les dimensions respectives de $\mathbb{R}^2$? $\mathbb{R}^3$?

...E l'ensemble des vecteurs $(x;y;z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $x-2y+5z=0$.

(i) Déterminer une famille génératrice et libre de E.

(ii) Déduire la dimension de E.

e) Dans l'ensemble V_3 des vecteurs dont une base est $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on pose $u=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de V_3 .

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ et $\vec{T}=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Donner une équation cartésienne du plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Retenir

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de E.
- Si une base d'un espace vectoriel a n vecteurs, alors toute autre base de cet espace vectoriel a aussi n vecteurs.
- La dimension d'un espace vectoriel E est l'entier naturel noté dimE, qui est 0 si $E=\{\vec{0}\}$ et le nombre de vecteurs dans une base de E si $E\neq\{\vec{0}\}$.
- Dans un espace vectoriel E de dimension n, si B est une famille de n vecteurs distincts, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) B est une famille libre de E;

b) B est partie génératrice de E ;

c) B est une base de E.

Exemple

1) Montrons que la famille $((1;2;-1);(1;1;2);(3;-1;2))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 , et la famille est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille $((1;2;-1);(1;1;2);(3;-1;2))$ est libre .

Soit x,y,z trois réels tels que $x(1;2;-1)+y(1;1;2)+z(3;-1;2)=(0;0;0)$.

On a : $\begin{cases}x+y+3z=0\\2x+y-z=0\\-x+2y+2z=0\end{cases}$ qui peut être résolu par substitution ou par la méthode du pivot de Gauss.

De la deuxième équation, $z=2x+y$ et les deux autres équations donnent le système : $\begin{cases}7x+4y=0\\3x+3y=0\end{cases}$

Le déterminant de ce dernier système est 16 qui est non nul. On a $x=y=0$; et donc $z=0$

La famille $((1;2;-1);(1;1;2);(3;-1;2))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2) La famille $((2;1);(5;2);(7;-1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car elle contient trois vecteurs distincts alors qu'une base de $\mathbb{R}^2$ doit avoir exactement deux vecteurs distincts.

3) La famille $((2;1);(5;2);(0;0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car elle contient le vecteur nul donc liée.

S'exercer

Déterminer les valeurs du réels m pour que les vecteurs $(m-2)\vec{i}+(m+3)\vec{j}$ et $(m+1)\vec{i}+(m+1)\vec{j}$ forment une base du plan dont une base est $(\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que les fonctions affines $f : x \mapsto 3x+1$ et $g : x \mapsto 2x+7$ forment une base de l'espace des applications affines définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $F : x \mapsto 11x-4$ dans cette base .

II.3 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES D'UN ESPACE VECTORIEL.

Prendre un bon départ

Soient $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ deux vecteurs du plan vectoriel V_2 de base $(\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de V_2.

En déduire que tout vecteur de V_2 s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

On désigne le sous-espace vectoriel des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ et E' le sous-espace vectoriel des vecteurs colinéaires à $\vec{v}$.

Montrer que $E \cap E' = \{\vec{0}\}$.

Retenir

Deux sous-espaces vectoriels H et F d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme de deux vecteurs dont l'un appartient à H et l'autre à F. On note $E = H \oplus F$.

Exemple

$E = E \oplus \{\vec{0}\}$

$E \oplus F = F \oplus E$

Dans V_3, on considère le plan E dont une équation est $x-2y-z=0$ et F la droite dont une base est $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Montrons que le vecteur $\vec{u}$ n'est pas un élément de E.

Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont (1;1;1).

$1-2-1=-2$ et $-2 \neq 0$. D'où le vecteur $\vec{u}$ n'est pas élément du plan E.

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de E, alors les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de V_3.

Soit en effet trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{xu} + \overrightarrow{yv} + \overrightarrow{zw} = \vec{0}$.

Supposons x non nul , alors $\vec{u} = \frac{-y}{x}\vec{v} - \frac{z}{x}\vec{w}$ et $\vec{u}$ est un vecteur de E car il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de E. Ce qui contredit la proposition ci-dessus $\vec{u}$ n'est pas élément de E. D'où $x = 0$ et alors $\overrightarrow{yv} + \overrightarrow{zw} = \vec{0}$. $\Rightarrow y = z = 0$ car $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de E et sont donc linéairement indépendants.

Tout vecteur de V_3 s'écrit de maniière unique comme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. Or $b\vec{v} + c\vec{w} \in E$ et $a\vec{u} \in F$

On peut conclure que E et F sont des sous-espaces supplémentaires de V_3.

Remarque

- Deux sous-espaces vectoriels propres F et G d'un espace vectoriel de dimension finie E sont supplémentaires si et seulement si la réunion des vecteurs d'une base de F avec celle d'une base de G constituent une base de E.
- Si deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires, alors dim F + dim G = dim E.
- Un plan et un droite sont supplémentaires si et seulement si un vecteur non nul de la droite n'est pas un vecteur du plan.

S'exercer

1.e Montrer que les droites vectorielles du plan vectoriel P engendrées par les vecteurs $3\vec{i} - 2\vec{i} - \vec{j}$ sont supplémentaires .

1.f Montrer que la droite de l'espce vectoriel de dimension 3 V_3 dont un vecteur directeur est $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ et le plan d'équation $3x - y + 7z = 0$ sont supplémentaires.

1.g L'ensemble F des fonctions numériques munies de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que P et I sont des sous -espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

2) Soit f une fonction appartenant à F. On définit les fonctions g et h par :

$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

a) Montrer que g est paire et h impaire.

b) Montrer que $f = g + h$.

c) En déduire que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus I$.

LEÇON 2 LES APPLICATIONS LINÉAIRES

- ...ontrer qu'une application d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel est linéaire ;
- ...miner le noyau et l'image d'une application linéaire ;
- ...liser la composition des applications linéaires pour des démonstrations;
- ...ontrer qu'une application linéaire est injective, surjective ou bijective ;
- ...ire et utiliser la matrice d'une application linéaire relativement à une base donnée.
- ...naître les propriétés et savoir les utiliser des projections, symétries et homotheties vectorielles.

I APPLICATIONS LINÉAIRES

Prendre un bon départ

...ontrer que l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par : $f((x;y)) = 3x+3y$ est linéaire.

...application g de V_2 dans V_2 par : $g(x\vec{i}+y\vec{j}) = (x-2y)\vec{i}+(2x-3y)\vec{j}$.

...ontrer que g est linéaire

...miner l'écriture analytique de g

...miner les images par g des vecteurs $3\vec{i}-5\vec{j}$ et $2\vec{i}+6\vec{j}$.

...miner l'antécédent du vecteur $7\vec{i}-4\vec{j}$ par g.

...ontrer que g est bijective, puis donner les expressions analytiques de g^{-1},

...ction réciproque de g .

Retenir

...application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est linéaire ...lement si :

- Pour deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E et tout réel x, $f(x\vec{u}) = xf(\vec{u})$.

...application linéaire de l'espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ est appelée une forme linéaire de E.

...application linéaire d'un espace vectoriel E dans E est appelée un endomorphisme de E.

...application linéaire bijective de E dans F est un isomorphisme de E dans F.

...application linéaire bijective de E dans E est un automorphisme de E.

Exemple

Montrons que l'application définie par $f(x\vec{i}+y\vec{j})=(x-2y)\vec{i}+(3x-5y)\vec{j}$ est un automorphisme de V_2.

Montrons d'abord que f est linéaire.

Soient $x\vec{i}+y\vec{j}$ et $x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2.

$x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$.

$$\begin{aligned} f(x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j}) &= f[(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}] \\ &= [(x+x')-2(y+y')]\vec{i}+[3(x+x')-5(y+y')]\vec{j} \\ &= [(x-2y)+(x'-2y')]\,\vec{i}+[(3x-5y)+(3x'-5y')]\vec{j} \\ &= [(x-2y)\vec{i}+(3x-5y)\vec{j}]+[(x'-2y')\vec{i}+(3x'-y')\vec{j}] \\ &= f(x\vec{i}+y\vec{j})+f(x'\vec{i}+y'\vec{j}). \end{aligned}$$

f est linéaire par rapport à l'addition des vecteurs dans V_2.

De même on montre que $f[a(x\vec{i}+y\vec{j}]=af(x\vec{i}+y\vec{j})$.

f est donc un endomorphisme de V_2.

Montrons que f est bijective.

Soit $a\vec{i}+b\vec{j}$ un vecteur de V_2 ; on cherche $(x\vec{i}+y\vec{j})\in V_2$ tel que $f(x\vec{i}+y\vec{j})=a\vec{i}+b\vec{j}$.

x et y vérifient: $(x-2y)\vec{i}+(3x-5y)\vec{j}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

De l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a (S) : $\begin{cases} x-2y=a \\ 3x-5y=b \end{cases}$.

$\text{dét(S)}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-5+6=1$ et $1\neq 0$. Donc (S) admet un unique couple solution par suite un unique vecteur $x\vec{i}+y\vec{j}$. D'où f est bijective. f est donc un automorphisme de V_2.

Remarques :

$f(\vec{i})=f(1\vec{i}+0\vec{j})=\vec{i}+3\vec{j}$ et $f(\vec{j})=(-2)\vec{i}+(-5)\vec{j}$. Nous remarquons que dét(S) = dét

Calculons x et y en fonction de a et de b.

$D_x=\begin{vmatrix} a & -2 \\ b & -5 \end{vmatrix}=-5a+2b$ d'où $x=-5a+2b$. $D_y=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{vmatrix}=-3a+b$ d'où $y=-3a+b$.

Ainsi $\begin{cases} x=-5a+2b \\ y=-3a+b \end{cases}$ est l'écriture analytique de f^{-1}

Remarque

- Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, E et F de dimension finies, est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.
- Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour tous réels a et b, $f(a\vec{u}+b\vec{v})=af(\vec{u})+bf(\vec{v})$.
- La somme, la composée de deux applications linéaires et le produit d'une application par un réel, sont des applications linéaires.

S'exercer

E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de base respectives $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ et $(\vec{i},\vec{j})$

Montrer que l'application φ de E_3 vers E_2 définies par

$\varphi(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)=(2x-y+z)\vec{i}+(x+y+5z)\vec{j}$ est linéaire.

Montrer que φ n'est pas bijective.

2 NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Prendre un bon départ

Soient les applications linéaires f et g définies par :

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $f((x;y))=(2x+3y;5x-y)$.

$f(\vec{i})=\vec{i}+4\vec{j}$ et $g(\vec{j})=\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}$ où $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de V_2 .

Déterminer le noyau de f puis celui de g.

Déterminer l'image de f puis celui de g.

Vérifier que $\dim(\ker f)+\dim(\mathrm{Im}\, f)=\dim(\mathbb{R}^2)$ *et* $\dim(\ker g)+\dim(\mathrm{Im}\, g)=\dim(V_2)$.

Retenir

Soit une application linéaire de l'espace vectoriel E dans F.

- Le noyau de f noté kerf ou N(f) est l'ensemble des vecteurs de E , ayant pour image le vecteur nul de F. $\left(\{\vec{u}\in E\ /\ f(\vec{u})=\vec{0}_F\}\right)$
- L'image de f notée Imf ou f(E) est l'ensemble des vecteurs de F admettant chacun au moins un antécédent dans E ou encore l'ensemble des images respectives de tous les vecteurs de E par f. $\left(\{\vec{u}'\in F/\exists\vec{u}\in E,\ \vec{u}'=f(\vec{u})\}\right)$
- N(f) est un sous-espace vectoriel de E et *Imf* un sous-espace vectoriel de F.
- Si E est de dimension finie, alors *dim(kerf) + dim(Imf) = dimE.*

Exemple

Soit f un endomorphisme du plan vectoriel E_2 , défini sur les vecteurs de base par

$f(\vec{i})=2\vec{i}-\vec{j}$ *et* $f(\vec{j})=4\vec{i}+2\vec{j}$.

Déterminons ker f et Im f.

Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur de ker f. $f(\vec{u})=\vec{0}$.

$f(\vec{u})=xf(\vec{i})+yf(\vec{j})=x(2\vec{i}+\vec{j})+y(4\vec{i}+2\vec{j})=(2x+4y)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}$.

$f(\vec{u})=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=0\\x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow x+2y=0$

D'où $\ker f$ est la droite vectorielle d'équation $x+2y=0$.

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}\in\ker f \Leftrightarrow x=-2y$ et $\vec{u}=y(-2\vec{i}+\vec{j})$

une base de $\ker f$ est $(-2\vec{i}+\vec{j})$. $\dim(\ker f)=1$.

Soit $\vec{v}(a;b)$ un vecteur de Imf.

Il existe un vecteur $\vec{u}(x;y)\in E/\ v=f(\vec{u})$.

$$f(x\vec{i}+y\vec{j})=a\vec{i}+b\vec{j}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=a\\x+2y=b\end{cases}\Leftrightarrow.\begin{cases}2(x+2y)=a\\x+2y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=x+2y\\2b=a\end{cases}\text{ soit } a-2b=0$$

Ainsi $\vec{v}(a;b)\in \text{Im}\, f \Leftrightarrow a-2b=0$. Donc $\text{Im}\, f$ est la droite vectorielle d'équation $a-2b=0$

$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}\in \text{Im}\, f \Leftrightarrow a=2b\Leftrightarrow \vec{v}'=b(2\vec{i}+\vec{j})$. Une base de $\text{Im}\, f$ est $(2\vec{i}+\vec{j})$.

D'où $\dim \text{Im}\, f=1$.

Après avoir déterminé le noyau d'une application linéaire de E dans F, on peut utiliser la

$\dim E=\dim(\ker f)+\dim(\text{Im}\, f)$.

Pour déterminer la dimension de l'image. $\dim(\ker f)+\dim(\text{Im}\, f)=2$. *Or* $\dim(\ker f)=$

alors $\dim(\text{Im}\, f)=1$. $\text{Im}\, f$ est donc une droite vectorielle.

$\text{Im}\, f$ est engendée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de dépa

Exemple: $f(\vec{i})=2\vec{i}+\vec{j}$; $f(\vec{j})=4\vec{i}+2\vec{j}=2(2\vec{i}+\vec{j})=2f(\vec{i})$

D'où une base de $\text{Im}\, f$ est $f(\vec{i})=2\vec{i}+\vec{j}$.

Remarque

- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau n'a que le nul.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son image est l'espa vectoriel d'arrivée.
- Si f application linéaire de l'espace vectoriel dans l'espace vectoriel F, dimi alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est injective ;(b) f est surjective ; (c) f est bijective ;
(d) f transforme une base de F en une base de F .

S'exercer

2.b Soit φ un endomorphisme de E_3 ; $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de E_3.

$\varphi(\vec{i})=-\vec{i}+\vec{k}$, $\varphi(\vec{j})=\vec{j}+\vec{k}$,$\varphi(\vec{k})=\vec{i}+\vec{j}$.

Donner les expressions analytiques de φ.

Déterminer $\ker\varphi$, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

Déduire que $\text{Im}\varphi$ est un plan vectoriel de E_3. Déterminer une base de $\text{Im}\varphi$.

Les sous-espaces vectoriels $\ker\varphi$ et $\text{Im}\varphi$ sont-ils supplémentaires ?

2.3 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Prendre un bon départ

... plan vectoriel dont une base est $(\vec{i}, \vec{j})$; E_3 est un espace vectoriel dont une base est $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

... endomorphisme de E_2 tel que $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} - 3\vec{j}$.

... la matrice A de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

... que f est un automorphisme de E_2, puis écrire la matrice de f^{-1} dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

... l'écriture analytique de f^{-1} .

... une l'application linéaire de E_2 dans E_3 telle que: $g(\vec{i}) = 2(\vec{e}_1) + 5(\vec{e}_2) - 3(\vec{e}_3)$

$= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \frac{3}{5}\vec{e}_3$.

... la matrice B de g relativement aux bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

... elle une matrice carrée ?

... au moins de deux façons différentes la matrice de $g \circ f$

...ivement aux bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

... calculer le produit A×B? Justifier votre réponse.

Retenir

... une application linéaire définie d'un espace vectoriel E de dimension p vers un ...ctoriel F de dimension n ; B une base de E et B' celle de F.

- La matrice M de f relativement aux bases B et B' est un tableau de p colonnes et de ...gnes dont les colonnes sont constituées des composantes des images des vecteurs de B ... dans la base B'.
- M est une matrice carrée si le nombre de ses colonnes est égal au nombre de ses ...gnes.
- Le produit $M \times N$ n'est possible que si le nombre de colonnes de M est égal au ...bre de lignes de N.
- M est inversible si et seulement si f est bijective et M^{-1} est la matrice de f^{-1} ...ivement aux bases B' et B.
- Si M est carrée d'ordre 2, alors f est bijective si et seulement si dét(M)≠0

Exemple

... est une base de E_2, f est un endomorphisme de E_2 par $\vec{u}'(x', y')$, $\vec{u}(x, y)$ $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$.

...ons la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$= 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 4\vec{j}$ Car $\vec{i}(1,0)$ et $\vec{j}(0,1)$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. dét(M)$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 11$.

Puisque det (M) $\neq 0$, M est inversible, donc f est bijective .

Soit M^{-1} l'inverse de la matrice M.

$D_x = \begin{bmatrix} x' & -1 \\ y' & 4 \end{bmatrix} = 4x' + y'$ et $D_y = \begin{bmatrix} 2 & x' \\ 3 & y' \end{bmatrix} = -3x' + 2y'$, $D = 11$

$\begin{cases} x = \frac{4}{11}x' + \frac{1}{11}y' \\ y = -\frac{3}{11}x' + \frac{2}{11}y' \end{cases}$ d'où $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Calculons à l'aide de M les coordonnées de l'image ū' du vecteur $\vec{u} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ par f.

$\vec{u}'(x', y'), \vec{u}(4, -5)$, matriciellement, $\vec{u}' = f(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(f).\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \times \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 + (-1)\times(-5) \\ 3\times 4 + 4\times(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \end{bmatrix}$ d'où $\begin{cases} x' = 13 \\ y' = -8 \end{cases}$.

d'où $\vec{u}'(13; -8)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2) E_3 et E_2 sont des deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E_3 et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2.

L'application φ est linéaire de E_3 dans E_2 definie par:

$\varphi(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = (2x - y + z)\vec{i} + (x + 2y + 5z)\vec{j}$.

Écrivons la matrice de φ relativement aux bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{i}, \vec{j})$. avec

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = (2 - 0 + 0)\vec{i} + (1 + 0 + 0)\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

$\varphi(\vec{e}_2) = \varphi(0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = (0 - 1 + 0)\vec{i} + (0 + 2 + 0)\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

$\varphi(\vec{e}_3) = \vec{i} + 5\vec{j}$.

D'où par la matrice B de φ relativement aux bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

φn'est pas bijective car $\dim E_3 \neq \dim E_2$, puisque $\dim E_3 = 3$ et $\dim E_2 = 2$.

S'exercer

2.c f est un endomorphisme du plan vectoriel E_2 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ défini par :

$f(\vec{i}) = 10\vec{i} - 8\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

a) Écrire la matrices A de f puis de $f \circ f$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) Calculer les coordonnées de $f(\vec{w})$ et de $(fof)(\vec{w})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

c) Soit $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E_2 et écrire la matrice de f dans cette base.

d) Montrer que f est un automorphisme E_2, puis écrire la matrice de la bijection réciproque dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

la matrice P de l'application linéaire g telle que $g(\vec{i})=\vec{u}$ et $g(\vec{j})=\vec{v}$.

trer que $C = P^{-1}AP$.

à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 5x+y\sqrt{2}=4 \end{cases}$.

ver une matrice carrée A d'ordre 2, telle que (S) $\Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

trer que A est inversible, puis déterminer la matrice A^{-1}.

trer que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$. Déduire la solution $(x;y)$ de (S).

dre le système (S) avec une autre méthode.

4 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES VECTORIELLES.

Prendre un bon départ

un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, H et F deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

un vecteur de E.

trer qu'il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de H et $\vec{w}$ de F tels que $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$.

et g sont deux applications telles que : $f(\vec{u})=\vec{v}$ et $g(\vec{u})=\vec{v}-\vec{w}$.

trer que f et g sont deux endomorphismes de E.

dier les cas : $H = E$ et F=$\{\vec{0}\}$; $H=\{\vec{0}\}$ et $F = E$.

trer que $f\circ f = f$ et $g\circ g = Id_E$.

Retenir

un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; H et F deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

ication p qui à tout vecteur $\vec{u} = \vec{v}+\vec{w}$ avec $(\vec{v};\vec{w}) \in H\times F$, associe le vecteur $\vec{v}$ est la

vectorielle ou encore projecteur de base H et de direction F.

et $p(\vec{v})=0$. $p\circ p = p$.

ication s qui à tout vecteur $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ avec $(v;w)\in H\times F$, associe le vecteur $\vec{v}-\vec{w}$ est

vectorielle de base H et de direction F.

et $s(\vec{v})=-\vec{v}$. $s\circ s = id_E$. • p et s sont des endomorphismes de E.

le

le plan vectoriel V_2 muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$ et

$+\vec{j}$; D_1 et D_2 les droites vectorielles engendrées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

ons que $V_2 = D_1 \oplus D_2$.

ons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

$\det(\vec{u},\ \vec{v})=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

donc, $(\vec{u},\ \vec{v})$ est une base de V_2 et ainsi, $V_2 = D_1 \oplus D_2$ car $\{\vec{u}\}\cup\{\vec{v}\}=\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base

b) Écrivons la matrice de la projection p de base D_1 et de direction D_2 base la $(\vec{i},\vec{j})$.

$$\begin{cases}P(\vec{u})=\vec{u}\\ P(\vec{v})=\vec{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2P(\vec{i})+P(\vec{j})=2\vec{i}+\vec{j}\ (1)\\ P(\vec{i})+P(\vec{j})=\vec{0}\ (2)\end{cases}$$

$(1)-(2)\Leftrightarrow P(\vec{j})=-2\vec{i}-\vec{j}$

d'où $M(p)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Autre solution

$$\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}\ (1)\\ \vec{v}=\vec{i}+\vec{j}\ (2)\\ P(\vec{u})=\vec{u}\ (3)\\ P(\vec{v})=\vec{0}\ (4)\end{cases}\quad\begin{vmatrix}(1)-(2)\Leftrightarrow\vec{i}=\vec{u}-\vec{v}\\ (2)\Leftrightarrow\vec{j}=\vec{v}-\vec{i}=\vec{v}-\vec{u}+\vec{v}=-\vec{u}+2\vec{v}\\ \text{d'où } p(\vec{i})=P(\vec{u})-P(\vec{v})=\vec{u}\Leftrightarrow p(\vec{i})=2\vec{i}+\vec{j}\\ p(\vec{j})=-P(\vec{u})+2P(\vec{v})=-P(\vec{u})=-\vec{u}=-(2\vec{i}+\vec{j})=(-2)\vec{i}+(-1)\vec{j}\end{vmatrix}$$

d'où $M(p)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Note : On vérifie que $M(p)\times M(p)=M(p)$.

c) Soit s la symétrie vectorielle de base D_1 et de direction D_2.

on a $\begin{cases}S(\vec{u})=\vec{u}\\ S(\vec{v})=-\vec{v},\ \text{S linéaire}\end{cases}$

comme $\vec{i}=\vec{u}-\vec{v},\ S(\vec{i})=S(\vec{u})-S(\vec{v})=\vec{u}-(-\vec{v})=\vec{u}+\vec{v}=(2\vec{i}+\vec{j})+(\vec{i}+\vec{j})$

$S(\vec{i})=3\vec{i}+2\vec{j}$

comme $\vec{j}=-\vec{u}+2\vec{v},\ S(\vec{j})=S(-\vec{u})+2S(\vec{v})=-\vec{u}-2\vec{v}=-(2\vec{i}+\vec{j})-2(\vec{i}+\vec{j})=-(4\vec{i}+3\vec{j})$

d'où $M(S)=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

Autre solution

on a $\begin{cases}S(\vec{u})=\vec{u}\\ S(\vec{v})=-\vec{v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2S(\vec{i})+S(\vec{j})=2\vec{i}+\vec{j}\ (1)\\ S(\vec{i})+S(\vec{j})=-\vec{i}-\vec{j}\ (2)\end{cases}$

$(1)-(2)\Leftrightarrow S(\vec{i})=3\vec{i}+2\vec{j}$

$(2)\Leftrightarrow S(\vec{j})=-\vec{i}-\vec{j}-S(\vec{i})=-\vec{i}-\vec{j}-3\vec{i}-2\vec{j}=-4\vec{i}-3\vec{j}$

$S(\vec{j})=-4\vec{i}-3\vec{j}$

d'où $M(S)=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

On peut vérifier que $M(s)\times M(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque

- Soit E_1 et E_2 sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$.
- P est la projection de E de base E_1 et de direction E_2 alors $E_2 = \ker P$
- $E_1 = \{\vec{u} \in E / P(\vec{u}) = \vec{u}\}$(ensemble des vecteurs invariants par P)
- S est la symétrie de base E_1 et de direction E_2, alors
- $E_2 = \{\vec{u} \in E / S(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ et $E_1 = \{\vec{u} \in E / S(\vec{u}) = \vec{u}\}$ (ensemble des vecteurs invariants par S)
- Tout endomorphisme f de E tel que $f \circ f = f$ est un projecteur de E sur Im f suivant ker f.
- Tout endomorphisme f de E tel que $f \circ f = Id_E$ est une symétrie de E de base
- $E_1 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et de direction $E_{-1} = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
- Eléments géométriques d'une projection ou d'une symétie: base et direction.

S'exercer

- E et E' sont deux droites vectorielles du plan V_2, de bases $\vec{u} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ respectivement.
- Montrer que E et E' sont supplémentaires.
- p la projection de base E et de direction E' ; s la symétrie de base E et de direction E'.
- Ecrire la matrice A de p et la matrice B de s dans la base (i, j).
- Montrer que $2A = B + I$ où I= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = matrice unitée carrée d'ordre 2.
- Donner les écritures analytiques respectives de p puis de s.

- V_3 est un espace vectoriel dont une base est (i, j, k) ; D la droite vectorielle de V_3,
- de vecteur de base $\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$.
- Montrer que $V_3 = \vec{D} \oplus \vec{P}$.
- p est la projection de base $\vec{P}$ et de direction $\vec{D}$; p' la projection de base $\vec{D}$ et de direction $\vec{P}$.
- s est la symétrie de base $\vec{P}$ et de direction $\vec{D}$; s' la symétrie de base $\vec{D}$ et de direction $\vec{P}$.
- Ecrire les matrices de p, p', s, s' dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Donner les expressions analytiques des endomorphismes de p, p', s, s' dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

S'ENTRAÎNER

ESPACES VECTORIELS

1

On définit, dans un espace vectoriel E de base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les ensembles :

$$F=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases}x-y-z=0\\-x+3y+z=0\end{cases}\right\} \text{ et}$$

$$G=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases}2x+y+z=0\\x-2y-z=0\end{cases}\right\}.$$

1) Montrer que F et G sont des droites vectorielles et donner une base de chacune.

2) Déterminer F + G; Donner sa dimension, une base et une équation cartésienne.

3) La somme F + G est-elle directe ?

4) Les sous espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

5) Montrer que le plan vectoriel d'équation $x=0$ est supplémentaire de F.

2

On définit un espace vectoriel E de base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les ensembles :

$$P=\left\{u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ tel que } 5x+y+z=0\right\}$$

$$Q=\left\{u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ tel que } x-3y+5z=0\right\}$$

a) Montrer que P et Q sont deux sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'eux.

b) Déterminer le sous-espace vectoriel P∩Q

c) La somme P+Q est-elle directe ?

d) Les sous-espaces vectoriels Pet Q sont-ils supplémentaires ?

e) Montrer que la droite vectorielle D d'équations $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ est supplémentaire de P.

3

On définit l'application linéaire f_m de l'espace vectoriel E de base $(\vec{i};\vec{j})$ dans l'espace vectoriel F de base $(\vec{i}';\vec{j}')$ par :

$f_m(\vec{i})=(1+m)\vec{i}'-\vec{j}'$ et $f_m(\vec{j})=3\vec{i}'(1-m)$

Déterminer suivant les valeurs de m, le noyau et l'image de f_m.

4

Soient f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E.

a) Montrer que si $(\text{Im } f \subset Kerg)$ alors gof est égale à l'application nulle.

b) Montrer que si $f\circ g = g\circ f$, alors $\text{Im } f$ et $Kerg$ sont stables par f.

5

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

On note $f^2=f\circ f$.

a) Prouver que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

b) Montrer que la proposition $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ est équivalente à pour tout vecteur $\vec{u}$ de E il existe $\vec{u}_1 \in \text{Ker} f$ et $\vec{u}_2 \in \text{Im} f$ tels que $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$.

ET NOYAU D'UN ENDOMORPHISME
MORPHISME D'UN ESPACE
RIEL.

espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base
que $\vec{e}_1 = (1;0;0)$;
$0)$ et $\vec{e}_3 = (0;0;1)$.
l'endomorphisme de $\mathbb{R}3$ défini par
$= (1;1;0)$; $\vec{e}_2' = \varphi(\vec{e}_2) = (1;2;0)$;
$= (1;-1;0)$.
que $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de Imφ.
une base de Kerφ .
que Imφ et Kerφ sont deux
ces vectoriels supplémentaires

la restriction de φ à Imφ . Montrer
un automorphisme de Imφ .
er la matrice de σ^{-1} dans la

endomorphisme d'un espace vectoriel E.
que $Ker f \cap \text{Im } f = f(Ker\, f \circ f)$.
cette égalité dans le cas de
sme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace vectoriel E.

un plan vectoriel et f un endomorphisme
que l'on ait $\text{Im } f = Ker\, f$.
peut-on déduire des dimensions de
$Ker\, f$?
un vecteur non nul de Ker f.
qu'il existe un vecteur j non nul tel que
$\vec{j} = \vec{i}$.
que $(\vec{i};\vec{j})$ est une base de P et
déterminer la matrice de f dans cette base.
d) Montrer que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul de P.
e) Réciproquement , que peut-on dire d'un endomorphisme f de P tel que $f \circ f$ soit l'endomorphisme nul ?

9

Soit E, un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{i};\vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de E, dont la matrice, dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ est $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel λ, on note E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

a) Montrer que f est un automorphisme involutif de E ($f \circ f = id_E$).

b) Montrer que si λ est distinct de -1 et de 1 E_λ est réduit au vecteur nul.

c) Déterminer E_1 et E_{-1} en donnant une base de chacun d'eux. Prouver qu'ils sont supplémentaires. En déduire une nouvelle base de E constituée des vecteur non nuls de E_1 et de E_{-1}.

d) Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

10

L'espace vectoriel E est muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x';y';z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z. \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

a) Déterminer le noyau de f.

b) Que peut-on dire de l'application f ?

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.

d) Soit $\vec{u}'$ l'image d'un vecteur $\vec{u}$ de E. Déterminer $f(\vec{u}')$. En déduire la nature de f et déterminer ses éléments caractéristiques.

11

Déterminer la matrice de la projection vectorielle p de l'espace vectoriel E de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sur le plan vectoriel P d'équation $x+y+z=0$, suivant la droite vectorielle dont un vecteur non nul est $\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

12

Soit E un plan vectoriel de base $(\vec{i};\vec{j})$ et f l'endomorphisme de E ayant pour matrice $\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Montrer que f est une projection vectorielle, dont on déterminera la base et la direction.

13

Le plan vectoriel V est muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$.

f est l'endomorphisme de V qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{v}=(x+2y)(\vec{i}+\vec{j})$.

a) Déterminer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$, puis écrire la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

b) Démontrer que kerf et Imf sont des droites vectorielles de V et déterminer une base de ker f puis une base de Im f.

14

V est l'ensemble des vecteurs du plan, φ est un endomorphisme de V.

$E=\{(u)\in v\ ;\ \varphi(u)=-3u\}$

$F=\{(u)\in v\ ;\ \varphi(u)=2u\}$

1. Démontrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de V.

2. Soit (t,f) une base de V, on pose $\varphi(i)=t+4f$ et $\varphi(f)=t-2f$

a. Démontrer que E et F sont des droites vectorielles. Déterminer une base de E puis une base de F.

b. On pose $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e}_2=\vec{i}-4\vec{j}$.

Démontrer que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base de V, la matrice de φdans cette base.

15

f est un endomorphisme du plan vectoriel vérifiant l'égalité $f\circ f=-Idv$.

1. Démontrer que f est un isomorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2. Démontrer que $\vec{0}$ est le seul vecteur invariant par f.

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de V. Démontrer que $(\vec{u},f(\vec{u}))$ est une base de V et écrire la matrice de f relativement à cette base.

16

W est l'espace vectoriel dont une base est $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. f est une application linéaire de W dans W.

On donne $f(\vec{i})=-3$; $f(\vec{j})=2$; $f(\vec{k})=$

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$ un vecteur W.

1. Démontrer que $f(\vec{u})=-3x+2y-z$

2. Démontrer que $ker(f)$ est un plan vectoriel et déterminer une base de ker f.

3. Démontrer que Im $f=\mathbb{R}$.

17

W est l'espace vectoriel dont d'une base est $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. φest l'endomorphisme de W tel que $\varphi(\vec{i})=\vec{i}+\vec{j}$, $\varphi(\vec{j})=\vec{j}-\vec{k}$ et $\varphi(\vec{k})=$

1. Démontrer que le système $(\varphi(i),$ est un système lié.

φ est-il un isomorphisme de w ?

2. Déterminer l'expression analytique

ker(φ) et donner un vecteur

$\left(\varphi(\vec{i}),\varphi(\vec{j})\right)$ est une base Imφ.

$(\vec{e}_1,\varphi(\vec{i}),\varphi(\vec{j}))$ est une base

la matrice de φ relativement à

vectoriel de dimensions 3.

morphisme de W tel que pour tout u

$(\vec{u}) = 0$

que l'on a $\text{Im}\, f \subset \ker f$.

$\dim \text{Im}\, f = i$ et $\dim \ker f = k$

que $i \leq k$ et calculer $i+k$

que $i=0$ ou $i=1$.

où $i=0$ déterminer $\ker f$

$i=1$, soit u un vecteur non nul

qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de kerf

soit une base de $\ker f$ et un

nul w tel que $f(\vec{w})=\vec{u}$

que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de W.

la matrice de f dans la base

triangle du plan affine P de

est le milieu de [BC], G

centre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.

morphisme de V tel que

$\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AC}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{BC}$.

φ(AI) puis φ(AG), φ est-il un

de V ?

la matrice de φdans la base

kerφ et Imφ. On déterminera

de kerφ et une base $\vec{e}_2$ de Imφ.

matrice de φ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

20

Le plan vectoriel V est muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$. f est l'endomorphisme de V tel que : $f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Démontrer que f est un isomorphisme de v et écrire la matrice de f^{-1} dans la base (i, j)

2. Soit $E = \{\vec{u} \in v, f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

   a) Caractériser E_0

   b) Caractériser E_1

3. Démontrer que pour tout réel λ, E_λ est réduit au vecteur $\vec{0}$.

21

Dans le plan vectoriel v muni d'une base $B = (\vec{i},\vec{j})$. On considère l'ensemble $E_\alpha = \{\vec{u} \in V, f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}\}$ où α est un réel et f un endomorphisme de V.

1. Montrer que E_α est un sous-espace vectoriel de V.

2. On pose : $f(\vec{i}) = (\vec{i} - \vec{j})$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

   a) Écrire la matrice de f relativement à la base $(\vec{i},\vec{j})$

   b) Montrer qu'il existe deux valeurs réelles $\alpha_1$et α_2 de α et V est la somme directe des deux droites E_{α_1} et E_{α_2} dont on précisera les bases $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ respectivement.

c. Montrer que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base de V et écrire la matrice de f relativement à cette base.

22

V est le plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$. Quatre entiers naturels a, b, c et d forment dans cet ordre une progression géométrique de raison q, q premier avec a.

f est l'endomorphisme de V tel que :

$f(\vec{i}) = 5a\vec{i} + \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = (b-d)\vec{i} + 2a\vec{j}$.

1. Calculer a, b, c et d sachant que f n'est pas bijectif.

2. On prend $a = 12$

a) Déterminer $\ker f$ et $\text{Im}\, f$: on donnera une base de $\ker f$ puis une base de $\text{Im}\, f$.

b) On pose $\vec{e}_1 = 24\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 60\vec{i} + \vec{j}$, montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de V et écrire la matrice de f relativement à cette base.

23

V est le plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

f l'endomorphisme de V tel que $f \circ f = -f$.

On pose $f^2 = f \circ f$.

1. Démontrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2$

2. Démontrer que $\ker f \cap \text{Im}\, f = \{0\}$.

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur de V. démontrer que $\vec{u}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de $\text{Im}\, f$ et d'un vecteur de $\ker f$.

4. Dans cette question, on suppose que la matrice de f relativement à la $(\vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels.

a) Sachant que $f \circ f = -f$. Calculer les valeurs possibles de a et b et déterminer les matrices correspondantes dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) On prend $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ déterminer $\ker f$ et $\text{Im}\, f$

c) On pose $\vec{e}_1 = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$. Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de V et écrire la matrice de f dans cette base.

24

OABC est un tétraèdre tel que OAB [illegible] OBC sont des triangles rectangles [illegible] on pose $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = 1$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est [illegible] orthonormée de la direction W de [illegible] engendré par O,A,B et C.

2. (D) est la droite vectorielle engendrée [illegible] le vecteur : $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$; (P) [illegible] plan vectoriel engendré par les vecteurs [illegible] $\vec{e}_2 = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une [illegible]

b) En déduire que tout vecteur de W [illegible] s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de (D) et d'un vecteur (P)

3. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de W, on pose $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in D$ et $\vec{u}_2 \in P$. φ est l'application de w dans w défini par $\varphi(\vec{u}) = 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$.

a) Démontrer que φ est linéaire

b) Démontrer que (D) est l'ensemble [illegible] vecteurs u de l'espace tels que $\varphi(\vec{u}) =$ [illegible]

c) Démontrer que (P) est l'ensemble [illegible] vecteurs u de l'espace tels que $\varphi(\vec{u}) =$ [illegible]

25

W est l'espace vectoriel muni d'une [illegible]

f l'endomorphisme de W tel que : $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

1. Déterminer l'image et le noyau de f.

2. Démontrer que $f \circ f = 3f$.

3. Démontrer que $\text{Im}\, f$ est l'ensemble [illegible] vecteurs $\vec{u}$ de W tels que $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$.

réel g l'endomorphisme de
$g(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) - \vec{u}$
que pour tout $\vec{u}$ de W,
$= \vec{u}$ si et seulement si $\alpha = \frac{2}{3}$
la matrice de g dans la base
pour $\alpha = \frac{2}{3}$.
que Im f est l'ensemble des
invariants par g.

vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
phisme de V donc la matrice
à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
A^2, A^3, A^4.
sur l'expression $(n \in \mathbb{N})$ de A^n
le résultat par récurrence.
$= x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ un vecteur de V
$\vec{u}_1 = f(\vec{u}_0)$; $\vec{u}_2 = f(\vec{u}_1)$;
en fonction de x_0 et y_0
les coordonnées x_n et y_n de
en fonction de x_{n-1} et
part et en fonction x_0, y_0 et de n .
$x_0 = 0,\ y_0 = -1$
expression de x_n et y_n en fonction de n

vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
sme de W donc la matrice
la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est:

$\begin{pmatrix} & & 2 \\ & & -1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\ker f$ est un plan vectoriel dont on déterminera une équation cartesiènne et une base.
2. Déterminer $\text{Im}\, f$ et une base de cet espace.
3. On pose $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{k}$; $\vec{e}_2 = \vec{j}$ et $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
a) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de W.
b) Écrire la matrice de f dans cette base
4. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par :
$u_1 = 2$; $u_{n+1} = 3u_n + 2$; $v_{n+1} = u_n + 1$
montrer que (V_n) est une suite géométrique et exprimer u_n et v_n en fonction de n.
a) Calculer A^2 et comparer A^2 et A
b) On pose $H = 2A + I$.
Démontrer par récurrence que $H^n = a_n A + I$.
Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n
c) Exprimer H^n en fonction de A, I et n.

28

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 , A^3 et montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que l'on a $(A - I)^2 = 0$, I et 0 désigne respectivement la matrice unité et la matrice nulle. En déduire A^{-1}.

Chapitre 8

FONCTIONS LOGARITHME

LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1.1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

1.1.1 Présentation

1.1.2 Propriétés essentielles du logarithme (néperien).

1.1.3 Limites des expressions comportant ln ; courbe de ln.

1.1.4 Étude et représentation graphique de quelques fonctions comportant le logarithme népérien.

LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE

PRÉSENTATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

- Savoir mobiliser et utiliser les propriétés de la fonction logarithme neperien dans diverses opérations et démonstrations (en particulier: le logarithmes du produit d'expressions positives est la somme de leurs logarithmes).
- Résoudre des équations et inéquations avec des expressions comportant une fonction logarithme.
- Déterminer l'ensemble de dérivation, calculer la dérivée et étudier les variations des fonctions comportant une fonction logarithme (En particulier la fonction ln(|u|) où u est une fonction définie dans $\mathbb{R}$); Déterminer sur des intervalles appropriés une primitive de $\frac{u'}{u}$.
- Connaître et savoir utiliser les limites et les limites classiques sur les fonctions logarithmes.
- Savoir étudier et représenter graphiquement les fonctions dont les expressions comportent logarithme(ln).

I. PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

I.1 Présentation

Prendre un bon départ

Exercice 1

Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Existe-t-il de ces primitives s'annulent-elles en 1?

Exercice 2

Soit F la primitive la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

1) Déterminer l'expression de $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F sur $]0;+\infty[$.

2) Déterminer le signe de $F(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1[$, $]1;+\infty[$.

Retenir

On appelle fonction logarithme népérien et on la note ln ou Log, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$,qui s'annule en 1.

$]0;+\infty[\to \mathbb{R}$; $x \mapsto \ln x$.

- ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$;
- $\ln(1) = 0$ et pour tout réel x de $]0; 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout réel x de $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.

Remarque

- La fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction ln est une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J(ln est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$).
- J contient $\ln 2{,}5 \approx 0{,}91$ et $\ln 3 \approx 1{,}09$; donc J contient 1.
- Le réel e est l'antécédent de 1 par la fonction ln. On a donc **$\ln e = 1$.**
- Quels que soient les réels strictement positifs a et b

  $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.

  $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
- Soit u une fonction numérique d'une variable réelle et f la fonction : $x \mapsto \ln(u(x))$.

  f est définie si et seulement si, u est définie et $u(x) > 0$.

Exemple

1) Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$f(x) = \ln(x^2 - 4)$; $g(x) = \ln(2 - x^2)$; $h(x) = \ln|9x^2 - 4|$;

$k(x) = \ln\left(\frac{3+x}{5-2x}\right)$; $l(x) = \ln\sqrt{1-2x^2}$; $i(x) = \ln(2x^2 - x + 5)$.

Solution :

a) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2 - 4 > 0$;

soit $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. L'ensemble de définition de f est

$Df =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

b) $g(x)$ est définie si et seulement si $2 - x^2 > 0$; soit $x \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$.

L'ensemble de définition de g est $Dg = \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$.

c) h est définie si et seulement si $|9x^2 - 4| > 0$; or une valeur absolue est toujours positive

Donc $|9x^2 - 4| > 0$ équivaut à $9x^2 - 4 \neq 0$;

$9x^2 - 4 \neq 0$ équivaut à $(3x - 2)(3x + 2) \neq 0$; soit $x \neq \frac{2}{3}$ et $x \neq -\frac{2}{3}$.

L'ensemble de définition de k est $Dh = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

$\ln\left(\frac{3+x}{5-2x}\right)$ n'a de sens que si $\begin{cases}5-2x\neq 0\\ \frac{3+x}{5-2x}>0\end{cases}$ soit $\begin{cases}x\neq\frac{5}{2}\\ x\in\left]-3;\frac{5}{2}\right[\end{cases}$.

L'ensemble de définition de k est $D_k=\left]-3;\frac{5}{2}\right[$.

$\ln\sqrt{1-2x^2}$ est définie si et seulement si $\begin{cases}1-2x^2\geq 0\\ \sqrt{1-2x^2}>0\end{cases}$;

soit $1-2x^2>0$ et alors $x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

L'ensemble de définition de l est $D_l=\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

$\ln(2x^2-x+5)$ est définie si et seulement si $2x^2-x+5>0$.

Le discriminant de $2x^2-x+5$ est $\Delta=(-1)^2-4\times 5=-19$. Ce discriminant étant strictement négatif, pour tout réel x, $2x^2-x+5>0$.

L'ensemble de définition de i est $D_i=\mathbb{R}$.

S'exercer

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h :

$f(x)=\ln(11-x)$; b) $g(x)=\ln(x^2+5x+6)$;

$h(x)=\frac{1}{2}x+2+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $k(x)=\ln(x^2)$; $w(x)=\ln\sqrt{x}$; $L(x)=\ln|x^2-4x+3|$.

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

$\ln(-x-1)\geq\ln(-x+2)$; $b)\ln(x^2-1)<0$; c) $\ln(-x-1)=\ln(x^2+x+2)$; d)$\ln(-3x+4)\geq 1$.

2 Propriétés essentielles du logarithme (néperien).

Prendre un bon départ

Soit a un réel strictement positif. g la fonction : $x\mapsto\ln(ax)$.

Montrer que g est la composée de deux fonctions à préciser.

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x)=\frac{1}{x}$.

En déduire qu'il existe une constante réelle k, telle que pour tout réel x strictement

positif, $\ln(ax) = \ln x + k$.

c) Sachant que $\ln 1 = 0$, déterminer la valeur de la constante k.

d) En déduire que quels que soient les réels strictement positifs a et x, on a $\ln(ax) = \ln a +$

4) Soient a et b deux réels strictement positifs

a) De l'égalité $b \times \frac{1}{b} = 1$, déduire que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$, puis que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Retenir

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- Pour tout r élément de $\mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln a$.

S'EN CONVAINCRE :

1) Les trois premières propriétés ont été établies dans l'activité.

2) a)Montrons que pour tout entier naturel, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Raisonnons par récurrence.

a étant strictement positif, $a^0 = 1$ et $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln(a)$.

Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.

On déduit donc que pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

On peut aussi écrire $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n\ln(a)$.

Donc Pour tout entier relatif n, pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln(a^n) = n\ln$

a) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln(a)$. Donc $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

b) Si p est un entier relatif et q un entier naturel non nul,

$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$ or $\ln(a) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = q\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\ln(a)$

d'où $\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = p \times \frac{1}{q}\ln(a) = \frac{p}{q}\ln(a)$. En posant $r = \frac{p}{q}$, on a pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln(a^r) = r\ln(a)$, pour tout rationnel r.

Exemple

Donnons l'écriture simplifiée des expressions suivantes :

$a = \ln e^5$; $b = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right)$; $c = \ln e^2 + \ln\sqrt{e}$.

Solution :

$a = \ln e^5 = 5\ln e = 5$;

$b = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right) = \ln\sqrt{e} - \ln 4 = \frac{1}{2}\ln e - \ln 2^2 = \frac{1}{2} - 2\ln 2$;

$c = \ln e^2 + \ln\sqrt{e} = 2\ln e + \frac{1}{2}\ln e = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\ln(x+5) = 3 + \ln x$.

Contraintes sur l'inconnue: $\ln x$ est définie si et seulement si $x > 0$; donc l'équation $\ln(x+5) = 3 + \ln x$ n'a de sens que si $x+5>0$ et $x>0$; soit $x>0$.

$\ln(x+5) = 3 + \ln x$ équivaut à $\ln(x+5) = 3\ln e + \ln x = \ln e^3 + \ln x = \ln(e^3 x)$;

donc $\ln(x+5) = \ln(xe^3)$ équivaut à $x+5 = xe^3 \Leftrightarrow 5 = x(e^3-1) \Leftrightarrow x = \frac{5}{e^3-1}$.

Or $\frac{5}{e^3-1} > 0$, donc l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x+5) = 3 + \ln x$ est $S = \left\{\frac{5}{e^3-1}\right\}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 3)$.

Contraintes sur l'inconnue : $x^2 + 5x + 6 > 0$ et $x + 3 > 0$.

Les racines de $x^2 + 5x + 6$ sont -3 et -2 ; donc

$x^2 + 5x + 6 > 0$ équivaut à $x \in]-\infty;-3[\cup]-2;+\infty[$.

$x + 3 > 0$ équivaut à $x > -3$.

Donc $x^2 + 5x + 6 > 0$ et $x + 3 > 0$ équivaut à $x \in]-2;+\infty[$.

$\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 3)$ équivaut à

$x^2 + 5x + 6 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$.

Or $-3 \notin]-2;+\infty[$ et $-1 \in -2;+\infty[$. Donc $S = \{-1\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 > 0$.

Solution :

Contraintes sur l'inconnue : $x > 0$

Résolution

Posons $X = \ln x$, il vient $X^2 + X - 6 > 0$.

Le trinôme $X^2 + X - 6$ a pour racines -3 et 2 donc

L'inéquation $X^2 + X - 6 > 0$ est équivalente à $X \in]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$;
soit $X < -3$ ou $X > 2$
$\ln x < -3$ ou $\ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x < -3\ln e$ ou $\ln x > 2\ln e$;
$\ln x < \ln e^{-3}$ ou $\ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^{-3}$ ou $x > e^2 \Leftrightarrow x \in]0;e^{-3}[\cup]e^2;+\infty[$.
$S =]0;e^{-3}[\cup]e^2;+\infty[$.

Exercice résolu 1

f est la fonction définie sur $]-3, 3[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$. Etudier la parité de f.

Solution

Soit $x \in]-3, 3[$; $-x \in]-3,3[$ car $]-3,3[$ est centré en 0. De plus

$$f(-x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right) = -\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -f(x).$$

Donc f est impaire

Exercice résolu 2

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(2x-1)^2$. Déterminer l'ensemble de définition de f et mon
$f(x) = 2\ln|2x-1|$.

L'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ car $(2x-1)^2 \geq 0$

Pour tout réel x de D, $(2x-1)^2 = |2x-1|^2$ et $|2x-1| > 0$.

Donc Pour tout réel x de D, $\ln(2x-1)^2 = \ln|2x-1|^2 = 2\ln|2x-1|$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2\ln x$.

Cette équation n'a de sens que si $\begin{cases} 4x+2>0 \\ x-1>0 \\ x>0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x>1 \\ x>0 \end{cases}$; soit $x > 1$.

L'ensemble des solutions cette équation est inclus dans $D =]1;+\infty[$.

Pour tout x appartenant à D, l'équation $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = 2\ln x$ est équivalente à

$\ln\dfrac{4x+2}{x-1}=\ln x^2$; soit $\dfrac{4x+2}{x-1}=x^2$ qui équivaut à

$x^2(x-1)=4x+2$, et donc à $x^3-x^2-4x-2=0$.

Soit P le polynôme défini par $P(x)=x^3-x^2-4x-2$.

$P(-1)=0$; -1 est donc une racine de P. Il existe trois réels a, b et c tels que

$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$.

$(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c$.

$(b+a)x^2+(c+b)x+c=x^3-x^2-4x-2$.

En identification on a $\begin{cases}a=1\\b+a=-1\\c+b=-4\\c=-2\end{cases}$; soit $a=1$; $b=-2$ et $c=-2$.

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-2)$.

L'équation $x^2-2x-2=0$ admet deux solutions $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

L'équation $x^3-x^2-4x-2=0$ est équivalente à $x=-1$ ou $x=1-\sqrt{3}$ ou $=1+\sqrt{3}$.

Parmi ces solutions, seule $1+\sqrt{3}$ est un élément de D.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S=\left\{1+\sqrt{3}\right\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (2) : $\ln\dfrac{4x+2}{x-1}=\ln x^2$.

Cette équation n'a de sens que si $\begin{cases}x\neq 1\\x\neq 0\\\dfrac{4x+2}{x-1}>0.\end{cases}$ soit $\begin{cases}x\neq 1\\x\neq 0\\x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[\end{cases}$ d'où le domaine D_2

L'ensemble les solutions de l'équation (2) est $D_2=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

Pour tout x de D_2, (2) équivaut à $x=-1$ ou $x=1-\sqrt{3}$ ou $x=1+\sqrt{3}$.

Parmi ces solutions appartiennent à D_2.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S=\left\{-1;1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

Remarque : Les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2-4)=4$.

Cette équation n'a de sens que si $x^2-4>0$, soit $x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans $D=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

$\ln(x^2-4)=4$ équivaut à $\ln(x^2-4)=4\ln e$, car $\ln e=1$.

D'autre part $4\ln e=\ln e^4$. D'où $\ln(x^2-4)=\ln e^4$; soit successivement $x^2-4=e^4$; $x^2=4+e^4$

$x=\sqrt{4+e^4}$ ou $x=-\sqrt{4+e^4}$.

$\sqrt{4+e^4}$ et $-\sqrt{4+e^4}$ sont tous des éléments de D.

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x^2-4)=4$

est $S=\left\{\sqrt{4+e^4};-\sqrt{4+e^4}\right\}$

S'exercer

1.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $8(\ln x)^3-(\ln x)^2+\ln x=0$; b) $\ln(2x-5)+\ln(3x+7)=4\ln 2$;

c) $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$; d) $\ln(x+3)(x+2)=\ln(x+11)$.

1.c Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes :

$a=\ln e^2\sqrt{e}$; $b=\frac{1}{3}\ln e^{27}$; $c=\ln e+\ln\frac{1}{e}$

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\ln x=2$; b) $\ln x^3=27$; c) $\ln(3-5x)=0$; d) $3\ln\frac{1}{5x-1}=7$;

e) $\ln(5-2x)+\ln(4-3x)=\ln(4)-\ln(3)$;

f) $\ln|x+4|+\ln|x-1|=\ln 6$.

1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln(x))^2-4\ln(x)-77=0$.

1.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :a) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right)<0$; b) $\ln x-\frac{1}{\ln x}<\frac{3}{2}$.

1.g Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel strictement positif.

Calculer la somme :

$S=\ln a^n+\ln a^{n-1}+\ldots+\ln a+\ln 1+\ln\left(\frac{1}{a}\right)+\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1}{a^{n-1}}\right)+\ln\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

1.1.3 LIMITES DES EXPRESSIONS COMPORTANT ln. COURBE de ln.

Prendre un bon départ

On admet que $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

a. Posons $t=\frac{1}{x}$; calculer la limite de t quand x tend vers $+\infty$,

Exprimer $\ln x$ en fonction de t et en déduire la limite de $\ln x$ lorsque x tend vers 0, par valeurs supérieures.

En remarquant que $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, justifier que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

En posant $X = \frac{1}{x}$, démontrer que $\frac{\ln x}{x} = -X \ln X$. En déduire que $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Montrer que ln est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de ln en 1 est 1.

En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1.

Dresser le tableau de variation de ln.

Retenir

Quelques limites classiques

$\lim\limits_{u \to 0} \ln u = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} u \ln u = 0$; $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$; $\lim\limits_{u \to 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$;

$\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$; $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$; $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \frac{\ln u}{u} = -\infty$.

Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

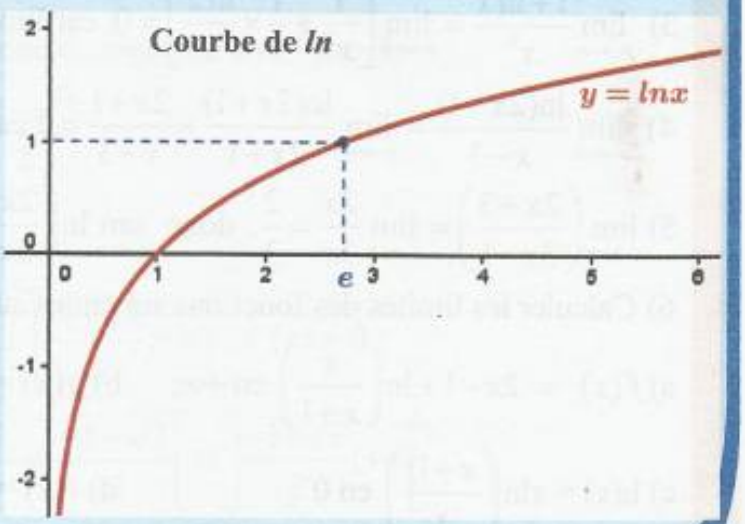
Tableau de variations de *ln*

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln' x$	||	+		
$\ln x$	|| $-\infty$	0	1	$+\infty$

La droite des ordonnées est asymptote à la courbe de ln.

La droite des abscisses est la direction de branche parabolique de la courbe de ln quand x tend vers $+\infty$.

Courbe de *ln*



Remarque

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I, alors, la fonction g définie sur I par $g(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

En effet :

Si $u(x) > 0$, alors $g(x) = \ln(u(x))$.

Pour tout x tel que $u(x) > 0$, $g(x) = \ln u(x)$.

Et $g'(x) = (\ln u)'(x) = (\ln)'(u(x)) \times u'(x)$. Or pour tout réel x, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

D'où $g'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

De même Si $u(x) < 0$, alors $g(x) = \ln(-u(x))$.

Pour tout x, $-u(x) > 0$, $g(x) = (\ln \circ u)(x)$

et $g'(x) = (\ln \circ u)'(x) = (\ln)'(-u(x)) \times (-u'(x)) = \frac{1}{-u(x)} \times (-u'(x))$;

$g'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

• Si u ne s'annule pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Exemple 1

1) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^3 (\ln x)^2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x(x \ln x)^2 = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}\right] = 0$. car $\lim \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} \times \frac{2x+1}{x-3} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

6) Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués:

a) $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ en $+\infty$; b) $g(x) = \frac{2\ln x + 1}{2x}$ en $+\infty$;

c) $h(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ en 0^+; d) $l(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

Solution :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty}$

b) $\frac{2\ln x + 1}{2x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x}$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(x+1))=0$ et $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to0+}h(x)=0$ car $h(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$ quand $x>0$.

En posant $X=\sqrt{x}$, $l(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\ln X^2}{X}=\dfrac{2\ln X}{X}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}l(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{2\ln X}{X}=0$.

Exemple 2

Définir la fonction dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

et étudier ses variations.

Solution

$\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ n'a de sens que si $\begin{cases}x\neq0\\ \dfrac{x+1}{x}>0\end{cases}$;

$\dfrac{x+1}{x}>0$ si et seulement si $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

La fonction $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

Posons $u(x)=\dfrac{x+1}{x}$. Pour tout x de $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Pour tout x de Df, $f'(x)=2+\dfrac{u'(x)}{u(x)}=2+\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=2-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{x}{x+1}=2-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Pour tout x de D_f, $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{x(x+1)}$.

Pour tout x de Df, $x(x+1)>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x^2+2x-1$.

$2x^2+2x-1$ a pour racines $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\in]0;+\infty[$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\in]-\infty;-1[$

Pour tout x appartenant à $\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$;

f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$

Pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};-1\right[\cup\left]0;\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$, $f'(x)<0$

f est décroissante sur les intervalles $\left]\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};-1\right[$ et $\left]0;\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$.

Exercice résolu

Déterminer les primitives F de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

Solution :

f est continue sur $]1;+\infty[$, donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$.

Posons $u(x)=x^2-1$, $u'(x)=2x$, donc $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

D'où les primitives de la fonction f sont les fonctions F définies sur $]1;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|u(x)|+K=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+k=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+K$ où K est une constante réelle qui ne dépend pas de x et dans $]1;+\infty[$, $x^2-1>0$.

S'exercer

1.h Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition, et définir sa fonction dérivée

2 a) $f(x)=2x\ln(3-x)$; b) $f(x)=\ln(2x^2-3x)$; c) $f(x)=x+1+\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$.

1.i Etudier les variations de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants et et dresser son tableau des variations

a) $f(x)=\ln(-x+3)$; b) $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$; c) $f(x)=2+\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

1.j Définir la fonction dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

1.k Déterminer les primitives de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sur l'intervalle proposé :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}$ sur $]0+\infty[$; b) $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]1;+\infty[$; c) $f(x)=\dfrac{4}{x}(\ln)^r$ où $r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$; d) $f(x)=\dfrac{a}{bx+c}$ où $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

1.1.4 Étude et représentation graphique de quelques fonctions comportant le logarithme népérien.

Exemple 1 : $f : x\mapsto x-1-\ln(2x-1)$.

a) Ensemble de définition.

$f(x)$ existe si et seulement si $2x-1>0$; soit $>\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble de définition de f est donc $D_f=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Limites de f aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(2x-1)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\ln(2x-1)=-\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$.

$x\to+\infty$; $f(x)=-1+x\left[1-\dfrac{\ln(2x-1)}{x}\right]=-1+x\left[1-\dfrac{2x-1}{x}\times\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]$

$\dfrac{2x-1}{x}\Big)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

$\lim f(x)=+\infty$

des branches infinies

$f(x)=+\infty$.

droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

x de $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{\ln(2x-1)}{x}=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{\ln(2x-1)}{(2x-1)}\times\dfrac{2x-1}{x}$.

$=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

$-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-\ln(2x-1))=-\infty$.

représentative (C) de f admet une branche parabolique de direction

d'équation $y=x$.

et sens de variation

f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ comme somme de fonctions dérivables.

x de $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ $f'(x)=1-\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x-1-2}{2x-1}=\dfrac{2x-3}{2x-1}$. Comme $2x-1>0$, le signe

est celui de $2x-3$. Pour tout x de $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ $f'(x)>0$, f est croissante sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$;

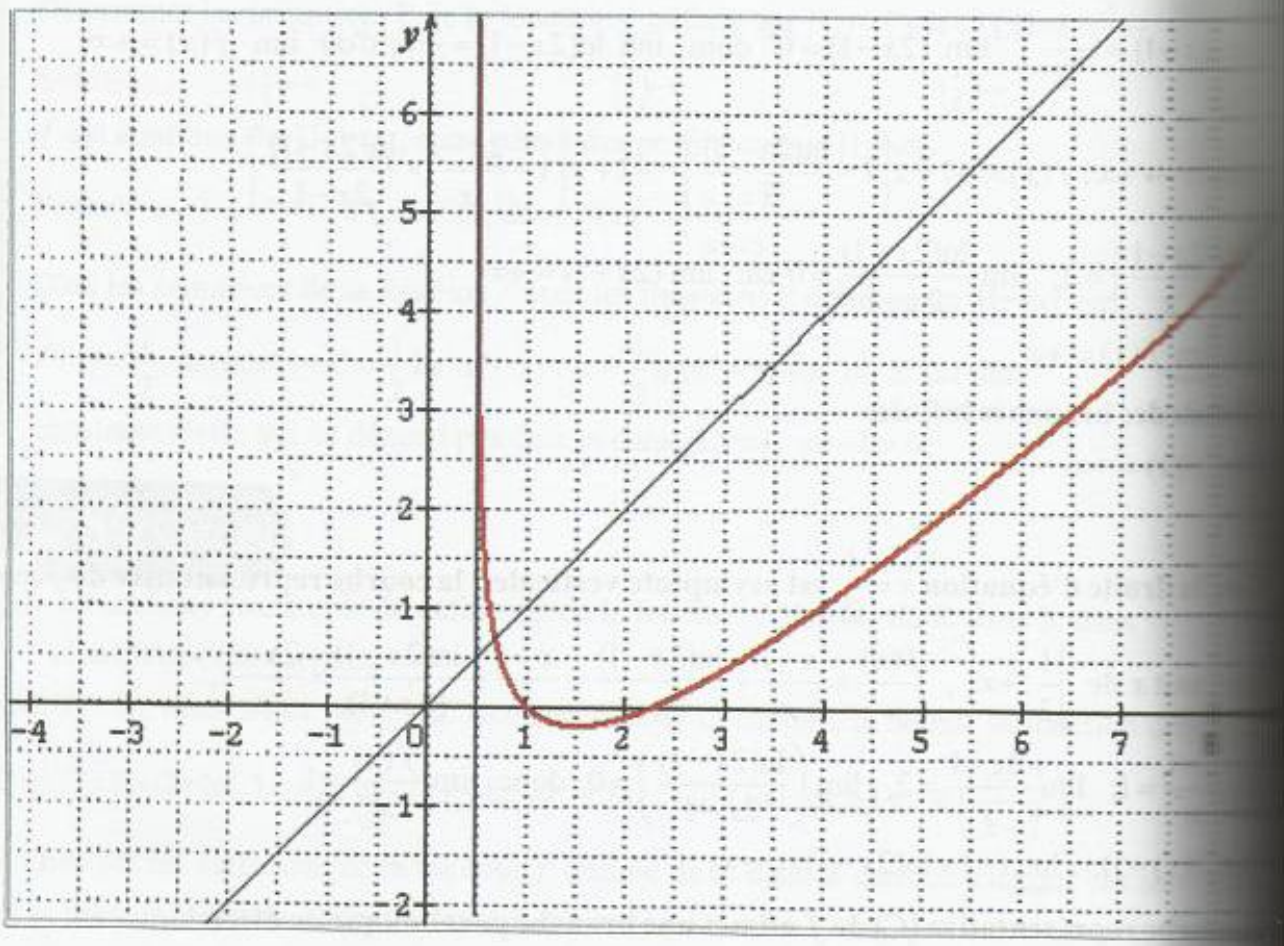
x de $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[$ $f'(x)<0$, f est décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[$.

des variations

$=\dfrac{3}{2}-1+\ln(3-1)=\dfrac{1}{2}-\ln 2\cong -0{,}19$.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	$+\infty$

c) Courbe représentative de f



Exercice résolu 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln|2-5x|$.

Etudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

Solution

Ensemble de définition D_f de f.

Pour réel x, $|2-5x| \geq 0$ donc $\ln|2-5x|$ existe si et seulement si $2-5x \neq 0$; c'est-à-dire

D'où $D_f = \left]-\infty;\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5};+\infty\right[= \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Dérivée de f.

f est dérivable sur D_f comme la composée de deux fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition; d'où pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5};+\infty\right[$, $f'(x) = \frac{-5}{2-5x} = \frac{5}{5x-2}$.

Limites aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln|2-5x| = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}} f(x) = \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln|2-5x|$

Tableau des variations de f

$f'(x) = \dfrac{5}{5x-2}.f'(x)$ a le signe de $5x-2$; donc

pour x appartenant à $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ $f'(x)<0$,

donc f est décroissante sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$;

pour x appartenant à $\left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$ $f'(x)>0$,

donc f est croissante sur $\left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

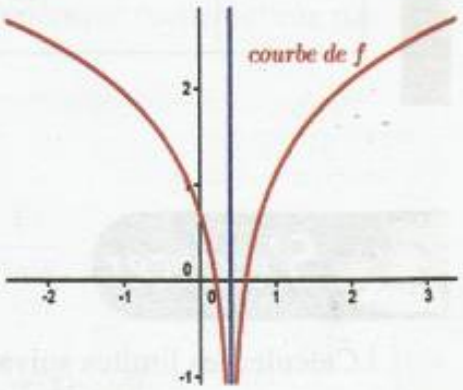
Courbe représentative de f.

Dans un repère orthonormé,

la droite d'équation $x=\dfrac{2}{5}$ est asymptote pour la courbe représentative de f.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(2-5x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln(2-5x)}{2-5x}\times\dfrac{2-5x}{x}\right)=0.$

$\lim\limits_{X\to-\infty}-\dfrac{5\ln X}{X}=0$; donc l'axe des abscisses est la direction de la branche parabolique de la courbe représentative de f en $-\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$



Exercice résolu 2

Etudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)$.

L'ensemble de définition de f est $Df=]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\left[\dfrac{1}{2}x(x\ln x)-\dfrac{3}{4}x^2\right]=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)\right]=+\infty$.

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$,

$f'(x)=\dfrac{1}{2}x(2\ln x-3)+\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{4}=x\ln x-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x}{2}=x\ln x-x=x(\ln x-1)$.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=0$ si et seulement si $\ln x-1=0$.

$\ln x=1$ équivaut à $x=e$.

$f'(x)>0$ est équivalent à $\ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$.

Pour tout x appartenant à $]0;e[$, $f'(x)<0$ et pour tout x appartenant à $]e;+\infty[$, $f'(x)>0$. f est donc décroissante sur $]0;e[$ et croissante sur $]e;+\infty[$.

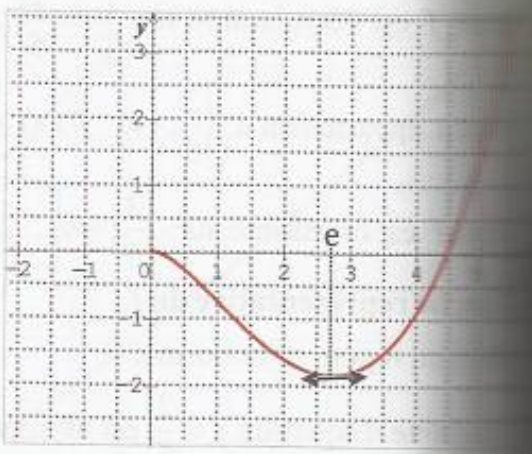
$f(e) = \dfrac{e^2}{4}(2\ln e - 3) = \dfrac{-e^2}{4}$.

Branches infinies : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2}(2\ln x - 3) = +\infty$.

La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Tableau des variations

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\dfrac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$



S'exercer

1.l Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to-3} \ln(3-2x-x^2)$; d) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to0} \ln(\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1.m a) Soit $f : x \mapsto \dfrac{5\ln x}{x^2+x+1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier les branches infinies .

b) Soit g: $x \mapsto x^2 - \ln(x)$. Etudier la limite de g quand x tend vers $+\infty$, puis la branche infinie

1.n f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3\ln x+1}{x}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer les limites à ses bornes.

Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE

Utiliser le lien entre « le logarithme népérien » et « le logarithme de base a » ($a > 0$ *et* $a \neq 1$)
Savoir résoudre des équations et inéquations contenant «log_a» et manipuler les expressions comportant log_a .
Déterminer les dérivées et les primitives des fonctions comportant « log_a» .
Calculer les limites des fonctions comportant « log_a».

2.1 PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel strictement positif et différent de 1, f_a la fonction numérique réelle définie par $f_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_a.

2) Montrer que f_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifier que $f_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

3) Déterminer suivant les valeurs de a, le signe de $f_a'(x)$.

4) En déduire que : $\begin{cases} \text{si } 0 < a < 1, & f_a \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[. \\ \text{si } a > 1 & f_a, \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[. \end{cases}$

5) Vérifier que $f_a(1) = 0$; $f_a(a) = 1$ et que $f_e(x) = \ln x$.

Activité 2

Soient a et b deux réels strictement positifs et tous différents de 1 .

1) Démontrer que quels que soient les réels strictement positifs x et x',
$\log_a(xx') = \log_a(x) + \log_a(x')$

2) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\log_a x = \dfrac{\ln b}{\ln a} \times \dfrac{\ln x}{\ln b}$;

3) En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$ $\log_a x = \log_a b \times \log_b x$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$

définie sur $]0;+\infty[$ par $\forall x \in]0;+\infty[$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

• La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $]0;+\infty[$;
$\log_a$ est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$;

• La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\log_a)'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ $\forall x\in]0;+\infty[$;

si $a>1$ alors $\log_a$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$;

si $0<a<1$ alors $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

• Quels que soient les réels strictement positifs x et x',

$\log_a(xx') = \log_a x + \log_a x'$	$\log_a\left(\frac{x}{x'}\right) = \log_a x - \log_a x'$;
$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$	$\forall r\in\mathbb{Q}, \log_a(x^r) = r\log_a x$.

• Changement de base : soit $a,\ b\in]0;+\infty[-\{1\}$,
$\forall x\in]0;+\infty[,\ \log_a x=\log_a b\times\log_b x$

Remarque

• Le logarithme népérien est le logarithme de base e : $\log_e(x)=\ln x$

• Le logarithme de base 10 est appelé logarithme décimal et est noté log : $\log(x)=\log_{10}(x)$

Le potentiel d'hydrogène d'une solution est donné par $pH=-\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+.

• $\log_a 1=0$ et $\log_a a=1$.

Exemple 1

Calculons : a) $\log_5 25$; b) $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{27}{8}$; c) $\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{4}{25}$; d) $\log 0{,}001$; e) $\log_9 3$.

Solution :

a) $\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$; car $\log_a a=1$.

b) $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{27}{8}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=3\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)=3$ car $\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$;

c) $\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{4}{25}=\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=2\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{2}{5}\right)=2\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{1}{\frac{2}{5}}\right)=-2\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{5}{2}\right)=-2$; car $\log_a\dfrac{1}{x}=-\log_a x$

d) $\log 0{,}001=\log\dfrac{1}{10^3}=-\log 10^3=-3\log 10=-3$; car $\log(x)=\log_{10}(x)$.

e) $\log_9 3=\log_9\sqrt{9}=\log_9\left(9^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\log_9 9=\dfrac{1}{2}$ car $\log_9(9)=1$.

Exemple 2

Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :

a) $\log_x x = 3$; b) $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1$; c) $\log_x \frac{9}{4} = 2$; d) $\log_x \frac{16}{25} = -2$; e) $\log x = 1$.

Solution :

a) $\log_2 x = 3$ équivaut à $\log_2 x = 3\log_2 2$

donc $\log_2 x = \log_2 2^3$; $x = 2^3 = 8$ donc $x = 8$;

b) $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1$ équivaut à $\log_{\frac{3}{4}}(x) = -1\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{3}{4}} x = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$.

c) $\log_x \frac{9}{4} = 2$ est équivalent à $\log_x \frac{9}{4} = 2\log_x x$ et $x > 0$; $\log_x \frac{9}{4} = \log_x x^2$ et $x > 0$; $\frac{9}{4} = x^2$

$x > 0$; $x = \frac{3}{2}$.

d) $\log_x \frac{16}{25} = -2$ est équivalent à $\log_x \left(\frac{16}{25}\right) = -2\log_x x$ et $x > 0$;

$\log_x \frac{16}{25} = \log_x x^{-2}$ et $x > 0$; $\frac{16}{25} = x^{-2}$ et $x > 0$; $x^2 = \frac{25}{16}$ et $x > 0$; $x = \frac{5}{4}$.

e) $\log x = 1$ équivaut à $\log x = \log 10 \Leftrightarrow x = 10$.

Exercice résolu

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Etudier les variations de f.

3) Etudier le signe de $\log_{\frac{3}{2}}(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Etudier les branches infinies à la courbe de f.

5) Dans un repère orthonormé du plan, représenter la courbe de f et celle de $g : x \mapsto \log_{\frac{2}{3}}(x)$.

Solution

1) L'ensemble de définition de D de f.

$D =]0; +\infty[$. En effet pour tout

$a > 0$ et $a \neq 1$, $\log_a$ est définie sur $]0; +\infty[$

2) Les variations de f : $f = \log_a$,

$a = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc

f est croissante sur $]0; +\infty[$

c) $f = \log_{\frac{3}{2}}$ est continue et strictement

croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(1) = 0$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \log_{\frac{3}{2}}(x) < 0 \\ x > 1, \ \log_{\frac{3}{2}}(x) > 0 \end{cases}$$

d) Ensemble image J de f .

pour tout $a>1$ $\log_a$ est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc l'ensemble image de $]0;+\infty[$ par f est $J=\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f=-\infty$, donc $(y'oy): x=0$ est asymptote verticale à la courbe de f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, donc l'axe $(x'ox)$ est la direction de la branche parabolique de la courbe de f à $+\infty$

$\log_{\frac{3}{2}} x=0$ équivaut à $x=1$

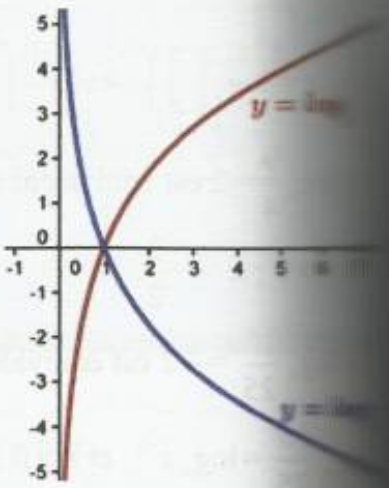
2. Représentons les courbes de $\log_{\frac{3}{2}}$ et $\log_{\frac{3}{2}}$

Courbes.

$\log_a x=\log_a b\times\log_b x$; donc

$$\log_{\frac{2}{3}} x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}\times\log_{\frac{3}{2}} x=-\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)\log\left(\frac{3}{2}\right)x=-\log_{\frac{3}{2}} x.$$

Comme $\log_{\frac{2}{3}} x=-\log_{\frac{3}{2}} x$, la courbe de $\log_{\frac{2}{3}}$ est le symétrique de celle de $\log_{\frac{3}{2}}$ par rapport à l'axe des abscisses.



S'exercer

2.a Donner l'expression simplifiée des réels suivants:

a) $\log_2 8$; b) $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{8}{27}$; c) $\log_5\dfrac{1}{125}$; d) $\log_3\sqrt[5]{3}$; e) $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{4}$;

f) $\log_8 2$; g) $\log 100$; h) $\log 0{,}1$; i) $\log 10^6$; ; j) $\log_2 16\sqrt[3]{2}$.

2.b Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :

a) $\log_2 x=0$; b) $\log x=1$; c) $\log_5 x=7$; d) $\log_x e=1$; e) $\log x=-2$.

2.c 1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\log x$ et la fonction

$$g: x\mapsto \log\left(\frac{1}{10}x\right).$$

Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x>0$.

2) Représenter dans un même repère orthonormé, la courbe de f et celle de g.

S'ENTRAÎNER

CTION LOGARITHME NÉPERIEN

écriture simplifiée des suivants

$b=\frac{1}{3}\ln e^{27}$;

$-\ln e^{-2}$.

en fonction de $\ln 2$ ou $\ln 3$

suivants:

$\ln\frac{1}{3}$; $\frac{1}{8}\ln 256$.

en fonction de $\ln 2$ ou $\ln 5$

suivants:

$\ln 200$; $\ln 1{,}25$; $\ln 10^5$

dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$=3$;

$+1)=\ln(-2x-3)$;

$+2)=1+\ln(x-3)$;

$+3)+\ln(x-2)=\ln(x+11)$;

$-4)+\ln(x-1)=\ln 6$;

$-4)=\ln x-2\ln 2$.

$\mathbb{R}$ les équations :

$\ln x-3=0$;

$\ln^2 x-\ln x-2=0$.

les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

b) $2\ln x-1<5$;

$-1)-\ln(2x+1)\le\ln(x+2)$.

6

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x-\ln y=\ln 2 \end{cases}$$

7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble D dans chacun des cas suivants:

a) $f(x)=\ln(-x)$; $D=]-\infty;0[$.

b) $f(x)=\ln\sqrt{x}$; $D=]0;+\infty[$.

c) $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; $D=]-\infty;-1[$.

8

Déterminer une primitive de la fonction numérique f sur le plus grand intervalle I que l'on précisera dans chacun des cas suivants.

a) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$; b) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$;

c) $f(x)=4-\frac{2}{x-1}$; d) $f(x)=\frac{x+2}{x+3}$;

e) $f(x)=\frac{2x^2+5x-1}{x+1}$;

f) $f(x)=\frac{x^2+x-5}{x^3+3x^2-15x+7}$;

g) $f(x)=\frac{3}{(x+7)\ln(x+7)}$;

h) $f(x)=\frac{(\ln x)^r}{x}$ où $r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$.

9

f est la fonction définie sur $]-3;3[$ par

$f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$.

Etudier la parité de f.

10

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par

$f(x)=\frac{1}{2}x+2+\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1) Montrer que le point A(0;2) est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

2) Déterminer par son équation l'asymptote oblique de la courbe représentative de f.

11

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=\ 1-x-\ln x$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de g.

2. Calculer g(1). En déduire le signe de g(x) dans l'intervalle $]0;+\infty[$ suivant les valeurs de x.

12

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x}$.

Etudier la fonction f (ensemble de définition, dérivée, limites, tableau des variations) et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

13

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\ln x - x$.

Etudier la fonction f (ensemble de définition, dérivée, limites, tableau des variations) puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan

14

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Etudier la fonction f (domaine, dérivée, limites, tableau des variations,) tracer sa courbe dans unrepère orthonormé du plan.

15

Soit n un entier naturel non nul.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction

$f_n : x \mapsto \frac{\ln x}{xn}$.

2. Déterminer la limite en 0 de la fonction

$g_n : x \mapsto x^n \ln x$.

3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction

$h_n : x \mapsto \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$.

4. Déterminer la limite en 0 de la fonction

$k_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^n}$.

16

On désigne par f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x)=-x+(x+\ 1)\ln x$.

1. a) Étudier les variations de g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x)=x\ln x+1.$;

b) En déduire que $g(x) >\ 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

2. a) Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. Pour la limite en $+\infty$ vérifier que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=x(-1+\ln x)-\ln x$

b) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$;

en déduire les variations de f.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude de α en justifiant.

17

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=-x+3+\ln x$.

...déterminer l'ensemble de définition de f
...calculer les limites de f à ces bornes.
...étudier les variations de f puis dresser son ...des variations.
...étudier les branches infinies de la courbe ...sentative de f.
...tracer sa courbe représentative dans un ...orthonormé du plan.
...la fonction G définie par
...et $-1+\ln x)$. $(x>0)$
...la dérivée de G et en déduire une ...de f sur $]0;+\infty[$.

...sidère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
...par $f(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$.
...Calculer $f(1)$;
...les variation de f et déduire le signe ...sur $]0,+\infty[$ suivant les valeurs de x.
...la fonction g définie par
$g(x)=-1+\ln x$.
...déterminer l'ensemble de définition de g et ...les limites de g aux bornes de cet ...ensemble.
...étudier les variations de g et dresser son ...tableau des variations.
...construire la courbe (C_g) dans un repère ...orthonormé du plan.

...résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln|x|<1$.
...On considère la fonction f définie par:
$f(x)=-x\ln|x|$ *pour* $x\neq 0$
...étudier la continuité et la dérivabilité de f

b) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes.
c) Etudier les variations de f et dresser son tableau des variations.
d) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

20

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1) Montrer que pour tout réel x, $x\neq \ln x$.
En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x-1}$ quand x tend vers 1.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
b) Préciser éventuellement les asymptotes à la courbe représentative de f.

5) Construire cette courbe dans un repère orthonormé du plan.

FONCTION LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE.

21

Donner l'écriture simplifiée des réels suivants:

a) $\log_5 5$; b) $\log_3 3^5$; c) $\log_2 \frac{1}{2}$;

d) $\log_2 32$; e) $\log_2 \frac{1}{8}$; f) $\log_{16} 4$;

g) $\log_5 \frac{1}{25}$; h) $\log 100$; i) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9}$.

22
Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :

a) $\log_5 x = 2$; b) $\log_x 9 = 2$;

c) $\log_x 2 = 2$; d) $\log_x 125 = 3$;

e) $\log_x \frac{9}{16} = 2$; f) $\log x = -3$

23
Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \log_5 x$.

1)Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f à ses bornes.

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

3) Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de f et celle de $g : x \mapsto \log_{\frac{1}{5}}(x)$.

24
Dans chacun des cas suivants, le point A appartient à la courbe d'une fonction logarithme de base a $(a > 0,\ a \neq 0)$.
Déterminer pour chaque point A la base a de la fonction logarithme et dire si elle est croissante ou décroissante.

a) A (4 ;2) ; b) A (100 ;2) ; c) A (8 ; 3) ;

d) A (5 ;1) ; e) A $\left(\frac{4}{9}\ ;2\right)$; f) A (e ;1) ;

g) A (10 ; −1) .

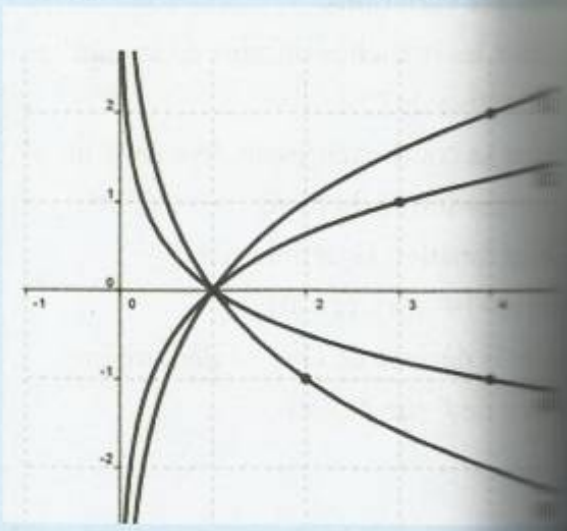
25
La courbe représentative d'une fonction logarithme de base a passe par le point A $\left(\frac{1}{3};-1\right)$.
Quelle est l'ordonnée du point B appartenant à ce graphique si l'abscisse de B est 9?

26
Déterminer dans chaque cas le signe de $\log_a x$.

a) $a > 1$ et $x > 1$; b) $a > 1$ et $0 < x < 1$;

c) $a < 1$ et $x > 1$; d) $a < 1$ et $0 < x < 1$.

27
Déterminer une équation de chacune des courbes des fonctions logarithmes de base du graphisme ci-dessous. (1) ,(2) , (3) et



28
a) Montrer que $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a (x)$.

b) Comment peut-on déduire la courbe de la fonction $\log_{\frac{1}{a}}$, à partir de celle de $\log a$?

29
Donner l'expression à l'aide d'un seul logarithme des expressions suivantes.

a) $\log x + \log (x - 2)$;

b) $2\log x - \log(x - 1) + \log(x + 3)$;

c) $\log(x + 3) - 2\log x^2 - 5\log(x + 1)$;

d) $\log(x^2+2x - 3) - \log(x + 3) - \log(x +$

30
Soient a, b et M trois nombres réels strictement positifs et différents de 1.

Montrer que $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

31
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\log_2 x = \log_2 3$; b) $\ln(x+1) = \log_2 3$.

dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$\log x = \log 2$;

$\log x = \log 5 + \log 2 - \log 3$;

$\log x = 3\log 2 - \log 5$;

$\log x = \frac{1}{2}\log 9 - \frac{2}{3}\log 8$;

$\log x = \frac{3}{2}\log 9 - \frac{2}{3}\log 8 + \frac{1}{4}\log 16$.

considère l'équation:

$\log(x-2) + \log(x-2) = \log 5 + \log 2$.(1)

déterminer l'ensemble des réels x pour lesquelle cette égalité est possible.

résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1).

dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\log(2x+1) + \log(x-3) = 2\log 3$;

$\log(x+1) = \log 3 + \log(x-2)$;

$2\log(x+1) = 2\log(2x-3)$;

$\log_2(x+1) = 4$;

$\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

les racines de chacune des de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes:

$\log x = \log x - 2$;

$\log(x+1) = \log(x+1) - \log(x-1) - \log 2$;

$\log_2(x^2-9) = \log_2(x^2-9) - \log_2(x+3)$;

$\log(x^2-4) = \frac{\log(x^2-4)}{\log(x+2)} - 1$

36

En chimie, le «pH» (potentiel d'hydrogène) est défini par :

$pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en $mole.L^{-1}$ d'une solution aqueuse.

La concentration en H_3O^+ d'une solution aqueuse est $2,4 \times 10^{-10}$ moles par litre. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.

Le pH d'une solution est 3. Établir que la concentration en H_3O^+ est 10^{-3} mole par litre.

3. Démontrer que si la concentration d'une solution aqueuse est divisée par 100, son pH augmente de 2.

37

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \log x+\log y=\frac{3}{2} \\ \log x+\log y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Chapitre 9

FONCTIONS EXPONENTIELLES

LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPERIENNE

1.1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE exp

1.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1.3 ÉTUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE " exp ".

LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

2.1 PRÉSENTATION

2.2 QUELQUES PROPRIETÉS DE exp_a

LEÇON 3 FONCTIONS PUISSANCES : $f_\alpha : x \to x^\alpha$ OÙ x EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET α EST UN NOMBRE RÉEL

3.1 PRÉSENTENTATION ET PROPRIÉTÉS DE f_α

3.2 CROISSANCES COMPARÉES DE $x \mapsto x^\alpha$; exp ET ln EN $+\infty$. CALCULS DE CERTAINES LIMITES .

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPERIEN

Présenter la fonction exponentielle ainsi que ses propriétés (en particulier l'image d'une somme et le produit des images).
Démontrer les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction exponentielle
Manipuler les fonctions dont les expressions comportent la fonction exponentielle : dérivabilité, sens des variations, connaître les limites et les limites classiques pour lever des indéterminations
Etudier et représenter graphiquement des fonctions dont les expressions possèdent la fonction exponentielle.

1. PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE exp

Prendre un bon départ

Montrer que la fonction logarithme népérien "ln" est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.
Dresser le tableau des variations de $\ln^{-1}$ (bijection réciproque de ln1).

Retenir

On appelle fonction exponentielle la fonction bijection réciproque de la fonction logarithme népérien et notée **exp** (**exp** = $\ln^{-1}$).
Si u est une fonction numérique d'une variable réelle x, alors
- $\exp(u(x))$ existe si et seulement si $u(x)$ existe ;
- $\exp(u(x))$ est toujours strictement positive.

Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, ($y = \exp x$) équivaut à ($\ln y = x$).
La fonction exp est une bijection croissante

CONSEQUENCES

De l'égalité $\ln 1 = 0$, il résulte que $\exp 0 = 1$;
De l'égalité $\ln e = 1$, il en résulte que $\exp 1 = e$
Pour tout réel u, $\ln(\exp u) = u$.
Pour tout réel v strictement positif , $\exp(\ln v) = v$.

- Quels que soient les réels a et b, $(\exp a = \exp b)$ équivaut à $(a = b)$.
- Quels que soient les réels a et b, $(\exp a < \exp b)$ équivaut à $(a < b)$.

Exemple : $x > 0$ équivaut à $\exp x > \exp 0$ qui est équivalent à $\exp x > 1$, puis $x < 0$ équivaut à $0 < \exp x < 1$.

Notations

Quel que soit le nombre rationnel r, $\ln e^r = r \ln e = r$.

Or $\ln e^r = r$ équivaut à $\exp r = e^r$.

Pour tout nombre rationnel, $\exp r = e^r$.

On convient que pour tout réel x, $\exp x = e^x$.

Exemple

1) Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = e^{2x^2-3x+1}$; b) $g(x) = e^{\frac{x^2-2}{x}}$; c) $h(x) = e^{\sqrt{4-x^2}}$; d) $k(x) = e^{\ln(2x-1)}$.

a) La fonction : $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme. D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) La fonction k : $x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$; d'où l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}^*$.

c) La fonction : $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est définie si $4 - x^2 \geq 0$; soit $x \in [-2; 2]$. D'où l'ensemble de définition de h est $[-2; 2]$.

d) La fonction : $x \mapsto \ln(2x-1)$ est définie si $2x - 1 > 0$; soit $x > \dfrac{1}{2}$.

D'où l'ensemble de définition de k est $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{2x} = e^{-3}$; b) $e^x = 2$; c) $e^x = 0$.

Solution :

a) $(e^{2x} = e^{-3})$ équivaut $(2x = -3)$; donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x} = e^{-3}$ est $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) $(e^x = 2)$ équivaut à $(e^x = e^{\ln 2})$; *soit* $x = \ln 2$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{\ln 2\}$.

c) On ne peut pas trouver de réel x tel que $e^x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; l'ensemble solution de l'équation $e^x = 0$ est $S = \varnothing$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^x > 3$; b) $e^x > -1$; c) $e^{2x-\ln 5} < 5$.

Solution :

Pour chacune des inéquations, nous noterons S l'ensemble des solutions.

$(e^x > 3)$ équivaut successivement à $(e^x > e^{\ln 3})$; $x > \ln 3$; donc $S =]\ln 3; +\infty[$.

Pour tout reel x, la proposition $e^x > -1$ est toujours vraie car $e^x > 0$, donc $S = \mathbb{R}$.

$e^{2x-\ln 5} < 5$ équivaut successivement à $e^{2x-\ln 5} < e^{\ln 5}$; $2x - \ln 5 < \ln 5$;

$2x < 2\ln 5$; $x < \ln 5$; donc $S =]-\infty; \ln 5[$.

Etudions le signe de $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

$e^{3x} - e^{2x} > 0$ équivaut successivement à $e^{3x} > e^{2x}$; $3x > 2x$; $x > 0$. Donc pour tout x de $]0; +\infty[$ $f(x) > 0$ et pour tout x de $]-\infty; 0[$, $f(x) < 0$.

Exercice résolu

Résoudre l'équation : $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$.

Solution

L'expression $2x+5$ est définie pour tout réel x, et l'expression $\frac{3}{x}$ est définie pour $x \neq 0$.

On cherche les solutions de l'équation sur $E = \mathbb{R}^*$.

Sur $E = \mathbb{R}^*$, $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ est équivalent à $2x+5 = \frac{3}{x}$; soit

$2x^2 + 5x - 3 = 0$; par suite $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Les solutions -3 et $\frac{1}{2}$ appartiennent à E, donc l'ensemble

des solutions de l'équation $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ est $S = \left\{-3 ; \frac{1}{2}\right\}$.

S'exercer

Ecrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{-2\ln 3} + e^{2\ln 3}$; b) $e^{-2+3\ln 2}$; c) $e^{1-2\ln 3}\, e^{1+2\ln 3}$.

Montrer que pour tout réel x, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{x^2} = e^{-3x^2}$; b) $e^{3x+\ln 2} = 2$; c) $e^x = \ln\frac{1}{3}$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^{2\cos x} > e^{\sqrt{3}}$; b) $e^{-x+3} > -e$; c) $e^{x^2-9} \leq 1$.

1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-4} \leq e^{-3x}$.

2.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Prendre un bon départ

1) Sachant que la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln, donner la transformation qui permet de déduire la représentation graphique de la fonction exp de celle de ln dans un même repère orthonormé du plan ?

1) En utilisant le tableau des variations de la fonction exp déduit de celui de ln, déterminer en justifiant les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.

2) Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ln et de exp.

Retenir

• Représentation graphique.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

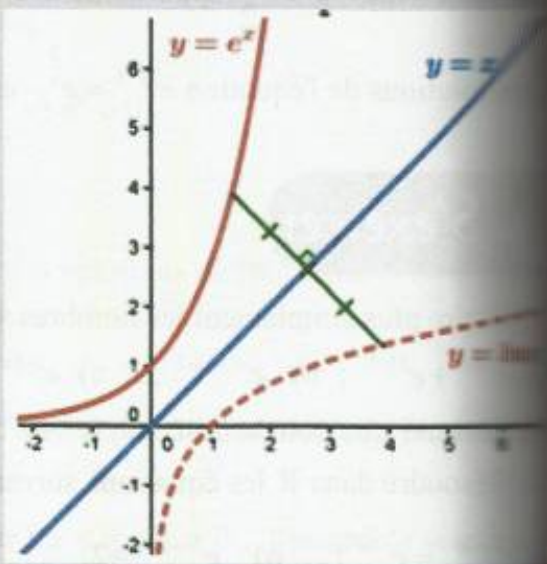
x	$-\infty$		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	0	↗	$+\infty$

• L' axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de exp à $-\infty$.

• L' axe des ordonnées est la direction de la branche parabolique pour la courbe représentative de exp à $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

La courbe représentative de *exp* est symétrique de celle de *ln* par rapport à la première bissectrice du repère, droite d'équation $y = x$



PRIÉTÉS

Quels que soient les réels a et b, $\exp(a+b) = (\exp a)\times(\exp b)$. $(e^{a+b} = e^a \times e^b)$

Pour tout réel a, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp a}$. $\left(e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}\right)$.

Quels que soient les réels a et b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$. $\left(e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}\right)$

Pour tout réel a et pour tout nombre rationnel r,

$(\exp a)^r = \exp(ra)$. $((e^{ra}) = (e^a)^r)$.

nvaincre

e^a équivaut à $a = \ln x$; $y = e^b$ équivaut à $b = \ln y$.

$\ln x + \ln y = \ln(xy)$.

$\ln(xy)$ équivaut à $xy = e^{a+b}$; soit $(e^a) \times (e^b) = e^{a+b}$.

e^{-a} équivaut à $a = \ln x$; $-a = -\ln x$; $-a = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $e^{-a} = \dfrac{1}{x}$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

$e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

e^{ra} équivaut à $\ln x = a$; $r\ln x = ra$; $\ln x^r = ra$; $e^{ra} = x^r$.

$e^{ra} = (e^a)^r$.

mple

Ecrire plus simplement les nombres suivants

$e^{-\ln 3}$

$b) e^{1+\ln 2}$

c) $e^{-2\ln 3}$

olution

$e^{-\ln 3} = 5 + \dfrac{1}{e^{\ln 3}}$ car $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

$\dfrac{16}{3} = \dfrac{16}{3}$.

b)
$e^{1+\ln 2} = e^1 e^{\ln 2}$; car $e^{a+b} = e^a e^b$
$= 2e^1 = 2e$; car $e^1 = e$.

c)
$e^{-2\ln 3} = (e^{\ln 3})^{-2}$; car $(e^a)^r = e^{ra}$
$= 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$.

olution :

$2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$ équivaut à $2(e^x)^2 + 8e^x + 6 = 0$. En posant $X = e^x$, on obtient $2X^2 + 8X + 6 = 0$

Les solutions de cette nouvelle équation sont -1 et -3.

Résolvons alors les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$, mais comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on en déduit

que les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$ n'ont pas de solution. D'où l'ensemble des solutions de l'équation $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$ est $S = \varnothing$.

3) Soit le polynôme p défini par $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

a) Montrer que 1 est une racine de p.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

c) Déduire des questions a) et b) les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$.

Solution

$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

a) $p(1) = 2\times1 + 3 - 5 - 2 = 0$. 1 est donc une racine de p.

b) $p(x)$ peut donc se mettre sous la forme $p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

Après développement et identification, on a $p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 2)$.

$p(x) = 0$ équivaut à $(x-1)(2x^2 + 5x + 2)$; soit $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ est $\left\{-2;\ -\frac{1}{2};1\right\}$.

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$.

Posons $X = e^x$.

$2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$ équivaut à $2(e^x)^3 + 3(e^x)^2 - 3e^x - 2 = 0$ qui est équivalent à

$2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 = 0$; soit $X = -2$ ou $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 1$.

$e^x = -2$ n'est pas possible car $e^x > 0$, pour tout réel x.

$e^x = -\frac{1}{2}$ n'est pas possible car $e^x > 0$, pour tout réel x.

$e^x = 1$ équivaut à $x = 0$. L' ensemble des solutions de l'équation $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$ est $\{0\}$.

S'exercer

1.f Écrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{-2\ln 5} + \frac{1}{3}e^{2\ln 3}$; b) $\frac{2 - \ln\left(\sqrt[3]{e}\right)}{1 + \ln(e^2)}$; c) $e^{1+\ln 2} + e^{\ln 3 - 2}$.

1.g Donner l'expression réduite de : $A(x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1$ et $B(x) = 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1$

1.h Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{x^2} = \frac{1}{e^{-x-2}}$; b) $e^{x+2} + e^{\frac{1}{x}} = e$; c) $4^{-x} = 3$.

1.i Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^{\sin(2x)} \geq e\sqrt{e}$; b) $e^{3-2x} < e^{1-x}$; c) $e^{x^2-1} \leq 1$.

Résoudre les inéquations a) $e^{6-x} \leq e^{x^2}$ et b) $2e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$.

3 ÉTUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE " exp ".

Prendre un bon départ

Rappelle si f réalise une bijection de K vers $f(K)$ et si pour tout $x \in K$ on a $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$.

Pour tout réel x, donner l'expression de $\ln'(e^x)$.

En déduire que pour tout réel x, $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer la dérivée de la fonction : $x \mapsto e^{u(x)}$.

Retenir

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée la fonction : $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction: $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

La fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitives les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est un réel quelconque qui ne dépend pas de x.

Remarque

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démontrons

Posons $X = -x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} \left(-Xe^{-X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \left(-X \times \frac{1}{e^X}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}}\right) = 0 \text{ car } \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = e^0 = 1 \text{ car } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} \text{ est le nombre dérivé de } x \mapsto e^x \text{ en 0.}$$

Exemple

1) Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

a) $f(x) = xe^{x^2}$; b) $g(x) = e^{\sin x}\cos x$; c) $h(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

Solution :

a) Posons $u(x) = x^2$. $u'(x) = 2x$, par suite $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

D'où les primitives de f sur $]-\infty;+\infty[$ sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{u(x)} + K$.

Donc $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

b) Posons $v(x) = \sin x$. $v'(x) = \cos x$; $g(x) = v'(x)\, e^{v(x)}$.

Les primitives de f sur $]-\infty;+\infty[$ sont les fonctions $G : x \mapsto e^{v(x)} + K$; soit

$G : x \mapsto e^{\sin x} + K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

c) Posons $w(x) = \frac{1}{x}$; pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $w'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$h'(x) = -w'(x)e^{w(x)}$.

Les primitives de h sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $G : x \mapsto -e^{w(x)} + K$; soit

$G : x \mapsto -e^{\frac{1}{x^2}} + K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 5e^x$

Pour tout réel $x > 0$, $2x - 5e^x = -e^x(2(-xe^{-x}) + 5)$. or $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - 5e^x) = -\infty$.

Exercice résolu

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)^2\, e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau des variations.
2. Tracer la courbe C dans le repère$(O;\vec{i},\vec{j})$.

Solution

1.Variations et tableau des variations de g.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Car , elle est la composée des fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ qui sont des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. $x \to (x+1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynome de degré 2.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g'(x) = 2(x+1)\,e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (x+1)(2-(x+1))e^{-x}$.

$g'(x) = (x+1)(-x+1)e^{-x}$.

Or pour tout réel x, $e^{-x} > 0$; donc $g'(x)$ a le signe de $(x+1)(-x+1)$; qui est négatif pour $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et positif pour $x \in]-1;1[$.

Donc g est décroissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$, puis croissante sur $]-1;1[$.

Limites aux bornes de Dg = $\mathbb{R}$

$\lim (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{u} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$. Or $\dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}\right)^2 \times 4}$ comme $X = \dfrac{1}{2}x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	
$g(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Branches infinies de (C)

$\lim \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{x} e^{-x}$

$\lim \dfrac{x^2+2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim \dfrac{g(x)}{x} = -\infty$. Donc l'axe des ordonnées est une branche parabolique pour la courbe de g à $-\infty$. D'autre par $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de g à $+\infty$.

Extrêma de (C)

Le point de coordonnées $(-1\ ;0)$ est un minimum absolu

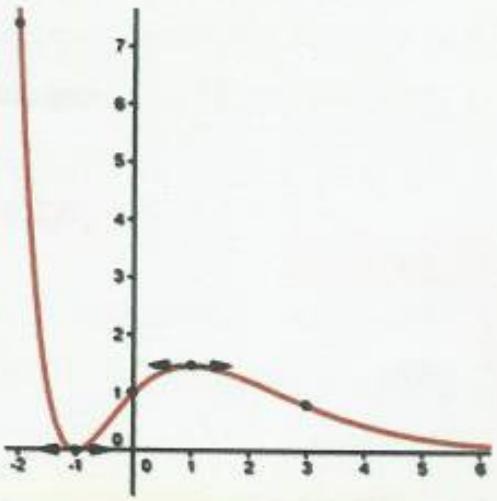
Le point d'abscisse 1 est un maximum relatif

Quelques points de la courbe (C).

$g(-2) = e^2$; $g(0) = 1$; $g(3) = \dfrac{16}{e^3}$:

(C) passe par les points

de coordonnées $(-2\ ;e^2)$,$(0\ ;1)$ et $\left(3\ ;\dfrac{16}{e^3}\right)$.



S'exercer

1.k Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-x)e^{x}$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-x)e^{x}$;

1.l Soit $f : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Donner l'ensemble de définition de la fonction f, puis calculer ses limites à ses bornes.

Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f.

1.m On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-x^2)e^{x}$.

a) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f. Dresser son tableau des variations.

c) Étudier les branches infinies à la courbe représentative de f.

d) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal.

1.n Définie la fonction dérivée de f dans chacun des cas :

a) $f(x) = e^{\tan x}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; c) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x}}$; d) $f(x) = e^{x^2\ln x}$

1.o Déterminer une primitive F de f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3e^{ax+4}$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{x^3+1}$; c) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; d) $f(x) = \cos x$

e) $f(x)=ae^{cx+d}$ où $a\neq 0$ et $c\neq 0$; $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

Utiliser le lien entre « exponentielle de base e»(Exp) et « exponentielle de base a » (Exp_a) pour résoudre des équations et inéquations contenant «exp_a », manipuler les expressions contenant Exp_a
Déterminer des dérivées et des primitives des fonctions comportant «exp_a» .

2.1 PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

a un réel strictement positif et différent de 1.
a) Montrer que $\log_a$ admet une bijection réciproque $(\log_a)^{-1}$.
b) Dresser le tableau des variations de $\log_a^{-1}$ dans le cas $a > 1$ et le cas $0 < a < 1$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a . On la note ***exp***$_a$. Elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$. Pour tout réel x, ($y = exp_a\, x$) équivaut à ($x = \log_a y$).

Exemple

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
$\log_a 1 = 0$ équivaut à $exp_a\, 0 = 1$.
$\log_a a = 1$ équivaut à $exp_a\, 1 = a$.
$\log_a a^2 = 2$ équivaut à $exp_a\, 2 = x$.
$\log_a x = -1$ équivaut à $exp_a\,(-1) = x$.

S'exercer

Déterminer si possible dans chaque cas le ou les réels x tels que :
a) $exp_a\, x = -2$; b) $exp_a\, 2 = x^2$; c) $exp_a(-x^2) = -3$.

2.2 QUELQUES PROPRIETÉS DE exp_a

Prendre un bon départ

a un réel strictement positif et différent de 1.

A partir de la relation $x = \log_a(y) = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, montrer que $y = e^{x \ln a}$.

b) En déduire que pour tout réel, $\exp_a x = e^{x\ln a}$.

c) On pose $\alpha = \log_a(x)$; Exprimer $-\alpha$ comme $\log_a y$ où y est à déterminer en fonction de x.

En déduire que $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- Pour tout réel x, $\exp_a x = e^{x\ln a}$.
- Pour tout réel x, $\log_a(\exp_a x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp_a(\log_a x) = x$.
- $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$.
- Pour tout réel x, $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a x}$.
- Pour tous réels x et y, $\exp_a(x+y) = (\exp_a x)\times(\exp_a y)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp a(x-y) = \dfrac{\exp_a x}{\exp_a y}$.

S'en convaincre

Montrons que $\exp_a(x+y) = (\exp_a x)\times(\exp_a y)$.

Posons $\alpha = \exp_a x$ et $\beta = \exp_a y$.

$\alpha = \exp_a x$ est équivalent à $x = \log_a \alpha$.

$\beta = \exp_a y$ est équivalent à $y = \log_a \beta$.

$x + y = \log_a \alpha + \log_a \beta = \log_a(\alpha\beta)$.

$x + y = \log_a(\alpha\beta)$ équivaut à $\alpha\beta = \exp_a(x+y)$;

Soit $(\exp_a x)(\exp_a y) = \exp_a(x+y)$.

D'autre part $\exp_a(x-y) = \exp_a(x+(-y)) = (\exp_a x)(\exp_a(-y))$

$$= (\exp_a x)\times\frac{1}{(\exp_a y)} = \frac{(\exp_a x)}{(\exp_a y)}.$$

Notations

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1,

Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\log_a a^r = r\log_a a = r$ *car* $\log_a a = 1$, or $\log_a(a^r) = r \Leftrightarrow a^r = \exp_a(r)$

Ainsi pour tout réel a strictement positif et différent de 1,

Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\exp_a r = a^r$.

Par convention pour tout réel x, pour tout réel a strictement positif et différent de 1, $\exp_a x = a^x$. Ainsi pour tout réel x, pour tout réel a strictement positif et différent de 1, $\exp_a x = a^x = e^{x\ln a}$.

Remarque

L'écriture ci-dessus nous permet d'écrire :

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1,

$a^0 = 1$; $a^1 = a$.

Pour tous réels x et y,

$a^{x+y} = a^x \times a^y$;

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$.

Pour tout réel x , $a^x = e^{x\ln a}$.

Par convention on admet que pour tout réel x, $1^x = 1$.

Exemple

a) $\exp_2(3) = 2^3 = 8$; b) $\exp_3(-2) = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

c) $\exp_{\frac{1}{2}}(3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; d) $\exp_{\frac{1}{2}}(-3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3^x = 5\times 2^x$.

$3^x = 5.2^x$ est équivalent successivement à

$\ln 3^x = \ln(5.2^x)$; $x\ln 3 = \ln 5 + \ln 2^x \Leftrightarrow x\ln 3 = \ln 5 + x\ln 2$;

$x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 5$; $x\ln\dfrac{3}{2} = \ln 5$; $x = \dfrac{\ln 5}{\ln\dfrac{3}{2}}$. $S = \left\{\dfrac{\ln(5)}{\ln(3)-\ln(2)}\right\}$.

Exercice résolu 1

ETUDE DE LA FONCTION $f : x \mapsto a^x$

a un réel strictement positif et différent de 1. Désignons par (C_a) la courbe de f dans un repère orthonormé du plan. $f(x) = e^{x\ln a}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x $f'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a} = a^x \ln a$.

Pour tout réel x, $a^x > 0$; donc $f'(x)$ a le même signe que $\ln a$.

Premier cas $0 < a < 1$.

$\ln a < 0$, Pour tout réel x $f'(x)$ est strictement négatif. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0	
$f'(x)$		$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘

Calculons les limites de f à $-\infty$ et à $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ car $\ln a < 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ car $\ln a < 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x\ln a}}{x} = -\infty$; car $\dfrac{e^{x\ln(a)}}{x} = \ln(a) \times \dfrac{e^{x\ln a}}{x\ln a}$

La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

D'autre part $a^0 = 1$.

Dressons le tableau des variations de f.

Deuxième cas : $a > 1$

$\ln a > 0$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est strictement positif. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0	
$f'(x)$		$+$		$+$
$f(x)$	0	↗	1	↗

Calculons les limites *de* f à $-\infty$ et à $+\infty$.

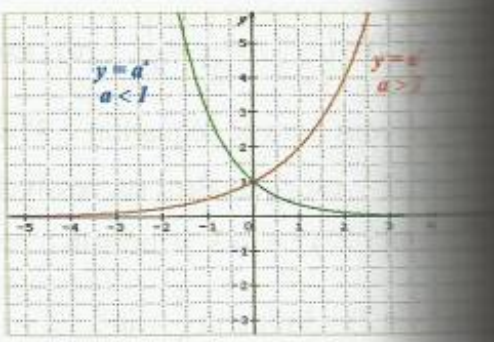
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ car $\ln a > 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ car $\ln a > 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

D'autre part $a^0 = 1$.

Dressons le tableau des variations de f

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x\ln a}}{x} = +\infty$; la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées



Exercice résolu 2

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x2^x$.

Solution

Pour tout réel x, $f(x) = xe^{x\ln 2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = e^{x\ln 2} + x\ln 2 e^{x\ln 2} = (1 + x\ln 2)2^x$.

Or $2^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $1 + x\ln 2 > 0$ lorsque $x > -\dfrac{1}{\ln 2}$.

Donc $f'(x) > 0$ pour $x > -\dfrac{1}{\ln 2}$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -\dfrac{1}{\ln 2}$.

$\lim 2^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln 2} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée. En posant $X = x \ln 2$,

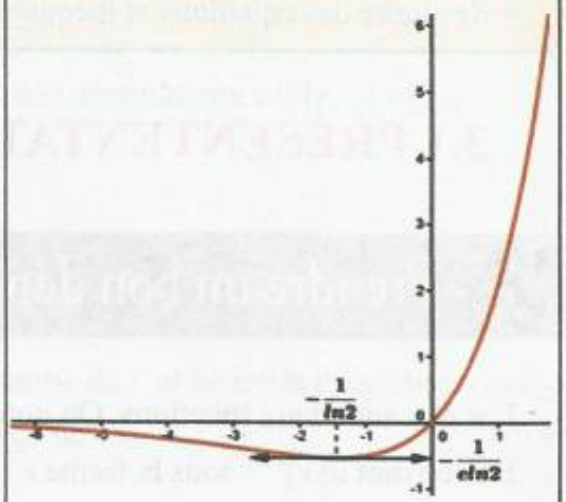
on obtient $xe^{x \ln 2} = \dfrac{X}{\ln 2} e^X = \dfrac{Xe^X}{\ln 2}$ or $\lim_{x \to -\infty} X = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e \ln 2}$	↗	$+\infty$

$\lim \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est une direction de branche parabolique pour la courbe de f à $+\infty$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f.

Courbe de f



S'exercer

Donner les nombres réels suivants sous forme simplifiée.

a) $\exp_2(2)$; b) $\exp_2(5)$; c) $\exp_5(-2)$; d) $\exp_2(-5)$; e) $\exp_{\frac{1}{2}}(-5)$.

Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :

a) $\exp_2(x) = 8$; b) $\exp_3(x) = \dfrac{1}{9}$; c) $\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{16}$; d) $\exp_9(x) = 3$;

Déterminer la base a dans chacun des cas suivants :

a) $\exp_a(2) = 16$; b) $\exp_a(-3) = \dfrac{1}{125}$; c) $\exp_a(-2) = \dfrac{1}{9}$.

Déterminer la base de chacune des fonctions exponentielles suivantes, puis indiquer si elle est croissante ou décroissante. a) $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; c) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; d) $y = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$.

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $2^{x+3} = 3^{x-7}$.

Soit une suite géométrique de raison $q = 0,4$; son terme initial est $u_0 = 0.4140625$ et le terme $u_n = 0.0000262\,144$. Calculer n.

LEÇON 3 FONCTIONS PUISSANCES : $f_\alpha : x \to x^\alpha$ OÙ x EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET α EST UN NOMBRE RÉEL

Utiliser le lien entre la fonction puissance et la fonction «exp» pour :

- Déterminer la dérivée et des primitives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$;
- Calculer les limites des fonctions comportant la fonction puissance α ;
- Résoudre des équations et inéquations comportant des fonctions puissances.

3.1 PRÉSENTENTATION ET PROPRIÉTÉS DE f_α

Prendre un bon départ

1. u et v sont deux fonctions. On note u^v la fonction : $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
En écrivant $u(x)^{v(x)}$ sous la forme $e^{v(x)\ln u(x)}$,
Donner les contraintes pour que u^v soit défini.

Retenir

Soient u et v deux fonctions.
On note u^v la fonction : $x \mapsto (u(x))^{v(x)}$, c'est -à-dire la fonction : $x \mapsto e^{v(x)\ln u(x)}$.
Si D_v désigne l'ensemble de définition de v et D_u l'ensemble des réels x pour lesquels u est défini et strictement positif, alors l'ensemble de définition de u^v est $D_u \cap D_v$.

Exemple

Etudions et représentons la fonction $f : x \mapsto (x)^{\frac{1}{x}}$.
L'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$.

Pour tout réel x, strictement positif $(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$,
f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Posons pour tout réel x, strictement positif, $v(x) = \frac{1}{x}\ln x$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$.

Pour tout réel x, strictement positif, $f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

$f'(x)$ a le signe de $1-\ln x$ car $e^{\frac{1}{x}\ln x}>0$ et $\frac{1}{x^2}>0$.

$1-\ln x>0$ équivaut à $\ln x<1$; soit $\ln x<\ln e$ et $x<e$; $x\in]0;e[$.

On en déduit que $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in]0;e[$;

$f'(x)<0$ si et seulement si $x\in]e;+\infty[$.

f est donc strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;\ +\infty[$.

$f(e)=e^{\frac{1}{e}\ln e}=e^{\frac{1}{e}}$.

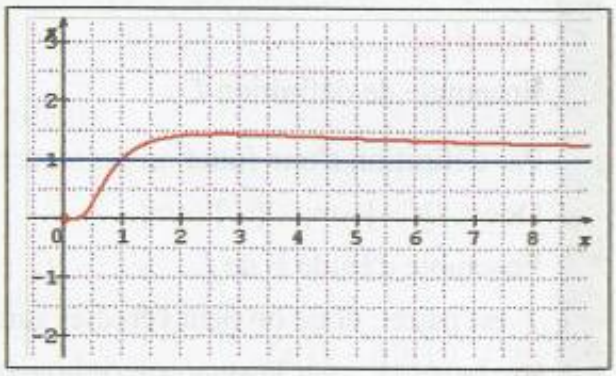
Calcul des limites :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln x}=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$.

Le point de coordonnées (o,o) est point d'arrêt à la courbe de f et la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Tableau des variations de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1



Exercice résolu 1

Exprimer plus simplement en fonction de e, le nombre : $\left(ee^{\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}$.

$\left(ee^{\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=\left(e^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=e^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=e^{1-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Simplifier le nombre : $\frac{\sqrt{9}\sqrt{27}\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$.

$\frac{\sqrt{9}\sqrt{27}\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3^3}\left(\sqrt[3]{3^2}\right)^2}{\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}}}=\frac{3(3^3)^{\frac{1}{2}}\left(\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$= \frac{3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2}{3^{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}} = \frac{3^{1+\frac{3}{2}\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}} = 3^{\frac{5}{4}+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{29}{12}}.$$

2) Résoudre l'inéquation : $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$ est équivalente à l'inéquation $x\ln\frac{1}{2} \geq \ln\frac{3}{2}$ et est équivalente à

$x \leq \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{1}{2}}$ car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Or $\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{-\ln 2} = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$ est $\left]-\infty; 1-\frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$

Exercice résolu 2

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto (x^2-1)^{-\pi}$ dans un repère orthonormé.

Solution :

Ensemble de définition D_f

Par définition d'une fonction puissance , $f(x) = e^{-\pi\ln(x^2-1)}$ existe pour $x^2-1>0$.

Donc $Df =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Ensemble d'étude E de f .

f est paire ; donc on peut l'étudier sur $E =]1;+\infty[$ et déduire le tracé de la courbe de f sur $]-\infty;-1[$ par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

Limites en 1 et $+\infty$; interprétations.

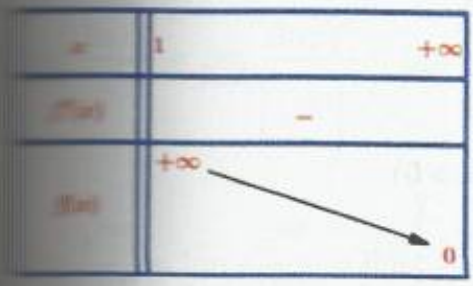
Lorsque x tend vers 1^+, x^2-1 tend vers 0^+ et $-\pi\ln(x^2-1)$ tend vers $-\infty$. Donc en posant $X = -\pi\ln(x^2-1)$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{-X} = +\infty$. On déduit que la droite d'équation est asymptotes à la courbe de f. Lorsque x tend vers $+\infty$, x^2-1 tend vers $+\infty$.

Donc en posant $X = -\pi\ln(x^2-1)$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. On déduit que l'axe des abscisses est asymptotes à la courbe de f.

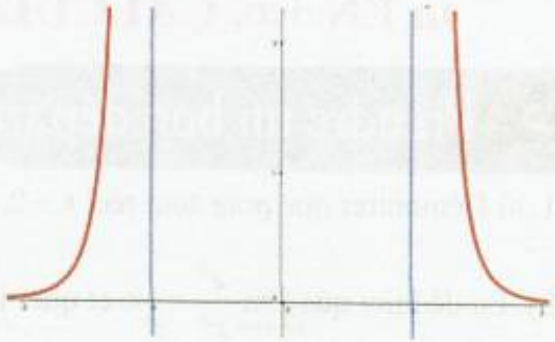
La fonction : $x \mapsto -\pi\ln(x^2-1)$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc est dérivable sur $]1;+\infty[$comme la composée de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = -\pi\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)f(x)$ et $f'(x) < 0$;donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ car $x>1$ et $x^2-1>0$.

Tableau des variations sur E



Courbe de f sur D_f



Exercice résolu 3

Dans un milieu donné, toutes les 12 heures, le nombre de bactéries est multiplié par 17 millions de façon constant et suivant la relation horaire $P(t)=P_0r^t$.

1) Quel est le taux horaire de croissance ?

2) En combien de temps une population de bactéries est-elle multipliée par 10 ?

Solution

1) Soit i le taux horaire de croissance ; après une heure, $P(1)=P_0+iP_0=(1+i)P_0$.

Or $P(t)=P_0r^t$; donc $P(12)=17\times10^6P_0=P_0r^{12}$.

Or $P_0=P_0r^{12}\Leftrightarrow17\times10^6=r^{12}\Leftrightarrow12\ln r=\ln17+6\ln10$.

D'où $\ln r=\dfrac{\ln17+6\ln10}{12}\Leftrightarrow r=e^{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}$.

Or $i=r-1$; donc $i=r-1=e^{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}-1\approx 3{,}0044=300{,}44\%$.

2) $P(t)=10P_0\Leftrightarrow P(t)=P_0r^t=10P_0\Leftrightarrow r^t=10\Leftrightarrow t\ln r=\ln10$. Or $r=e^{\frac{l\ln17+6\ln10}{12}}$;

donc $\ln r=\dfrac{\ln17+6\ln10}{12}$; d'où $t=\dfrac{\ln10}{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}=\dfrac{12\ln10}{\ln17+6\ln10}\approx1{,}65965\approx1\text{h }39\text{min }35\text{s}$.

S'exercer

1) Exprimer, en fonction de e, le nombre : $\left(\dfrac{e^{\sqrt{5}}}{e^{\sqrt{3}}}\right)\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

2) Simplifier le nombre : $5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$.

3) Dans le film "Mémoires en fuite", on parle d'un capital de 200 000 francs qui, quelques plus tard, vaut 3 500 000 francs. Quel est le taux moyen sur cette période?

3.2 CROISSANCES COMPARÉES DE $x \mapsto x^\alpha$; exp ET ln EN $+\infty$. CALCULS DE CERTAINES LIMITES

Prendre un bon départ

1. a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$. $(\alpha > 0)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$.

2. a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$; $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$; $(\alpha > 0)$

b) en posant $X = x^\alpha$, déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Retenir

Pour tout réel α, $(\alpha > 0)$		Pour tout réel α un réel strictement	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{x\to0} x^\alpha \ln x =$

Remarque

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} |x|^\alpha e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x$.

On di que l a fonction : $x \mapsto |x|^\alpha$ est négligeable devant la fonction : $x \mapsto e^x$ au voisi
et de $-\infty$ ou encore que la fonction $x \mapsto e^x$ est prépondérante devant la fonction : $x \mapsto$
voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

On dit que la fonction : $x \mapsto \ln x$ est négligeable devant la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ au voisi
et de $+\infty$ ou encore que la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ est prépondérante devant la fonction : $x \mapsto$
au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Exemple

1) Déterminons la limite de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x^2$ en $+\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $\sqrt{x} - \ln x^2 = \sqrt{x}\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \ln x^2\right) = +\infty$. Car $1 - 2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 1$

$\lim_{x\to 0^+} x(x\ln x)^3 = \lim_{x\to 0^+} x\left(x^{\frac{1}{3}}\ln x\right)^3 = 0.$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty.$

$$\lim \frac{(\ln x)^\pi}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\pi}{\left(x^{\frac{1}{2\pi}}\right)^\pi} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2\pi}}}\right)^\pi = 0;$$

$$\lim \frac{x^{1000}}{1{,}01^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1000}}{e^{x\ln 1{,}01}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1000}{\ln 1{,}01}}}{e^x}\right)^{\ln 1{,}01} = 0.$$

Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction $f: x\mapsto x^2e^{-\sqrt{x}}$.

On pose $X=\sqrt{x}$ on a alors $f(x)=X^4e^{-X}$ or $\lim_{x\to+\infty}X=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}X^4e^{-X}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln 2^x-\ln x^2$.

1) Démontrer que $f(x)=x\ln 2-2\ln x$. 2) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

3) Calculer la dérivée f' de . En déduire les variations de f.

4) A l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de $f(x)$.

5) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $2^n\geq n^2$.

Solution

1) D'après les règles de calcul de sur le logarithme, $\ln a^r = r\ln a\ \ \forall a>0$ et $r\in\mathbb{R}$.

Donc $f(x)=\ln 2^x-\ln x^2 = x\ln 2-2\ln x$. 2. $f(2)=\ln 4-\ln 4=0$ et $f(4)=\ln 16-\ln 16=0$.

$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{x\ln 2-2}{x}$. Comme $x>0$, on a $f'x)>0\Leftrightarrow x\ln 2-2>0\Leftrightarrow x>\frac{2}{\ln 2}$.

On en déduit les variations de f : sur $\left]0;\frac{2}{\ln 2}\right[$, f est décroissante et sur $\left]\frac{2}{\ln 2};+\infty\right[$,

elle est croissante.

On en déduit : $f(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in[2;4]$. 5. Recherche des entiers n tel que $2^n\geq n^2$.

$2^n\geq n^2\Leftrightarrow \ln 2^n\Leftrightarrow \ln 2^n-\ln n^2\geq 0\Leftrightarrow f(n)\geq 0\ n\in\mathbb{N}-\{3\}$.

S'exercer

Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $x\mapsto e^x-e^{-x}$; b) $x\mapsto\ln(e^x+1)$; c) $x\mapsto\frac{xe^x}{3^x}$; d) $x\mapsto\frac{x}{e^x}$.

Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

a) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; b) $x\mapsto\frac{(\ln x)^2}{x^{0,1}}$; c) $x\mapsto\frac{e^{(1+\ln x)^2}}{x}$.

S'ENTRAÎNER

FONCTIONS EXPONENTIELLES

1

Donner l'écriture simplifiée des nombres suivants :

a) $e^{\ln 3} - e^{3\ln 2}$; b) $e^{-1+2\ln 3}$;

c) $e^{2-\ln 3} e^{-1+\ln 3}$.

2

Donner l'écriture simplifiée des nombres suivants :

a) $e^{1-\ln 5} - e^{1+\ln 3}$; b) $e^{1+\ln 2}\ e^{1-\ln 2}$;

c) $(e^{-2\ln 3})^{\frac{1}{2}}$.

3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{2x-16} = e^{-3x^2}$; b) $e^{2x-\ln 3} = 3$

c) $e^x = \cos\dfrac{7\pi}{10}$; d) $e^{2-7x} = 12$.

4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1) $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 = 0$;

2) $e^{3x+5} - 2e^{2x+5} - 3e^{x+5} = 0$;

3) $\dfrac{e^{2x} + 2e^{ex} - 4}{3e^x - 2} = 1$;

4) $(2e^x + 3)(e^x - 3e^x + 2)(e^{-x} - 2e^x) = 0$;

5) $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19$;

6) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$;

7) $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$;

8) $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$.

5

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d' équations suivantes:

$\begin{cases} e^x e^y = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} e^x e^y = a^2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ $(a \in]0;+\infty[)$

6

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du paramètre m, l'équation, où x est l'inconnue.

$e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0$

Etudier le cas particulier où $m = -1$.

7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$.

8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$.

9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1) $2(\ln x)^4 - 5(\ln x)^2 - 3 = 0$;

2) $4(\ln x)^{-5} - 5(\ln x)^{-3} - (\ln x)^{-1} = 0$.

10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $e^{2\cos x} > \sqrt{3}$; b) $e^{2x-3} > \sin\dfrac{9\pi}{2}$;

c) $e^{2x^2-8+\ln 7} \leq 7$.

dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

; b) $e^{2x^2} \leq e^{7x-3}$;

$\leq \frac{1}{e}$.

dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$+ 7e^x + 2 < 0$;

$-4e^x - 4 > 0$;

$-11e^x + 6 \leq 0$.

$+e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

fonction f définie par $f(x) = \frac{8}{1-e^x}$.

miner l'ensemble de définition D_f de la

l'égalité

$= f(x)$, pour tout x de D_f.

ire que le point A(0,4) est un centre

la courbe représentative de f.

le signe de $f(x) = e^{3x-1} - e^{2x^2}$

une des fonction f définies ci-desous ,

sa fonction dérivée f'.

$\frac{1}{2x+1}$;

$e^x(e^x - 2)$;

$(2x+1)e^x$.

17

Soient f et g les fonctions de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$définies par :

$f(x) = 2x + \frac{1}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$ et

$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

a) Démontrer que

$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x-1} = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x-1}$.

b) Factoriser $g(x)$.

c) Déterminer le signe de la dérivée de f.

18

Démontrer que quel que soit le réel x, on a : $\ln(e^x+1) - \ln(1+e^{-x}) = x$.

19

Résoudre $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = -2\ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

20

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} xe^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} xe^{-\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x-1}}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-1}}$.

21

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Calculer les limites de la fonction f, en $-\infty$ puis en $+\infty$.

22

Soit la fonction : $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, puis étudier les limites de f à ses bornes.

2) Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f.

23

Soit la fonction $f : x \mapsto e^x - x$.

1) Etudier les variations de f et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$.

2) démontrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^x > \frac{x^n}{n!}$.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

24

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\, e^{-x}$.

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 2$.

Dresser le tableau des variations de f.

26

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I, puis étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in$ I et dresser le tableau des variations de f.

a) $f(x) = xe^x$ $\quad$ I $= \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $\quad$ I $= \mathbb{R}^*$.

27

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = (2x -$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique

a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2xe^x - 4e^x$.

2. a) Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = 2(x-1)e^x$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Dresser le tableau des variations de f.

3. Écrire une équation de la tangente T à la courbe C_f de f en son point d'abscisse

4. Tracer la tangente T et la courbe C_f

28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2$.

et C sa courbe représentative dans le plan d'un repère orthonormé $(O;i,j)$ d'unité 4 cm.

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Démontrer que la droite Δ d'équation est une asymptote à C

c) Étudier les positions relatives de la courbe C et de la droite D.

2. a) Vérifier que pour tout réel x, :

$f(x) = e^x(e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x})$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand

Calculer $f'(x)$.

Vérifier que $f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 1)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

puis déduire le signe de $f'(x)$.

le tableau des variations de f.

déterminer une équation de la tangente

courbe C en son point d'abscisse $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

dire des droites T et D ?

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les droites

courbe C.

fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$e^{2x} - e^x + 1$).

que $e^{2x} - e^x + 1$ est strictement

pour tout réel x.

les variations de la fonction f.

(C) la courbe représentative de f

repère orthonormé du plan.

les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

que $f(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ et

limite de $f(x) - 2x$ lorsque x tend

et interpréter le résultat obtenu.

la courbe (C). (On représentera

au point de (C) d'ordonnée nulle).

déterminer, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$

$e^{2x} - e^x + 1 = 3$:

graphiquement,

algébriquement.

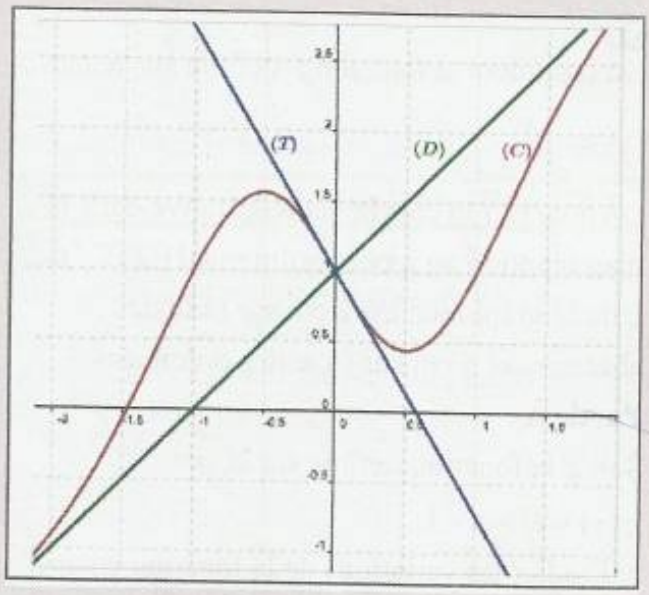
a la courbe représentative (C) dans

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'une

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

asymptote, (T) sa tangente au point

0.



Sachant que le point J(0;1) est le centre de symétrie (C), que l'asymptote (D) passe par les points K(−1 ; 0) et J et que la tangente (T) a pour équation : $y = (1-e)x + 1$.

1) Déterminer une équation de (D).

2) On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + \phi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$

a) Démontrer que $m = p = 1$.

b)En utilisant le point J, montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c)En déduire en explicitant $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction ϕ est impaire.

a. Déduire de la question b) que f', dérivée de f, est paire.

3) On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\phi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

a) En utilisant la parité de ϕ, démontrer que $b = 0$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a = -e$.

Démontrer que : $f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$.

31

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout réel x , $e^x-x>0$.

Partie B

1) a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau des variations.

3) a. Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). Tracer la droite (T), les asymptotes à (C) et la courbe (C) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE QUELCONQUE

32

Donner l'écriture simplifiées des nombres réels suivant : a) $\exp_{\frac{1}{4}}(2)$; b) $\exp_{\frac{1}{4}}(-2)$; c) $\exp_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$; d) $\exp_4\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; e) $\exp(2)$; f) $\exp(-1)$.

33

Déterminer x dans chaque cas.

a) $\exp_{\frac{2}{3}}(x)=\dfrac{8}{27}$;

b) $\exp_{\frac{3}{4}}(x)=\dfrac{10}{9}$;

c) $\exp(x)=1000$;

d) $\exp(x)=0{,}01$; e) $\exp(x)=1$;

f) $\exp_{\frac{1}{2}}(x)=4$;

g) $\exp_{\frac{1}{4}}(x)=4$; h) $\exp_4(x)=\dfrac{1}{2}$.

34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=$

a) Représenter f dans un repère orthonormé du plan.

b) Justifier pourquoi la base de la fonction exponentielle $y=a^x$ doit être différente de

35

Détermine la base de chacune des fonctions exponentielles définies ci-dessous. puis indique si la fonction est croissante ou décroissante.

a) $f(x)=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$; b) $f(x)=2^{2x}$;

c) $f(x)=4^{\frac{x}{2}}$; d) $f(x)=2^{-x}$.

36

Dans chacun des cas suivants, le point A appartient au graphique de la fonction Déterminer l'expression de cette fonction

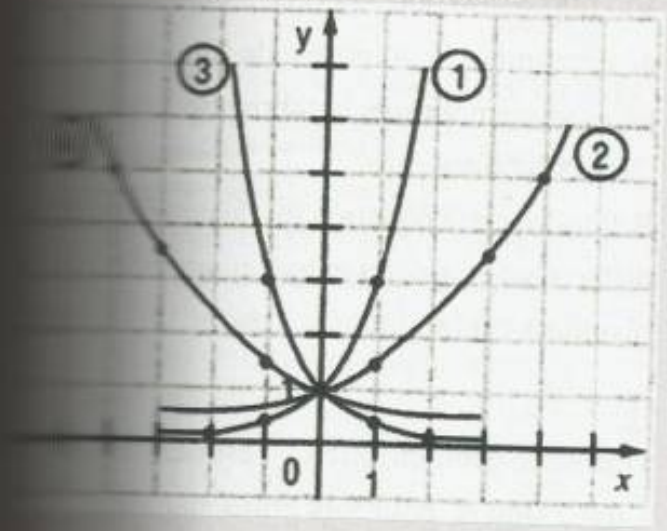
a) A(2 ; 16) ; b) $A\left(\dfrac{1}{2};3\right)$;

c) $A\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$; d) $A\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{125}{27}\right)$.

...e d'une fonction exponentielle passe ...ent A$\left(2\,;\,\frac{9}{16}\right)$. Quelle est l'ordonnée ...t appartenant à ce graphique si ...de B est -3?

...ts A(2, 9) et B(4, 16) sont-ils situés ...même courbe d'une fonction ...entielle? Justifier la réponse.

...miner une équation cartésienne de ...courbe d'une fonction exponentielle ...ée du graphique ci-dessous.



...miner que si si a est strictement positif, ...réel x
$= \exp_a(-x)$.

...ment peut-on déduire le graphique de ...fonction $\exp_{\frac{1}{a}}$ à partir du graphique de ...fonction $\exp_a$?

...du graphique de $y = 2^x$, tracer le ...ique de:
... b) $y = -2^x$; c) $y = -2^{-x}$

42

Soit $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

a) Completer le tableau de valeurs ci-dessous

x	1	2	10	20	100	1 000	10 000	100 000
y								

b) Vérifie que, au fur et à mesure que x croît, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se rapproche de plus en plus du nombre 2, 718 28 .

43

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $3^x = 32$; b) $3^x = 27$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$; d) $16^x = 2$.

44

Donner une expression simplifiée des nombres réels suivants :

a) $\log_2 1$; b) $2^{\log_2 5}$; c) $\log 10$; d) $\log_2 2^6$;

e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; f) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$; g) $10^{\log 2}$; h) $\log_{\frac{1}{3}} 1$;

i) $\ln e^5$.

45

Donner la forme simplifiée des nombres réels suivants :

a) $\ln e$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$; c) $\log 10^2$; d) $\ln 10^0$

e) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; f) $e^{\ln e}$; g) $-\log 0{,}1$; h) $2\ln_2 1$;

i) $e^{\ln 2}$.

46

Déterminer l'ensemble solution des équations suivantes : a) $5^x = 2$; c) $2^x = 2^{-1}$;
d) $5^{x-2} = 2$; f) $2^{x+1} = 2^{-1}$.

47

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2^x = 9$; b) $2^{x+1} = 7$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 3$; d) $2^{-3x} = 64$.

48

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2^{3x} = 3^{x+1}$; b) $3^{x-1} = 2^{x+1}$;

c) $3^{2x+1} = 9^{x-2}$; d) $\frac{2^x}{3^x} = 5$.

49

Résoudre dans $[0;+\infty[$, les inéquations suivantes.

a) $3(0,8)^x \leq 1,5$;

b) $0,004(2,2)^x \geq 0,8$;

c) $5,2 - 3,5(1,02)^x \geq 6$.

50

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5^{2x} - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$;

b) $4^x - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$.

51

Résoudre $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3 \times 2^x + 3^y = 24 \end{cases}$$

52

Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boites d'un médicament générique est de 200 000 unités.

Par suite, on envisage d'augmenter cette production de 3 % par semaine.

On note :

- U_1 la production, en unités, à la fin de la première semaine, ($U_1 = 200\,000$),
- U_2 la production, en unités, à la fin de la $2^{ème}$ semaine,
- U_n la production, en unités, à la fin de la n-ième semaine.

1. Calculer U_2 et U_3.

2. Quelle est la nature de la suite de terme général U_n? Préciser la raison de cette suite.

3. a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) En déduire la production au bout de la $12^{ième}$ semaine. (arrondir le résultat à l'unité)

4. L'équation

$300\,000 = 200\,000 \times (1,03)^{n-1}$ permet de déterminer le nombre n de semaines nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boîtes.

Résoudre cette équation en faisant figurer les différentes étapes du calcul et arrondir le résultat à l'unité.

53

Une suite géométrique(C_n) est définie par Co = 1 000 et, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1,0225C_n$.

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à 10^{-2}.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (Cm).

4. Déterminer le plus petit nombre entier n tel que : $C_n \geq 2C_0$.

54

Une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires augmente chaque année

d'un certain type de pièces de 6 %.
P$_1$ de la première année est de
pièces.
la nature de la suite des
annuelles en précisant le premier
la raison.
la production P_2 pour la deuxième
pour la troisième année, P_4 pour la
année ; les valeurs seront arrondies

par P_n la production de l'année n.
P_n en fonction de n.
la production de la douzième année
à l'unité).
en quelle année la production P_n,
100 000 pièces.

janvier 2012, la population d'un pays
30 millions d'habitants. On estime
augmentation de la population pour les
venir sera de 2 % par an.
la population au 1er Janvier 2013,
1er Janvier 2019. Les résultats seront
millions et arrondis à 10^{-3}.
l'augmentation en pourcentage,
population au 1er Janvier 2012 et la
au 1er Janvier 2019 ? Le résultat
à 0,1 %.
dans l'ensemble des nombres réels,
: $1{,}02^x \geq 1{,}2$.
l'année à partir de laquelle la
dépassera 36 millions d'habitants.

aux sont placés simultanément à
posés :
de 2 500000 F à 4,5 % l'an ; le
3 000000 F à 3,5 % l'an.
le nombre d'années de placement à
quel la valeur acquise par le premier
dépassera celle acquise par le second.

un centimètre cube de produit
un malade.

Toutes des demi-heures, son organisme élimine: 10 % de ce produit.

Quel volume de ce produit calmant a-t-il au bout de six heures ? Arrondir à 10^{-2} près

Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 millimètres cubes, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

58

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant t = 0, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, Nk le nombre d'atomes de carbone14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a)Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0. puis de N_k en fonction de N_{k-1}

b)En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k.

c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os donc la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

FONCTIONS PUISSANCES :

$f_\alpha : x \to x^\alpha$ où $x > 0$

59

Soit x un réel strictement positif. Mettre sous la forme x^α les nombres réels suivants :

$\sqrt{\sqrt{x}}$; $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$; $\sqrt[5]{x^3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^{0,6}}}$; $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x}$.

60

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 2$;

b) $x^{\pi} - 42 \cdot x^{-\pi} = 1$.

61

Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $x \mapsto (2x+1)e^{x}$; b) $x \mapsto xe^{-x}$;

c) $x \mapsto x^2 e^{-x} - x$;

d) $x \mapsto \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

62

Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en α.

a) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$, $\alpha = 0$;

b) $x \mapsto \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$, $\alpha = 0$;

c) $x \mapsto \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$, $\alpha = e$;

d) $x \mapsto \dfrac{e^{3x}-1}{x}$, $\alpha = 0$;

e) $x \mapsto \dfrac{2^{x}-32}{x-5}$, $\alpha = 5$;

b) $x \mapsto \dfrac{2^{2x}-1}{2x-1}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

63

Une organisation humanitaire dispose aujourd'hui d'un capital C_0 de 3 000000F. Déterminer à quel taux elle doit le placer aujourd'hui pour que la valeur acquise par dans cinq ans soit égale à 3600000 F.

a) On a rempli un aquarium avec 90 litres d'eau claire et 10 litres de produit colorant capable de se mélanger instantanément à l'eau claire de façon homogène. Chaque jour, un système de renouvellement fait écouler 10 litres du mélange remplacés par 10 litres d'eau claire sans adjonction de produit colorant. Soit v_0=10 le volume initial de produit colorant (exprimé en litres).

Calculer le volume v_1 de produit colorant après 1 renouvellement.

Calculer le volume v_2 de produit colorant après 2 renouvellements.

a) Calculer le volume v_n de produit colorant après n renouvellements.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c)Pour un autre aquarium muni d'un autre système de renouvellement, on a v_n = 2[illegible]. Après combien de renouvellements le volume de produit colorant sera-t-il pour la première fois inférieur à 1 litre ?

Chapitre 10

SUITES NUMÉRIQUES

LEÇON SUITES NUMÉRIQUES

1. CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES
2. CONVERGENCE DE LA SUITE (a^n) OÙ a EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ
3. SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.
4. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$ où f EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

S'ENTRAÎNER

LEÇON SUITES NUMÉRIQUES

- Calculer la limite d'une suite ;
- Montrer qu'une suite est convergente en utilisant les calculs des limites, et les théorèmes de convergence des suites ;
- Montrer qu'une suite u définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ est convergente en utilisant les inégalités des accroissements finis.

1.CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES

Prendre un bon départ

a) Chacune des suites suivantes est définie par son terme général :

$u_n=\dfrac{n^2+n-1}{4n+3}$; $v_n=\dfrac{\ln(n+2)}{n}$; $w_n=e^{-n^2+3}$; $T_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

$x_n=n(e^{\frac{1}{n}}-1)$; $y_n=n\ln(1+\dfrac{1}{n})$.Calculer la limite de chacune de ces suites quand n tend vers

Citer celles dont les limites sont des nombres réels.

b) u est une suite numérique et l un réel .

Montrer que si $|u_n-l|$ converge vers 0, alors u converge vers l.

Soit une suite v telle que $|u_n-l|\leq v_n$ à partir d'un certain rang .

Montrer que si v converge vers 0, alors u converge vers l.

Retenir

- Une suite de terme général u_n est convergente lorsque la limite de u_n quand n tend vers est un nombre réel. Si le réel l est cette limite, alors on dit que la suite u converge vers
- Si une suite admet une limite qui n'est pas un réel ou si elle n'admet pas de limite, alors on dit que cette suite diverge.
- Si α est la limite de la suite u , alors on note : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$ ou $u\to\alpha$ quand $n\to+\infty$.

Exemple

Soit $u_n=e^{-n+1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-n+1)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=0$.

La suite u est convergente et converge vers 0.

La suite v telle que $v_n = \ln(n^2 + n - 1)$ a pour limite $+\infty$.

La suite v est donc divergente.

La suite w telle que $w_n = a^n$ pour $a \leq -1$ n'admet pas de limite en $+\infty$. Elle prend en effet des valeurs alternées quand n change de parité.

w est ainsi une suite divergente.

si $0 \leq a \leq 1$, alors w converge et converge vers 0.

Remarque

Les propriétés sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites. En effet,
- la limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.
- Soient u et v deux suites convergentes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors,
- les suites $u + v$ et uv sont convergentes et convergent respectivement vers $\ell + \ell'$ et $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, alors la suite u/v converge vers ℓ/ℓ' ;
- si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné, alors $\ell \leq \ell'$;
- si w est une suite telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ et si $\ell = \ell'$, alors w est convergente et converge vers ℓ.
- Toute suite convergente est bornée.

u est une suite numérique et l un réel .

si $|u_n - l|$ converge vers 0, alors u converge vers l.

Soit une suite v telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang .

si v converge vers 0, alors u converge vers l.

En conséquence, une suite qui n'est ni majorée, ni minorée est divergente.

S'exercer

Etudier la convergence de chacune des suites u définie par :

$u_n = \dfrac{e^n + n}{e^n - n^2}$; $u_n = \dfrac{n + \ln 2n}{\ln 3^n - n^2}$; $u_n = n\left(1 + \cos n\,\dfrac{\pi}{12}\right)$; $u_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n} - n\sqrt{2}}$;

$u_n = \sqrt{2n^2 + 5n + 1} - n\sqrt{2}$; $u_n = \dfrac{2n + 3n}{2n - 3n}$; $u_n = \dfrac{n^5 + e^n}{n^5 - e^n}$.

La suite u est définie pour tout entier naturel non nul n par :

$u_n = \dfrac{n}{n^2} + \dfrac{n}{n^2+1} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+2n} + \dfrac{n}{n^2+2n+1}$.

Calculer les trois premiers termes de la suite u.

Combien y a-t-il de termes dans l'expression de u_n ?

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2(n+1)}{n}$.

En déduire que la suite u converge , puis calculer sa limite.

2. CONVERGENCE DE LA SUITE (a^n) OÙ a EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ

Prendre un bon départ

1) Soit t un nombre réel donné, u la suite définie par $u_n = t^n$.

Justifier que si $t > 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_n = e^{n\ln t}$.

Montrer que si $0 < t < 1$, alors u_n a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Justifier que si $t > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit a un nombre réel de l'intervalle $]-1;0]$ et n un entier naturel quelconque.

Montrer que $|a|$ appartient à l'intervalle $[0;1[$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(|a^n|)=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n)=0$.

Calculer alors les limites des suites x, y, z et t suivantes :

$x_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$; $y_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$; $z_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$; $t_n = \left(\frac{e-1}{e}\right)^{n+3} + 7$.

Retenir

- Soit a un nombre réel. La suite (a^n) converge dans le seul cas où $-1 < a \leq 1$.

  si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 0$;

  si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 1$;

  si $a > 1$, alors la limite de (a^n) est $+\infty$.

  si $a \leq -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

Exemple

a) Soit la suite u définie par $u_n = \frac{e^n}{3^n} + 1$. Déterminons la limite éventuelle de la suite u.

Soit n un entier naturel, $u_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n + 1$.

On sait que $e < 3$; et alors $0 < \frac{e}{3} < 1$. Il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n + 1 = 1$.

La suite u est convergente et converge vers 1.

b) v est la suite définie par $v_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$. Calculons la limite de la suite v.

Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]}$.

Comme $0 \leq \dfrac{2}{3} < 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0 et ainsi (v_n) converge vers $\dfrac{1}{-1} = -1$.

On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ 4u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

(i) Calculons u_1 et u_2.

De la relation de définition de la suite u, on a $4u_1 = u_0 + 5$ et $4u_2 = u_1 + 5$.

Donc $u_1 = 2$ et $u_2 = \dfrac{7}{4}$.

(ii) Soit a un réel et v la suite définie par $v_n = u_n + a$. Déterminons la valeur du réel a pour que v soit une suite géométrique.

Soit n un entier naturel quelconque.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{1}{4}u_n + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}(v_n - a) + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}v_n - \frac{a}{4} + \frac{5}{4} + a$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3a+5}{4}.$$

v est une suits géométrique si et seulement si $\dfrac{3a+5}{4} = 0$; soit $a = -\dfrac{5}{3}$.

Dans ce cas, v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

(iii) Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n.

$v_0 = u_0 - \dfrac{5}{3} = 3 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$.

$v_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-0} \times v_0 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \dfrac{4}{3}$ et $u_n = v_n - a = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3}$.

Puisque $\dfrac{1}{4}$ est dans l'intervalle $]-1;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{5}{3}$. Les suites u et v sont ainsi convergentes.

(iv) On pose $V = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $U = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{16}{9} \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right).$$

Par ailleurs, $U=\left(v_0-\frac{5}{3}\right)+\left(v_1-\frac{5}{3}\right)+...+\left(v_n-\frac{5}{3}\right)$

$=(v_0+v_1+...+v_n)-\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+...+\frac{5}{3}\right)$

$=V-\frac{5}{3}\times(n+1)=-\frac{7}{3}\times\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{1}{4}-1\right)-\frac{5}{3}\times(n+1)$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}V=\frac{16}{9}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}U=-\infty$.

Remarque

Une suite géométrique est convergente si et seulement si sa raison appartient à l'intervalle $]-1;1]$.

S'exercer

1.c Soient les suites v et w définies par : $\begin{cases} v_0=-\frac{3}{2} \\ v_n=\frac{2}{3}v_{n-1}-1 \end{cases}$ $w_n=2v_n+6$.

a) Démontrer que la suite w est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Donner les expressions de w_n et de v_n en fonction de n.

c) Calculer les limites des suites v et w.

d) Calculer $S_n=w_0+w_1+w_2+...+w_n=\sum_{k=0}^{n}w_k$ et calculer la limite de S_n quand n tend vers

1.d On considère la suite u définie par $u_0=2$ et pour tout entier non nul n, $u_n=2u_{n-1}-\frac{1}{3}$

Déterminer le réel a de façon que la suite v définie par $v_n=u_n+a$ soit une suite géométrique.

Exprimer v_n en fonction de n et calculer : $V_n=v_1+v_2+...+v_n$ et $U_n=u_1+u_2+...+u_n$.

Calculer les limites des suites u, v, U et V.

3. SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.

Prendre un bon départ

Soit la suite u définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$.

a) Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 4.

Montrer que la suite u est minorée par 0.

On définit la suite v par $v_n = 4 - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} < \frac{1}{4} v_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n \times v_0$.

En déduire les limites des suites v et u.

Retenir

On admettra la propriété suivante :
Toute suite croissante et majorée ou décroissante et minorée est convergente.

Exemple

La suite u est définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

Montrons par récurrence que u est strictement croissante et majorée par 3.

Montrons que u est strictement croissante. Montrons que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

$u_1 = \sqrt{6+u_0} = \sqrt{6}$; $u_0 = 0$. *Donc* $u_0 < u_1$.

Soit k un entier naturel quelconque tel que $u_{k-1} < u_k$. ($k \geq 1$)

Montrons que $u_k < u_{k+1}$.

Puisque $u_{k-1} < u_k$, *on a* $6 + u_{k-1} < 6 + u_k$ et donc $\sqrt{6+u_{k-1}} < \sqrt{6+u_k}$. Soit $u_k < u_{k+1}$.

D'après le principe de la preuve par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

La suite u est donc croissante.

Montrons par récurrence que u est majorée par 3. Montrons que pour tout entier naturel n, $u_n < 3$.

$u_0 = 0$ *et* $u_0 < 3$.

Soit un entier naturel k tel que $u_k < 3$. Montrons que $u_{k+1} < 3$.

Si $u_k < 3$, on a $6 + u_k < 6 + 3$; $6 + u_k < 9$.

Donc $\sqrt{6+u_k} < \sqrt{9} = 3$. Soit $u_{k+1} < 3$.

La suite u est donc majorée par 3.

La suite u étant croissante et majorée , on peut conclure qu'elle est convergente.

Montrons que pour tout entier naturel n, $3 - u_{n+1} < \frac{3 - u_n}{3}$.

$$3-u_{n+1}=3-\sqrt{6+u_n}=\frac{\left(3-\sqrt{6+u_n}\right)\left(3+\sqrt{6+u_n}\right)}{3+\sqrt{6+u_n}}$$

$$=\frac{9-(6+u_n)}{3+\sqrt{6+u_n}}=\frac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}}=\frac{1}{3+\sqrt{6+u_n}}(3-u_n)<\frac{3-u_n}{3}.$$

Car $3+\sqrt{6+u_n}>3$, d'où $3-u_{n+1}\leq\frac{3-u_n}{3}$.

c) Calculons la limite de la suite u.

Soit n un entier naturel. $3-u_n\leq\frac{3-u_{n-1}}{3}\leq\frac{3-u_{n-2}}{3^2}\leq\frac{3-u_{n-3}}{3^3}\leq\ldots\leq\frac{3-u_0}{3^n}$.

Finalement, $3-u_n\leq\frac{3}{3^n}$.

Puisque u est majorée par 3, $0\leq 3-u_n\leq 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(o)=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=3$

Remarque

- Si une suite est croissante et non majorée , alors sa limite est $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et est non minorée , alors sa limite est $-\infty$.

S'exercer

1.e La suite u est définie par $u_0=-2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.

(i).Calculer les cinq premiers termes de la suite u.

(ii).Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 6

(iii).Conclure.

(iv).Montrer que la suite v définie par $v_n=u_n-6$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(v).Exprimer v_n et u_n en fonction de n. Calculer les limites de v, puis de u.

1.f Soit f définie sur $]-\infty;6[$ par $f(x)=\frac{2x-16}{x-6}$.

(ii). Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;6[$.

(iii). Donner l'image de l'intervalle $]-\infty;6[$ par f .

On définit la suite u par $u_0=2$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}=\frac{2u_n-16}{u_n-6}$

Calculer u_1 et u_2.

Montrer que la suite u est strictement croissante

Montrer que la suite u est majorée par 4. Que peut-on en déduire pour la suite u ?

Soit la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$.

Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exprimer pour tout entier naturel n, v_n, u_n en fonction de n. Calculer alors la limite de la suite u.

4. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$ où f EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

Prendre un bon départ

La suite u est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Soit la fonction f définie en x par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

En remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$, représenter les cinq premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé du plan.

Peut-on conjecturer graphiquement sur la convergence de la suite u ? Donner une valeur approchée de cette limite si elle existe , par rapport à l'abscisse d'un des points communs à la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.

Quelle est graphiquement la limite de la suite u?

Retenir

Soit la suite définie par la donnée de u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Si la suite u est convergente et converge vers a, et si f est continue en a , alors a est une solution de l'équation $f(x)=x$.

Exemple

En démontrant que la suite u définie par $u_0 = 2$ et $3u_{n+1} = u_n + 6$ est convergente, calculons la limite de la suite u. $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

La fonction pour laquelle u_{n+1} est l'image de u_n, est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$.

La limite de u est solution de l'équation $f(x)=x$. Cette équation a pour solution 3.
La suite u converge vers 3.

Exercice résolu

Enoncé :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$

1) Étudier les variations et dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit I l'intervalle $\left[1;\frac{5}{4}\right]$.

a) Montrer que f(I) $\subset$ I.

b) Montrer que pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leq \frac{3}{2e}$.

c) En étudiant les variations de la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$, montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution a dans I.

d) Montrer que si x et y deux réels queconques de I,

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{3}{2e}|x-y|.$$

c) En déduire que pour tout réel x de I, $|f(x)-a| \leq \frac{3}{2e}|x-a|$.

3) On définit la suite u par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $u_n \in I$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

(i) $|u_{n+1}-a| \leq \frac{3}{2e}|u_n-a|$;

(ii) $|u_n-a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}$.

c) En déduire que la suite u converge vers a.

d) Déterminer alors le plus petit entier naturel p tel que u_p soit la limite de u à 10^{-4} près.

Solution.

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x)=2e^{-x}-e^{-x}(2x+1)=e^{-x}(2-(2x+1))=(1-2x)e^{-x}$.

Puisque e^{-x} est toujours positif, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2xe^{-x}+e^{-x})=0+0=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x}=-\infty$

2) I=$\left[1;\frac{5}{4}\right]$.

Puisque l'intervalle I est contenu dans $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, f est décroissante sur I et ainsi,

$=\left[f\left(\frac{5}{4}\right);f(1)\right]$. Or $f(1)=3e^{-1}=\frac{3}{e}$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{4}}=\frac{7}{2}\,e^{-1,25}$.

et $f\left(\frac{5}{4}\right)$ sont tous dans l'intervalle I ; donc, $f(I)\subset I$.

Montrons que $|f'(x)| \leq \frac{3}{2e}$ sur I.

$\leq x\leq \frac{5}{4}$, on a : $-\frac{5}{2}\leq -2x\leq -2$; $-\frac{3}{2}\leq 1-2x\leq -1$;

$-\frac{3}{2}e^{-x}\leq (1-2x)e^{-x}\leq -e^{-x}$

$-\frac{5}{4}\leq -x\leq -1\Rightarrow -\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{4}}\geq -\frac{3}{2}e^{-x}\geq -\frac{3}{2}e^{-1}$ et $-e^{-\frac{5}{4}}\geq -e^{-x}\geq -e^{-1}$.

Finalement $-\frac{3}{2}e^{-1}\leq f'(x)\leq -e^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow |f'(x)| \leq \max\left(\frac{3}{2}\,e^{-1};\,e^{-\frac{5}{4}}\right)=\frac{3}{2}e^{-1}=\frac{3}{2e}$;

donc $|f'(x)| \leq \frac{3}{2e}$ avec $3<2e$ et $0<\frac{3}{2e}<1$.

Considérons la fonction g définie en x par $g(x)=f(x)-x$.

$=f'(x)-1$. Puisque $f'(x)\leq 0$ sur I (car f décroissante), $g'(x)\leq 0$.

est donc décroissante sur I. g est une bijection de I sur $g(I)$.

$=f(1)-1=\frac{3}{e}-1=\frac{3-e}{e}$; $g\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)-\frac{5}{4}=\frac{7}{2}e^{-1,25}-1,25\approx -0,247$.

≥ 0 ; $g\left(\frac{5}{4}\right)\leq 0$. L'intervalle $g(I)$ contient 0 et donc l'équation $g(x)=0$

met une unique solution dans l'intervalle I.

est continue et dérivable sur l'intervalle I et à dérivée bornée par $\frac{3}{2e}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple $(x;y)$ de réels

$|f(x)-f(y)| \leq \frac{3}{2e}|x-y|$. (1)

En remplaçant dans l'inégalité (1) y par a, on a $|f(x)-a|\leq \frac{3}{2e}|x-a|$.(2)

On définit la suite u par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

Montrons par récurrence que $u_n\in I$.

- $u_0\in I$;
- Soit n un entier naturel tel que $u_n\in$ I. Montrons que $u_{n+1}\in$ I .

suit que l'image par f d'un élément de I appartient à I.

Par hypothèse $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. D'où $u_{n+1} \in I$.

D'après le principe de démonstration par récurrence, $u_n \in$ I, pour tout entier naturel n.

f) En utilisant l'inégalité (2) et en remplaçant x par u_n, on a $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e}|u_n - a|$. (3)

g) Montrons par récurrence que $|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$, pour tout entier naturel n.

- $|u_0 - a| = |1 - a| \leq \left|\frac{5}{4} - 1\right|$; $|u_0 - a| \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^0$.
- Soit n un entier naturel tel que $|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$.

Montrons que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}$. (4)

D'après l'inégalité (3), $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e}|u_n - a|$ et d'après l'hypothèse de récurrence,

$|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$. Il vient que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} \times \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$;

soit $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}$. D'après le principe de démonstration par récurrence,

$|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$, pour tout entier naturel n. L'inégalité (4) est équivalente aux inégalités

$-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n \leq u_n - a \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$ et donc $a - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n \leq u_n \leq a + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$. De plus, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2e}\right)$

car $\frac{3}{2e} \in]0;1[$.

De $\lim_{n\to+\infty}\left(a - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(a + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n\right)$, la suite (u_n) a pour limite a.

Cette suite est donc convergente et converge vers a.

Déterminons alors le plus petit entier naturel p tel que u_p est la limite de u à 10^{-4} près.

Dire que u_p est la limite de u à 10^{-4} près, c'est aussi dire que a est une valeur approchée de

u_p à 10^{-4} près. Ainsi, $|u_p - a| \leq 10^{-4}$. Or $|u_p - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^p$.

Il suffit que $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^p \leq 10^{-4}$; soit $4 \times \left(\frac{2e}{3}\right)^p \geq 10^4$.

$\ln\left(4 \times \left(\frac{2e}{3}\right)^p\right) \geq \ln(10^4) \Leftrightarrow \ln(4) + p\ln\left(\frac{2e}{3}\right) \geq 4\ln(10)$;

$p(\ln(2e)-\ln(3)) \geq 4\ln(10)-\ln(4)$; $p\left(1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \geq 4\ln(10)-\ln(4)$;

$\frac{4\ln 10-\ln 4}{1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$; soit $\geq 5{,}35$.

Le plus petit entier naturel plus grand que 5,35 est 6.

Tous les u_p où $p \geq 6$ sont les valeurs approchées de la limite de la suite u

avec une incertitude de 0,0001.

On peut calculer u_6 de proche en proche, plus rapidement par une programmation

faite par certains logiciels à l'instar de «sinéquanon».

S'exercer

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.

Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

Etudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x)-x$ pour $x \in [0;+\infty[$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution α dans $[0,+\infty[$ et que $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$.

Soit $J=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$.

Montrer que $f(J) \subset J$.

Montrer que pour tout réel x de J, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout réel x de J, $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

On définit la suite u par $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Démontrer par u_n est un élément de J.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.

Montrer que la suite u est convergente et converge vers α.

Déterminer un entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Calculer cette valeur approchée.

1.h On considère la suite u définie par $u_0 = 9$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1}$.

1. Etudier graphiquement la monotonie et la convergence de la suite u (On représentera la courbe de la fonction $f : x \to \frac{8x-6}{x+1}$.

2. Démontrer que la suite u est décroissante et minorée par 6.

3. En utilisant les propriétés de la fonction f, montrer que $|u_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7} |u_n - 6|$,

$|u_n - 6| \leq 3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$, puis montrer que la suite la suite u est convergente et converge vers 6.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite v est géométrique.

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Démontrer alors que la suite u converge vers 6.

S'ENTRAÎNER

...S ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

...erme d'une progression ...est –11, sa raison est 13. Calculer ...es compris entre 1983 et 2050.

...rithmétique de 80 termes a pour ...360 et pour dernier terme -402. ...premier terme et la raison de cette ...

... deux réels, (u_n) une suite réelle ...ait :
... = p(ap+b).
...que la suite u est arithmétique.
...er le premier terme et la raison de ...

...ne suite de cinq termes sachant ...mme est 285, leur produit ... et que leur raison r est comprise ... et 20.

...la suite géométrique u ..., telle que $u_1 \times u_3 = 144$ et ... = 63, et donc tous les termes sont ...

...géométrique v est telle que :

... et $v_2 = \frac{20}{9}$.

..., la raison de v et
$... + ... + v_n$.

7

Les réels a,b,c vérifient les conditions suivantes :
a,b,c sont dans cet ordre , trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.
b, c, a sont dans cet ordre , trois termes consécutifs d'une progression géométrique.
$a + b + c = 12$.
Calculer a,b,c.

8

Une personne a placé une somme S auprès d'une banque. À la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal au $\frac{1}{25}$ième de la somme placée en début d'année.
Les intérêts ne sont pas retirés et produisent eux-aussi les autres intérêts.
a. Quelle est la somme due à ce placement à la fin de la n-ième année ?
b. Pendant combien de temps au moins devra durer ce placement pour que la somme due soit supérieure à 2S ?

9

u est une progression géométrique .
a. Montrer que $u_1 \times u_5 = (u_3)^2$.
b. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sachant que :

$$\begin{cases} u_3 > 0 \\ u_1 \times u_5 = 81 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 39 \end{cases}$$

10

Soient x, y, z trois réels distincts deux à deux tels que $\begin{cases} x \neq 0; \\ (x, y, z) \text{ est géométrique.} \\ (3x, 2y, z) \text{ est arithmétique.} \end{cases}$
Calculer la raison de la suite géométrique.

11

Soit (u_n) la suite definie par $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4u_n$.

a. Montrer que la suite v, définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique .

b. Calculer v_n en fonction de n. (On évaluera d'abord $s_n = v_{n-1} + v_{n-2} + ... + v_0$ en fonction de n, puis en fonction de $u_n - u_0$ et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

12

Un litre de super coûtait 375 francs cfa au premier janvier 1987.

a. En supposant une augmentation régulière de 10% par an, calculer le prix du litre de super au premier janvier 1990.

b. En quelle année le prix du litre de super sera-t-il au moins le double de ce qu'il était au premier janvier 1987 ?

13

Soient les suites définies par :

$a_0 = 2$; $b_0 = 3$; et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. Soit u définie par $u_n = a_n + b_n$.

a. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b. Calculer u_n .

2. Soit v la suite définie par $v_n = a_n - b_n$.

a. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Exprimer a_n et b_n en fonction de n, puis calculer les limites si elles existent des suites (a_n) et (b_n).

14

1.n étant un entier naturel, résoudre l'équation $\ln(7^n x) = 2n$.

2. On considère la suite v définie par $\ln(7^n v_n) = 2n$.

a. Calculer v_0.

b. Montrer que la suite v est géométrique et déterminer sa raison.Calculer la limite de la suite v.

c. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier $n > n_0$, $v_n > 100$.

15

La suite u est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Soit a un réel et v la suite définie par $v_n = u_n - a$.

a. Déterminer la valeur de a pour que la suite soit géométrique, puis préciser sa raison.

On pose $w_n = u_n - 6$.

b. Montrer que la suite w est géométrique puis précisser son premier termer et sa raison.

c. Exprimer w_n et u_n en fonction de n.

d. Calculer les limites des suites w, u ..S et T où $S = w_0 + w_1 + ... + w_n$ et $T = u_0 + u_1 + ... + u_n$. (On exprimera S et T en fonction de n).

SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

16

Soit la fonction f définie par :

$f(x) = 4x + 1 - xe^x$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

2. Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par $h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$.

...rer que β est l'unique solution de ... $h(x)=x$.

...ier les variations de la fonction h ... $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

...rer que l'image de $\left[\frac{3}{2};2\right]$ est une partie ... $\left[\frac{3}{2};2\right]$ et que pour tout réel $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$, ... $\leq\frac{1}{10}$.

...duire que pour tout réel x de $\left[\frac{3}{2};2\right]$, ... $-\beta\mid\leq\frac{1}{10}|x-\beta|$.

... suite définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et pour tout ... n, $u_{n+1}=h(u_n)$.

...rer que pour tout entier naturel n,

... $\left[\frac{3}{2};2\right]$;

... $-\beta\mid\leq\frac{1}{10}|u_n-\beta|$;

... $-\beta\mid\leq\frac{1}{2\times10^n}$.

...rer que la suite u converge vers β.

...er le plus petit entier naturel n_0 ... pour tout entier naturel $n\geq n_0$, u_n est ... approchée de β à 10^{-6} près.

...fonction f définie par ... $\sqrt{x+\frac{3}{4}}$ et la suite u définie par $u_0=0$ ... $\sqrt{u_n+\frac{3}{4}}$; pour tout entier naturel n ...isant la courbe représentative de la ... f, conjecturer que u est croissante et converge vers un réel de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$.

3. Montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$,

$\frac{1}{3}\leq f'(x)\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\left|x-\frac{3}{2}\right|$.

5. Montrer que pour tout entier naturel n,

- $u_n\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$;
- $\left|u_{n+1}-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\left|u_n-\frac{3}{2}\right|$;
- $\left|u_n-\frac{3}{2}\right|\leq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{3}{2}$.

6. Montrer que la suite u converge vers $\frac{3}{2}$.

18

On se propose d'étudier la suite u définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.

1. Soit f l'application définie dans $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a) Etudier les variations de f, puis donner l'image de $[0;1]$ par la fonction f.

b) Démontrer que : pour tout réel de $[0;1]$, $\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{2}{3}$.

c) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[0;1]$.

2. Démontrer que pour tout en entier naturel n,

- $u_n\in[0;1]$;

• $|u_{n+1}-a| \leq \frac{2}{3}|u_n-a|$;

• $|u_n-a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• En déduire que la suite est convergente, puis calculer sa limite.

19

Soit f est la fonction définie par :
$f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$.

1.a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Construire la courbe (C) de f, la droite d'équation $y=x$, et la tangente en (C) au point d'abscisse 0.

2.a. Montrer que la fonction $g: x \to f(x)-x$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

b. En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution positive notée b telle que $\frac{1}{2}<b<1$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

b. Montrer que sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1}=f(u_n) \text{ et } u_0=\frac{1}{2}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n,

• $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$;

• $|u_{n+1}-b|\leq\frac{1}{2}|u_n-b|$;

• $|u_n-b|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b. Montrer que la suite u converge vers b.

c. Déterminer le plus petit entier k, tel que u_k soit une valeur approchée de b à 10^{-} près.

AUTRES SUITES.

20

Pour chaque suite (u_n), étudier la convergence ou la divergence.

1) $u_n=\sqrt{\frac{2n+3}{7n+5}}$; 2) $u_n=\exp\frac{2n}{7n^2+n}$;

3) $u_n=\frac{n^2-n}{n-2}$; 4) $u_n=\exp\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

5) $u_n=\ln\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$; 6) $u_n=\frac{2n-\cdots}{4n+\cdots}$

7) $u_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}$; 8) $u_n=\ln\left|n\sin\frac{1}{n}\right.$

21

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a l'encadrement :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge.

22

La suite u est définie par :

$$u_n=\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n}+\frac{n}{n^2+2n}$$

a. Donner le nombre de termes de u_n.

b. Démontrer que pour tout entier naturel

$$\frac{2n}{n+1}\leq u_n\leq\frac{2(n+1)}{n}.$$

c. Montrer que la suite$(u_n)_n\in\mathbb{N}^*$) est convergente et calculer sa limite.

la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}$

$\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$ si $n>0$.

une valeur approchée à 10^{-4} près

u_2 et u_3.

que $u_{n+1}-u_n$ est égal à

$\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+4}}\right)$ et

que la suite (u_n) est strictement

que pour tout entier naturel n non

$\frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

que la suite (u_n) est majorée par 1.

la convergence de la suite (u_n).

-on dire de sa limite ?

la limite de chacune des suites

comme suit :

$\frac{\sin n}{n^2}$; $b_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n^2}$; $c_n=n\sqrt{n}$;

$\left(\frac{1}{n}\right)^n$; $e_n=\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$; $d_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

$\frac{3^n-3^{-n}}{3^n+3^{-n}}$.

la suite u par :

$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ et la fonction f par :

$f(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$.

1.a. Montrer que $f'(x)=-e^{-x}\times\frac{x^n}{n!}$ sur [0;1].

b. En déduire que, pour tout réel x de [0;1],

$|f'(x)|\le\frac{1}{n!}$.

c. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur [0;1], montrer que $\left|\frac{1}{e}u_n-1\right|\le\frac{1}{n!}$.

d. En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

2. La suite v est définie par : $v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}$

a. Montrer que la suite v converge vers e.

b. Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n<e<v_n$.

26

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 tel que $0<u_0<1$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

a.Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0<u_n<1$.

b.(i) Étudier le signe du polynôme

$x\to -2x^2+x+1$ *pour* $x\in[0;1]$.

(ii). Exprimer $u_{n+1}^2-u_n^2$ en fonction de u_n .

(iii). En déduire la monotonie de la suite u.

(iv). En déduire que la suite u est convergente, puis calculer sa limite.

27

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[n;n+1]$ où n est un entier naturel non nul,

$\frac{1}{n+1}\le f'(x)\le\frac{1}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

On définit la suite u par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

c. Montrer par récurrence que

$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$.

d. En déduire les limites de u_n et de $\frac{u_n}{\ln(n)}$.

28

On donne deux suites u et v telles que $u_0 = 5$ et $v_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$.

a. Démontrer que la suite u est strictement croissante

b. Démontrer que la suite v est strictement décroissante.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n < u_n$.

d. En déduire que les suites u et v sont convergentes.

e. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

f. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} (u_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} (v_n)$.

Vocabulaire : Lorsque deux suites vérifient $a), b), c)$ et $e)$, alors elles sont dites adjacentes.

29

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pur tout entier naturel n non nul, par $u_{n+1} = \frac{u_n}{n}$.

1) On suppose que l'on a $u_1 > 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a on a : $0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) On suppose que l'on a $u_1 < 0$.

S'inspirer de la question 1) pour étudier la convergence de la suite (u_n).

30

Soit la suite (u_n) définie sur N par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

1) Calculer les six premiers termes de la suite

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N} - \{0;1\}$.

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente

4) Montrer que pour tout entier naturel n distinct de 1, on a $0 < u_n \leq \frac{2n}{(n-1)^2}$.

5) En déduire la limite de la suite (u_n).

31

On considère les deux suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 12 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}.$$

1) On pose $w_n = v_n - u_n$.

a)Montrer que (w_n) est une suite géométrique

b) Exprimer pour tout entier naturel n non nul w_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (w_n).

2) Montrer que la suite u est croissante et majorée par v_1 et la suite v est décroissante et minorée par u_1.

3) Que peut-on déduire des questions précédentes des suites u et v?

4) On pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

que la suite (t_n) est stationnaire.
déduire la limite de u et de v.

considère la suite (u_n) de nombres réels
définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
et pour tout entier naturel n non nul,
$e = u_n$.
considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$\frac{-\ln u_n}{2}$.
tout entier naturel n non nul, exprimer
en fonction de $\ln u_n$ puis en fonction de v_n.
déduire que (v_n) est une suite
nique dont on déterminera le premier
et la raison. Exprimer v_n , puis u_n en
de n.
miner la limite de chacune des suites
(u_n).

considère la suite (u_n) définie par son
terme $u_0 > 2$ et par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
trer que la suite (u_n) est minorée

trer que pour tout entier naturel,
$-2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{2+u_n}+2}$.
déduire que : $u_n - 2 \le \frac{u_n - 2}{4}$.
trer que pour tout entier naturel n,
$-2 \le \frac{u_0 - 2}{4^n}$.
déduire que la suite (u_n) converge vers 2.

considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ *et*
$\frac{u_n + 4}{u_n + 3}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est positif.
2) Montrer que si la suite (u_n) admet une limite l, alors on a $l = 2$.
3) On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.
Montrer que (v_n) une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. Est-elle convergente ?
4) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que (u_n) est convergente.

35

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n{}^2 + \frac{3}{16}$.

1) Tracer la courbe C d'équation $y = x^2 + \frac{3}{16}$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
Construire géométriquement les cinq premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on énoncer de cette construction ?
2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{4}$.
3) Montrer que pour tout entier naturel n, non nul $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe. Déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Chapitre 11

CALCUL INTÉGRAL

LEÇON 1 CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES

1.1. PRÉSENTATION-NOTATION.

1.2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES.

1.2.1 Linéarité.

1.2.2 Relation de Chasles.

1.2.3 Autres propriétés des intégrales.

1.2.4 Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

1.3. CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE.

1.4. INTÉGRALES DES FONCTIONS AYANT UNE PARITÉ OU DE FONCTIONS PÉRIONDIQUES.

1.5. INTÉGRATION PAR PARTIES.

LEÇON 2 QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

2.1. CALCUL D'AIRES.

2.1.1 Généralités

2.1.2 Aires des portions du plan délimitées par des courbes simples.

2.2. CALCUL DE VOLUMES.

2.3. CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES , SUITES INTÉGRALES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES.

- Calculer les intégrales en utilisant :
  - Les primitives des fonctions usuelles ;
  - La linéarité ou la relation de Chasles ;
  - Une intégration par parties ;
  - Un changement de variable affine ;
  - La parité ou la périodicité d'une fonction.
- Etudier les inégalités en utilisant les propriétés des intégrales.
- Etudier les fonctions ou les suites définies à l'aide d'une intégrale.

PRÉSENTATION-NOTATION.

Prendre un bon départ

Soit une fonction continue sur intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient F et G sont deux primitives de f sur I.

Comparer pour tout x, élément de I une relation entre $F(x)$ et $G(x)$.

Soient a et b deux éléments quelconques de I. Comparer $F(b)-F(a)$ et $G(b)-G(a)$, puis en déduire que le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée.

Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I ; a et b deux éléments de I.

Le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée. Ce réel est appelé intégrale de a à b de f .

Définition

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(t)dt$ et se lit aussi « somme de a à b de $f(t)dt$ ».

Dans cette notation, le réel t est la variable d'intégration. Une intégrale est indépendante de la variable d'intégration ainsi: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots$

Si F est une primitive de f, $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque

- Pour tout élément a de I, on a $F(a)-F(a)=0$. D'où $\int f(t)dt=0$.
- Pour tous a et b de I, $F(a)-F(b)=-[F(b)-F(a)]$. Par suite $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$
- Soit a un élément de I. Pour tout x de I, $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$.

Soit G l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par $G(x)=F(x)-F(a)$.
G est dérivable sur I et $G'(x)=F'(x)=f(x)$ et $G(a)=0$.
G est donc une primitive de f sur I telle que $G(a)=0$.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I, la fonction I dans $\mathbb{R}$;telle que $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple

1) Calculons l'intégrale $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

La fonction $f : x\mapsto \cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$. 0 et $\frac{\pi}{2}$ étant des éléments de $\mathbb{R}$, l'intégrale A est définie.

D'autre part, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$; par suite $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right]dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

2) Calculons $B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^3 x\cos^2 x\,dx$. B est définie car $x\to\sin^3(x)\cos^2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et sur $[o,\frac{\pi}{4}]$.

$$\sin^3 x\cos^2 x=\sin^2 x(\sin x)(\cos^2 x)=(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x$$
$$=\cos^2 x(\sin x)-\cos^4 x(\sin x)$$

$$B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos^2 x\sin x-\cos^4 x\sin x)dx=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$B=\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]-\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right]=\left[-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{4\sqrt{2}}{32}\right]=-\frac{2}{15}-\frac{7\sqrt{2}}{120}$$

3) $C=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left[-ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0}=[-\ln(\cos o)]+\left[ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$C=ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\ln(2)^{\frac{1}{2}}-ln2\right]=\left(\frac{1}{2}ln2-ln2\right)=-\frac{1}{2}ln2.$$

Résolu

Calculer $I=\int_0^{\pi}(\cos t - t\sin t)\,dt$.

En posant $f(t)=t$ et $g(t)=\cos t$, on a $f'(t)=1$ et $g'(t)=-\sin t$.

$\cos t - t\sin t = f'(t)g(t)+f(t)g'(t)=(fg)'(t)$.

Une primitive de : $t\mapsto \cos t - t\sin t$ est la fonction : $t\mapsto t\cos t$. Par suite

$$\int_0^{\pi}(\cos t - t\sin t)\,dt = [t\cos t]_0^{\pi}=[\pi\cos\pi - 0\cos 0]=-\pi.$$

Calculer $J=\int_1^x t\sqrt{1-t^2}\,dt$ pour tout x de $[-1;1]$.

Posons $u(t)=1-t^2$; $u'(t)=-2t$; $t=-\frac{1}{2}u'(t)$ $t\sqrt{1-t^2}=-\frac{1}{2}u'(t)\left(u(t)\right)^{\frac{1}{2}}$. Une primitive de la fonction $t\mapsto -\frac{1}{2}u'(t)\left(u(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ est la fonction : $t\mapsto -\frac{1}{3}\left[u(t)\right]^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}\left[1-t^2\right]^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_1^x t\sqrt{1-t^2}\,dt=-\frac{1}{3}\left[1-x^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

S'exercer

Justifier l'existence de chacune des intégrales ci-dessous et la calculer :

$A=\int e^{-3x}\,dx$; $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$; $C=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin^4 x\,dx$; $D=\int_{-2}^{1}\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\,dx$.

Calculer les intégrales suivantes :

$i)\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$; $ii)\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$; $iii)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$.

Calculer les intégrales suivantes :

$i)\int\cos^2 x\sin^2 x\,dx$; $ii)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$; $iii)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x e^{3\cos x}\,dx$; $iv)\int_1^2\frac{x-2}{x^2-4x+1}\,dx$.

Calculer les intégrales suivantes :

$i)\int\frac{x}{x+1}\,dx$; $ii)\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$; $iii)\int_{-2}^{1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; $iv)\int_{-1}^{2}(x-1)^2\,dx$.

1.2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

1.2.1 Linéarité

Prendre un bon départ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I. F et G primitives respectives de f et g.

1) Montrer que $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Soit α un réel quelconque. Montrer que $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$.

Retenir

Si α est un réel, f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I, alors :

- $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
- $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$.
- Si α et β deux réels, alors $\int_a^b [\alpha f(t)+\beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.

Exemple

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ d'après l'exemple 1. du paragraphe 1.1 Déduisons l'intégrale de $\int$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) $J = \int_{-2}^{1} \frac{x+3}{x+1}dx = \int_{-2}^{1} \frac{(x+1)+2}{x+1}dx = \int_{-2}^{1} 1dx + \int_{-2}^{1} \frac{2}{x+1}dx = [x]_{-2}^{1} + 2\left[ln|x+1|\right]_{-2}^{1}$ $J = 3 + 2\ln 2$

3)

$$\int_0^{\pi} \left(2x - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx = \int_0^{\pi} 2x\,dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \left[x^2\right]_0^{\pi} - \left[\tan x\right]_0^{\pi} = (\pi^2 - 0) - (\tan\pi - \tan 0) = \pi^2 -$$

S'exercer

Calculer les intégrales suivantes $H=\int_{-1}^{2}\left(e^{-\frac{x}{2}}+2x-1\right)dx$; $K=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\sin(x)dx$

Relation de Chasles.

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a,b et c trois éléments de I, F une primitive de f sur I.

Montrer que $\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$.

Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a,b et c trois éléments de I, alors

$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$. (relation de chasles).

Exemple 1

$$K=\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=1.$$

$$K=\int_0^3|x-2|dx=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx.$$

$$K=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=(-2+4)+\left(\frac{9}{2}-6-2+4\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Corrigé résolu 1 : Calculons $\int_0^2\frac{2x^2+3x-5}{x+2}dx$

La fonction $f:x\mapsto\frac{2x^2+3x-5}{x+2}$ est continue sur l'intervalle $[0;2]$. Écrivons $f(x)$ sous forme $\frac{a}{x+2}$.

En effectuant la division euclidienne, on a: $f(x)=2x-1-\frac{3}{x+2}$. Ainsi :

$$\int_0^2\frac{2x^2+3x-5}{x+2}dx=\int_0^2\left(2x-1-\frac{3}{x+2}\right)dx=\left[x^2-x-3\ln(x+2)\right]_0^2=2-3\ln 2.$$

Exercice Résolu 2:

1) On donne $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2x\,dx$. Calculons $I+J$, $I-J$ et déduisons I et J.

* $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2 2x+sin^2 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$; donc $I+J=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

* $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos^2 2x-sin^2 2x\right)dx$; $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]$

On a $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{2} \\ I-J=0 \end{cases}$ et donc $I=J=\frac{\pi}{4}$.

2) Calculons $\int_1^e lnx+\int_1^e\left(x+ln\frac{1}{x}\right)dx$.

D'après la linéarité de l'intégrale on a: $\int_1^e lnx\ dx+\int_1^e\left(x+ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e(lnx+x-lnx)dx=$

$\int_1^e lnx\ dx+\int_1^e\left(x+ln\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$.

3) n étant un entier naturel, calculons en utilisant la relation de Chasles

$I_n=\int_{-1}^{2}\left(1-|x-1|\right)^n dx$.

$\int_{-1}^{2}\left(1-|x-1|\right)^n dx=\int_{-1}^{1}\left(1-(1-x)\right)^n dx+\int_1^2\left(1-(x-1)\right)^n dx$.

$=\int_{-1}^{1}x^n dx+\int_1^2(2-x)^n dx=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{n+1}\left[(2-x)^{n+1}\right]_1^2$

$=\frac{1}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right]-\frac{1}{n+1}[0-1]=\frac{1}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}+1\right]=\frac{1}{n+1}\left[2-(-1)^{n+1}\right]$.

- Si n est pair, $n+1$ est impair et $(-1)^{n+1}=-1$; par suite $I_n=\frac{3}{n+1}$.
- Si n est impair, $n+1$ est pair et $(-1)^{n+1}=1$; par suite $I_n=\frac{1}{n+1}$.

S'exercer

1.f Calculer $\int_{-1}^{3}\left|(x-1)^3\right|dx$.

1.g Calculer au moyen de la relation de Chasles les intégrales suivantes:

i) $\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)dx$; ii) $\int_0^{\pi}|\cos 2x|\,dx$; iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

Autres propriétés des intégrales

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a et b deux réels tels que $a \leq b$.

On suppose que pour tout x de I, $f(x) \geq 0$. Soit F une primitive de f sur I.

Donner le sens de variation de F et comparer $F(a)$ et $F(b)$. Déduire le signe de $\int_a^b f(t)dt$.

Donner le sens de variations de F et comparer F(a) et F(b) si pour tout x de I, $f(x) \leq 0$.

Faire les mêmes résultats si $b \leq a$

Retenir

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$; f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Remarque 1

Soient a et b deux réels tels que : $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$. Soient m et M deux réels tels que, pour tout x de $[a;b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$. On a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Des inégalités $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a;b]$, on déduit $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$ et par suite $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ telle que pour tout x de $[a;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

Remarque 2

- Soient a et b deux réels tels que : $a<b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$. Il existe un c de $[a;b]$ tel que l'on ait $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
- Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne de** f sur $[a;b]$.

  En effet f étant une fonction continue sur $[a;b]$, elle est bornée. Il existe donc deux réels m et M tels que pour tout x de $[a;b]$, $m\le f(x)\le M$. D'après la remarque 1, on a $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$. Comme $a<b$, on peut écrire $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$

  Par suite Il existe $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Exemple

1) Soient α , β deux réels et f la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\alpha x+\beta$.
Déterminons la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

$$\frac{1}{b-a}\int(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{b-a}\left[\alpha\frac{x^2}{2}+\beta x\right]=\frac{1}{b-a}\left[\left(\alpha\frac{b^2}{2}+\beta b\right)-\left(\alpha\frac{a^2}{2}+\beta a\right)\right]$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\alpha\frac{b^2}{2}-\alpha\frac{a^2}{2}+\beta b-\beta a\right]=\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)+\beta.$$

La valeur moyenne de l'application affine f sur $[a;b]$ est le réel $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est la valeur de f en $\frac{a+b}{2}$ qui est le centre de l'intervalle $[a;b]$.

2) Calculons la valeur moyenne de la fonction : $x\mapsto\sin x$ sur $[0;\pi]$.

$$\int_0^\pi\sin x\,dx=[-\cos x]_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2.$$

La valeur moyenne de la fonction : $x\mapsto\sin x$ sur $[0;\pi]$ est $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}$.

Exercice Résolu :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1) Montrer que pour que la suite (u_n) est minorée par 0.

2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3) a)Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout $t\in[0;1]$, on a $0\le\frac{t^n}{1+t^2}\le t^n$ et en déduire la limite de (u_n).

Solution :

1) La fonction $f_n : t\mapsto\frac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0;1]$, pour tout t de $[0;1]$, on a $f_n(t)\ge 0$.

Il résulte $\int_0^1 f_n(t)dt \geq 0$ car $0<1$. Par suite $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul. La suite (u_n) est donc minorée par 0.

Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}(t-1)dt$.

$t \in [0;1]$, $t-1 \leq 0$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \geq 0$. Par conséquent, $\frac{t^n}{1+t^2}(t-1) \leq 0$ et comme $0<1$,

$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}(t-1)dt \leq 0$. Par suite $u_{n+1}-u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

Pour $t \geq 1, 1+t^2 \geq 1$; on a alors $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Il en résulte que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 t^n dt$. D'où $0 \leq u_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$; soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. La suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

S'exercer

Déterminer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$; b) $g : x \mapsto \sin x - 2\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$;

c) $h : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $[1;2]$; d) $k : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Fonction définie par une intégrale

Prendre un bon départ

Soit la fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ où f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.

Soit G une primitive sur I. Exprimer F(x) en fonction de G(x).

Démontrer que F est dérivable sur I et donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x élément de I.

Retenir

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$., pour tout a élément de I,

- La fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Pour étudier le sens de variation de $\mathbf{F}$ il suffit de connaître le signe de f.

Exemple

Soit la fonction F : $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

a) Donnons le domaine de définition de F.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout t de , $1+t^4 > 0$. Donc

définie sur $\mathbb{R}$, puis dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et $F'(x) > 0$.

F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice Résolu: *Fonction définie à l'aide d'une intégrale*

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{t^2+t+1}dt$.

1) Donner l'ensemble de définition de F , puis donner son sens de variation sur l'intervalle [

2) On définit sur l'intervalle $[0;+\infty[$ les fonctions G et H par $G(x) = F(x) - x$ et $H(x) = F($

a) Étudier sur l'intervalle $[0;+\infty[$, les variations des fonctions G et H.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

b) *Montrer que* $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

Solution

1) Variation de F

La fonction $t \mapsto \frac{t^2+1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$

F est par définition la primitive de : $t \mapsto \frac{t^2+1}{t^2+t+1}$ sur $[0;+\infty[$ s'annulant en 0

F est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $F'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$,

Pour $x\geq 0, F'(x)\geq 0$ donc F est croissante sur $[0;+\infty[$

Les variations de G et H

G et H sont dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[\ G'(x)=F'(x)-1=f(x)-1$.

$G'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}-1=\dfrac{-x}{x^2+x+1}$ G'(x) ≤ 0 car $x\geq 0$

$H'(x)=F'(x)-\dfrac{2}{3}=f(x)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

$H'(x)\geq 0$ pour tout réel x, donc H est décroissante sur

La fonction G est décroissante sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x\geq 0$, $G(x)\leq G(0)$.

Donc $F(x)-x\leq 0$ et alors $F(x)\leq x$. La fonction H est décroissante sur $[0;+\infty[$

pour tout réel $x\geq 0$, $H(x)\geq H(0)=0$, d'où $F(x)-\dfrac{2}{3}x\geq 0$.

On déduit que pour tout $x\geq o$, $\dfrac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.

Calcul de la limite de en $+\infty$.

$\lim\left(\dfrac{2}{3}x\right)=+\infty$. De la propriété des comparaisons, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

Tableau de variation de F

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	$+\infty$

F est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$; donc F réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $F([0;+\infty[)=[0;+\infty[$; $\pi\in[0;+\infty[$; ainsi admet un unique antécédent α dans l'intervalle $[0;+\infty[$

$\dfrac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$. Donc $\dfrac{2}{3}\pi\leq F(\pi)\leq\pi$ et $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}\pi\leq F\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\leq\dfrac{3}{2}\pi$.

$\dfrac{2}{3}\pi\leq F(\pi)\leq\pi$ et $\pi\leq F\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\leq\dfrac{3}{2}\pi$. D'où $F(\pi)\leq\pi\leq F\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$ et donc $\alpha\in\left[\pi;\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

S'exercer

En étudiant les variations de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x}{\ln x}$ sur $[e;2e]$; donner un encadrement de

$$I=\int_e^{2e}\frac{x}{lnx}dx$$

1.j On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$

a) Calculer u_0

b) Préciser le sens de variation (u_n)

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $0\le\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\le x^{2n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

1.k On considère la suite (I_n) définie par $I_n=\int_1^e x(lnx)^n\,dx$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Établir la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, puis calculer I_2 et I_3.

c) Préciser le sens de variation de la suite (I_n).

d) Établir que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{e^2}{n+3}\le$ $\le\frac{e^2}{n+2}$

En déduire la limite de la suite (I_n).

1.l (u_n) est la suite définie par $u_n=\int_0^1(1-t)^n e^t dt$.

a) Préciser le sens de variation de la suite (u_n).

b) Établir que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $(1-t)^n\le(1-t)^n e^t\le(1-t)^n e$

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

1.m Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'

a) $F:x\mapsto\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt$ b) $F:x\mapsto\int_{-x}^{x}t^3\sqrt{1+t^3}dt$ c) $F:x\mapsto\int_{-x}^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$ d) $F:x\mapsto\int_{x+1}^{x+2}$

1.n On considère sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $F:x\mapsto\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$

a) Montrer que pour tout $x\ge1:\frac{e^x-e}{x}\le F(x)\le e^x-e$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^n}$ étant un entier naturel.

b) Montrer que pour tout x tel que $0\le x\le1,-e^x\ln x\le\int_x^1\frac{e^t}{t}dt\le-elnx$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)}{lnx}$

c) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $]0;+\infty[$

d) Donner l'allure de la représentation graphique de F

1- Établir les inégalités suivantes sans calculer les intégrales :

a) $\frac{1}{5}\le\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{1}{2}$; b) $\frac{ln2}{2}\le\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{cost}{t}dt\le\frac{\sqrt{3}}{2}ln2$; c) $\frac{ln2}{\sqrt{2}}\le\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{sint}{t}dt\le ln2$

Soit la fonction numérique de la variable réelle : $F : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F sur son ensemble de définition.

III. CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

Prendre un bon départ

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

Soit F une primitive de f sur I. On considère la fonction G : $t \mapsto F(\varphi(t))$ définie sur I

a) Donner l'expression de $G'(t)$ pour tout t élément de I.

b) Soit la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Que représente G pour la fonction g ?

c) Montrer que pour tout a, b de I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

d) Déduire que $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

Retenir

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

Pour tout couple $(a;b)$ d'éléments de I, on a : $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

Remarque

En posant $u = \varphi(t)$, on a $du = \varphi'(t)dt$; $soit \frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. L'égalité $du = \varphi'(t)dt$ permet de retrouver la formule du changement de variable affine.

Exemple

Calculons l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt$.

Posons $u = 2t+1$. $du = 2dt$; $dt = \frac{du}{2}$.

Pour $t = 0, u = 1$ et pour $t = 1, u = 3$.

$$\int \frac{1}{(2t+1)^3} dt = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{2}\int_1^3 u^{-3} du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^3 = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{9}+1\right] = \frac{1}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{9}$$.

Exercice Résolu : Calculer l'intégrale $K=\int_0^{-1}\frac{t^2+t-1}{(3t-2)^2}dt$. Par un changement de variable affine

Posons $u=3t-2$.

$t=\frac{u+2}{3}$; $du=3dt$; $dt=\frac{du}{3}$.

$t^2+t-1=\frac{1}{9}(u+2)^2+\frac{1}{3}(u+2)-1=\frac{1}{9}(u^2+7u+1)$.

Pour $t=0, u=-2$ et pour $t=-1, u=-5$.

$$K=\int_0^{-1}\frac{t^2+t-1}{(3t-2)^2}dt=\int_{-2}^{-5}\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\frac{u^2+7u+1}{u^2}du=\frac{1}{27}\int_{-2}^{-5}\left(1+\frac{7}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du ;$$

$$K=\frac{1}{27}\left[u+7ln|u|-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-5}=\frac{1}{27}\left[\left(-5+7ln5+\frac{1}{5}\right)-\left(-2+7ln2+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$K=\frac{1}{27}\left(-5+7\ln5+\frac{1}{5}-2-7\ln2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{27}(7\ln5-7\ln2-3,3).$$

Exercice Résolu 2 : *Changement de variable affine*

1) Calculer $\int_0^1 sin\pi(t-1)dt$ en posant $u=t-1$.

2) Soit F et G les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_{-x}^{x}e^{t^2}dt$ et $G(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

   a) En posant $u=-t$, montrer que $F(x)=2\int_0^x e^{t^2}dt$ pour tout $t\in$

   b) Montrer que G est une fonction impaire.

Solution

1) Calculons $\int_0^1 sin\pi(t-1)dt$

Posons $u=t-1$, $\frac{du}{dt}=1$ dont $du=dt$

Pour $t=0, u=-1$ *et pour* $t=1$ $u=0$

On a alors $\int_0^1 sin\pi(t-1)dt=\int_0^1 sin(\pi u)du=\left[-\frac{1}{\pi}cos\pi u\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{\pi}(1+1)=-\frac{2}{\pi}$.

2) $F(x)=\int_{-x}^{0}e^{t^2}dt+\int_0^x e^{t^2}dt$

Posons $u=-t$; $t=-u$ et $dt=-du$

$\int_{-x}^{0}e^{t^2}dt=\int_{-(-x)}^{-0}e^{(-u)^2}(-du)=-\int_x^0 e^{u^2}du=\int_0^x e^{u^2}du=\int_0^x e^{t^2}dt$, d'ou $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt+\int_0^x e^{t^2}dt=2\int_0^x e^{t^2}dt$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $G(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$; $G(-x)=\int_0^{-x}e^{-t^2}dt$. Posons $u=-t$; $t=-u$ d'ou $dt=-du$

$G(-x)=\int_{-0}^{-(-x)}e^{-(-u)^2}(-du)=-\int_0^x e^{-u^2}du=-\int_0^x e^{-t^2}dt=-G(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$; d'où G est impaire

INTÉGRALES DES FONCTIONS AYANT UNE PARITÉ OU DES FONCTIONS PERIODIQUES.

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ et paire avec $a>0$. D'après la relation de Chasles, on peut écrire pout tout de x de $[-a;a]$, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$.

Montrer que $\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(-t)dt$.

On pose $u=-t$. Montrer que $\int_{-a}^{0} f(-t)dt = -\int_{a}^{0} f(u)du$.

En déduire que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.

Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ et impaire avec $a>0$.

Montrer que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{-a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$.

En posant $u=-t$, montrer que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(t)dt$.

En déduire que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.

Utiliser la relation de Chasles pour montrer que pour tout réel a,

$\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx$.

Utiliser le changement de variable $u=x+T$ et la périodicité de f pour montrer que $\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{a+T}^{T} f(u)du$.

En déduire que $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$.

Retenir

Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ avec $a>0$.

Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.

Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Exemple

1) Calculons $\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|-3}\,dx$.

La fonction : $x \to \frac{x}{|x|-3}$ est impaire sur $[-1,1]$ donc $\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|-3}\,dx = 0$.

2) Soit l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sin x$. Pour tout réel x, $f(-x) = -x\sin(-x) =$

car $\sin(-x) = -\sin x$. f est donc paire. Par suite, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

3) Soit l'intégrale $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x\,dx$. La fonction $f : x \mapsto \sin 4x$ est périodique de période $\frac{2\pi}{4} =$

D'autre part $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$. On en déduit que $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x\,dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} \sin 4x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x$

S'exercer

1.q Sans calculer les intégrales, justifier les égalités suivantes :

i $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0$; ii) $\int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 3}\,dx = 0$; iii) $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$; iv) $\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{1+|x|} =$

v) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 2x)\,dx = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$.

1. r Calculer $\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1+t^2}\,dt$.

1.5. INTÉGRATION PAR PARTIES.

Prendre un bon départ

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On sait que $(uv)' = u'v + v'u$.

a) Que représente la fonction (uv) pour la fonction $u'v + v'u$.

b) Soient a et b deux éléments de I. Montrer que $[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$

déduire que $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$.

Retenir

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dont les fonctions u' et v' sont continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$.

Cette méthode de calcul des intégrales s'appelle une intégration par parties.

Exemple

1) Calculons au moyen d'une intégration par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\sin x$. Ainsi $u'(x)=1$ et $v(x)=-\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2) Calculons au moyen de deux intégrations par parties $F(x)=\int_0^x e^t \sin t\,dt$

Posons $u(t)=e^t$ et $v_1'(t)=\sin t$, on a $u'(t)=e^t$ et $v_1(t)=-\cos t\,dt$

D'où $F(x)=\left[-e^t\cos t\right]_0^x + \int_0^x e^t\cos t\,dt$

Posons $u_2(t)=e^t$ et $v_2'(t)=\cos t$, on a : $u_2'(t)=e^t$ et $v_2(t)=\sin t$

Donc $\int_0^x e^t\cos t = \left[e^t\sin t\right]_0^x - \int_0^x e^t\sin t\,dt = e^x\cos x - 1 + e^x\sin x - F(x)$

D'où $2F(x)=e^x(\cos x+\sin x)-1$ c'est-à-dire $F(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}$

Exercice Résolu 1

Soit $I_n=\int_0^1 t^n e^t\,dt$ où n est un entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1 en utilisant une intégration par parties.

2) Montrer que pour tout entier naturel $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.

Solution :

1) $I_0=\int_0^1 t^0 e^t\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = \left[e^1-e^0\right] = e-1.$

$I_1=\int_0^1 t^1 e^t\,dt = \int_0^1 te^t\,dt$. Posons $u(t)=t$ et $v'(t)=e^t$; on a $u'(t)=1$ et $v(t)=e^t$.

$I_1=\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$

$I_1=\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = e - \left[e\right] = e-(e-1) = 1.$

2) Soit n ∈ ; $I_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}e^t\,dt$

posons $\begin{cases} t^{n+1}=u(t) \\ e^t=v'(t) \end{cases}$; on a $\begin{cases} u'(t)=(n+1)t^n \\ v(t)=e^t \end{cases}$

donc, $I_{n+1}=\left[t^{n+1}e^t\right]_0^1-\int_0^1(n+1)t^ne^t\,dt=e-0-(n+1)\int_0^1 e^t t^n\,dt$ or $\int_0^1 t^ne^t\,dt=I_n$

$=e-(n+1)I_n$

Exercice Résolu 2 :

Déterminer la primitive de la fonction : $t\mapsto lnt$ qui s'annule en 1.

Solution :

Calculons l'intégrale $F(x)=\int_1^x lnt\,dt$.

Posons $u'(t)=1 et v(t)=lnt$. On a $u(t)=t et v'(t)=\frac{1}{t}$.

$F(x)=\int_1^x lnt\,dt=\int_1^x u'(t)v(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^x-\int_1^x u(t)v'(t)\,dt.$

$F(x)=\left[tlnt\right]_1^x-\int_1^x t\times\frac{1}{t}dt=xlnx-x+1.$

La primitive de la fonction $t\mapsto \ln t$ s'annulant en 1est la fonction : $x\mapsto x\ln x-x+1.$

1.s Par une intégration par parties, calculer chacune des intégrales:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; *b)* $\int_{-1}^{2} xe^{-x}\,dx$; *c)* $\int_1^e x^3\ln(x)\,dx$; *d)* $\int_e^3 x^r\ln(x)\,dx$ *ou* $r\in\mathbb{Q}$

1.t En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales:

a) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx$; *b)* $\int_0^1 x^2e^x\,dx$; *c)* $\int_{\pi}^{-\frac{\pi}{2}} x\sin^3(x)\,dx$;

LEÇON 2 QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

- Utiliser l'outil intégral pour calculer les aires des surfaces planes, des volumes des solides, en particulier des solides de révolution .
- Donner une valeur approchée d'une intégrale par l'une des méthodes médiane, trapèze ou rectangle.

I. CALCUL D'AIRES

1. Généralités

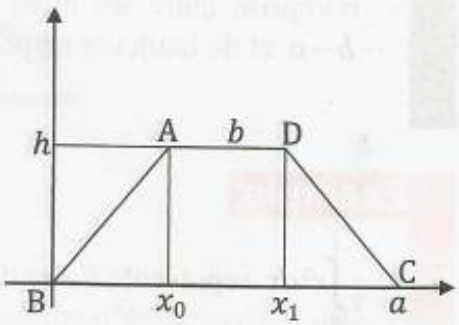
Nous supposerons le plan muni d'un repère orthogonal.

Prendre un bon départ

Soit h un réel strictement positif et $0 < x_0 \leq x_1 < a$. On se propose de calculer l'aire du trapèze de sommets $A(x_0;h)$, $B(0;0)$, $C(a;0)$ et $D(x_1;h)$.

Montrer que les droites (AB), (AD) et (DC) ont pour équations cartésiennes:

$y = \frac{h}{x_0}x$; $y = h$ et $y = \frac{h(x-a)}{x_1 - a}$, respectivement.



Calculer $\mathcal{A} = \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0}x\,dx + \int_{x_0}^{x_1} h\,dx + \int_{x_1}^{a} \frac{h(x-a)}{x_1 - a}dx$.

En utilisant le fait que $AD = x_1 - x_0 = b$ et BC = a, vérifier que

$$\int_0^{x_0} \frac{h}{x_0}x\,dx + \int_{x_0}^{x_1} h\,dx + \int_{x_1}^{a} \frac{h(x-a)}{x_1 - a}dx = \frac{a+b}{2}h.$$

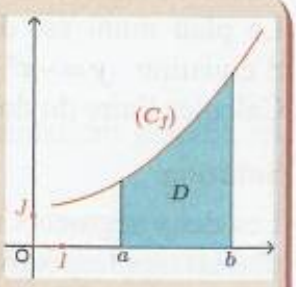
Déduire $\mathcal{A}$ et l'aire du trapèze ABCD.

Vérifier que si $x_1 = x_0$, on obtient un triangle ABC et son aire est $\frac{ah}{2}$.

Retenir

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonale $(O;I,J)$, $\int_a^b f(t)\,dt$ est ***l'aire du domaine D limité*** par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions respectives OI et OJ respectivement.



Remarque

1) Soit M un réel positif tel que, pour tout réel x de l'intervalle I alors on a :

$|f(x)| \le M$. $|f(x)| \le M$ équivaut à pour tout $a,b \in I$ $-M \le f(x) \le M$

. D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $-M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. D'où

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$

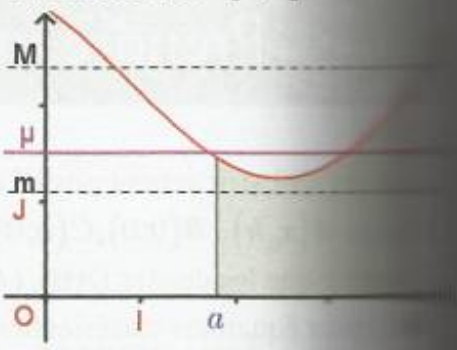
2) L'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a,b]$ est l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive de f sur $[a;b]$.

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ équivaut à $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

3) Le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est ***la valeur moyenne*** de f sur l'intervalle $[a;b]$

Interprétation graphique de μ

Graphiquement lorsque m est positif, l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=a$, $x=b$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f est comprise entre les aires des rectangles de même base $b-a$ et de hauteurs respectives m et M respectivement



Exemple

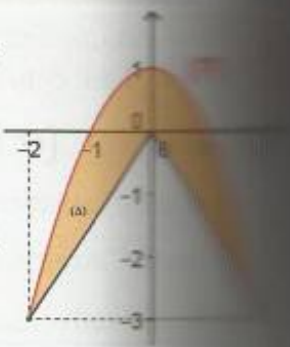
- $\int_0^1 x^2dx$ représente l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, l'axes des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. La courbe de la f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1. D'où

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 \text{ où } r = 1$; $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ *u.a*

Exercice Résolu

Le plan muni est d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j}),(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y = -x^2+1$. Unité graphique : $2cm$.
Calculer l'aire du domaine colorié.



Solution

Les deux segments représentés sur la figure coupent la parabole aux points d'abscisses respectives -2 et 2 et ont l'origine comme extrémité commune.
Notons (Δ) celui dont une extrémité est $(-2;-3)$.

...tion de (Δ) est sous la forme : $\begin{cases} y = ax \\ x \in [-2\,,0] \end{cases}$

$-2 = -2a$; donc $a = \frac{3}{2}$ et (Δ) est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$ avec $x \in [-2\,,0]$. On démontre de ...que l'autre segment (Δ') a pour équation $y = -\frac{3}{2}x$ avec $x \in [0\,,2]$.

...D) l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -\frac{3}{2}x \le y \le -x^2+1 \end{cases}$ et (D')

...mble des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ \frac{3}{2}x \le y \le -x^2+1 \end{cases}$. Le domaine ...est la réunion des deux domaines (D) et (D'). (D) et (D') sont symétriques par rapport à ... et par conséquent ont la même aire. D'où l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachurée est :

$\mathcal{A} = 2\int_0^2 \left[\left(-x^2+1\right) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right] dx \times u.a$; où $u.a$ représente l'unité d'aire égale à $2cm \times 2cm = 4cm^2$.

$$\mathcal{A} = 4cm^2 \times \int_0^2 \left(-x^2+1+\frac{3}{2}x\right) dx = 8\left[-\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{3}{4}x^2\right]_0^2 cm$$

$$= 8 \times \left[-\frac{8}{3} + 2 + \frac{3\times 4}{4} - 0\right] cm^2 = \underline{\underline{\frac{56}{3} cm^2}}$$

S'exercer

...terminer la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ en utilisant la courbe d'équation $y = \sqrt{4-x^2}$.

...ne interprétation graphique, déterminer l'aire de la portion du plan délimités par les courbes ...équations $y = \sqrt{1-x^2}$ et $y = x$ sur l'intervalle $[0;1]$.

...Représenter sur l'intervalle $[0;1]$ la courbe de la fonction $f : x \mapsto |2x-1|$.

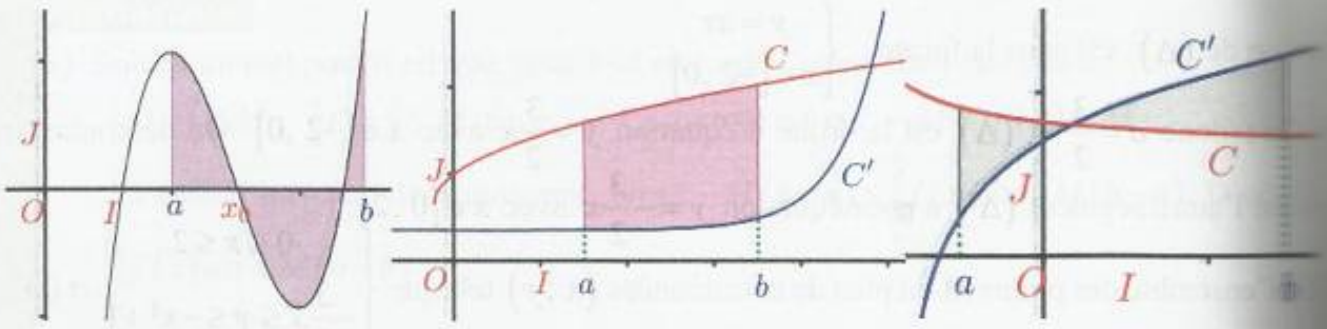
...Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe représentative de f sur l'in...tervalle $[0;1]$ et l'axe des abscisses géométriquement.

...res des portions du plan délimitées par des courbes simples

Prendre un bon départ

...sont deux fonctions définies continues sur $[a;b]$.On connait leurs représentations graphiques ...notées C et C'.

...Pour chacun des cas suivants, donner à l'aide d'une intégrale, l'expression de l'aire de la portion du ...plan hachurée

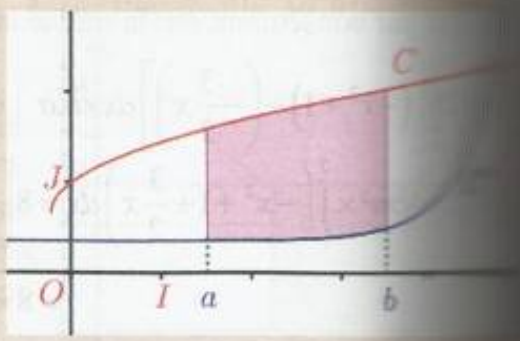


Retenir

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

(1) f et g deux fonctions définies continues sur $[a;b]$.

- Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ (la courbe de f est au dessus de celle de g sur $[a;b]$) alors l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x=a, x=b$ les courbes représentatives des fonctions f et g est $\left[\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right] u.a.$.



Exemple

$A(a)$ et l'aire de la partie du plan contenant les points $M(x;y)$ tels que $0 \leq x \leq$ $2x^2 \leq y \leq 2x^2+e^{-x}$ où a est un nombre réel positif donné.

$$A(a)=\int_0^a \left[\left(2x^2+e^{-x}\right)-2x^2\right]dx.ua = \int_0^a e^{-x}dx.ua$$

$A(a)=\left[-e^{-x}\right]_0^a u.a = \left(1-e^{-a}\right)ua$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} A(a)=1$.

- $f : x \mapsto e^{2x}-3e^x+2$

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

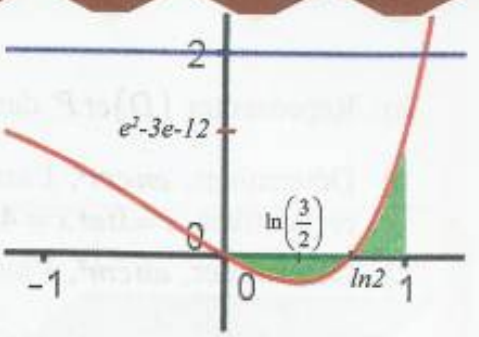
  $f'(x)=2e^{2x}-3e^x=e^x\left(2e^x-3\right)$.

  $f'(x)=0$ équivaut à $x=ln\frac{3}{2}$. Le tableau des variations de f est donné ci-contre.

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$ $-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^x\left(e^x-3\right)+2=+\infty$

$f(x)=0$ équivaut $e^x=1$ ou $e^x=2$. D'où $=0$ où $x=ln2$.



d'axe $2cm$.

l'aire de la portion du plan délimitée par les droites équations $x=0, x=1$, la courbe de et l'axe des abscisses

$$\left(\int f(x)dx\right)\times u.a=\left(\int_0^{\ln 2} f(-x)dx+\int_{\ln 2}^{1} f(x)dx\right)\times u.a=\left[-\int_0^{\ln 2}\left(e^{2x}-3e^x+2\right)dx+\int_{\ln 2}^{1}\left(e^{2x}-3e^x+2\right)dx\right]\times u.a$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}-3e^x+2\right)\Big]_0^{\ln 2}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}-3e^x+2\right]_{\ln 2}^{1}\Big)\times 4cm^2$$

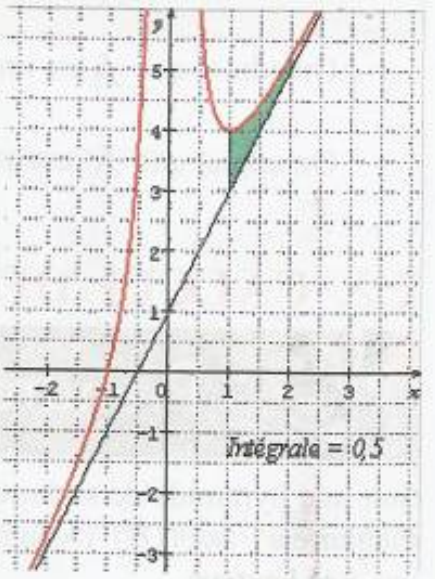
$$4-3\times 2+2\ln 2-\left(\frac{1}{2}-3\right)\Big)+\left(\frac{1}{2}e^2-3e+2-\left(\frac{1}{2}\times 4-3\times 2+2\ln 2\right)\Big)\Big]\times 4cm^2$$

$$-3e-4\ln 2+\frac{15}{2}\Big)\times 4cm^2=\left(2e^2-12e-16\ln 2+30\right)cm^2$$

Résolu :

fonction $f: x\mapsto 2x+1+\frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) de f, son oblique et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.



de f dans un repère orthonormé est donné ci-contre.

demandée est celle de la partie hachurée en vert.

cette aire.

$$(x)-(2x+1)\Big]dx\,ua.$$

$$a=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{2}+1\right]ua \quad \mathcal{A}=0,5\ ua$$

S'exercer

$\frac{x^2-x+4}{x+1}$ et $g: x\mapsto x^2-x$

que sur l'intervalle $[0;3]$, $f\geq g$.

miner les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

des questions précédentes l'aire de la partie délimitée par les courbes des fonctions sur l'intervalle $[0;3]$.

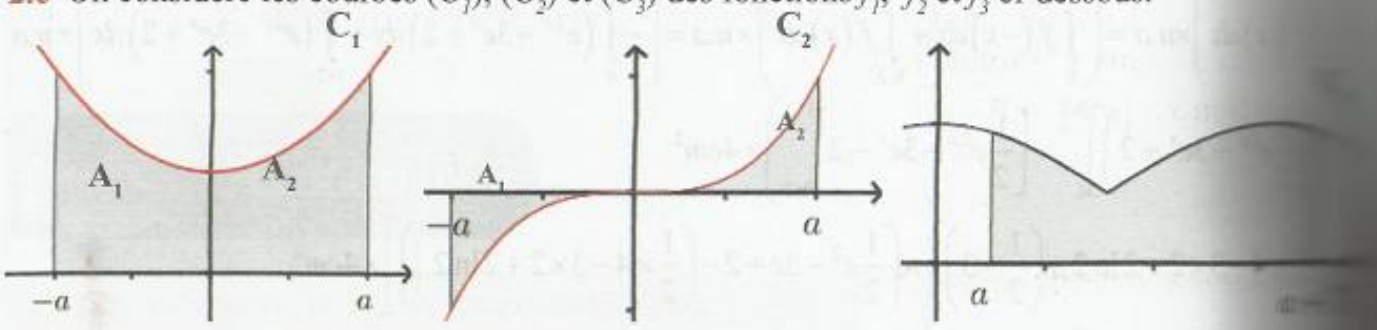
la parabole d'équation $y=x^2-4x+3$; (D) la droite d'équation $y=\frac{4}{3}x$ (unité d'axe

a) Représenter (D) et P dans un repère orthonormal.

b) Déterminer, **en cm²**, l'aire de la portion du plan délimitée par P, les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=4$, et l'axe des abscisses.

c) Déterminer, **en cm²**, l'aire de la portion du plan délimitée par P et (D).

2.c On considère les courbes (C_1), (C_2) et (C_3) des fonctions f_1, f_2 et f_3 ci-dessous.



- On admet que f_1 est paire et positive sur $[0,a]$. Montrer que les aires A_1 et A_2 sont égales. En déduire que $\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f_1(x)\,dx$ où $A_1 = \int_{-a}^{0} f_1(x)\,dx$ et $A_2 = \int_{0}^{a} f_1(x)\,dx$
- On admet que f_2 est impaire sur $[-a,a]$. Montrer que $A_1 - A_2 = 0$ et donc $\int_{-a}^{a} f_2(x) = 0$
- On admet que f_3 est périodique de période T. Montrer que : $\int_{a}^{a+T} f_3(x)\,dx = \int_{0}^{T} f_3(x)\,dx$

2.2. CALCUL DE VOLUMES

Prendre un bon départ

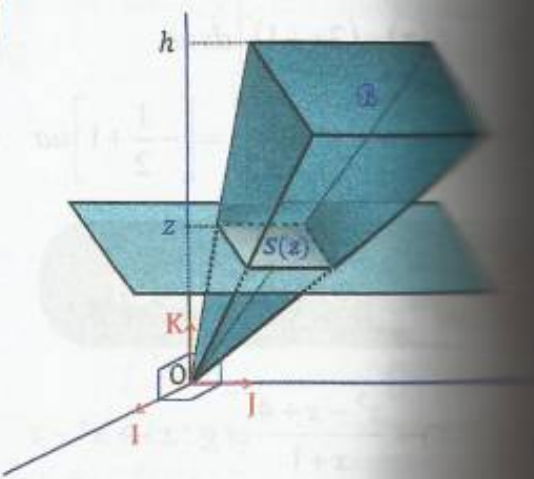
Soit une pyramide de sommet O, dont la base est perpendiculaire à l'axe (Oz). Désignons par **B** l'aire de sa base et par h **sa hauteur.**

Soit z un réel de $]0;h]$. En utilisant l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$, montrer que l'intersection de la pyramide et du plan de cote z est un polygone d'aire $\mathbf{B} \times \frac{z^2}{h^2}$.

Soit S, l'application de $[0;h]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $S(z) = B \times \frac{z^2}{h^2}$.

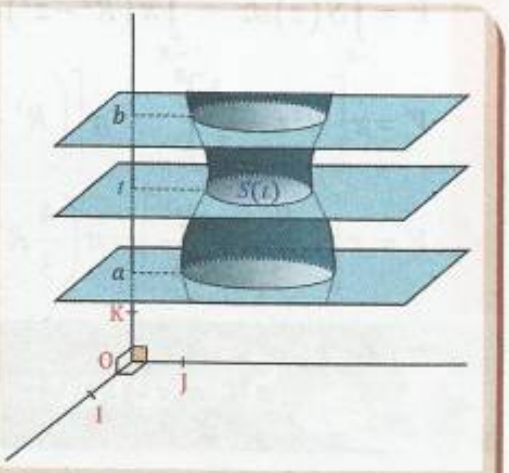
S est une fonction continue. Calculer $\int_0^h S(z)\,dz$.

Que représente cette intégrale pour la pyramide ?



Retenir

l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
(S) un solide délimité par deux plans parallèles
d'équations $z=a$ et $z=b$ $(a<b)$. Pour tout $t \in \mathrm{R}$,
$a \leq t \leq b$, on note $S(t)$ l'aire de la section du plan
d'équation $z=t$ avec le solide (S).
La fonction s : $[a,b] \mapsto \mathrm{R}$
$t \mapsto s(t)$
est continue (pour un solide régulier en particulier) et

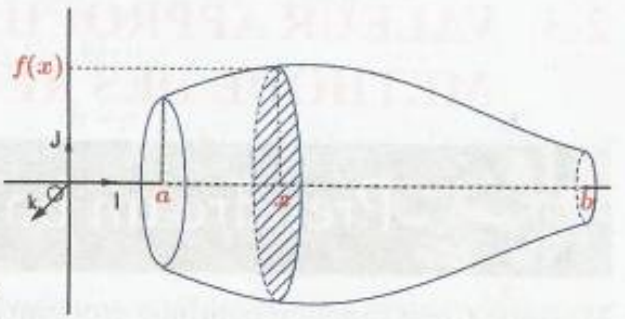


$\mathcal{V}$ est le volume du solide (S).

Si aucune précision n'est faite sur les unités sur les axes, alors ce volume est exprimé en unités de volume $(u.v)$. une unité de volume est le volume du pavé droit de dimension $\|\vec{i}\|$, $\|\vec{j}\|$ et $\|\vec{k}\|$. $\quad 1u.v = \|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|.\|\vec{k}\|$

Remarque

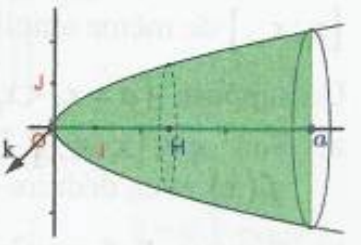
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
f est une fonction définie et continue sur $[a;b]$.
Un solide de révolution est engendré par la rotation autour de l'axe (O,I) d'une courbe simple (C) d'équation $y=f(x)$ dans le plan (xOy).
La section de ce solide par un plan perpendiculaire à (O,I) est un disque de rayon $|f(x)|$ *et d'aire* $S(x)=\pi(f(x))^2$.



Alors le volume $v(S)$ du solide de révolution (S) est égal à $\left(\int_a^b S(x)dx\right)u.v = \left(\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right)u.v$

Exemple

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$, a est un réel positif. (D) est l'ensemble des points M$(x\,;y)$ tels que $0 \leq x \leq a$ *et* $0 \leq y \leq f(x)$.
On fait tourner (D) autour de l'axe(OI). On obtient un solide de révolution comme indiqué sur la figure ci-après.



Posons $OH=x$ le volume du solide est :

$$\mathcal{V}(x)=\int_0^a \pi(HM)^2\,dx=\int_0^a \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx=\int_0^a \pi x dx=\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_0^a=\frac{\pi}{2}a^2\ u.v.$$

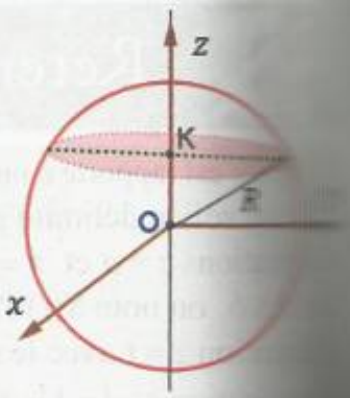
Calculons le volume d'une boule sphérique de centre O et de rayon R. On pose OK = z.
Le rayon du cercle intersection du plan qui coupe la sphère est $r=\sqrt{R^2-z^2}$.
$\mathcal{V}(z)=\pi(R^2-z^2)$.

Le volume de la sphère est $V=\int_{-R}^{R} S(z)dz$.

$$V=\int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-z^2)dz = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)dz$$

$$V=\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right]$$

$$V=\pi\left[2\frac{R^3}{3}+2\frac{R^3}{3}\right]=\pi\left(\frac{4}{3}R^3\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$



S'exercer

2.c Retrouver en utilisant le calcul intégral la formule permettant de calculer le volume d'un [illegible] dont une base a pour rayon r et de hauteur h

2.d Déterminer le volume du solide obtenu par rotation autour de l'axe $[Ox)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ et la courbe de la fonction [illegible]

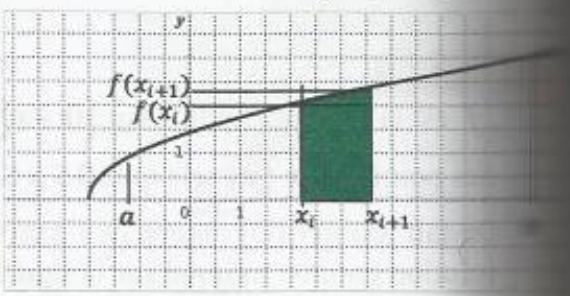
2.3. VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES

Prendre un bon départ

1) Soit f une fonction continue croissante sur $[a;b]$ n'ayant pas de primitive qui soit une fonction régulière sur $[a;b]$.

Soit Δ l'ensemble des points $M(x;y)$ dans un repère orthogonal tels que $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$

Notons $\mathcal{A}(\Delta)=\int_a^b f(x)dx$ Soit n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$.



On suppose $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$.

a) Soit $x\in[x_i;x_{i+1}]$. Donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire que $(x_{i+1}-x_i)f(x_i)\le\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\le(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$.

b) On note E_i la portion du plan représenté en vert sur le graphique.
Donner les dimensions de chacun des deux rectangles dont les aires encadrent l'aire de E_i

c) En déduire que $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)$. Puis encadrer $\int_a^b f(x)dx$

Donner un encadrement de $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas où f est décroissante.

Retenir

Soient f une fonction continue et monotone sur $[a\ b]$ et n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ tels que $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$.

- Si f est croissante sur $[a;b]$, alors $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)\le\sum_{i=0}^{n-1} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)$.
- Si f est décroissante sur $[a;b]$, alors $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)\le\sum_{i=0}^{n-1} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$.

Remarque

- $\left|\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)-\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)\right|=\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|$.

Quand n croît, $\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|$ décroît. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|=0$.

Ainsi pour un réel ε strictement positif, pour avoir l'inégalité $\left|\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)-\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)\right|<\varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|<\varepsilon$. Donc choisir un entier naturel n tel que $n>\frac{b-a}{\varepsilon}|f(b)-f(a)|$.

Cet encadrement de l'intégrale est faite par la méthode des rectangles. Elle permet de donner une valeur approchée à ε près de $\left|\int_a^b f(t)dt\right|$ pour une fonction f, monotone sur $[a;b]$.

Le réel $\frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})+\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right]$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à $\frac{b-a}{2n}|f(b)-f(a)|$ près.

- Soit f une fonction continue sur [a,b] et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_n=\left[\frac{1}{n}f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

La suite (u_n) converge vers la valeur moyenne $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ de f sur $[a;b]$.

Les suites definies par $u_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$; $v_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$ pour une fonction monotone f sur [a,b] convergent vers $\int_a^b f(t)dt$

Exemple

- Déterminons par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx$ à 10^{-1} près.

  Considérons la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$.

  $f'(x)=\frac{-6x^5}{2\sqrt{1+x^6}}=-\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}}$. Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)\leq 0$. La fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc décroissante sur $[0;2]$. Choisissons $a=0$ et $b=2$.

  Cherchons un entier naturel n tel que un entier naturel n tel que $n>\frac{2}{2\times 10^{-1}}|f(2)-$

  Soit $n>10\left|1-\frac{1}{\sqrt{1+2^6}}\right|$; soit $n>9{,}84$. On peut prendre $n=10$.

  On subdivise $[0;2]$ par des intervalles d'amplitude 0,2.

  Nous avons $x_0=0; x_1=0{,}2$; $x_2=0{,}4$;...; $x_9=1{,}8$; 2

  Posons $s_{10}=0{,}2\left(f(0)+f(0{,}2)+f(0{,}4)+\ldots+f(1{,}8)\right)$ et

  $S_{10}=0{,}2\left(f(0{,}2)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+\ldots+f(1{,}8)+f(2)\right)$.

  f étant décroissante on a $S_{10}<\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx<s_{10}$; soit $1{,}189<\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx<1{,}365$.

  Une valeur approchée de $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx$ à 10^{-1} près est $\frac{1{,}189+1{,}365}{2}=1{,}28$.

- Déterminons une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. En subdivisant $[0;1]$ en 5 intervalles de même amplitude $S_5=\frac{1}{5}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{5}\right)+\ldots+f\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ où $f: x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

  On obtient par calcul $S_5\cong 0{,}83$.

- On pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$. Étudions la convergence de la suite (S_n).

  f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=sin(\pi x)$. Subdivisons l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$. $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i\pi}{n}\right)$.

  (S_n) converge vers $\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{-1}{\pi}\left[cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$. (S_n) converge vers $\frac{2}{\pi}$.

- On donne $I=\int_{3/5}^{4/5}\sqrt{1-x^2}dx$

On subdivise l'intervalle $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ en n intervalles de même amplitude. Déterminons par la méthode des rectangles le nombre d'intervalles nécessaires pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$

f est dérivable sur $]-1;1[$ et $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ est contenu dans cet intervalle, donc f est dérivable sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$.

On a : $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; f' est dérivable sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$;

$f''(x)=\frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ et $f'' \leq 0$ sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$, donc f' décroît sur l'intervalle

$f'\left(\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]\right)=\left[f'\left(\frac{4}{5}\right);f'\left(\frac{3}{5}\right)\right]=\left[-\frac{4}{5};\frac{-3}{4}\right]$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

L'erreur commise est de $\frac{4}{5\times 2n}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{125n}$.

On a $\frac{2}{125n}<10^{-3}$ d'où $n \geq \frac{2\times 1000}{125} \cong 16{,}3$. On prend $n=17$

S'exercer

On donne $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+x^2}dx$.

En subdivisant $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en 5 intervalles de même amplitude, déterminer, un encadrement de I .

Déterminer la limite de la suite (S_n) définie par $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$

A l'aide de la méthode des rectangles, justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} \leq \int_1^2 \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$$

Déduire de l'inégalité précédente que $0 \leq \int_1^2 \frac{1}{t}dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{2n}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

S'ENTRAÎNER

TECHNIQUE DU CALCUL INTÉGRAL « INTÉGRALE ET PRIMITIVE »

Dans les exercices de 1 à 10 calculer les intégrales.

1.

a) $\int_0^1 e^{1-t}dt$; b) $\int_1^{-1}\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)dt$;

2.

a) $\int_0^1 \frac{e^u}{2+e^u}du$; b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^1 e^{-2t+3}dt$;

3.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^5 dx$;

4.

a) $\int_1^e x\cos x^2 dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cosx}dx$;

5.

a) $\int_1^e \frac{lnx}{x}dx$; b) $\int_1^e \frac{ln^2x}{x}dx$;

6.

a) $\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1}dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$;

7.

a) $\int_1^3\left(t+1-\frac{1}{1+t}dt\right)$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x}{x-1}dx$;

8.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3x-sin\frac{x}{2}+2cos2x\right)dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2 2xdx$;

9.

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}(cos2t-sin3t+tan^2 5t)dt$; b) $\int_0^1(2^x-3^x)dx$;

10.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; b) $\int_2^{\pi}(1+cost+cos^2 t)dt$;

INTÉGRATIONS PAR PARTIES

Pour les exercices de 11 à 14 calculer en effectuant une intégration par parties

11.

a) $\int_0^{\pi} xcosxdx$; b) $\int_0^{\pi} xsinxdx$;

12.

a) $\int_0^1 te^{2t}dt$; b) $\int_0^1 (t+1)e^{2t}dt$;

13.

a) $\int_1^e lntdt$; b) $\int_1^e tlntdt$;

14.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2 x}dx$; b) $\int_1^e x^2 lnxdx$;

Pour les exercices de 15 à 18 calculer en intégrant deux fois par parties

15.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sinxdx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosxdx$;

16.

a) $\int_0^x (1+t)^2 e^{-t}dt$; b) $\int_0^x t^2 e^{1-t}dt$;

17.

a) $\int_0^x e^t sintdt$; b) $\int_0^x e^t costdt$;

18.

On donne I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos^2 xdx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin^2 x$

1) Calculer I + J et I – J à l'aide d'une intégration par parties.

déduire I et J.

donne $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cox^4 x dx$,

$\sin^4 x dx$; $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x cos^2 x dx$.

Calculer I – J

Calculer I + J + K

En déduire la valeur de I + J + 3K puis celles de I, J et K

au moyen de la relation de Chasles

$\int (1-|x-1|)^3 dx$;

$\int (|2x-5|-x|x-3|)dx$.

RALES DES FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES OU PÉRIODIQUES

les égalités suivantes

$\int (x-sinx)dx = 0$;

$\int (\cos x - x^3)dx = 0$;

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos4x dx$;

$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2\int_0^{\pi} |sinx| dx$.

de variable affine

un changement de variable, démontrer

une fonction continue et paire sur un intervalle [a,b] , alors

$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^{a} f(t)dt \quad a>0$

b) Si f est une fonction continue et impaire Sur un intervalle $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ a>0

c) Si f est une fonction continue et périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt$.

23.

On pose $I=\int_7^9 \frac{du}{5-6u+u^2}$.

a) Vérifier que $u^2-6u+5=(u-3)^2-4$.

b) On pose t = u – 3 ; Montrer que $I=\int_4^6 \frac{dt}{t^2-4}$

Déterminer deux réels a et b tels que :

$\frac{1}{t^2-4}=\frac{a}{t-2}+\frac{b}{t+2}$;

c) Calculer I.

INTÉGRALE DES FONCTIONS RATIONNELLES ET DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

24.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que

pour tout $x\neq -3$, $\frac{x^2+2x-1}{x+3}=ax+b+\frac{c}{x+3}$

Calcule alors $\int_{-2}^{2} \frac{x^2+2x-1}{x+3}dx$

2) Déterminer deux réels a et b tels que

pour tout $x\neq -2$: $\frac{x}{(x+2)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}$

. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x}{(x+2)^2}dx$.

3) Déterminer trois réels $a, b et c$ tels que pour tout réel $x\neq 0 et x\neq -1$

$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}$

Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$

25.
Calculer chacune des intégrales suivantes après avoir linéarisé la fonction à intégrer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxsin3xdx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcos3xdx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosxcos3xcos4xdx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxsin3xsin4xdx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3xdx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx$

INTEGRALES ET INEGALITES

26.
Trouver un encadrement pour chacune des intégrales suivantes après avoir déterminé les extrémums de la fonction à intégrer sur l'intervalle considéré.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{cost}dt \quad ; \quad J=\int_e^{2e} \frac{1}{lnt}dt.$$

27.
On admet que $sinx \le x$ pour $x \ge 0$. Montrer par plusieurs intégrations successives, les inégalités suivantes :

a) $1-\frac{x^2}{2} \le cosx \le 1$; b) $x-\frac{x^3}{6} \le sinx \le x$;

c) $1-\frac{x^2}{2} \le cosx \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

28.
On donne $I=\int_0^1 \ln(1+x)dx$

a) Établir que pour tout $t \in [0;1]$,

$$\frac{t^2}{1+t}=1-t+\frac{1}{1+t} \text{ et calculer } \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{t^2}{2} \le \frac{t^2}{1+t}$

en déduire un encadrement de $ln2$.

29.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel x positif, on a :

$$e^x \ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

30.
1) Calculer $I=\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ au moyen de deux intégrations par parties.

2) On pose $J=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}}dx$.

a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0;1]$ $0 \le x^2e^{-x} \le 1$.

b) Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0;1]$ $1-u \le \frac{1}{1+u} \le 1+\frac{u}{2}$.

c) En déduire que $1-I \le J \le 1+\frac{I}{2}$ et donner un encadrement de J à 10^{-1} près.

31.
p est un entier naturel non nul, (U_n) est la suite définie par : $U_n=1^p+2^p+\ldots+n^p$.

1) Montrer que pour $k \ge 1$,
$\int_{k-1}^{k} t^p dt \le k^p \le \int_k^{k+1} t^p dt$.

2) En déduire que $\int_0^n t^p dt \le U_n \le \int_1^{n+1} t^p dt$.

3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n^{p+1}}$

réel strictement positif.

Montrer que pour tout entier naturel

$n\geq 2$ $\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x^{\alpha}}\leq\frac{1}{n^{\alpha}}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^{\alpha}}$

On pose $S_n=\frac{1}{1^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}$. Montrer que

(S_n) est croissante et que $\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x^{\alpha}}\leq S_n\leq\int_{1}^{n}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, pour $n\geq 1$

En déduire que pour $\alpha\geq 1$, la suite (S_n) converge et pour $0\leq\alpha\leq 1$, la limite de S_n en $+\infty$ est $+\infty$

FONCTIONS ET SUITES DÉFINIES À L'AIDE D'UNE INTÉGRALE

(U$_n$) est une suite définie par $U_n=\int_{0}^{n}\frac{dt}{1+t^3}$

Déterminer le sens de variation de la suite (U$_n$)

Démontrer que $U_1\leq 1$ et $\int_{1}^{n}\frac{dt}{1+t^3}\leq\int_{1}^{n}\frac{dt}{t^3}$

En déduire que (U$_n$) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

(U$_n$) est une suite définie par : $U_n=\int_{0}^{1}\frac{e^{-nx}}{1+e^{x}}dx$

Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0,1]$,

$\frac{e^{nx}}{e^{x}+1}\leq\frac{e^{nx}}{2}$

En déduire un encadrement de U$_n$

En déduire $\lim_{n\to\infty}U_n$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{e^n}$

Soit la suite définie par : $U_n=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^n}$

Montrer que (U$_n$) est croissante et majorée par 1.

Montrer que $1-U_n=\int_{0}^{1}\frac{x^n}{1+x^n}dx$

En déduire des questions précédentes que : $0\leq 1-U_n\leq\frac{1}{n+1}$

Déterminer la limite de la suite (U$_n$).

36.

Soit (I$_n$) la suite définit par :

$I_n=\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{(1+x)^{n}}dx$ n≥2

1) Montrer que (I$_n$) est décroissante et qu'elle converge.
2) Établir l'encadrement :
$\frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}})\leq I_n\leq\frac{e}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$.
3) Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{e^{x}}{(1+x)^{n}}$

a) Exprimé f_n' en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

b) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(nI_{n+1})=1$

d) En déduire que la suite de terme général (nI_n) converge vers une limite que l'on précisera.

37.

Soit $U_n=\frac{1}{n!}\int_{0}^{1}x^{n}e^{x}dx$ n≥1

1) A l'aide d'une intégration par partie calculer U$_1$ et établir que $U_n=\frac{e}{n!}-U_{n-1}$
2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'on a :
$U_n=(-1)^{n}\left[e\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right)-1\right]$
3) Montrer que : $0\leq U_n\leq\frac{e}{(n+1)!}$
4) En déduire que la suite (S$_n$) telle que $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

38.

Soit (I_n) une suite définie par : $I_n=\int_{0}^{1}x^{n}e^{-x}dx$.

a. **Calculer** I_0.

b.Pour n entier naturel, exprimer I_{n+1} en

fonction de I_n, à l'aide d'une intégration par parties.

c.**En déduire** la valeur de I_4.

d. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$$

e. Montrer que (I_n) est convergente, puis calculer sa limite.

39.

Soit n un entier naturel , on pose :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x \, dx.$$

a.Calculer I_n à l'aide de deux intégrations par parties succesives.

b.Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

40.

Pour tout entier non nul n, on définit la suite (I_n) par: $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$.

1. a. Justifier l'existence de cette intégrale .
   b. Calculer I_1.
   c. Démontrer que : pour tout entier naturel $n > 2$, $I_{n+1} = e - nI_n$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on note F_n une primitive de la fonction $x \to (\ln x)^n$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   a. Démontrer que la fonction H définie par $H(x) = F_n(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.
   b. Montrer que $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 F_n(t)\,dt$.
   c. En déduire que $0 \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.
   d. Montrer alors que la suite I est convergente, puis calculer sa limite.

41.

F est la fonction définie sur l'intervalle [0,+∞[par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1) Préciser le sens de variation de F.
2) Démontrer que pour tout réel $t \ge 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout $x \ge 1$, $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \le 1$
3) Démontrer que pour tout réel $x \ge 0$, on a $F(x) \le F(1)+1$. En déduire que F admet une limite l en $+\infty$.
4) Dresser le tableau de variation de F.

Donner l'allure générale de la courbe C de F prenant l =1,8

42.

F est la fonction définie sur l'intervalle [0,+∞[par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

1. Déterminer le sens de variation de F sur l'intervalle $[0,+\infty[$
2. Démontrer que pour tout $t \ge 1$, on a $e^{-t^2} \le e^{-1}$ en déduire que pour tout nombre réel $x \ge 1$, $\int_1^x e^{-t^2} dt \le \frac{1}{e}$
3. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $F(x) \le F(1) + \frac{1}{e}$ En déduire que F admet une limite finie l.
4. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure générale de la courbe de F. Prendre $l = 0.89$.

43.

F est la fonction défini sur l'intervalle [0,+∞[par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$.

1- Démontrer que pour tout réel $t \ge 0$, on a

$\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \geq \frac{1}{1+t}$ et en déduire que pour tout réel x positif, $F(x) \geq \ln(1+x)$

a) Calculer la limite de F en $+\infty$.

b) Étudier la variation de F et dresser le tableau de variation.

Démontrer que pour tout réel t, positif on a : $\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \leq 1$ et en déduire que pour tout réel x on a $F(x) \leq x$.

Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[1,+\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \leq \frac{1}{t}$

En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a $F(x) \leq \int_0^1 f(t)dt + \ln x$ où $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}$.

Démontrer que la courbe C de F admet une branche parabolique de direction (OI).

Tracer la droite $(D): y = x$ et donner l'allure générale de (C)

Considère la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que F est une fonction impaire (on pourra utiliser un changement de variable).

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Étudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$

On se propose dans cette question d'étudier le comportement de F au voisinage de $+\infty$.

Soit la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Donner le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

b) Soit x un réel strictement positif. Utiliser la question 4)a) pour montrer que, pour tout t de $[x;2x]$, on a $0 \leq f(t) \leq f(x)$.

Déduire que $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

c) Donner la limite de F en $+\infty$.

5) Avec la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée du réel $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ à 10^{-1} près.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

CALCULS D'AIRES ET VOLUMES

45.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Étudier et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$. Unité d'axe 2cm
2. Soit a un réel plus grand que -1
   a) Calculer en fonction de a l'Aire $A(a)$ la portion délimitée par les droites d'équations $x = 0, x = a$, l'axe des abscisses et la courbe (C) de f
   b) Déterminer la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

46.

1) Étudier su $]0,+\infty[$ la fonction $f: x \to \frac{1}{x}e^{-x}$ et dresser son tableau de variations.

2) a) trouver une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point A d'abscisse 1 notée (T).
   b) (T) coupe l'axe des abscisses au point (C), préciser l'abscisse de (C).

3) Construire la courbe (C).

4) Calculer l'aire du domaine (D) délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les

droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

5) On désigne par B le point $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3. Calcul l'aire (D') , le domaine délimité par $(\mathcal{C})$ et les droites (AC) et (BC).

47.

1. Démontrer que la courbe (T) de la fonction $x \to e^x$ coupe la droite (D) : $y=3x$ en deux point A et B. d'abscisses respectives α et β ($\alpha<\beta$).
2. Calculer l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=\alpha$, $x=\beta$, la droite (D) et la courbe (T) et montrer que cette aire est égale à $\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha-2)$.

48.

1. Étudier et représenter la fonction $f : x \to x\ln x$ sur l'intervalle$]0, +\infty[$. Unité d'aire 5cm.
2. Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites $x=\alpha$ et $x=1$.
3. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.

49.

Déterminer le volume du solide de révolution obtenu en tournant autour de l'axe (OY) le domaine du plan délimité par les axes (OX), (OY), la droite $y=2$ et la courbe d'équation $y=\ln x$.

50.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité de mesure 1Cm.

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$.
2. Démontrer que la droite d'équation $f(x)=\alpha$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
3. Construire $(\mathcal{C}_f)$.
4. Démontrer que l'équation $f(x)=\alpha$ admet une unique solution α comprise entre 2 et
5. Calculer l'aire du domaine (D) délimité
6. par les droites d'équations $x=0, x=\alpha$ des abscisses et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
7. On fait tourner (D) autour de l'axe des abscisses. Calculer en cm^3 le volume du solide ainsi obtenu.

51.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité d'axe; $1cm$.

1. Construire la courbe de la fonction $f : x \to \sin^2 x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=0$, $x=\pi$ courbe (C) de f et l'axe des abscisses.
3. On fait tourner le domaine (D) autour de l'axe des abscisses. On obtient un solide de révolution. Calculer son volume.

CALCULS APPROCHÉS

52.

Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle [0,1] on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S'_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Interpréter graphiquement S_n et S'_n en termes d'aires de rectangles.
2. Justifier que $S_n \le \int_0^1 f(t)\,dt \le S'_n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'amplitude de cet encadrement est $\frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right)$.

Applications:

En subdivisant l'intervalle [0,1] en cinq intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $\int_0^1 e^{t^2}\,dt$ et préciser l'amplitude.

...adrement.

...fonction définie sur l'intervalle

$f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$.

...que f est décroissante sur ...valle $[0,1]$.

...duire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\leq n-1$

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

...out $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que

$$\frac{f(0)}{n}\leq\int_0^1 f(t)dt\leq U_n-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

...miner un encadrement de $\int_0^1 f(t)dt$

...$n=10$ et déterminer un encadrement ...$\int_0^1 f(t)dt$ à 10^{-2} près.

...la méthode des rectangles, calculer ...un des cas la limite de la suite (U_n):

a) $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$ b) $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

...fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$

$f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$

...les variations de f et tracer sa ...ve. Unité graphique:5 cm.

...signe un réel strictement positif.

...un moyen d'une intégration par parties ...$\int_1^{\lambda}f(x)dx$. Déterminer $\lim_{\lambda\to 0}I(\lambda)$

3) Pour tout n ≥2,on pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}f\left(\frac{p}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, tel que $1\leq p\leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{p+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}}f(x)dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right)$$

b) Déduire que $S_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\leq I\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n$.

puis que $I\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n\leq f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

c) En déduire que la limite de (S_n) en $+\infty$ est $\frac{1}{3}$

Chapitre 12

ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

LEÇON 1 ISOMÉTRIES DU PLAN.

1.1. COMPOSITION DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES DES TRANSLATIONS.

1.1.1 Composée de symétries orthogonales.

1.1.2 Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

1.2. COMPOSITION DE ROTATIONS ET DE TRANSLATIONS.

1.2.1 Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

1.3. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN.

1.3.1 Décomposition d'une isométrie.

1.3.2 isométries et points invariants.

1.3.3 Déplacements et antidéplacements

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

2.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMILITUDES PLANES.

2.2. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

1.2.1 Écritures complexes des similitudes directes du plan.

1.2.2 Composée de similitudes directes – réciproque d'une similitude directe.

1.2.3 Caractérisation géométrique d'une similitude directe.

2.3. DÉTERMINATION DES SIMILITUDES DIRECTES - UTILISATIONS DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ISOMÉTRIES DU PLAN.

- Consolider les compositions des translations, des rotations, des symétries orthogonales du plan.
- Donner la nature de la composée d'une réflexion et d'une translation ;
- Caractériser une isométrie à partir de l'ensemble de ses points invariants.

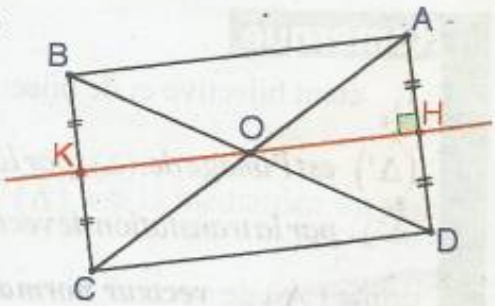
I. COMPOSITION DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES ET DES TRANSLATIONS.

I.1 COMPOSÉE DE SYMÉTRIES ORTHOGONALES.

Prendre un bon départ

Exercice 1

ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O et tel que AB = 2AD.



- Préciser la nature du triangle OAD.
- Déterminer deux isométries f et g qui transforment chacune D en A et B en C.
- Caractériser f^{-1} et g^{-1}, transformations réciproques respectives de f et de g.
- Donner la nature et les éléments caractéristiques des applications $S_{(AB)} \circ S_{(HK)}$ et $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$.
- Donner la nature les éléments caractéristiques des applications $S_{(OA)} \circ S_{(HK)}$ et $S_{(HK)} \circ S_{(OC)}$.

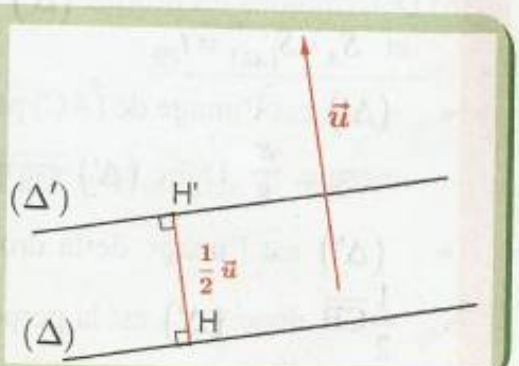
Exercice 2

- Déterminer une droite (Δ') telle que $S_{\Delta'} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{AB}}$. (translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$)
- Déterminer une droite (Δ) telle que $S_{(BD)} \circ S_{\Delta} = r_{\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)}$ (rotation de centre o et d'angle $-\frac{\pi}{3}$)

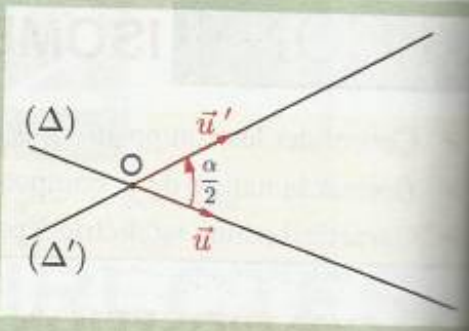
Retenir

Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles du plan ; la composée de $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ (S_{Δ} suivie de $S_{\Delta'}$) est égale à la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$ où H est un point quelconque de (Δ) et H' est le projeté orthogonal de H sur (Δ').

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{HH'}}$.



(2) Soit (Δ) une droite de vecteur normal $\vec{u}$.



(3) Il existe une unique droite (Δ') parallèle à (Δ) telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$. (Δ') est l'image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

(3) Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O et de vecteurs directeur respectif $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée de S_{Δ} suivie de $S_{\Delta'}$ est égale à la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u},\vec{u}')$.

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(O,\alpha)}$ *avec* $\alpha = 2mes(\vec{u},\vec{u}')$

(4) Soit $r_{(O,\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α. Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une seule droite (Δ') telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(O,\alpha)}$.

(Δ') est l'image de (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.

Remarque

$t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ étant bijective et de bijection réciproque $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$

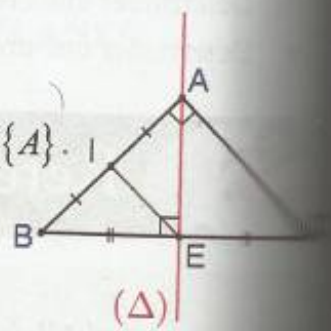
(Δ') *est l'image de* (Δ) *par la translation de vecteur* $\frac{1}{2}\vec{u}$ *si et seulement si* (Δ) *est l'image de* (Δ') *par la translation de vecteur* $-\frac{1}{2}\vec{u}$. Cette équivalence permet de déterminer l'unique droite (Δ) de ***vecteur normal*** $\vec{u}$ telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$ avec (Δ') et $\vec{u}$ connus.

Exemple

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A et de sens direct.

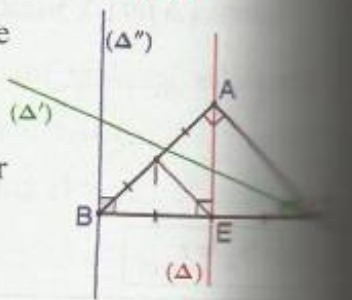
a) Déterminons les transformations $S_{(AC)} \circ S_{(IE)}$ et $S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$. On a :

- $S_{(AC)} \circ S_{(IE)} = t_{2\overrightarrow{IA}} = t_{\overrightarrow{BA}}$ car $(AC)//(IE)$.
- $S_{(AC)} \circ S_{\Delta} = r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ car $2(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}) = 2\times\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $(AC)\cap(\Delta) = \{A\}$.



b) Déterminons les droites (Δ') et (Δ'') telles que $S_{(AC)} \circ S_{\Delta'} = r_{\left(C,-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $S_{\Delta} \circ S_{(AE)} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

- (Δ') est l'image de (AC) par la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{8}$. Donc (Δ') est la bissectrice de l'angle $\hat{C}$.
- (Δ'') est l'image de la droite (AE) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ donc (Δ') est la perpendiculaire à (BC) passant par B.



S'exercer

ABCD est un losange de sens direct tel que $mes\left(\overrightarrow{AB,AD}\right)=\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes : $f=S_{(BC)}\circ S_{(AD)}$ et $g=S_{(CD)}\circ S_{(AB)}$

b) Déterminer et comparer $f\circ g$ et $g\circ f$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $S_{(AC)}\circ S_{(AD)}$, $S_{(BD)}\circ S_{(CB)}$ et $S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$.

ABCD est un carré de sens direct de centre O. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite (Δ) telle que : $S_{(\Delta)}\circ S_{(OC)}=r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$; $S_{(AB)}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{DA}}$; $S_O=S_{\Delta}\circ S_{(BD)}$; $t_{2\overrightarrow{BA}}=S_{(AD)}\circ S_{\Delta}$.

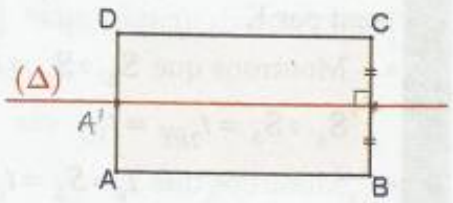
COMPOSÉE D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE ET D'UNE TRANSLATION

Prendre un bon départ

Activité 1

La figure ci-contre ABCD est un rectangle de sens direct et (Δ) est la médiatrice du segment

- Déterminer l'application $S_{\Delta}\circ S_{(AB)}$.
- En déduire que $t_{\overrightarrow{AD}}\circ S_{(AB)}=S_{\Delta}$.
- Déterminer les images de A par $t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{\Delta}$ puis par $S_{\Delta}\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

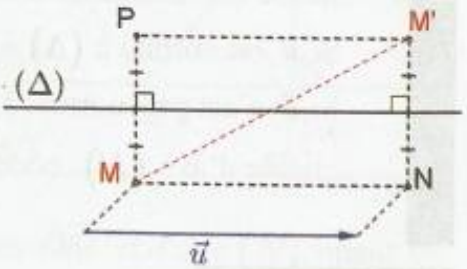


Activité 2

(Δ) une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

M un point du plan. On note $P=S_{\Delta}(M)$, $N=t_{\vec{u}}(M)$ et $M'=S_{\Delta}(N)$.

- Vérifier que $\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM'}$.
- Montrer que $M'=t_{\vec{u}}(P)$.
- En déduire que pour tout point M du plan, $(S_{\Delta}\circ t_{\vec{u}})(M)=(t_{\vec{u}}\circ S_{\Delta})(M)$.
- On suppose qu'il existe un point Ω tel que $\Omega=(S_{\Delta}\circ t_{\vec{u}})(\Omega)$.
- Montrer que $S_{\Delta}(\Omega)=t_{\vec{u}}(\Omega)$.
- On pose $\Omega'=S_{\Delta}(\Omega)=t_{\vec{u}}(\Omega)$, justifier que $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\perp\vec{u}$, $\overrightarrow{\Omega\Omega'}=\vec{u}$ et donc $\vec{u}=\vec{0}$
- En déduire $S_{\Delta}\circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.



Retenir

(1) Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- On appelle *symétrie glissée d'axe* (Δ) *et de vecteur* $\vec{u}$, la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$. $S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$
- Une symétrie glissée ***n'admet pas*** de point invariant.

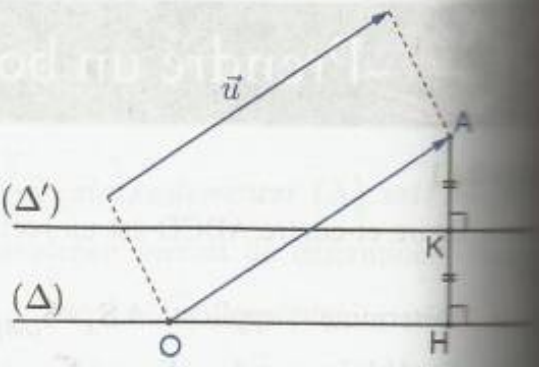
(2) **Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul, du plan vectoriel.**

- **Si $\vec{u}$ *est un vecteur normal* à (Δ) alors la composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ est** une symétrie orthogonale d'axe parallèle à (Δ).
- **Si $\vec{u}$ *n'est pas un vecteur normal* à (Δ) alors** $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ est une symétrie glissée.

S'en Convaincre

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul Soit O un point de (Δ) et A un point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

Désignons par H le projeté orthogonal de A sur (Δ), (Δ') **K le milieu de [AH] et (Δ') la parallèle à (Δ) passant par K.**



- Montrons que $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{HA}}$.

  $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{HK}} = t_{\overrightarrow{HA}}$ car $(\Delta)//(\Delta')$, H ∈ (Δ), K ∈ (Δ′) et (HK) est orthogonale à (Δ)
- Montrons que $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OH}} \circ S_{\Delta'}$.

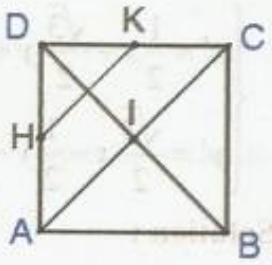
  $t_{\overrightarrow{OH}} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OH}} \circ t_{\overrightarrow{HA}} \circ S_\Delta$.

  $= t_{\overrightarrow{OH}} \circ S_{\Delta'}$ car $t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$.
- Nature et éléments caractéristiques de $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$.
  - Si $\vec{u}$ est normal à (Δ) alors O = H et $S_\Delta = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ car $t_{\overrightarrow{OH}} = t_{\overrightarrow{OO}}$ est l'identité du plan
  - Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ) alors O ≠ H ; donc $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OH}} \circ S_{\Delta'}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ') et de vecteur $\overrightarrow{OH}$.

Remarque

Soit (Δ) une droite du plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nul, ***qui n'est ni un vecteur normal ni un vecteur directeur à*** (Δ). La composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale est une symétrie glissée dont on peut déterminer ***l'axe et le vecteur.***

Exemple



Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de sens direct et de centre I.

- $S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ est la symétrie glissée d'axe (HK) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'axe la médiatrice de [BC].
- $S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}}$ est une symétrie orthogonale car $(HK) \perp (ID)$

$S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}} = S_{(HK)} \circ \left(S_{(HK)} \circ S_{(AC)}\right)$ car $t_{\overrightarrow{ID}} = S_{(HK)} \circ S_{(AC)}$

$= \left(S_{(HK)} \circ S_{(HK)}\right) \circ S_{(AC)} = S_{(AC)}$.

- $t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissée de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et d'axe (Δ), la médiatrice de [AH]. En effet : $t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)} = \left(t_{\overrightarrow{HD}} \circ t_{\overrightarrow{DK}}\right) \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{DK}} \circ \left(t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal à la droite (AB) et ainsi $t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale. Posons $t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)} = S_{\Delta}$. On a $t_{\overrightarrow{AH}} = S_{\Delta} \circ S_{(AB)}$; d'où (Δ) est l'image de (AB) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ c'est-à-dire la médiatrice de [AH]. Ainsi $\boxed{t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{DK}} \circ S_{\Delta} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \circ S_{\Delta}}$ car $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DK}$

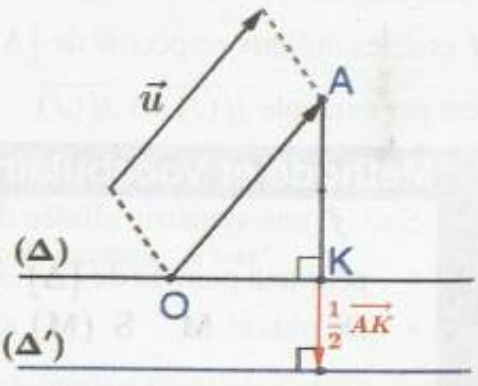
...ice Résolu 1

...(Δ) une droite, $\vec{u}$ un vecteur non nul qui n'est ni normal à (Δ) ni un vecteur directeur de (Δ). ...miner la nature et les éléments caractéristiques de $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

...

...et éléments caractéristiques de $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

...O un point de (Δ) et A l'unique point du plan tel que ... Soit K le projeté orthogonal de A sur (Δ).



- $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{OA}} = S_{\Delta} \circ \left(t_{\overrightarrow{OK}} \circ t_{\overrightarrow{KA}}\right)$

$= \left(S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{KA}}\right) \circ t_{\overrightarrow{OK}}$ car $t_{\overrightarrow{OK}} \circ t_{\overrightarrow{KA}} = t_{\overrightarrow{KA}} \circ t_{\overrightarrow{OK}}$.

- $S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{KA}}$ est la symétrie orthogonale $S_{\Delta'}$.

$S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{KA}} = S_{\Delta'}$ et $t_{\overrightarrow{KA}} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$.

...insi, (Δ') est l'image de (Δ) par $t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}} = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}}$.

- $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ t_{\overrightarrow{OK}} = t_{\overrightarrow{OK}} \circ S_{\Delta'}$ est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{OK}$ et d'axe (Δ') image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$.

...mple Résolu 2

...est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f la symétrie glissée dont l'expression ...que est:

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 \end{cases}$. Déterminer l'axe et le vecteur de f

Solution :

Déterminons l'axe (Δ) de f.

Soit $\Omega(a\,;b)$ un point du plan , $\Omega(a\,;b) \in \Delta$, il existe un point $M(x,y)$ tel que Ω soit le milieu du segment $\left[Mf(M)\right]$; $a = \frac{x+x'}{2}$ et $b = \frac{y+y'}{2}$. On obtient de ces deux égalités :

$2a = x + x' = x + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1$

$2b = y + y = y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$

$2\sqrt{3}b = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} = 2 - 1 - \sqrt{3}$; donc $\boxed{(\Delta) : 2x - 2\sqrt{3}y - 1 - \sqrt{3} = 0}$.

Déterminons le vecteur $\vec{u}$ de f.

- Déterminons le point $I = s_\Delta(O)$.

$I = s_\Delta(O) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = a\vec{n}$ et le milieu de $[OI]$ appartient à (Δ) où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{n}(2\,;-2\sqrt{3})$ est un vecteur normal de (Δ) .

le point $I \notin (\Delta)$ mais le milieu de $[OI]$ est sur (Δ) et on a $2\alpha + 6\alpha - 1 - \sqrt{3} = 0$; soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{8}$

Par ailleurs, $\vec{u} = \overrightarrow{If(O)}$ $\vec{u}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$

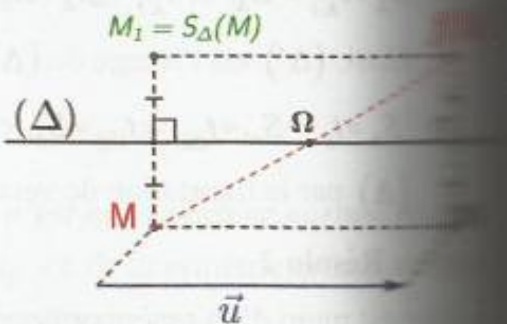
Autre méthode : Soient A et B deux points arbitraires distincts du plan; $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, I et J les milieux respectifs de $[AA']$ et $[BB']$. L'axe de f est la droite (IJ) et de vecteur de f est par exemple $\overrightarrow{If(I)}$ ou $\overrightarrow{Jf(J)}$.

Méthode et Vocabulaire

Soit f une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ alors :

- pour tout point Ω de (Δ), il existe au moins un point M tel que Ω soit le milieu de $[Mf(M)]$
- De plus si $M \quad S(M)$ alors $\overrightarrow{f(M)} \quad u$.
- Cette procédure permet de déterminer (Δ) et $\vec{u}$ lorsqu'on connaît l'expression analytique de f.

  L'écriture $f = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ est appelée ***forme canonique de f.***



- $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ ceci permet de déterminer le vecteur de translation et l'axe de f, qui doit passer par le milieu de [of(o)] de vecteur directeur $\vec{u}$

S'exercer

ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$; $S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$; $t_{\overrightarrow{DB}} \circ S_{(AD)}$; $S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{DB}}$.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC]. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AI)}$; $t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(AB)}$ et $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BC)}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ dans chacun des cas suivants:

a) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x-y-2=0$; b) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x+y+3=0$; c) $\vec{u}(1;1)$ et $\Delta : x-2=0$.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

On considère le vecteur $\vec{u}(-2,3)$ et la droite $(\Delta): x+y-2=0$.

Déterminer l'expression analytique de la symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe (Δ).

II. COMPOSITION DE ROTATIONS ET DE TRANSLATIONS.

Prendre un bon départ

r et r' deux rotations d'angles de mesure respectives α et α', soit t une tanslation du plan.

Enoncé 1

Supposons que r et r' ont même centre O.

M un point du plan. On note $N = r(M)$ et $M' = r'(N)$.

- Vérifier que $M' = (r' \circ r)(M)$.
- Démontrer que $OM = ON = OM'$ et $mes\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right) = \alpha + \alpha'$.
- En déduire que $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$.

Enoncé 2

Supposons que r et r' ont des centres O et O' respectivement.

et B deux points du plan. On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$ puis $A' = r'(A_1)$ et $B' = r'(B_1)$

- Vérifier que $A' = (r' \circ r)(A)$ et $B' = (r' \circ r)(B)$.
- Montrer que $AB = A_1B_1 = A'B'$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha + \alpha'$.
- En déduire que :
  - Si $\alpha + \alpha' = 0$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Donner alors la nature de r r.
  - Si $\alpha + \alpha' \neq 0$ alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

Activité 3

Soient A, B deux points du plan.

- On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$. Justifier que $A_1B_1 = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) = \widehat{\alpha}$
- On note $A' = t(A_1)$ et $B' = t(B_1)$. Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$.
- Montrer que $A'B' = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \widehat{\alpha}$.
- Vérifier que : $A' = (r \circ t)(A)$ et $B' = (r \circ t)(B)$ puis en déduire que $r \circ t$ est une rotation de mesure α.
- De façon analogue, montrer que $t \circ r$ est aussi une rotation d'angle de mesure α.

Retenir

Soient r et r' deux rotations du plan d'angles de mesures respectives α et α'. Soit t une

(1) *Composée de deux rotations de même centre.*

- La composée de deux rotations r et r' ***de même centre*** O et d'angles de mesures α et α' est la rotation de centre O et d'angle $\alpha+\alpha'$ si $\alpha+\alpha' \neq 0$.
- $r' \circ r = r \circ r'$ et est l'application identique si $\alpha+\alpha' = 0$.

(2) *Composée de deux rotations de centres distincts.*

- La composée de deux rotations ***de centres distincts*** O et O', et d'angles de mesures respectives α et α' est :
  - une ***translation*** si $\alpha+\alpha' = 0$
  - une ***rotation*** d'angle $\alpha+\alpha'$ si $\alpha+\alpha' \neq 0$.

(3) *Composée d'une rotation et d'une translation.*

- La composée d'une rotation r d'angle α et d'une translation t est une rotation d'

Remarque

Soient r et r' deux rotations et t une translation du plan. En général,

- Lorsque r et r' sont de centres distincts, $r' \circ r \neq r \circ r'$.
- $t \circ r \neq r \circ t$.

Exemple 1

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des applications ci-dessous :

a) $f = r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}$

- $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 = 0 \times 0 \times \pi$. f est donc translation.

Activité 3

Soient A, B deux points du plan.

- On note $A_1 = r(A)$ et $B_1 = r(B)$. Justifier que $A_1B_1 = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) = \widehat{\alpha}$
- On note $A' = t(A_1)$ et $B' = t(B_1)$. Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$.
- Montrer que $A'B' = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \widehat{\alpha}$.
- Vérifier que : $A' = (r \circ t)(A)$ et $B' = (r \circ t)(B)$ puis en déduire que $r \circ t$ est une rotation d'angle de mesure α.
- De façon analogue, montrer que $t \circ r$ est aussi une rotation d'angle de mesure α.

Retenir

Soient r et r' deux rotations du plan d'angles de mesures respectives α et α'. Soit t une translation

(1) *Composée de deux rotations de même centre.*

- La composée de deux rotations r et r' ***de même centre*** O et d'angles de mesures respectives α et α' est la rotation de centre O et d'angle $\alpha+\alpha'$ si $\alpha+\alpha' \neq 0$.
- $r' \circ r = r \circ r'$ et est l'application identique si $\alpha+\alpha' = 0$.

(2) *Composée de deux rotations de centres distincts.*

- La composée de deux rotations ***de centres distincts*** O et O', et d'angles de mesures respectives α et α' est :
  - une ***translation*** si $\alpha+\alpha' = 0$
  - une ***rotation*** d'angle $\alpha+\alpha'$ si $\alpha+\alpha' \neq 0$.

(3) *Composée d'une rotation et d'une translation.*

- La composée d'une rotation r d'angle α et d'une translation t est une rotation d'angle α

Remarque

Soient r et r' deux rotations et t une translation du plan. En général,

- Lorsque r et r' sont de centres distincts, $r' \circ r \neq r \circ r'$.
- $t \circ r \neq r \circ t$.

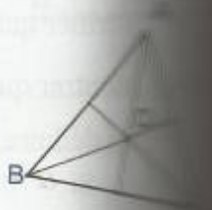
Exemple 1

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des applications ci-dessous :

a) $f = r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)}$

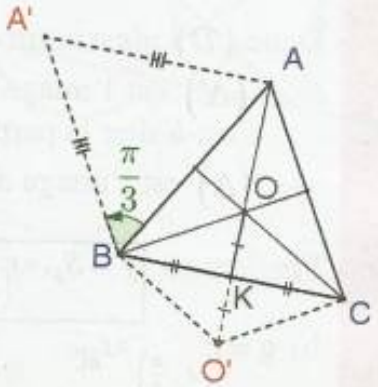
- $\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 = 0 \times 0 \times \pi$. f est donc translation.



- Il suffit de chercher $f(C) = r_{(B,\frac{\pi}{3})}(B) = B$; ainsi $\boxed{f = t_{\overrightarrow{CB}}}$.

b) $g = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$

- $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Comme $\frac{2\pi}{3} \neq k2\pi$ pour tout entier k de mesure $\frac{2\pi}{3}$ g est une rotation.



- Considérons la droite (BC) et déterminons deux droites (Δ) et (Δ')telles que $r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{(BC)}$ et $r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$.

- (Δ')est l'image de la droite (BC) par $r_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire la droite (BO).
- (Δ) est l'image de la droite (BC) par $r_{\left(C,-\frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à- dire la droite (CO).

On peut remarquer que $g(C)=A$ et $g(A)=B$. Donc le centre de g est l'intersection des médiatrices de [AC] et [AB]

Donc $g = S_{(BO)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(CO)} = S_{(BO)} \circ S_{(CO)}$. Finalement $\boxed{g = r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}}$.

c) $h = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$

- $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}=\pi$ donc h est une symétrie centrale.

Soit $O' = h(O)$ on a $O' = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}(O)$ donc $CO = CO'$ et $mes\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CO'}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Ainsi le triangle COO' est équilatéral de sens direct. Finalement le centre de h est le milieu de $[OO']$ c'est-à-dire milieu K de $[BC]$.

On pouvait aussi remarquer juste que $h(B)=C$ et avoir le même résultat.

Méthode

Soient r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α',de centres respectifs et distincts O et O'.

- Si $\alpha+\alpha'=\hat{0}$ alors pour déterminer le vecteur de la translation $t = r' \circ r$, il est judicieux de déterminer l'image par t d'un point connu , de préférence le centre O de r.
- Si $\alpha+\alpha' \neq \hat{0}$ alors pour déterminer le centre de la rotation $r' \circ r$ on peut Déterminer deux droites (Δ) et $(\ )$ telles que $r' = S_{\Delta'} \circ S_{(OO')}$ et $r = S_{(OO')} \circ S_{\Delta}$. On a alors $r' \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et le centre cherché est le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

Exemple 2

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Déterminons les applications suivantes :

- $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$
- f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
- Détermination du centre :

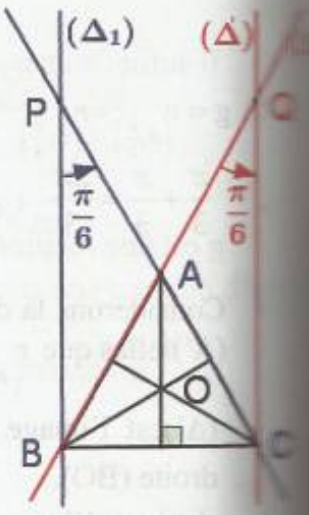
Déterminons trois droites (Δ) , $(\mathcal{D})$ et (Δ') tels que $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\Delta} \circ S_{\mathcal{D}}$ et $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\Delta}$.

$t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\Delta'} \circ S_{\mathcal{D}} \Rightarrow (\mathcal{D}) \perp (BC)$ et $r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\Delta} \Rightarrow A \in (\mathcal{D})$

Donc $(\mathcal{D})$ n'est autre que la droite (OA).

- (Δ') est l'image de (OA) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire la perpendiculaire à (BC) passant par C.
- (Δ) est l'image de (OA) par $r_{\left(A, -\frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire (BA).

Finalement $\boxed{f = S_{\Delta'} \circ r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} \circ S_{(BA)} = S_{\Delta'} \circ S_{(BA)} = r_{\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)}}$.



b) $g = r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

Déterminons (Δ_1), $(\mathcal{D}')$ et (Δ'') telles que $r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_{\mathcal{D}'}$ et $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\Delta_1}$

- $A \in (\mathcal{D}')$ et $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D}')$ donc $(\mathcal{D}') = (OA)$.
- (Δ_1) est l'image de (OA) par la translation $t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$ donc (Δ_1) est la perpendiculaire à (BC) passant par B.
- (Δ'') est l'image de (OA) par la rotation $r_{\left(A, \frac{\pi}{6}\right)}$ c'est-à-dire la droite (AC).

Finalement $\boxed{g = S_{(AC)} \circ S_{(OA)} \circ S_{(OA)} \circ S_{\Delta_1} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_1} = r_{\left(P, \frac{\pi}{3}\right)}}$

Méthode

Soit t est une translation de vecteur $\vec{u}$ et r une rotation de centre O.

1) Pour déterminer le centre de $t \circ r$, on peut déterminer trois droites (Δ), $(\mathcal{D})$ et (Δ') telles que :

- $(\Delta') // (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}) \cap (\Delta) = \{O\}$
- $t = S_{\Delta'} \circ S_{\mathcal{D}}$ et $r = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\Delta}$.

Il est judicieux et important de commencer par la droite $(\mathcal{D})$: elle passe par O et a pour vecteur normal $\vec{u}$.

- $t \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ le centre de $t \circ r$ est le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

2) Pour $r \circ t$, procéder façon analogue pour déterminer son centre.

Exercice Résolu 1

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle. Soit A un point extérieur à $(\mathcal{C})$, P un point de $(\mathcal{C})$ et B tel que ABP est un triangle équilatéral de sens direct.

Soit (Δ) la perpendiculaire à (AB) passant par A et M le point de (Δ) tel que AB = AM et le triangle ABM est de sens direct.

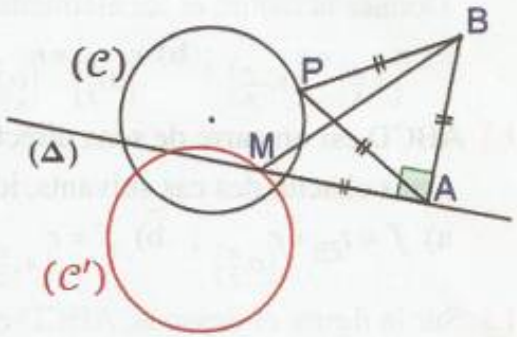
Déterminer et construire le lieu des points M lorsque P décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

Solution

Considérons les rotations $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r'_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$.

$\left(r'_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}\right)(P) = r'_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}(B) = M$

Donc M est l'image de P par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.



Le lieu des points M lorsque P décrit le cercle $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Exercice Résolu 2

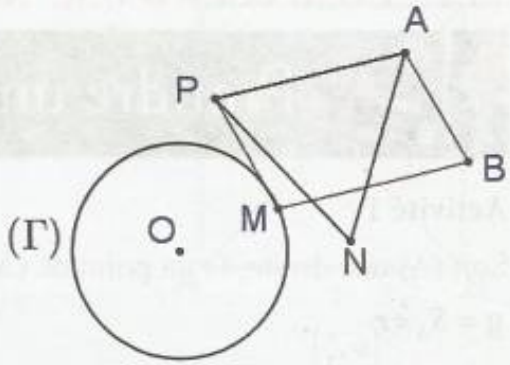
Soit (Γ) un cercle de centre O. A et B deux points extérieurs à (Γ). Soit M un point de (Γ). On considère le parallélogramme ABMP et le point N tel que APN soit un triangle équilatéral direct. Déterminer le lieu géométrique des points N lorsque M décrit (Γ).

Solution

Déterminons le lieu géométrique du point N lorsque M décrit (Γ)

Sur la figure ci contre les objets géométriques qui ne se déplacent sont les points A, B et le cercle (Γ).

ABMP étant un parallélogramme, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BA}$ et quel que soit le mouvement effectué par le point M le vecteur $\overrightarrow{MP}$ reste constant d'où $P = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$. Par ailleurs $N = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(P)$ donc $N = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(M)$.



Le lieu des points N lorsque M décrit (Γ) est le cercle (Γ') image de (Γ) par $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.

S'exercer

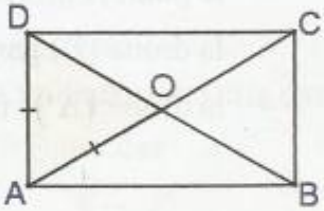
A et B sont deux points distincts du plan. Soit r et r' les rotations de centres A et B et d'angles de mesures $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ respectivement.

Montrer que $r' \circ r$ est une rotation, puis construire son centre Ω.

Soit A et B deux points distincts du plan. Soit r et r' les rotations de centres respectifs A et B et d'angles de mesures $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ respectivement

Montrer que $r' \circ r$ est une translation, puis déterminer son vecteur d'origine A.

Sur la figure ci-contre , ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O tel que $OA = AD$.



Donner la nature et les éléments caractéristiques les applications suivantes :

a) $r_{\left(O,\frac{\pi}{6}\right)} \circ r_{\left(B,-\frac{\pi}{6}\right)}$; b) $r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$; c) $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}$; d) $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

1.j ABCD est un carré de sens direct de centre O .

Dans chacun des cas suivants, identifier complètement la transformation f .

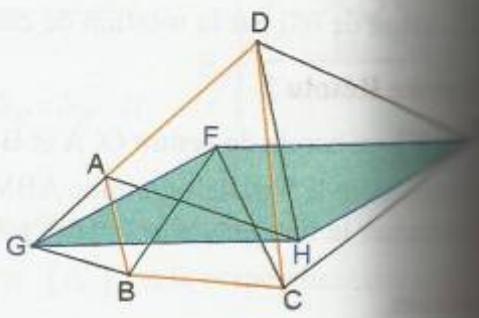
a) $f = t_{\overrightarrow{CD}} \circ r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$; b) $f = r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$; c) f $t_{\overrightarrow{CB}}$ $r_{\left(\quad,\frac{\pi}{2}\right)}$;d) $f = s_{(BD)} \circ s_{(OC)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$.

1.j Sur la figure ci-dessous, ABCD est un quadrilatère convexe de sens direct.

On construit les triangles équilatéraux de sens directs AGB, BCF, CED et DAH.

On considère les rotations :

- r de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
- r' de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.



a) Montrer que $r' \circ r = t_{\overrightarrow{GF}}$.

b) Déterminer l'image de H par $r' \circ r$.

c) En déduire que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

1.2.2 COMPOSÉE D'UNE ROTATION ET D'UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit (Δ) une droite, O un point de (Δ). On considère les applications $f = r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{\Delta}$ et $g = S_{\Delta} \circ r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$.

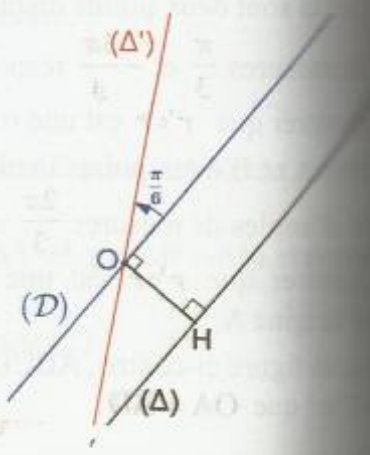
- Construire la droite (Δ') image de (Δ) par la rotation $r_{\left(O,\frac{\pi}{6}\right)}$. Vérifier que $O \in (\Delta')$.
- Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ et en déduire que $f = S_{(\Delta')}$.
- Construire la droite (Δ'') image de (Δ) par la rotation $r_{\left(O,-\frac{\pi}{6}\right)}$. Vérifier que $O \in (\Delta'')$.
- Déterminer $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta'')}$ puis en déduire que $g = S_{(\Delta'')}$.

Activité 2

Soit (Δ) une droite, O un point n'appartenant pas à (Δ) et considérons l'application $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{\Delta}$.

On construit :

- le point H projeté orthogonal de O sur (Δ) ;
- la droite $(\mathcal{D})$ parallèle à (Δ) et passant par O ;
- la droite (Δ') image de $(\mathcal{D})$ par la rotation $r_{\left(O,\frac{\pi}{6}\right)}$.



- Vérifier que $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta'} \circ S_D$.
- Montrons que $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ t_{2\overrightarrow{HO}}$.
- En déduire la nature de $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_\Delta$.

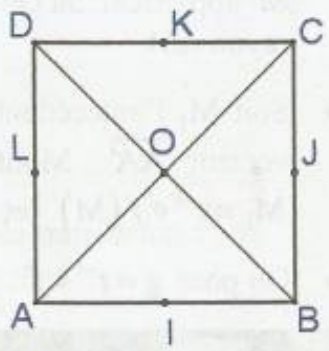
Retenir

Soit (Δ) une droite, O un point du plan.
La composée d'une rotation de centre O et de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) est :

- Une symétrie orthogonale si $O \in (\Delta)$.
- Une symétrie glissée si $O \notin (\Delta)$.

Exemple

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Donnons la nature de $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AC)}$ et $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BC)}$.



- $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale. En effet
$r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$ donc
$r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)}$.
$r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BC)}$ est une symétrie glissée car $O \notin (BC)$.
On peut caractériser cette symétrie glisée.
J est le projeté orthogonal de O sur (BC) et la droite (IK) est parallèle à (BC); de plus, $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(BD)} \circ S_{(IK)}$;donc

$r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BC)} = S_{(BD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(BC)} = S_{(BD)} \circ t_{2\overrightarrow{IO}} = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BA}} = S_{(BD)} \circ t_{(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})} = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{OA}} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$.

Comme $(OA) \perp (BD)$ posons alors $S_\Delta = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{OA}}$ on a $S_{(BD)} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{OA}}$ d'où $(\Delta) = (IK)$.

Ainsi $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BC)} = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$ est la symétrie glissée d'axe (JK) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

On peut aussi avoir $r_{(0,\frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)} = S_{(OD)} \circ S_{(OK)} \circ S_{(BC)} = S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$ or $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$

$$= S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CO}} \circ t_{\overrightarrow{OD}} = S_{(OD)} \circ S_{(OD)} \circ S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{OD}}$$
$$= S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{OD}}$$

S'exercer

Soit ABCD un carré tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$. I, J , K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Donner la nature et les éléments cactéristiques des transformations suivantes :

a) $S_{(BD)} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$; b) $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$; c) $S_{(BC)} \circ r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

1.1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Donner la nature et les éléments cactéristiques $f = r_{(\Omega,\theta)} \circ s_{\Delta}$ dans chacun des cas.

a) $\Omega(1;1)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $(\Delta) : 2x - y - 1 = 0$; b) $\Omega(1;1)$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $(\Delta) : x + y + 3 = 0$

1.3. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN

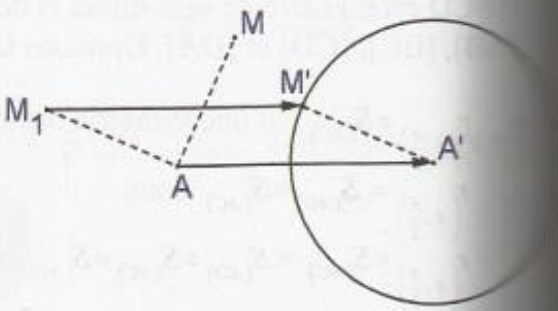
1.3.1 DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMETRIE

Prendre un bon départ

Soit f une isométrie et A une point du plan.

On note $A' = f(A)$.

- Justifier que pour tout point M du plan, son image M' appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre A' et de rayon AM.



- Soit M_1 l'antécédent M' par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Montrer que :
  $M_1 = t^{-1} \circ f(M)$ et $t^{-1} \circ f(A) = A$.
- On pose $g = t^{-1} \circ f$. JMontrer que g est une isométrie qui laisse invariant le point A.

Retenir

Soit f une isométrie plane et A un point. Alors il existe une unique translation t et une unique isométrie g du plan telles que $f = t \circ g$ et $g(A) = A$.

S'en Convaincre

L'existence de g est mise en évidence dans l'activité ci-dessus. Il reste à prouver l'unicité.

Supposons qu'il existe une translation t' et une isométrie g' telle que $f = t' \circ g'$ et $g'(A) = A$.

On a $\left.\begin{array}{l} f(A) = t' \circ g'(A) = t'(A) \\ f(A) = t \circ g(A) = t(A) \end{array}\right\} \Rightarrow t'(A) = t(A)$ donc $t' = t$ et par conséquent $g = g'$.

Exemple

Soit f une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe (Δ) et A un point du plan.

Déterminons une isométrie g et une translation t telles que $f = t \circ g$ avec $g(A) = A$.

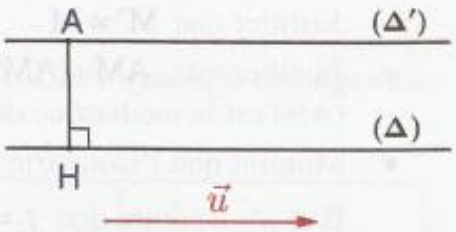
- Si $A \in (\Delta)$, alors on prend $t = t_{\vec{u}}$ et $g = S_{\Delta}$.
- Si $A \notin (\Delta)$ alors :

Soit H le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Soit (Δ') la parallèle à (Δ) passant par A.

On a : $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = t_{2\overrightarrow{AH}}$ donc $S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{AH}} \circ S_{\Delta'}$.

$f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = \left(t_{\vec{u}} \circ t_{2\overrightarrow{AH}}\right) \circ S_{\Delta'}$ on peut alors prendre $t = t_{\vec{u}} \circ t_{2\overrightarrow{AH}}$ et $g = S_{\Delta'}$.



S'exercer

Soit A un point du plan. Pour chacune des isométries f suivantes, déterminer une translation t et une isométrie g laissant invariant le point A telles que $f = t \circ g$.

a) $f = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$; b) S_{Δ} symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

f est une application du plan P dans lui-même dont l'expression analytique est suivante :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y) \end{cases}$$

a) Démontrer que f est une isométrie.

b) Soit O' l'image de O par f. Déterminer l'expression analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

c) Justifier que $t^{-1} \circ f$ est une isométrie qui laisse le point O invariant.

ISOMÉTRIES ET POINTS INVARIANTS

Prendre un bon départ

f une isométrie du plan.

Cas 1

Supposons qu'il existe trois points non alignés A, B et C invariants par f.

M un point du plan et M' son image par f.

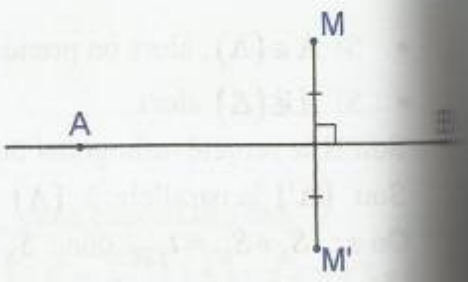
- Justifier que AM = AM' , BM = BM' et CM = CM'.
- Montrer que si M ≠ M' ,alors les points A, B et C sont alignés.
- En déduire que M = M', puis déterminer f.

Cas 2

Supposons que $f \neq id_P$ et il existe deux points A et B invariants par f.

M un point du plan *n'appartenant pas* à la droite (AB) et M' son image par f.

- Justifier que $M' \neq M$.
- Justifier que $AM = AM'$ et $BM = BM'$. En déduire que (AB) est la médiatrice de [MM'].
- Montrer que l'isométrie $S_{(AB)} \circ f$ laisse invariants A, B et M. Déduire que $f = S_{(AB)}$.



Retenir

Soit f une isométrie du plan.

(1) Si f laisse invariants ***trois points non alignés*** alors f est l'application ***identique***.

(2) Si f laisse invariants ***deux points***, et n'est pas l'application identique alors f est une ***symétrie orthogonale*** d'axe passant par ces deux points

(3) Si f laisse invariant un ***seul point***, alors f est ***une rotation***, de centre ce point

(4) Si f n'admet pas ***aucun point invariant*** alors f est ***une translation*** ou ***une symétrie glissée***

S'en Convaincre

Les activités 1 et 2 ci-dessus aboutissent respectivement à la démonstration de (1) et de (3).

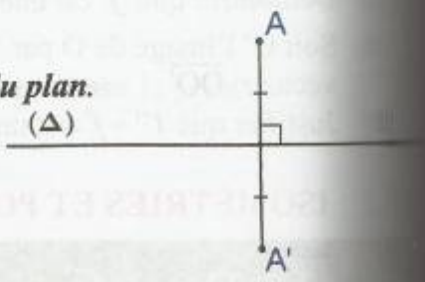
Démontrons (2) ***et*** (3).

1)

Soit f une isométrie qui laisse invariant un seul point I du plan.

Montrons que f est une rotation de centre I.

Soit A un point du plan distinct de I. Notons A' l'mage de A par f.



- $A' \neq A$ car f a un seul point invariant. Par ailleurs, $IA = IA'$; donc I appartient à la médiatrice (Δ) de [AA'].
- $(S_\Delta \circ f)(A) = S_\Delta(A') = A$ et $S_\Delta \circ f(I) = S_\Delta(I) = I$ $S_\Delta \circ f$ laisse invariant A et I c'est-à-dire que $S_\Delta \circ f = S_{(AI)}$ d'après (2).
- $S_\Delta \circ f = S_{(AI)} \Leftrightarrow f = S_\Delta \circ S_{(AI)}$ et $(\Delta) \cap (AI) = \{I\}$. f est une rotation de centre I.

2) ***Soit f une isométrie n'admettant aucun point invariant.***

Soit A un point du plan. D'après le retenir 1.3.1, il existe une unique translation t et une unique isométrie g telle que $g(A) = A$ et $f = t \circ g$.

- g n'est pas une rotation car sinon f admet un point invariant donc A n'est pas le seul point invariant de g.
- D'après les propriétés (1) et (2), g est soit id_P soit une symétrie orthogonale.
  - Si $g = id_P$ alors f est égale à la translation t.
  - Si g est une symétrie orthogonale alors f est une symétrie glissée.

Remarque

- Toute ***isométrie*** du plan est ***soit une translation, une rotation, une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée***

Nombre de points invariants	*Trois points non alignés*	*Deux points distincts A et B*	*Un seul point A*	*Aucun point*
Isométrie	$Id_{\mathcal{P}}$	$S_{(AB)}$	*Rotation de centre A*	*Translation ou symétrie glissée*

- Toute *isométrie* est :
  - soit ***une translation*** ;
  - soit ***la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation*** ;
  - soit ***la composée d'une rotation et d'une translation.***

Exemple

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') telles que $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$. Déterminons la nature de f.

Soient M, N deux points du plan et M', N' leurs images respectives par f.

$$x_{N'} - x_{M'} = -\frac{1}{2}x_N - \frac{\sqrt{3}}{2}y_N + \sqrt{3} + \frac{1}{2}x_M + \frac{\sqrt{3}}{2}y_M - \sqrt{3}$$

$$= -\frac{1}{2}(x_N - x_M) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_N - y_M)$$

$$y_{N'} - y_{M'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_N + \frac{1}{2}y_N + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_M - \frac{1}{2}y_M - 1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x_N - x_M) + \frac{1}{2}(y_N - y_M)$$

$$M'N'^2 = \left(-\frac{1}{2}(x_N - x_M) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_N - y_M)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_N - x_M) + \frac{1}{2}(y_N - y_M)\right)^2$$

$= (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = MN^2$; donc f **est une isométrie.**

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \end{cases}$$; en multipliant les membres de

la deuxième équation par $\sqrt{3}$, on trouve que les deux équations du système sont équivalentes; donc l'en

semble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation $-\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{3}=0$ et $f=s_{\Delta}$.

S'exercer

1.o $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormée du plan.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ définies par $\begin{cases} x'=1+y \\ y'=1-x \end{cases}$.

Montrer que f est une isométrie. En déduire sa nature et les éléments caractéristiques.

1.p Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ définies par $\begin{cases} x'=y+1 \\ y'=x+1 \end{cases}$. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

1.q Soit D un point du plan.

Déterminer toutes les isométrie f du plan telles que $f(D)=D$.

1.3.3 DÉPLACEMENTS ET ANTIDÉPLACEMENTS

Prendre un bon départ

Activité 1

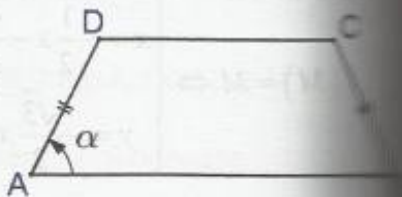
Dans le plan orienté on considère un angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Compléter le tableau ci- dessous par $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ou $-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

Isométrie f	*Translation*	*Rotation*	*Symétrie orthogonale*	*Symétrie glissée*
Image de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ par f.				

Activité 2

Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze isocèle de sens direct tel que (AB) parallèle à (DC).



1) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.
   - Construire le point A' image de A par t.
   - Démontrer que B est l'image de A' par la rotation de centre C et d'angle $\hat{\alpha}$.
   - Déterminer alors une isométrie f qui conserve les angles orientés et telle que $f(A)=B$ et $f(D)=C$.
2) Déterminer une autre isométrie g distincte de f telle que $g(A)=B$ et $g(D)=C$. g conserve-t-elle les angles orientés ?

Retenir

Soit f une isométrie du plan

- Si f conserve les angles orientés, alors f est appelée ***déplacement***.
- Si f transforme les angles orientés en leurs opposées alors f est appelée ***antidéplacement***.

Toute isométrie est soit ***un déplacement*** soit ***un antidéplacement***.

Isométrie	*Avec point invariant*	*Sans point invariant*
Déplacement	*Rotation*	*Translation*
Antidéplacement	*Symétrie orthogonale*	*Symétrie glissée*

Composée et réciproque de déplacements et d'antidéplacements.

Composée	*Déplacement*	*Antidéplacement*
Déplacement	*Déplacement*	*Antidéplacement*
Antidéplacement	*Antidéplacement*	*Déplacement*

- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Détermination d'une isométrie

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$. Alors :

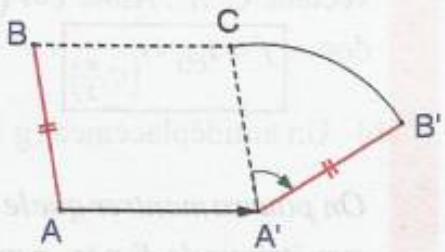
- Il existe ***un unique déplacement*** qui transforme A en A' et B en B'.
- Il existe ***un unique antidéplacement*** qui transforme A en A' et B en B'.

En Convaincre

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$.

Existence et unicité d'un déplacement.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et $C = t(B)$.



- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ et donc le quadrilatère AA'CB est un parallélogramme d'où $A'C = AB = A'B'$.
- De plus, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C}$ et donc B' est l'image de C par la rotation r de centre A' et d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.
- Posons $f = r \circ t$. On a $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et f est un déplacement car elle est la composée de deux déplacements.

Unicité : Supposons qu'il existe un autre déplacement g tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$ Alors $f^{-1} \circ g(A) = f^{-1}(A') = A$ et $f^{-1} \circ g(B) = f^{-1}(B') = B$; donc $f^{-1} \circ g$ est un

déplacement qui laisse invariants deux points distincts d'où $f^{-1}\circ g = \mathrm{Id}_P$ c'est-à-dire $f = g$

b) ***Existence et unicité d'un antidéplacement .***

La symétrie orthogonale d'axe (A'B') laisse invariants les points A' et B'.

Considérons la transformation $h = S_{(A'B')}\circ f$ où f est le déplacement déterminé en a).

h est un antidéplacement car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement.

$h(A) = S_{(A'B')}\circ f(A) = A'$ et $h(B) = S_{(A'B')}\circ f(B) = B'$.

Unicité : Supposons que k est un autre antidéplacement tel que k(A)=A' et k(B)=B'.

Alors $(h^{-1}\circ k)(A) = A$ et $(h^{-1}\circ k)(B) = B$, donc $h^{-1}\circ k = \mathrm{Id}_P$ car $h^{-1}\circ k$ est un déplacement d'où $k = h$.

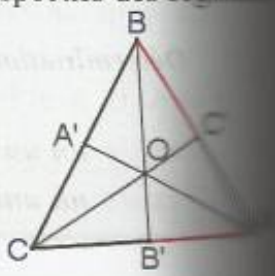
Remarque

Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$. Notons f le déplacement tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors le déplacement f est une translation.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors le déplacement f est une rotation.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].



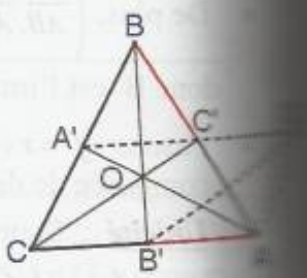
a) Démontrons qu'il existe un déplacement f tel que $f(B) = B'$ et $f(C') = A$.

- f existe car $BC' = B'A$. De plus $\overrightarrow{BC'} \neq \overrightarrow{B'A}$; donc f est une rotation.
- Soit r la rotation de centre C' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

On a $r(B) = A'$. D'autre part $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A}$ et donc B' est l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{C'A}$. Ainsi $t\circ r(B) = t(A') = B'$ et $t\circ r(C') = t(C') = A$. Le déplacement cherché est donc $\boxed{f = t_{\overrightarrow{C'A}}\circ r_{\left(C',\frac{\pi}{3}\right)}}$.

b) Un antidéplacement g tel que $g(B) = B'$ et $g(C') = A$ est $\boxed{g = S_{(AB')}\circ t_{\overrightarrow{C'A}}\circ r_{\left(C',\frac{\pi}{3}\right)}}$.

On pourra montrer que le centre D de f est le symétrique de A' par rapport à C' puis en déduire que $f = r_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}$ *et* $g = S_{(AB')}\circ r_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}$.



S'exercer

ABCD est un trapèze isocèle de sens direct tel que (AB) parallèle à (DC).

Démontrer qu'il existe un antidéplacement f et un déplacement g tels que :

a) $f(A)=C$ et $f(D)=B$; b) $g(A)=C$ et $g(D)=B$.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

Déterminer un déplacement f et un antidéplacement g tels que :

a) $f(C)=B$ et $f(B')=A'$; b) $g(C)=B$ et $g(B')=A'$.

Soit A et B deux points distincts, r une rotation d'angle $\hat{\alpha}$ avec $\alpha \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $r(A)=C$ et $r(B)=D$.Montrer qu'il existe un unique déplacement d qui transforme A en D et B en C.

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

- Reconnaître une similitude, puis sa classification.
- Caractériser par une écriture complexe une similitude directe du plan ;
- Donner les éléments caractéristiques d'une similitude directe du plan.

2.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SIMILITUDES PLANES.

Prendre un bon départ

Activité 1

ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O. A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Démontrer que : $\frac{OC}{AB}=\frac{OA'}{AB'}=\frac{A'C}{BB'}$.

Activité 2

Soit h une homothétie de rapport k et f une isométrie plane. A et B deux points distincts du plan.

- On pose $A_1=f(A)$ et $B_1=f(B)$, puis $A'=h(A_1)$ et $B'=h(B_1)$.
  Montrer que $A'B'=|k|AB$.
- On pose $A_1=h(A)$ et $B_1=h(B)$, puis $A'=f(A_1)$ et $B'=f(B_1)$.
  Montrer que $A'B'=|k|AB$.
- Montrer que si l'isométrie f est un déplacement alors $h\circ f$ et $f\circ h$ conservent les angles orientés.
- Montrer que si $k\in\{-1;1\}$ alors $h\circ f$ et $f\circ h$ sont des isométries.

Retenir

(1) Soit k un nombre réel ***strictement positif***.

On appelle ***similitude de rapport k*** toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points M et N d'images M' et N', on ait $\mathbf{M'N'=kMN}$.

(2) Toute similitude est ***la composée*** d'une ***isométrie*** et d'une ***homothétie***.

- La composée d'une homothétie et d'un ***déplacement*** est appelée ***similitude directe***.
- La composée d'une homothétie et d'un ***antidéplacement*** est appelée ***similitude indirecte***.

(3) *Propriétés de conservation et de proportionalité*

Toute similitude conserve :	**Toute similitude transforme :**
• L'alignement des points,	• Les droites en droites

- Le parallélisme des droites,
- L'orthogonalité,
- La mesure des angles non orientés
- Le barycentre des points pondérés

- Les demi-droites en demi-droites.
- Les segments en segments
- Les cercles en cercles

Toute similitude de rapport k multiplie

- Les longueurs par k.
- Les aires par k^2.

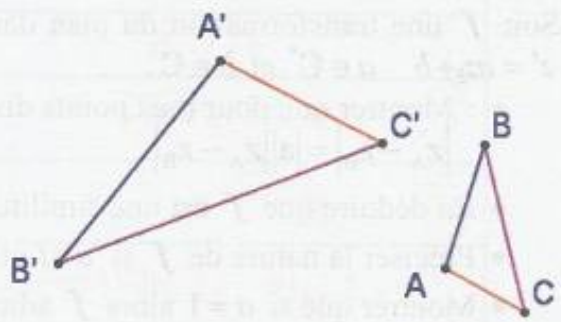
Exemple

- Toute ***isométrie*** est une similitude de ***rapport*** 1.
- Toute ***homothétie*** de rapport k est une similitude de *rapport* $|k|$. .
- La composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k est une similitude de *rapport* $|k|$.
- Toute homothétie, toute translation, toute rotation est une similitude directe.
- Toute symétrie orthogonale glissée, est une similitude indirecte.

S'exercer

Sur la figure ci-contre ABC et EFG sont deux triangles semblables. On peut alors écrire

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$



a) Construire le point :

- E ∈ [A'B'] tel que A'E = AB.
- F ∈ [A'C'] tel que A'F= AC.

b) Justifier que les triangles ABC et A'EF sont isométriques.

On pose $k=\frac{AB}{A'B'}$, justifier que A'B'C' est l'image de A'EF par une homothétie h .

En déduire qu'il existe une similitude S qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

A et B sont deux points tels que : AB = 7; σ est la symétrie de centre A et h est l'homothétie de centre B et de rapport −3. On pose : $f = h \circ \sigma$; A' = f (A) et B' = f (B). Déterminer A'B'.

Recopier et compléter l tableau suivant par "similitude directe" ou "similitude indirecte" :

∘	*Identité*	*Réflexion*	*Translation*	*Rotation*
Homothétie				

Soit S une similitude admettant trois points fixes A, B et C .

a) Démontrer que le rapport de la similitude S est 1.

b) En déduire que S est une isométrie et que S est l'identité.

1.e Soit S une similitude admettant deux points invariants A et B.

a) Démontrer que le rapport de la similitude S est 1.

b) En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

2.2. SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

2.2.1 ÉCRITURES COMPLEXES DES SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit S une similitude directe, alors $S = h \circ d$ *où h est une homothétie et d un déplacement.*

L'expression complexe de h est : $z' = kz + b$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

L'expression complexe de d est : $z' = e^{i\alpha}z + c$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{C}$ si d est une rotation d'angle

- Montrer que l'expression complexe de S est sous la forme : $z' = az + p$ *où* $a \in \mathbb{C}^*$ et
- Déterminer l'expression complexe de $d \circ h$.

Activité 2

Soit f une transformation du plan dans lui-même dont l'expression complexe est sous la forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Montrer que pour tous points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B, on a $|z'_A - z'_B| = |a||z_A - z_B|$.
- En déduire que f est une similitude de rapport $k = |a|$.
- Préciser la nature de f si $a=1$ et l'élément caractéristique de f.
- Montrer que si $a \neq 1$ alors f admet un seul point invariant Ω dont on exprimera l'affixe en fonction de a et de b.

– Soit α un argument de a. Montrer que $z' - \omega = |a|e^{i\alpha}(z - \omega)$.

– En déduire que $f = h \circ r = r \circ h$ *où* h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = |a|$ et est la rotation de centre Ω et d'angle α.

Retenir

(1) Toute similitude ***directe*** du plan a une écriture de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et

(2) Toute application S du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une ***similitude directe*** du plan.

- Si $a=1$, alors S est ***une translation*** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $|a| \neq 1$ alors :

– S admet ***un seul point invariant*** Ω qui a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

- $S = h \circ r = r \circ h$ *où* r est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\alpha = arg\,a$ et h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = |a|$

Notation et Vocabulaire

Soit S une similitude directe.

- Si S admet un point invariant Ω alors l'écriture de S sous la forme $S = h \circ r = r \circ h$ est appelée ***forme réduite*** de S.
- S est appelée similitude directe de centre Ω, de rapport $|k|$ et d'angle de mesure α avec $\hat{\alpha}$ l'angle de la rotation r et k le rapport de l'homothétie h.
- On la note souvent $S_{(\Omega,|k|,\alpha)}$.
- Si S n'admet pas de point invariant, alors la translation S est appelée ***similitude de rapport 1 et d'angle nul***.

Remarque

- Toute similitude directe conserve les angles orientés.
- Traduction de S à l'aide de la forme réduite

Nature exacte de S	*Écriture complexe réduite*
La translation de vecteur non $\vec{u}$ d'affixe b	$z' = z + b$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
La rotation de centre Ω et d'angle α	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$
La similitude directe de centre Ω, d'angle α et de rapport $\|k\|$	$z' - \omega = \|k\| e^{i\alpha}(z - \omega)$ si $k > 0$
	$z' - \omega = \|k\| e^{i(\alpha+\pi)}(z - \omega)$ Si $k < 0$

Exemple

Déterminons une expression complexe de la similitude directe f de centre Ω(1 ; 2), d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 3.

f a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ où a et b sont deux complexes à déterminer.

Les module et argument de sont respectivement le rapport 3 et l'angle $\frac{\pi}{2}$ de la similitude.

Donc $a = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.

Ω étant le centre de f, et ω l'affixe de Ω on a :

$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow 3i\omega + b = \omega \Leftrightarrow 3i.(1+2i) + b = 1 + 2i \Leftrightarrow 3i - 6 + b = 1 + 2i \Leftrightarrow b = 7 - i$

Finalement, l'écriture complexe de la similitude directe f est : $z' = 3iz + 7 - i$.

Déterminons les éléments caractéristiques de la similitude directe g de forme complexe

$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2 - i$.

- Rapport et angle: $\left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$, $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

  Ainsi, une mesure de l'angle de g est $\frac{\pi}{3}$ et son rapport 2.

- Soit ω l'affixe du centre de g. On a :

$$g(\omega) = \omega \Leftrightarrow \omega\left[1-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right] = 2-i \Leftrightarrow \omega = \frac{2-i}{-i\sqrt{3}} = \frac{i(2-i)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi g est la similitude directe de centre $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Exercice Résolu

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de f.

b) En déduire que f est une similitude directe.

Solution

a) Écriture complexe de f.

Notons z et z' les affixes de M et M' respectivement.

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + i\left(-x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3}\right) \\ &= \left(-x - iy\right) + \left(y\sqrt{3} - xi\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \\ &= -\left(x + iy\right) + \left(-i^2 y\sqrt{3} - xi\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \text{ car } -i^2 = 1 \\ &= -\left(x + iy\right) - i\sqrt{3}\left(x + iy\right) - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \\ &= \left(-1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$. Donc f est une similitude directe.

Méthode

En général, pour déterminer l'écriture complexe d'une application affine dont on connaît l'expression analytique, on peut utiliser les formules complexes ci-dessous : $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

S'exercer

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes du plan définies par leurs expressions complexe.

a) $z' = -2z + 3 - 2i$; b) $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 2i - 2$; c) $z' = z - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}i$;

d) $z' = (2-2i)z + 3i$; e) $z' = -\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)z + 1 + i$; f) $z' = -3e^{i\frac{\pi}{3}}z + 3 - 6i$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle de mesure α.

a) $\Omega(2,-1)$; $k = \frac{2}{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(1,-2)$; $k = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) $\Omega(0,-1)$; $k = 2$ et $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; d) $\Omega(1,1)$; $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe $S = r \circ h$ où r est la rotation de centre Ω et d'angle α, h l'homothétie de rapport k et de centre Ω.

a) $\Omega(2,-1)$; $k = -\frac{2}{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\Omega(1,-2)$; $k = -1$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) $\Omega(0,-1)$; $k = 2$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; d) $\Omega(1,1)$; $k = -\sqrt{2}$ et $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de f.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

COMPOSÉE DE SIMILITUDES DIRECTES – BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE

Prendre un bon départ

Soit S et S' deux similitudes directes d'écriture complexes respectives $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$.

Montrer que $S' \circ S$ a pour écriture complexe $z' = k'ke^{i(\alpha'+\alpha)}z + \left(k'be^{i\alpha'} + b'\right)$.

En déduire que $S' \circ S$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$.

Montrer que pour tout point $M(z)$ d'image $M'(z')$ par S, $z = \frac{1}{k}e^{-i\alpha}z' - \frac{b}{k}e^{-i\alpha}$.

En déduire que S^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle de mesure $-\alpha$.

Retenir

Soit S une similitude plane directe de rapport k et d'angle de mesure α, S' une similitude plane directe de rapport k' et d'angle de mesure α'.

- La bijection ***réciproque*** de la similitude S est une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle de mesure $-\alpha$.
- La ***composée*** $S' \circ S$ est une similitude plane directe de rapport kk' et d'angle de mesure $\alpha+\alpha'$.

–Si $\alpha+\alpha' \equiv 0[2\pi]$ et $kk' \neq 1$ alors $S' \circ S$ est une homothétie de rapport kk'.

–Si $kk'=1$ alors $S' \circ S$ est une translation ou une rotation.

Exemple

Soient S et S' les similitudes planes directes d'expressions complexes $z'=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z+2i$ et $z'=2e^{i\frac{\pi}{6}}z+1-i$ respectivement.

- ***Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de*** S^{-1}.

$-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ car $-1=e^{i\pi}$.

Donc $M'=S(M) \Leftrightarrow z'=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z+2i$. S^{-1} est donc la similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'angle de mesure $-\frac{3\pi}{4}$.

- ***Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de*** $S' \circ S$.

Le rapport de $S' \circ S$ est $2\sqrt{2}$ et une mesure de son angle est $\theta=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{12}$.

- ***Comparons*** $S' \circ S$ ***et*** $S \circ S'$.

Déterminons leurs écritures complexes :

Cas de $S' \circ S$

$z'=2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z+2i\right)+1-i=2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z+4i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)+1-i$. soit

$\underline{\underline{z'=2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z-1+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}}$.

Cas de $S \circ S'$:

- $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}z+1-i\right)+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)(1-i)+2i$

$=2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right)+2i=\underline{\underline{2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}z+\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+4}{2}\right.\right.}}$

$S' \circ S \neq S \circ S'$.

S'exercer

Soit S et S' les similitudes directes d'expressions complexes respectives $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2i$ et $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + i$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S^{-1}.

b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de $S \circ S'$.

c) Comparer $S \circ S'$ et $S' \circ S$.

CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit $S = h \circ d$ une similitude directe de rapport $k > 0$, h étant une homothétie et d un déplacement. A et B deux points distincts du plan. On note $A' = S(A)$ et $S(B) = B'$. Montrer que :

- Si d est une translation, alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \hat{0}$.
- Si d est une rotation d'angle $\hat{\theta}$ alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \hat{\theta}$.
- En déduire qu'il existe un nombre réel α tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \hat{\alpha}$.

Activité 2

Soit f une transformation du plan, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que pour tous points distincts A et B images respectives A' et B' par f, on a $A'B' = kAB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \hat{\alpha}$.

Soit S la similitude directe de rapport k et d'angle $\hat{\alpha}$. On note $A_1 = S^{-1}(A')$ et $B_1 = S^{-1}(B')$.

- Justifier que $A_1B_1 = \frac{1}{k}A'B'$ et $mes\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A_1B_1}\right) = -\alpha$.
- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.
- Vérifier que $A_1 = (S^{-1} \circ f)(A)$ et $B_1 = (S^{-1} \circ f)(B)$ et en déduire que $S^{-1} \circ f$ est une translation qu'on notera t.
- Montrer que f est une similitude directe plane.

Retenir

Soit f une application du plan dans lui-même, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. f est une similitude directe de rapport k et d'angle α ***si et seulement si*** pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = kMN$ et $mes\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \alpha$

Remarque

- Soit S une similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport $k>0$ et d'angle de mesure α. Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z'
- $M'=S(M)\Leftrightarrow z'-\omega=ke^{i\alpha}(z-\omega)\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=k\Omega M\\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)=\alpha\end{cases}$

Note: $z'-\omega=ke^{i\alpha}(z-\omega)$ est l'écriture exponentielle de S

Exemple

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases}x'=x-y+1\\ y'=x+y-1\end{cases}$.

Démontrons que f est une similitude directe dont on donnera le rapport et le centre.

- ***Nature et rapport***

Soit $M(x,y)$, $N(a,b)$ deux point du plan et $M'(x',y')$, $N'(a',b')$ leurs images respectives par f.

$a'-x'=a-b+1-x+y-1=(a-x)-(b-y)$

$b'-y'=a+b-1-x-y+1=(a-x)+(b-y)$

Donc $M'N'^2=\left((a-x)-(b-y)\right)^2+\left((a-x)+(b-y)\right)^2$

$=2\left[(a-x)^2+(b-y)^2\right]=2MN^2$

Ainsi $M'N'=\sqrt{2}\,MN$ donc f **est une similitude de rapport** $\sqrt{2}$.

- ***Centre***

$f(M)=M\Leftrightarrow\begin{cases}x=x-y+1\\ y=x+y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$; f a le seul point Ω(1 ;1) invariant. Donc Ω(1 ;1) est le centre de la similitude f.

- ***Angle***

Soit $O'=f(O)=O'(1;-1)$, on a $\overrightarrow{O'\Omega}(0;2)$ et $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{O'\Omega}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{O\Omega}\cdot\overrightarrow{O'\Omega}}{O\Omega\times O'\Omega}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{O'\Omega}}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{O'\Omega}\right)}{O\Omega\times O'\Omega}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ radiant.

Note: On peut chercher l'écriture complexe de f afin de repondre aux questions posées

S'exercer

2.f Soit S une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle de mesure α.

Soit M un point et M' son image par S, montrer que :

a) Si $k=\sqrt{2}$ et $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ alors ΩMM' est un triangle rectangle isocèle en M de sens indirect

b) Si $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ et N le symétrique de M par rapport à la droite (ΩM') alors ΩMN est un triangle équilatéral de sens direct.

...lan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') définies par $\begin{cases} x' = 2x+3 \\ y' = 2y+1 \end{cases}$.

Déterminer la nature et l'élément caractéristique de f.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') définies par $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

DÉTERMINATION DES SIMILITUDES DIRECTES-UTILISATIONS DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Prendre un bon départ

...mité 1

..., A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ *et* $A' \neq \Omega$.

...ination d'une similitude directe de centre Ω qui transforme A en A'.

...se $k = \dfrac{\Omega A'}{\Omega A}$, $\alpha = mes\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right)$. On considère la similitude directe S de centre Ω, de rapport ... d'angle de mesure α.

- Vérifier que $S(\Omega) = \Omega$.
- Soit $B = S(A)$. Montrer que $\Omega B = \Omega A'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \hat{0}$.
- En déduire que $A' = B = S(A)$.
- En remarquant que $S = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$, justifier que S est unique.

...mité 2

... $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A et A' deux points du plan.

...ination d'une similitude directe de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A en A'.

...sidérons la transformation du plan qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que ... $az + b$.

- Déterminer b pour que A' soit l'image de A.
- En déduire que l'unique similitude directe de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A et A' est $S : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = ke^{i\alpha}(z - z_A) + z_{A'}$

Retenir

(1) Soit Ω, A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$.
Il existe une unique similitude directe plane de centre Ω qui transforme A en A'.

(2) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A et A' deux points du plan.
Il existe une unique similitude directe plane de rapport k et d'angle α qui transforme A en A'.

(3) Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$. et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe plane qui transforme A en A' et B en B'.

S'en Convaincre

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont tous non nuls.

Posons $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\alpha = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)$.

D'après (2), il existe une seule similitude S de rapport k et d'angle de mesure α qui transforme A en A'. Soit $C = S(B)$, d'après la propriété caractéristique on a: $A'C = kAB$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C}}\right) = \alpha$.

On a donc : $A'C = kAB = A'B'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right) = -\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{0}$.

$$\left.\begin{array}{l} A'C = A'B' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B'}}\right) = \hat{0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow C = B'.$$ Ainsi $B' = S(B)$ et S transforme B en B'.

Exemple

ABC est un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct. D est le symétrique de A par rapport

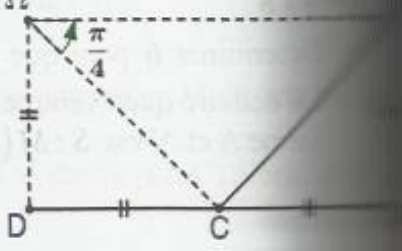
a) Déterminons le rapport et une mesure de l'angle de la similitude directe S qui transforme en C et C en B.

$$\left.\begin{array}{l} S(D) = C \\ S(C) = B \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{CB}{DC} \text{ et } mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

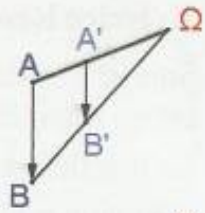
$CB^2 = 2CA^2 = 2DC^2$;donc $CB = DC\sqrt{2}$;soit $k = \sqrt{2}$.

b) Construisons le centre Ω de S.

$S(D) = C \Rightarrow \Omega C = \sqrt{2}\Omega D$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}}\right) = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\Omega D}{\Omega C} = \frac{\sqrt{2}}{\hat{\Omega}} = \cos\frac{\pi}{4}$; ΩDC est un triangle rectangle ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ dont l'hypoténuse est $[\Omega C]$ et un côté de l'angle droit est $[\Omega D]$. Il est donc rectangle isocèle en D et est de sens direct.



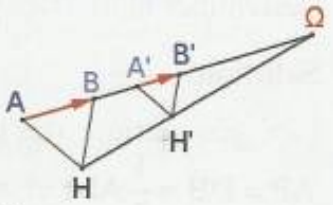
Méthode



***Éléments caractéristiques de S* dans le cas (3).**

a) **Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles**

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors S est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors S est une homothétie de rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$.

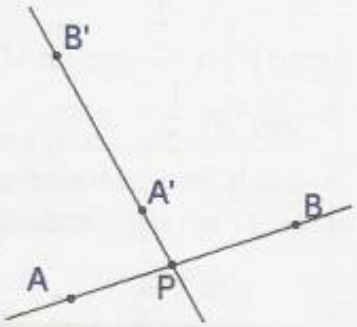


– Le centre Ω de S est le point d'intersection de (AA') et (BB') si $(AA') \neq (BB')$.

– Si les droites (AA') et (BB') sont confondues alors $\Omega \in (AA')$.

b) **Les droites (AB) et (A'B') sont sécantes en un point P.**

Dans ce cas, S n'est ni une translation, ni une homothétie. Son rapport est $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et son angle $\alpha = mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$. Son centre Ω étant invariant, on a : $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

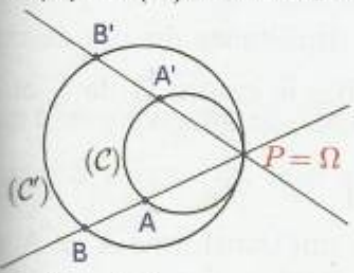


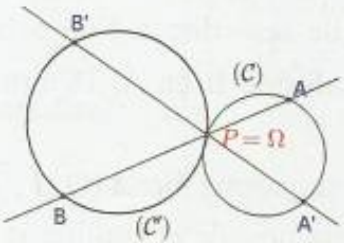
– Si P est distinct de chacun des points A, B, A' et B', alors les points P, A et B sont alignés. Il en est de même des points P, A' et B'.

Donc $2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = 2mes\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'}\right) = 2mes\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB'}\right)$ et par conséquent $2\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) = 2\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'}\right)$ et $2\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}\right) = 2\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB'}\right)$.

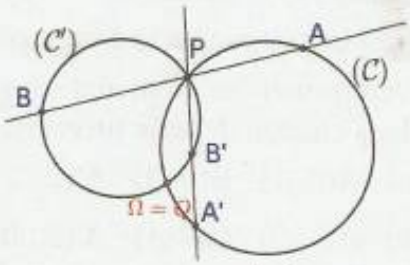
Ainsi, Ω appartient aux cercles (C) et (C') respectivement circonscrits aux triangles PAA' et PBB'.

– Si (C) et (C') sont tangents alors $P = \Omega$.

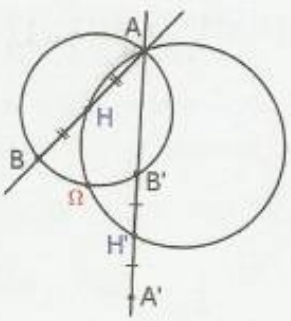




– Si (C) et (C') sont sécants en P et Q alors Ω = Q.



– Supposons que P est l'un des points A, B, A' ou B'. Par exemple pour P = A ,on a la configuration ci-contre.



Exercice Résolu

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle et A un point extérieur à $(\mathcal{C})$. Soit M un point et B le point du plan tel que [illegible] est un triangle équilatéral de sens direct. On note D le milieu [MB].

La parallèle à (MB) passant par A et la parallèle à (AD) passant par B se coupent en P.

Déterminer le lieu des points P lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

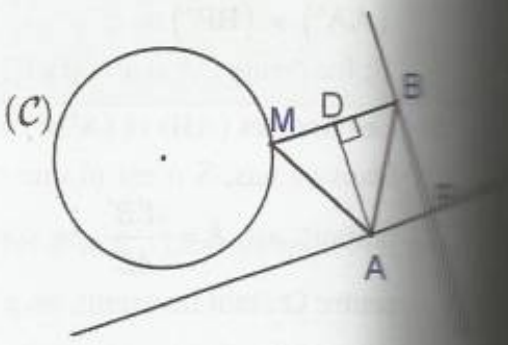
Solution

Lieu géométrique des points P lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

$AP = DB = \frac{1}{2}AM$ et $mes\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = -\frac{2\pi}{3}$

Donc P est l'image de M par la similitude directe de centre A de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

Ainsi, le lieu géométrique cherché est le cercle $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par cette similitude.



S'exercer

2.i ABCD est un carré de côté 1 et de sens direct, I le milieu de [CD].

Déterminer la similitude directe S telle que $S(I) = B$ et $S(D) = C$.

2.j Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A un point de $(\mathcal{C})$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$. On considère le point P tel que AMNP soit un carré de sens direct.

Déterminer le lieu du centre H de ce carré lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

2.k Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. Soit S la similitudes directe de rapport [illegible] d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en A. Déterminer le centre Ω de S et construire l'image C' de C par S.

2.l Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S qui transforme A en A' et B en B' dans chacun des cas suivants;

a) A(0 ,1) B(0 ,3) A'(2 , 2) et B' (−1,−1).

b) A(1 ,0) B(0 ,1) A'(3 , 0) et B' (0,3).

c) A(1 ,2) B(3 ,-1) A'(0 , -3) et B' (1,1).

S'ENTRAÎNER

ISOMÉTRIES DU PLAN

est un triangle équilatéral de sens direct et centre O.

ner les transformations suivantes :

$\circ s_{(AB)}$; b) $s_{(OC)} \circ s_{(BO)}$;

est un carré de sens direct de centre O. et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Pour chacun des cas suivants, donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

$\circ s_{(AC)}$; c) $f = s_{(AB)} \circ s_{(AO)}$;

$\circ s_{(IJ)}$; d) $f = s_{(LJ)} \circ s_{(AB)}$.

est un rectangle de sens direct.

ner les droites (Δ) et (Δ') tels que :

$\circ s_{\Delta}$; b) $t_{\overrightarrow{AD}}$ s $s_{(AB)}$.

est un triangle équilatéral de sens direct.

ner la droite (Δ) telle que $= s_{\Delta} \circ s_{(AB)}$.

ner la droite (Δ') telle que $= s_{(AB)} \circ s_{\Delta'}$.

uire la nature et les éléments caractéristiques la transformation $f = r_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

est un carré de sens direct direct de

la nature et les éléments caractéristiques applications $t_{\overrightarrow{AC}} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $s_C \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

6.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. Donner la forme réduite de l'application $f = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$ et en déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.

7.

ABCD est un carré de sens direct de centre O. Dans chacun des cas suivants, donner la nature et les éléments caractéristiques de *f*.

a) $f = r_{\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$; b) $f = r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$;

c) $f = s_{(BD)} \circ s_{(OCJ)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$, $f = r_{\left(0,\frac{\delta}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ et $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{\left(0,\frac{\delta}{2}\right)}$

8.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

a) Déterminer les transformations suivantes :

$r_{\left(B,\frac{\delta}{3}\right)} \circ r_{\left(C,\frac{\delta}{3}\right)}$; $r_{\left(C,\frac{\delta}{3}\right)} \circ r_{\left(0,\frac{2\delta}{3}\right)}$;

$r_{\left(B,\frac{\delta}{3}\right)} \circ r_{\left(A,-\frac{\delta}{3}\right)}$ et $r_{\left(A,\frac{\delta}{3}\right)} \circ r_{\left(B,\frac{\delta}{3}\right)} \circ r_{\left(C,\frac{\delta}{3}\right)}$.

b) Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telles que :

i) $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} = s_{\Delta'} \circ s_{(AB)}$; ii) $r_{\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)} = s_{(OA)} \circ s_{\Delta}$

9.

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

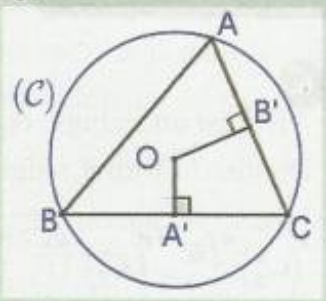
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{4}\right)}$, $t_{\overrightarrow{AB}} \circ s_{(LJ)}$, $t_{\overrightarrow{AB}} \circ s_{(AC)}$, $t_{\overrightarrow{AD}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{4}\right)}$,

$r_{\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \circ s_{(BD)}$, $r_{\left(A,\frac{\pi}{4}\right)} \circ s_{(IK)}$, $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.

10.

Soit ABC un triangle, O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.



A' et B' sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

1) On définit le point H par :
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$.

b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) Soit $(\mathcal{D})$ la parallèle à (BC) passant par O, t la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$.
Déterminer la composée $s_{(D)} \circ t$.

3) Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle $(\mathcal{C})$.

11.

Soit ABC un triangle rectangle en A.

On désigne par H le pied de la hauteur issue de A et par I le milieu de [BC].

Soit K et J les projetés orthogonaux de H sur [AC] et [AB] respectivement.

La droite (AI) coupe (HK) au point L.

Soit (Δ) la médiatrice de [AJ] et (Δ') celle de [AB].

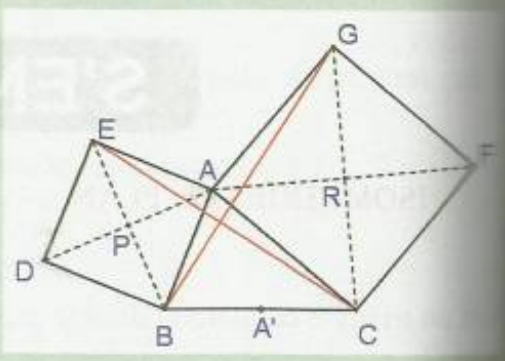
a) Démontrer que (Δ') est la médiatrice de [LH].

b) Déterminer l'image de la droite (JK) par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.

c) En déduire que les droites (KJ) et (BL) sont parallèles.

12.

On considère un triangle ABC de sens direct.
On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés AEDB et ACFG de centre P et R respectivement.



1) En utilisant une transformation appropriée, démontrer que $EC = BG$ et déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BG}\right)$.

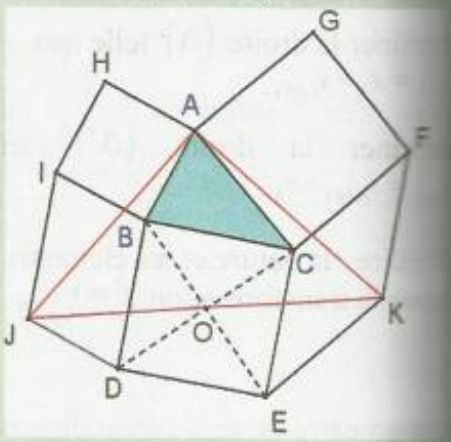
2) Soit A' le milieu de [BC].
Démontrer que $\overrightarrow{PA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{A'R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

3) Déduire de 1) et 2) que :
$A'P = A'R$ et $mes\left(\overrightarrow{A'R}, \overrightarrow{A'P}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4) Soit le point Q tel que BQC soit un triangle rectangle isocèle en Q et de sens direct.
Quelle est l'image de Q par $r_{\left(A', \frac{\pi}{2}\right)}$?
Montrer que (RQ) ⊥ (PC).

13.

On considère un triangle ABC. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABIH, BCED et CAGF, les points J et K tels que BIJD et CEKF sont des parallélogrammes.



On considère les transformations $r_{\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)}$

1) Déterminer l'image de A par $t_{\overrightarrow{BD}} \circ r$

À l'aide de la décomposition de $t_{\overrightarrow{BD}}$ et $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ en composée de symétries orthogonales, montrer que : $t_{\overrightarrow{BD}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

En déduire que $OA = OJ$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de K par $r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{KF}}$.

Démontrer que $r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{KF}} = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

En déduire que $OA = OK$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Déduire des questions 2) et 3) que :

O est le milieu de [JK].

le triangle AJK est rectangle isocèle.

Dans les exercices de 14 à 17

est muni d'un repère orthonormé). Soit f l'application du plan dans lui- qui à tout point M$(x;y)$ associe le point $y')$ définies par son expressions analy-

rer que f est une isométrie et donner sa et ses éléments caractéristiques.

$-y-2$

$-x$

$-y-1$

$-x-1$

$-y+2$

$-x-3$

$-y-2$

$-x-2$

points distincts du plan.

1) Montrer qu'un point M du plan appartient au segment [AB] si et seulement si $\mathbf{AM+MB=AB}$

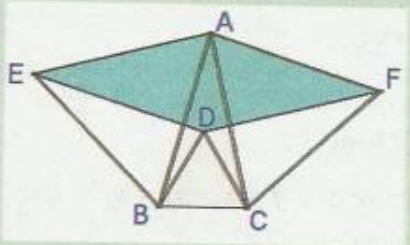
2) Soit f une isométrie. A', B' et M' les images respectives de A, B et M par f.
Montrer que M appartient à [AB] si et seulement si M' appartient à [A'B'].

3) Soit (D) la demi-droite d'origine A, de support (AB) et ne contenant par le point B.
Montrer que M appatient à (D) si et seulement si $\mathbf{AB=MB-AM}$.
Quelle est l'image de (D) par f ?

4) Déduire de ce qui précède que l'image par une isométrie :
- d'un segment est un segment;
- d'une droite est une droite;
- d'une demi-droite est une demi-droite.

19.

Dans la figure ci-après, les triangles AEB, ACF et CDB sont équilatéraux de sens direct. On pose $f = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.



Quelles sont les images par f de E et de A? Préciser la nature de f et en déduire la nature du quadrilatère AEDF.

20.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ (axe et vecteur si f est une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants:

a) $\vec{u}(-1;2)$ et $\Delta : 2x+y-2=0$;

b) $\vec{u}(2;-3)$ et $\Delta : 2x-3y+3=0$;

c) $\vec{u}(3;0)$ et $\Delta : x+y-2=0$.

21.

Donner la nature et les éléments géométriques

À l'aide de la décomposition de $t_{\overrightarrow{BD}}$ et $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ en composée de symétries orthogonales, montrer que : $t_{\overrightarrow{BD}} \circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

En déduire que $OA = OJ$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de K par $r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{KF}}$.

Démontrer que $r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{KF}} = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.

En déduire que $OA = OK$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Déduire des questions 2) et 3) que :

a) O est le milieu de [JK].

b) le triangle AJK est rectangle isocèle.

Dans les exercices de **14 à 17**

...lan est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i},\vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M$(x;y)$ associe le point M'$(x';y')$ définies par son expressions analytique.

...ontrer que f est une isométrie et donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

13

$x' = -y-2$

$y' = -x$

14

$x' = -y-1$

$y' = -x-1$

15

$x' = -y+2$

$y' = -x-3$

16

$x' = -y-2$

$y' = -x-2$

...deux points distincts du plan.

1) Montrer qu'un point M du plan appartient au segment [AB] si et seulement si $AM + MB = AB$

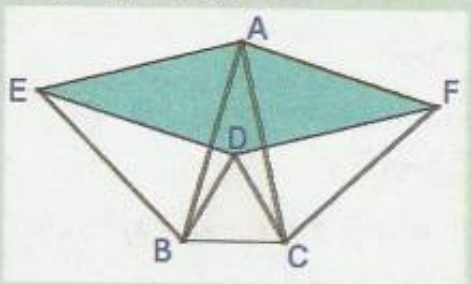
2) Soit f une isométrie. A', B' et M' les images respectives de A, B et M par f.
Montrer que M appartient à [AB] si et seulement si M' appartient à [A'B'].

3) Soit (D) la demi-droite d'origine A, de support (AB) et ne contenant par le point B.
Montrer que M appatient à (D) si et seulement si $AB = MB - AM$.
Quelle est l'image de (D) par f ?

4) Déduire de ce qui précède que l'image par une isométrie :
- d'un segment est un segment;
- d'une droite est une droite;
- d'une demi-droite est une demi-droite.

19.

Dans la figure ci-après, les triangles AEB, ACF et CDB sont équilatéraux de sens direct. On pose $f = r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.



Quelles sont les images par f de E et de A? Préciser la nature de f et en déduire la nature du quadrilatère AEDF.

20.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ (axe et vecteur si f est une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants:

a) $\vec{u}(-1;2)$ et $\Delta : 2x+y-2=0$;

b) $\vec{u}(2;-3)$ et $\Delta : 2x-3y+3=0$;

c) $\vec{u}(3;0)$ et $\Delta : x+y-2=0$.

21.

Donner la nature et les éléments géométriques

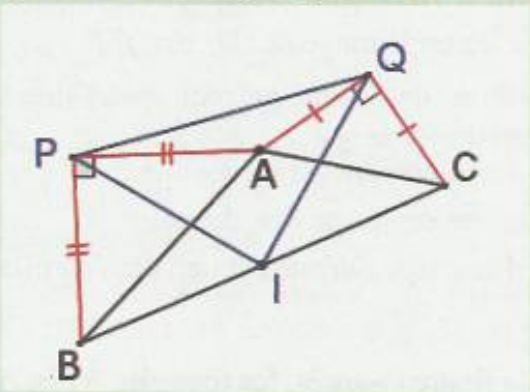
de $f = r_{(\Omega,\theta)} \circ s_\Delta$ (axe et vecteur si f est **une symétrie glissée) dans chacun des cas suivants**

a) $\Omega(-1;2)$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\Delta : 2x - y - 1 = 0$;

b) $\Omega(2;-1)$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\Delta : x - y + 3 = 0$.

22.

Soit ABC un triangle quelconque. Les triangles PAC et QAB sont rectangles isocèles directs, et I désigne le milieu de [B C].



1) Démontrer que $= r_{\left(P,\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(Q,\frac{\pi}{2}\right)} = s_I$.

2) a) Déterminer la droite Δ telle que

$r_{P,\frac{\pi}{2}} = s_\Delta \circ s_{(PQ)}$.

b) Déterminer la droite Δ' telle que

$r_{\left(Q,\frac{\pi}{2}\right)} = s_{(PQ)} \circ s_{\Delta'}$.

c) Déduire que $f = s_\Delta \circ s_{\Delta'} = s_I$ et que Δ= (IP) ; Δ'= (IQ)

3) a) De $r_{\left(P,\frac{\pi}{2}\right)} = s_{(IP)} \circ s_{(PQ)}$, déduire que

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PI}}) = \frac{\pi}{4}$$

b) De $r_{\left(Q,\frac{\pi}{2}\right)} = s_{(PQ)} \circ s_{(QI)}$, déduire que

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{QI},\overrightarrow{QP}}) = \frac{\pi}{4}$$

c) Déduire sur la nature du triangle IPQ

Dans les exercices de 23 à 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') définies par par son expression analytique.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

23.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{10}{3} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{5}{3} \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{5}{3} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{7}{3} \end{cases}$$

27.

On donne A$(0;\sqrt{3})$ et B$(1;0)$.

1) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de l'application $f = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ [illegible]

2) Soit A'= f(A) ; B'= f(B) . Démontrer que (A'B') est la médiatrice de [AB] .

28.

Soit A et B deux points distincts du plan, déterminer la nature et les éléments caractéristique de l'application : $f = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$.

29.

Démontrer que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul du plan, alors la translation de vecteur $\vec{u}$ peut être considérée comme la composée de [illegible]

...tions et ceci d'une infinité de manières.

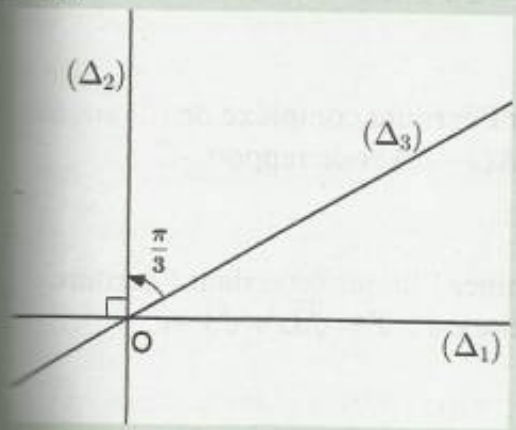
...CD est un carré de sens direct et de centre ... On note (Δ) et (Δ') les médiatrices des côtés ... et [BC] respectivements.

...miner toutes les isométries qui laissent ...lement invariant le carré ABCD.[On pourra ...er une table de composition].

...est un triangle équilatéral de sens direct ; ... le point d'intersection de la hauteur ... de A et du cercle circonscrit au triangle ... Déterminer la nature et les éléments ...téristiques de l'application

$f = s_{(AD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$.

... (Δ_2) et (Δ_2) sont trois droites du plan ...rantes en O telles que l'indique la figure ...ous :



...terminer la nature et les élément caractéristiques de l'application $f = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$

... Déterminer la nature de l'application $f = s_{\Delta_1} \circ f$.

...t-on $s_{\Delta_1} \circ f = f \circ s_{\Delta_1}$?

... (Δ') sont deux droites du plan.

...rer que $s_\Delta \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ si est seulement ... $\perp (\Delta')$ ou (Δ) et (Δ') sont confondues

(Δ) et (Δ') sont deux droites du plan sécantes en A.

Déterminer toutes les isométries laissant invariant l'ensemble constitué des droites (Δ) et (Δ') ; distinguer le cas où $(\Delta) \perp (\Delta')$ et celui où les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

35.

Soit ABC un triangle quelconque, on construit les triangles équilatéraux directs AEB , ACF et CDB .

On désigne par r_1 la rotation de centre C et angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. On désigne par r_2 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$; on note $f = r_1 \circ r_2$.

a) Quelles sont les images par f de E et de A ?

b) Quelle est la nature de f ?

c) Quelle est la nature du quadrilatère AEDF ?

36.

On se donne 3 droites (D_1) , (D_2) et (D_3) concourantes en O ; on note s_1 ; s_2 et s_3 les réflexions par rapport à ces droites et $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

On cherche à construire un triangle ABC tel que D_1 , D_2 et D_3 soient les médiatrices de [BC] , [CA] et [AB] respectivement.

a) Si ABC est un tel triangle, alors B est fixe par f .

b) Si B est un point fixe de f, construire un triangle ABC comme souhaité.

c) Étudier f et donner une construction géométrique de l'ensemble de ses points fixes.

37.

On considère un parallélogramme ABCD de sens indirect et de centre O. On construit à l'extérieur de ce parallélogramme des triangles équilatéraux ABE , BCF , CDG et ADH et on note I , J , K et L les centres respectifs de ces triangles.

a) On désigne par r_B la rotation de centre B et

d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$:
On désigne par r_D la rotation de centre D et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.
On note s_O la symétrie de centre O .
Quelles sont les images de B et E par r_B , par $s_O \circ r_B$ et par $r_D \circ s_O \circ r_B$?
Montrer que $r_D \circ s_O \circ r_B = s_O$ et en déduire que O est le milieu de [EG] .

b) Montrer que EFGH est un parallélogramme.

c) Montrer que IJKL est un parallélogramme

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

38.
Soit S une similitude plane, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par S .Démontrer que l'image par S du segment [AB] est le segment [A'B'] .

39.
Soit S une similitude plane, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par S. Démontrer que l'image par S de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').

40.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = -3x+1 \\ y' = -3y-1 \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

41.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3}+1 \\ y' = x\sqrt{3}+y \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

42.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x\sqrt{2}+y\sqrt{2}+1 \\ y' = -x\sqrt{2}+y\sqrt{2} \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

43.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = x-y-1 \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

44.
Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $2-i$.

45.
Donner la translation dont l'écriture complexe est : $z' = z+1+i$.

46.
Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre A$(3-2i)$ et de rapport -2 .

47.
Déterminer l'homothétie dont l'écriture complexe est : $z' = \sqrt{3}z+\sqrt{3}-i$.

48.
Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A$(-1+2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

49.
Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation d'écriture complexe :

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)z+i+3$$

50.
On considère les applications planes f et g d'écritures $z'=-2z+3$ et $z'=3z+2$ respectivement.

Démontrer que f et g sont des transformations affines et déterminer leurs transformation réciproques.
Déterminer less écritures complexes de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
Démontrer que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est la bijection réciproque de $g \circ f$.

onsidère les applications du plan dans même f et g d'écritures complexes ctives :
$1+i\sqrt{3}\big)z-\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ et $z'=2i\overline{z}-3+3i$.
ner les point fixes de f et de g .
Déterminer les écritures complexes respectives de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$. Déterminer f (A) et g (B).

application du plan dans lui-même, ure complexe : $z'=(1-i)z-2+i$.
ner la nature et les éléments téristiques de S.

ner l'écriture complexe de la similitude de centre $\Omega(1+2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

similitude directe pane de centre $\Omega(\omega)$ pport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
$A(z_A)$ a pour image par S le point Démontrer que le triangle ΩAB est ngle isocèle en A et de sens direct.

le quart de tour direct qui transforme A(2) et h l'homothétie de rapport -2 nsforme A en $B(-4+2i)$. On pose :
Déterminer la nature et les éléments téristiques de f.
onsidère les points $A(-1)$ et $B(1+i)$.
ner l'écriture complexe de la réflexion, (AB).

56.
Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :
$$z'=\left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\overline{z}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$$
1) Montrer que S est un antidéplacement.
2) Déterminer $S \circ S$.
3) On considère les points $A(i)$ et $B(-1-4i)$. Déterminer les images de A et B par S et en déduire deux points fixes de S.
4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

57.
Dans le plan orienté, on considère ABCD un carré de sens direct. Soit M un point du segment [DC] . La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (BC) au point Net on note I le milieu de [MN].

a) Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle en A.
b) Déterminer une application du plan qui transforme Men I.
c) Quel est le lieu géométrique des points I lorsque M décrit (BC).

58.
$(\mathcal{C})$ est un cercle et A un point extérieur à $(\mathcal{C})$. Pour tout point M de $(\mathcal{C})$, on construit le point C tel que MAC soit un triangle équilatéral de sens direct.

On note I le milieu de [MC] , N celui de [AI] et P le point du plan tel que le triangle NAP soit un triangle tectangle isocèle en A et de sens direct.

Déterminer le lieu :

a) (Γ_1) des points N lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.
b) (Γ_2) des points P lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.
c) (Γ_1) est-il l'image de (Γ_2) par une isométrie ?

59.
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et D le point tel que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AC}$.

Soit S la similitude directe qui transforme A en

C et B en D.

1) Déterminer le rapport de S.
2) Soit O le centre de S. Exprimer OA et OC en fonction de AC.
3) Démontrer que le triangle OAC est rectangle en A. puis placer O.
4) Soit $H = S(C)$. Montrer que : $Mes\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CH}\right) = \frac{\pi}{3}$; le triangle CDH est équilatéral puis construire le point H.

60.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de côté 1 et de centre O tel que I est le milieu du segment [AO].

1) Justifier qu'il existe une similitude directe et une seule telle que S(A) = O et S(B) = I
2) Déterminer le rapport et l'angle de S .
3) Donne une écriture complexe de S dans le repère orthonormé direct $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4) On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites (ΩA) et (ΩD) sont perpendiculaires.

61.

Soit f la transformation du plan complexe qui à M(z) associe M'(z') tel que $z' = az + 3i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque $a = 2$ puis $a = -i$.
2) On donne A(1), B(2+i), A'(2i) et B'(1+i) Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A)=A' et r(B)=B'. La déterminer.

62.

Le plan P est rapporté au repère ortho normal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' = (1 + i) z – i.

1) Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.
On notera A le point invariant de T.
Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)$, en supposant que M≠A.
2) **a. Construire M'=T(M) pour un point M donné.**
b. Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D'.
3) **a. Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$.**
Construire les points B et B'.
b. Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

63.

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.
Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (Δ) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S .

1) Faire une figure.
2) Soit r la rotation de centre A et d'angle demesure $\frac{\pi}{2}$.
a. Préciser, en justifiant la réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.
b. Déterminer les images de R et de P par r.
c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?
3) On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR] .
Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
a. Déterminer les images respectives de R et de P par s .
b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B.
c. Démontrer que les points M, B, N et D sont alignés.

64

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par s l'application qui à tout point M de P de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \end{cases}$

1) Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

2) Démontrer que s est une similitude directe plane.
Préciser son angle, son rapport et son centre I .

3) Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points M,M'=s(M) et M''=s(M') .
a. Calculer, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.
b. Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?
c. Déterminer l'affixe du point Mo tel que g(Mo) soit le point O .

Placer dans le repère les points Mo, M'o, M''o correspondants, ainsi que le point I, centre de la similitude s .

65

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé directe $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie I

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose que les points A et C sont distincts et que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A)=B$ et $s(C)=D$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. On considère le point C tel que ABCD est un carre.

Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})=\frac{\pi}{2}$ [mod2π].

1) a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure progressivement.
b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S du plan telle que $S(D)=F$ et $S(B)=D$.

2) On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.
a. Déterminer son rapport k et son angle θ .
b. Donner l'expression complexe de S.
c. Déterminer le centre Ω de la similitude directe s .

66

Dans tout l'exercice, $(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A=1$.

1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=-\overline{z}+2$.
a. Déterminer les images par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+3i$.
b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
c. Déterminer l'image par la transformation T du cercle C de centre O et de rayon 1.

2) C' désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.
a. Construire le point A' appartenant au cercle C tel que:mes $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A'})=\frac{\pi}{3}\{2\pi\}$.
b. A tout point M du cercle C d'affixe z, on associe le point M' du cercle C' d'affixe z' tel que :$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Déterminer le module et un argument de $\frac{z'-2}{z}$.

En déduire que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui a tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$.

3) À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle C ?

67

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique

1 cm, on considèreles points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives : $a=1+i$,

$b=-1+2i$; $c=2+3i$; $m=5-i$

$n=7-5i$; $p=9+i$.

1) a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2) Soit s la similitude directe qui transforme le point A en Net le point B en P.

a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est : $z'=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)z+\left(\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i\right)$.

b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

c. Vérifier que la similitude transforme le point C en M.

3) Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z' = 2iz + 3 - 3i$.

a. Vérifier que s'(A) = N , s'(B) = M, s'(C) = P.

b. Démontrer que s'admet un unique point invariant K d'affixe $k=1-i$.

c. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.

On pose : $f = s' \circ h$.

Déterminer les images des points K et J par la transformation f. En déduire la nature précise de latransformation f.

d. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

68.

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0})$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
- B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1) Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.

2) a. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.

b. Soit S cette similitude. Préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude S transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3) a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus l'un à l'autre modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle ΩA_0B_0 est isocèle en Ω.

c. Calculer la distance A_0B_4.

d. Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.

e. En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

Chapitre 13

APPLICATIONS AFFINES.

LEÇON 1 GÉNÉRALITES SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

1.1. CONSERVATION DU COEFFICIENT DE COLINÉARITÉ ET DES BARYCENTRES.

1.2. ENDOMORPHISME ASSOCIÉ À UNE APPLICATION AFFINE.

1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE APPLICATION AFFINE DANS UN REPÈRE DONNÉ.

1.4. APPLICATIONS AFFINES BIJECTIVES.

1.5. COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS AFFINES.

1.6. IMAGE DE L'ESPACE D'UN PLAN OU D'UNE DROITE PAR UNE APPLICATION AFFINE

LEÇON 2 PROJECTIONS, SYMÉTRIES ET AFFINITÉS D'UN ESPACE AFFINE.

2.1. PROJECTIONS AFFINES.

2.2. SYMÉTRIES AFFINES.

2.3. AFFINITÉS.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 GÉNÉRALITES SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

- Reconnaître une application affine ;
- Définir analytiquement une application affine ;
- Écrire une équation de la transformée d'une courbe par une application affine ;
- Justifier qu'une application affine est une transformation

1.1. CONSERVATION DU COEFFICIENT DE COLINÉARITÉ ET DES BARYCENTRES.

Prendre un bon départ

Activité 1

f est une application du plan dans lui-même. A, B et C trois points 2 à 2 distincts du plan. α est un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$. On désigne par A', B' et C' les images des points A, B et C par f.

a) Montrer que si f est une translation, alors $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AC}$. En déduire que $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

b)Montrer que si f est une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

c) Supposons que f est une la réflexion d'axe (Δ).

(i) Montrer que les droites $(AA'),(BB')et(CC')$ sont parallèles .

(ii) En déduire que $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$, et $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ ..

Activité 2

1) Soit f une application du plan qui transforme le barycentre du système $\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);...;(A_n,a_n)\}$ en le barycentre de $\{(A'_1,a_1);(A'_2,a_2);...;(A'_n,a_n)\}$ (On dit que f conserve les barycentre).

Soit A,B et C trois points distincts du plan ; A' , B' et C' leurs images respectives par f.

On suppose qu'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que $\alpha\neq 1$ et A est le barycentre des points C et B affectés des coefficients à préciser.

b)En déduire que $A'=bar\{(B',-\alpha);(C',1)\}$.

c) Montrer alors que $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

2) Soit f une application du plan telle que pour tout triplet $(A;B;C)$ de points distincts d'images $(A';B';C')$ par f, s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

Soit G le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$ et G' l'image de G par f.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{A'G'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

c) En déduire que le point G' est le barycentre des points A' et B' et affectés des coefficients qu'on précisera.

Retenir

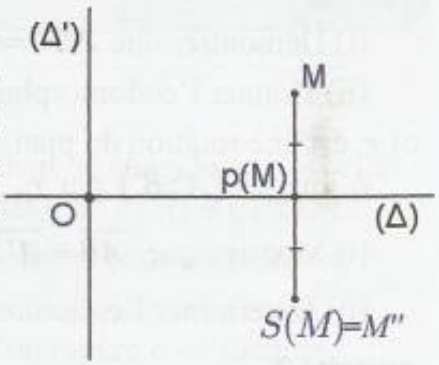
- Soit f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$; A, B, C trois points distincts du plan tels qu'il existe un réel α vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$. On dit que f conserve le coefficient de colinéarité si les images des points A, B et C notées respectivement par A', B' et C' vérifient l'égalité $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.
- Si f est une aplication du plan dans lui-même, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) f conserve le coefficient de colinéarité ;
  (ii) f conserve les barycentres.
- Une application affine du plan est une application qui conserve le coefficient de colinéarité ou les barycentres.
- Les translations, les homothéties, les rotations, les réflexions sont des exemples d'applications affines.

Remarque

- La définition donnée à une application affine dans le plan est valable dans l'espace ou dans tout autre espace des points .
- Les images respectives des points alignés par une application affine sont aussi alignées.
- L'image par une application affine d'un système de quatre points coplanaires de l'espace est un système de quatre points coplanaires. On dit aussi qu'une application affine conserve la coplanarité des points.
- Les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles.

Exemple

- (Δ) et (Δ') sont deux droites sécantes en 0.
  La projection p sur (Δ) parallèlement à (Δ') est l'application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe le point $p(M)$, point d'intersection de la droite (D) et de la parallèle à la droite (D') passant par le point M ; $s(M)$ le point tel que $p(M)$ soit le milieu de $[Ms(M)]$.
  Justifions que p et s sont des applications affines.
  Soit A',B',C' les images respectifs de A,B,C *par* p.



- Les droites $(AA'),(BB')$ et (CC') sont parallèles ;Supposons qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$.
- En appliquant la propriété de thalès, on peut écrire $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{A''C''}}{\overline{A''B''}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=t$ où A',B' et C' sont les images respectives de A, B et C par p
  et A", B" et C" les images de A, B et C par s.
- Par conséquent, $\overrightarrow{A'C'}=t\overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{A''C''}=t\overrightarrow{A''B''}$.
- Les applications p et s sont des applications affines du plan .

S'exercer

1.a h est une homothétie de rapport k et t une translation. est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' milieu du segment $\left[h(M)t(M)\right]$. Démontrer que f est une application affine.

1.b $(\Delta) et (\Delta')$ deux droites orthogonales en O, pour tout point M du plan on désigne par H_M le projeté orthogonal de M *sur* (Δ) et par k_M le projeté orthogonal de M *sur* (Δ') .M' désigne le milieu du segment $[H_M K_M]$. f l'application du plan qui à M associe M'. justifier que f est une application affine

1.2. ENDOMORPHISME ASSOCIÉ À UNE APPLICATION AFFINE

Prendre un bon départ

Activité 1

a) t est une translation du plan. Soit un couple $(A;B)$ de points d'image $(A';B')$ par t.

(i) Montrer que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

(ii) Nommer l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overline{AB}$ *en* $\overline{A'B'}$. où V_2 est l'ensemble des vecteurs du plan.

b) h est une homothétie du plan de rapport k ($k \neq 0$). Soit un couple $(A;B)$ de points d'images $(A';B')$ par h.

(i).Démontrer que $A'B' = kAB$.

(ii) Donner l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overline{AB}$ *en* $\overline{A'B'}$.

c) r est une rotation du plan de centre O et d'angle de mesure α ; Soit un couple $(A;B)$ des points d'images $(A';B')$ par r.

(i).Montrer que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ et $mes\left(\widehat{\overline{AB},\overline{A'B'}}\right) = \alpha$.

(ii) Déterminer l'endomorphisme de V_2 qui transforme $\overline{AB}$ *en* $\overline{A'B'}$.

Activité 2

1) Soit f une application transformant le point M en le point M' ; O un point du plan, O' *parf* ; $\varphi : \overrightarrow{OM} \to \overrightarrow{O'M'}$.

a) On suppose que f est une application affine ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan V_2 ; t une translation. Soient les points M , N , P tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{v}$.

(i) Montrer que $O = bar\{(P,1);(M,-1);(N,-1)\}$.

(ii) Justifier que $O' = bar\{(P',1);(M',-1);(N',-1)\}$.

(iii) En déduire que $\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{O'N'}$.

(iv) On suppose que $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{ON}$.

Montrer que $\overrightarrow{O'M'} = t\overrightarrow{O'N'}$ et donc $\varphi(t\overrightarrow{ON}) = t\varphi\left(\overrightarrow{ON}\right)$.

(v). Que dire de l'application φ?

(vi). Sachant que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)$.

c) On Suppose que φ est linéaire . M, N et P trois points d'images respectives $M', N' et P'$.
Montrer que s'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MN}$, alors $\overrightarrow{M'P'} = a\overrightarrow{M'N'}$.
En déduire que f est affine.

...ivité 3

...ent A,B, M trois points du plan , f une application affine du plan ; A', B', les images respectives ... A B par f ; N et P deux points du plan tels que $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'N}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{BM}\right) = \overrightarrow{B'P}$

... Montrer que $\overrightarrow{NP} = \varphi\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right)$.

... En déduire que N=P.

... L'image d'un point quelconque N dépend-elle du choix de A ou de celui de B ?

Retenir

... f une application du plan ; A un point quelconque du plan et M' l'image d'un point M par f.

- f est une application affine si et seulement si l'application $\varphi : \overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{A'M'}$ est linéaire.
φ est l'endomorphisme ou l'application linéaire associé à l'application affine f.
- Si φ est l'application linéaire associée à l'application affine f, **alors** pour tout bipoint $(M;N)$ de $\mathcal{P}^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)$.

Remarque

- Deux applications affines f et g sont égales ou encore coïncident si et seulement si elles ont le même endomorphisme associé et s'il existe un point A tel que $f(A) = g(A)$.
- Deux applications affines sont égales si et seulement si elles coïcident sur les points qui constituent un repère affine.
- Une application affine qui laisse invariant chacun des points d'un repère est l'identité.

Exemple

- L'endomorphisme associé à une translation est I_{V_2} ;
- L'endomorphisme associé à une homothétie de rapport k est l'application : $\vec{u} \to k\vec{u}$. On l'appelle homothétie vectorielle de rapport k, notée kId_{V_2}.
- L'endomorphisme associé à une rotation d'angle de mesure a est la rotation vectorielle d'angle de mesure a;
- L'endomorphisme associé à une projection affine (respectivement une symétrie affine) est une projection vectorielle (respectivement une symétrie vectorielle) de l'espace vectoriel associé.

Exemple

- f est une application affine du plan, (O,I,J) un repère du plan. On donne $f(O)=O$; $f(I)=I$ et $f(J)=O$. Déterminons la matrice de l'endomorphisme associé à φ dans la base $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

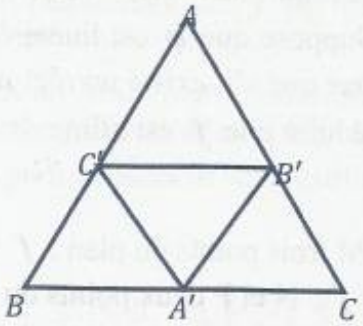
$\varphi(\overrightarrow{OI})=\overrightarrow{f(O)f(I)}=\overrightarrow{OI}$

$\varphi(\overrightarrow{OJ})=\overrightarrow{f(O)f(J)}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$

$\varphi(\overrightarrow{OI})=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$

$\varphi(\overrightarrow{OJ})=0\overrightarrow{OI}+0\overrightarrow{OJ}$

$M(\varphi,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.



ABC est un triangle; $A',B'et\,C'$ les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$ l'application affine du plan telle que $f(A)=A$, $f(B)=B'$ et $f(C)=C'$.

Déterminons la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

$\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\varphi(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{f(A)f(C)}=\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\varphi(\overrightarrow{AB})=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\varphi(\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$

$M(\varphi,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$

S'exercer

1.c $ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct $(AB=1)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de l'endomorphisme φ associé à l'application affine f dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

i) f est l'homothétie de centre A qui transforme O en C.

ii) f la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

iii) r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

iv) r' est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1.d $ABCD$ est un losange de centre O. Dans chacun des cas suivants, déterminer dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ la matrice de l'endomorphisme associé à l'application affine f.

a) $f(A)=A$; $f(B)=D$ et $f(C)=D$

b) $f(A)=B$; $f(B)=A$ et $f(C)=C$

3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE APPLICATION AFFINE DANS UN REPÈRE DONNÉ.

Prendre un bon départ

...tivité 1

...ien est $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$; A le point de coordonnées $(2;-1)$; A' le point de ...données $(-1;3)$; φ l'endomorphise de V_2 défini par $\varphi(\vec{i})=2\vec{i}+3\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j})=-\sqrt{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

... f l'application affine du plan, transformant le point A en A',d'endomorphisme associé φ ; ... $(x';y')$ l'image du point $M(x;y)$ par f .

... Écrire la matrice A de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

... Donner une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$.

... Donner un système d'expressions de x' et de y' en fonction de x et de y.

... Déterminer par leurs coordonnées :

... l'image du point de coordonnées (1;0);

... le point ayant pour image le point de coordonnées $(-2;3)$;

... le point invariant (ou bien fixe) par f .

...tivité 2

... g l'application d'écriture analytique : $\begin{cases} x'=ax+by+\alpha \\ y'=cx+dy+\beta \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$

... Déterminer les coordonnées de O', image du point O par f .

... $\sigma:\overrightarrow{OM}\to\overrightarrow{O'M'}$ où M et M' sont les points de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ ... que $M'=f(M)$.

... Montrer que σ est linéaire.

... Écrire la matrice de σ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Retenir

... $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathfrak{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère quelconque de $\mathcal{P}$.

... Toute application affine du plan a pour expressions analytiques $\begin{cases} x'=ax+by+\alpha \\ y'=cx+dy+\beta \end{cases}$ dans $\mathfrak{R}$ où a,b,c,d,α et β sont des réels.

... Toute application du plan $\mathcal{P}$ d' expressions analytiques $\begin{cases} x'=ax+by+\alpha \\ y'=cx+dy+\beta \end{cases}$ dans $\mathfrak{R}$ est une ...plication affine . L'endomorphisme qui lui est associé a pour matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Exemple

1) L'application h d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x + 2y - 1 \end{cases}$ dans le repère $\mathfrak{R} = (O;\vec{i}$ est une application affine dont l'endomorphisme a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}$

2) $A(1;1), A'(3;4), B(0;2), B'(1;-1), C(-1;2)$ *et* $C'(0;3)$ *sont six* points du plan.

Soit g l'application affine telle que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$.

Soit φ l'endomorphisme associé à g.

a) Déterminons la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On peut écrire : $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$ (D'autres relations vectorielles peuvent être utilisées).

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{i} - 5\vec{j}$; $\varphi(-2\vec{i} + \vec{j}) = -3\vec{i} -$

Puisque φ est linéaire, $\begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = -2\vec{i} - 5\vec{j} \\ -2\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = -3\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$. Après caculs, $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} - 4\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = -\vec{i} - 9\vec{j}$. La matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$.

b) Déterminons les expressions analytiques de g dans le repère $\mathfrak{R} = (O;\vec{i}, \vec{j})$.

Si $(x';y')$ est le couple des coordonnées de l'image M' du point M de coordonnées $($ par g, alors $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

On peut écrire : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-3 \\ y'-4 \end{pmatrix}$.

On obtient $\begin{cases} x'-3 = (x-1) - (y-1) \\ y'-4 = -4(x-1) - 9(y-1) \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 9y + 17 \end{cases}$.

Autre méthode :

L'écriture analytique de l'aplication g est de la forme $\begin{cases} x' = x - y + a \\ y' = -4x - 9y + b \end{cases}$.

Puisque $g(A) = A'$, on peut écrire : $x_{A'} = x_A - y_A + a$ et $y_{A'} = -4x_A - 9y_A + b$.

$3 = 1 - 1 + a$ et $4 = -4 - 9 + b$. D'où, $a = 3$ *et* $b = 17$.

L'écriture analytique de g est donc donné par le système $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 9y + 17 \end{cases}$.

S'exercer

1.e Donner dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, les expressions analytiques de l'application affine qui associe au point A de coordonnées $(1;-2)$ le point B de coordonnées $(2;4)$ et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

ABC est un triangle et I est le milieu du segment $[BC]$. f est l'application affine du plan telle que $f(A)=A$; $f(I)=I$ et $f(B)=C$

Soit P le point du plan tel que I soit le milieu du segment $[AP]$.

i) Montrer que P est invariant par f.

ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

iii) Donner l'expression analytique de f dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

iv) Quelle est la matrice de f ?

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=BD$; f l'application affine du plan telle que : $f(A)=B$; $f(B)=D$ et $f(D)=C$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et g est l'application affine du plan dans lui-même définie par $g=t^{-1}of$.

i) Montrer que g est une application affine du plan

ii) Préciser la nature et les éléments géométriques de g

iii) Donner le programme de construction de l'image M' d'un point M du plan par g.

Le plan est muni d'un repère (O,I,J), f est l'application affine du plan qui transforme (O,I,J) en (O',I',J') où $O'(0,-2)$; $I'(1,-1)$ et $J'(-1,-1)$. Déterminer les expressions analytiques de f dans le repère (O,I,J).

Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; A, B, C, D, A', C', D' les points de coordonnées respectives $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1),(1;1;1),(0;2;1),(-1;0;0),(0;-1;-1)$ et $(2;0;3)$.

Déterminer les expressions analytiques de l'application affine g qui associe aux points A, B, C et D respectivement les points A',B',C' et D'.

APPLICATIONS AFFINES BIJECTIVES.

Prendre un bon départ

f une application affine d'endomorphisme associé φ ; A et A' deux points tels que $f(A)=A'$.

Activité 1

On suppose que f est injective.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\varphi(\vec{u})=\varphi(\vec{v})$.

a) Montrer qu'il existe deux points M et N tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AN}$.

b) Montrer alors que $f(M)=f(N)$.

c) En déduire que M=N et alors $\vec{u}=\vec{v}$. Que peut-on en déduire pour φ ?

On suppose que φ injective. Soient M et N deux points tels que $f(M)=f(N)$.

a) Déduire que $\overrightarrow{A'f(M)}=\overrightarrow{A'f(N)}$.

b) En déduire que $\varphi(\overrightarrow{AM})=\varphi(\overrightarrow{AN})$.

c) Montrer alors que M=N, puis conclure.

Activité 2

1) On Suppose que f est surjective. Soit $\vec{v}$ un vecteur .
   a) Montrer qu'il existe un unique point N tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AN}$.
   b) Montrer qu'il existe un point M tel que $f(M)=N$.
   c) En déduire que $\vec{v}=\varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Justifier que φ est surjective.

2.On suppose que φ est surjective. Soit N un point.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u})=\overrightarrow{AN}$.
   b) Après avoir montré qu'il existe un point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$, montrer que $f(M)=$ Déduire que f est surjective.

Retenir

- Si f est une application affine d'endomorphisme associé φ, alors il y a équivalence entre
  - « f est injective » et « φ est injective » ;
  - « f est surjective » et « φ est surjective » ;
  - « f est bijective » et « φ est bijective ».
- Une transformation d'un espace affine est une application qui est affine et bijective de cet espace affine.

Remarque

- Une application affine d'un espace affine est une transformation si et seulement si par cette application, les points associés aux points d'un repère forment aussi un repère.
  - Une application affine définie sur une droite $(\mathcal{D})$ est une transformation de $(\mathcal{D})$ si et seulement si à un bipoint de points distincts, est associé un bipoint des points distincts ;
  - Une application affine d'un plan affine $\mathcal{P}$ est une transformation de $\mathcal{P}$ si et seulement si trois points non alignés ont pour images respectives par cette application, trois points non alignés ;
  - Une application affine de l'espace $\mathcal{E}$ est une transformation de $\mathcal{E}$ si et seulement si quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$ ont pour images respectives par cette application quatre points non coplanaires .
- Une application affine est une transformation si et seulement si son endomrphisme est un automorphisme.

Exemple

1) V_2 est le plan vectoriel de base $(\vec{i},\vec{j})$; $\mathcal{P}$ un plan affine rapporté à un repère $\mathcal{R}=\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ l'application affine dont l'endomorphisme est défini par : $\psi(\vec{i})=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\psi\left(\vec{j}\right)=5\vec{i}-$
Montrons que f est une transformation du plan $\mathcal{P}$.
Il suffit de montrer que ψ est bijectif. $dét\left(\psi\left(\vec{i}\right);\psi\left(\vec{j}\right)\right)=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2\times1-(-3)\times5=17$
Puisque $dét(\psi\left(\vec{i}\right);\psi\left(\vec{j}\right)\neq0$, ψ est bijectif.

f est par conséquent une transformation du plan $\mathcal{P}$.

2) Soit g une application affine d'écriture analytique $\begin{cases} x' = mx-(5m-4)y+3 \\ y' = x+(m-2)y-1 \end{cases}$ où m est un réel indépendant de x et de y.

Examinons suivant les valeurs du réel m, le caractère bijectif de g.

La matrice de l'application g est $A(m)=\begin{pmatrix} m & -5m+4 \\ 1 & m-2 \end{pmatrix}$.

Dét $A(m)=\begin{vmatrix} m & -5m+4 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix}=m(m-2)-(-5m+4)$

$=m^2-2m+5m-4 \ =m^2+3m-4$.

Déterminons les racines du poynôme $m \to m^2+3m-4$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2-4(-4)=25$. Les racines de ce polynôme sont et -4.

Conclusion. Pour $m=1$ ou $m=-4$, g *n'est* pas bijective.

Pour $m \in \mathbb{R}-\{1;-4\}$, g est bijective.

3) Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}=(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'application affine h de $\mathcal{E}$, d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x-y+2 \\ z' = y+z-3 \end{cases}$.

Montrons que h est une transformation de l'espace $\mathcal{E}$. Soit φ l'endomorphisme associé à h. Il suffit de montrer que $ker\varphi = \{\vec{0}\}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de

φ de $\varphi(\vec{u})=\vec{o}$ on a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .D'où, $\begin{cases} y=0 \\ x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. Par suite, $x=y=z=0$.

Ainsi, le vecteur nul est le seul vecteur du noyau de φ.

φ est injectif et comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle, φ est aussi bijective. f est donc une transformation de l'espace $\mathcal{E}$.

S'exercer

Montrer que l'application affine d'expressions analytiques : $\begin{cases} x' = 2x-y+1 \\ y' = 3x+5y-2 \end{cases}$ est une transformation du plan.

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. f est l'application affine du plan telle que $f(A)=A, f(B)=C$ et $f(C)=B$.

i) Montrer que f est une transformation affine du plan.

ii) Montrer que $fof = Id_P$ et en déduire f^{-1}.

1.l $ABCD$ est un parallélogramme de centre O. g est l'application affine du plan définie par $g(A)=O, g(B)=B$ et $g(D)=D$.

i) Montrer que $g(C)=O$.

ii) g est-elle une transformation affine du plan ?

iii) Vérifier que $gog=g$.

1.m $ABCD$ est un losange tel que $OA=2OB$. A' désigne le symétrique de A par rapport à D et A'' le symétrique de A par rapport à B. f est l'application affine du plan définie par $f(B)=A'', f(D)=A'$ et $f(A)=A$.

i) Justifier que f est une transformation affine du plan.

ii) Justifier l'existence d'une homothétie h telle que $f=hoS_{(BD)}$.

En déduire la construction de l'image M' d'un point M du par f.

1.n Montrer que l'application affine de l'espace d'expressions analytiques : $\begin{cases} x'=3x+2y-2y \\ y'=2x+3y-2y \\ z'=2x+2y-z \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une transformation de l'espace .

Soit σ l'endomorphisme défini sur la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par $\sigma(\vec{i})=-\vec{i}+\vec{k}$; $\sigma(\vec{j})=\vec{j}+\vec{k}$ et $\sigma(\vec{k})=\vec{i}-$

Montrer que $\sigma(\vec{j})$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\sigma(\vec{i})$ et de $\sigma(\vec{k})$. Une applic affine d'endomorphisme associé σ peut-elle être bijective? Justifier votre réponse.

1.5. COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS AFFINES

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient deux applications affines f et g d'un espace effine X, d'endomorphismes associés respectifs

1) Soit G le barycentre d'un système des points pondérés $\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);\ldots;(A_n,a_n)\}$.

Montrer que $(g\circ f)(G)$ est le barycentre du système $\{((g\circ f)(A_1),a_1);((g\circ f)(A_2),a_2);\ldots;((g\circ f)(A_n),a_n)\}$. **En déduire que** l'application est une aplication affine.

2) Soit A un point ; A' son image par f et A'' l' image de A' par g.

On suppose que le point M' est l'image d'un point M par f, M'' l'mage de M' par g.

Montrer que $\overrightarrow{A''(g\circ f)(M)}=(\psi\circ\varphi)(\overrightarrow{AM})$.

En déduire l'endomorphisme associé à l'application affine $g\circ f$.

Activité 2

Soit f une transformation d'endomorphisme φ ; A un point d'image B par f et M un point d'image N par f.

a) Montrer que $\varphi^{-1}(\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{AM}$.

b) En déduire que f^{-1} est une application affine, puis préciser l'endomorphisme associé à f^{-1}

Retenir

- Si g et f sont deux applications affines d'endomorphismes associés φ et ψ respectivement, alors $g \circ f$ est une application affine d'endomorphise associé $\varphi \circ \psi$.
- Si f est une transformation affine d'endomorphisme associé φ, alors f^{-1} est aussi une transformation affine. Son endomorphosme associé est φ^{-1}.
- L'ensemble G des bijections affines de l'espace affine X muni de la composition des applications est un groupe appelé groupe affine de X.

Exemple

Si t est une translation, l'endomorphisme associé à $t \circ f$ est celui de l'endomorphisme associé à f car l'endomorphisme associé à t est l'identité.

Si h est une homothétie de rapport k, f une application affine d'endomorphisme associé φ, alors $h \circ f$ et $f \circ h$ sont affines d'endomorphisme associé $k\varphi$. Ces deux applications sont égales s'il existe un point A tel que $(f \circ h)(A) = (h \circ f)(A)$.

S'exercer

f et g sont deux applications affines d'écritures analytiques respectives : $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x + 5y - 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 3x + 2y + 2 \end{cases}$

a. Montrer que les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives.

b. Définir analytiquement $f \circ g$ et $g \circ f$.

c. Définir analytiquement f^{-1} et g^{-1}.

6. IMAGE DE L'ESPACE, D'UN PLAN OU D'UNE DROITE PAR UNE APPLICATION AFFINE.

Soit X un espace affine qui peut être une droite, un plan ou l'espace ; f une application affine de X dans lui-même.

Soit $\mathcal{R}=(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $(n \geq 2)$ un repère affine de X.

On sait que pour tout point M de X, il existe n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que :
$\overrightarrow{A_0M} = x_1\overrightarrow{A_0A_1} + x_2\overrightarrow{A_0A_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{A_0A_n}$.

Comment appelle-t-on le n-uplet $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ pour le point M ?

Montrer que si $f(A_i) = A_i$, pour tout $0 \leq i \leq n$, alors $f(M) = M$.

Montrer que si $f(\mathcal{R})$ est un repère de X, alors f est bijective et $f(X) = X$.

Montrer que si $f(\mathcal{R})$ n'est pas un repère de X, alors il existe un repère $\mathcal{R}'$ de $f(X)$ ayant moins de points que $\mathcal{R}$.

Retenir

Soit X un espace affine ; $\mathcal{R}=(A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n)$ $(n\geq 2)$ un repère affine de X ; f une application affine de X dans lui-même.

si f est bijective , alors $f(X)=X$

Si f n'est pas bijective, alors tout repère de $f(X)$ est formé d'au plus n points.

Remarque

- Une application affine d'un plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, transforme :
  - $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$ si elle est bijective ;
  - $\mathcal{P}$ en une droite, ou en un point sinon.
  - une droite en une droite ou en un point
- Une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même, transforme :
  - $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ si elle est bijective ;
  - $\mathcal{E}$ en un plan, ou en une droite, ou en un point.
  - un plan en un plan, une droite ou en un point.
  - une droite en une droite ou en point

Exemple

1) Soit f l'application affine du plan affine $\mathcal{P}$ dont l'écriture analytique est : $\begin{cases} x'=x+ \\ y'=x+ \end{cases}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminons les coordonnées du point invariant par f. $(x;y)$ sont les coordonn… point invariant par f si et seulement si $x=x+y-1$ et $y=x+y-3$. On a ainsi … et $x=3$. f admet un unique point invariant ,qui a pour coordonnées $(3;1)$.

b) Donnons la nature de $f(\mathcal{P})$, image de $\mathcal{P}$ par f.

La matrice de l'endomorphisme associé à f est $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Dét(M)$=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$. M n'est pas inversible et donc f n'est pas bijective.

$f(\mathcal{P})$ est soit une droite , soit un point de $\mathcal{P}$.

Soit I et J deux points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.

(O,I,J) est un repère affine du plan $\mathcal{P}$. Soient $O'=f(O);I'=f(I);J'=f(J)$.

$O'(-1;-3);I'(0;-2);J'(0;-2)$.

$I'=J'$ et alors $(O';I')$ est un repère de $f(\mathcal{P})$. Puisque $O'\neq I'$, $f(\mathcal{P})$ est la … repère (O' ;I'). (Si O',I' et J' avaient été distincts deux à deux, ils seraient aligné… aurait retenu deux points parmi ces trois).

Déterminons dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$=…

$M(x;y)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\begin{vmatrix}x+1 & 1\\ y+3 & 1\end{vmatrix}=0$. D'où , $x-y-2=0$.

Autre méthode Soit $(x';y')$ le couple des coordonnées du point image d'un point de coord… $(x;y)$ par f.

On a $\begin{cases} x' = x+y-1 \\ y' = x+y-3 \end{cases}$. En utilisant la première équation pour trouver l'expression de x, et en remplaçant dans la deuxième équation, x par cette expression, on trouve $x'-y'-2=0$ qui est une équation que doivent vérifier les coordonnées $(x';y')$ d'un point de $\mathcal{D}$ .On a trouvé $x-y-2=0$ parce qu'on a supposé que le point de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(x;y)$.

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on définit une application affine g de définition analytique

$x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x+2y+z)$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équations catésiennes : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

Déterminons l'image $\mathcal{D}$' de $\mathcal{D}$ par g.

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de cordonnées $(1;-2;-3)$ et de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = -3+t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

Pour $t=-1$, $x=0, y=0$ et $z=-4$, le point B de coordonnées $(0;0;-4)$ est un autre point de l'espace. Soient A' et B' les images respectives de A et de B par g.

$A'\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et B'$(-1;-1;-1)$. Puisque $A' \neq B'$, (A',B') est un repère affine de $\mathcal{D}$'. $\mathcal{D}$'est la droite $(A'B')$. Elle passe par exemple par le point A' et a pour vecteur directeur est $\overrightarrow{A'B'}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

S'exercer

ABC est un triangle d'un plan affine $\mathcal{P}$, f est l'application affine telle que $f(A)=B$ et $f(B)=A$ $f(C)=C$

i. Justifier que f est une transformation affine $\mathcal{P}$.

ii. On désigne par C' le milieu du segment $[AB]$. Montrer que (CC') est invariante point par point par f.

iii. Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante par f.

ABC est un triangle d'un plan affine $\mathcal{P}$, D est le symétrique de B par rapport à C. f est l'application $\mathcal{P}$affine du plan telle que $f(A)=A$ $f(B)=D$ et $f(C)=B$.

i. Montrer que f est une transformation affine de $\mathcal{P}$.

ii. Déterminer l'ensemble des points invariants par f

Le plan affine $\mathcal{P}$est muni d'un repère (O,I,J). Montrer qu'une application qui laisse un rèpère invariant point par point est l'application identité.

g une application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même dont l'écriture analytique est $\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = x+2y \end{cases}$.

a. Montrer que f est bijective.

b. Déterminer l'ensemble des points M tels que O,M,M' soient alignés.

c. Déterminer les droites :

- parallèles à leurs images par f;
- confondues à leurs images par f.

1.r Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par : $\begin{cases} x' = 3x-4y-4 \\ y' = 2x-y-2z-2 \\ z' = 2x-3z-4 \end{cases}$.

a. L'application f est-elle bijective ?

b. Donner la nature et une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, de l'image par f de la droite passant par le point $A(1;0;2)$ et de vecteur $\vec{u}(1;2;3)$.

c. Donner la nature et une équation cartésienne de l'image du plan P dont une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $x-z+2=0$.

LEÇON 2 PROJECTIONS, SYMÉTRIES ET AFFINITÉS D'UN ESPACE AFFINE.

Reconnaitre et caractériser une projection, une symétrie et une affinité.

1. PROJECTIONS AFFINES.

Dans toute cette leçon, Y est un espace affine qui peut être réduit à un point, une droite, un plan ou l'espace physique. $\vec{Y}$ est l'esemble des vecteurs formés à partir des bipoints de $Y \times Y$. $\vec{Y}$ est encore appelé direction de Y. X est un sous-espace affine de Y, de direction $\vec{X}$ et E un sous espace vectoriel de $\vec{Y}$.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit X un espace qui peut être réduit à un point, une droite du plan, un plan de l'espace ou l'espace physique; $\vec{X}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ tels que M et N décrivent X ; E un espace vectoriel tel que $\vec{X}$ sont des sous- espaces vectoriels supplémentaires.

Soit M un point quelconque.

a) Montrer que l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{MN} \in E$ a un seul point M_1 en commun avec X.

b) Soit $p : M \to M_1$. Montrer que :

- $p \circ p = p$;
- si $M \in X$, alors $p(M) = M$;
- si M est tel que $p(M) = M$, alors $M \in X$.

c) Soient M et N deux points d'images respectives M_1 et N_1 par p.

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1} + (\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{N_1N})$

Vérifier que $\overrightarrow{M_1N_1}$ est un vecteur de $\vec{X}$, tandis que $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{N_1N}$ est un vecteur de E.

Montrer que $\pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M_1N_1}$ où π est la projection vectorielle sur $\vec{X}$, de direction E.

En déduire que p est une application affine , puis nommer l'endomorphisme qui lui est associé.

Activité 2

Soit f une application affine de X vérifiant $f^2 = f \circ f = f$; φ l'endomorphisme associé à f.

a) Justifier que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

b) Donner la base et la direction de φ.

c) Montrer que $f(X)$ est l'ensemble des points invariants par f.

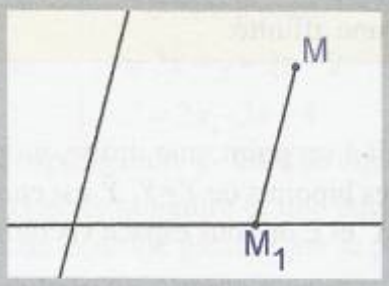
d) En déduire que f est la projection sur l'ensemble $f(X)$, de direction $ker\varphi$.

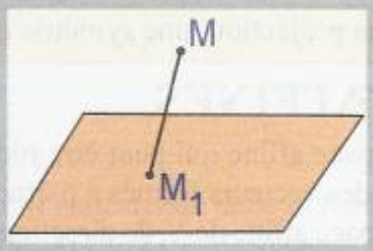
Retenir

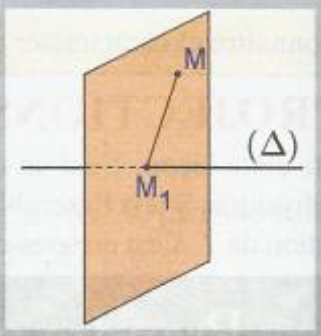
On appelle projection sur X ,de direction E, l'application p qui à un point quelconque M, associe le point M' , intersection de X et de l'ensemble des points N ,tels que $\overrightarrow{MN} \in$ E.

Si p est une projection, alors $p \circ p = p$.

Si une application affine f vérifie $f \circ f = f$, alors f est une projection. Sa base est l'ensemble des points invariants par f et sa direction est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ lorsque M varie.







Remarque

- Dans le plan, on peut avoir une projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à une autre droite $(\mathcal{D}')$ lorsque $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles, une projection sur $\{A\}$ est l'application constante $M \to A$, ou l'idendité.
- Dans l'espace, on peut avoir :
  - L'identité ;
  - la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite $(\mathcal{D})$ lorsque $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ ne sont pas parallèles ;
  - la projection sur $(\mathcal{D})$ et de direction $(\mathcal{P})$. ($(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ ont des directions suplémentaires)
  - la projection sur $\{A\}$ qui est l'application constante $M \to A$.
- Toute projection est une application affine
- Une projection qui n'est pas l'identité n'est pas une transformation.

Exemple

1) Soit une application f définie dans un plan $\mathcal{P}$, rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de direction analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x+2y-1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y+2) \end{cases}$.

a) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

Un point de coordonnées $(x;y)$ *est* invariant si et seulement si $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x+2y-1) \\ y = \frac{1}{3}(-2x-y+2) \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=-2 \end{cases}$. D'où $x+2y=1$ car la deuxième équation est équivalente à la première.

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) dont une équation cartésienne est $x+2y=1$.

b) Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ appartiennent à une même direction, lorsque M varie.

En effet, $\overrightarrow{MM'}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}=\left(\frac{1}{3}(x+2y-1)\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{3}(-2x-4y+2)\right)\vec{j}$

$\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}(x+2y-1)(\vec{i}-2\vec{j})$.

Nous constatons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(1;-2)$.

Toutes les droites (MM') lorsque $M\neq M'$ sont parallèles.

On pouvait aussi montrer que $\frac{y'-y}{x'-x}=-2$.

c) Montrons que M' appartient à une droite fixe quelque soit le point M d'image M' par f.

Du système $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(4x+2y-1)\\y'=\frac{1}{3}(-2x-y+2)\end{cases}$, $\begin{cases}3x'=4x+2y-1\\3y'=-2x-y+2\end{cases}$; soit $4x+2y=3x'+1$ et $-2x-y=3y'-2$.

On en déduit que $3x'+1=-2(3y'-2)$. D'où, $3x'+6y'-3=0$.

Le point M' est toujours situé sur la droite (D') d'équation : $x+2y-1=0$.

On remarque que (D) et (D') sont confondues.

f est donc une projection. C'est la projection sur la droite (D) : $x+2y-1=0$ de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}(1;-2)$.

d) Montrons que $f\circ f=f$

Première méthode :Écrire les expressions analytiques de $f\circ f$, puis les comparer à celles de f.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque du plan P; $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ deux points tels que $M'=f(M)$ et $M''=f(M')$. $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=(f\circ f)(M)$.

Puisque $M'=f(M)$, on a : $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(4x+2y-1)\\y'=\frac{1}{3}(-2x-y+2)\end{cases}$; de $M''=f(M')$, $\begin{cases}x''=\frac{1}{3}(4x'+2y'-1)\\y''=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2)\end{cases}$

$x''=\frac{1}{3}(4x'+2y'-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(4x+2y-1)+\frac{2}{3}(-2x-y+2)-1\right)=\frac{1}{3}(4x+2y-1)=x'$

$y''=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2)=\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}(4x+2y-1)-\frac{1}{3}(-2x-y+2)+2\right)=\frac{1}{3}(-2x-y+2)=y'$

on a donc $(f\circ f)(M)=f(M)$. d'ou $f\circ f=f$.

Deuxième méthode : Écrire la matrice A de l'endopmorphisme de f, choisir un point quelconque (O par exemple), puis montrer que $A^2=A$ et que $(f\circ f)(O)=f(O)$.

2) a. (D) est une droite du plan, d'équation catésienne $x-2y+1=0$; $\vec{e}(2;3)$ un vecteur du plan.

Montrons qu'on peut définir une projection sur la droite (D), de direction la droitevectorielle E, engendrée par $\vec{e}$.

Il suffit de vérifier que la direction F de (D) et E sont supplémentaires dans le plan.

En effet, $\overrightarrow{MM'}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}=\left(\frac{1}{3}(x+2y-1)\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{3}(-2x-4y+2)\right)\vec{j}$

$\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}(x+2y-1)(\vec{i}-2\vec{j})$.

Nous constatons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(1;-2)$.

Toutes les droites (MM') lorsque $M\neq M'$ sont parallèles.

On pouvait aussi montrer que $\frac{y'-y}{x'-x}=-2$.

c) Montrons que M' appartient à une droite fixe quelque soit le point M d'image M' par f.

Du système $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(4x+2y-1)\\ y'=\frac{1}{3}(-2x-y+2)\end{cases}$, $\begin{cases}3x'=4x+2y-1\\ 3y'=-2x-y+2\end{cases}$; soit $4x+2y=3x'+1$ et $-2x-y=3y'-2$.

On en déduit que $3x'+1=-2(3y'-2)$. D'où, $3x'+6y'-3=0$.

Le point M' est toujours situé sur la droite (D') d'équation : $x+2y-1=0$.

On remarque que (D) et (D') sont confondues.

f est donc une projection. C'est la projection sur la droite (D) : $x+2y-1=0$ de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}(1;-2)$.

d) Montrons que $f\circ f=f$

Première méthode :Écrire les expressions analytiques de $f\circ f$, puis les comparer à celles de f.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque du plan P; $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ deux points tels que $M'=f(M)$ et $M''=f(M')$. $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=(f\circ f)(M)$.

Puisque $M'=f(M)$, on a : $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(4x+2y-1)\\ y'=\frac{1}{3}(-2x-y+2)\end{cases}$; de $M''=f(M')$, $\begin{cases}x''=\frac{1}{3}(4x'+2y'-1)\\ y''=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2)\end{cases}$

$x''=\frac{1}{3}(4x'+2y'-1)=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(4x+2y-1)+\frac{2}{3}(-2x-y+2)-1\right)=\frac{1}{3}(4x+2y-1)=x'$

$y''=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2)=\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}(4x+2y-1)-\frac{1}{3}(-2x-y+2)+2\right)=\frac{1}{3}(-2x-y+2)=y'$

on a donc $(f\circ f)(M)=f(M)$. d'ou $f\circ f=f$.

Deuxième méthode : Écrire la matrice A de l'endopmorphisme de f, choisir un point quelconque (O par exemple), puis montrer que $A^2=A$ et que $(f\circ f)(O)=f(O)$.

2) a. (D) est une droite du plan, d'équation catésienne $x-2y+1=0$; $\vec{e}(2;3)$ un vecteur du plan.

Montrons qu'on peut définir une projection sur la droite (D), de direction la droitevectorielle E, engendrée par $\vec{e}$.

Il suffit de vérifier que la direction F de (D) et E sont supplémentaires dans le plan.

Le vecteur $\vec{u}(2;1)$ est un vecteur de base de F. $dét(\vec{u};\vec{e}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-2=4$.

$\vec{u}$ et $\vec{e}$ sont non colinéaires et alors E et F sont supplémentaires.

On peut donc définir une projection g (unique) de base (D) et de direction E.

b) Soit $(x';y')$ le couple des coordonnées du point M', image d'un point $M(x;y)$ par g.

Le point M' est un point sur (D) et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à E.

On a $x'-2y'+1=0$ et $x'-x=2a, y'-y=3a$.

D'où $\begin{cases} x'-2y'=1 \\ x'=2a+x \\ y'=y+3a \end{cases}$. En remplaçant dans la première équation $x'et\,y'$ par leurs expressions respectives, $2a+x-2y-3a=1$. D'où, $a=x-2y-1$.

On a $\begin{cases} x'=3x-4y-2 \\ y'=3x-5y-3 \end{cases}$. Ce système est constitué des expressions analytiques de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On pouvait aussi utiliser les relations $x'-2y'=1$ et $dét(\vec{e},\overrightarrow{MM'})=0$ pour avoir un système de deux équations linéaires aux inconnues $x'et\,y'$. Résoudre le système obtenu pour avoir les expressions respectives de $x'et\,y'$ en fonction de x et de y.

3) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ; $(\mathcal{P})$ le plan de $\mathcal{E}$ dont une équation est $x+y-z+2=0$; E la droite vectorielle dont une base est formée du vecteur $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; F la direction du plan $\mathcal{P}$.

a) Montrons que E et F sont supplémentaires dans l'espace.

F est l'ensemble des vecteurs dont les composantes vérifient $x+y-z=0$. $2+1-1=2\neq 0$ donc le vecteur $\vec{u}$ n'appartient pas à F.

E et F sont donc supplémentaires dans l'espace.

b. h est la projection sur $\mathcal{P}$, de direction E.

Soient $(x';y';z')$ les coordonnées du point M' image du point M de coordonnées $(x;y;z)$ par h.

On a : $M'\in\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MM'}\in E$

Puisque $\overrightarrow{MM'}\in E$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{MM'}=t\vec{u}$ $\begin{cases} x'+y'-z'=-2 \\ x'-x=2t \\ y'-y=t \\ z'-z=t \end{cases}$. En reportant les expressions respectives de $x', y'et\,z'$ dans la première équation, on trouve $t=-\frac{1}{2}(x+y-z+2)$

Ainsi, $x'=x+2t=-y+z-2$; $y'=t+y=\frac{1}{2}(-x+y+z-2)$ et $z'=t+z=\frac{1}{2}(-x-y+3z-2)$.

d'où $h(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-y+z-2 \\ y'=\frac{1}{2}(-x+y+z-2) \\ z'=\frac{1}{2}(-x-y+3z-2) \end{cases}$

S'exercer

f est l'application définie du plan $\mathcal{P}$ de repère $\mathcal{R}=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans lui-même, par son écriture analytique $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x+y-1) \\ y'=-\frac{1}{2}(x+y-2) \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

Montrer que les droites (MM') ont la même direction dont on donnera un vecteur de base.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Soit g l'aplication de l'espace ,de définition analytique $x'=y'=z'=\frac{1}{4}(x+2y+z)$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par g.

Montrer que les droites (MM') ont la même direction dont on donnera un vecteur de base.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Peut-on prévoir les expressions analytiques de $f\circ f$?

Montrer l'existence et définir analytiquement :

la projection dans le plan sur la droite (D) : $3x-y+3=0$, dont la direction a pour vecteur de base , le vecteur de coordonnées $(3;-4)$;

la projection dans l'espace, sur le plan $(P): x-3y+z-1=0$, dont la direction a pour vecteur de base , le vecteur de composantes $(2;-1;1)$.

la projection orthogonale dans l'espace , sur la droite (D) : $x-1=\frac{-y-2}{2}=z+3$.

SYMÉTRIES AFFINES.

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}$=(O ; $\vec{i},\vec{j}$) ; f une application affine d'écriture analytique :

$=\frac{1}{3}(-x-2y+2)$

$=\frac{1}{3}(-4x+y+2)$

Déterminer l'ensemble (D) des points fixes par f.

Montrer que pour tout point M, si $f(M)=M'$, alors $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M.

Montrer qu'on peut définir une projection p sur (D) , de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

Donner l'écriture analytique de p dans le repère $\mathcal{R}$.

e) Montrer que pour tout point M, $p(M)$ est le milieu de $[MM']$.

f) Construire M' à partir d'un point M arbitrairement choisi.

g) Conjecturer à partir de cette construction, la position de $(f \circ f)(M)$, puis confirmer cette conjecture à l'aide des expressions analytiques de $f \circ f$.

Retenir

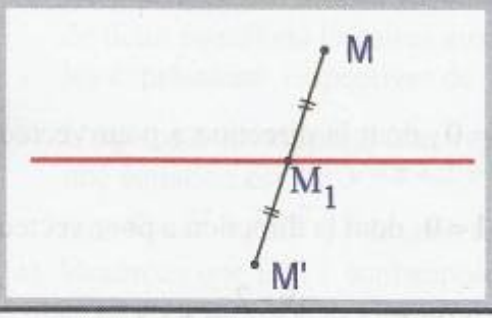
Soit X un espace affine ayant pour direction le sous-espace vectoriel F, E un sous-espace vectoriel tel que E et F soient supplémentaires.

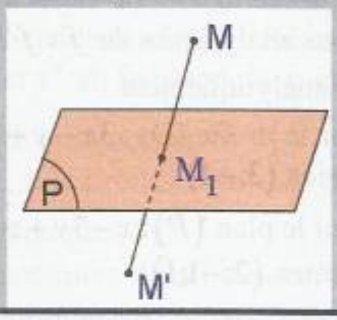
- L'application s qui à un point M associe le point M' tel que le projeté de M sur X, de direction E est le milieu du segment $[MM']$, est appélée symétrie de base X et de direction E.

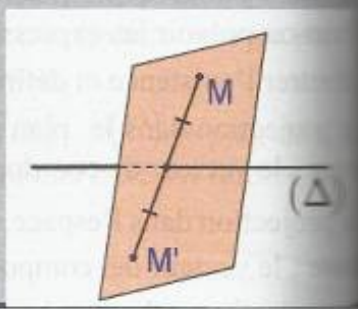
  s est une application affine et $s \circ s = identité$ .On dit que s est une application involutive ou encore que s est une involution.

- Toute application affine f telle que $f \circ f$ soit l'identité est une symétrie affine.

  sa base est l'ensemble des points invariants par f et sa direction est l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés par l'endomorphisme associé à f







Remarque

- Dans le plan, les symétries peuvent être :

  L'identité ;

  Les symétries centrales ;

  Les symétries par rapport à une droite de direction celle d' autre droite non parallèle à la première.

- Dans l'espace, les symétries peuvent être :

  L'identité ;

  Les symétries centrales ;

  Les symétries par rapport à une droite parallèlement à un plan tel que la droite ne soit pas parallèle au plan ;

  Les symétries par rapport à un plan et parallèlement à une droite telle que la droite ne soit pas parallèle au plan.

- Une symétrie par rapport à X est dite orthogonale lorsque le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal quelque soit le point M d'image M' .

- Puisque toute symétrie s vérifie $s \circ s$ soit l'identité, s est bijective et $s^{-1} = s$.

  Toute symétrie est alors une transformation.

Exemple

Soit f une apllication affine du plan dans lui-même de définition analytique $\begin{cases} x' = 2x+2y-2 \\ y' = -\frac{3}{2}x-2y+3 \end{cases}$

a) Déterminons l'ensemble des points fixes par f.

Les coordonnées $(x;y)$ de tels points vérifient : $\begin{cases} x+2y=2 \\ -\frac{3}{2}x-3y=-3 \end{cases}$

Les deux équations du système sont équivalentes car la première s'obtient en multipliant les membres la deuxième par $-\frac{2}{3}$.

L'ensemble des points fixes par f est la droite d'équation $x+2y=2$.

b) Soit M' l'image d'un point quelconque M par f. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ *a une direction* fixe.

$$\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j} = (2x+2y-2-x)\vec{i}+\left(-\frac{3}{2}x-2y+3-y\right)\vec{j}$$

$$=(x+2y-2)\vec{i}+\left(-\frac{3}{2}x-3y+3\right)\vec{j}$$

$$=(x+2y-2)(\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j})$$

Tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}$.

c) Montrons que le milieu de $[MM']$ est situé sur l'ensemble des points fixes par f.

Soit I_M *le milieu* de $[MM']$. $x_{I_M} = \frac{x+x'}{2} = \frac{3}{2}x+y-1$ et $y_{I_M} = \frac{y+y'}{2} = -\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$.

$x_{I_M}+y_{I_M} = \frac{3}{2}x+y-1+2\left(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}\right)=2$.

Conclusion : f *est* la symétrie par rapport à la droite d'équation $x+2y=2$, parallèlement à toute droite de vecteur directeur $\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}$. f est une transformation du plan et $f^{-1}=f$.

S'exercer

a) Montrer que l'application affine g du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ de définition analytique $\begin{cases} x' = x-y-2 \\ y' = -y-4 \end{cases}$ est une symétrie dont on donnera les éléments qui la définissent. Est-elle orthogonale ?

b) Montrerque l'application affine h de l'espace dans lui-même de définition analytique $\begin{cases} x' = -y-z+1 \\ y' = -2x-y-2z+2 \\ z' = x+y+2z-1 \end{cases}$ est une symétrie dans l'espace, dont on déterminera les éléments qui la caractérisent. Est-elle une symétrie orthogonale ?

2.3. AFFINITÉS

Prendre un bon départ

Activité 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O\,;\vec{i},\vec{j})$; f une application affine d'écriture analytique $\begin{cases} x' = 3x-2y \\ y' = 4x-3y \end{cases}$.

a) Déterminer l'ensemble des (D) des points fixes par f.

b) Montrer que pour tout couple (M ;M') tel que $f(M)=M'$, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M.

c) Montrer qu'on peut définir une projection p sur (D), de direction la droite engendrée par $\vec{u}$.

d) Donner l'écriture analytique de p dans le repère $\mathcal{R}$.

e) Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout point M d'image M' par f, $\overrightarrow{M'p(M)}=k\overrightarrow{Mp(M)}$.

f) Construire M' à partir d'un point M arbitrairement choisi.

Activité 2

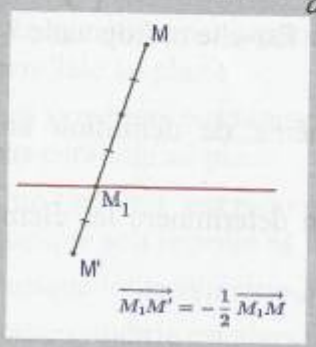
Soit une application g, un réel a tels que pour tout couple des points (M ;M') tel que $M'=g(M)$; $p(M)$ le projeté du poin M sur une droite (D) parallèlment à une droite (D'), on a $\overrightarrow{P(M)M}=a\overrightarrow{p(M)M}$.

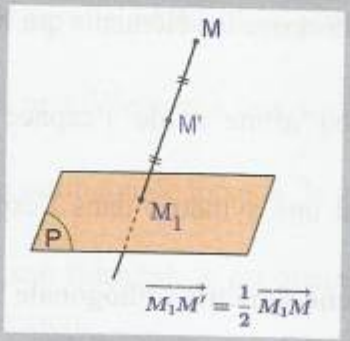
Donner la nature exacte de l'application g, dans chacun des les cas : $a=0;a=1;a=-1$.

Donner une construction du point M' dans les cas : $a=2$; $a=-\frac{1}{2}$.

Retenir

- Soit p la projection sur un espace X de direction E ; a un nombre réel.
  L'application f qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{p(M)M'}=a\overrightarrow{p(M)M}$ est appelée affinité de base X, de direction E et son rapport a.
- Toute affinité est une application affine.
- Une affinité est une transformation si et seulement si son **rapport est non nul**. La réciproque de l'affinité de base X, de direction E et de rapport non nul a est l'affinité de baxe X, de direction E et de rapport $\frac{1}{a}$.





Remarque

- L'affinité de rapport nul est une projection ; l'affinité de rapport -1 est une symétrie.
- Si la projection associée à une affinité est orthogonale, alors cette affinité est dite orthogonale.
- Si f est une affinité, alors sa base est l'ensemble des points invariants par f, la direction est la direction de l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ où $M' = f(M)$.

Exemple

1) Soit f une application affine du plan $\mathcal{P}$, d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$.

a) Cherchons l'ensemble des points invariants par f.

Les coordonnées $(x;y)$ d'un point fixe sont solution du système : $\begin{cases} x = x \\ y = 3y - 1 \end{cases}$. On obtient $y = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des points invariants par f est la droite dont une équation cartésienne est $y = \frac{1}{2}$.

b) Soit M'$(x';y')$ l'image d'un point M$(x;y)$ par f.

$\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = 0\vec{i} + (2y-1)\vec{j} = (2y-1)\vec{j}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{j}$.

c) Soit M_1 le projeté du point M sur la droite d'équation (D) : $y = \frac{1}{2}$, parallèlement à l'axe des ordonnées (ou encore de direction $\vec{j}$).

Soit $(x_1;y_1)$ le couple des coordonnées du point M_1.

On a $M_1 \in$ (D) et $\overrightarrow{MM_1}$ est colinéaire $\vec{j}$. $y_1 = \frac{1}{2}$ et il existe un réel t tel que $\overrightarrow{MM_1} = t\vec{j}$.

$x_1 - x = 0$, $y_1 - y = t$ et $y_1 = \frac{1}{2}$. $x_1 = x$ et $y_1 = \frac{1}{2}$.

2) Montrons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{M_1M'} = k\overrightarrow{M_1M}$.

$\overrightarrow{M_1M'}\left(0;3y-\frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{M_1M}\left(0;y-\frac{1}{2}\right)$. On constate que $\overrightarrow{M_1M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{M_1M}$.

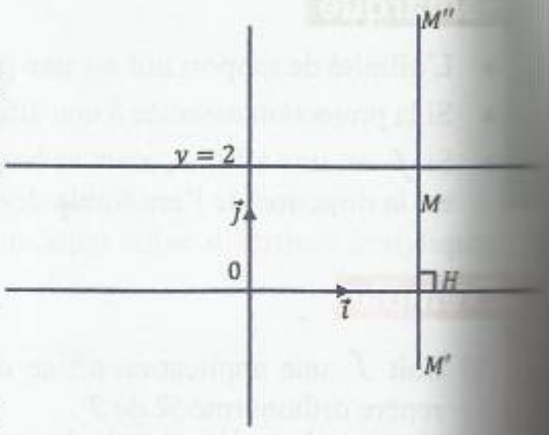
f est une affinité.

C'est l'affinité de base la droite $(D): y = \frac{1}{2}$, de direction l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{3}{2}$. f est une transformation du plan car son rapport est non nul.

f^{-1} est l'affinité d'axe la droite (D) : $y = \frac{1}{2}$, de direction l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{2}{3}$. Puisque les droites (D) et l'axe des ordonnées sont perpendiculaires, f et f^{-1} sont des affinités orthogonales.

Exercice Résolu 1.

- Donnons les expressions analytiques de :
  i. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(0,\vec{i})$ et de rapport k
  ii. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(0,\vec{j})$ et de rapport k
  iii. L'affinité orthogonale d'axe $(D): y=2$ et de rapport -2



- Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{i})$ et de rapport k.

$\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM}$ où $H\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$. $\begin{cases}x'-x=k(x-x)\\y'-y=k(y-0)\end{cases}$; d'où $\begin{cases}x'=x\\y'=ky\end{cases}$.

- L'expression analytique de l'application orthogonale d'axe la droite de repère $(O,\vec{j})$ est donnée par $\begin{cases}x'=kx\\y'=y\end{cases}$.

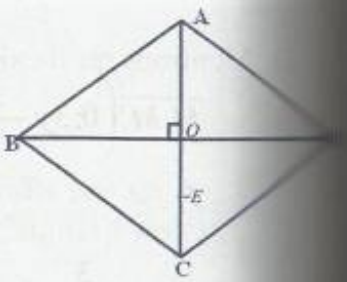
- Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M''(x'',y'')$ l'image du point M par l'affinité orthoganale d'axe (y'oy).

$\overrightarrow{KM'}=-2\overrightarrow{KM}$ où K est le projeté orthogonal M sur $(D): y=2$. $K\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x'-x=-2(x-x)\\y'-2=-2(y-2)\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x'=x\\y'=-2y+6\end{cases}$

- $(ABCD)$ est un losange de centre O. E est le milieu de $[OC]$, f est l'application affine du plan telle que : $f(O)=O$; $f(B)=B$ et $f(A)=E$.

$\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. L'affinité orthogonale d'axe (BD) transforme O en O, B en B et A en E. donc f est l'affinité orthogonale d'axe (BD) et de rapport $-\frac{1}{2}$



Exercice Résolu 2 : Image d'un cercle par une affinité orthogonale.

Enoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (C) est le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-4y-$
$\mathcal{A}(D;k)$ l'affinité orthogonale d'axe D la droite d'équation $x=2$ et de rapport k.

1) Déterminer les expressions analytiques de $\mathcal{A}(D;k)$;
2) Déterminer l'image (C'_k) de (C) par $\mathcal{A}(D;k)$.

Résolution

1) Expressions analytiques de $\mathcal{A}(D;k)$.

Soit M$(x;y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D). H a pour coordonnées (2 ;y).

Soit M'$(x';y')$ l'image de M par $\mathcal{A}(D;k)$. On a : $\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM}$.

D'où le système $\begin{cases}x'-2=k(x-2)\\y'-y=0\end{cases}$

Ainsi $\begin{cases}x'=k(x-2)+2\\y'=y\end{cases}$

2) Détermination de (C'_k). (C) a pour équation $(x-2)^2+(y-2)^2=9$.

Définissons $\mathcal{A}^{-1}(D;k)$ Du système $\begin{cases}x'-2=k(x-2)\\y'-y=0\end{cases}$, on a : $\begin{cases}x=\dfrac{x'+2k-2}{k}\\y=y'\end{cases}$.

Ainsi (C'_k) a pour équation $\left(\dfrac{x'+2k-2}{k}-2\right)^2+(y'-2)^2=9$.

D'où $(C'_k):\dfrac{(x'-2)^2}{k^2}+(y'-2)^2=9$

Par suite : $\left(C'_{\frac{1}{2}}\right):\dfrac{(x'-2)^2}{\frac{1}{4}}+(y'-2)^2=9$; $(C'_2):\dfrac{(x'-2)^2}{4}+(y'-2)^2=9$

Exercice Résolu 3 : Image d'une courbe par une application affine

Enoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère $f:x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f sur .

2) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

3) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

4) $\mathcal{C}(a;b)$ est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;y)$ telles que $y=b+\ln\left(\dfrac{1+x-a}{1-x+a}\right),(a;b)\in\mathbb{R}^2$; C et C^{-1} désignent respectivement les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1}.

a) Montrer que $\mathcal{C}(a;b)$ est l'image de C par une composée d'applications simples que l'on précisera.

b) Donner un programme de construction de $\mathcal{C}(a;b)$

5) Construire C, C^{-1} et $\mathcal{C}(1;1)$.

Solution

1) Pour tout réel $x, f'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

Résolution

1) Expressions analytiques de $\mathcal{A}(D;k)$.

Soit M$(x;y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D). H a pour coordonnées (2 ;y).

Soit M'$(x';y')$ l'image de M par $\mathcal{A}(D;k)$. On a : $\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM}$.

D'où le système $\begin{cases} x'-2=k(x-2) \\ y'-y=0 \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} x'=k(x-2)+2 \\ y'=y \end{cases}$

2) Détermination de (C'_k). (C) a pour équation $(x-2)^2+(y-2)^2=9$.

Définissons $\mathcal{A}^{-1}(D;k)$ Du système $\begin{cases} x'-2=k(x-2) \\ y'-y=0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x=\dfrac{x'+2k-2}{k} \\ y=y' \end{cases}$.

Ainsi (C'_k) a pour équation $\left(\dfrac{x'+2k-2}{k}-2\right)^2+(y'-2)^2=9$.

D'où $(C'_k):\dfrac{(x'-2)^2}{k^2}+(y'-2)^2=9$

Par suite : $\left(C'_{\frac{1}{2}}\right):\dfrac{(x'-2)^2}{\frac{1}{4}}+(y'-2)^2=9$; $(C'_2):\dfrac{(x'-2)^2}{4}+(y'-2)^2=9$

Exercice Résolu 3 : Image d'une courbe par une application affine

Enoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère $f:x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f sur .

2) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

3) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

4) $\mathcal{C}(a;b)$ est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;y)$ telles que $y=b+\ln\left(\dfrac{1+x-a}{1-x+a}\right),(a;b)\in\mathbb{R}^2$; C et C^{-1} désignent respectivement les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1}.

a) Montrer que $\mathcal{C}(a;b)$ est l'image de C par une composée d'applications simples que l'on précisera.

b) Donner un programme de construction de $\mathcal{C}(a;b)$

5) Construire C, C^{-1} et $\mathcal{C}(1;1)$.

Résolution

i) Pour tout réel $x, f'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

On a le tableau de variation ci-contre:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1

ii) Existence de f^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=J=]-1;1[$.

iii) Expression de $f^{-1}(x)$. En posant $y=f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$ or $y\in]-1;1[$

donc $\dfrac{1+y}{1-y}>0$. $x=ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. Donc $f^{-1}(x)=ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, pour tout x de]-1;1[

iv) Recherche de la composée d'applications simples

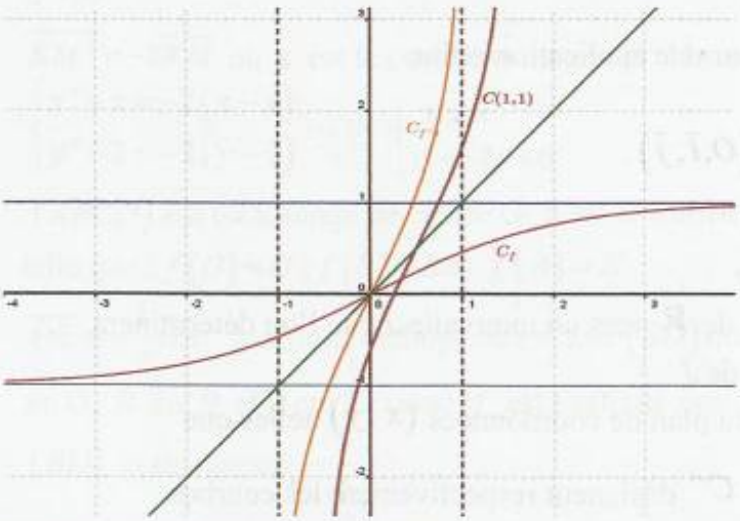
6) Soit $M(x;y)\in\mathcal{C}(a;b)$;on a $y=b+\ln\left(\dfrac{1+x-a}{1-x+a}\right),(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

$$y=b+f^{-1}(x-a)$$

Soit T la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$. $\mathcal{C}(a;b)=T\left(C^{-1}\right)$

Soit S la reflexion d'axe $(\Delta):y=x$. On a $C^{-1}=S(C)$

D'où $\mathcal{C}(a;b)=T\left(S(C)\right)=(T\circ S)(C)$.



S'exercer

2.f Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les écritures analytiques des applications affines :

i) La translation de vecteur $-2\vec{j}$;

ii) La symétrie centrale de centre $A(-3,2)$;

iii) La projection orthogonale sur la droite (D) d'équation $x-y+1=0$;

iv) L'affinité orthogonale d'axe $(D): x = y$ et de rapport -2.

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). f est l'application affine du plan d'expressions analytiques $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = 2x \end{cases}$

i) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f noté (D).

ii) Donner les expressions analytiques de la projection orthogonale P sur (D).

iii) Exprimer $\overrightarrow{P(M)M'}$ à l'aide de $\overrightarrow{P(M)M}$ et en déduire la nature de f et les éléments caractéristiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne $A(-5;2)$ et $A'(5;-2)$.

i) Quel l'ensemble C des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = 0$?

ii) Déterminer l'écriture analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (AA') et de rapport $\frac{1}{2}$.

iii) Déterminer l'image C' de C par f.

Soit l'application affine g de définition analytique : $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4 \end{cases}$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$.

a. Déterminer l'ensemble des points invariants P par g.

b. Démontrer que si $M' = g(M)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ non nul et constant.

c. Soit $M_1(x_1;y_1;z_1)$ le projeté du point M sur P, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Exprimer $x_1, y_1 et z_1$ en fonction de $x, y et z$.

Déterminer le réel a tel que $\overrightarrow{M_1M'} = a\overrightarrow{M_1M}$.

d. En déduire la nature de l'application affine g, ainsi que ses éléments caractéristiques.

e. Le vecteur $\vec{u}$ est-il normal au plan P ?

S'ENTRAÎNER

GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS AFFINES.

1.

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Définir analytiquement l'application affine f du plan dans lui-même, qui au point I de coordonnées $(1;2)$ associe le point J$(-1;3)$ et d'endomorphisme associé de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que f est une transformation du plan

c) Définir analytiquement la bijection réciproque f^{-1} de f.

d) Donner par son équation cartésienne l'image de la droite dont une équation cartésienne est $x-3y+5=0$.

e) Existe-t-il des droites du plan:

- parallèles à leurs images par f ?
- perpendiculaires à leurs images par f ?
- globalement invariantes par f ?

2.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère cartésien $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui associe à tout point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x+y-1 \\ y' = x-y+2 \end{cases}$.

a) Montrer que f est une application affine bijective.

Écrire la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) Soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$; $(a;b) \neq (0;0)$.

Déterminer par son équation cartésienne l'image (D'), de (D) par f.

d) Quelles sont les droites (D) parallèles à

3.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère cartésien $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui associe à tout point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2} \\ y' = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2} \end{cases}$

a) Déterminer les valeurs de a et b pour quelles f est bijective.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M et M' sont alignés.

c) Définir analytiquement f^{-1} quand f est bijective

4.

Soit f une application affine du plan dans lui-même et A un point du plan ; t la translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$.

a) Montrer que $t^{-1} \circ f$ est affine.

b) Montrer A est invariant par $t^{-1} \circ f$.

c) En déduire que toute application affine peut s'écrire comme composée d'une translation et d'une application affine laissant A invariant

5.

f est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y' = 3x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ dans un repère du plan

1) Montrer que f est bijective.

2) Soit (D) : $ax+by+c=0$; $a \neq 0 ou b \neq 0$

Donner une équation cartésienne de $f(D)$

D et $f(D)$ peuvent – elles être parallèles ?

3) En déduire que pour tout point M du plan $M, f(M) = M_1, (f \circ f)(M) = M_2$ ne sont pas alignés si $M \neq M_1$.

Calculer les coordonnées $(x';y')$ de l'isobarycentre G du système $\{M_1, M_2, M\}$.

Vérifier que le point G est le seul point invariant par f.

En déduire que f^3 est l'application identique du plan $\mathcal{P}$.

...C,A',B',C' sont quatre points ...plan de coordonnées respectives ...(0;2),(−1;−2),(4;−3),(−1;−1) et (1;−6).

...analytiquement l'application f qui asso... aux points A,B et C, les points A',B',C' res...ement.

Pour les exercices 7,8,9 le plan $\mathcal{P}$ est rapporté ...repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

...plication g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associe au ...nt M$(x;y)$, le point $M'(x';y')$ tel que :

$x' = y+1$

$y' = 4x+2$

...ontrer que l'application g est affine ...jective.

...éterminer la matrice de l'endomophisme ...sociée à g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

...éterminer l'ensemble des points invariants ...r g.

...éterminer une équation cartésienne ...e l'image de la droite d'équation ...$x-5y+1=0$ par g

...émontrer qu'il existe deux droites ...lobalement invariantes par g.

...plication h est définie analytiquement ...ns un repère $\mathcal{R}$ d'origine O du plan par :

$x' = x-y$

$y' = 2x-y$

...ontrer que h est bijective, puis définir ...nalytiquement h^{-1}.

...éterminer l'ensemble des points invariants par h.

3) Montrer que si s désigne la symétrie centrale de centre O, alors $h^{-1} = s \circ h = h \circ s$.

4) Déduire que $(h^{-1})^2 = h^2$

9.

Soit a un nombre réel. On définit l'application g_a du plan dans lui-même par :

$$\begin{cases} x' = \frac{a+1}{2}x + \frac{1-a}{2}y \\ y' = \frac{1-a}{2}x + \frac{a+1}{2}y \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles g_a est une transformation du plan.

Définir analytiquement dans le même repère g_a^{-1}, la réciproque de g_a quand g_a est bijective

2) Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par g_a.

Pour les exercices 10,11 et 12 l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

10.

On définit analytiquement une application affine f de l'espace dans lui-même par :

$$\begin{cases} x' = x+2y+3z \\ y' = x+2z \\ z' = 2y+z \end{cases}$$

1) L'application f est-elle bijective ?

2) Déterminer l'image par f de :

- l'espace tout entier ;
- du plan dont une équation est : $x-3y+z-1=0$
- de la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+t \\ z = -t \end{cases}$;$(t \in \mathbb{R}$.

11.

Soit une application affine H de l'espace $\mathscr{E}$, qui au point $M(x;y;z)$ associe le point

$M'(x';y';z')$ tel que : $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x-y+2 \\ z' = y+z-3 \end{cases}$.

a) Montrer que l'application H est bijective.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par H.

c) Déterminer par une équation cartésienne, l'image du plan P : $2x-y+z-5=0$, par H.

d) Déterminer une représentation paramétrique de l'image par H de la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+l \\ y = -1+2l \\ z = 3l \end{cases}_{l \in \mathbb{R}}$

HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

12.

Un triangle ABC est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite ou un cercle.

Déterminer l'ensemble décrit par :

le milieu de $[BC]$;

le milieu de $[AC]$.

13.

1) Un parallélogramme ABCD est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (Δ).

Déterminer la nature des ensembles décrits par :

- le point D ;
- le centre du parallélogramme.

2) Construire le parallélogramme ABCD sachant que les sommets A et B sont donnés et que les sommets C et D appartiennent respectivement à deux droites (D_1) et (D_2) d'un plan contenant A et B.

14.

Existe-t-il une translation de vecteur de coordonnées $(\alpha;-\alpha)$ qui transforme la droite (D) : $x+y-1=0$ en la droite (D') : $x+y=-2$?

15.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace, $H(I;k)$ l'homothétie de centre I et de rapport $k \neq 1$, t la translation de vecteur $\vec{u}$ non nul.

1) Montrer que $t^{-1} \circ H(I,k) \circ t$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

2) Démontrer que $H\left(I;\frac{1}{k}\right) \circ t \circ H(I,k)$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

PROJECTIONS AFFINES ET SYMÉTRIES AFFINES.

16.

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$

a) Définir analytiquement la projection p sur la droite (D) : $x-y+3=0$, de direction la droite vectorielle E engendrée par le vecteur $\vec{i}-2\vec{j}$.

b) En déduire les expressions analytiques de la symétrie de base la droite d'équation (D) et de direction E.

17.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définir analytiquement la projection p et la symétrie s :

- de base le plan (P) : $3x-2y+z-4=0$ parallèlement à la droite (D) d'équations $\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z-3}{4}$;
- de base la droite (D), parallèlement au plan (P).

18.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définir analytiquement la projection orthogonale et la symétrie orthogonale

- de base le plan (P) : $4x+5y+z-1=0$
- de base la droite (D) : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

$(\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan affine $\mathcal{P}$

f l'application affine définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+2}{6} \\ y' = \dfrac{1}{2}x - y\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{6} \end{cases}$

Montrer que f est involutive. En déduire qu'elle est bijective.

Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.

Montrer que si f associe au point M, le point M', alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe. Ce vecteur est-il normal à (D) ?

Montrer que pour tout point M d'image M' par f, le milieu de $[MM']$ est un point de la droite (D).

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Suivant la démarche exposée à l'exercice 19 précédent, déterminer les éléments qui définissent la symétrie s : $\begin{cases} x' = 2x - y + z + 2 \\ y' = 2x - y + 2z + 4 \\ z' = -x + y - 2 \end{cases}$.

Le plan étant rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; une application affine définie analytiquement par $\begin{cases} x' = 8x - 4y - 2 \\ y' = 8x - 4y - 1 \end{cases}$.

Démontrer que f n'est pas une transformation du plan.

Déterminer par les coordonnées , l'unique point invariant I par f.

Démontrer que l'image du plan est une droite (D) dont on déterminera une équation cartésienne.

Définir analytiquement la projection p sur (D) et de direction le noyau de φ, endomorphisme associé à h.

5) En déduire qu'il existe un réel k tel que $h = p \circ H(I,k) = H(I,k) \circ p$. H(I,k) est l'homothétie de centre I et de rapport k

22.

Montrer que l'application affine f : $\begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases}$ est affine

a) Déterminer l'ensemble des points fixes par f.

b) f .est-elle bijective ?

c) Montrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

d) Déterminer l'image par f des droites d'équations respectives :

$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$; $x - 1 = y - 2 = z - 3$.

e) Déterminer l'image du plan : $3x - y - 2z + 2 = 0$ par f

23.

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; g l'application affine définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2x + y + z + 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$.

Montrer que g est une symétrie de l'espace, puis préciser ses éléments caractéristiques. Est-elle une symétrie orthogonale ?

AFFINITÉS.

24.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A, B, C de coordonnées respectives $(0;-1), (-1;-2) et (0;1)$.

1) Montrer que (A,B,C) est un epère affine de $\mathcal{P}$.

2) On considère l'application affine f du plan dans lui-même telle que :

$f(A) = B ; f(C) = C et f(B) = D$ où D(–3;–4).

a) Montrer que f est bijective.

b) Donner l'écriture analytique de f.

3) Déterminer l'ensemble des points invariants (D) par f.

4) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe $\vec{u}$, pour tout point M d'image M' par f.

5) Soit p, la projection sur (D), de direction la droite vectorielle engendrée par ;I l'image du point M par p.

a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Donner une construction géoméyrique du point M' à partir de M.

25.

Dans le plan affine de repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$, on définit l'application affine k analytiquement

par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y-1) \\ y' = \frac{1}{2}(3x-y+3) \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble des points inavariants par k.

Soit $I(-1;0)$; $\vec{e}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e'}=\vec{i}-3\vec{j}$; $\mathcal{R}'=(O;\vec{e},\vec{e'})$.

b) Montrer que $\mathcal{R}'$ est un repère du plan.

c) Donner la définition analytique de l'application k dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Donner la nature de k.

26.

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace

f est une application affine définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = 3x-4y+2z-2 \\ y' = 4x-7y+4z-4 \\ z' = -x+2y+1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f.

2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ admet une direction fixe dont on précisera un vecteur de base $\vec{v}$.

3) Soit I, le point d'intersection de la droite passant par M, de vecteur $\vec{v}$ avec (P).

Montrer qu'il existe un réel m indépendant du point I, tel que $\overrightarrow{IM'}=m\overrightarrow{IM}$.

4) En déduire la nature et les éléments caractéristiques l'application f.

QUELQUES PROBLÈMES

27.

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application affine $f_{a,b}$ qui laisse le point O invaraint et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Tout point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ a pour image le point $M'(x';y')$.

1) a. Exprimer x', y' à l'aide de x et de y.

b. Déterminer les valeurs du couple $(a;b)$ pour lesquelles $f_{a,b}$ est bijective.

c. $f_{a,b}$ peut-elle être une translation ? une homothétie ?

2) Pour cette question,on prend $a=0$ et $b=$

Soit M_0 le point de coordonnées (1 ; 0) dans le repère $\mathcal{R}$, $M_{n+1}=f_{0,1}(M_n)$.

On appelle $(x_n;y_n)$ les coordonnées de M_n et on pose $u_n=x_n-ky_n$.

Montrer qu'il existe deux valeurs k' et k'' de k pour lesquelles la suite (u_n) est géométrique.

Calculer $x_n-k'y_n$ et $x_n-k''y_n$ en fonction de n. En déduire x_n, y_n, puis leurs limites respectives.

Calculer la limite de $\frac{y_n}{x_n}$ pour $x_n\neq 0$.

G_n est l'isobarycentre des points $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Calculer les coordonnées de G_n.

Calculer leur limite.

a et b sont à nouveau quelconques.

Déterminer l'ensemble des points M tels que les points O, M et M' soient alignés.

Montrer que pour $b \neq 0$, cet ensemble est la réunion de deux droites (D) et (D'), sécantes en O, de vecteurs respectifs $\vec{e} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e'} = 2\vec{i} + \vec{j}$, respectivement

Donner les restrictions respectives de $f_{a,b}$ respectivement à (D) et à (D').

Montrer que $\mathcal{R}'=(O ; \vec{e}, \vec{e'})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$ et que dans le repère $\mathcal{R}'$, les expressions analytiques de $f_{a,b}$, sont : $\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y \end{cases}$.

Pour quelles valeurs du couple $(a;b)$, $f_{a,b}$ est-elle involutive ?

Dans chaque cas, indiquer la nature de $f_{a,b}$ et préciser ses éléments caractéristiques..

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$

a. Démontrer que f admet un seul point invariant.

b. Quelle est la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'endomorphisme associé à f ?

c. Donner la nature géométrique des applications $f^2 = f \circ f ; f^4 = f^2 \circ f^2$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$, on note :

$M_1 = f(M) ; M_2 = f(M_1) ; \ldots ; M_{n+1} = f(M_n)$.

Démontrer que l'isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est invariant par f. Quel est ce point ?

Que peut-on dire du quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 où $M(-4;2)$?

Faire une figure.

Soit G l'ensemble des applications affines g de $\mathcal{P}$, telles que $g^4 = Id_{\mathcal{P}}$. On note φ l'endomorphisme associé à g.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$. On note $M_1 = g(M), M_2 = g(M_1), M_3 = g(M_2)$.

Démontrer que le point Ω isobarycentre du système $\{M, M_1, M_2, M_3\}$ est invariant par g ;

Quelle peut-être la nature de φ^4 ?

29.

Soit A,B,C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$; A',B',C' respectivement les milieux de $[BC], [AC]$ et $[AB]$. Soit M un point quelconque du plan, distinct de A, B, C. Montrer que la parallèle à (MA) passant par A', la parallèle à (MB) passant par B', la parallèle à (MC) passant par C' sont concourantes en un point M'.

30.

Soit (D) et (D') deux droites sécantes en I d'un plan affine $\mathcal{P}$.

On suppose que les droites (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires. Soit A un point de $\mathcal{P}$, distinct de I.

Construire le ou les cercles centrés sur (D), tangents à (D') et passant par A.

31.

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $\mathcal{R}=(O ; \vec{i}, \vec{j})$

On considère l'application $f : \begin{cases} x' = 10x + 4y - 3 \\ y' = -8x - 2y + 1 \end{cases}$

1) Démontrer que f est une application affine et écrire la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

   Démontrer que f est bijective.

2) Démontrer que f admet un seul point invariant A.

3) Montrer qu'il existe deux valeurs t' et t'' du réel t telles que l'ensemble $E(t)$ des vecteurs $\vec{u}$ vérifiant $\varphi(\vec{u}) = t\vec{u}$ contienne un vecteur non nul.

   Montrer $E(t')$ et $(E(t'')$ sont des droites vectorielles. Préciser un vecteur $\vec{I}$ de base de E(t') et $\vec{J}$ de base de E(t'').

4) Montrer que les droites passant par le point A, de vecteurs respectifs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont invariantes par f.

Soit $\vec{e}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{e'}=\vec{i}-\vec{j}$.

5) Montrer que $(\vec{e},\vec{e'})$ est une base du plan.

a.Écrire la matrice de φ dans la base $(\vec{e},\vec{e'})$.

b.Donner les expressions analytiques de l'application f dans le repère $(A,\vec{e},\vec{e'})$.

Montrer que f est la composée commutative d'une homothétie et d'une affinité dont on présera les éléments caractéristiques.

32

ABC est un triangle dans le plan. f est l'application affine de P dans P telle que $f(A)=A$, $f(C)=C$ et $f(B)=C$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .Soit φ l'endomorphisme associé à f

a) Déterminer la matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

b) Donner l'expression analytique de φ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et celle de f dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

33.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. f est l'application affine de P dans P telle que $f(A)=A$, $f(C)$ C et $f(B)=D$.

1) Déterminer $f(D)$

2) Démontrer que fof est l'application identique du plan.

3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

4) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

5) Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ associé à f dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

6) Donner l'expression analytique de f dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

34.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A(1+i)$; $B(-3+3i)$; $C(2+2i)$; $D(-4+4i)$. E et F désignent les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

1) Déterminer les affixes des points E et F.

Donner la matrice de la rotation vectorielle endomorphisme associé à la rotation affine qui transforme A en B et C en D dans $(\vec{u},\vec{v})$

2) Donner la matrice de la rotation vectorielle φ endomorphisme associé à la rotation affine r' qui transforme A en D et C en B.

a) Donner l'expression analytique de r r', de ror' et de $r'or$.

b) Quelle est la nature de ror'? de $r'or$

35

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (D) est la droite d'équation $y=x$ et (D') la droite d'équation $x-y+1=0$.

1) Donner l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :

a) la projection orthogonale sur (D)

b) la réflexion S_D d'axe (D);

c) la réflexion $S_{D'}$ d'axe (D');

d) l'affinité orthogonale d'axe (D) rapport -2

2) Donner les écritures complexes de S_D sous la forme $z'=p\bar{z}+q$

3) Déterminer la nature de $S_{D'}\circ S_D$ en composant les écritures complexes de S_D $S_{D'}$

4) Retrouver géométriquement le résultat précédent.

36.

ABC est un triangle isocèle $(AB=AC)$ tel que mes $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\theta$. k est un réel de l'intervalle $[0,1[$. P et Q les points du plan définis par $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ}=k\overrightarrow{CA}$. La parallèle à

passant par P coupe (BC) en M.

1) Faire une figure illustrant les données.

2) Démontrer que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CB}$. On pourra utiliser la projection sur (BC) parallèlement à (AC).

3) Soit R la rotation telle que $R(B) = A$; $R(A) = C$ et φ l'endomorphisme associé à R.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de R. Démontrer que $\varphi(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{CQ}$ et en déduire que $R(P) = Q$

b) Démontrer que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point fixe que l'on déterminera.

38

$ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct. R est le quart de tour direct de centre O, λ un réel de l'intervalle $[0,1]$. On définit le point M par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. On note P l'image de M par R.

1) Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

2) Soit A' le milieu de $[AB]$, B' le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[MP]$.

Démontrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{A'I'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$

a) Déduire de ce qui précède le lieu géométrique du point I lorsque λ décrit l'intervalle $[0,1]$.

39

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer $A^2 = A \times A$. Quelle est la nature de $\varphi o \varphi$?

2) f est l'application affine d'endomorphisme associé φ telle que $f(O) = O'$ où O' est le point de coordonnées $(0;2)$.

a) Donner l'expression analytique de f et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Donner l'expression analytique de fof et en déduire sa nature.

3) On définit la suite (B_n) par $B_0(\sqrt{2i})$ et $B_{n+1} = f(B_n)$ pour tout entier naturel n

a) Déterminer les affixes de B_1 et B_2

b) u_n est la longueur de $[B_nB_{n+1}]$. Calculer u_0 et démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer u_n en fonction de n

d) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et déterminer la limite de S_n en $+\infty$ Soit $(ABCD)$ est un carré de sens direct et de centre I.

39

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre I

I. Soit $r = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$, $t = t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S = S_C$

1) a) Déterminer la droite Δ telle que $r = S_\Delta o S_{(AD)}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de tor.

II. a) Déterminer $(Sotor)(A), (Sotor)(D)$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $Sotor$.

Soit $M \in (DC)$, N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A. J le milieu du segment $[MN]$ r' est la rotation de centre A telle que $B = r'(D)$; s la similitude directe de centre A telle que $I = s(D)$.

1) a) Montrer que $N = r'(M)$.

b) En déduire la nature du triangle AMN.

2) a) Déterminer l'image de C par s.

b) Démontrer que $J = s(M)$

c) Déduire le lieu géométrique des points J, lorsque M décrit (DC).

Chapitre 14

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LEÇON 1

1. GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES de la forme : $y' = ay$

3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOUS LA FORME: $ay''+by'+cy = 0$ où a EST UN NOMBRE RÉEL NON NUL, b ET c DEUX NOMBRES RÉELS

   3.1 Cas où $b^2 - 4ac = 0$

   3.2 Cas où $b^2 - 4ac > 0$

   3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$

S'ENTRAÎNER

LEÇON ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et une équation linéaires du second ordre à coefficients constants.

1.GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

Prendre un bon départ

Situation 1 : Dans une culture batérienne, le nombre de bactéries passe de 400 à 1000 en trois heures,et à tout instant, le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

Situation 2 : Un solide de masse m est accroché au bout d'un ressort vertical , de constante de raideur k et fixé à un point.Ce solide assimilé à un point matériel est tiré , puis relâché. Le solide effectue des mouvements verticaux.

Activité 1

1) a) Montrer que si N désigne le nombre de bactéries présentes dans la culture à l'instant t, alors il existe un réel k tel que $\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN(t)$.

b) En déduire que , pour tout t, N vérifie $N'(t) = kN(t)$.

c) Si t est exprimé en heures, alors donner les valeurs de N(0) et de N(3).

2) Soit (D) la droite confondue à l'axe du ressort et passant par le centre de la masse.

Soit O la position du solide au repos et I sa position au moment où il est lâché. On peut ainsi orienter la droite (D) par le repère (O,I). On pose $OI = a$.

a) En désignant par x l'abscisse du mobile dans le repère (O,I) à l'instant t, montrer que $x''(t) + kx(t) = 0$.

b) Donner la valeur de $x(0)$.

c) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de x .

Activité 2

a) Montrer que la fonction : $x \to ae^{2x}$ vérifie l'égalité $(E_1) : f'(x) = 2f(x)$.

b) Montrer que la fonction : $x \to \ln x$ vérifie l'égalité (E_2)

$(E_2) : h''(x) + \frac{1}{x}h'(x) + xh(x) = x\ln x$.

c) Déterminer le polynôme du second degré P tel que :

$(E_3) : 3P''(x) - 2P'(x) + \frac{5}{4}P(x) = x^2 + 1$.

Retenir

• Une équation différentielle est une relation liant une fonction inconnue plusieurs fois dérivables et certaines de ses dérivées.
• Les expressions qui multiplient les différentes dérivées de la relation sont appelées coefficients de l'équation différentielle. Elles sont contantes pour certaines et variables d'autres.
• Le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue, ayant un coefficient non nul dans une équation différentielle, est l'ordre de cette équation différentielle.

Remarque

• La notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f considérée comme fonction de la variable x. Ainsi, $\frac{df}{dx} = f'; \frac{d^2 f}{dx^2} = f''; \frac{d^3 f}{dx^3} = f'', f^{(3)} \ldots \frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}$
• Le plus souvent, on ne fait pas ressortir explicitement la variable de la fonction inconnue dans une équation différentielle mais elle est choisie par rapport au problème à resoudre.
Si la fonction cherchée est une loi horaire, alors elle sera une fonction du temps.
• La fonction inconnue peut-être désignée par l'une des lettres $f; g; x; y; \alpha; \theta$, etc.
• Si l'équation s'écrit $\sum_{i=o}^{n} a_i f^{(i)}(x) = g(x)$ alors $g(x)$ est le second membre. Une équation différentielle dont le second membre est nul est dite sans second membre ou équation homogène.
• Comme l'application $f \to \sum_{i=o}^{n} a_i f^{(i)}$ est linéaire, alors l'équation différentielle (E) est dite linéaire.
• L'équation différentielle $\sum_{i=1}^{n} a_i f^{(i)}(x) = g(x)$ est linéaire à coefficients constants lorsque a_i est constant pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$.

Exemple

L'équation différentielle : $4y' + 7y = x + 2$ est du premier ordre, avec second membre et à coefficients constants.
L'équation différentielle : $mx''(t) + kx(t) = 0$ est du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.
L'équation différentielle : $x^2 f'''(x) + f''(x) - 3f'(x) + f(x) = x$ est du troisième ordre, à coefficients variables et avec second membre.
Toutes les équations précédentes sont linéaires. Par contre, l'équation $f''(x) \times f'(x) + 2f(x) = 0$ est une équation différentielle du second ordre, avec second membre et non linéaire.

S'exercer

a. Montrer que la fonction $x \to 1 - x^2 e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$.
b. Soit l'équation différentielle (E) : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$.

Déterminer les trois nombres réels a, b, c pour que la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E).

c. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4-x)e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

En déduire la forme générale des primitives de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES de la forme : $y' = ay$

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel donné. On se propose de chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = af$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel x, on $f'(x) = af(x)$. Soit S l'ensemble de telles fonctions.

1) Montrer que la fonction nulle appartient à S.

2) Soient α et β deux réels, f et g deux éléments de S.

a) Montrer que $\alpha f + \beta g$ appartient à S.

Activité 2

Soit la fonction $f_1 : x \mapsto e^{ax}$.

1) a) Montrer que f_1 est un élément de S.

b) Justifier que pour tout réel λ, λf_1 est aussi un élément de S.

2) Soit f un élément de S. Soit g la fonction définie par $f = gf_1$.

a) Montrer que g est définie sur R et exprimer pour tout réel x, $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x, on a $g'(x) = \dfrac{f'(x) - af(x)}{e^{ax}}$.

Utiliser le fait que $f' = af$ pour déduire que g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Montrer alors qu'il existe un réel μ tel que $f = \mu f_1$.

Retenir

Soit a un réel.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \lambda e^{ax}$, où λ est un réel arbitraire ne dépendant pas de x.

Remarque

1) S est le sous-espace vectoriel engendré par $f_1 : x \mapsto e^{ax}$.

S est une droite vectorielle de $\mathcal{F}$. (espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

2) Si $a = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a, x_0, y_0 trois réels. L'équation différentielle $y' = ay$ admet une seule solution qui prend la valeur y_0 en x_0. C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to y_0\ e^{a(x-x_0)}$.

En effet $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(x_0) = y_0$ équivaut à $\lambda e^{ax_0} = y_0$ qui est équivalent à $\lambda = \dfrac{y_0}{e^{ax_0}}$; soit $\lambda = y_0 e^{-ax_0}$. D'où pour tout réel x, $f(x) = y_0\ e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Exemple

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

L'équation $y' + 2y = 0$ est équivalente à $y' = -2y$. Cette équation différentielle a pour solution $y = \lambda e^{-2x}$.

L'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur R par $f(x) = \lambda e^{-2x}$.

Déterminons la solution de cette équation qui prend la valeur 2 en 0.

$f(0) = 2$ équivaut à $\lambda e^{-2\times 0} = 2$; soit $\lambda = 2$.

La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-2x}$.

Exercice résolu

Soit l'équation différentielle du premier ordre $(1) : 2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$.

1) Résolution de l'équation différentielle sans second membre.

$(2) : 2y' + 3y = 0$ est une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = -\dfrac{3}{2}y$.

L'ensemble S_1 des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$. (λ constante réelle)

2) Recherchons une solution particulière de l'équation (1), polynôme du second degré . Soit P cette solution, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

$P'(x) = 2ax + b$. P solution de (1) si et seulement si pour tout réel x,

$2P'(x) + 3p(x) = 6x^2 - 7x + 2$.

$2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 7x + 2$.

Pour tout réel x, $3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = 6x^2 - 7x + 2$.

Par identification; on a : $\begin{cases} 3a=6 \\ 4a+3b=-7 \\ 2b+3c=2 \end{cases}$; c'est-à-dire $a=2$; $b=-5$; $c=4$.

$P(x)=2x^2-x+4$.

3) Résolution de l'équation différentielle avec second membre.

Déterminons l'ensemble S des solutions de l'équation (1).

$P \in S$, donc pour tout réel x , $2P'(x)+3p(x)=6x^2-7x+2$.

Soit f une solution de (1).

Montrons f est solution de (1) si et seulement si $2f'+3f=2P'+3P$.

$2f'+3f=2P'+3P$ équivaut successivement à $2f'-2P'=3P-3f$;

$2(f-P)'=3(P-f)$; $2(f-P)'-3(f-P)=0$ où 0 désigne l'application nulle ; $f-P \in S$.

f est solution de (1) si et seulement si $f=g+P$ où g est solution de l'équation (2).

L'ensemble S des solutions de l'équation $2y'+3y=6x^2-7x+2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}+2x^2-5x+4$.

4) Déterminer la solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0.

Soit f une solution de (1).

On a $f(x)=\lambda e^{-\frac{3}{2}x}+2x^2-5x+4$.

$f(0)=\sqrt{2}$ équivaut à $\lambda e^{-\frac{3}{2}x}+2\times 02-5\times 0+4=\sqrt{2}$; Soit $\lambda=\sqrt{2}-4$.

La solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0 est la fonction f définie par : pour tout réel x, $f(x)=\left(\sqrt{2}-4\right)e^{-\frac{3}{2}x}+2x^2-5x+4$.

S'exercer

2.a Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $3y'+5y=0$; b) $\frac{2}{3}y'-\frac{4}{5}y=0$; c) $y'+2y=0$; d) $-2y'+3y=0$.

Déterminer pour chacune des équations ci-dessus la solution qui prend la valeur -1 en 0.

2.b En vous inspirant de l'exercice résolu ci-dessus, résoudre l'équation différentielle $5y'+3y=3x^2-2x-4$.

3.ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOUS LA FORME: $ay''+by'+cy=0$ où a EST UN NOMBRE RÉEL NON NUL, b ET c DEUX NOMBRES RÉELS

3.1 Cas où $b^2-4ac=0$

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel donné. On se propose de chercher les fonctions f au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $ay''+by'+cy=0$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel x, $af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0$. Soit S l'ensemble des solutions de cette équation.

1) Montrer que la fonction nulle appartient à S.

2) Soient α et β deux réels, f et g deux éléments de S.

Montrer que $\alpha f+\beta g$ appartient à S.

Activité 2

Soit r un réel et f la fonction : $x\mapsto e^{rx}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0$ est équivalent à $ar^2+br+c=0$.

b) Supposons que $b^2-4ac=0$.

L'équation $ar^2+br+c=0$ admet une seule racine réelle $r_0=-\dfrac{b}{2a}$.

La fonction $f_1: x\mapsto e^{r_0x}$ est élément de S. D'après l'activité 1, quel que soit le réel λ, λf_1 est un élément de S.

Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(gf_1)(x)$.

- Montrer que pour tout réel x, $f(x)=g(x)\,e^{r_0x} \Leftrightarrow g(x)=f(x)\cdot e^{-r_0x}$.
- Déduire que g est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que

$af''(x)+bf'(x)+cf(x)=e^{r_0x}(ag''(x)+(2r_0a+b)\,g'(x)+(ar_0^2+br_0+c)g(x))$.

Comme r_0 est solution de l'équation $ar^2+br+c=0$ et $r_0=-\dfrac{b}{2a}$, déduire que

$af''(x)+bf'(x)+cf(x)=e^{r_0x}(ag''(x)=ae^{r_0x}g''(x)$

- Déduire que f appartient à S si et seulement si $g''(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}/g'(x)=\lambda$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

En déduire qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ / $g(x)=\lambda x+\mu$.

- En déduire qu'une solution f de $ay''+by'+cy=0$ est définie par : pour tout réel x, $f(x)=(\lambda x+\mu)\,e^{r_0x}$ où $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Retenir

- Une équation de la forme $ay''+by'+cy=0$ où a est un réel non nul, b et c deux réels est appelée équation différentielle du second ordre homogène ou sans second membre.
- L'équation $ar^2+br+c=0$ est appelée équation caractéristique associé à l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$.
- Si $\Delta=b^2-4ac=0$ alors l'équation $ar^2+br+c=0$ admet une racine double $r_0=-\dfrac{b}{2a}$, et l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x\mapsto(\lambda x+\mu)\,e^{r_0x}$ où $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Remarque

- S est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) engendré par les deux fonctions : $f_1 : x\mapsto e^{r_0x}$ et $f_2 : x\mapsto xe^{r_0x}$. S est un plan vectoriel de base $(f_1; f_2)$.
- Si l'on a $b=c=0$, alors l'ensemble S des solutions de l'équation $y''=0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto\lambda x+\mu$ avec $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Si $\Delta=b^2-4ac=0$, pour tout $(y_0, y'_0)\in\mathbb{R}^2$ l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet une unique solution g telle que $\forall x_0\in Dg$ $g(x_0)=y_0$ et $g'(x_0)=y'_0$.

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle $4y''-y+1=0$.

L'équation caractéristique de cette équation est $4r^2-4r+1=0$.

Son discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=16-16=0$.

Le discriminant étant nul, l'équation $4r^2-4r+1=0$ admet une racine double $r_0=-\dfrac{(-4)}{2\times4}=\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $4y''-4y+1=0$ est l'ensemble des fonctions : $x\mapsto(\lambda x+\mu)\,e^{\frac{1}{2}x}$.

2) Déterminons la solution g de cette équation qui vérifie $g(0)=2$ et $g'(0)=-1$.

$g(x)=(\lambda x+\mu)e^{\frac{1}{2}x}$.

$$g'(x)=\lambda e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}(\lambda x+\mu)e^{\frac{1}{2}x}=\left[\lambda+\frac{1}{2}(\lambda x+\mu)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}(\lambda x+2\lambda+\mu)e^{\frac{1}{2}x}.$$

$g(0)=2$ équivaut à $\mu=2$;

$g'(0)=-1$ équivaut à $2\lambda+\mu=-2$; soit $2\lambda=-2-2$; $\lambda=-\dfrac{-2}{2}$ et $\mu=-2$, $\mu=2$.

3) La solution g de l'équation différentielle $4y''-4y+1=0$, qui vérifie $g(0)=2$ et $g'(0)=-1$ est la fonction : $x \mapsto (-2x+2)e^{\frac{1}{2}x}$.

Exercice résolu

Trouver la solution y de l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+y=0$ telle que $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2+2r+1=0$;soit $(r+1)^2=0$.

Cette équation admet une racine double qui est -1.

Les solutions de l'équation $y''+2y'+y=0$ sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda+\mu x)\, e^{-x}$.

La dérivée de la fonction : $x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{-x}$ est la fonction :

$x \mapsto \mu e^{-x}-(\lambda+\mu x)e^{-x}$; soit $x \mapsto (\mu-\lambda-\mu x)e^{-x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ permet d'écrire : $\begin{cases} (\lambda+\mu)e^{-1}=0 \\ \mu-\lambda=1 \end{cases}$; soit $\begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ -\lambda+\mu=1 \end{cases}$;

ce qui donne $\mu=\frac{1}{2}$ et $\lambda=-\frac{1}{2}$.

La solution de $y''+2y'+y=0$ avec $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2}(-1+x)\, e^{-x}$.

S'exercer

3.a a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
b) Déterminer la solution y qui satisfait aux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

3.2 Cas où $b^2 - 4ac > 0$.

Prendre un bon départ

Soient $r_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $r_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1) Montrer que $2r_1+\dfrac{b}{a}=r_1-r_2$, avec $r_1-r_2\neq 0$.

2) Soit à résoudre l'équation différentielle $g''=(r_2-r_1)g'$.

Posons $z=g'$.

a) Montrer que résoudre $g''=(r_2-r_1)g'$ équivaut à résoudre $z'=(r_2-r_1)z$.

b) En déduire que $z=\lambda e^{(r_2-r_1)x}$, $(\lambda\in\mathbb{R})$ et que $g(x)=\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}\, e^{(r_2-r_1)x}+A$ où A est une constante réelle

3) La fonction $f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ est un élément de S. D'après l'activité 1, quel que soit le réel λ, λf_1 est un élément de S.

- Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (gf_1)(x)$. D'après le même raisonnement qu'à l'activité 2 du 1.2, déduire que f est solution de $ay''+by'+cy=0$ si et seulement si pour tout réel x, $g''(x)+(r_1-r_2)g'(x)=0$

Déduire de 2) b) que $f(x) = f_1(x)g(x) = e^{r_1 x}\left(\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}\, e^{(r_2-r_1)x} + A\right)$ où A est une constante réelle.

- En posant $B = \dfrac{\lambda}{r_2-r_1}$, montrer que les solutions de l'équation $ay''+by'+cy=0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$. $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Retenir

Si l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ associé à l'équation différentielle du second ordre $ay''+by'+cy=0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, où A et B sont des constantes réelles.

Remarque

1) S est le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par les fonctions :
$f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$. S est le plan vectoriel dont une base est $(f_1; f_2)$.

2) Si $\Delta = b^2-4ac > 0$, alors $\forall (y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet une unique solution f telle que $\forall x_0 \in Df : f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle (E) : $2y''+y'-6=0$.

(E) admet pour équation caractéristique $2r^2+r-6=0$.

Son discriminant est $\Delta = 1^2-4(2)(-6) = 49 = 7^2$.

Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = \dfrac{-1-7}{4} = -2$ et $r_2 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{3}{2}$.

L'ensemble S des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions

$f : x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}$. A et B sont deux constantes réelles arbitraires.

2) Déterminons la solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$.

$f(x) = Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}$; $f'(x) = -2Ae^{-2x} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}$.

$f(0) = -3$ équivaut à $Ae^{-2\times0} + Be^{\frac{3}{2}\times0} = -3$; soit $A + B = -3$.

$f'(0) = 1$ équivaut à $-2Ae^{-2\times0} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}\times0} = 1$; soit $-2A + \frac{3}{2}B = 1$; ce qui revient à $-4A + 3B = 2$. On obtient le système : $\begin{cases} A + B = -3 \\ -4A + 3B = 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne A = $-\frac{11}{7}$ et B = $-\frac{10}{7}$.

La solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$f : x \mapsto -\frac{11}{7}e^{-2x} - \frac{10}{7}e^{\frac{3}{2}x}$.

Exercice résolu

Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 3r - 4 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4\times1\times(-4) = 9 + 16 = 25$.

Cette équation admet deux solutions réelles $r_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{3+5}{2} = 4$.

Les solutions de l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$ sont les fonctions :

$x \to Ae^{-x} + Be^{4x}$ où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

La fonction : $x \to Ae^{-x} + Be^{4x}$ a pour dérivée la fonction : $x \mapsto -Ae^{-x} + 4Be^{4x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ permet d'avoir le système $\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = 4 \end{cases}$

d'où B = $\frac{6}{5}$ et A = $\frac{4}{5}$.

La solution y de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

est la fonction : $x \mapsto \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x}$.

S'exercer

d. 1) Résoudre l'équation différentielle $2y'' - 7y' - 4y = 0$.
2) Déterminer la solution y de cette équation qui vérifie $y(1) = -2$ et $y'(1) = 3$.

3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$.

Prendre un bon départ

Montrer que l'équation caractéristique de $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre.

Retenir

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où α est un réel et β un réel non nul et ainsi, l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Remarque

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$, $x_0 \in Df$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.
En d'autres termes, parmi les fonctions solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, il en existe une unique dont la courbe passe par le point de coordonnées $(x_0; y_0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur y'_0.

Exemple

1) Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y' + 7y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 7 = 0$. Son discriminant est

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times7 = 16 - 28 = -12 = 12i^2 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2.$$

Ses racines sont $\dfrac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$ et $\dfrac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 7y = 0$ est l'ensembles des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout réel x, $f(x) = e^{2x}\left(A\cos\sqrt{3}\,x + B\sin\sqrt{3}\,x\right)$ $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

2) Déterminons la solution y de cette équation qui vérifie :

$y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

$f'(x) = 2e^{2x}\left(A\cos\sqrt{3}\,x + B\sin\sqrt{3}\,x\right) + \left(-\sqrt{3}\,A\sin\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,B\cos\sqrt{3}\,x\right)e^{2x}$.

$f(0) = 0$ équivaut *à* $A = 0$;

$f'(0)=1$ équivaut à $\sqrt{3}B=1$; soit $B = \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}e^{2x}\sin\sqrt{3}x$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y''-4y'+7y=0$ qui vérifie : $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

Exercice résolu

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) : $4y''+4y'+65y=0$

telle que $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

L'équation caractéristique de (E) est $4r^2+4r+65=0$.

Son discriminant réduit est $\Delta = 4-4\times 65=-256=256i^2=(16i)^2$.

Ses racines sont $r_1=\frac{-2+16i}{4}= -\frac{1}{2}+4i$ et $r_2=\frac{-2-16i}{4}=-\frac{1}{2}-4i$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f : $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x+B\sin 4x)$.

$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x+B\sin 4x)+ e^{-\frac{1}{2}x}(-4A\sin 4x+4B\cos 4x)$.

$f(0)=1$ équivaut à A = 1 ;

$f'(0)=-\frac{1}{2}$ équivaut à $-\frac{1}{2}A+4B=-\frac{1}{2}$.

On a donc le système $\begin{cases} A=1 \\ -A+8B=-1 \end{cases}$; soit $A=1$ et $B=0$.

La solution y de $4y''+4y'+65y=0$ telle que $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$ est la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ cos...

3.c a) Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+3y=0$.

b) Déterminer la solution de $y''+2y'+3y=0$ qui satisfait aux conditions suivantes : $y'(0)=$... et $y(0)=1$.

S'exercer

(i) Résoudre l'équation différentielle $4y''+9y=0$, $y(\pi)=2$ et $y'(\pi)=0$

(ii) Résoudre l'équation différentielle $2y''-y'+y=0$, $y(1)=0$ et $y'(1)=4$

2)Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation $y' - 5y = 0$.
3) Résoudre l'équation (E).

9

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-3x}$.
1) Démontrer que toute fonction u telle que la fonction $x \mapsto u(x)e^{-x}$, soit solution de (E), vérifie l'équation différentielle (E') : $y' - y = 3$.
2) a)Démontrer que la fonction constante $x \mapsto 3$ est solution de (E').
b) Démontrer qu'une f est solution de (E') si et seulement si la fonction $g : x \mapsto f(x) + 3$ est solution de l'équation $y' - y = 0$.
c) Résoudre l'équation différentielle $y' - y = 0$, puis l'équation (E').
d) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

10

Déterminer y" la solution particulière f de l'équation $4y'' - 12y' + 9y = 0$.
qui satisfait aux conditions initiales suivantes : $f(0) = 5$ et $f'(0) = -2$.

Même question qu'au N° 10 pour les exercices de 11 à 17:

11

$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$;
$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

12

$y'' - 4y' + 3y = 0$
$f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

13

$y'' + 4y = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

14

$2y'' + y' - y = 0$;
$f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

15

$y'' - 2y' + 5y = 0$;
$f(\pi) = 0$ et $f'(\pi) = -1$.

16

$\left(2 - \sqrt{3}\right)y'' + 2y = 0$;
$f(0) = 1$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

17

$5y'' - 3y' = 0$ et telle que
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

18

1) Résoudre l'équation différentielle
$y'' + y = 0$.
2) Déterminer la solution particulière f de cette équation dont la courbe représentative dans un repère orthonormé, passe par le point de coordonnées (0;1) et admette en ce point une tangente de coefficient directeur nul.

19

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x, on ait
$f''(x) + f(x) = x^3 + 2$.
1) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f_0 de degré 3 qui appartient à $\mathcal{F}$.
2) Résoudre l'équation différentielle
$y'' + y = 0$.
3) Déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.
4) Déterminer l'élément f_1 de $\mathcal{F}$ tel que
$f_1(0) = 3$ et $f_1'(0) = -7$.

...F l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans ...elle que, pour tout réel x,
$...(x)+2f'(x)+f'(x)=(x^2+1)e^{-x}$.
...montrer qu'il existe une fonction ...même P de quatrième degré tel que la ...tion $f_0 : x \mapsto P(x)e^{-x}$ appartient à $\mathcal{F}$.
...udre l'équation différentielle
$...y''+2y'+y=0=0$.
...g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
...r que g appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement ...$-f_0$ est solution de (E).
...uire l'ensemble $\mathcal{F}$.

...F l'ensemble des fonctions définies et ...ables deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, solutions de ...on différentielle (1) :
$...3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
...ifier que la fonction
$...\mapsto e^{-x}\ln x$ appartient à $\mathcal{F}$.
...soudre l'équation différentielle (2) :
$...3y'+2y=0$.
...t g la fonction deux fois dérivable ...$\mathbb{R}_+^*$. Montrer que g appartient à $\mathcal{F}$ si et ...ment si $g-f$ est solution de (2).
...déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

...équation différentielle
(E) : $y''+2y'+5y=30\cos x$.
...déterminer deux réels a et b tels que la ...tion : $x \mapsto a\cos x + b\sin x$ soit une solution ...quation (E).
...soudre l'équation différentielle
$...2y'+5y=0$.
...soudre l'équation (E).

23

Soit l'équation différentielle
(E) : $3y''-2y'-y=2\cos^2 x$.
1) Déterminer trois réels a, b, c tels que la fonction $x \mapsto a\cos 2x + b\sin 2x + c$ soit une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle
$3y''-2y'-y=0$.
3) Résoudre (E).

24

1) Résoudre l'équation différentielle :
$y''+16y=0$.
2) Déterminer la fonction f, solution de cette équation, telle que $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$ et $f'(\pi)=8$.
3) Montrer que, pour tout réel x, cette solution particulière peut s'écrire :
$f(x)=2\sqrt{2}\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4) Résoudre dans $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.

25

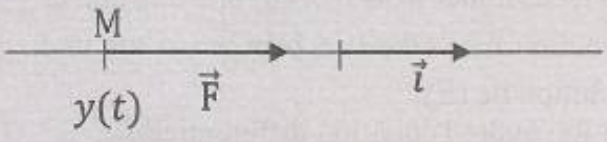
Soit (E) l'équation différentielle :
(E) : $y''+4y=0$.
1) Résoudre l'équation (E).
2) Déterminer la fonction f, solution particulière de (E), telle que $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.
3) Déterminer deux réels A et φ tels que, pour tout réel t, $f(t)=A\cos(2t+\varphi)$.

26

Une masse m, mobile sur un axe $(O,\vec{i})$, a sa position représentée sur cet axe par le point M. Cette masse est soumise à une force d'attraction $\vec{F}$, telle que l'abscisse y(t) du point M en fonction de t vérifie l'équation

différentielle $y''+\frac{\pi^2}{4}y = 0$.

1) Résoudre cette équation différentielle.



Pour la suite de l'exercice, on suppose que $y(0)=0$ et $y'(0)=\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que y s'exprime en fonction de t pour $t \geq 0$, par $y(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

b) Déterminer le réel α, compris entre 0 et 1, tel que pour $t \geq 0$: $y(t)=\left(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}(t+\alpha)\right)$.

a) Donner la valeur positive de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois au point O.

c) Combien de fois le point M se trouve-t-il en O, dans l'intervalle [0;6] ?

27

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait:

(1) $f''(x)-f'(x)+3f(x)=6x^2+5x$.

1) On désigne par g une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels.

Déterminer a, b, c pour que pour tout réel x, $g''(x)-g'(x)+3g(x)=6x^2+5x$.

2) On pose $F=f-g$.

a) Montrer que si f vérifie, pour tout réel x, la relation (1), alors F est solution de l'équation différentielle : (2) : $y''-4y'+3y=0$.

Réciproquement établir que si F est une solution de (2), f est définie par $f=F+g$ vérifie (1).

Résoudre l'équation (2) et en déduire les solutions de l'équation $y''-4y'+3y=6x^2+5x$.

28

1) Résoudre l'équation différentielle :

(1): $y''+2y'+2y=0$.

2) On considère l'équation différentielle :

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\left(-x+\frac{1}{2}\right)$.

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x)=e^{-x}(ax+b)$ soit une solution de (2).

b) h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction f telle que $f(x)=g(x)+h(x)$ est solution de (2).

c) Déterminer parmi les fonctions f définies au 2) b) celle qui vérifie $f(0)=1$ et $f'(0)=$

29

le but de l'exercice est l'étude de l'intensité dans un circuit comprenant en série un générateur de force électromotrice E (en Volts) et une bobine de résistance R (en Ohms) et l'inductance L (en henrys). À l'instant t (en secondes), l'intensité i (en ampères) est solution de l'équation différentielle

(1) : $Ly' + Ry = E$.

On donne

E=10 V,R=100 V,L=0,2 H

1) Vérifier que l'équation (1) s'écrit :

$y' + 500y = 50$.

2) a) On pose pour tout t, $i(t) = I(t) + 0,1$.

Démontrer que la fonction I est solution de l'équation différentielle (2) : $y' + 500y = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Déterminer alors la solution i de (1) telle que $i(0)=0$.

3) Déterminer, à 1 milliseconde près par excès, l'instant t_0 à partir duquel l'intensité est supérieure à 95 mA.

Chapitre 15

APPLICATIONS AFFINES DANS L'ESPACE.

LEÇON 1 APPLICATIONS DANS L'ESPACE.

1.1. PROJECTIONS.

1.2. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE RÉFLEXION.

1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UN DEMI-TOUR.

1.4. COMPOSITIONS DE DEUX RÉFLEXIONS.

1.5. COMPOSITIONS DE DEUX DEMI-TOURS.

1.6. PLANS ET AXES DE SYMÉTRIE D'UN CUBE ET D'UN TÉTRAÈDRE.

LEÇON 2 HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

2.1. EXPRESSIONS ANALYTIQUES.

2.2. COMPOSÉES DE DEUX HOMOTHÉTIES, D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE TRANSLATION.

S'ENTRAÎNER

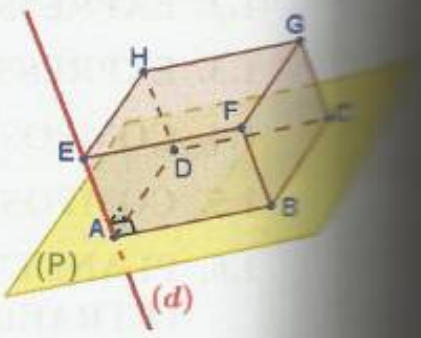
LEÇON 1 APPLICATIONS DANS L'ESPACE.

- Déterminer l'image d'un point par une réflexion ou par un demi-tour dont les plans et axes sont éléments d'une configuration de l'espace : cube, tétraèdre, etc.
- Écrire les expressions analytiques d'une réflexion et d'un demi-tour de l'espace.
- Composer deux réflexions par rapport aux plans parallèles ou aux plans orthogonaux.
- Composer deux demi-tours d'axes parallèles ou perpendiculaires.

1.1. PROJECTIONS

Prendre un bon départ

Activité 1



ABCDEF est un parallélépipède rectangle, (P) est le plan passant par les points A,B et C et (d) la droite (EA).

1) Justifier que les droites (HE), (GF), (FH) et (CA) sont parallèles au plan (P).
2) Déterminer le point G' de (d) tel que (GG') soit parallèle au plan (P).
3) Soit M un point de (P). Déterminer le point M' de (d) tel que (MM') soit parallèle à (d).
4) Soit N un point de (d). Déterminer le point N' de (P) tel que (NN') soit parallèle à [illegible] devient N' lorsque N vaut respectivement B, C, F, G et H ?

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $x+y-2$[illegible]

et (d) la droite représentation paramétrique $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \\ z=-t+1 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$.

1) Vérifier que $\vec{n}(1;1;-2)$ est un vecteur normal à (P) et $\vec{u}(1;2;-1)$ est un vecteur directeur [illegible]
2) Justifier que (P) et (d) ne sont pas parallèles.
3) Soient $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ le point de (P) tel que (MM') soit parallèle à (d).

a) Comme $(MM')//(d)$, montrer qu'il existe un réel α tels que $\begin{cases} x'=\alpha-x \\ y'=2\alpha-y \\ z'=-\alpha-z \end{cases}$.

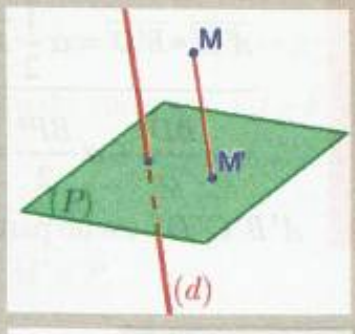
b) Comme $M'\in(P)$, montrer que $\alpha=\frac{1}{5}(x+y-2z-3)$.

c) En déduire que $\begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-4x+y-2z-3) \\ y'=\frac{1}{5}(2x-3y-4z-6) \\ z'=\frac{1}{5}(-x-y-3z+3) \end{cases}$.

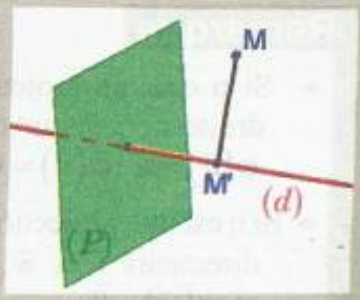
Retenir

Soit (P) un plan de l'espace et (d) une droite non parallèle à (P).

- On appelle projection sur (P) parallèlement à (d) l'application f de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' ainsi défini.
  - Si $M \in (P)$, $M' = M$.
  - Si $M \notin (P)$, alors M' est le point de (P) tel que (MM') soit parallèle à (d).



- On appelle projection sur (d) parallèlement à (P) l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :
  - Si $M \in (d)$, $M' = M$.
  - Si $M \notin (d)$, M' est le point de (d) tel que (MM') soit parallèle à (P).



- Lorsque (P) et (d) sont perpendiculaires, on parle de projection orthogonale.
- Les projections sont des applications affines, donc elles conservent le coefficient de colinéarité.

Exemple

$ABCD$ est un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$. (P) un plan orthogonal à (IJ). On désigne par A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par la projection orthogonale sur (P).

1) Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$.
2) On suppose que $ABCD$ est un tétraèdre régulier. Quelle est la nature de $A'B'C'D'$?

Résolution .

Désignons par f la projection orthogonale sur (P).

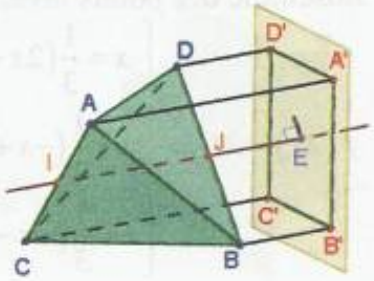
1) Les points A', B', C' et D' sont coplanaires. (IJ) est orthogonal à (P) et donc $f(I) = f(J)$, or f conserve le milieu des segments donc $f(I)$ est le milieu des segments $[A'C']$ et $[B'D']$. Les diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$ ont même milieu donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

2) Nature de $A'B'C'D'$ lorsque le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \left(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'}\right) = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$ car

$\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{DD'}$.

$\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}\right) \cdot \overrightarrow{BD}$



$\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}=\left(\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CC'}\right)\cdot\overrightarrow{BD}$ car $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$, Or $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$

D'où $\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{B'D'}=\alpha\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{B0}$ où α est un réel.

$$\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}=\alpha\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right).\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{AJ}+\alpha\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\alpha\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BD}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}=\alpha\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\alpha\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\alpha\frac{1}{2}BD^2}_{0}=\alpha DA\cdot B\times\frac{1}{2}-\alpha\frac{BP^2}{2}$$

$$=\alpha\frac{BD^2}{\alpha}-\alpha\frac{BP^2}{2}=0.$$

$A'B'C'D'$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires ; c'est un losange

Remarque

- Si p est une projection sur un plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, alors l'endomorphisme φ de W associé à p est telle que $\varphi(\vec{u})=\vec{u}$; $\varphi(\vec{v})=\vec{v}$ et $\varphi(\vec{w})=\vec{0}$
- Si q est une projection sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ parallèlement à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors l'endomorphisme π associé à q est tel que : $\pi(\vec{u})=\vec{u}$; $\pi(\vec{v})=\vec{0}$ et $\pi(\vec{w})=\vec{0}$.

Exercice Résolu

Enoncé

Soit f la transformation de l'espace qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(2x-y-z)\\y'=\frac{1}{3}(-x+2y-z)\\z'=\frac{1}{3}(-x-y+2z)\end{cases}$. L'espace étant muni du repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2) Montrer que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
3) Montrer pour tout point M, M' est un point invariant.
4) En déduire la nature de f et les éléments caractéristiques de f.

Solution

Ensemble des points invariants. Soit $M(x;y;z)$ un point invariant.

$f(M)=M\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}(2x-y-z)\\y=\frac{1}{3}(-x+2y-z)\\z=\frac{1}{3}(-x-y+2z)\end{cases}$; ce qui équivaut à $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$. L'ensemble des points

variants est donc le plan P d'équation $x+y+z=0$.

irection de $\overrightarrow{MM'}$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

es coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont données par le système $\begin{cases} x'-x=\frac{1}{3}(2x-y-z)-x=\frac{1}{3}(-x-y-z) \\ y'-y=\frac{1}{3}(-x+2y-z)-y=\frac{1}{3}(-x-y-z), \\ z'-z=\frac{1}{3}(-x-y+2z)-z=\frac{1}{3}(-x-y-z) \end{cases}$

Ona $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}(-x-y-z)(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$. $\overrightarrow{MM'}$ a donc toujours la direction du vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ qui est un vecteur normal au plan P.

ontrons que M' est un point invariant.

$x'+y'+z'=\frac{1}{3}(2x-y-z)+\frac{1}{3}(-x+2y-z)+\frac{1}{3}(-x-y+2z)=0$. Alors $M'\in P$.

ature de f.

f est la projection orthogonale sur le plan P.

S'exercer

ABCDEFGH est un cube.

i) f est la projection orthogonale sur le plan (HFC). Démontrer que (AG) est orthogonale au plan (HFC) et en déduire que $f(A)=f(G)$.

ii) Soit g la projection orthogonale sur la droite (EC). Démontrer que $g(A)=g(F)=g(H)$.

iii) On pose $AB=1$ et on munit l'espace d'un repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Déterminer les expressions analytiques de f et g dans ce repère.

(P) est le plan d'équation $x-2y+z-1=0$. (D) est la droite passant par $A(3,-1,-2)$ et orthogonale à (P) et B le point de coordonnés $(2,-3,1)$.

i) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (P) et (D)

ii) Justifier que BB_1IB_2 est un rectangle; où B_1 est l'image de B par le démi tour d'axe (D) et B_2 l'image de I par la reflexion de plan (P).

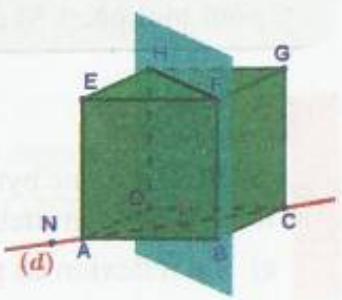
Soit *ABCD* un losange et (P) un plan non perpendiculaire au plan (ABC), quelle est la condition pour que le projeté orthogonal de *ABCD* sur (P) soit un losange ?

2. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UNE RÉFLEXION.

Prendre un bon départ

ctivité 1 :

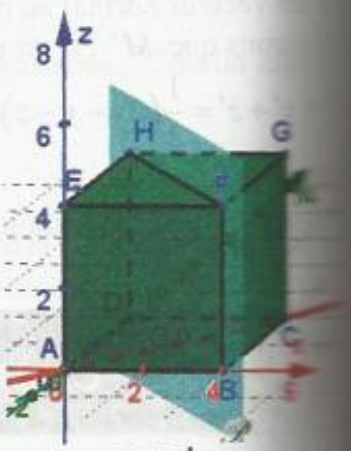
BCDEFGH est un cube; I le centre du carré ABCD. On désigne par (P) le lan passant par les points A, B, et C; (d) la droite (AC).



1) Que représente le plan P pour le segment $[AC]$?
2) Citer un autre segment dont P est le plan médiateur.
3) Justifier que la droite (d) est perpendiculaire à (P).
4) Soit N un point de (d) et N' le point de l'espace tel que (P) soit le plan médiateur de $[NN']$ justifier que N'est le symétrique de N par rapport à I. construire le point N' sur la figure ci-contre

Activité 2

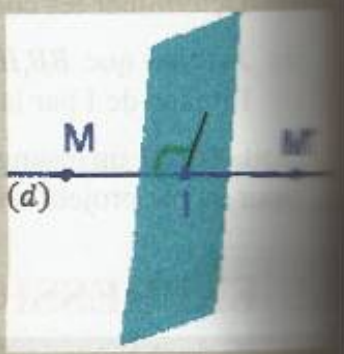
Les données sont celles de l'activité précédente. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel $B(4;0;0), C(4;4;0), D(0;4;0), E(0;0;4)$.



1) Déterminer les cordonnées des points F, G et H.
2) Vérifier qu'une équation du plan (P) est : $z=0$ et qu'un vecteur normal à (P) est $\vec{n}(0;0;1)$.
   Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ le point de l'espace tel que (P) soit le plan médiateur de $[MM']$.
3) Justifier que $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, et donc qu'il existe un réel k tel que $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=k+z \end{cases}$.
4) Justifier que le milieu du segment $[MM']$ appartient à (P) et en déduire que $\frac{z+z'}{2}=0$.
5) Déterminer alors la valeur du réel k et en déduire que $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$.

Retenir

1) Soit π un plan de l'espace $\mathcal{E}$. On appelle réflexion de plan π, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ notée S_π qui à tout point M associe le point M' tel que :
   - Si $M \in \pi$, alors $M'=M$
   - Si $M \notin \pi$, alors π est le plan médiateur de $[MM']$.
2) S_π est une application affine de l'espace.
3) π est l'ensemble des points invariants par S_π.
4) Si (d) est une droite perpendiculaire au plan π au point I alors pour tout point M de (d), $S_\pi(M)=S_I(M)$.



Exemple

$SABCD$ est une pyramide régulière dont la base $ABCD$ est carrée et de centre O. Déterminer les images des sommets de $SABCD$ par :

a) La réflexion de plan (SAC).

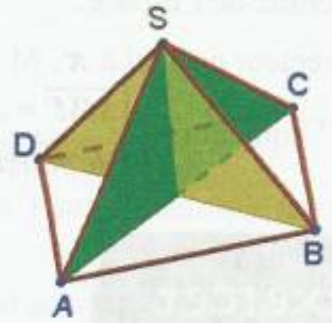
b) La réflexion de plan (SBD).

S	A	B	C	D
S	A	D	C	B

$S_{(SAC)}$

S	A	B	C	D
S	C	B	A	D

$S_{(SBD)}$



Montrer que par une réflexion, une droite et son image sont coplanaires.

Soit P un plan et (AB) une droite de l'espace ; posons $S_P(A)=A'$ et $S_P(B)=B'$. $(AA')\perp(P)$ et $(BB')\perp(P)$ donc $(AA')\parallel(BB')$. Les points A,B,A',B' sont coplanaires et par suite les droites (AB) et $(A'B')$ sont coplanaires.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. P est le plan d'équation $x-y+z=0$. Déterminer les expressions analytiques de S_P.

$\vec{n}(1;-1;1)$ est un vecteur normal à P.

Soit $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ deux points de l'espace.

$S_P(M)=M'$ équivaut à $\begin{cases}(MM')\perp P\\ \text{le milieu de}[MM']\in P\end{cases}$; $(MM')\perp P$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{MM'}=\lambda\vec{n}$.

le milieu de $[MM']\in P$ si les coordonnées de celui-ci vérifient l'équation de P.

Ainsi $S_P(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=\lambda\\ y'-y=-\lambda\\ z'-z=\lambda\\ \dfrac{x'+x}{2}-\dfrac{y+y'}{2}+\dfrac{z+z'}{2}=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x'=x+\lambda\\ y'=y-\lambda\\ z'=z+\lambda\\ \dfrac{2x+\lambda}{2}-\dfrac{2y-\lambda}{2}+\dfrac{2z+\lambda}{2}=0\end{cases}$.

$2x+\lambda-2y+\lambda+2z+\lambda=0$; $3\lambda=-2x+2y-2z$; $\lambda=\dfrac{1}{3}(-2x+2y-2z)$

Ainsi, $\begin{cases}x'=x+\dfrac{1}{3}(-2x+2y-2z)\\ y'=y-\dfrac{1}{3}(-2x+2y-2z)\\ z'=z+\dfrac{1}{3}(-2x+2y-2z)\end{cases}$ et donc $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z\\ y'=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}z\\ z'=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{3}z\end{cases}$.

Remarque

1) Une réflexion de plan π est aussi appelée symétrie orthogonale par rapport à π.
2) Si $M'=S_\pi(M)$, alors $M=S_\pi(M')$. M et M' sont symétriques par rapport à π
3) Si H est le projeté orthogonal de M sur P, alors $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$

4) $S_\pi \circ S_\pi$ = Identité de l'espace.

5) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à π, M et M' deux points de l'espace,

$S_\pi(M) = M'$ équivaut à $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n}\ ,\ \lambda \in R \\ le\ milieu\ de\ [MM'] \in P \end{cases}$.

S'exercer

1a) *ABCDEFGH* est un cube. On note I le symétrique de H par rapport à la base *ABCD*. Tracer la section du cube par le plan de réflexion qui échange I en F.

1b) *OABC* est un tétraèdre tel que le triangle ABC soit équilatéral, le point O se projette orthogonalement au centre G du triangle équilatéral ABC. Quelle est l'image de O par la réflexion plan (ABC)?

1c) *ABCDEFGH* est un cube d'arête $AB = 1$. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer les expressions analytiques de chacune des réflexions suivantes : $S_{(EFG)}$; $S_{(BDF)}$.

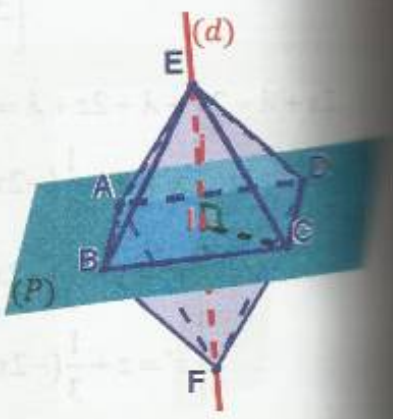
1d) On considère un plan (P), un point O de P et $\vec{n}$ un vecteur normal de (P). S est l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - 2(\overrightarrow{OM}.\vec{n})$. Démontrer que S est la réflexion du plan (P).

1.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES D'UN DEMI-TOUR

Prendre un bon départ

Activité 1

ABCDE et ABCDF sont deux pyramides régulières à bases carrées ; (d) est la droite (EF) et P le plan passant par les points A, B et C. soit I le centre du carré ABCD.



1) Justifier que (d) est orthogonale au plan P.

2) Soit $S_{(d)}$ la symétrie orthogonale d'axe (d). Vérifier le tableau de correspondance suivant.

E	A	B	C	I
S	C	B	A	D

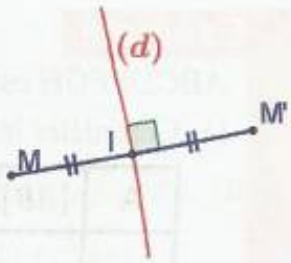
$S_{(d)}$

3) Soit M un point du plan P. justifier que I est le projeté orthogonal de M sur (d) et en déduire que $S_{(d)}(M) = S_I(M)$.

Activité 2

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (d) la droite d'équation

paramétriques $\begin{cases} x' = t-1 \\ y' = -t \\ z' = t \end{cases}$.



1) Vérifier que $\vec{u}(1;-1;1)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

2) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son symétrique par rapport à la droite (d).

3) Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x' = 2t-2-x \\ y' = -2t-y \\ z' = 2t-z \end{cases}.$$

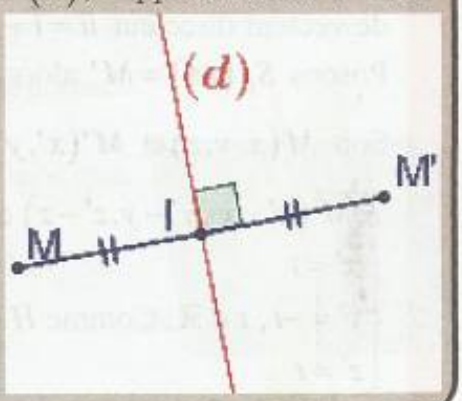
a) Vérifier que $(MM') \perp (d)$ si et seulement si $(x'-x)-(y'-y)+(z'-z)=0$.

b) En déduire que $t = \frac{1}{3}(x-y+z+1)$ et que $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z+2) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y-2z-2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x-2y-z+2) \end{cases}$.

Retenir

1) Soit (d) une droite de l'espace E. On appelle demi-tour d'axe (d), l'application de E dans E notée $S_{(d)}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \in (d)$, alors $M' = M$
- Si $M \notin (d)$, alors (d) est la médiatrice de $[MM']$.



2) $S_{(d)}$ est une application affine de l'espace.

3) (d) est l'ensemble des points invariants de $S_{(d)}$.

4) Si π est un plan perpendiculaire à (d) au point I, alors pour tout point M de π, $S_{(d)}(M) = S_I(M)$.

Remarque

1) Un demi –tour d'axe (d) est aussi appelée symétrie orthogonale d'axe (d).

2) Si $M' = S_{(d)}(M)$, alors $M = S_{(d)}(M')$. M et M' sont symétriques par rapport à (d)

3) Si H est le projeté orthogonal de M sur (d), alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

4) $S_{(d)} \circ S_{(d)} =$ identité de l'espace.

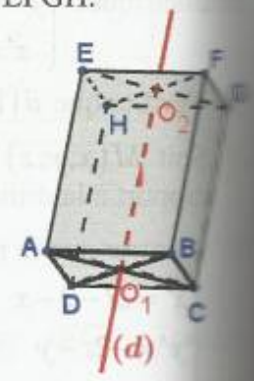
5) Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), M et M' deux points de l'espace,

$S_{(d)}(M) = M'$ équivaut à $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0, \\ \text{le milieu de } [MM'] \in (d) \end{cases}$.

Exemple

ABCDEFGH est pavé droit ; O_1 et O_2 sont les centres des faces ABCD et EFGH.

1) Compléter le tableau de correspondance suivant :



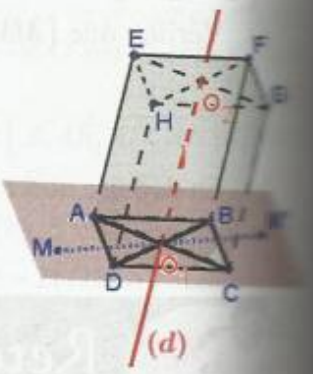
A	[AB]	(GC)	O_2	(d)	$S_{(d)}$

2) Justifier que (d) est orthogonale à (ABC).

3) Soit M un point du plan (ABC) construire le point M' image de M par $S_{(d)}$.

Solution

A	[AB]	(GC)	O_2	(d)	$S_{(d)}$
C	[DC]	(AE)	O_2	(d)	



1) (d) est parallèle à (FB) qui est orthogonale à (ABC) car (FB) orthogonal à deux droites sécantes de (ABC) que sont (AB) et (BC) ; par conséquent, (d) est orthogonale à (ABC).

2) Comme (d) est orthogonal à (ABC) en O_1, pour tout point M de (ABC), $S_{(d)}(M)$ est le symétrique de M par rapport à O_1.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (D) la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Déterminer les expressions analytiques de S_D.

Posons $S_D(M)=M'$ alors le milieu H de $[MM']$ appartenant à (D) et $MM'\perp\vec{u}$.

Soit $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$.

$\overrightarrow{MM'}(x'-x\ ,y'-y,z'-z)$ et $H\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$. Une réprésentation paramétrique de (D) est $\begin{cases}x'=t\\y'=-t\\z'=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Comme $H\in(D)$, Il existe $t\in\mathbb{R}$, tel que $\frac{x+x'}{2}=t$; $\frac{y+y'}{2}=-t$ et $\frac{z+z'}{2}=$

D'où $\begin{cases}x'=2t-x\\y'=-2t-y\\z'=2t-z\end{cases}$; $\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0\Leftrightarrow(x'-x)-(y'-y)+z'-z=0\Leftrightarrow x'-y'+z'=x-y+z$

D'où $2t-x-(2t-y)+(2t-z)=x-y+z$; $6t=2x-2y+2z$; $t=\frac{1}{3}(x-y+z)$.

Par suite, $\begin{cases}x'=\frac{2}{3}(x-y+z)-x\\y'=-\frac{2}{3}(x-y+z)-y\\z'=\frac{2}{3}(x-y+z)-z\end{cases}$ et donc, $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z\\y'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z\\z'=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z\end{cases}$.

S'exercer

Le) $ABCDEFGH$ est un cube d'arête $AB=1$. L'espace est muni du repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Déterminer les expressions analytiques de chacun des demi-tours suivants : $S_{(AG)}$, $S_{(DH)}$

Lf) $OABC$ est un tétraèdre tel que le triangle ABC soit équilatéral, le point O se projette orthogonalement au centre G du triangle équilatéral ABC. Déterminer les images de O, A, B et C par le demi-tour d'axe (OG).

I4. COMPOSITION DE DEUX RÉFLEXIONS.

Prendre un bon départ

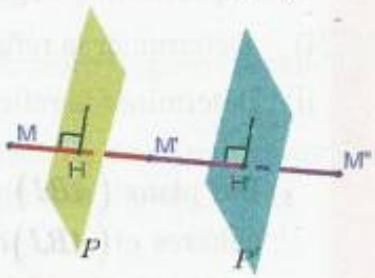
Activité 1

Soit P et P' deux plans parallèles. Soit $M'=S_P(M)$ et $M''=S_{P'}(M')$; soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M', respectivement sur P et P'.

a) Justifier que $\overrightarrow{MM''}=2\overrightarrow{HH'}$.

b) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est constant (ne dépend pas de M).

c) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $M''=t_{2\vec{u}}(M)$.



Activité 2

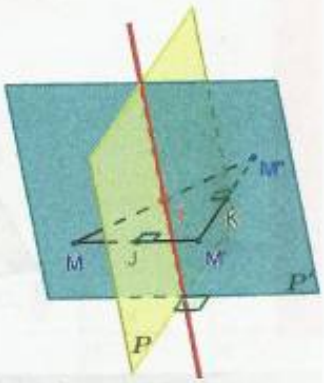
Soit P et P' deux plans perpendiculaires. On pose (d) la droite $P\cap P'$.

Soit $M'=S_P(M)$ et $M''=S_{P'}(M')$; J et K les projetés orthogonaux respectifs de M et M', respectivement sur P et P'.

a) Justifier que $(d)\perp(MM')$ et que $(d)\perp(MM'')$, puis en déduire que $(d)\perp(MM'')$.

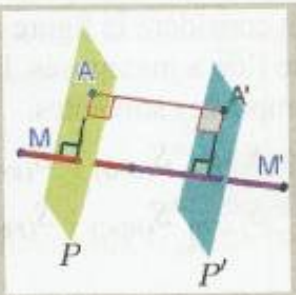
b) Soit I le milieu de $[MM'']$. À partir de la nature du triangle MM'M'' montrer que IM=IM'=IM'', puis en déduire que $I\in P$ et $I\in P'$.

c) En déduire que $I\in(d)$ et que (d) est la médiatrice de $[MM'']$

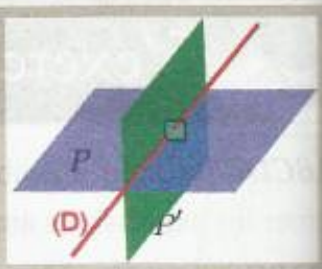


Retenir

La composée de deux réflexions de plans parallèles P et P' est une translation de vecteur un vecteur normal aux deux plans. Si A est un point de P et A' son projeté orthogonal sur le plan P', alors $S_{P'}\circ S_P=t_{2\overrightarrow{AA'}}$. Autrement dit $S_{P'}\circ S_P=t_{2\vec{u}}$ où $t_{\vec{u}}$ est la translation qui transforme P en P'.



2) La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (D) est un demi-tour d'axe (D).



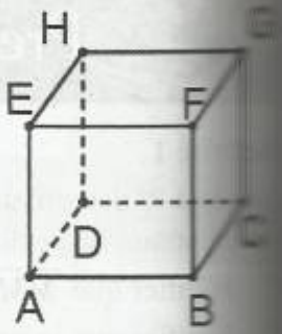
Exemple

1) $SABCDEFGH$ est un cube. Déterminer la nature de chacune des composées :

- $S_{(EFG)} \circ S_{(ABC)}$; $S_{(CGH)} \circ S_{(ADE)}$.

$S_{(EFG)} \circ S_{(ABC)}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AE}$

$S_{(CGH)} \circ S_{(ADE)}$ est le demi-tour d'axe (AD) car les plans (CGH) et (ADE) sont perpendiculaires suivant la droite (DH).

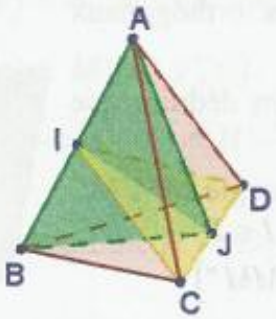


2) $ABCD$ est un tétraèdre régulier I, J, K, L M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$; $[AC]$; $[BD]$; $[AD]$ et $[BC]$

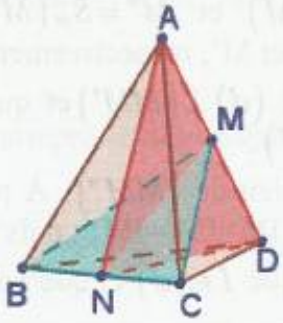
i) Déterminer la réflexion S_1 telle que $S_1 \circ S_{(ABJ)} = S_{(IJ)}$

ii) Déterminer la réflexion S_2 telle que $S_2 \circ S_{(ADN)} = S_{(MN)}$

Les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires et $(ABJ) \cap (CDI) = (IJ)$ donc S_1 est la réflexion de plan (CDI).



Les plans (ADN) et (BCM) sont perpendiculaires et $(ADN) \cap (BCM) = (MN)$ donc S_2 est la réflexion de plan (BCM).

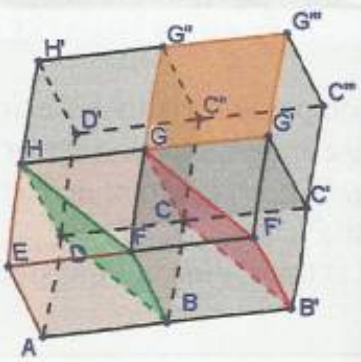


S'exercer

1.e) On considère la figure ci-contre composé de quatre cubes que l'on a juxtaposés. Donner la nature de chacune des composées suivantes.

1) $S_{(AED)} \circ S_{(BFG)}$; $S_{(BFH)} \circ S_{(B'F'G)}$; $S_{(HGC)} \circ S_{(H'G''C'')}$.

2) $S_{(AED)} \circ S_{(HDC)}$; $S_{(FBC)} \circ S_{(HGC)}$; $S_{(FBD)} \circ S_{(GG'G'')}$.



...) $ABCDEFGH$ est un cube. (P) est le plan médiateur du segment $[AB]$. Déterminer la nature de chacune des composées suivantes : $S_{(ABE)} \circ S_{(ABC)}$; $S_{(AEG)} \circ S_{(BOF)}$; $S_{(P)} \circ S_{(AEG)}$.

...) $ABCDA'B'C'D'$ est un cube S_1 est la réflexion de plan $AA'B$, S_2 est la réflexion de plan (BCB'), S_3 est la réflexion de plan (CCD'), S_4 est la réflexion de plan (BDA')

i) Montrer que $r' = S_2 \circ S_1$ est un demi-tour que l'on précisera.

ii) Déterminer la nature de $r' = S_4 \circ S_3$

iii) On note S la réflexion de plan $(BB'D)$. Déterminer les réflexions S' et S'' telle que $r' = S' \circ S''$

iv) En déduire que $t = r' \circ r''$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$

...) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. P est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; (P') le plan d'équation $x+y-2z=0$.

i) Déterminer les expressions analytiques de S_P et $S_{P'}$.

ii) Quelle est la nature de $S_{P'} \circ S_P$? Donner son écriture analytique et son élément caractéristique.

REMARQUE

- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles ($\vec{u}$ étant un vecteur normal aux deux plans).
- Tout demi-tour d'axe (D) est la composée d'une infinité de manières de deux réflexions de plans perpendiculaires. (les deux plans étant perpendiculaires suivant la droite (D)).

5. COMPOSITIONS DE DEUX DEMI-TOURS.

Prendre un bon départ

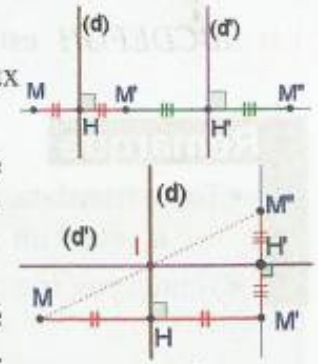
...ctivité 1

Soit (d) et (d') sont deux droites de l'espace.

Soit $M' = S_{(d)}(M)$ et $M'' = S_{(d')}(M')$; soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M', respectivement sur P et P'.

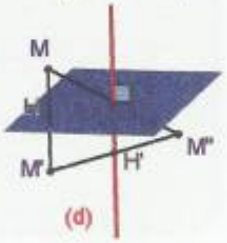
1) On suppose $(d) \perp (d')$. En s'inspirant de l'activité 1 du paragraphe 1.3 montrer que $S_{(d)} \circ S_{(d')} = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on précisera. (voir figure ci-contre).

2) On suppose que (d) est perpendiculaire à (d'). En s'inspirant de l'activité 2 du paragraphe 1.3 montrer que $S_{(d)} \circ S_{(d')} = S_I$ où I est le point d'intersection des droites (d) et (d'). (voir figure ci-contre).



...ctivité 2

...d) et P sont respectivement une droite et un plan de l'espace qui sont orthogonaux ...n point I. en s'inspirant de l'activité 1, montrer que $S_{(d)} \circ S_P = S_I$



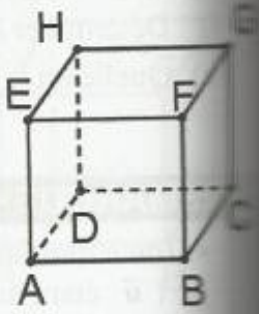
Retenir

1) La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces deux axes.
2) La composée de deux demi-tours dont les axes (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires en un point O est un demi-tour dont l'axe (D) est la perpendiculaire commune à (D_1) et à (D_2) en O
3) La composée d'un demi-tour d'axe (D) et d'une réflexion de plan (P), tel que (D) est orthogonal à P et O, est la symétrie de centre O.

Exemple

SABCDEFGH est un cube. Déterminer la nature de chacune des composées :

1) $S_{(BF)} \circ S_{(AE)}$;
2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$;
3) $S_{(AB)} \circ S_{(BCG)}$.



Solution

1) $S_{(BF)} \circ S_{(AE)}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.
2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ est le demi-tour d'axe (AE).
3) $S_{(AB)} \circ S_{(BCG)}$ est la symétrie de centre B car $(AB) \perp (BCG)$.

S'exercer

1.i) *ABCDEFGH* est un cube. Démontrer que $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = S_{(AE)}$.

Remarque

- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles ($\vec{u}$ étant un vecteur normal aux deux droites).
- Toute symétrie centrale est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion.

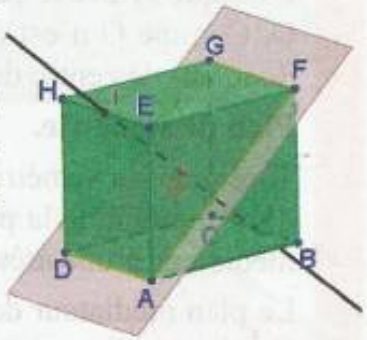
1.6. PLANS ET AXES DE SYMÉTRIE D'UN CUBE ET D'UN TÉTRAÈDRE.

Prendre un bon départ

Activité

Soit ABCDEFGH un cube de centre O.

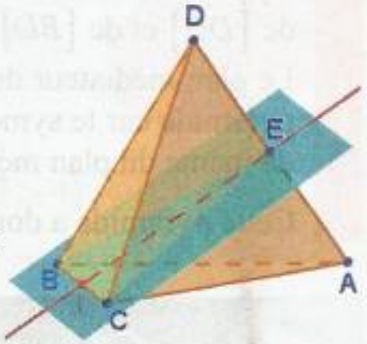
1) Comme O est l'isobarycentre des points A, B, C, D, E, F, G, et H, justifier que l'image de O par toute symétrie de l'espace est le point O.
2) En déduire que tout axe de symétrie et tout plan de symétrie du cube passe par le point O.
3) Soit $S_{(D)}$ une symétrie d'axe (D) telle que (D) soit un axe de symétrie du cube.
   a) Justifier que l'image d'un sommet du cube par $S_{(D)}$ est encore un sommet du cube.
   b) En déduire que (D) est une médiatrice d'un segment ayant pour extrémités des sommets du cube.
   c) En observant la figure ci-contre, citer les 9 axes de symétrie du cube.
   d) Soit P un plan perpendiculaire à (D) en O. En remarquant que $S_P \circ S_{(D)} = S_O$, montrer que $S_P = S_O \circ S_{(D)}$, puis en déduire que P est un plan de symétrie du cube.
   e) Citer alors les 9 plans de symétrie du cube.



Activité

Soit ABCD un tétraèdre régulier. Soit E le milieu de $[AD]$.

1) Montrer que le plan (BEC) est le plan médiateur de $[AD]$.
2) En déduire que (BEC) est un plan de symétrie du tétraèdre ABCD.
3) Citer cinq autres plans de symétrie de ABCD.
4) Montrer que la droite (IE) est un axe de symétrie de ABCD puis en déduire six autres axes de symétrie de ABCD.



Retenir

...ns de symétrie d'un cube et d'un tétraèdre régulier.

Un cube a neuf plans de symétrie dont :

- Trois plans de symétrie qui sont des plans médiateurs des arêtes.
- Six plans de symétrie qui sont des plans médiateurs des diagonales des faces du cube.

Un tétraèdre régulier possède six plans de symétrie qui sont les plans médiateurs des six arêtes du tétraèdre.

...es de symétrie d'un cube et d'un tétraèdre régulier.

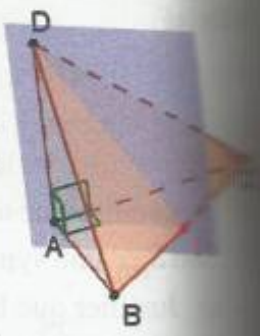
Un cube possède neuf axes de symétrie dont :

- Trois sont les axes passant par les centres de deux faces opposées.
- Six sont des droites passant par les milieux de deux arêtes opposées

2) Un tétraèdre possède six axes de symétrie qui sont les axes passant les milieux de deux arêtes opposées.

Exemple

ABCD est un tétraèdre tel que les faces ABC, ABO, ACD sont des triangles rectangles et isocèles en A. Déterminer les plans de symétrie de ABCD.



Soit O l'isobarycentre de A,B, C et D. Toute symétrie qui laisse la pyramide ABCD globalement invariante transforme O en O car toute symétrie conserve le barycentre.

En outre BCD est un triangle équilatéral.

Centre de symétrie.

L'unique symétrie centrale qui transforme O en O est la symétrie de centre O. Comme O n'est évidemment pas un centre de symétrie de ABCD, la pyramide ABCD n'a donc pas de centre de symétrie.

Plan de symétrie.

Tout plan de symétrie de ABCD passe par O. si P est un plan de symétrie de ABCD, l'image d'un sommet de la pyramide par S_P est encore un sommet de la pyramide. P est donc un plan médiateur d'une arête de la pyramide.

Le plan médiateur de $[BC]$ passe par A et D car ABC est isocèle en A et BCD est équilatéral. Ce plan médiateur est un plan de symétrie de la pyramide ; il en est de même du plan médiateur de $[DC]$ et de $[BD]$.

Le plan médiateur de $[AB]$ ne contient ni C, ni D. Ce plan n'est pas un plan de symétrie de la pyramide car le symétrique de C par rapport à ce plan n'appartient pas à la pyramide ; il en est de même du plan médiateur de $[AC]$ et de $[AD]$.

Cette pyramide a donc trois plans de symétrie.

S'exercer

1.j) Démontrer qu'un tétraèdre régulier n'admet pas de centre de symétrie.

1.k) Déterminer les plans et axes de symétries d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral.

1.l) Déterminer les plans et axes de symétries d'une pyramide régulière SABCD dont la base est un carré ABCD.

1.m) Déterminer les plans et les axes de symétrie d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier, de centre O.

LEÇON 2 HOMOTHÉTIES-TRANSLATIONS.

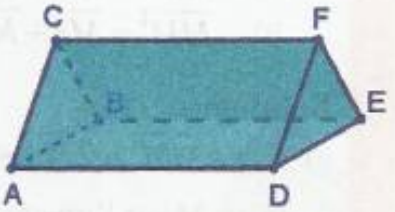
- Reconnaître les expressions analytiques des homothéties et des translations.
- Donner la nature de la composée des homothéties, des translations ou d'une homothétie par une translation

1. EXPRESSIONS ANALYTIQUES.

Prendre un bon départ

ctivité 1

On considère la figure ci-contre. ABCDEF est un prisme droit.

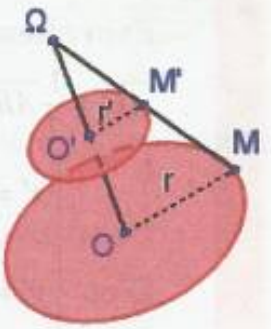


Déterminer l'image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Construire l'image de cette figure par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$.

ctivité 2

ur la figure ci-contre, C est le cercle de centre O et de rayon r; C' le cercle de ntre O' et de rayon r'. On suppose que le plan contenant C est parallèle au plan ntenant C'.



Déterminer le rapport de l'homothétie de centre Ω qui transforme C en C'.

Existe t-il une autre homothétie qui transforme C en C', si oui donner ses éléments caractéristiques.

ctivité 3

n suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; soit $\vec{u}(2:3:-4)$.

Déterminer une écriture analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit h la transformation de l'espace ayant pour écriture analytique $\begin{cases} x' = -2x+3 \\ y' = -2y-1 \\ z' = -2z+5 \end{cases}$.

Déterminer l'ensemble des points invariants de h.

Montrer que h est u ne homothétie, préciser son centre et son rapport.

Retenir

- La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation de l'espace qui à tout point M de E, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Soit O un point et k un réel non nul; L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation de l'espace qui à chaque point M, associe le M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{kOM}$
- Soient M, N deux points de E et M', N' leurs images par une homothétie ou une translation $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ dans une translation. $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ dans une homothétie de rapport k.

- Par une homothétie ou une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un solide de l'espace par une translation ou une homothétie est un solide de l'espace de même nature.
- Les translations conservent les distances, les aires et les volumes.
- Les homothéties de rapport k multiplient les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Exemple

1) $ABCD$ est un tétraèdre. Dans chacun des cas suivants, identifier la translation qui à M associe M' et donner l'écriture analytique de cette transformation dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Solution

a) On a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MO}$ où O est le milieu de $[BC]$. $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OA}$.

D'où M est l'image de M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.

Expressions analytiques.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$. $2\overrightarrow{AO}$ est un vecteur de coordonnées $(1,1,0)$.

D'où $\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{1}{2} \\ z' = z \end{cases}$ est l'écriture analytique de la translation de vecteur $2\overrightarrow{A0}$.

b) Soit G le centre de gravité de ABC.

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ d'où $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{MG}$

M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

Expression analytique.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $G\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$. Del'égalité $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{MG}$ on a : $\begin{cases} x' - \frac{1}{3} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ y' - \frac{1}{3} = -2\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ z' - 0 = -2\left(z - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = -2x + \\ y' = -2y + \\ z' = -2z + \end{cases}$

2) $ABCDEFGH$ est un cube. M décrit le plan (ADE). Déterminer le lieu géométrique de M' dans chacun des cas suivants :

a) $MAFM'$ est un parallélogramme.

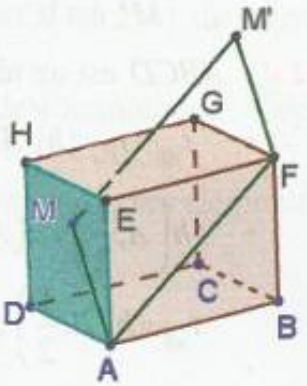
b) M' est le milieu du segment $[GM]$.

Solution

a) On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AF}$.

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

L'image de (ADE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ est le plan passant par F et parallèle au plan (ADE). C'est-à-dire le plan (BFG).



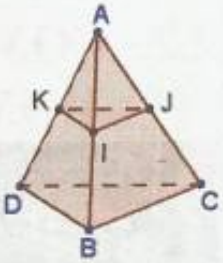
b) $\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$. C'est le plan passant par le milieu de $[EG]$ et parallèle au plan (ADE).

3) $ABCD$ est un tétraèdre et les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ ont pour milieux respectifs I, J, K. Exprimer l'aire du triangle IJK en fonction de l'aire de BCD.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $AJ = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

IJK est l'image de BCD par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

$Aire(IJK) = \frac{1}{4} Aire(BCD)$.



Remarque

- Une translation est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'application identique de l'espace (I_d).
- Une homothétie de rapport k est une application affine d'endomorphisme associé kI_d
- L'écriture analytique d'une translation est de la forme : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$
- L'écriture analytique d'une homothétie de rapport k est de la forme : $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$

S'exercer

2a) $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté $AB = a$.

i) Montrer que les centres des gravités des faces sont les sommets d'un tétraèdre homothétique au premier.

ii) Comparer les volumes des tétraèdres.

2b) $ABCDEFGH$ est un cube standard. On munit l'espace d'un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ dans chacun des cas suivants, identifier la transformation qui transforme M en M' et donner son écriture analytique.

1) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$.

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MG}$.

2c) $ABCDEFGH$ est un cube. M décrit la face $HGCD$. Représenter dans chacun des cas l'ensemble des points M' tels que :

i) $MHEM'$ est un parallélogramme.

ii) M' est le milieu de $[CM]$

2.d) $ABCD$ est un tétraèdre. Déterminer la nature de chacune des composées suivants :

- $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$; $h\left(A,\frac{1}{2}\right) \circ h(A,-2)$
- $h\left(A,\frac{1}{2}\right) \circ h(A,2)$; $h\left(B,\frac{1}{2}\right) \circ h\left(A,\frac{1}{2}\right)$
- $t_{\overrightarrow{AB}} \circ h\left(B,\frac{1}{2}\right)$; $h_{B,\frac{1}{2}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

2.e) Reconnaître et caractériser dans chacun des cas la transformation d'expression analytique indiqué

$$a)\begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y-2 \\ z' = z \end{cases}; \quad b)\begin{cases} x' = -2x+3 \\ y' = -2x+7 \\ z' = -2x+4 \end{cases}; \quad c)\begin{cases} x' = -x+8 \\ y' = -y+6 \\ z' = -z+12 \end{cases}.$$

2.2. COMPOSÉES DE DEUX HOMOTHÉTIES, D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE TRANSLATION.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient h et h' deux homothéties de centres O et O' et de rapports k et k'.

1) On suppose $kk' = 1$. Soit le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = (1-k')\overrightarrow{OO'}$. Soit M un point de l'espace.

Posons $h'(O) = O''$, $h(M) = M'$ et $h'(M') = M''$. on a : $h' \circ h(M) = M''$

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M''}$

$= \frac{1}{k}\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OO'} + k'\overrightarrow{O'M'}$, car $\begin{cases} h(M) = M' \\ h'(M') = M'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{O'M''} = k'\overrightarrow{O'M'} \end{cases}$

$= \frac{\overrightarrow{M'O} + kk'\overrightarrow{O'M'}}{k} + \overrightarrow{OO'} = \frac{\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{O'M'}}{k} + \overrightarrow{OO'}$ car $kk' = 1$.

$= \frac{1}{k}\overrightarrow{O'O} + \frac{1}{k'}\overrightarrow{O''O'}$ (car $h'(O) = O'' \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O''} = k'\overrightarrow{O'O}$)

$= \frac{k\overrightarrow{O''O'} + k'\overrightarrow{O'O}}{kk'} = k\overrightarrow{O''O'} + \overrightarrow{O'O''}$ $\overrightarrow{MM''} = (1-k)\overrightarrow{O'O''} = (1-k)k'\overrightarrow{O'O} = (1-k')\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

Quelle est alors la nature de $h' \circ h$?

2) On suppose maintenant que $kk' \neq 1$.

3) Soient A et B deux points de l'espace. On pose $(h' \circ h)(A) = A'$ et $(h' \circ h)(B) = B'$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = kk'\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature de $h' \circ h$.

4) Montrer que $h' \circ h$ admet un unique point invariant Ω défini par $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{OO'}$.

5) Vérifier que si $O = O'$ alors $\Omega = O$.

6) Donner alors les éléments caractéristique de $h' \circ h$.

Activité 2

On suppose l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit le vecteur $\vec{u}(1;2;3)$ et $\Omega(-1;2;4)$ un point de l'espace.

1) Donner les expressions analytiques de la translation t de vecteur $\vec{u}$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport 3.

2) Montrer que $h\circ t$ et $t\circ h$ sont des homothéties. Préciser pour chaque transformation ses éléments caractéristiques.

Retenir

1) Soient h et h' deux homothéties de centres respectifs O et O', et de rapports respectifs k et k'. On suppose k et k' tous différents de 1.

- Si $O=O'$ alors $h\circ h'=h'\circ h=$ homothétie de centre O et de rapport kk'.
- On suppose $O\neq O'$.
  - Si $kk'=1$ alors $h'\circ h$ est la translation de vecteur $(1-k)\overrightarrow{OO'}$.
  - Si $kk'\neq 1$ alors $h'\circ h$ est l'homothétie de rapport kk' et de centre le point Ω défini par $\overrightarrow{O\Omega}=\dfrac{(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{OO'}$.

2) Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

- $t_{\vec{u}}\circ h=t_{\vec{u}}$ si $k=1$.
- Si $k\neq 1$, la composée $t_{\vec{u}}\circ h$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k, avec $\overrightarrow{O\Omega}=\dfrac{1}{1-k}\vec{u}$.

  De même la composée $h\circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie de centre Ω' et de rapport k, avec $\overrightarrow{O\Omega'}=\dfrac{k}{1-k}\vec{u}$.

Exemple

Soit h la transformation de l'espace d'expressions analytiques $\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y+1 \\ z'=2z \end{cases}$. Soit h_1 l'homothétie de centre $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Soit h_2 l'homothétie de centre $B\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et de rapport 4.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

h ; $h\circ h_1$; $h\circ h_2$; $h\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Nature de h.

Au vu de l'écriture analytique de h, on conclut que h est une homothétie de rapport 2 et de centre le point C dont les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifient $\begin{cases} x=2x-1 \\ y=2y+1 \\ z=2z \end{cases}$. D'où $C\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Nature de $h\circ h_1$.

Comme $2\times\frac{1}{2}=1$, $h\circ h_1$ est une translation de vecteur $\vec{u}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}$. Alors $h\circ h_1=t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}(0;2;1)$.

Nature de $h\circ h_2$.

Comme $2\times(-4)=-2\neq 1$, $h\circ h_2$ est une homothétie de rapport -2 et de centre le point Ω défini par $\overrightarrow{B\Omega}=\frac{(1-(-4))}{1-(-2)}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où $\Omega\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Nature de $h\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Comme le rapport 2 de h est différent de 1 alors $h\circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une homothétie de centre Ω' et de rapport 2, avec $\overrightarrow{C\Omega'}=\frac{2}{1-2}\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}$. D'où $\Omega'\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$.

N.B. Pour déterminer la nature de ses transformations on peut aussi déterminer leurs expressions analytiques et en déduire leur nature sur la base de celles-ci.

Remarque

En général $t_{\vec{u}}\circ h$ et $h\circ t_{\vec{u}}$ n'ont pas le même centre : la composée $t_{\vec{u}}\circ h$ n'est donc pas commutative

S'exercer

2.f) ABCDEFGH est un cube. h est l'homothétie de centre A et de rapport 2 et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Construire les images des points A, B, C et D par la composée $h\circ t$.

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h\circ t$ et de $t\circ h$.

2.g) ABCDEFGH est un cube de centre O. h est l'homothétie de centre O et de rapport 2 et h' l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Construire les images des points A, B, C et D par la composée $h\circ h'$.

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h\circ h'$.

2.h) On considère les transformations f, g et t d'expressions analytiques respectives $\begin{cases}x'=-2x+1\\y'=-2y-2\\z'=-2z+3\end{cases}$ $\begin{cases}x'=3x-1\\y'=3y+1\\z'=3z\end{cases}$ et $\begin{cases}x'=x+3\\y'=y-1\\z'=z-4\end{cases}$.

1) **Déterminer la nature de** f, g et t.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ g; g\circ f; f\circ t; t\circ g$

S'ENTRAÎNER

Pour les exercices de 1 à 10, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1.

Déterminer les expressions analytiques de :

1) la réflexion plane (XOY) ;
2) la réflexion plane (XOZ) ;
3) la réflexion plane (YOZ).

2.

Déterminer l'expression analytique du :

1) demi-tour d'axe $(O;\vec{i})$;
2) demi-tour d'axe $(O;\vec{j})$;
3) demi-tour d'axe $(O;\vec{k})$.

3.

(P) est un plan d'équation $x+y+z=0$.

(D) est la droite passant par O et d'un vecteur directeur $\vec{u}(1,1,1)$.

1) Vérifier que (P) et (D) sont orthogonaux ;
2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D) noté $S_{(D)}$.
3) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (P) notée $S_{(P)}$.
4) Déterminer l'expression analytique de $S_{(P)} o S_{(D)}$.
5) Quelle et la nature de $S_{(P)} o S_{(D)}$?

4.

(S) est la sphère de centre O et de rayon 2.

(P) est le plan d'équation $x=z+2$.

1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan(P) notée $S_{(P)}$.
2) Déterminer l'image (S') de (S) par $S_{(P)}$

5.

(P) est le plan d'équation $2x-y+z-2=0$.

A est le point de l'espace de coordonnées $(-1,0,2)$.

1) Déterminer les coordonnées du point A_1 image de A par la projection orthogonale sur (P).
2) En déduire les coordonnées du point A' image de A par la réflexion d'axe (P).

6.

On considère les points $A(6;0;0)$, $B(0;6;0)$ et $C(0;0;6)$.

1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (ABC) notée s.
2) On désigne par I le point de coordonnées $(2;2;2)$.

a) Vérifier que I est équidistant des points A, B et C.

b) Déterminer l'image J de I par S

c) Justifier que J est équidistant des points A, B et C.

7.

On considère les points $A(0;1;1)$, $B(1;0;1)$ et $C(1;1;0)$.

a) Déterminer une équation de plan (ABC) ;

b) Justifier que $OABC$ est un tétraèdre ;

c) Déterminer l'écriture analytique de la réflexion de plan (ABC) notée s.

d) Déterminer l'image O' de O par s.

8.

On considère dans l'espace les points $A(2;0;4)$ et $B(-4;2;0)$.

S est la réflexion plane qui transforme A en B.

1) Justifier que O est invariant par S.
2) Déterminer une équation du plan P de la réflexion S.
3) Déterminer l'écriture analytique de S

9.
A est le point de l'espace de coordonnées $(1;2;3)$.

1) Déterminer les coordonnées des points B, C et D image de A par les réflexions d'axes $(O;\vec{i})$; $(O;\vec{j})$ et $(O;\vec{k})$.
2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

10.
P est le plan d'équation $x-3y+z-1=0$.
(D) est la droite passant par A et d'un vecteur directeur $\vec{u}(1,-3,2)$. On donne $B(2;-3;1)$.

1) Démontrer que (D) est orthogonale à P en un point I que l'on déterminera.
2) Déterminer les coordonnées de B_1 image de B par le demi-tour d'axe (D).
3) Déterminer les coordonnées de B_2 image de I par la réflexion de plan P.
4) Quelle est la nature du quadrilatère BB_1IB_2 ?

Pour les exercices de 12 à 17 ABCDEFGH est un cube.

11.
1) Déterminer les images des sommets du cube par la réflexion S_1 de pan (ABH) notée.
2) Déterminer les images des sommets du cube par la réflexion S_2 de pan (EDF) notée.
3) Justifier que S_1oS_2 est un demi-tour que l'on caractérisera.

12.
S_1 est la réflexion de plan (ABE) ;
S_2 est la réflexion de plan (BFC)
S_3 est la réflexion de plan (HDC) ;
S_4 est la réflexion de plan (ADE).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées S_2oS_1 et S_4oS_3

13.
En écrivant chacun des demi-tours $S_{(AD)}$, $S_{(Dc)}$ et $S_{(DH)}$ comme composée de réflexions par rapport à des plans bien choisis.
Démontrer que : $S_{(AD)}oS_{(DC)} = S_{(DC)}oS_{(AD)} = S_{(\ldots)}$

14.
S est la réflexion de plan (ADH) et S' le demi-tour d'axe (AB).
Déterminer $S'oS$.

15.
S est la réflexion de plan (ADH) et S' le demi-tour d'axe (AB).
Déterminer $S'oS$.

16.
S est la réflexion d'axe de plan (ABC) et S' est la réflexion de plan (EFG).
Déterminer la nature e la composée $S'oS$.

17.
O_1 désigne le centre de la face $ADHE$, O_2 le centre de la face BCGF. N désigne le point de $[HF]$ et P le point de $[AC]$ tels que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HF}$. Soit d le demi-tour d'axe (O_1O_2).

1) Déterminer les images par d des points A, C et P.
2) I étant le milieu de $[NP]$, montrer que $\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{O_1I}$ puis que $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$
3) En déduire que $\overrightarrow{O_1I} = k\overrightarrow{O_1O_2}$, $k \in [0;1]$.
4) Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0;1]$?

18.
1) Déterminer la nature de chacune des composées $S_{(ADH)}oS_{(ABF)}$ et $S_{(ABF)}oS_{(BCG)}$.
2) En déduire que la composée de $S_{(AE)}oS_{(\ldots)}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

19.
Combien existe-il de demi-tour échangeant deux points ?

20.

On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB=AC$ et $DB=DC$.

1) Tracer la section de ce tétraèdre par le plan de la réflexion S qui échange B en C.

2) Soit I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[CD]$. Expliquer le tracé de l'image de (IJ) par S.

21.

1) Montrer que dans une réflexion, une droite et son image sont coplanaires.

2) Quelles sont les droites globalement invariantes par une réflexion ?

22.

On considère un plan (P) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et unitaire. S est l'application de l'espace qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-2\left(\overrightarrow{OM}\vec{n}\right)\vec{n}$. Justifier que S est une réflexion de plan (P).

23.

ABCD est un tétraèdre régulier. On désigne par J,K,L,M et N les milieux respectifs des segments $[AD],[DC],[CB],[BA],[AC]et[BD]$.

1) Réaliser la figure.

2) On pose $AB=1$.

a) Démontrer que $IJ=KJ=LI=KL=\frac{1}{2}$.

b) Démontrer que (AC) est orthogonale à (BD) et en déduire que $IJKL$ est un carré.

3) Démontrer que (MN) est orthogonale au plan (IJK).

4) Soit $(D_1)et(D_2)$ les demi-tours d'axes $(IK)et(JL)$, S la réflexion de plan (IJK).

a) Déterminer les réflexions S_1 et S_2 telles que $SoS_1=S_{(D_1)}$ et $S_2oS=S_{(D_2)}$.

b) En déduire que $S_{(D)}=S_{(D_2)}oS_{(D_1)}$ est un demi-tour que l'on caractérisera.

24.

On considère un tétraèdre $ABCD$ tels que les faces $ABC et ABD$ soient des triangles équilatéraux. On désigne par J le milieu du segment $[AB]$.

1) Démontrer que (AB) est perpendiculaire au plan (JCD).

2) On désigne par S_1 la réflexion de plan (JCD). Déterminer les images des sommets du tétraèdre par S_1 .Que représente (JCD) pour S_1.

3) S_2 désigne la réflexion de plan (ABC).

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S_2oS_1.

HOMOTHÉTIES ET TRANSLATIONS

25.

Soit trois points $A,B et C$ de l'espace ε.

Identifier la transformation qui à tout point M associe le point M' dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

2) $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

26.

$ABCDEFGH$ est un cube. I désigne le milieu du segment $[AG]$.

Représenter l'image du cube par :

- la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$;
- l'homothétie de centre A qui transforme $G en I$;
- l'homothétie de centre A qui transforme $I en G$.

27.

Le point M décrit la face $ADHE$ d'un cube .

Représenter dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M' vérifiant:

1) $MAFM'$ est un parallélogramme;

2) $MAM'G$ est un parallélogramme;

3) M' est le milieu du segment $[GM]$.

28.

On considère un tétraèdre $ABCD$ et les milieux I,J,K des arêtes $[AB],[AC]et[AD]$.

Exprimer l'aire du triangle IJK en fonction de

celle de BCD.

29.

Établir les propriétés suivantes. Dans l'espace par une homothétie ou une translation ,

(1) l'image d'une droite est une droite parallèle à la droite initiale ;

(2) l'image d'un plan est un plan parallèle au plan initial ;

(3) l'image d'une sphère est une sphère.

30.

$ABCD$ est un tétraèdre P, Q, R et S sont les points définis par

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

1) Démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

2) Démontrer que les centres de gravité des faces du tétraèdre $ABCD$ sont les sommets d'un tétraèdre homothétique au premier.

N.B : On pourra s'aider du l'isobarycentre O des sommets A, B, C et D.

31.

$ABCD$ est un tétraèdre.

1) Construire l'image $A_1B_1C_1D_1$ de $ABCD$ par l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

2) Construire l'image $A_2B_2C_2D_2$ de $ABCD$ par l'homothétie h' de centre B et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3) Quelle est la nature de hoh' ?

32.

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré. est l'homothétie de centre S et de rapport 2; l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Pour tout point M , on pose $h(M) = M_1, h'(M_1) = M_2$.

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_2}$ est un vecteur constant (indépendant de

2) Construire l'image de $SABCD$ par $h'oh$.

33.

$ABCA'B'C'$ est un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral de centre O.

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. h est l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Déterminer la nature et les caractéristiques de toh et hot et construire l'image du prisme par $t \circ h$ et par $h \circ t$.

N.B : on construira les centres de toh et de

Dans les exercices 38 à 44, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

34.

On considère les points $A(-2;0;1)$, $B(0;1;2)$ et $C(0;2;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du point image de C par la translation de vecteur

2) Déterminer les coordonnées du point E de C par la symétrie de centre A.

3) Déterminer les coordonnées du F image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -2.

35.

On considère les points $A(1;0;1)$, $B(0;-1;1)$, $C(1;-1;0)$ et $D(0,0,1)$.

1) Démontrer que A,B et C déterminent un plan et donner une équation de ce plan.

2) Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre. Calculer son volume.

3) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme D en J milieu de $[AD]$.

4) Déterminer les images A', B', C' et D' des A, B, C, D sommets du tétraèdre $ABCD$ par h.

5) Comparer le volume du tétraèdre $ABCD$ à celui de son image $A'B'C'D'$ par h.

36.

On considère les points $A(1;1;1)$, $B(1;0;2)$, $A_1(-1;-2;1)$.

$(-1;-4;3), A_2(0;1;3)$ et $B_2\left(0;\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$.

1) Justifier l'existence d'une homothétie h_1 qui transforme A en A_1 et B en B_1.
2) Justifier l'existence d'une homothétie h_2 qui transforme A en A_2 et B en B_2.
3) Déterminer les expressions analytiques de h_1 et de h_2.
4) Déterminer les expressions analytiques de $h_1 o h_2$ et $h_2 o h_1$. Quelle est la nature de $h_1 o h_2$? de $h_2 o h_1$?

38.

(P_2) sont deux plans
quations respectives
$-2y+4z-9=0$ et $x-2y+4z-9=0$.
1) Vérifier que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P_1) et (P_2).
3) Soit t la translation de vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ..
Déterminer les images $(P'_1),(P'_2)$ et (D') de $(P_1),(P_2)$ et (D) par t.
4) Justifier (P'_1) et (P'_2) sont perpendiculaires et que (D') est leur représentation paramétrique.

39.

considère les points
$(10;5;-10)$, $B(-1;-15;17)$,
$(2;20;21)$ et $D(-10,5,)$
1) Déterminer l'ensemble (E) des points de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MB}=0$.
2) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tel que.

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\wedge\overrightarrow{MD}=0$.

3) Étudier $(E)\cap(F)$.
4) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.
a) Déterminer $(E')=h(E)$; $(F')=h(F)$
b) Étudier $(E')\cap(F')$.

39.

On considère les points
$A(6;0;0)$, $B(0;6;)$ et $C(0;0;6)$.
G est le barycentre du système $(O;1),(A;2)$ et $(B;3)$.
(S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}=0$.
h est l'application de l'espace qui à tout point M associe le point M' telle que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).
3) Déterminer l'image (S') de (S) par h.
4) Soit (P) le plan d'équation $3x+4y+\frac{17}{2}=0$. Etudier $(P)\cap(S)$.
5) Déterminer l'image (P') de (P) par h et étudier $(P')\cap(S')$.

40.

(P) est le plan d'équation $x-y+z=1$.
(D) est la droite passant par O et orthogonale au plan (P).

1) Déterminer les expressions analytiques de la réflexion $S_{(P)}$ d'axe (P) et du demi-tour $S_{(D)}$ d'axe (D).
2) Déterminer l'écriture analytique de $S_{(D)} o S_{(P)}$.
3) Démontrer $S_d o S_p$ que est une symétrie centrale que l'on caractérisera.
4) Déterminer les images de (D) et (P) par $S_{(D)} o S_{(P)}$.

Chapitre 16

CONIQUES

LEÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

1.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE
1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL D'UNE CONIQUE
1.3 AXES DE SYMÉTRIE D'UNE CONIQUE
1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE
1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT. RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE
1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR DE SA DÉFINITION MONOFOCALE

LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE
2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE
2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE
3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE
3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS
3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE
3.5 DÉFINITION BIFOCALE D'UNE CONIQUE À CENTRE

S'ENTRAÎNER

Chapitre 16

CONIQUES

LEÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

1.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE
1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL D'UNE CONIQUE
1.3 AXES DE SYMÉTRIE D'UNE CONIQUE
1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE
1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT
RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE
1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR DE SA DÉFINITION MONOFOCALE

LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE
2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE
2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE
3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE
3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS
3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE
3.5 DÉFINITION BIFOCALE D'UNE CONIQUE À CENTRE

S'ENTRAÎNER

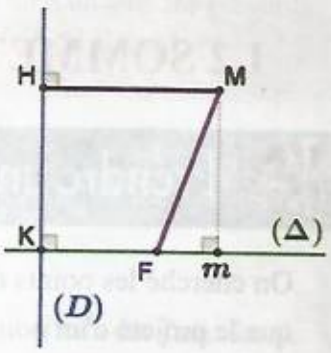
LEÇON 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES CONIQUES

- Connaître la nature de l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MF = ed(M,(D))$ où F est un point, e un réel strictement positif et (D) une droite ne contenant pas F.
- Déterminer quelques axes de symétrie de Γ, ainsi que ses points d'intersection avec ces axes de symétrie.
- Connaître l'effet d'une similitude sur Γ
- Avoir une idée de la forme des différentes coniques par une représentation point par point
- Caractériser de manière métrique une région du plan limitée par une conique.
- Donner une équation cartésienne d'une conique à partir de sa définition monofocale.

I.1 DÉFINITION MONOFOCALE D'UNE CONIQUE

Prendre un bon départ

On donne un point F, une droite (D) ne passant pas par F et un réel strictement positif e.



Soit point M du plan, on associe son projeté orthogonal H sur (D).

On se propose d'étudier

L'ensemble (Γ) formé des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$.

1. Un point de (Γ) peut-il appartenir à (D) ?

Soit (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à (D), m le projeté orthogonal de M sur (Δ).

2. a. Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{mK} = e$.

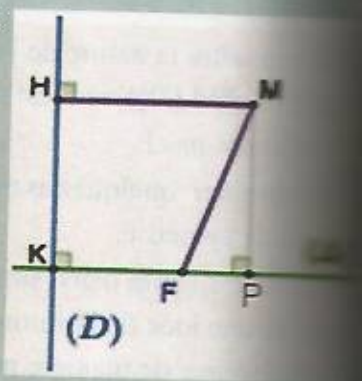
b. Montrer que $MF^2 = Mm^2 + mF^2$ (on pourra poser $MF^2 = (\overrightarrow{Mm} + \overrightarrow{mF})^2$ et remarquer que $\overrightarrow{Mm} \perp \overrightarrow{mF}$.

c. En déduire que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Mm^2 = e^2 mK^2 - mF^2 = (e\overrightarrow{mK} + \overrightarrow{mF}) \cdot (e\overrightarrow{mK} - \overrightarrow{mF})$.

On suppose e ≠ 1, soit $A = bar\{(F;1) ; (K;e)\}$ et $A' = bar\{(F;1) ; (K;-e)\}$. Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Mm^2 = (e^2 - 1)\overrightarrow{mA} \cdot \overrightarrow{mA'}$

Retenir

Soit (D) une droite, F un point du plan n'appartenant pas à (D) ; soit e un réel strictement positif.



1) L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite (D), est appelé conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

a) Si $e < 1$, (Γ) est une ellipse.

b) Si $e = 1$, (Γ) est une parabole.

c) Si $e > 1$, (Γ) est une hyperbole.

2) La droite (Δ) passant par le foyer F et perpendiculaire à la directrice (D) est appelée axe focal de la conique (Γ) .

3) Si P désigne le projeté orthogonal de M sur l'axe focal, alors (Γ) est encore l'ensemble des points M du plan tels que $MP^2 = (e^2 - 1)\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'}$ où A et A' sont les points définis par $A = bar\{(F;1);(K;e)\}$ et $A' = bar\{(F;1);(K;-e)\}$.

1.2 SOMMETS SITUÉS SUR L'AXE FOCAL

Prendre un bon départ

On cherche les points du plan qui sont à la fois sur la conique (Γ) et sur l'axe focal (Δ). On sait que le projeté d'un point M de $(\Delta) \cap (\Gamma)$ sur (D) est le point K.
Dans cette situation particulière, les points M, F et K sont alignés,

Activité

$M \in (\Gamma) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \frac{MF}{MK} = e$ car le projeté de M sur (D) est K.

$\Leftrightarrow MF = eMK.$

1) Pour e = 1, montrer que K est indépendant du point M et que M est le milieu de [FK].

2) On suppose maintenant que $e \neq 1$.

a. Montrer que $(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}) = 0$

b. Expliquer pourquoi $M \in (\Gamma) \cap (\Delta) \Leftrightarrow M = bar\{(F;1);(K;-e)\}$ ou $M = bar\{(F;1);(K;$

c) En déduire que dans ce cas (Γ) et (Δ) ont deux points d'intersection.

On note $A = bar\{(F;1);(K;e)\}$ et $A' = bar\{(F;1);(K;-e)\}$. Justifier que A ∈ [FK].

d) Justifier que si $e < 1$ alors A et A' sont dans le même demi plan de frontière (D) ; et que si $e > 1$ alors A et A' sont situés de part et d'autre de (D).

Retenir

Soit (Γ) une conique d'excentricité e.

1) Si $e = 1$ alors un seul point de (Γ) est situé sur l'axe focal (Δ). On le notera S dans la suite. $S = milieu\ [FK]$.

2) Si $e \neq 1$ (cas d'une ellipse et d'une hyperbole) alors deux points de (Γ) sont situés sur l'axe focal (Δ) ; le point $A = bar\{(F,1);(K;e)\}$ et le point $A' = bar\{(F,1);(K;-e)\}$.

3) Les points d'intersection de la conique avec l'axe focal sont appelés les sommets de la conique situés sur l'axe focal.

Exemple

(d) est une droite du plan et F un point n'appartenant pas à (d). Dans chacun des cas suivants construire l'axe focal et les sommets de la conique (Γ) de directrice (d), de foyer F et d'excentricité e.

1ère cas : $e = 1$.

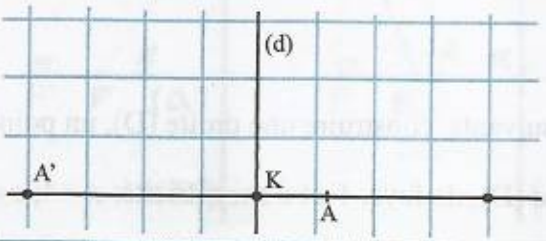
$e = 1$ donc (Γ) est une parabole. (Γ) a un seul sommet qui est le milieu de [FK] où K désigne le projeté orthogonal de F sur (D).

2ème cas : $e = 2$.

$e = 2$ donc (Γ) est une hyperbole. (Γ) a deux sommets A et A' qui sont situés sur l'axe focal. Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).

Alors : $A = bar\{(F;1);(K;2)\}$ d'où $\overrightarrow{FA} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{FK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FK}$.

$A' = bar\{(F;1);(K;-2)\}$ d'où $\overrightarrow{FA'} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{FK}$.



3ème cas : $e = 0,5$.

$A = bar\{(F;1);(K;0,5)\}$ d'où $\overrightarrow{FA} = \frac{0,5}{1+0,5}\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FK}$.

$A' = bar\{(F;1);(K;-0,5)\}$ d'où $\overrightarrow{FA'} = \frac{-0,5}{1-0,5}\overrightarrow{FK} = -\overrightarrow{FK}$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne la droite (d) : $x = -2$ et le point F(4;0).
Soit (Γ) la conique de foyer F de directrice (d) et d'excentricité 2.
Déterminer par leurs coordonnées les sommets A et A' de (Γ) situés sur l'axe focal.
Soit S le milieu de [AA']. Déterminer les coordonnées de A, A' et F dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$.

$e = 2 > 1$, (Γ) est donc une hyperbole. Le pojeté orthogonal de F sur (d) est K(−2;2).

$A = bar\{(F;1);(K;2)\}$ d'où $x_A = \frac{1(1)+2(-2)}{1+2} = -1$; $y_A = \frac{1(2)+2(2)}{1+2} = 2$;

alors A(−1;2). $A' = bar\{(F;1);(K;-2)\}$ d'où $x_{A'} = \frac{1(1)-2(-2)}{1-2} = -5$; $y_{A'} = \frac{1(2)-2(2)}{1-2} = 2$ alors A'(−5;2). Le milieu S de [AA'] a donc pour coordonnées S(−3,2); soit M un point du plan, la relation vectorielle $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}$ permet d'exprimer les coordonnées (X;Y) du point M dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$ en fonction des coordonnées $(x;y)$ de M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On a : $\begin{cases} X = x+3 \\ Y = y-2 \end{cases}$.

Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$ on a donc : A(2;0); A'(−2;0); F(4;0).
Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$ la droite (d) a pour équation X=1.

Remarque

- Dans le cas d'une ellipse, les sommets situés sur l'axe focal sont dans le même demi-plan de frontière la directrice.
- Dans le cas de l'hyperbole, les sommets situés sur l'axe focal sont situés de part et d'autre de la directrice.
- Soit M$(x;y)$ et S$(\alpha;\beta)$ deux points du plan dont les coordonnées sont exprimées dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $(X;Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$

on a : $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$.

S'exercer

1.a Dans chacun des cas suivants, construire une droite (D), un point de F ∉ (D) et les sommets de la conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité: $e = 4$; $e = \frac{3}{4}$; $e = 5$; $e = 1$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;i,j)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer par leurs coordonnées les sommets de la conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e.

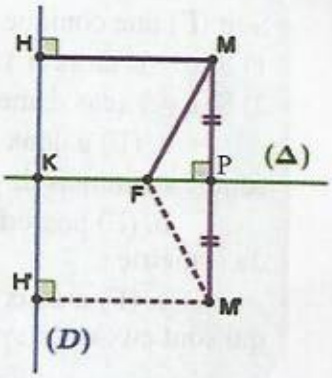
(D) : $y=-3$; F$(-2;3)$; $e=1$.

(D) : $x=2$; F$(0;3)$; $e=0,5$.

(D) : $y=4$; F$(-2;-3)$; $e=3$.

1.3 AXES DE SYMÉTRIE

Prendre un bon départ



Activité 1

(Γ) est la conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité e.

Soit (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F et K le point d'intersection de (Δ) et de (D). soit M un point du plan. Montrer que si M appartient à (Γ) alors son symétrique M' par rapport à (Δ) appartiendra aussi à (Γ). Que représente la droite (Δ) pour (Γ) ?

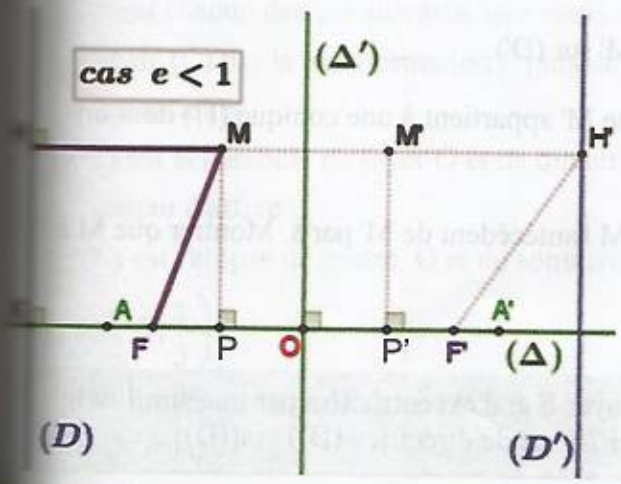
Activité 2

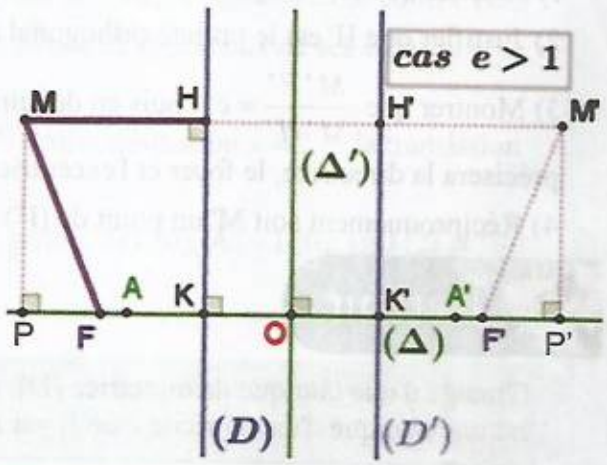
On suppose dans cette question que $e \neq 1$. Nous avons vu dans le paragraphe 1.2 que (Γ) et (Δ) ont deux points communs A et A' qui sont barycentres des points F et K. On sait aussi qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si $MP^2 = (e^2-1)\overrightarrow{pA}\cdot\overrightarrow{pA'}$.

Soit (Δ') la médiatrice de [AA'].

1) Soit M ∈ (Γ); montrer que le symétrique M' de M par rapport à (Δ') appartient à (Γ).

On distinguera deux cas : e < 1 et e > 1. On cherchera à montrer que $M'P^2 = (e^2-1)\overrightarrow{P'A}\cdot\overrightarrow{P'A'}$ en utilisant les propriétés de conservation de la réflexion d'axe (Δ').





2) Soit O le point d'intersection de (Δ) et (Δ') : justifier que $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = S_0$ puis en déduire que O est un centre de symétrie de (Γ).

3) Soient (D') et F' respectivement les symétriques de (D) et F par rapport à (Δ').

Montrer que $\frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow \frac{M'F'}{M'H'} = e$; puis en déduire (Γ) est encore la conique de directrice (D') de foyer F' et d'excentricité e.

Retenir

Soit (Γ) une conique d'excentricité e.

1) Si $e = 1$ alors (Γ) a un seul axe de symétrie : l'axe focal (Δ).

2) Si $e \neq 1$ (cas d'une ellipse et d'une hyperbole) alors :

a. (Γ) a deux axes de symétrie : l'axe focal (Δ) et la médiatrice de $[AA']$ où A et A' sont les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

b. (Γ) possède un centre de symétrie O qui est le point d'intersection des deux axes de symétrie.

c. (Γ) a deux foyers F et F' qui sont symétriques par rapport à O et deux directrices qui sont eux aussi symétriques par rapport à O.

1.4 EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR UNE CONIQUE

Prendre un bon départ

Soit (Γ) une conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e. Soit s une similitude de rapport k. Soit M un point du plan, H son projeté orthogonal sur (D). soient (D'), F', M' et H' les images respectifs de (D), F, M et H par la similitude s.

1) Justifier que $H' \in (D')$.

2) Justifier que H' est le projeté orthogonal de M' sur (D').

3) Montrer que $\frac{M'F'}{M'H'} = e$, puis en déduire que M' appartient à une conique (Γ') dont on précisera la directrice, le foyer et l'excentricité.

4) Réciproquement soit M' un point de (Γ') et M l'antécédent de M' par s. Montrer que $M \in (\Gamma)$

Retenir

L'image d'une conique de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e par une similitude s est une conique d'excentricité e de foyer $F' = s(F)$ et de directrice $(D') = s[(D)]$.

Exemple

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $y=0$ et F(0 ;1).

Montrer qu'une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice (D) est : $x^2-2y+1=0$.

Soit (Γ) la courbe dont une équation cartésienne est $y^2+2x+1=0$, soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(\mathcal{P})=\Gamma$ puis en déduire la nature de Γ.

Soit M$(x;y)$ un point du plan et H$(x;0)$ son projeté orthogonal sur la droite (D).

$M\in(\mathcal{P})\Leftrightarrow MF=MH$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2y+1=0$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $x^2-2y+1=0$.

Soit M'$(x';y')$ l'image du point M par la rotation r. On a : $x'+iy'=i(x+iy)$. Par conséquent $x'=-y'$ et $y'=x$.

$M\in(p)\Leftrightarrow x^2-2y+1=0$

$\Leftrightarrow y'^2-2(-x')+1=0$

$\Leftrightarrow y'^2-2x'+1=0$

$\Leftrightarrow M'\in(\Gamma)$

On a donc $r(\mathcal{P})=\Gamma$. Comme $\mathcal{P}$ est une parabole, son image (Γ) est aussi une parabole. (Γ) a pour foyer $F'=r(F)$ et pour directrice $(D')=r(D)$; alors F$(-1;0)$ et (D') pour équation $x=0$.

S'exercer

Dans chacun des cas suivants, une courbe (C) est donnée, et déterminer la courbe (C'), image de (C) par la transformation f puis donner sa nature et certains de ses éléments caractéristiques.

1) (C) est la parabole de foyer O et de directrice la droite d'équation $x=2$. f la translation de vecteur d'affixe $2i$.

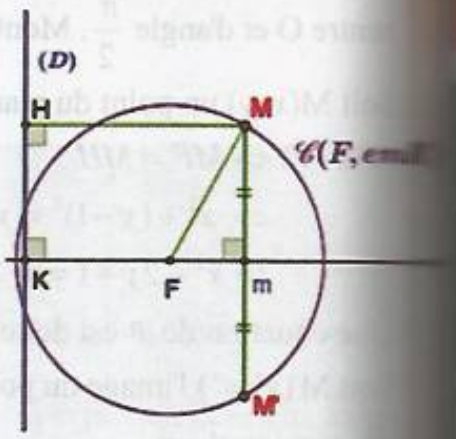
2) (C) est l'ellipse de centre O et de sommets les points A(1 ;0), A'$(-1;0)$, B(0 ;2) et B$(0;-2)$; $f=r\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$.

3) (C) est l'hyperbole de foyer F(1 ;2), de directrice l'axe des ordonnées et d'excentricité 2 ; $f=h(O;-3)$.

1.5 CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE POINT PAR POINT ; RÉGIONNEMENT DU PLAN PAR UNE CONIQUE

Prendre un bon départ

Activité 1



Soit (Γ) une conique de foyer F de directrice (D) et d'excentricité e.

Soit M un point du plan, H et m les projetés orthogonaux de M respectivement sur la directrice (D) et sur l'axe focal.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre F et de rayon emK.

1) Montrer que $M \in (\Gamma) \Rightarrow M \in \mathscr{C}$.

2) En déduire que tout point de (Γ) est l'intersection d'une perpendiculaire à l'axe focal et d'un cercle de centre F dont on précisera le rayon.

3) a. Pour chaque valeur de $e \in \left\{1; \frac{1}{2}; 2\right\}$, construire suivant ce procédé 4 points de (Γ).

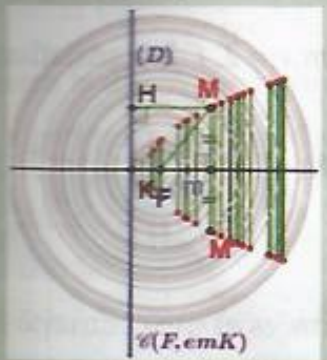
b. Placer un point M tel que $MF < eMH$ et un point N tel que $MF > eMH$.

Retenir

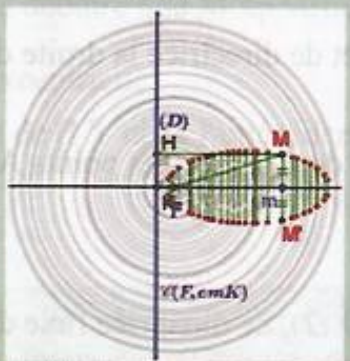
Pour construire une conique (Γ) de directrice (D), de foyer F et d'excentricité e, on peut procéder de la manière suivante :

- On construit la directrice (D), le foyer F et l'axe focal (FK) où K est le projeté orthogonal de F sur (D).
- On choisit un point m sur l'axe focal et on construit le cercle de centre F et de rayon emK.
- Les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe focal passant par m appartiennent à (Γ).

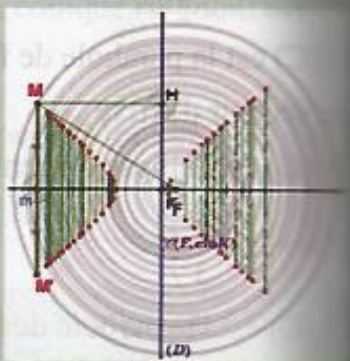
$e = 1$



$e < 1$



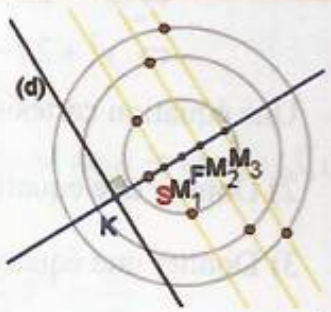
$e > 1$



Exemple

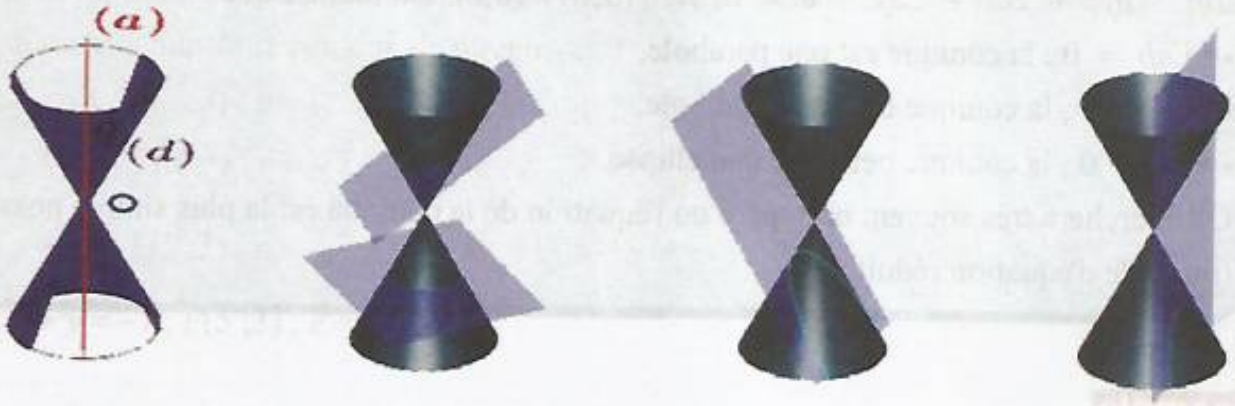
Soit (d) une droite et F un point n'appartenant pas à (d). Construisons six points de la parabole de directrice (d) et de foyer F.

Un point particulier est le sommet S de la parabole qui est le milieu de [FK] où K est le projeté orthogonal de F sur (d).
Pour obtenir les autres points, on choisira 3 points M_1, M_2 et M_3 sur l'axe focal et on construira les cercles de centre F et de rayons respectifs MK. Les perpendiculaires à l'axe focal menées à partir des points M, nous donneront six autres points de la parabole.



Remarque

Soient (a) et (d) deux droites dans l'espace, sécantes en O et formant un angle aigu θ. En faisant tourner (d) autour de (a) (en gardant toujours le même angle θ) on obtient une surface dans l'espace appelée double cône infini d'axe (a) et de génératrice (d).(voir figure).
En coupant ce double cône avec un plan, on obtient (suivant la position du plan par rapport à la droite (a) soit un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.



S'exercer

1.d (D) est une droite du plan, F un point n'appartenant pas à (D). Dans chacun des cas suivants construire 8 points de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

1) $e=\frac{1}{2}$; b) $e=2$; c) $e=1$; d) $e=\sqrt{2}$.

1.6 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE CONIQUE À PARTIR DE SA DÉFINITION MONOFOCALE

Prendre un bon départ

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On donne le point F(1 ;2) et la droite (d) d'équation $x = 2$.

1) Donnons une équation cartésienne de la parabole (Γ) de foyer F et de directrice (d).Soit M(x,y) un point du plan. H(2 ;y) son projeté orthogonal sur (d).

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF^2 = MH^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

Une équation cartésienne de (Γ) est donc $y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

2) Donner une équation de l'ellipse de foyer F de direction (d) et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

3) Donner une équation de l'hyperbole de foyer F de direction (d) et d'excentricité 2.

Retenir

Dans tout repère orthonormé du plan l'équation d'une conique admet est de la forme :
$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$. avec $(a,b) \neq (0;0)$. On montre que :

- Si $ab = 0$, la conique est une parabole.
- Si $ab < 0$, la conique est une hyperbole.
- Si $ab > 0$, la conique peut être une ellipse.

On cherchera très souvent un repère où l'équation de la conique est la plus simple possible (on parle d'équation réduite).

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point F(−1 ;3) et la droite (d) d'équation $y = -2$. Écrivons une équation de l' ellipse (Γ) de foyer F de directrice (d) et d'excentricité $e = 0,5$.

Soit M(x, y) un point du plan. H(x ;−2) son projeté orthogonal sur (d).

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF^2 = \frac{1}{4} MH^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 4)$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 7y + 9 = 0$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 7y + 9 = 0$ (en rouge le début de carrés parfait).

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{28}{3}y\right) + 9 = 0$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + \frac{3}{4}\left[\left(y-\frac{14}{3}\right)^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2\right] + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \frac{3}{4}\left(y-\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

Posons ensuite $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y - \frac{14}{3} \end{cases}$; (X;Y) représente le couple de cordonnées de M dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ avec $S\left(-1;\frac{14}{3}\right)$ dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$. L'équation de (Γ) est donc : $X^2 + \frac{3}{4}Y^2 = \frac{25}{3}$.

S'exercer

1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la conique de directrice (d), de foyer F et d'excentricité e.

a) (d) : $x = -1$; F(5 ;3) ; $e = 1$.

b) (d) : $y = -1$; F(5 ;3) ; $e = \sqrt{2}$.

c) (d) : $x = -1$; F(5 ;3) ; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) (d) : $x + y = -1$; F(5 ;3) ; $e = 1$.

2 Reprendre l'exercice précédent et donner dans un repère bien choisi une équation simple de la conique.

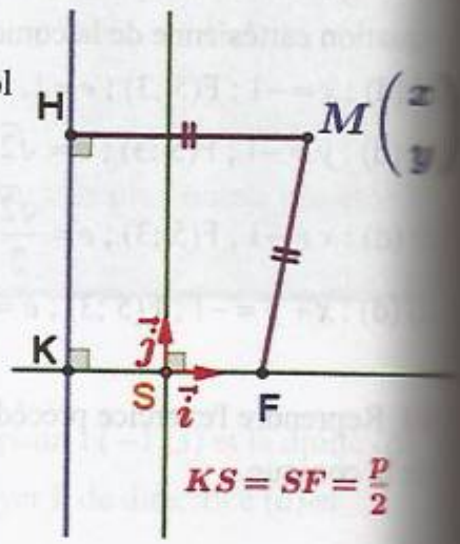
LEÇON 2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES PARABOLES

- Reconnaître une équation d'une parabole ;
- Déterminer les éléments géométriques d'une parabole
- Construire une parabole
- Écrire une équation de la tangente à une parabole en un de ses points
- Écrire une équation paramétrique d'une parabole

2.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE

Prendre un bon départ

Soit (Γ) une parabole de directrice (D) et de foyer F.
soit $p = FK$ et S le milieu de [FK] (c'est le sommet de la parabol
Soit $(S;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{KF} = p\vec{i}$
(par exemple $\vec{i} = \frac{SF}{\|\overrightarrow{SF}\|}$). Soit M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de la parabole
et H son projeté orthogonal sur l'axe focal.



1) Déterminer les coordonnées des points K, F et H dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$.

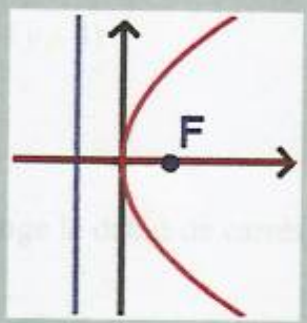
2) Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = 2px$.

3) Montrer que dans le repère $(S;\vec{j};\vec{i})$, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p}$.

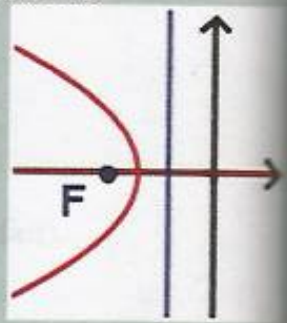
Retenir

1) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (Γ) d'équation $y^2 = 2px$ est une parabole de paramètre $|p|$, de sommet O, de foyer $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ et de direction (D) : $x = -\frac{p}{2}$.

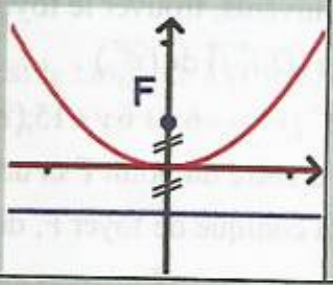
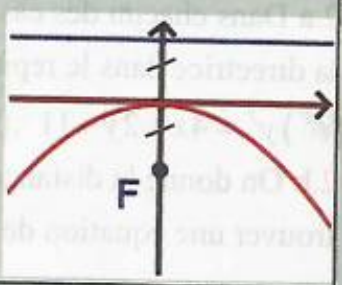
Si p > 0 la parabole a une concavité tournée vers les $x > 0$



Si p < 0 la parabole a une concavité tournée vers les $x < 0$



2) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (Γ) d'équation $x^2 = 2py$ est une parabole de paramètre $|p|$ de sommet O, et de foyer $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ et de direction $(D) : y = -\frac{p}{2}$.

Si $p > 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $y > 0$	Si $p < 0$ la parabole a une concavité tournée vers les $y < 0$
	

Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 = 2x$.

(Γ) est une parabole de paramètre $p = 1$; de foyer $F\left(\frac{1}{2};0\right)$; de sommet O et de directrice $x = -\frac{1}{2}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 = -x$

$y^2 = -x \Leftrightarrow y^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)x$. (Γ) est donc la parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$; de foyers $F\left(-\frac{1}{4};0\right)$; de directrice (d) : $x = \frac{1}{4}$ de sommet O.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $x^2 = 3y$

$x^2 = 3y \Leftrightarrow x^2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)y$; (Γ) est la parabole de paramètre $p = \frac{3}{2}$; de foyers $F\left(0;\frac{3}{4}\right)$; de sommet O et de directrice $y = -\frac{3}{4}$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation : $y^2 + 2y - x - 3 = 0$.

$y^2 + 2y - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 1 - x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x+4)$

Posons $\begin{cases} X = x+4 \\ Y = y+1 \end{cases}$, soit S$(-4;-1)$; dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$ une équation de (Γ) est donc :

$Y^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)X$. Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, (Γ) est la parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$; de foyer $F\left(\frac{1}{4};0\right)$; de sommet S, de directrice (d) : $X = -\frac{1}{4}$.

S'exercer

2.a Dans chacun des cas suivants, trouver le foyer, le paramètre, le sommet et une équation de la directrice dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de $(\mathscr{C})$.

$(\mathscr{C})\ y^2 = 4x + 2y + 11$; $(\mathscr{C})\ y^2 = -6x + 6y + 15$; $(\mathscr{C})\ x^2 + 4x + 13 = 0$; $(\mathscr{C})\ -x^2 - 3x + 2y - 5 = 0$

2.b On donne la distance d entre un point F et une droite (D), et un réel e. Choisir un repère et trouver une équation de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e dans ce repère.

a) $d = 4$; $e = 1$; b) $d = 9$; $e = \frac{4}{5}$; c) $d = 9$; $e = \frac{5}{4}$.

2.2 TANGENTE EN UN POINT À UNE PARABOLE

Prendre un bon départ

Activité 1

On considère (Γ) une parabole de directrice (D), de foyer F et de paramètre p; $(S;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé dans lequel une équation réduite de (Γ) est $y^2 = 2px$ et la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2px}$, C_f sa représentation graphique dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$. Soit C'_f le symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

1) Montrer que $(\Gamma) = C_f \cup C'_f$.

2) Soit $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C_f. On suppose $x_0 \neq 0$. Montrer que f est dérivable en x_0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 s'écrit : $yy_0 = p(x + x_0)$.

3) Montrer que f n'est pas dérivable en 0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 peut s' écrire encore $y \times 0 = p(x + 0)$.

En déduire qu'en tout point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la parabole, une équation de la tangente est :

$yy_0 = p(x + x_0)$.

Activité 2

Soit (Γ) une parabole de directrice (D), de foyer F et M_0 un point de (Γ), H_0 son projeté orthogonal sur (D).

1) Justifier que $M_0H_0 = M_0F$ puis en déduire que M_0 appartient à la médiatrice (d) de $[FH_0]$.

2) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de (d) et I le milieu de $[FH_0]$.

c) Montrer que I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_0}{2} \end{pmatrix}$.

d) Montrer que $M \in (d) \Leftrightarrow yy_0 = p(x+x_0)$.

e) En déduire que la médiatrice de $[FH_0]$ est la tangente à (Γ) en M_0.

Retenir

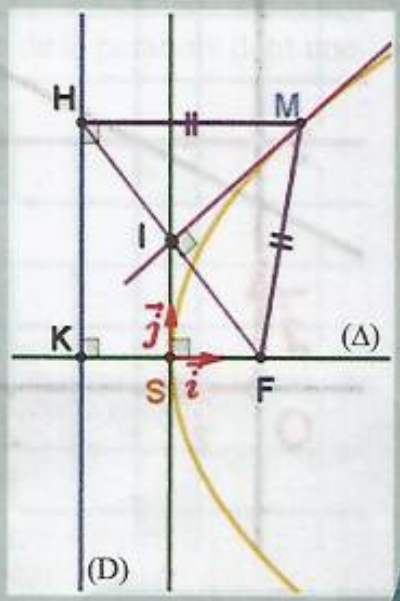
Tangente à une parabole

Soit (Γ) une parabole de directrice (D), de foyer F et de paramètre p $(S;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé dans lequel une équation réduite de (Γ) est $y^2 = 2px$. Une équation de la tangente au point $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de (Γ) est $yy_0 = p(x+x_0)$.

Construction d'une parabole point par point

Le résultat précédent fournit une méthode de construction de la parabole points par points et des tangentes, à partir de sa directrice (D) et de son foyer F.

1) On construit l'axe focal (Δ) et le point K.
2) On place le sommet S de la parabole, qui est le milieu de [FK].
3) On se donne ensuite un point H sur la directrice; (D) puis on Trace (en trait léger) la perpendiculaire à (D) passant par H (le point M de la parabole dont le projeté orthogonal est H est sur cette droite).
4) On Trace aussi (en trait léger) la médiatrice du segment [FH].
5) Le point M est l'intersection de ces deux droites, et de plus, la tangente en M à la parabole est la médiatrice qui a servi à construire M.



Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 - 4y - 2x + 10 = 0$.

Vérifier que le point M(5;4) est un point de (Γ).

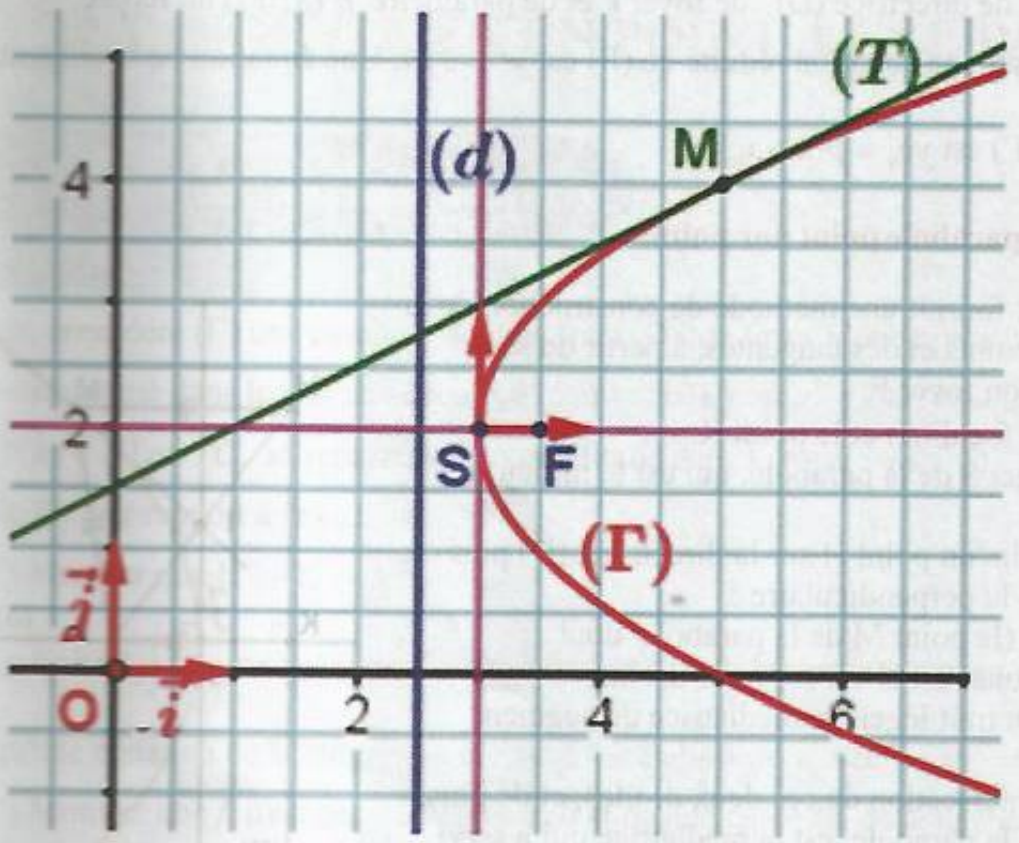
$4^2 - 4(4) - 2(5) + 10 = 0$. M(5;4) est donc un point de (Γ).

Vérifier que (Γ) est une parabole et construire (Γ) et la tangente à (Γ) en M.

$y^2 - 4y - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 2(x-3)$; posons ensuite $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y-2 \end{cases}$ et S(3;2).

Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, (Γ) a pour équation $Y^2 = 2X$; (Γ) est donc le parabole de sommet S de paramètre p =1, de directrice (d) : $X = -\frac{1}{2}$ et de foyer $F\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, M a pour coordonnées M(2;2). Une équation de la tangente (T) en M dans $(S;\vec{i};\vec{j})$ est donc : 2Y=1(X+2) qui s'écrit encore $Y=\frac{1}{2}X+1$. Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$: la directrice a pour équation $(d) : x-3 = -\frac{1}{2}$ soit $(d) : x = \frac{5}{2}$, le foyer a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2};2\right)$ et la tangente (T) en M pour équation $y-2 = \frac{1}{2}(x-3)+1$ soit $y = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.



S'exercer

2.c Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants une parabole $\mathcal{P}$ est donnée par une équation cartésienne. Déterminer son équation réduite et ses éléments caractéristiques; donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 puis tracer $\mathcal{P}$ et la tangente en M_0.

1) $y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$; $M_0(-1;1)$

2) $y = 3x^2 + x - 4$; $M_0(0;-4)$

3) $y^2 = 6x + 3$; $M_0(1;3)$

4) $\frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0$; $M_0(2;0)$

2.3 REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE

Prendre un bon départ

1) Soit (P) une parabole de paramètre p dont une équation cartésienne dans un repère est $y^2 = 2px$.

Soit t un réel. Montrer que le point $M\left(\frac{t^2}{2p}; t\right)$ appartient à (P).

3) Réciproquement, soit $M(x; y)$ un point de (P). Montrer qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$.

En déduire un système d'équation paramétriques de la parabole (P).

4) Montrer que le système $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une autre représentation paramétrique de (P).

5) Déterminer de la même manière une représentattion paramétrique de la parabole dont une équation cartésienne dans un repère est : $x^2 = 2py$.

Retenir

1) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ est

$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésinne $x^2 = 2py$ est

$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemple

1) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $y^2 = -3x$ est

$\begin{cases} x = -3t^2 \\ y = -3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Une représentation paramétrique de la parabole d'équation cartésienne $x^2 = \frac{3}{2}y$ est

$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2t^2}{3} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Une représentation d'une parabole dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$\begin{cases} x = -2t^2 \\ y = -2t \end{cases}$, t $\in \mathbb{R}$; déterminer une équation réduite de cette parabole et ses éléments caractéristiques. $\begin{cases} x = -2t^2 \\ y = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\left(-\frac{1}{2}y\right)^2 \\ t = -\frac{1}{2}y \end{cases}$. Une équation réduite de cette parabole donc : $y^2 = -2x$.

C'est la parabole est de sommet O, de paramètre $p = 1$, de foyer $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de directrice (d): $x = \frac{1}{2}$

S'exercer

2.c Donner dans chacun des cas suivants une équation paramétrique de la parabole dont une équation réduite est donnée par :

1) $x^2 = 5y$; 2) $x^2 = -7y$; 3) $y^2 = 5x$; 4) $2y^2 = -3x$

2.d Donner dans chacun des cas suivants une représentation paramétrique de la parabole dont une équation réduite est donnée par :

1) $\begin{cases} x = 7t^2 \\ y = 7t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{5} \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;

3) $\begin{cases} y = -4t^2 \\ x = -4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;

1) $\begin{cases} y = -\frac{2}{5}t^2 \\ x = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

LEÇON 3 ÉTUDE ANALYTIQUE DES ELLIPSES ET DES HYPERBOLES

- Reconnaître une équation d'une ellipse ou d'une hyperbole.
- Déterminer les éléments géométriques et numériques d'une conique à centre.
- Construire une ellipse et une hyperbole.
- Écrire une équation de la tangente à une parabole en un des points d'une ellipse et d'une hyperbole.
- Écrire une représentation paramétrique d'une hyperbole et d'une ellipse.
- Reconnaître la nature et les éléments de l'ensemble des points M tels que MF − MF' = k ou MF + MF' = k où F,F' et k sont donnés.

3.1 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE HYPERBOLE OU D'UNE ELLIPSE

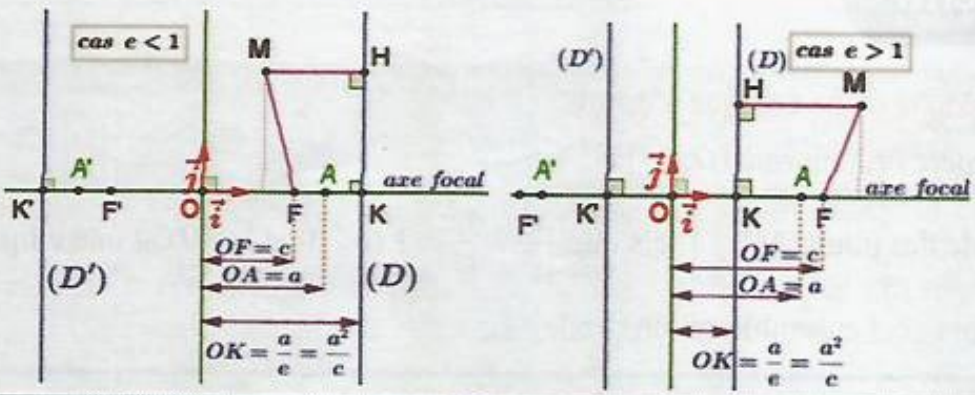
Prendre un bon départ

On considère (Γ) une conique à centre de foyer F, d'excentricité e ($e \neq 1$), de directrice (D), les points A et A' les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal; O le milieu de[AA'], F' et (D) les symétriques respectifs de F et (D) par rapport à O. Nous avons observé dans le leçon 1 que F' était un autre foyer de (Γ) associé à la directrice (D').
Choisissons un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan tel que l'axe des abscisses soit l'axe focal orienté de O vers F, et l'axe des ordonnées soit parallèle à la directrice (D) passant par O.
Posons OF = c, OA = a; alors AA' = 2a et FF' = 2c.

D) $\begin{cases} A = bar\{(F;1);(K,e)\} \\ A' = bar\{(F;1);(K,-e)\} \end{cases}$ implique $\begin{cases} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0 \\ \overrightarrow{A'F} - e\overrightarrow{A'K} = 0 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'} \end{cases}$ et

alors $\begin{cases} 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} + e(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'}) = 2e\overrightarrow{OA} \\ 2e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} + e(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = 2\overrightarrow{OA} \end{cases}$ car O est le milieu de [AA'].

On en déduit que $\begin{cases} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} \end{cases}$ et donc $e = \dfrac{OF}{OA} = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{OA}{e} = \dfrac{a^2}{c}$.



2) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. On rappelle que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MH^2=(e^2-1)\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.

Montrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$.

3) Dans cette question on suppose que $e<1$; (Γ) est donc une ellipse.

a) Vérifier que $a>c$. On pose $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

b) Vérifier que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

c) Soit $f : x \mapsto f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ définie sur $[-a;a]$, C_f sa représentation graphique dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Montrer que (Γ) est la réunion de C_f et du symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

d) Construire (Γ) pour $a=3$ et $c=2$.

4) Dans cette question on suppose que $e>1$; (Γ) est donc une hyperbole et $c>a$, on pose $b=\sqrt{c^2-a^2}$

a) Vérifier que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

b) Soit $f : x \mapsto f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ définie sur $]-\infty;-a]\cup[a,+\infty[$, C_f sa représentation graphique dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Montrer que (Γ) est la réunion de C_f et du symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

c) $f(x)+\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}\right)$ et $f(x)-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)$. En déduire que les droites d'équations $y=-\frac{b}{a}x$ et $y=\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à C_f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$

d) Construire (Γ) pour $a=2$ et $c=3$.

Retenir

Équation réduite d'une conique à centre

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

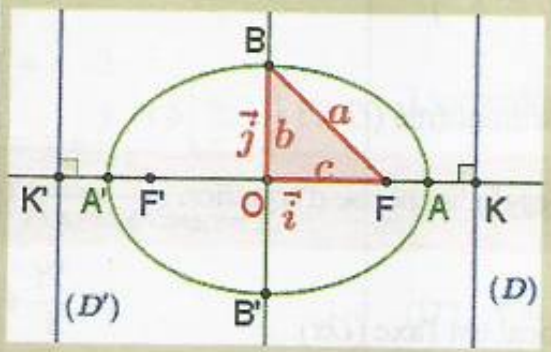
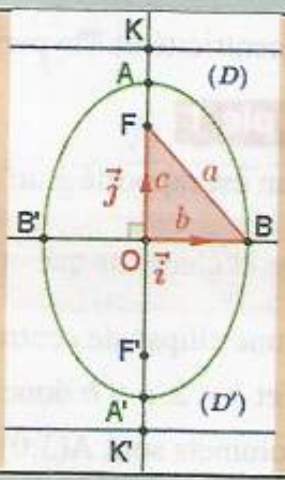
- L'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$ et $b>0$ est une ellipse si $a \neq b$.

Si $a=b$ alors , cet ensemble est un cercle.

• L'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) $(a>0$ et $a>0)$ est une hyperbole.

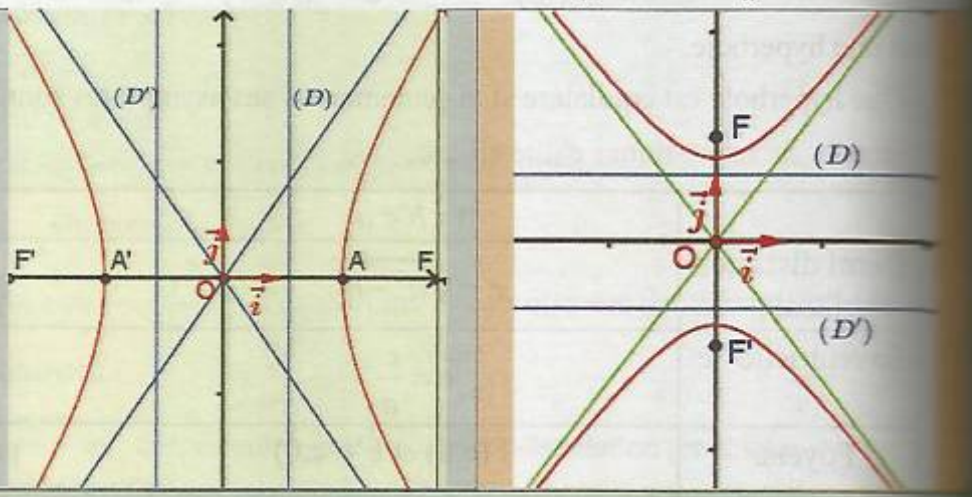
• Une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Éléments caractéristiques d'une ellipse.

	$0<b<a$	$0<a<b$
Demi distance focal .	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
Excentricité e .	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
Foyers.	F(c;0) et F'(–c;0)	F(0;c) et F'(0 ;–c)
Directrices.	(D): $x=\frac{a^2}{c}$ et (D'): $x=-\frac{a^2}{c}$	(D): $y=\frac{b^2}{c}$ et (D'): $y=-\frac{b^2}{c}$
sommets	A(a;0); A'($-a$;0), B(0;b); B'(0;$-b$)	
Allure de l'ellipse.		

Éléments caractéristiques d'une hyperbole

Équation.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Demie distance focale.	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
Excentricité.	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
Foyers.	F(c;0) et F'(–c;0)	F(0;c) et F'(0 ;–c)
Directrices.	(D): $x=\frac{a^2}{c}$ et (D'): $x=-\frac{a^2}{c}$	(D): $y=\frac{b^2}{c}$ et (D'): $y=-\frac{b^2}{c}$

Asymptotes.	Les droites d'équations $\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$
Allure de l'hyperbole	

• L'hyperbole est équilatère si et seulement si $a=b$. (C'est le cas où le produit des coefficients directeurs des asymptotes vaut -1.)

• L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut $\sqrt{2}$.

Exemple 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

C'est une ellipse de centre O.

$a=3$ et $b=2$. $a>b$ donc l'axe focal est l'axe (Ox).

Les sommets sont A(3;0), A'(−3;0), B(0;2), et B'(0,−2).

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$; alors les foyers sont F($\sqrt{5}$;0)et F($-\sqrt{5}$;0).

L'excentricité est $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\frac{a^2}{c}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$. Les directrices sont : $(D):x=\frac{9\sqrt{5}}{5}$ et $(D'):x=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

C'est une ellipse de centre O.

$a=1$ et $b=2$. $a<b$ donc l'axe focal est l'axe (oy).

Les sommets sont A(1;0), B(0;2), B'(0;−2), A'(−1;0)

$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$; alors les foyers sont F(0;$\sqrt{3}$) et F(0;$-\sqrt{3}$).

L'excentricité est $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\frac{b^2}{c}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Les directices sont : (D) : $y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ et (D') : $y=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $2x^2+3y^2-12x+9y+24=0$

$2x^2+3y^2-12x+9y+24=0$

$2x^2-12x+3y^2+9y+24=0$

$2(x^2-6x)+3(y^2+3y)+24=0$

$2\left[(x-3)^2-9\right]+3\left[\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+24=0$

$2(x-3)^2+3\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\frac{(x-3)^2}{\frac{3}{8}}+\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$

Posons ensuite $\begin{cases}X=x-3\\Y=y+\frac{3}{2}\end{cases}$ et $S\left(3;-\frac{3}{2}\right)$

Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, notre courbe a pour équation $\frac{X^2}{\frac{3}{8}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

C'est donc une ellipse de sommet S.

$a=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}=b$, l'axe focal est donc (SX).

Les sommets sont $A\left(\frac{\sqrt{6}}{4};0\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt{6}}{4};0\right)$, $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$; alors les foyers sont $F\left(\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$.

L'excentricité est $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\frac{a^2}{c}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Les directrices sont : (D) : $X=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ et (D') : $X=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Exemple 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

C'est une hyperbole de centre O. L'axe focal est (Ox).

$a=3$ et $b=2$. Les sommets sont A(3,0), A'(−3,0).

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$ et donc foyers $F(\sqrt{13},0)$ et $F'(-\sqrt{13},0)$

Excentricité $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

$\frac{a^2}{c}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$ et donc, les directrices sont $(D):x=\frac{9\sqrt{13}}{13}$ et $(D'):x=-\frac{9\sqrt{13}}{13}$.

Asymptotes : $y=\frac{2}{3}x$ et $y-\frac{2}{3}x$.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

C'est une hyperbole de centre O. L'axe focal est (Oy).

$a=4$ et $b=3$. Les sommets sont A(0,3), A'(0,−3).

$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$ et donc, foyers F(0,5) et F'(0,−5).

Excentricité $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$.

$\frac{a^2}{c}=\frac{16}{5}$ et donc, les directrices sont $(D): y=\frac{16}{5}$ et $(D'): y=-\frac{16}{5}$.

Asymptotes : $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$.

Nature et éléments cractéristiques de la courbe d'équation : $x^2-9y^2-2x+36y-44=0$.

$x^2-9y^2-2x+36y-44=0$

$(x-1)^2-1-9\left[y^2-4y\right]-44=0$

$(x-1)^2-1-9\left[(y-2)^2-4\right]-44=0$

$(x-1)^2-9(y-2)^2=9$

$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$

On pose $\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$ et S(1;2); dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$ notre courbe a pour équation

$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{1}=1$: c'est donc une hyperbole. Son axe focal est l'axe (S).

$a=3$ et $b=1$. Les sommets sont A(3,0), A'(−3,0).

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$ et donc, foyers F$(\sqrt{10},0)$ et F'$(-\sqrt{10},0)$.

Excentricité $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

$\frac{a^2}{c}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$ et donc, les directrices sont $(D): x=\frac{9\sqrt{10}}{10}$ et $(D'): x=\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

Les asymptotes sont : $y=\frac{1}{3}x$ et $y=-\frac{1}{3}x$.

Exercice résolu (extrait Baccalauréat C 2013 - Cameroun)

Dans un plan orienté et muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs

$\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{e_1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

1) Démontrer que $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

Une conique (Γ) dans le un repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ a pour équation cartésienne $13X^2+7y^2+6\sqrt{3}XY=16$.

2) Écrire une équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) En déduire sa nature et son excentricité.

Solution

1) $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$ *et* $\|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=1$; $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ est donc un repère orthonormé.

2) Equation de (Γ) dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $(x;y)$ et $(X;Y)$ les cordonnées respectives d'un point M respectivement dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

$$\begin{cases}\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\\ \vec{e_1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{e_1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\\ \vec{j}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}\end{cases}$$

3) $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=x\left(\frac{1}{2}\vec{e_1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}\right)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{e_1}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\vec{e_2}$.

On a aussi $\overrightarrow{OM}=X\vec{e_1}+Y\vec{e_2}$ d'où $X=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$ *et* $Y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$.

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow 13X^2+7Y^2+6\sqrt{3}XY=16$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=16$$

$$\Leftrightarrow \frac{13\left(x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2\right)}{4}+\frac{7\left(3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2\right)}{4}+\frac{6\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}x^2+xy-3xy+\sqrt{3}y^2\right)}{4}=16$$

$$\Leftrightarrow \frac{16x^2+64y^2}{4}=16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

L'équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donc $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(Γ) est donc une ellipse de centre O.

Ses sommets sont les points A(2 ;0), A'(−2 ;0) B(0 ;1) et B'(0 ;−1).

$a=2$ et $b=1$. La demi-distance focale est $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

Son excentricité est $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

Soit (C) la courbe dont une équation catésienne est $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Une équation de (C) peut encore s'écrire $\frac{(x+a')^2}{\alpha}+\frac{(y+b')^2}{\beta}-1=0$.

a. Si α et β sont tous négatifs , alors (C) est vide.

b. Si α et β sont tous positifs, alors (C) est une ellipse

c. Si α et β sont de signes contraires, alors (C) est une hyperbole.

d. De manière générale, (C) a pour :

- Centre le point de coordonnées $(-a';-b')$;
- Pour axes de symétrie , les droites d'équations respectives $x=-a'$ et $y=-b'$;
- Pour sommets, les points communs à la conique et aux différents axes de symétrie ;
- Pour axe focal, l' axe de symétrie sur lequel sont situés les sommets les plus distants l'un de l'autre (dans le cas d'une ellipse) ou les deux sommets pour une hyperbole.

e. La demi-distance focale est la distance entre le centre et un foyer situé sur l'axe focal.

f. Les directrices sont perpendiculaires à l'axe focal, et ne peuvent avoir des points communs avec la conique.

g. Dans le cas d'une hyperbole, les asymptotes sont constitués des points dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $\frac{(x+a')^2}{\alpha}+\frac{(y+b')^2}{\beta}=0$ (on remplace dans l'équation réduite 1 par 0).

L'excentricité d'une conique de centre Ω, dont un foyer est F et dont un sommet situé sur l'axe focal est A, vaut $e=\frac{\Omega F}{\Omega A}$.

S'exercer

3.a Dans chacun des cas suivants une courbe C est donnée par son équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Donner une équation réduite de cette courbe et ses éléments caractéristiques, et dessiner cette courbe.

1) $x^2+4y^2+6y=0$; 2) $x^2-y^2=-1$; 3) $6x^2+2y^2-12x+8y+9=0$; 4) $2x^2-y^2=3-4x$

3.2 EFFET D'UNE AFFINITÉ ORTHOGONALE SUR UN CERCLE

Prendre un bon départ

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est : $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}, t\in\left]-\pi;\pi\right]$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon a et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O et de rayon b.

Soit M un point de l'ellipse $\mathscr{E}$.

a. Montrer que $M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M'\left(x;\frac{b}{a}y\right) \in \mathscr{E}$.

b. En déduire que ε est l'image de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe (O,i) et de rapport $\frac{b}{a}$.

a. Montrer que $M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M''\left(\frac{a}{b}x;y\right) \in \mathscr{E}$.

b. En déduire que ε est l'image de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe (O,j) et de rapport $\frac{a}{b}$.

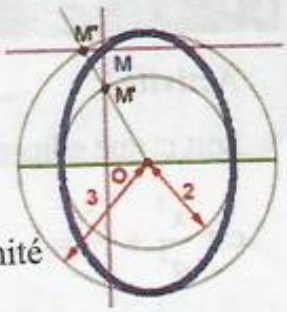
Retenir

L'image d'un cercle par une affinité orthogonale dont l'axe est un diamètre du cercle est une ellipse.

En particulier dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, l'image du cercle de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$ est l'ellipse dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$.

Exemple

Construisons l'ellipse dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$



On construit pour cela l'image du cercle de centre O et de rayon 2 par l'affinité orthogonale d'axe un diamètre de ce cercle et de rapport $\frac{3}{2}$ ou bien on construit pour cela l'image du cercle de centre O et de rayon 3 par l'affinité orthogonale d'axe un diamètre de ce cercle et de rapport $\frac{2}{3}$.

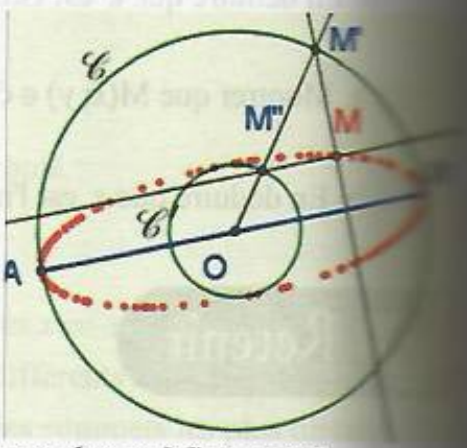
S'exercer

Construire l'ellipse dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$

2) Construire l'ellipse dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$

Remarque

Pour construire un point de l'ellipse ε dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$ on peut procéder de la manière suivante :



- On construit les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b.
- On construit un diamètre [AA'] du cercle ayant le plus grand rayon.
- On construit une demi-droite d'origine O. Elle coupe les deux cercles en M' et en M''.

(on suppose que M' est situé sur le cercle de rayon a et M'' situé sur le cercle de rayon b).

La perpendiculaire à [AA'] passant par M' et la parallèle à [AA'] passant par M'' se coupe en un point M de l'ellipse ε.

3.3 TANGENTE À UNE CONIQUE À CENTRE EN UN DE SES POINTS

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε une ellipse dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et C_f sa représentation graphique dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit C'_f le symétrique de C_f par rapport à l'axe focal.

1) Montrer que $\varepsilon = C_f \cup C'_f$.

2) Soit $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C_f. On suppose $x_0^2 \neq a^2$. Montrer que f est dérivable en x_0 et que l'équation de la tangente à C_f en x_0 s'écrit $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

3) Montrer que si $x_0^2 = a^2$, f n'est pas dérivable en x_0 et qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 peut s' écrire encore $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

4) En déduire qu'en tout point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la parabole, une équation de la tangente est :

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Montrer en s'inspirant de l'activité précédente qu'en tout point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de l'hyperbole, la tangente a une équation de la forme $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Retenir

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, une équation de la tangente au point de coordonnées $(x_0;y_0)$:

À l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

À l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

À l'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemple

1) Une équation de la tangente à l' ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ au point $T\left(\frac{3}{2};2\sqrt{3}\right)$ est :

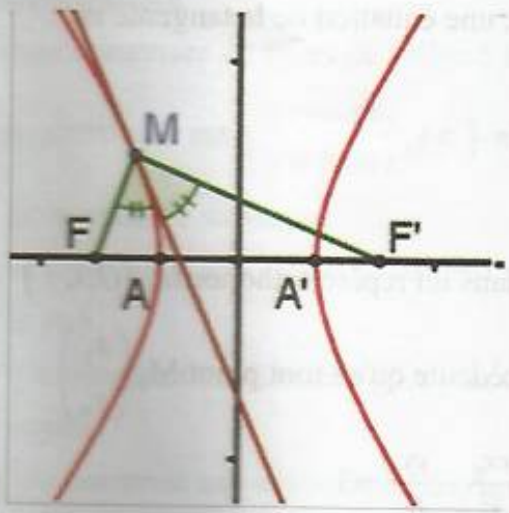
$\frac{\frac{3}{2}}{9}x + \frac{2y\sqrt{3}}{16} = 1$ soit encore $4x + 3y\sqrt{3} = 24$.

2) Un équation de la tangente à l' hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ au point $N(4;3\sqrt{3})$ est :

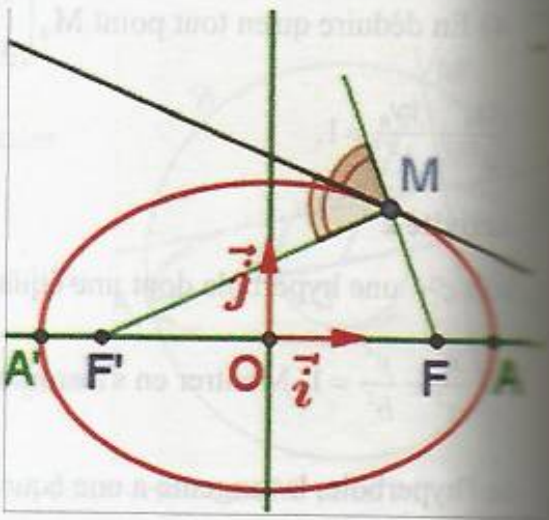
$\frac{4x}{4} + \frac{3y\sqrt{3}}{9} = 1$ soit encore $x + y\frac{\sqrt{3}}{3} = 1$.

Remarque

La tangente à l'hyperbole en M_0 est bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M_0F};\overrightarrow{M_0F'}})$



La tangente à l'ellipse en M_0 est bissectrice extérieure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{M_0F};\overrightarrow{M_0F'}})$



S'exercer

3.b Dans chacun des cas suivants, une courbe $\mathcal{C}$ est donnée par son équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Vérifier que M_0 appartient à $\mathcal{C}$, puis donner une équation de la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$.

a) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, $M_0(0;2)$ b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, $M_0(0;2)$

3.c Même question avec :

a) $x^2+y^2-x+1=0$; $M_0(1;-1)$ b) $x^2-9y^2-2x+36y-44=0$ $M_0(4;2)$

3.4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE CONIQUE À CENTRE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε un ellipse dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

1) Soit t un réel, montrer que le point $M(a\cos t;\ b\sin t)$ appartient à ε.

2) Réciproquement soit $M(x;y)$ un point de ε. Montrer que le point $N\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right)$ appartient à un cercle trigonométrique.

3) En déduire qu'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. On pose pour tout réel $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, & t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ y = b\tan t \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $M\left(\frac{a}{\cos t};b\tan t\right)$ appartient à $\mathcal{H}$.

2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{a}{\cos t}$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

3) Soit M(x; y) un point de $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases}$.

Retenir

Équations paramétriques d'une ellipse

Dans u un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$. plus généralement une représentation paramétrique de l'ellipse de centre $\Omega(x_0;y_0)$ d'équation $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ est $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}, t \in]-\pi;\pi]$.

Équations paramétriques d'une hyperbole

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ une représentation paramétrique de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, & t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ y = b\tan t \end{cases}$.

Exemple

1) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, une équation paramétrique de l'ellipse dont une équation réduite est $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ est $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{5}\sin t \end{cases}, t \in [-\pi,\pi]$.

2) Dans un repère orthonormé $(O:i:j)$, une représentation paramétrique de l'hyperbole dont une équation réduite est $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$ est $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{7}}{\cos t} \\ y=\sqrt{3}\tan t \end{cases}, t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

S'exercer

3.c Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé $(O;i;j)$ est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. On pose pour tout réel t, $\begin{cases} ch(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} \\ sh(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$.

1) Montrer que $ch^2(t)-sh^2(t)=1$.

2) Montrer que pour tout réel t, $M(ch(t);\ sh(t))$ appartient à $\mathcal{H}$

3)a. Montrer que la fonction $t\mapsto sh(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis en déduire que pour tout réel x, il existe un unique réel t tel que $y=bsh(t)$.

b. En déduire que si $M(x;y)\in\mathcal{H}$ et $a>0$ alors, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=ach(t) \\ y=bsh(t) \end{cases}$

3.d Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x=2\sin^2 t \\ y=\sin t\cos t \end{cases}$, $t\in[0;\pi]$. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse que l'on construira.

Remarque

Il existe plusieurs façons de paramétrer une courbe.

3.5 DÉFINITION BIFOCALE D'UNE CONIQUE À CENTRE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit ε une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit

$(\Gamma)=\{M\in plan / MF+MF'=2a\}$

1) Soit M un point de ε.

$MF+MF'=eMH+eMH'=e(MH+MH')=eHH'=eKK'=\frac{c}{a}\times 2\frac{a^2}{c}=2a$

Tout point de l'ellipse appartient donc à (Γ) .

2) Soit M(x; y) un point du plan. Montrons que $MF+MF'=2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$(MF+MF')(MF-MF')=MF^2-MF'^2=\left[(x-c)^2+y^2\right]-\left[(x+c)^2+y^2\right]=-4cx$

$MF+MF'=2a \Rightarrow MF-MF'=\frac{-4cx}{MF+MF'}=\frac{-4cx}{2a}=-2ex$

$\Rightarrow MF=a-ex$

$\Rightarrow MF^2=(a-ex)^2$

$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=a^2-2aex-e^2x^2$

$\Rightarrow x^2(1-e^2)+y^2=b^2 \quad car \quad ec=a \text{ et } a^2-b^2=c^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$MF+MF'=2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

$\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a^2-x^2-y^2-c^2$

$\Leftrightarrow \left((x-c)^2+y^2\right)\left((x+c)^2+y^2\right)=\left(2a^2-x^2-y^2-c^2\right)^2 \text{ et } 2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+c^2-2cx\right)\left(x^2+y^2+c^2+2cx\right)=\left(2a^2-x^2-y^2-c^2\right)^2$

$et\ 2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0$

$MF+MF'=2a \Leftrightarrow -4c^2x^2=-4a^2\left(x^2+y^2+c^2\right)+4a^4 \text{ et } 2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad et\ 2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad et\ x^2+y^2\leq a^2+b^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Activité 2

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit $(\Gamma)=\{M\in Plan / |MF-MF'|=2a\}$

1) Soit M un point de $\mathcal{H}$.

Si M est situé sur la branche de $\mathcal{H}$ la plus proche de F,:

On a : $MF'-MF=eMH'-eMH=e(MH'-MH')=eHH'=eKK'=\frac{c}{a}\times 2\frac{a^2}{c}=2a$.

Si M est situé sur la branche de $\mathcal{H}$ la plus proche de F', on a :

On a : $MF-MF'=eMH-eMH'=e(MH-MH')=eHH'=eKK'=\frac{c}{a}\times 2\frac{a^2}{c}=2a$.

Dans tous les cas on a $|MF-MF'|=2a$.

2) Soit M$(x;y)$ un point du plan. Montrer que $|MF-MF'|=2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Retenir

Définition bifocale d'une ellipse

Soient F et F' deux points distincts du plan ; a un réel strictement positif.

Soit ε l'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$.

- Si $FF'>2a$ alors $\varepsilon=\varnothing$.
- Si $FF'=2a$ alors ε est le segment[FF'].
- Si $FF'<2a$ alors ε est l'ellipse de foyers F et F', dont la distance entre le centre et un des sommets situés sur l'axe focal est a.

Définition bifocale d'une hyperbole

Soient F et F' deux points distincts du plan ; a un réel strictement positif.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan tels que $|MF-MF'|=2a$.

- Si $FF'<2a$ alors $\mathcal{H}=\varnothing$
- Si $FF'=2a$ alors $\mathcal{H}$ est la droite (FF') privée de [FF'].
- Si $FF'>2a$ alors $\mathcal{H}$ est l'hyperbole de foyers F et F', dont la distance entre le centre et un des sommets est a.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on donne les points F(−2 ;2) et F'(4 ;2).

1) Déterminons une équation de l'ensemble (E) des points M tels que : $MF+MF'=10$.

Soit S le milieu de [FF'] on a S(1;2) ; FF'=6 ;

$FF'<10$, E est donc une ellipse de foyers F et F' et dont la distance entre le centre est un sommet de l'axe (FF') est $a=\frac{10}{2}=5$;

La distance focale est $2c=6$; d'où $c=3$. Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, une équation réduite de (E) est $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, avec $c^2=a^2-b^2$; d'où $b^2=a^2-c^2=16$.

Une équation réduite de (E) est donc $\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1$. Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$; une équation de ε s'écrit : $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ soit $16x^2+25y^2-32x-100y-284=0$.

2) Déterminons une équation de l'ensemble $\mathcal{H}$ des point M tels que $|MF-MF'|=4$.

$FF'>4$, H est donc une hyperbole de foyers F et F'.

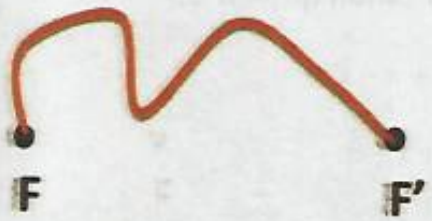
La demi distance focale est $c=3$, $c^2=a^2-b^2$; d'où $b^2=c^2-a^2=9-4=5$.

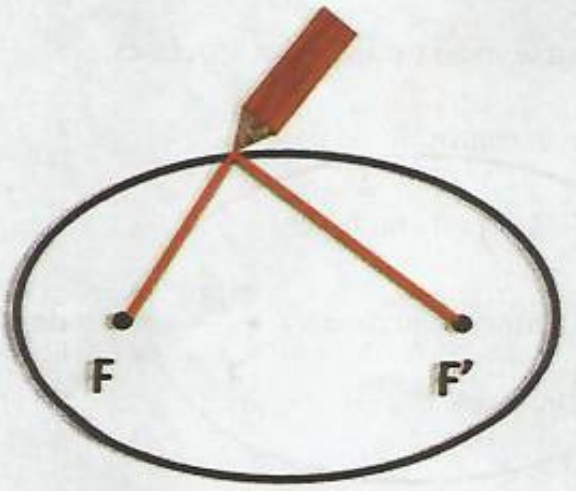
Dans le repère $(S;\vec{i};\vec{j})$, une équation réduite de ε est donc $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ soit $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{5}=1$.

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ cette équation s'écrit : $5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$.

Remarque **CONSTRUCTION D'UNE ELLIPSE**

La définition bifocale MF + MF' = 2*a* fournit la construction du jardinier. On veut planter un parterre de fleurs de forme elliptique et d'abord le dessiner au sol. On plante deux pieux, distants l'un de l'autre de 2*c*, puis on attache à chacun des deux pieux une corde de longueur 2*a* > 2c. À l'aide d'un troisième bâton, on tend la corde et on déplace ce bâton, la corde restant tendue. Dans son déplacement, ce bâton dessine sur le sol une ellipse de foyers les deux pieux et de grand axe 2a.





S'exercer

Soit F et F' sont deux point du plan tels $FF'=3$. Déterminer dans une repère convenablement choisi, l'ensemble des points M du plan tels : a) $MF+MF'=8$; b) $|MF-MF'|=2$

(On traitera les cas : (FF') est parallèle aux axes du repère et (FF') non parallèle aux axes du repère).

S'ENTRAÎNER

Dans chacun des exercices 1 à 4 suivants, indiquer la (les) réponses exactes.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1

La parabole (P) a pour équation $y^2 = -2x+1$.
Son axe focal est l'axe des abscisses.

(i) Son sommet est $S\left(\frac{1}{2};0\right)$.

(ii) Son foyer est $F\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

(iii) Sa directrice est (D) d'équation $x=1$.

(iv) Son excentricité est $e=1$.

2

L'ellipse (E) a pour équation $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(i) Son axe focal est l'axe des abscisses.

(ii) Son excentricité est $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(iii) $F\left(\sqrt{3};0\right)$ est son foyer.

(iv) La droite d'équation $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ est une de ses directrices.

3

L'hyperbole (H) a pour équation $4x^2-y^2=1$.

(i) Son excentricité est $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $F\left(\sqrt{5};0\right)$ est un de ses foyers.

(iii) La droite d'équation $y=2x$ est une de ses asymptotes.

(iv) La droite d'équation $y=2\sqrt{5}$ est une de ses directrices.

L'axe des abscisses est un axe de symétrie de (H).

4

Répondre par vrai ou faux

La courbe d'équation $x^2-4y^2+2x=0$:

i- est une ellipse.

ii - est une hyperbole.

iii - a pour centre le point $\Omega(-1;2)$.

iv - a pour axe focal la droite d'équation

v- a pour excentricité $\sqrt{5}$.

5

Trouver le foyer et la directrice de la parabole d'équation donnée.

a) $y^2=4x+2y+11$.

b) $y^2=-6x+6y+15$.

c) $x^2+4y+13=0$.

6

Même question qu'au n°5.

$y=\frac{1}{4}x^2+x+2$.

$y=3x^2+x-3$.

$y^2=6x+3$.

$y^2=-4x+1$.

$y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

$y^2-2y-x-2=0$.

7

On donne la distance d entre un point F et une droite (D), et un réel e strictement positif.
Choisir un repère et trouver une équation de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e. $d=4$; $e=1$.

$=9$; $e=\frac{4}{5}$;

$=9$; $e=\frac{5}{4}$;

$=1$; $e=2$;

$=1$; $e=\frac{1}{2}$.

9

ns un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, trouver e équation de la parabole de foyer F et de ectrice (D).

3;2) ; (D): $x=1$.

1;4) ; (D): $x=3$.

1;4) ; (D): $y=4$.

−2;1) ; (D): $y=-1$.

ns les exercices suivants le plan est pporté a un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

QUATION RÉDUITE D'UNE CONIQUE.

9

eterminer les éléments caractéristiques des niques dont une équation dans le repère $O;\vec{i};\vec{j}$) est la suivante.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

$25x^2+9y^2=225$.

$4x^2+y^2=4$.

$\frac{x^2}{3}-\frac{y2}{4}=1$.

$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{9}=1$.

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

10

Dans chacun des cas suivants, la courbe (C) est donnée par une équation cartésienne. Déterminer l'équation réduite de la courbe (C) et dessiner cette courbe.

a) $x^2-4y^2=9$.

b) $4x^2-9y^2=1$.

c) $9y^2-4x^2=-1$.

d) $16x^2+3y^2=48$.

e) $x^2+2x=2y$.

f) $3x^2+2x+3y^2-6y=0$.

g) $4(x+x)^2-25(y-2)^2=1$.

h) $9(x-2)^2-16(y+1)^2+1=0$.

i) $2y+3x^2=0$.

11

Même question qu'à l'exercice précédent.

a) $x^2+4y^2-4x+8y-17=0$.

b) $x^2-9y^2-2x+36y-44=0$.

c) $x^2+y^2-x+2y+1=0$.

d) $\frac{x^2}{4}-x-y+1=0$.

e) $y^2+2x-2y+3=0$.

f) $3x^2+2y^2+8y+2=0$.

Pour les exercices 12 et 13 suivants, une droite (D) est donnée et un point F n'appartenant pas à (D). construire cinq points de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

12

a) $e=2$; b) $e=3$

13

a) $e=\frac{1}{2}$; b) $e=\frac{1}{4}$; c) $e=\frac{3}{2}$

14

Démontrer que la courbe d'équation $4y^2=|9x^2-36x|$ est la réunion de deux coniques que l'on construira.

15

On désigne par (H) et (E) les ensembles des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

(H) : $4x^2-9y^2+8x+54y-113=0$.

(E) : $16x^2+9y^2+32x-54y-47=0$.

1) Déterminer les équations réduites de (H) et (E). En déduire la nature de ces courbes.

2) Déterminer les éléments caractéristiques de ces deux courbes.

3) Les construire sur un même graphique.

16

Même exercice que le précédent avec :

(H) : $16x^2-25y^2+96x-256=0$.

(E) : $16x^2+25y^2+96x-256=0$.

En déduire la construction de la courbe (C) d'équation

$416x|x|-25|y|y+96x-256=0$.

17

On considère l'ensemble (Γ) des points M dont les coordonnées $(x;y)$vérifient

$\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$.

Démontrer que (Γ) est la réunion de deux coniques. Construire (Γ).

18

Trouver l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$16x^4-72x^2y^2+81y^4=1$.

19

Trouver l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient : $x|x|+4y|y|=1$.

PARAMÉTRAGE D'UNE CONIQUE.

Pour les exercices de 20 à 21 préciser l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

20

a) $\begin{cases}x=e^t+e^{-t}\\y=2(e^t-e^{-t})\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$;

b) $\begin{cases}x=-2(e^t+e^{-t})\\y=e^t-e^{-t}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$;

c) $\begin{cases}x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\y=\frac{t}{1+t^2}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

21

a) $\begin{cases}x=\sin t\\y=\cos 2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$; b) $\begin{cases}x=\cos 2t\\y=\sin t\cos t\end{cases}$

22

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$\begin{cases}x=\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\y=\cos t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

En exprimant cost en fonction de $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

montrer que (C) est une portion d'une parabole que l'on construira.

23

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$\begin{cases}x=3\sin t-1\\y=4\cos t+2\end{cases}$, $t\in[0;2\pi[$. Démontrer que (C) est une ellipse que l'on construira.

24

Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\y=2\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$, $t\in[1;+\infty[$.

Démontrer que (C) est une portion d'hyperbole que l'on construira.

(C) la courbe d'équations paramétriques

$\frac{1}{\cos 2t}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}\tan 2t$

trer que (C) est une portion d'hyperbole
construira.

BRES COMPLEXES ET CONIQUES

er l'ensemble des points M dont l'affixe
ifie $|z+2\bar{z}+1|=3\ |z+\bar{z}|$.

nombre complexe z on associe le nombre
lexe Z tel que $Z = z^2-(9-2i)z+26$.
iner l'ensemble (Γ_1) des points M tels
Z soit réel. Préciser sa nature et ses
nts caractéristiques.
erminer l'ensemble (Γ_2) des points M
ue Z soit nul ou imaginaire pur.
isez sa nature et ses éléments
ctéristiques.
onstruire (Γ_1) et(Γ_2) sur le même graphique
préciser les coordonnées de leurs points
erscition.

ut point M du plan d'affixe z on associe
oint M' d'affixe Z tel que
$Z = (3+2i)z+3iz-1$.
Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M
s que O, M et M' soient alignés est une
ique.
Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments
actéristiques.

29

On pose $z = \frac{z-2+i}{z+4-i}$ un nombre complexe différent de $-4+i$.

1)Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que z soit imaginaire pur est une partie d'une conique (E).

2) Déterminer la nature de (E) et ses éléments caractéristiques.

30

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe $z = x+iy$ vérifiant :

$\arg z + \arg(z-1) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ et justifier que (Γ) est contenue dans une hyperbole, puis construire (Γ) en rouge.

FAMILLE DE CONIQUES.

31

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on définit la famille de courbes (C_m) d'équation : $(m+1)x^2-(m-1)y^2-8=0$ où m est un nombre réel.

1) Étudier suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m).

2) Tracer sur le même graphique les courbes (C_{-1}), (C_0), (C_1) et (C_3).

32

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on définit la famille de courbes (C_m) d'équation :

$(m-2)x^2-y^2-2(m+3)x+5m=0$ où m est un nombre réel.

1) Déterminer m pour que (C_m) soit une parabole. Préciser dans ce cas son foyer et son excentricité.

2) Déterminer m pour que (C_m) soit une hyperbole équilatère.

Tracer cette hyperbole.

3) Étudier suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m).

IMAGE D'UNE CONIQUE PAR UNE TRANSFORMATION

33

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, unité : 4cm . Soit A le point de coordonnées $(-1;0)$. Soit f la fonction définie de l'intervalle [-1;1[vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (S_1). Préciser les tangentes ou demi-tangentes aux points A et O.

2) Soit (S_2) l'image de (S_1) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner une équation de (S_2).

3) Vérifier que $(S)=(S_1)\cup(S_2)$ a une équation $y^2-y^2|x|-|x|-1=0$. Tracer (S).

34

Soit (E) l'ellipse d'équation $4x^2+y^2=36$ et les points A(3;0)et B(0;6). Soit M un point de (E) et M' l'isobarycentre de A, B et M.

1) Démontrer que M' est l'image de M par une transformation que l'on précisera.

2)En déduire une équation de l'ensemble (E') des points M' lorsque M décrit (E).

3)Tracer (E) et (E') dans le même graphique.

35

Soit (H) l'hyperbole d'équation $-x^2+4y^2=16$.

1) Déterminer une équation de (H'), image de (H) par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (H').

3) Tracer (H) et (H') dans le même graphique

DÉFINITION BIFOCALE D'UNE CONIQUE

36

Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m. Pour cela il plante deux piquets fixes M et P dans le sol auxquels il attache les deux bouts d'une ficelle rigide d'une certaine longueur. Il tend cette ficelle par un piquet mobile R qu'il garde toujours vertical tout en le déplaçant de telle façon que la corde reste bien tendue. Justifier pourquoi le piquet R décrit de cette façon une ellipse.Comment faut-il choisir la distance entre les piquets fixes et la longueur de la ficelle pour obtenir l'ellipse souhaitée ?

37

Soient A et B deux points fixes avec AB = 8. Déterminer la nature, donner une équation cartésienne et une équation focale des lieux suivants puis les construire.

S = {M tel que MA +MB = 10} ;

T = {M tel que $|MA-MB| = 4$}

TANGENTES À UNE CONIQUE

38

Déterminer les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $9x^2+16y^2=144$ aux points d'abscisse 2 et aux points d'ordonnée 3.

39

Soit l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2+9y^2=36$. Déterminer les équations des tangentes à cette ellipse passant par le point P(4;0) ainsi que les coordonnées de leurs points de contact.

41

Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2-4y^2-4=0$. Déterminer les équations des tangentes à cette hyperbole passant par le point P(1;1). Faire une figure.

Chapitre 17

CALCULS DES PROBABILITÉS

LEÇON 1 RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

1.1 UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.

1.2 ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

2.1 INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT

2.1.1 Vocabulaire en probabilité.

2.1.2 Probabilité d'un événement.

2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION "PROBABILITÉ"

2.3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

3.1 PRÉSENTATION

3.2 LOI DE PROBABILITÉ ET FONCTIONS ASSOCIÉES À UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.3 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.4 ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

3.4.2 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT.

▸ Résoudre quelques problèmes de dénombrement en utilisant des diagrammes ou des tableaux ou des arbres.

1.1 UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.

Prendre un bon départ

Activité 1

Un magasin souhaite faire une promotion sur des lampes de bureau et des lampes de salon. Ces lampes sont de trois couleurs : blanche, noire ou rouge.
Sur ces 200 lampes, 25 % sont des lampes de salon ; 30 % des lampes sont blanches ; 60 lampes rouges et parmi elles, 20 % sont des lampes de salon. Le quart des lampes noires sont des lampes de salon.
1) Représenter les données de cet énoncé dans un diagramme de " CARROLL ".
2) Calculer le nombre de lampes noires.
3) Déterminer le nombre de lampes de bureau ayant la couleur blanche .

Activité 2

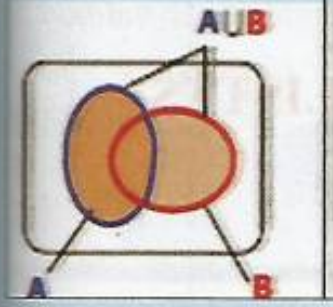
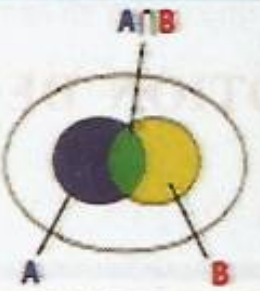
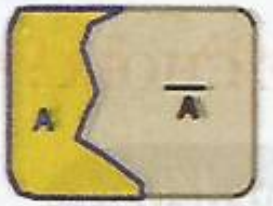
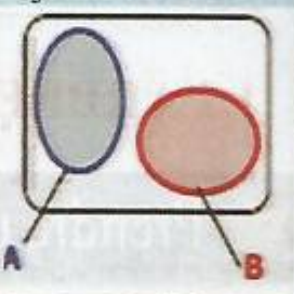
1. Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, 10 à la fois le cinéma et le sport, 5 n'aiment ni le cinéma, ni le sport. Calculer le nombre total d'individus.
2. L'exploitation des relevés des notes d'un jury de baccalauréat littéraire comptant 108 candidats tous présents a donné les informations suivantes :
37 candidats ont eu la moyenne en anglais, 25 en deuxième langue vivante et 26 en mathématiques. 5 ont eu la moyenne dans les trois matières, 6 en maths et en deuxième langue vivante, 7 en maths et en anglais, 10 en anglais et en deuxième langue.
a) Utiliser un diagramme pour illustrer la situation décrite dans l'énoncé précédent.
b) Déterminer le nombre de candidats n'ayant pas eu la moyenne en anglais, en mathématiques et en deuxième langue vivante.

Activité 3

1. On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé cubique dont les faces portent respectivement les numéros 1 ; 2 ;3 ;… ;6. On relève à la face supérieure de la pièce de monnaie et le numéro de la face supérieure du dé apparu. Donner le nombre total des résultats éventuels.
2. Lors d'une rentrée parlementaire, les 180 députés qui constituent la chambre doivent se saluer indépendamment de leurs chapelles politiques.
a. Déterminer le nombre de poignées de mains qu'un député pris au hasard doit passer avec les autres.
b. Déterminer le nombre total de poignées que doivent se donner tous ces députés.

Retenir

• Pour résoudre certains problèmes de dénombrement, on peut utiliser les tableaux, les diagrammes ou les arbres.

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ ou C_E^A	A et B sont disjoints $A \cap B = \varnothing$
			

$Card\ (A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$;

$Card(A) + Card(\overline{A}) = Card(E)$.

On utilise un tableau à double entrée dans le cas où on veut avoir un résultat composé de deux éléments appartenant respectivement à deux ensembles.

A×B est l'ensemble des éléments $(a\ ;b)$ où a ∈ A et b ∈ B.

$Car(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

Exemple

Huit amis vont à une soirée et devraient être normalement accompagnés chacun de son épouse. À la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari à cette soirée. À l'ouverture de la soirée dansante, ils forment des couples (composés d'un homme et d'une femme) pour danser.

Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?

Combien de possibilités a-t-on de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

Solution.

Un couple est un élément de H×F où H est l'ensemble des hommes et F celui des femmes.

Card(H × F) = 8 × 7 = 56.

Il ya 56-7=49 possibilités de former un couple dont l'homme n'est pas le mari de la femme.

On devrait avoir ces résultats à partir d'un tableau à double entrées dont une entrée est formée des hommes et une autre des femmes.

S'exercer

1.a On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les trois sports; 12 pratiquent le football et le basketball, 8 pratiquent le tennis et le football, 7 pratiquent le tennis et le basketball.

Peut-on affirmer que chacun de ces enfants pratique au moins un de ces trois sports ?

Déterminer le nombre d'enfants

a) qui pratiquent uniquement le football ;
b) qui ne pratiquent pas le football ;
c) qui pratiquent le tennis et le basketball, mais ne pratiquent pas le football ;
d) qui pratiquent uniquement le tennis, uniquement le basketball.

1.b Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes aiment la lecture , 33 les voyages et 16 n'aiment aucun des deux loisirs. Combien de personnes aiment-ils à la fois le voyage et la lecture ?

1.2 ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES

Prendre un bon départ

1. Un buffet est composé de trois entrées , de 5 résistances et de 4 desserts.
Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un dessert peut-on constituer à partir de ce buffet ?
2. Dix huit chevaux sont au départ d'une course .
a) On s'intéresse aux quatre premiers chevaux ayant franchi la ligne d'arrivée.
Déterminer le nombre total possible de quartés dans l'ordre à l'issue de cette course.
b) Déterminer le nombre possible de quartés dans l'ordre comportant le cheval numéro «11».
3. Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10, dont 4 rouges, 5 vertes et une noire.
a. On effectue quatre tirages successifs d'un jeton, en remettant chaque fois le jeton tiré dans le sac avant le tirage suivant.
(i) Calculer le nombre de résultats possibles.
(ii) Déterminer le nombre total de résultats lorsque le jeton tiré n'est plus remis dans le sac.
b. On tire simultanement 4 jetons de ce sac. Calculer le nombre total de résultats possibles.

Retenir

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments ; p un entier naturel non nul .

Une p-liste ou p-uplet d'éléments de E un élément de l'ensemble

$E^p = \underbrace{E \times E \times E ... \times E}_{p \text{ fois}}$; soit une famille $(n_1, n_2, ... n_p)$ d'éléments de E.

Le nombre de p-listes de E est n^p.

Un arrangement de p $(p \leq n)$ éléments de E est une p-listes d'éléments distints de E ,

soit une famille $(n_1, n_2, ... n_p)$ d'éléments de E. Le nombre d'arrangements

de p éléments de E est : $\underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)}_{p \text{ facteur}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Ce nombre est noté A_n^p.

- Par convention $A_n^0 = 1$.

Une permutation d'éléments de E est un arrangement de n éléments de E, si cardE=n.

Le nombre de permutations d'éléments d'un ensemble ayant n élément est $n!$.

Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments d'un ensemble E $(0 \le p \le n)$ est une partie à p éléments de E; $\{n_1, n_2, ...n_p\}$, $n_i \in$ E et $cardE = n$

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est : $\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ ce nombre est noté C_n^p.

$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$.

- $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^{n-p} = C_n^p$; $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

éthode de dénombrement

Comment dénombrer les tirages de *p* éléménts d'un ensemble E fini à *n* éléments.

	Conditions	Le nombre de tirages possibles est :	Exemple usuel
$P \ge 1$	Les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés.	Le nombre de p listes d'un ensemble E à n éléments soit n^p	Tirage successif avec remise de p objets parmi n.
$P \le n$	Les p éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre d'arrangements de p élément d'un ensemble E à n éléments soit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Tirage successif sans remise de p objets parmi n.
$P = n$	Les n éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre de permutations des éléments d'un ensemble E à n éléments.Soit: $n!$	Anagramme d'un mot formé de n lettres toutes distinctes.
$P < n$	Les p éléments sont tous distincts et non ordonnés.	Le nombre de combinaisons de p élément d'un ensemble E à n éléments soit $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)}$	Tirages simultanés de p objets parmi n objets.

Remarque

Savoir quand additionner ou multiplier

Présentation	Opération	Observation
$x \in A_1$ ou $x \in A_2$. équivaut à $x \in A_1 \cup A_2$.	Addition . $card(A_1 \cup A_2) = cardA_1 + cardA_2 - card(A_1 \cap A_2)$ $= cardA_1 + cardA_2$ si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.	on peut avoir $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
$x = (x_1; x_2; ...; x_p)$ avec $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ et... et $x_p \in A_p$. équivaut à $x \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_p$	Multiplication $card\left(A_1 \times A_1 \times ... \times A_p\right) =$ $cardA_1 \times cardA_2 \times ... cardA_p$ $\text{card}(E^n) = (\text{card}E)^n$	Un résultat est la composition des éléments pris de plusieurs ensembles :tirages dans la même urne plusieurs fois de suite.

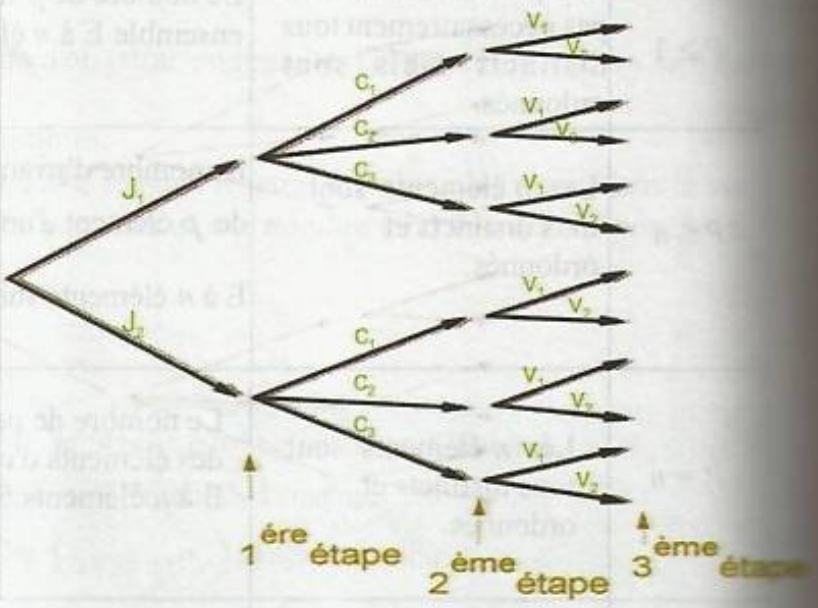
Exemple

Enoncé :1

Une femme a dans sa garde-robe 2 jupes, 3 chemisiers et 2 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Enumerer (à l'aide d'un arbre),puis dénombrer les différentes façons de s'habiller ?

Solution :1

Un habillement de la femme comporte 3 étapes (choix de la jupe, du chemisier, et de la vestes) offrant 2 possibilités à la 1ère étape,3 possibilités à la 2nde étape puis 2 possibilités à la 3ème étape. On illustre à l'aide de l'arbre ci-contre. On a $2 \times 3 \times 2 = 12$ *possiblités d'habillement de la femme.*



Enoncé 2 :

Un code comporte deux lettres distinctes de l'alphabet français , suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Solution 2:

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités à chaque étape. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

Enoncé 3:

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases | 1 | N | 2 | pour chacun des 18 matches sélectionnés.
Dénombrer les grilles distinctes.
2) Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres commençant chacun par 9 ?

Solution :

1) Il y en a autant que de 18-listes de l'ensemble {1 ; N ; 2}
soit $3^{18} = 387\,420\,489$
2) Les 7 numéros qui suivent sont des 7-listes de l'ensemble {0 ; 1 ; ... ; 9}. Il y en a
$10^7 = 10\,000\,000$.

Enoncé 4:

1) Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
2) De combien de façons peut-on faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?
3) Combien de mots (ayant un sens ou non) de 5 lettres distinctes peut-on écrire en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
4) Une urne contient 10 boules numérotées respectivement 1, ... , 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de possibilités différentes peut-on obtenir ?

Solution :

1) Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a Card(E) = 20. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 6840$.

2) Désignons par $p_1, p_2, ..., p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1, p_2, ..., p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.

3) A_{26}^5

4) A_{10}^3

Enoncé 5:

1) On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) peut-on avoir?
2) Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes s'appellent une "main").
a) Nombre de mains au total
b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as
c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :
3) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

Solution :

1) C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816.$$

2) a) Nombre de mains au total : $C_{32}^3 = \frac{32!}{5!27!} = 201\,376$

b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3

le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "où il n'ya aucun as" est :

C_{28}^2 On applique le principe multiplicatif car on prend une main de 3 as et une main de deux cartes «non as». $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1\,512$

4) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :

$C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1540$

3) $C_{20}^3 = 1140$.

S'exercer

1.c Une série de dix affirmations est proposée à un candidat à un concours. Le candidat doit répondre par " oui " ou " non " à une affirmation. Combien de réponses différentes peut-il donner à de cette intérrogation ?

1.d Un park automobile a 20 parkings. De combien de possibilités peut-on disposer 14 voitures dans ce park ?

1.e On tire au hasard une main de 6 cartes d'un jeu de 32 cartes.

(i)Donner le nombre de mains possibles.

(ii)Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.

(iii)Donner le nombre de mains ayant les quatre " as ".

(iv)Donner le nombre de mains ayant au moins deux trèfles.

1.f Huit athlètes prennent le départ d'une course et franchissent tous la ligne d'arrivée ;

Calculer le nombre de classements possibles à l'issue de cette course en supposant qu'il n'y a pas d'ex aequo.

1.g En utilisant un arbre de choix, déterminer le nombre de parties qu'on peut former avec 4 éléments.

1.h On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie. Donner le nombre de résultats possibles à l'issue des ces lancers.

Calculer le nombre de résultats possibles ayant trois fois " pile ".

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

- Connaître et savoir manipuler le langage des probabilités.
- Savoir choisir la méthode appropriée en fonction de la situation proposée pour effectuer le calcul de probabilité de la réalisation d'un événement d'une épreuve aléatoire.

2.1 INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT

2.1.1 Vocabulaire en probabilité.

Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre apparu sur la face supérieure du dé.

1) a) Peut-on être fixé sur le résultat avant que le dé ne se stabilise complètement ? Une telle expérience est dite aléatoire.

b) Citer trois exemples d'expériences aléatoires dans la vie courante ?

2) Donner l'ensemble Ω des résultats possibles.

3) Donner les résultats qui sont favorables aux contraintes suivantes :

A : «Le chiffre obtenu est pair » ; B : « Le chiffre obtenu est inférieur à 5 » ;

C: « Le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 » ;

Retenir

Une expérience ou épreuve aléatoire , est une expérience dont on ignore le résultat à obtenir avant que l'expérience ne soit totalement réalisée ou faite.

Un résultat possible à l'issue d'une expérience est appelée une éventualité liée à cette expérience.

L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble formé de toutes les éventualités de cette expérience.

Un événement d'une expérience aléatoire est une partie de l'univers.

Un événement A est réalisé si le résultat obtenu à l'issue de l'expérience est une éventualité de A.

L'événement certain d'une expérience aléatoire est son univers.

L'événement impossible est l'événement qui n'est pas réalisé à l'issue de l'expérience.

on le note $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Un événement élémentaire est un événement formé d'une unique éventualité de l'épreuve.

• On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$, si toutes les éventualités qui réalisent A, réalisent aussi B.

• On note par $A \cap B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B.

• On note par $A \cup B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B .

• On dit que A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

• On dit que A et B sont deux événements contraires si B est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A. On note $B = A$ ou $B = C_{\Omega}^{A}$.

• Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'est pas liée ou conditionnée par celle de l'autre.

Exemple

• On lance une fois un dé et on s'intéresse au numéro sur la face supérieure du dé .L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

« Obtenir un nombre pair » est un événement. Il est réalisé par les éventualités 2,4 et 6. On écrit A={2;4;6} . B={1;3;5} .A et B sont incompatibles.

« Obtenir un nombre à deux chiffres » est un événement impossible car il n'est réalisé par aucune des éventualités « obtenir le chiffre 7 » est aussi impossible

« Obtenir un nombre inférieur à 10 » est un événement certain.

« obtenir un nombre premier et pair » n'est satisfait que par l'éventualité 2. C'est donc un événement élémentaire.

Si on lance deux dés, alors les résultats obtenus sur chacun de ces dés sont indépendants. En revanche si on effectue deux tirages successifs sans remise des objets, le premier tirage influence le second tirage puisque la configuration des objets est modifiée d'un tirage à l'autre.

Remarque. L'univers est toujours lié à l'expérience aléatoire, et n'est connu qu'à l'issue de la description de réalisation de l'expérience à partir des données.

Tout dé n'a pas nécessairement 6 faces ;les faces d'un dé peuvent porter d'autres numéros en dehors de ceux qu'on connaît d'un dé usuel.

• On lance un dé et on s'intéresse à la parité du nombre obtenu : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

• On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$

• On lance deux fois de suite une pièce de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\} = \{P,F\} \times \{P,F\}$

• On lance deux dés et on s'intéresse à la somme des numéros obtenus .

$\Omega_s = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1).....(6,6)\}$ .cardΩ=36

A:« Obtenir 3 »; A={(1,1), (2,1)} cardA=2.

S'exercer

2.a On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernables au toucher , numérotés de 1 à 32.

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. Calculer CardΩ.

Soit l'événement A : « tirer exactement trois jetons dont les numéros sont inférieurs ou égaux à 9». Calculer Card(A).

B: « Obtenir des jetons ayant des nombres de même parité.» Calculer card(B).

2.1.2 Probabilité d'un événement.

Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on relève le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?

b) Avec l'univers Ω lié à cette épreuve, on vient de constituer une population statistique et un événement est assimilé à une modalité. Désignons par p(E) la fréquence de réalisation de l'événement E .

(i).Donner comme en statistique le mode de calcul de p(E) sachant que l'éffectif de la modalité A est cardA.

B : « le numéro obtenu est inférieur à 4 »

A : « le numéro obtenu est impair et divise 10 »

(ii).Mettre sous forme de fractions irréductibles, $p(A)$; $p(B)$, $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(\overline{A})$, $p(\Omega)$, $p(\varnothing)$.

Retenir

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est fini et est noté Ω.

En supposant que tous les résultats ont la même chance d'être obtenus ou encore que le poids d'un événement ne dépend que de l'effectif des éventualités qui le réalisent, sa fréquence de réalisation est encore appelée « probablité de sa réalisation ».

Si $p(A)$ désigne la probabilité de réalisation de l'événement A,

alors $p(A)=\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

$p(\Omega) = 1$ et $p(\phi) = 0$

Remarque

- On reconnaît qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : « parfaitement équilibré» ; «non truquée» ; «indiscernables au toucher» ; «au hasard» ,…
- Pour dénombrer **les cas favorables ou les cas possibles**, on peut utiliser des arbres , des tableaux ou des diagrammes .
- Si une éventualité peut être obtenue plusieurs fois, dans le langage ensembliste elle s'écrit une seule fois, mais dans le calcul de probabilité de l'obtention de cette éventualité, on tiendra compte du nombre d'apparition de cette éventualité.

Exemples

- Pour un dé bien équilibré, il y a 6 événements élémentaires qui ont tous la même probabilité.

La probabilité d'apparition d'un numéro est $\frac{1}{6}$. Si A est l'événement : «le numéro obenu est pair», les éventuallités qui réalisent A sont 2, 4 et 6. On a : $p(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{cardA}{card\Omega}$.

• Deux des 6 faces d'un dé équilibré portent le numéro 1, une porte le numéro 2 et trois portent le numéro 3. On lance une fois le dé et on s'intéresse au numéro obtenu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ? ;2 ?;3?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro impair ?

Solution :

1. Soit p(1) la probabilité d'obtenir le numéro 1. Il y a en réalité 6 éventualités avec répétition de certaines on a: 1,1,2,3,3.

Ainsi, $p(1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $p(2)=\frac{1}{6}$; $p(3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. L'événement A : «le résultat obtenu est impair ». $p(A)=\frac{5}{6}$.

• On tire au hasard une main de 4 cartes d'un jeu de 32cartes indiscernables au toucher. Calculons la probabilité de l'événement A : " Obtenir exactement deux as "

$\text{Card}(\Omega)=C_{32}^4$; $\text{Card}(A)=C_4^2\times C_{28}^2$; $p(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{C_4^2\times C_{28}^2}{C_{32}^4}$. On pourra mettre l'expression de $p(A)$ sous forme de fraction irréductible.

S'exercer

2.g Sur 27 convives, 10 ont apprécié l'entrée et le plat de résistance, 11 ont apprécié l'entrée et la sortie et 12 ont apprécié le plat de résistance et la sortie. Par ailleurs, 6 ont apprécié uniquement l'entrée, 3 ont apprécié uniquement le plat de résistance et 1 a apprécié uniquement la sortie.

Déterminer :

a) Le nombre de convives qui ont apprécié :
   i. L'entrée ;
   ii. Le plat de résistance ;
   iii. La sortie ;
   iv. rien du tout.

b) Le pourcentage des convives qui ont apprécié :
i. L'entrée ; ii. Le plat de résistance ; iii. La sortie ; iv. Le menu tout entier ;
v. Deux des composants du menu ; vi. Un seul des composants du menu ; vii. Rien du tout du menu

2.h Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 5 vertes.

A) On tire de cette urne, successivement et sans remise trois boules.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité :

a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;
e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;
f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

B) Répondre aux questions précédentes sachant qu'on tire simultanément trois boules de cette urne.

2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION "PROBABILITÉ"

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit p une probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire; A et B deux événements de Ω.

a. Exprimer Card($\overline{A}$) en fonction de Card(A) ; Card($A \cup B$) en fonction des cadinaux des ensembles A; B et $A \cap B$.

b. En déduire que $p(A)+p(\overline{A})=1$; $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$.

c. Montrer alors que si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$.

Activité 2

Un sac opaque contient huit boules indiscernables au toucher, dont 4 sont rouges ,3 vertes et une jaune. On tire trois fois de suite une boule de ce sac sans remettre la boule tirée avant d'effectuer le tirage suivant.

Soit Ω l'univer associé à cette expérience aléatoire.

a. Calculer Card(Ω).

b. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les trois boules tirées sont de même couleur » .

Soient B : « les trois boules tirées sont toutes vertes » ; C : « les trois boules tirées sont de couleur rouge » ; D: « les trois boules tirées sont toutes jaunes».

c. Calculer p(B); p(C); p(D).

d. Montrer que p(A) = P(B) + p(C) + p(D).

Retenir

Soit p une probabilité sur l'univers Ω.

- Pour tout événement A de Ω , $p(\overline{A})=1-p(A)$.
- Pour tous événements A et B de Ω, $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$.
- Si $A \cap B=\varnothing$, alors $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$.
- La probabilité d'un événement A notée p(A), est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

En effet si $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,...,\omega_s\}$ et $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\}=\varnothing$ pour $i \neq j$ alors,

$A=\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup ... \cup \{\omega_s\}$ et $p(A)=p(\{\omega_1\})+p(\{\omega_2\})+...+p(\{\omega_s\})$

- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Exemple

- Si on lance un dé bien équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$ de paraître.
- De même, si on lance une pièce non truquée, pile et face ont la même probabilité (soit $\frac{1}{2}$) de paraître.

• on tire une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 32 cartes . Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

Il y a 32 événements élémentaires donc $n = 32$. L'événement A : " tirer un as " est formé de 4 événements élémentaires dont $k = 4$. Donc : $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Exercices résolus

Enoncé 1:

François a de 4 chemises bleues, 3 chemises rouges et 2 chemises vertes. Un matin, il choisit une chemise au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il prenne une chemise rouge ?
2. S'apercevant que la chemise rouge qu'il a choisie a une tache, il décide d'en prendre une autre. Quelle est la probabilité pour que ce soit encore une chemise rouge ?

Solution 1 :

1. François possède au total 9 chemises. Puisqu'il choisit au hasard, il y a équiprobabilité.

Puisqu'il a trois chemises rouges, la probabilité demandée vaut : $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2. François choisit maintenant entre 8 chemises et il y a toujours équiprobabilité.

Puisqu'il y a deux chemises rouges, la probabilité cherchée vaut : $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Enoncé 2:

Une urne contient 2 boules rouges, 3 boules blanches et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On en extrait au hasard et simultanément 2 boules.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) A : « Deux boules de même couleur »

b) B « Au moins une boule noire».

Solution 2 :

Cardinal de l'univers, $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10\times 9}{2} = 45$

a) Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur :

$$p(A) = \frac{(C_2^2C_8^0 + C_3^2C_7^0 + C_5^2C_5^0)}{45}$$

b) $\overline{B}$ est : « Aucune boule tirée n'est noire ». $p(\overline{B}) = \frac{C_5^2C_5^0}{45} = \frac{10}{45}$ et

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{10}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} \text{ ou } P(B) = \frac{C_5^1 \times C_5^2 + C_5^2 \times C_5^0}{C_{10}^2} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

Enoncé 3:

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 5 vertes. On tire trois boules de cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre la suivante.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité :

a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ; e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;
f) d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

Solution 3 :

1) Puisque le tirage est successif avec remise, une éventualité de cette épreuve est une 3-listes d'un ensemble à 14 éléments. D'où le nombre de cas possibles est $14^3=2744$

2) a) Comme il y a équiprobabilité la probabilité d'un événement est égale au nombre de cas favorables à sa réalisation sur le nombre de cas possibles.
Un tirage de 3 boules rouges correspond à une 3 listes d'un ensemble à 5 éléments. Soit $5^3 = 125$.

d'où: $p_a = \frac{5^3}{14^3} = \frac{125}{1728}$

b) Pour obtenir deux boules rouges exactement, Il y a C_3^2 dispositions possible dans une éventualité et un choix de 2 boules rouges est une 2-listes d' un ensemble à 5 éléments, soit au total 5^2, puis la $3^{ème}$ boule est choisie parmi les 9 boules restantes donc 9 choix possible; d'où le nombre de cas favorables. $C_3^2 \times 5^2 \times 9 = 675$ d'où $p_b = \frac{C_3^2 \times 5^2 \times 9}{14^3} = \frac{675}{2744}$.

c) L'événement contraire est: "n'obtenir aucune boule rouge". Une éventualité est une 3-listes d'un ensemble à 9 éléments, soit $9^3=729$.

Ainsi $P_c = \frac{9^3}{14^3} = \frac{729}{2744}$ et $P_c = 1 - P_c = 1 - \frac{729}{2744} = \frac{2015}{2744}$

d) Cas possibles: $14^3=2744$

Cas favorables: $C_3^2 \times 5^2 \times 4 = 300$

d'où $P_d = \frac{C_3^2 \times 5^2 \times 4}{14^3} = \frac{300}{2744}$.

e) Cas favorables: les 3 boules sont rouges ou noires ou vertes, soit $5^3+4^3+5^3$

d'où $P_e = \frac{5^3+4^3+5^3}{14^3} = \frac{314}{2744}$.

f) On a 3! dispositions possibles des 3 boules dans une éventualité. Dans une éventualité il y a 5 choix possibles d'une boule rouge, pour chaque choix d'une boule verte et pour chque cas 5 choix possible d'une boule noire.

Soit : $3! \times 5 \times 4 \times 5 = 600$ cas favorables.

D"où $P_f = \frac{3! \times 5 \times 4 \times 5}{14^3} = \frac{600}{2744}$.

S'exercer

2.f

x_i \ y_i	6	10	14	18
2	21	24	18	0
3	12	15	12	3
4	0	9	27	9

Une boîte non transparente contient 150 boutons de 10 types différents, indiscernables au toucher, destinés à la confection de vêtements. Le tableau donne leur répartition en fonction du nombre de trous (x_i) et de leur diamètre en mm (y_i). On tire au hasard un bouton de la boîte. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. Un bouton à 3 trous de 10 mm de diamètre ;

b. Un bouton de 14 mm de diamètre ;

c. Un bouton à 2 trous ;

d. Un bouton de diamètre égal à 6 ou à 10 mm.

2.h On suppose que l'univers est constitué de 5 événements élémentaires a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ayant pour probabilités : $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{4}$, $p_5 = \frac{1}{4}$.

Soit A= $\{a_1; a_3; a_4\}$. Calculer la probabilité de A.

2.g Dans un univers, on considère deux événements incompatibles A et B tels que p(A) = 0,2 et p(B) = 0,7 .

Déterminer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$,$p(\overline{B})$.

2.3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Prendre un bon départ

Activité1

Les statistiques des performances dans un jury de baccalauréat scientifique ont donné les résultats suivants par sexe.

	Garçons	Filles	Total
Admis	60	90	
Refusés	20	30	
Total			

a) Compléter ce tableau, puis calculer le pourcentage de réussite des candidats pour ce jury.
b) On choisit au hasard un candidat de ce jury. Calculer les probabilités des événements suivants :
A :«le candidat est admis» ; B : «le candidat est une fille et est admis» ;
C : «le candidat est un garçon et est refusé »
c) On suppose que le candidat est admis. Calculer la probabilité qu'il soit un garçon.
d) On suppose que le candidat est une fille. Calculer la probabilité qu'il soit refusé.

Activité 2

Un sac contient 8 jetons dont 3 portent le numéro 1 ; 4 le numéro 2 et le dernier porte le numéro 3.

On tire deux jetons du sac l'un après l'autre. Soient A : « le premier jeton porte le numéro 2» et B : « le deuxième jeton porte le numéro 2 » deux événements de cette expérience aléatoire.

a. À partir d'un tableau à double entrée , calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ en supposant que le tirage serait avec remise, puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.
b. Dans quel cas les événements A et B sont-ils indépendants ?
c. Dans ce cas, montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Retenir

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$ et B un autre événement.

- L'événement noté (B/A) est l'ensemble des éventualités pour lesquels B est réalisé sachant que A est déjà réalisé. On l'appelle l'événement B conditionné par A et il se lit «B sachant A».
- $p(B/A) = \dfrac{card(B \cap A)}{card(A)} = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}$; $p(A \cap B) = p(B/A) \times P(A)$
- p(B/A) est encore noté $p_A(B)$,
- A et B sont indépendants si et seulement si (B/A) et B sont réalisés par les mêmes éventualités et ainsi p(B/A) = p(B); soit $p(B \cap A) = p(B) \times p(A)$.

Exemple

On tire d'un sac contenant dix jetons dont 4 sont de couleur rouge et 6 de couleur blanche, successivement deux jetons du sac, sans remise.

a) Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge au premier tirage et un jeton blanc au deuxième tirage.

Si Ω est l'univers de toutes les éventualités liées à cette expérience aléatoire, alors $card(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

Soit les événements A: «le jeton tiré au premier tirage est rouge» et B: «le jeton tiré au deuxième tirage est blanc».

$Card(A \cap B) = 4 \times 6 = 24$. $\quad p(A \cap B) = \dfrac{24}{90} = \dfrac{4}{15}$.

Calculons autrement $p(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = p(B/A) \times p(A)$. Or $p(B/A) = \frac{6}{9}$ et $p(A) = \frac{4}{10}$. $p(A \cap B) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$

Le jeton tiré au deuxième tirage est blanc. Calculons la probabilité pourque le jeton tiré au premier tirage ait été rouge.

On demande de calculer la probabilité de l'événement (A/B).

Soit e_1 l'ensemble des éventualités dont le deuxième tirage est un jeton blanc.

$Card(\Omega_1) = 24 + (6 \times 6 - 6) = 54$. Soit A l'événement formé des éventualités de Ω_1 telles que le jeton rouge soit tiré au premier tirage. $Card(A) = 24$.

$p(A) = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$. D'où $p(A/B) = \frac{4}{9}$.

Si le tirage avait été avec remise, les événements A et B auraient été indépendants et alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque

- Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) : A et B sont indépendants ; (b) : A et $\overline{B}$ sont indépendants ; (c) : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;

(d) : $\overline{A}$ et B sont indépendants.

- Si $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ est une partition de l'univers Ω d'une expérience aléatoire alors pour tout événement A,

$P(A) = P(E_1) \times p(A/E_1) + p(E_2) \times p(A/E_2) + ... + p(E_n) \times p(A/E_n)$.

Cette relation est appelée formule des probabilités totales ou théorème des Bayes ou encore théorème des probabilités totales.

S'exercer

2.I Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches.

a) On tire au hasard et sans remise , 2 boules de l'urne.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

On tire au hasard deux boules et on constate qu'elles sont rouges.

Quelle est la probabilité de tirer à nouveau deux boules et d'obtenir deux boules rouges ?

2.j Une machine est constituée de deux éléments A et B. La défectuosité d'un seul élément suffit à mettre hors service la machine et on exclut toute éventualité de panne.Les avaries éventuelles relatives aux éléments A et B sont deux événements indépendants de probabilités respectives a=0,1 et b=0,2. Calculer la probabilité pour que la machine soit hors service.

2.k Un atelier de montage reçoit des pièces qui proviennent soit de l'usine A, soit de l'usine B, soit de l'usine C. Les proportions sont 45% pour A, 30% pour B, 25% pour C.

Parmi les pièces provenant de A, il y en a 3% de défectueuses ; parmi celles provenant de B, il y en a 5% de défectueuses et parmi celles provenant de C , il y en a 2% de défectueuses.

Calculer le pourcentage de pièces défectueuses dans l'ensemble des pièces reçues.

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

- Savoir définir et utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire;
- Savoir utiliser la loi d'une variable aléatoire pour le calcul des probabilité, de l'espérance mathématique de variance, de l'écart type; ;
- Maîtriser et se servir en particulier des résultats sur la variable aléatoire d'une épreuve répétée de Bernoulli et sa loi binomiale.

3.1 PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Un joueur jette trois fois de suite une pièce de monnaie parfaite et considère les faces apparues.
Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.
a) Donner cinq éventualités, puis donner le nombre de cas possibles de l' épreuve.
La sortie de « Face » fait gagner 1000 francs alors celle de «Pile» fait perdre 600 francs.
Soit X l'application définie sur Ω, qui à une éventualité fait correspondre le gain algébrique du joueur.
b) Calculer X(FFF);X(PFP);X(FPP).
c) Écrire l'ensemble X(Ω) des valeurs prises par X sur Ω.

Retenir

Soit Ω l'univers de toutes les possibilités issues d'une épreuve aléatoire.
Toute relation X qui associe une valeur réelle à chacune des éventualités issue de l'épreuve est appelée variable aléatoire sur Ω.
L'ensemble des valeurs possibles de X sur Ω est appelé univers image de Ω par X et est noté X(Ω).

Exemple

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes.
Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouge donne (-3) points et celle d'une boule verte donne 5 points.
Soit Y le gain algébrique du joueur.
Donner les valeurs possibles de Y.
Soit Ω l'univers associé à l'épreuve : $Card(\Omega) = C_6^3 = 2$ c'est le nombre de cas possibles.

Dans l'urne on a : R, R, R, R, V, V

À l'issue de cette épreuve, le joueur peut avoir :

- trois boules rouges $\{R,R,R\}$; $Y(\{R,R,R\}) = -9$
- deux boules rouges et une boule verte $\{R, R, V\}$; $Y(\{R,R,V\}) = -1$
- une boule rouge et deux boules vertes $\{RVV\}$; $Y(\{R,V,V\}) = 7$

Donc les valeurs prises par Y sont $-9; -1$ et 7 . Soit l'univers image $Y(\Omega) = \{-9, -1, 7\}$

S'exercer

3.a On lance deux fois de suite un dé normal dont les faces portent les numéros 1,2,3,4,5,6. Soit X la variable aléatoire qui à une éventualité (a,b) , associe $|a-b|$ où a et b sont les numéros obtenus au premier et au deuxième lancé du dé.
Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

3.2 LOI DE PROBABILITÉ ET FONCTIONS ASSOCIÉES À UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Prendre un bon départ

Un joueur tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32. Soit X est la variable aléatoire donnant le nombre d' «as» contenus dans une main de 4 cartes tirées.

a) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

Soit a un réel quelconque. L'événement $(X = a)$ est constitué des éventualités ayant pour image a par X.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements :

$(X = 2); (X < 3)$; $(X \geq 3)$; $(X = 7)$.

c) Calculer toutes les probabilités $p(X = a)$ où a décrit $X(\Omega)$.

d) Dresser et compléter un tableau à deux lignes dont la première est constituée des valeurs prise par X (classées par ordre croissant), et la deuxième, des probabilités $p(X = a)$ où a est le nombre réel de la première ligne de la colonne correspondante.

e) Comme pour le tableau des fréquences d'une série statistique $(a, P(X = a))$, où $P(X = a)$ est la fréquence de modalité $(X = a)$ liée à a.

Calculer la moyenne $\overline{X}$, la variance V(X), l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

Retenir

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),p)$; $x_1;x_2;....;x_n$ les valeurs possibles de X sur Ω ; $p_i = p(X = x_i)$.

• Déterminer la loi de probabilité ou encore la distribution de probabilité de la variable X est équivalent à déterminer les valeurs possibles de X et toutes les probabilités p_i .

• Après calculs, les résultats peuvent être consignés dans un tableau comme suit :

x_i	x_1	x_2	x_3					x_n
$p_i = p(x = x_i)$	p_1	p_2	p_3					p_n

• $\overline{X} = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$; La moyenne $\overline{X}$ notée encore E(X), de la série (x_i) ,est appelée espérance mathématique de la variable aléatoire X.

• $V(X) = p_1 \times (x_1 - \overline{X})^2 + ... + p_n \times (x_n - \overline{X})^2$;

• $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (p_1 \times (x_1)^2 + ... + p_n \times (x_n)^2) - (E(X))^2$. (Formule de KOENIG)

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω, a un nombre réel.
X+Y et aX sont aussi des variables aléatoires sur Ω et

- $E(a) = a$;
- $E(aX) = aE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $V(a) = 0$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple

On tire simultanément et au hasard 4 boules d'un sac contenant 10 boules dont 4 sont de couleur verte et le reste de couleur rouge. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes obtenues à l'issue de l'épreuve.

Si Ω est l'univers de toutes les possibilités, alors $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

et $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4\}$

$$p(X=0) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{5}{70} \; ; p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^3}{210} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21};$$

$$p(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^2}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \; ; p(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{210} = \frac{24}{210} = \frac{8}{70};$$

$$p(X=4) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}.$$

Tableau des valeurs de la distribution de probabilité P_X de X.

a	0	1	2	3	4
$P(x=a)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{70}$	$\frac{1}{210}$

$$E(X)=0\times\frac{15}{210}+1\times\frac{80}{210}+2\times\frac{90}{210}+3\times\frac{24}{210}+4\times\frac{1}{210}=\frac{336}{210}=\frac{56}{35}.$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{15}{210}+1^2\times\frac{80}{210}+2^2\times\frac{90}{210}+3^2\times\frac{24}{210}+4^2\times\frac{1}{210}=\frac{660}{210}=\frac{22}{7}.$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{22}{7}-\left(\frac{56}{35}\right)^2=\frac{22}{7}-\frac{3136}{1225}=\frac{22}{7}-2,56=4,08/7.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{4,08}{7}}.$$

S'exercer

3.b Une urne opaque contient 5 boules indiscernables au toucher : deux boules sont rouges et portent le chiffre 1, deux boules sont vertes et portent le chiffre 2 ; la dernière est blanche et porte le chiffre 3.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

b) Calculer les probabilités des événements suivants:

A : " tirer exactement deux boules rouges " ;

B : " tirer trois boules de couleurs différentes " ;

C : " tirer une boule blanche ".

c) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque éventualité, la somme des chiffres portés par les boules tirées.

(i) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

(ii) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

(iii) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

3.c Une usine rectifie des pièces d'horlogerie. A l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts d'aspect.

3.d Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de défauts d'une pièce tirée au hasard dans un lot. La loi de X est définie par le tableau suivant :

a	0	1	2	3
$P(x=a)$	0,920	0,06	0,016	0,004

Calculer l'espérance mathématique de X.

Calculer la variance et l'écart type de X.

Le prix de vente d'une pièce dépend du nombre de défauts qu'elle présente.

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente (en francs)	15 000	10 000	7 500	2 500

Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le prix de vente d'une pièce choisie au hasard dans un lot.
Déterminer la loi de probabilité de Y.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de Y.

3.3 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

Prendre un bon départ

Soit X une variable aléatoire dont les valeurs de la loi de distribution de probabilité sont données dans le tableau ci-dessous:

a	0	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{70}$	$\frac{1}{210}$

a) Calculer les probabilités des événements suivants :

$(X \leq a)$ pour a pris dans l'ensemble $\{0;1;2;3;4\}$.

b) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$ est constante sur les intervalles $]-\infty;0[;[0;1[;[1;2[;[2;3[;[3;4[;\ [4;+\infty[$.(On précisera la valeur de la constante sur chacun de ces intervalles).

c) Construire la représentation graphique de la fonction F dans un repère orthogonal (O,I,J) en prenant les unités convenables sur les axes de coordonnées.

Retenir

Soit X une variable aléatoire sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

- La fonction de répartition de X est la fonction F de $\mathbb{R}$ dans [0;1] définie par : $F(x) = p(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- F est une fonction en escalier et croissante, sur $\mathbb{R}$..
- Si la distribution de probabilité de X a pour valeurs, celles du tableau ci-dessous

x_i	x_1	x_2	x_3					x_n
$p(x=x_i)=p_i$	p_1	p_2	p_3					p_n

alors, sur $]-\infty;x_1[$, $F(x)=0$; sur $[x_1;x_2[$, $F(x)=p_1$;
sur $[x_2;x_3[$, $F(x)=p_1+p_2$;... ; sur $[x_i;x_{i+1}[$, $F(x)=p_1+p_2...+p_i$
$[x_n;+\infty[$, $F(x)=p_1+p_2+p_3+...+P_n=1$.
Note: On peut dresser le tableau des valeurs de F

Exemple

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes.
Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouges donne -3 points et celle d'une boule verte donne 5 points.
Soit Y le gain algébrique du joueur.
Y peut prendre les valeurs $-9; -1$ ou 7.
Déterminons la loi de probabilité de Y.

$p(Y=-9)=p(\{R;R;R\})=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; $p(Y=-1)=p(\{R;R;V\})=\frac{C_4^2\times C_2^1)}{C_6^3}=\frac{3}{5}$;

$p(Y=7)=p(\{R;V;V\})=\frac{C_4^1\times C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

Soit F la fonction de répartition de Y. F est définie par :

pour $x<-9$, $F(x)=0$; *pour* $-9\le x<-1$, $F(x)=\frac{1}{5}$; pour $-1\le x<7$,

$F(x)=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$; pour $x\ge 7$, $F(x)=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$.

S'exercer

3.e Une boîte contient 4 ampoules de 40watts, 6 ampoules de 60 watts et 10 ampoules de 100 watts. On tire au hasard une ampoule de la boîte. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la puissance exprimée en watts de l'ampoule obtenue.

a) Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

c) Définir, puis construire la représentation graphique la fonction de repartition de X dans un repère orthogonal.

3.f Le président d'un club décide d'organiser une Tombola. Tous les billets , au nombre 500, sont vendus.

L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent de gagner 7 000 francs, 50 billets permettent d'être remboursé, les autres sont des billets perdants.

1. Un joueur achète un billet. Exprimer en pourcentages :

a) La probabilité de gagner un lot de 7000 francs ;

b) La probabilité d'avoir un billet perdant.

2. Des billets sont vendus 500 francs l'unité. Calculer le gain de la trésorerie du club.

3. Le gain du joueur est la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. Ainsi, pour des billets remboursés, le gain est nul et, pour un billet perdant, le gain est négatif.
Soit X le gain du joueur.

a) Donner les valeurs possibles de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Définir la fonction de répartition de X et la réprésenter graphiquement.

3.4 ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

Prendre un bon départ

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire, dont la probabilité pour que A soit réalisé est p.

a) Calculer la probabilité de l'événement $\overline{A}$.

b) On répète la même épreuve 7 fois de façon identique et indépendante.

Soit l'événement E : «réaliser trois fois l'événement A».

Une possibilité est par exemple $A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A\overline{A}$ qui signifie que A a été réalisé aux lancers 1; 5 et 7.

(i) Donner cinq autres listes contenant trois fois A. Montrer qu'il y autant de listes contenant trois A que d'anagrammes de «$A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A\overline{A}$» et que le nombre de telles listes est C_7^3.

(ii) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p(A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A\overline{A})$.

(iii) Les épreuves étant indépendantes, montrer que

$p(A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A\overline{A}) = (p(A))^3 \times (p(\overline{A})^4 = p^3 \times (1-p)^4$.

(iv) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p^3 \times (1-p)^4$.

Retenir

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire dont la probabilité de réalisation est p.
Si on répète cette épreuve n fois de suite , de manière indépendante et dans les mêmes conditions, alors la probabilité p_k de réaliser k fois l'événement A est

$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{(n-k)}$ où $0 \leq k \leq n$.

Cette épreuve répétée est dite de Bernoulli, et le couple $(n; p)$ en est le paramètre.

Exemple

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher dont 5 jetons de couleur noire. On tire simultanément 6 jetons du sac.

Calculons la probabilité d'otenir exactement trois jetons noirs.

Soit p cette probabilité. $p = \frac{C_5^3 \times C_3^3}{C_8^6} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

On repète 10 fois de suite de façon identique et indépendante le triage simultané au hasard de 6 jetons du sac. Calculons la probabilité d'obtenir exactement 6 fois, 3 jetons noirs à l'issue de l'épreuve

On a ici une épreuve répétée de paramètre $\left(10;\frac{5}{14}\right)$. Le succès c'est obtenir 3 jetons noirs à l'issue d'une épreuve. la probabilité p d'avoir 6 fois " trois jetons noirs " est $p=C_{10}^{6}\times\left(\frac{5}{14}\right)^{6}\times\left(1-\left(\frac{5}{14}\right)\right)^{4}=C_{10}^{6}\times\left(\frac{5}{14}\right)^{6}\times\left(\frac{9}{15}\right)^{4}$ (on peut écrire le résultat sous forme d'une fraction irréductible ou en donner une valeur approchée).

On tire n fois de suite de façons identiques et indépendantes 6 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité P_n de l'événement E

" obtenir au moins une fois trois jetons de couleur noire ".

L'événement contraire de E est $\overline{E}$ " obtenir zéro fois trois jetons de couleur noire ".

$p(E)+p(\overline{E})=1$. Or $p(\overline{E})=C_n^0\times\left(\frac{5}{14}\right)^{0}\times\left(\frac{9}{14}\right)^{n}=\left(\frac{9}{14}\right)^{n}$ d'où $p(E)=1-\left(\frac{9}{14}\right)^{n}$.

Déterminons le nombre minimum de fois pour répéter l'épreuve pour que la probabilité de E soit au moins égale à 0,95.

Pour avoir $p(E)\geq 0{,}95$. il faut que $1-\left(\frac{9}{14}\right)^{n}\geq 0{,}95$; soit $\left(\frac{9}{14}\right)^{n}\leq 0{,}05$.

D'où $\ln\left(\left(\frac{9}{14}\right)^{n}\right)\leq \ln(0{,}05)$ ou encore $n\times\ln\left(\frac{9}{14}\right)\leq \ln(0{,}05)$.

$n\geq\frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{9}{14}\right)}$; soit $n\geq 6{,}78$. La valeur minimale de n est 7.

S'exercer

3.e On tire simultanément au hasard quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.
On répète cette expérience 5 fois de suite de façons identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'avoir :
(i) exactement deux fois au moins un as.
(ii) au moins une fois, au moins un as.
(iii) aucune fois, au moins un as.

3.f On lance 10 fois de façons identiques et indépendantes de suite un dé cubique équilibré dont 2 faces portent le numéro 3.
Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois une face portant le numéro 3.

3.g Un sac contient dix boules rouges et 2 boules blanches.
On tire simultanément trois boules du sac.
Calculer la probabilité d'avoir les boules de couleurs différentes.
On répète cette expérience trois fois de suite de façons identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux fois des boules de couleurs différentes.

3.h Combien de fois faut-il lancer de façons identiques et indépendantes un dé cubique, équilibré , dont une seule face porte le numéro 5 pour que la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5 au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,9 ?

3.4.2 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.

Prendre un bon départ

Soit A un événement d'une épreuve aléatoire, dont la probabilité pour qu'il soit réalisée est p.

On répète de façon identiques et indépendantes cette épreuve n fois.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que

l'événement A a été réalisé à l'issue de l'épreuve..

a) Donner les valeurs de X.

b) Donner en fonction de k,n et p l'expression de la probabilité de l'événement $(X = k)$

où $0 \leq k \leq n$.

c) Soit X_i le nombre de fois que l'événement A a été réalisé à la i-ième épreuve.

(i) Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, ...$ et X_n sont indépendantes.

(ii) Montrer que $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$.

(iii) Montrer que $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

(iv) En déduire que $E(X) = n \times p$ et que $V(X) = n \times p \times (1-p)$.

Retenir

Si une épreuve est répétée n fois de suite de façon identique et indépendante, A un événement de l'épreuve élémentaire dont la probabilité pour qu'il soit réalisé est p

X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que

l'événement A a été réalisé à l'issue de l'épreuve répétée, alors

- X peut prendre les valeurs entières de l'intervalle $[0; n]$.
- Pour tout entier k de [0; n], $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
- La loi de probabilité de X est appelée loi de distribution binomiale de paramètre $(n; p)$.
- Si une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètre $(n; p)$, alors

$E(X) = n \times p$, $V(X) = n \times p \times (1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$

Exemple

On lance un dé cubique , dont les faces portent respectivement les numéros 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 et tel que la probabilité d'obtenir un numéro k est proportionnelle à k.

a) Calculons la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5.

Notons par p_k la probabilité d'obtenir la face portant le numéro k.

On a $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=....=\frac{p_6}{6}$ et $p_1+p_2+...+p_6=1$.

On peut écrire aussi : $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=...=\frac{p_6}{6}=\frac{p_1+p_2+...+p_6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{1}{21}$.

Il vient que $p_5=\frac{5}{21}$.

On lance ce dé 15 fois de suite et X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que le nombre 5 est obtenu.

b) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

X suit la loi binomiale de paramètre $\left(15;\frac{5}{21}\right)$.

$E(X)=15\times\frac{5}{21}=\frac{75}{21}$; $V(X)=15\times\frac{5}{21}\times\frac{16}{21}=\frac{1200}{21^2}$; $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1200}{21^2}}=\frac{20}{21}\times\sqrt{3}$.

S'exercer

3.e À chaque tir, la probabilité qu'un joueur touche la cible est 0,7.Un joueur effectue 10 tirs successifs avec le même matériel. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois qu'il atteint la cible.

(i)Donner les valeurs possibles de X.

(ii)Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

3.f On a constaté que dans une famille monogame , la probabilité lors d'une naissance d'avoir un garçon est de $\frac{5}{9}$.

(i) Calculer la probabilité d'avoir trois garçons exactement après 6 naissances ;

(ii) Calculer le nombre moyen de filles que cette famille peut espérer avoir après 5 naissances (on suppose qu'il y a un seul nouveau né au cours d'une naissance).

S'ENTRAÎNER

PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

1

De combien de manières peut-on garer 2 voitures dans un parking qui a 5 places ?
De combien de manières peut-on garer 3 voitures dans un parking qui a 5 places ?

2

Une commune compte 20 conseillers municipaux et on voudrait former un bureau comprenant un maire et ses trois adjoints.
Sachant qu'il n y a pas de cumul de postes, déterminer le nombre de possibilités qu'on a de constituer un tel bureau.
Combien de possibilités a-t-on de constituer un bureau dans lequel madame Koné est maire ?

3

Combien de nombres à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 2,6,7,8,9 ?
Combien de tels nombres sont pairs ?

4

Une marque d'automobiles produit 4 modèles A,B,C et D. Les modèles A et B se font en quatre carrosseries : berlines,coupé,cabriolet et utilitaire.Les modèles C et D se font en deux carrosseries :coupé et berlines
Chaque modèle est vendu en sept coloris.
Calculer le nombre de choix qui s'offrent à un client désirant acheter une voiture de cette marque.

5

Un touriste doit visiter les villes B,C,D,E partant de la ville A.
1. Déterminer le nombre total de possibilités d'itinéraires pour ce touriste.
2. Combien a-t-il d'itinéraires s'il doit passer par la ville C avant la ville D ?

6

On tire au hasard une boule d'une urne contennt une boule jaune J, une boule verte V et une boule rouge R. On remet la boule tirée dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant. Un résultat est un couple dont le premier élément est la boule tirée au premier tirage et le deuxième celle tirée au deuxième tirage.
a.Déterminer le nombre de résultats possibles.
b.Enumérer tous ces résultats.
c.Le tirage d'une boule jaune fait perdre 300 francs, celui d'une boule verte fait gagner 100 francs et celui d'une boule jaune fait gagner 200 francs. Donner les différents gains possibles pour celui qui effectue ces tirages.

7

Combien de nombres à six chiffres peut-on former dans lequel figure 2 fois le chiffre 4, 3 fois le chiffre 7 et une fois le chiffre 1.

8

On tire simultanément 6 cartes parmi 32. Déterminer le nombre de mains qui contiennent au plus 3 as.

9

Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie, 2 d'anglais.
Il veut ranger ces livres sur une étagère.
1) De combien de façon peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2) De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie,puis ceux de mathématiques, et enfin ceux de philosophie ?
3) De combien de façons peut-il le faire s'il range les livres par matière ?

10

Une urne contient 13 boules indiscernables au toucher dont 6 blanches et 7 noires.On tire

simultanément trois boules du sac.
Déterminer le nombre de possibiltés d'obtenir;
a)3 boules blanches ;
b)2 boules noires ;
c)au moins une boule blanche ;
d) au plus deux boules noires.

11

Un chef d'entreprise doit choisir 4 employés parmi 20 candidats dont 13 femmes et 7 hommes.
a)Combien de choix s'offrent à ce chef ?
b)De combien de manières peut-il faire son choix sachant qu'il doit choisir au moins un homme et au moins une femme ?

12

Une assemblée qui compte 20 hommes et 15 femmes veut élire un comité de six membres.
a) Combien de comités peuvent-ils être constitués ?
b) Déterminer le nombre de comités possibles si mme ADA refuse de siéger avec Mr Stephen dans un même comité.

13

De combien de façons peut-on ranger 4 livres dans 6 étagères sachant qu'une étagère peut avoir 0,1,...,10 livres ?

14

Quatre personnes se donnent rendez-vous au café du quartier.Ce quartier compte malheureusement quatre cafés. Déterminer le nombre de possibilités qu'ont ces personnes d'aller chacun dans un café pourqu'aucune d'entre elle ne rencontre aucune autre.

15

Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées 1,2,3 de la gauche à la droite.
Déterminer grâce à un arbre de choix, le nombre de possibilités de passage de ces deux voitures .

CALCULS DES PROBABILITÉS

16

On lance une fois deux dés cubiques normaux dont les faces sont numérotés de 1 à 6 : l'un est blanc et l'autre est vert.
Le résultat d'un lancer est un couple (x;y) où x est le numéro apparu sur le dé vert et y celui apparu sur la face supérieure du dé blanc.
a.Combien y-a-t-il de resultats possibles ?
b.Quelle est la probabilité d'obtenir une éventualité de chaque épreuve ?
c.Soit S la somme des numéros obtenus.
(i).Donner les valeurs possibles de S.
(ii).Calculer la probabilité pourque S soit égale à 7.

17

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.On tire simultanément cinq cartes parmi les 32.
1) Combien de mains contiennent 3 rois ?
2) Combien de mains contiennent 3 piques ?
4) Combien de mains contiennent 3 cartes de la même couleur ?
5) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant au moins un as.
6) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant exactement un as et un pique.

18

Le personnel d'un hopital est réparti en trois catégories : les médecins,le personnel soignant, le personnel adminstratif et technique .
Parmi les 350 membres du personnel de cet hopital, 70 sont des hommes, 28 sont des médécins.De plus il y a deux fois moins de femmes médecins que d'hommes médecins.
1.Recopier et compléter ce tableau.

	hommes	femmes	total
Médecins			
Personnel soignant		230	250
Personnel technique et administratif			
total			350

On choisit un personnel au hasard.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
" Il est un soignant " ;
" elle est une femme médecin " ;
" elle est une femme ou un médecin "

Un sac contient 5 jetons :un bleu, deux rouges et deux verts. Le jeton bleu vaut 3 points, le rouge 2 points et le vert 1 point.
On tire au hasard un jeton du sac.
Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge ;
Calculer la probabilité d'avoir au moins deux points.
On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier jeton dans le sac.
Calculer le nombre de cas possibles
Calculer les probabilité de chacun des événements :
" Obtenir deux jetons de couleurs différentes "
" Obtenir 4 points "
" Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes "
" Obtenir au moins 4 points ".

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :
" obtenir une boule blanche "
" obtenir une boule ni blanche, ni rouge "
" obtenir une boule noire ou une boule rouge "
A et B sont-ils incompatibles ?
B et C sont-ils incompatibles ?
A et C sont-ils incompatibles ?
A et C sont-ils contraires l'un de l'autre?
Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Dans une classe de terminale scientifique, 10 élèves ont les livres de Mathématiques et d'Anglais, 9 élèves ont uniquement le livre d'anglais et 5 n'ont pas du tout de livre.
Déterminer :
a) L'effectif de cette classe
b) Le pourcentage des élèves qui n'ont que le livre d'Anglais
c) Le pourcentage des élèves qui n'ont pas le livre d'Anglais
d) Le pourcentage des élèves qui ont au moins un des deux livres

22

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Le résultat de cette expérience est égal au nombre de fois où la pièce tombe sur pile, moins le nombre de fois où elle tombe sur face. Exemple : si la pièce est tombée sur " pile " au premier et au troisième lancer et sur " face "au deuxième, le résultat est égal à : 2-1=1.
1.Énumérer (à l'aide d'un arbre de choix), toutes les éventualités, puis déterminer le nombre total de cas possibles associés à cette épreuve ?
2.Pour chacune de ces éventualités, calculer le résultat de l'expérience.
On fait l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée et que les huit éventualités trouvées ci-dessus ont la même probabilité.
3.Quelle est la probabilité pour que le résultat soit égal à +3 ?, +1 ?, -1 ?, -3 ?
4 . Le joueur gagne si pile a apparu plus de fois que face. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?

23

Un dé est truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée par le tableau :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1.Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre n inférieur ou égal à 4 ?
Un nombre n strictement supérieur à 4 ?
2.Calculer a et b, sachant que l'apparition du n° 5 est 4 fois plus probable que celle du n°6.

24

Un objet en série a un coût de production de 950 francs.Il peut présenter , à l'issue de sa fabrication , un défaut A, un défaut B, ou en même temps les défauts A et B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 francs pour le défaut A,
150 francs pour le défaut B,
250 francs pour les deux défauts.
On prélève un lot de 200 objets . Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B sur 12 et 180 n'ont aucun défaut. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets	Avec défautA	Sans défaut A	total
Avec défaut B			
Sans défaut B			
Total			

Calculer le prix de revient d'un objet selon ses défauts éventuels.
Calculer la probabilité pour que le prix de revient d'un objet soit de 1200 francs.

25

On a administré un vaccin aux souris et aux lapins.Ces cobailles sont au nombre de 100. La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une souris est 0,65 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur un lapin est 0,5 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur les souris uniquement est 0,35 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse uniquement sur les lapin est 0,2; par ailleurs la probabilité que le vaccin ne réussisse pas du tout est 0,15.
Déterminer :
a) L'effectif de chaque espèce de cobaille.
b) La probabilité pour que le vaccin réussisse sur les deux espèces de bêtes.
d) La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une seule espèce de cobaille

26

Les 37 élèves d'une classe de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Apprennent l'anglais	18	10
N'apprennent pas l'anglais	5	4

1.On choisit un élève de cette classe au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ? Une fille ? Une fille apprenant l'anglais ?
2.L'élève choisie étant une fille, déterminer la probabilité quelle apprenne l'anglais.

27

Un lot de pièces fabriquées contient 5% de pièces défectueuses. Un contrôleur choisit au hasard une pièce dans le lot. Quelle est la probabilité pour quelle soit en bon état ?

28

Les organisateurs d'une tombola émettent 200 billets indiscernables au toucher. Parmi ces billets, 2 donnent droit à un prix de 1000 francs, 100 à un prix de 200 francs, et 20 à un prix de 50 francs. Les autres ne rapportent rien. Le premier participant choisit au hasard un billet, parmi les 200.
1. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un lot de 1000 francs ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne rien ?
3. Sachant que le prix du billet est de 100 francs, Quelle est la probabilité pour que le joueur fasse un bénéfice ?

29

Le livreur d'une maison de vente par correspondance vous apporte un colis au 3e étage. Vous fouillez dans votre poche et lui donnez une pièce au hasard. Sachant que votre poche contenait exactement 2 pièces de 200 F, 3 de 500 F, 6 de 1000 F, 3 de 2000 F, 2 de 5000 F et 2 de 10000 F, quelle est la probabilité que le livreur vous dise merci ?
N.B. Le livreur ne remercie que si le pourboire est au moins égal à 2000 F.

30

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré et on gagne si l'écart entre les points marqués est 1 ou 2. Quelle est la probabilité de gagner ?

31

Au restaurant du lycée, les tables sont rondes et ont 5 places chacune. Pierre et Jean,

choisissent leurs places au hasard autour d'une table. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient assis l'un à côté de l'autre ?
Indication : on peut utiliser un tableau pour représenter les positions respectives de Pierre et Jean.

32

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie. On note, à chaque jet, la face visible : P pour Pile, F pour Face. On obtient ainsi une suite de trois lettres, par exemple FPF ou PFF, ou bien d'autres…
1.Combien de suite de trois lettres peut-on obtenir ?Indication : on peut faire un arbre.
2.Calculer la probabilité des événements suivants :
A : " obtenir trois fois la même lettre ".
B : " obtenir une seule fois la lettre P ".
C : " obtenir la lettre P suivi de la lettre F ".

33

Un enfant de 16 mois joue avec 5 cartes sur lesquelles sont écrites les lettres A, B, C, D, E. Il dispose trois de ces cartes devant lui, au hasard, formant ainsi un " mot " de trois lettres. Quelle est la probabilité pour que, pensant déjà à son avenir, il ait ainsi écrit le mot BAC ?
Suggestion : on peut construire un arbre (ou du moins en esquisser quelques branches…)

34

Fabrice, Sébastien, Stéphanie, Caroline et Clara passent 4 jours au camping. Chaque soir, on tire à pile ou face pour savoir qui fera la vaisselle :si on tire " pile ", c'est les garçons qui feront la vaisselle et les filles feront la vaisselle si on tire " face ".
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : " les garçons font la vaisselle le premier soir " ;
B : " les garçons font la vaisselle trois fois durant le séjour " ;
C : " Aucun groupe ne fait la vaisselle deux soirs consécutifs ".

35

Une urne contient trois boules : une rouge, une verte, une bleue. On tire successivement deux boules de l'urne. Avant de tirer la deuxième boule, on remet dans l'urne la première boule obtenue. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
1.Donner la liste de tous les tirages possibles.
2.Calculer la probabilité des événements suivants :
A : " obtenir deux boules rouges ".
B : " obtenir deux boules de même couleur ".
C : " obtenir deux boules de couleurs différentes ".

36

Un jeu de construction est constitué de cubes et de cylindres de couleur rouge, bleue ou verte. Il y a en tout 80 pièces dont 25 cylindres ;
15% des pièces sont des cubes rouges.
20% des cylindres sont bleus.
Il y a 5 fois plus de cubes bleus que de cylindres bleus et deux fois moins de cylindres verts que de cubes verts.
1. Combien y a-t-il de cubes ?
2. Recopier et compléter ce tableau :

	Bleu	Rouge	Vert	Total
Cubes				
Cylindres				
Total				80

3. On tire au hasard une pièce du jeu de construction ; calculer la probabilité des événements suivants :
A : " la pièce est rouge ",
B : " la pièce est cubique et verte ".

37

Un sondage est effectué auprès de 1 200 personnes partant en vacances à propos du lieu de séjour qu'elles préfèrent : mer, campagne ou montagne. On distingue deux catégories d'âges : moins de 35 ans, 35 ans et plus.
45% des personnes interrogées ont moins de 35 ans ;
22% des personnes interrogées préfèrent la campagne.

Parmi les " moins de 35 ans ", 310 préfèrent la mer et 120 préfèrent la montagne.
Parmi les " 35 ans et plus ", 180 préfèrent la montagne.
1.Calculer le nombre de personnes interrogées ayant moins de 35 ans. Calculer le nombre de personnes interrogées qui préfèrent la campagne.
2.Reproduire et compléter le tableau suivant, en remplissant d'abord la dernière colonne.

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Moins de 35 ans				
35 ans et plus				
Total				1200

1.On interroge une personne au hasard.
a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle préfère la mer.
b) Calculer la probabilité p_2 qu'il s'agisse d'une personne de moins de 35 ans préférant la mer.
2.La personne interrogée déclare préférer la montagne. Calculer la probabilité p_3 quelle ait 35 ans et plus.

38

Dans un grand magasin, il y a 120 pantalons à vendre dans les quatre tailles : S, M, L ou XL et dans les trois coloris : vert, bleu ou rouge.
50% des pantalons sont bleus et 20% des pantalons sont de taille S.
En taille S, il y a Le même nombre de pantalons dans les trois coloris.
Il y a trois fois plus de pantalons dans la taille S que dans la taille XL.
En taille XL, il n'y a que des pantalons bleus.
D'autres informations figurent dans le tableau ci-dessous.

	S	M	L	XL	Total
Vert		10			
Bleu			20		
Rouge		12	15		
Total					120

1.Recopier et compléter le tableau en justifiant les résultats obtenus.
2.Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un pantalon étant pris au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :
A : " le pantalon est vert ",
B : " le pantalon est de taille L ".
C : " le pantalon est vert et de taille L ".
On choisit un pantalon au hasard parmi les verts. Quelle est la probabilité pour qu'il soit de taille L ?

39

Une usine d'horlegerie fabrique une série de montres.Certaines montres peuvent présenter un défaut x ou un défaut y.
Des études statistiques menées sur 10000 montres ont donné les informations suivantes :
10% des montres ont le défaut x;
Parmi les montres ayant le défaut x, 12% ont le défaut y;
Parmi les montres ne présentant pas de défaut x, 5% présentent le défaut y.
1.Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

Nombre de montres	Ayant le défaut x	N'ayant pas le défaut x	totaux
Ayant le défaut y			
N'ayant pas le défaut y			
Totaux			

2.On choisit au hasard une de ces 10000 montres, chacune de ces montres ayant la même probabilité d'être choisie.
Déterminer la probabilité de chacun des l'événements :
A : " La montre choisie présente le défaut x "
B : " la montre a le défaut y "
C : " la montre est sans défaut "
D=A∪B et E=A∩B

40

Dans une entreprise , le tableau suivant repartit des salaires mensuels.

Salaires	6000	7000	10000	20000	35000
Effectis	300	100	50	40	10

1.Calculer le salaire mensuel moyen.
2.On interroge une personne au hasard cette entreprise.

alculer la probabilité des événements :
A : " son salaire mensuel est de 6000 "
B : " elle gagne au moins 10000 "
C : " son salaire n'atteint pas le salaire moyen "
n interroge , au hasard une personne dont le
laire mensuel est supérieur à 10000 francs.
Calculer la probabilité de l'événement :
elle ne fait pas partie des personnels les plus
numérés ".

41

ns un collège 600 élèves, chaque élève
udie come première langue vivante soit
nglais, soit l'allemand, soit l'espagnol.Dans
collège, il n'y a pas d'internes mais
clusivement des externes et des demi-
nsionnaires. La repartition de l'ensemble des
ves est la suivante :
20% étudient l'allemand en première langue
parmi eux le quart sont demi-pensionnaires ;
70% étudient l'anglais en première langue et
rmi eux, un septième sont demi-
nsionnaires ;
Le reste des élèves sont des externes qui ont
oisi l'espagnol pour première langue.
Recopier et compléter le tableau suivant :

Première langue vivante	Nombre d'externes	Nombre de demi-pensionnaires	Total
Anglais			
Allemand			
Espagnol			
Total			600

On prend au hasard un élève dans ce
llège. Calculer la probabilité de chacun des
énements :
A : " l'élève est demi-pensionnaire " ;
B : " l'élève est externe et apprend comme
remière langue vivante l'anglais ou
Espagnol "
C : " l'élève apprend comme première langue
spagnol et est externe "
D : " l'élève apprend comme première langue
nglais et est demi-pensionnaire ".

42

ns un aquarum, on prend un premier
isson, puis un second sans remettre le
remier pris.
L'aquarum contient 4 poissons rouges et 2 poissons noirs.
a.Combien de couples de poissons peut-on obtenir ?
b. Quelle est la probabilité de l'événement A : " Obtenir deux poissons noirs ".
c. Calculer la probabilité de l'événement B : " Obtenir deux poissons noirs "
d. Calculer la probalité des événements $A \cup B$.
e. En déduire la probabilité d'obtenir deux poissons de couleurs différentes.
2.Il y a maintenant dans l'aquarum 4 poissons rouges et x poissons noirs($x \geq 2$).
Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : " obtenir deux boules noires "
B : " obtenir deux boules rouges "
C : " obtenir deux boules de couleurs différentes "

Montrer que $p(C) = \dfrac{8x}{(x+4)(x+3}$.

43

On lance un dé cubique équilibré dont les faces portent les numéros 1,2,…,6 respectivement et on tire une carte parmi quatre qui sont différentes .
a.Déterminer le nombre de possibilités d'avoir une carte et un numéro provenant d'une face de dé.
b.Calculer la probabilité d'avoir une carte et un nombre supérieur ou égal à trois.

44

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges, 5 boules noires et 3 boules vertes. On tire simultanément trois boules de cette urne.
a. Calculer le nombre de résultats possibles de cette expérience .
b. Calculer la probabilité d'avoir :
(i) des boules de même couleur ;
(ii) des boules de couleurs distinctes deux à deux ;
(iii) des boules de couleurs différentes.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

45

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans.Il y a dans cette classe 6 filles âgées de 18 ans et une fille âgée de 16 ans.

1. Mettre les informations ci-dessus dans un tableau dont les deux entrées sont constituées des âges et du sexe respectivement.
2. Un élève est choisi au hasard.

Calculer la probabilité que ce soit :

- un garçon ;
- un élève âgé de 16 ans ;
- une fille âgée de 17 ans ;

3. Sachant que l'élève choisi est un garçon. Calculer la probabilité qu'il ait 16 ans ; 17 ans ? 18 ans ?

46

On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir trois fois pile ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux fois pile sachant qu'on a obtenu pile au premier lancer ?

47

Une urne contient trois boules vertes, 2 jaunes, et 4 bleues. On tire au hasard une boule de l'urne , que l'on ne remet pas dans l'urne, puis on tire au hasard une seconde boule.

1. Calculer la probabilité de tirer ainsi successivement :

a) Deux boules vertes ;
b) Une boule jaune, puis une boule verte ;
c) Une boule bleue, puis une boule verte.

2. Calculer la probabilité de tirer une boule verte au second tirage.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule jaune au second tirage.
4. Calculer la probabilité de tirer une boule bleue au second tirage.

48

On lance un dé non truqué.

Calculer la probabilité d'obtenir le chiffre
a) sachant que l'on a obtenu un résultat
b) sachant que l'on a obtenu un multiple de

49

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué. La probabilité de voir apparaître chacun des six faces est donnée par le tableau suivant :

numéro	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1.Calculer a et b , sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois pus probable que celle du 6.

2.Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro pair.

3. Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro impair.

4. Calculer la probabilité que le numéro sorti sachant que c'est un numéro impair.

5. On considère les événement suivants :

A : ''Obtenir un numéro pair".
B : ''Obtenir un multiple de 3".
C : ''Obtenir un nombre inférieur ou égal à
Dire si les événements Aet B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants.

50

I) On tire au hasard et simultanément 4 cartes dans un jeu de 32.

Calculer la probabilité d'avoir exactement un pique , sachant qu'on a 3 cartes noires et une rouge.

II) On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a. A : ''2 apparait le premier" ;B : ''3 apparait en second".

b.A :6 ''apparait le premier" ; B :"6 apparait deux fois".

c.A :"6 apparait une fois" ; B :"1 apparait une fois"

51

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes pour

un laps de temps déterminé sont respectivement 0,12 pour A et 0,18 pour la lampe B.
On admet que ces événements sont indépendants.
1.Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne .
2.En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.
3.Calculer la probabilité pour qu'une lampe , et une seule tombe en panne.
Les résultats seront donnés avec quatre décimales.

52

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, puis, sans remettre, on en tire une seconde.
Soien A et B les événements :
A : " la première carte tirée est un pique "
B : " la seconde carte tirée est un pique "
C : " la seconde carte tirée est un cœur ".
Calculer les probabilités des événements A,B,C, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$.
Les événements A et B, A et C, B et C sont-ils indépendants ?

53

Deux urnes A et B contiennent chacune 3 boules vertes et 2 jaunes.
1.On tire simultanément une boule de chaque urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.
2.On tire une boule de l'urne A que l'on remet dans l'urne B, puis on tire une boule de l'urne B. Calculer la probabiité d'obtenir deux boules vertes.

54

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. S'il s'agit d'un as, on la remet dans le jeu. S'il ne s'agit pas d'un as, on ne la remet pas dans le jeu.
On tire alors une seconde carte.
En utilisant la formule des probabilités totales, Calculer les probabilités des événements suivants :
A : " la première carte tirée est un as " ;
B : " la deuxième carte tirée est un as ".

55

Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes ;
-Le premier , des bulbes à fleurs rouges dont 90% donnent une fleur ;
- Le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80% donnent une fleur.
Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second .
Un bulbe de tulipe donne au plus une fleur.
L'horticulteur plante un bulbe choisi au hasard.
Déterminer les probabilités des événements suivants :
a) obtenir une fleur rouge ;
b) obtenir une fleur jaune ;
c) ne pas obtenir de fleur.

VARIABLES ALÉATOIRES.

56

Une boîte contient six boules numérotées de 1 à 6. Une deuxième boîte contient quatre boules numérotées de 1 à 4.
1.On prélève au hasard une boule de la première boîte, puis une autre de la deuxième boîte. Calculer le cardinal de l'univers associé cette épreuve.
2.Soit X la variable aléatoire représentant la valeur absolue de la différence des numéros portés par les boules tirées des deux boîtes.
a.Donner la distribution des probabilités de X.
b.Calculer la probabilité pour que les deux numéros soient identiques.
c.Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.
d.Définir, puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
e.On prélève une boule de la prmière boîte; on note son numéro, puis on la remet dans la deuxième boîte.On tire ensuite une boule de la

deuxième boite , et on note son numéro.
Calculer la probabilité pour que les deux numéros notés soient identiques.

57

On dispose de trois urnes opaques A, B et C contenant respectivement :

A : "une boule rouge, une boule bleue et une boule verte" ;

B : "une boule rouge et deux vertes" ;

C : "deux boules bleues et une boule verte".

On tire au hasard une boule de chaque urne ; si une boule est verte , on gagne un point ; si aucune boule n'est verte ou deux boules sont vertes , on perd deux points ; si les trois boules sont vertes , on gagne n points où n est un entier naturel non nul.

Le nombre de points obtenus définit une variable aléatoire X.

1.Donner dans un tableau , la loi de probabilité de X.

2.Contruire la représentation graphique de la fonction de répartion de X pour n = 5.

3.Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

4.Déterminer n pour que l'espérance mathématique soit nulle.

5.Calculer alors la variance et l'écart type de X.

58

Une cible circulaire est composée de 3 zones concentriques rapportant 5,3,1 points.

Les probabilités d'atteinte de ces trois zones sont dans l'ordre $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Les résultats de deux tirs sont indépendants.

On tire deux fois . On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des points obtenus.

a.Définir la loi de probabilité de X.

b.Calculer l'espérance et la variance de X.

59

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces portent respectivement les numéros 1,2,3,4,5,6.

Soit X la variable aléatoire qui donne 0 si les numéros obtenus sont identiques , et le plus grand de ces numéros sinon.

a.Donner les valeurs possibles de X.

b.Donner dans un tableau à double entrée, la loi de X.

c.Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.

d.Calculer la probabilité de l'événement : $2 \leq X \leq 5$.

60

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique , dont l'une est dite bonne et trois autres dites mauvaises. Chaque fois qu'il choisit une porte mauvaise, il reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1.Le rat n'a aucune mémoire.

Il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre 4 portes.

Déterminer la probabilité des événements :

a) Le rat sort au bout de trois essais ;

b) Le rat sort au bout de 7 essais ;

c) Le rat sort en moins de 8 essais.

2.Cette fois-ci le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore choisies. Le nombre d'essais définit ainsi une variable aléatoire.

a) Déterminer les valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de X.

c) Calculer l'espérance mathématique , la variance et l'ecart type de X.

61

Un sac opaque contient dix boules indiscernables au toucher dont 3 bleues, deux vertes,cinq rouges. On tire 3 boules l'une après

autre , en remettant à chaque fois la boule rée dans le sac.
oit Y la variable aléatoire qui prend la valeur si le tirage est unicolore, 1 s'il est bicolore et s'il est tricolore.
onner la loi de Y, puis calculer son espérance athématique, sa variance et son ecart type.

62

ne urne contient 4 boules bleues, 2 boules ertes et n boules rouges, indiscernables au oucher. On tire au hasard deux boules de anière simultanée.
n désigne par X la variable aléatoire prenant omme valeur le nombre de boules rouges rées.
Déterminer la loi de probabilité de X rsque $n = 0$,puis lorsque $n = 1$.
On suppose désormais que $n \geq 2$.
Déterminer la loi de probabilité de X.
ontrer que l'espérance mathématique de X st : $E(X) = \dfrac{2n}{n+6}$.
Déterminer n de façon à obtenir E(X)=1.

63

X est une variable aléatoire ayant la loi de obabilité suivante :

a	0	1	2	3
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{8}$

Montrer que $b = \dfrac{1}{8}$.
Définir, puis construire la représentation raphique de la fonction de répartition de X.
Calculer la probabilité de l'événement : $X < 1$ ou $X \geq 3$ ".
n déduire $p(1 \leq X < 3)$
Calculer E(X), puis $E(X^2)$.
2.Soit Y une nouvelle variable aléatoire définie par $Y = 2X + 5$.
a) Donner la loi de probabilité de la variable Y.
b) Calculer E(Y), V(Y).

64

On considère un dé cubique dont les faces portent les nombres $-2;-2;1;1;2;x$.
Chaque face a la même probabilité d'apparition.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé fait correspondre le nombre apparu.
1.Donner la loi de probabilité de X en fonction de x.
2 . Déterminer l'espérance mathématique de X. Pour quelle valeur de x , cette espérance est-elle nulle

65

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille.
Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Un joueur mise 200 francs.
Il reçoit 1200 francs si la bille franchit les portes 1 ou 6 ; 200 francs si cette bille franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Le gain d'un joueur est la différence entre sa mise et ce qu'il reçoit ; soit (ce qu'il reçoit sa mise).
Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur à l'issue d'une partie.
1.Donner les valeurs possibles de Y.
2.Déterminer la loi de Y.
3.Le jeu est dit équitable si l'espérance de Y est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

66

Une boîte contient 6 boules vertes et x boules blanches.
Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte . Si deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100 francs ; si elles sont de couleurs différentes , le joueur perd 100 francs.
Calculer la probabilité d'obtenir :
a.deux boules de même couleur ;
b.deux boules de couleurs différentes.
On note par X la variable qui, à chaque tirage de deux boules , associe le gain algébrique du joueur.
Exprimer en fonction de x, les probabilités des événements (X=100) et (X = –100).
Exprimer l'espérance mathématique E(X) à l'aide de l'entier x.
Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles le jeu est équitable ?

ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

67

À chaque tir, la probabilité pour que le tireur touche la cible est 0,7.Il tire trois fois de suite et les trois tirs sont supposés indépendants.
Calculer les probabilités :
• pour qu'il touche la cible trois fois ;
• pour qu'il touche la cible deux fois exactement.

68

On lance deux dés , puis on totalise les points marqués.
1. Calculer la probabilité d'avoir un total de points supérieur ou égal à 8.
2. Au bout de 20 lancers, calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement 10 fois un total supérieur ou égal à 8.

69

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire deux boules simultanément .
1.Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches.
2.On procède à cinq tirages consécutifs de deux boules , les boules étant remises dans l'urne après chaque tirage.
Calculer la probabilité de tirer une fois et une seule deux boules blanches.

70

On lance six fois un dé ; quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un 1 ?

71

Combien de fois faut-il lancer un dé(non pipé) pour obtenir un (ou plusieurs) six avec une chance sur deux au moins.

72

On jette une pièce de monnaie parfaite.
6 fois.
1.Trouver la probabilité pour obtenir autant de faces que de piles.
2.En déduire la probabilité pour obtenir plus de faces que de piles.

73

L'expérience prouve qu'un certain canon a une chance sur deux de toucher un objectif.
1.On tire n coups de ce canon. Calculer la probabilté pour que l'objectif soit touché au moins une fois.
2.Calculer le nombre de projectiles qu'il faut tirer afin que l'objectif soit touché au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

74

On répartit au hasard n boules dans cinq urnes.
On suppose que la probabilité que la boule a d'aller dans une urne est la même quelle que soit la boule et quelle que soit l'urne.
Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive deux boules.
2.Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive k boules ($0 \leq k \leq n$).

5

ne urne contient 7 boules noires et une ule blanche.
On repète n fois le tirage d'une boule en mettant à chaque fois cette boule dans l'urne.
mment choisir n pour tirer au moins une ule blanche avec au moins une chance sur ux ?
Même question dans le cas où la boule tirée st pas remise dans l'urne.

6

jeu consiste à lancer six fois de suite un dé nt les faces sont numérotées de 1 à 6.
n suppose que chaque face a la même babilité d'apparaître en position périeure.On désigne par S la variable atoire égale à la somme des numéros sortis.
Calculer les probabilités des événements vants :
" $S \geq 8$ " ; B : " le numéro du premier ncer est 4 ".
Calculer la probabilté de l'événement (A/B).
Définir et représenter la fonction de partition de S.
Le gain algébrique X de la partie est de :
00 francs si $S \leq 4$;
ancs si $5 \leq S \leq 8$;
00 francs si $S \geq 9$.
Déterminer l'entier relatif n sachant que spérance mathématique X est nulle.
Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 00 francs en jouant cinq parties nsécutives.

7

dispose de 3 dés cubiques vert, jaune et ge.
dé vert est normal :ses faces sont mérotées de 1 à 6 et elles ont la même babilité d'apparition.
dé jaune porte sur deux faces le nombre 6, les quatre autres le nombre 1 ;toutes les es ont la même probabilité d'apparition.
Le dé rouge est pipé, de façon que la probabilité d'apparition de chaque face soit proportionnelle au nombre marqué sur cette face :les faces sont numérotées de 1 à 6.
1.Calculer pour chacun des dés , les probabilités d'apparition de chaque numéro.
2.On lance simultanément les trois dés.
a.Montrer que la probabilité d'obtenir trois " 6 " est $\frac{1}{63}$.
b.Calculer les probabilités d'obtenir :
- les nombres 1,3,5 ;
- trois nombres deux à deux distincts.

3.On lance 4 fois de suite les trois dés simultanément.Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où les trois dés ont leur face apparente sur 6.
Déterminer la loi de X.
Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

78

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : ce qui rend les tirages équiprobables.
Quatre boules sont blanches et numérotées de 1 à 4 et cinq boules sont noires et numérotées de 1 à 5.
1.On tire simultanément trois boules du sac .
Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : " Toutes les boules sont blanches " ;
B : " Les boules sont de couleurs différentes " ;
C : " Il y a plus de boules blanches que de boules noires " ;
D : " les numéros sont impairs "
E : " il y a au moins un numéro pair "
2.L'épreuve est maintenant la suivante :
Du sac qui contient les neuf boules, on en tire au hasard une et on la replace dans le sac. On effectue ainsi 7 tirages successifs.
Déterminer la probabilité pour qu'au cours d'un tirage , on ait un numéro pair .
En déduire la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro pair au cours des 7 tirages.

SUJETS DE SYNTHÈSE

SUJET 1

Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x)=x^2+1+\frac{2}{x}$.

1) Dresser le tableau des variations de f. On précisera les limites aux bornes du domaine de définition.

2) Montrer que $f(x)\geq 0$ sur $]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur

$D=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

1) (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

b) Etudier alors les variations de la fonction g sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

2) (a) Montrer que, pour tout $x<-1$,

$\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=-\sqrt{\frac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$.

b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.

3) (a) Montrer que, pour tout réel x de D :

$g(x)-x=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1+\frac{2}{x}}+x}$.

b) En déduire que la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Montrer de même que la droite Δ' d'équation $y=-x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Exercice 2

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète à 200F un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet . Il peut alors gagner 1500F avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'événement : « le joueur gagne au grattage »

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 1500F ou 3000F ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'événement : « Le joueur gagne 1500F à la loterie »

L_2 désigne l'événement : « Le joueur gagne 3000F à la loterie »

P désigne l'événement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie »

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 1500F à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 3000F à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1) a) Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

b) Calculer la probabilité pour que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

c) Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2) On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur après grattage et loterie, déduction faite du

prix du billet.

La probabilité de l'événement « X = 1300 » est $\frac{2}{125}$.

La probabilité de l'événement « X = 2800 » est $\frac{1}{250}$.

a) Montrer que la probabilité que le joueur gagne 1500F à la loterie, sachant qu'il a gagné 1500F est égale à $\frac{1}{10}$.

b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 1500F au grattage.

c) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{1-x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer ?

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c) Dresser le tableau des variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

a) Établir une relation de récurence entre I_{n+1} et I_n.

b) Calculer I_1, puis I_2.

c) Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3) a. Démontrer que pour tout nombre réel x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante: $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de n quand I_n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

ABCD est un carré de sens direct de centre I Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques et dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3) Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4) On pose $h = s \circ s$.

a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2+2i$ et $2i$.

1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2) Calculer l'affixe du point Ω.

3) Calculer l'affixe du point E tel que s(E) = A. Placer le point E sur la figure.

SUJET 2

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x)=xe^{-x}$ sur $[0;+\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1) a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

c) Construire Γ.

2) a. Montrer que pour tout réel m de l'intervalle $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

b) Dans le cas où $m=\frac{1}{4}$, on nomme α et β ses solutions, (avec $\alpha<\beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c) Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas $m=0$ et $m=\frac{1}{e}$.

Partie B

1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=lnu_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n=w_n-w_{n+1}$.

b) On pose $S_n=u_0+u_1+u_3+\ldots+u_n$. Montrer que $S_n=w_0-w_{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (S_n).

3) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{R}$ par son premier terme $v_0, v_0>0$, et pour tout entier n, par $v_{n+1}=v_n e^{-v_n}$

Existe-t-il une valeur de v_0 différente de 0 telle que, pour tout entier n, on ait $u_n=v_n$? Si oui, préciser laquelle.

Exercice 2

Partie A :

Etude d'une fonction auxiliaire g :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$,

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

3) Dresser le tableau des variations de la fonction g. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Étude de la fonction f.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x}ln(1+2e^x)$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$.

2) En posant $X=1+2e^x$, montrer que $f(x)=\frac{4XlnX}{(X-1)^2X}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) En posant $h=2e^x$, calculer la limite de f en $-\infty$.

4) Dresser le tableau des variations de f.

5) On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Tracez la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T.

Exercice 3

On se propose de de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

(S) $\begin{cases} n \equiv 13 \quad (19) \\ n \equiv 6 \quad (12) \end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v=1$ (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times12v+6\times19u$ est une solution de (S).

a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$.

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \ (12\times19)$.

2) a. Trouver un couple $(u\,;v)$ solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

3) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

PROBLÈME

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

Partie 1

Utilisant des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1cm.

1) On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c) Déterminer le point $(s\circ s)$ (B) ; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2) On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x-2y=0$, puis A′ et B′ les points d'affixes respectives $8+4i$ et $2+i$.

a) Démontrer que les points A′ et B′ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.

b) Vérifier que s(B′) =A′.

c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

Partie 2

Utilisation des propriétés géométriques des similitudes.

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

1) On note encore s la similitude directe telle que s(O) = A et s(B) = O. Soit Ω son centre.

a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB]).

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2) On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).

On note A′ et B′ les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.

a) Déterminer les images des droites (BB ′) et $\mathcal{D}$ par la similitude s.

b) Déterminer le point s(B′).

c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

SUJET 3

Exercice 1

Déterminer l'intersection du plan (P) et la sphère (Γ) dans chaque cas.

a) (P) : $z = 3$;

(Γ) : $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$.

b) (P) : $y = 1$;

(Γ) : $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+14=0$.

c) (P) : $x=5$;

(Γ) : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$.

Exercice 2

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

Partie A

1) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}.$$

La suite (v_n) est-elle monotone ?

2) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B

Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2) En déduire l'expression de w_n, puis celle de v_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3

Montrer que les vecteurs $\{(1;1;1), (-1;1;0), (1;0;-1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1;0;0)$, $(1;0;1)$ et $(0;0;1)$ dans cette base.

PROBLÈME

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

Étude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = ln(1+x) - x$.

Étudier le sens de variation de g.

En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $ln(1+a) \leq a$.

Partie A :

Étude de f_1

1) Calculer $f_1'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1.

2) Montrer que pour tout $x \in$ sur $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$

3) Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B :

Étude et propriétés de f_k.

1) Calculer $f'_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

2) Montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f_k(x) = ln\left(1+k\dfrac{1}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$

3) a) Dresser le tableau de variation de f_k.

b) Montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f_k(x) \leq \dfrac{k}{e}$.

Déterminer une équation de la tangente (T_k) au point d'abscisse 0 de C_k.

Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de C_p et C_m.

Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes en 0.

SUJET 4

Exercice 1

1) Montrer que l'inverse de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

2) Résoudre $\begin{cases}x+3y=a\\ x+4y=b\end{cases}$, et en déduire l'inverse de $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

3) Résoudre $\begin{cases}x+2y-z=a\\ 2x-y+2z=c\\ x-3y+z=c\end{cases}$ et en déduire l'inverse de $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 2

$(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1+i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O;\vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1) Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.

2) Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.

3) Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.

4) a) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b) Montrer que $z_B = -3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

5) Soient M le milieu de [AB] et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1) On pose C =s(B). Montrer que P est le milieu de [BC].

2) a) Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

b) Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c) Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

PROBLÈME

Partie A

Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$.

1) Détermination d'une solution particulière :

Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(ax+b)e^x$ est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel : $-ax+a-b=x$.

Déterminer a et b.

2) Résolution de l'équation (E_0) : $y'-2y=0$.

Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0).

3) Détermination de l'ensemble des solutions de (E) :

Montrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

Partie B

Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2e^x-x-2$.

1) Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Étudier le sens de variation de g,puis dresser son tableau de variation.

3) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ a

exactement deux solutions réelles.

b) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

c) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6<\alpha<-1,5$.

d) Déduire de ce qui précède le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer $f'(x)$. Montrer que f' est du signe de g sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$, en déduire un encadrement de $f(\alpha)$, en utilisant l'encadrement de α obtenu à Partie B 3) c).

5) Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

SUJET 5

Exercice 1

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a et soit O son centre (i.e. l'isobarycentre de ses sommets).

1) Montrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

2) Soit A′ le centre de la face BCD.

a) Montrer que O appartient à la médiane [AA′].

b) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

c) Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AA'}$.

d) En déduire que les médianes du tétraèdre régulier sont aussi les hauteurs.

3) a. Montrer que le plan médiateur de [AB] est (ICD) où I est le milieu de [AB].

b) Montrer que O appartient à (ICD).

c) En déduire que O est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre régulier.

Exercice 2

Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x)>0$

2) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2+\cos x+\sin x>0$.

c) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4) a) Montrer que, sur l'intervalle [0 ; π], l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 3

1) Montrer que les vecteurs $x_1=(0,1,1)$, $x_2=(1,0,1)$ et $x_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x=(1,1,1)$.

2) Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.

3) Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

PROBLÈME

Soit f l'application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$; et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$.

Partie A

1) Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{x}-1}$.

2) Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$

$f(x)=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$.

3) Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis factoriser $g(x)$.

Partie B

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.

b) Étudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f.

4) Représenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

5) a. Étudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y=2x+m$.

b) Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C

1) En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction : $x\mapsto\frac{e^x}{e^x-1}$.

2) En déduire en utilisant A.2, les primitives sur $]0;+\infty[$ de $f(x)-(2x+\frac{1}{2})$.

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équation $x=ln2$ et $x=ln4$.

SUJET 6

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Montrer que l'ensemble des points M vérifiant $\|3\overline{MA}+\overline{MB}\|=\|2\overline{MA}+\overline{MC}\|$. est un plan que l'on précisera.

2) Soient A(6 ; 0 ; 0) et B(0 ; 6 ; 0).

a) Déterminer le barycentre G du système de points {(O, 1), (A, 2), (B, 3)}.

b) Soit C(0 ; 0 ; 4) et soit S l'ensemble des points M$(x;y;z)$ vérifiant l'équation vectorielle $(\overline{MO}+2\overline{MA}+3\overline{MB}).\overline{MC}=0$. Déterminer avec et sans coordonnées l'ensemble S.

c) Déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $x=0$.

3) Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente au plan $x+y+z=6$ et de centre $\Omega(3, 4, 5)$.

Exercice 2

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante: $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

2) On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

a) Déterminer la forme exponentielle des complexes z_1 et z_2.

b) En déduire que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ est un réel.

3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm) les points , M_2, et A d'affixes respectives: $\sqrt{2}(1+i)$, $\sqrt{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Placer les points dans le repère puis compléter la figure progressivement.

b) Déterminer l'affixe du point image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport – 3.

c) Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

d) Placer le point M_5 d'affixe $i\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Montrer que le quadrilatère $M_1M_3M_5M_4$ est un carré.

Exercice 3

1) Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X-X^2) + d(X^2-X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la Forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \delta(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ (calculer α, β, γ, δ réels).

2) Soit P_3 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de P_3 :

$B_1=\{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2=\{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3)\}$,

$B_3=\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

PROBLÈME

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Pour tout réel α≥1, on considère les intégrales : $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx$ et $K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}dx$.

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. En déduire le sens de variation de f.

c) Donner l'allure de la courbe C.

2) a. Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.

b) Soit $\alpha \geq 1$, montrer que $-e^{\frac{1}{\alpha}} \leq K(\ ) \leq e^{\frac{1}{\alpha}}$.

c) En déduire que $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.

d) Calculer J(α).

3) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $e^{\frac{1}{2\alpha}}\ln 2 \leq K(\alpha) \leq e^{\frac{1}{\alpha}}\ln 2$.

4) Démontrer le théorème suivant : Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1;+\infty[$ telles que pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$.

S'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=l$.

5) Déduire de ce qui précède la limite $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

SUJET 7

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé et ' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t+2t' \\ y=-t-2t' \\ z=-1-t+3t' \end{cases}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-1-t \end{cases}$.

On donne deux points de l'espace M(−1 ; 2 ; 3) et N(1 ; −2 ; 9).

1) Déterminer une représentation paramétrique du plan (P).

2) Démontrer que la droite (D) est une droite du plan (P).

3) a. Démontrer que la droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b) La droite (MN) et la droite (D) sont-elles sécantes.

4) a. Démontrer que la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=-3-t \end{cases}$ est la droite intersection des plans (P) et (S).

b) Les plans (P) et (S) sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 2

1) Montrer que les vecteurs $w_1 = (1,\ 1,\ )$, $w_2 = (-1, i, 1)$, $w_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.

2) Calculer les composantes de $w = (1+i,\ 1-i,\ i)$ dans cette base.

Exercice 3

Dans tout le problème $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan P.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$; On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Étude de f :

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b) Préciser les équations des asymptotes à la courbe (C_f).

c) Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f Préciser $f(0)$

d) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 0$; on note T_0 cette tangente.

2) Courbe de f.

a) Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x) + f(-x)$.

b) Quelle propriété de symétrie peut on déduire de la question précédente ?

c) Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0.

Partie B

1) a. Soit $u(x) = 1 + e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.

b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur $-\ln 2$ en 0

2) a. On pose $A = \int_0^1 f(x)\,dx$. Calculer A.

b) Déterminer le réel c tel que $A = \ln c$.

3) Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)\,dx.$$

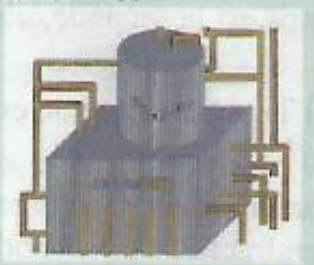
a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} v_n$.

PROBLÈME

Circuit de refroidissement.

Le système de refroidissement par eau d'une machine est constitué d'un circuit de contenance 20 litres, rafraîchi en de multiples points par un courant d'eau froide à 16° C dès que l'eau dans le circuit atteint 80 ° C.



Il entre très rapidement autant d'eau qu'il n'en sort à raison de 2 litres par seconde et le grand nombre de points de rafraîchissements permet de considérer que, toutes les secondes, 18 litres du circuit sont mélangés de façon homogène à 2 litres d'eau froide. (On considère donc que la température est la même en chaque endroit du circuit.)

On considère comme négligeable l'apport de chaleur dans le circuit dû au fonctionnement de la machine pendant le rafraîchissement. On veut déterminer le temps, exprimé en secondes, qu'il faut pour que la température de l'eau du circuit tombe à 40 ° C .

Les calculs seront basés sur un résultat barycentrique intuitif selon lequel x litres d'eau à u degrés mélangés à y litres d'eau à v degrés donnent $x+y$ litres d'eau à $\dfrac{x.u + y.v}{x+y}$ °C .

Partie 1

Solution au moyen des suites numériques : schéma « discret », ou encore « discontinu » : l'unité de temps est la seconde, c'est un nombre entier.

On note T_n la température du circuit au bout de n secondes de rafraîchissement.

1) Montrer que la suite (T_n) est définie par $T_0 = 80$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10T_{n+1} = 9T_n + 16$.
2) On pose $U_n = T_n - 16$.
   a) Montrer que (U_n) est géométrique, déterminer son premier terme et sa raison.
   b) En déduire U_n, puis T_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c) Démontrer que (T_n) est convergente.
3) Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $T_n \leq 40$. Conclure.

Partie 2

Solution différentielle : schéma « continu », l'unité de temps est la seconde, c'est un nombre réel.

On note $T(t)$ la température du circuit au temps t exprimé en secondes.

1) Soit Dt un laps de temps assez petit, exprimé en fractions de secondes.
   a) Montrer que la température du circuit à l'instant $t+Dt$ est :
   $$T(t+Dt) = \frac{(20 - 2\,Dt)\,T(t) + 32\,Dt}{20}.$$
   b) En déduire que :
   $$\frac{T(t+Dt) - T(t)}{Dt} = -\frac{1}{10}T(t) + 1,6.$$
   c) Montrer alors que T est solution de l'équation différentielle :
   $$T' = -\frac{1}{10}T + 1,6.$$
2) a. Résoudre l'équation différentielle :
   $$T' = -\frac{1}{10}T + 1,6.$$
   b) Déterminer la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $T(0) = 80$.
   c) Résoudre l'équation $T(t) = 40$, et conclure. (Comparer avec le résultat obtenu dans la première partie.)

SUJET 8

Exercice 1

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a au début de la première année de l'étude 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_1 = 200$ et $a_1 = 500$. On admet que pour tout entier naturel n on a : $\begin{cases} j_{n+1} = 0,125j_n + 0,525a_n \\ a_{n+1} = 0,625j_n + 0,625a_n \end{cases}$

On introduit les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $u_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1) a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = A \times u_n$.
   b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de A^n et de u_1.
2) On introduit les matrices suivantes
   $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
   b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
   c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.
3) On admet que pour tout entier naturel n non nul,
   $A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$

a) En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Exercice 2

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Calculer la distance entre les plans : π_1 : $2x-y+z-1=0$ et π_2 : $2x-y+z-5=0$.

2) Soit π : $3x-y+z=1$; π' : $2x-z-4=0$; (d) = $\pi\cap\pi'$; $\pi''\perp\pi$ et $\pi''\perp\pi'$

a) Déterminer les équations paramétriques de (d).

b) Déterminer l'équation cartésienne de π'' sachant que π'' contient A $(-1, 2, 1)$.

c) Déterminer l'angle aigu de π et π'.

3) Déterminer m pour que le plan π : $2x-y+mz=1$ forme avec la droite (d) : $\begin{cases} x-3y=3 \\ y+z=1 \end{cases}$ un angle de 30°.

4) Déterminer une équation du plan P tangent à la sphère $\Gamma : x^2+y^2+z^2=49$ au point M $(6,-3,-2)$.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie A

On appelle fonction cosinus hyperbolique (notée ch) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

On appelle fonction sinus hyperbolique (notée sh) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1) a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.

b) Déterminer la fonction $ch + sh$.

2) a) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions $(ch)'$ et $(sh)'$.

b) Calculer les limites des fonctions ch et sh en $-\infty$ et $+\infty$.

3) a) Étudier les variations des fonctions ch et sh.

b) Soit $f = ch - sh$; étudier le signe de f et sa limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne les courbes représentatives de ch et sh dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$?

4) Tracer les courbes des deux fonctions ch et sh dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La courbe de ch est appelée "chaînette".

Partie B

De façon analogue à la trigonométrie circulaire, on peut développer une trigonométrie hyperbolique.

Dans toute cette partie, a et b sont des réels quelconques.

1) Calculer $ch^2(a)+sh^2(a)$ et $ch^2(a)-sh^2(a)$.

2) Calculer $ch(a)ch(b)$, $ch(a)sh(b)$, $sh(a)ch(b)$, $sh(a)sh(b)$ et les exprimer en fonction de $ch(a+b)$; $sh(a+b)$; $ch(a-b)$; $sh(a-b)$.
En déduire $ch(a+b)$; $sh(a+b)$; $ch(a-b)$; $sh(a-b)$; $ch(2a)$ et $sh(2a)$.
en fonction de $ch(a)$; $ch(b)$; $sh(a)$ et $sh(b)$. Comparer avec les formules de trigonométrie circulaire.

3) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction tangente hyperbolique (notée th) par $th(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

a) Étudier la parité de la fonction h.

b) Étudier la dérivabilité de h. Déterminer la fonction $(th)'$, d'une part en fonction de ch d'autre part en fonction de sh.

c) Calculer les limites de th en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner le tableau de variations de th et tracer sa courbe représentative dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Exprimer $th(a+b)$; $th(a-b)$ et $th(2a)$ en fonction de $th(a)$ et $th(b)$.

SUJET 9

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;3)$.

   a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3) Soit P_1 le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 le plan d'équation $x+4y+2=0$.

   a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

   b) Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

   c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ définie par : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)z+1$.

1) Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et une mesure de l'angle θ.

2) On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1}=f(A_n)$.

   a) Déterminer les affixes des points A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2, A_3.

   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
   $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   c) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3) a) Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ?
   En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.

   b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 2

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, telle que $f(x,y,z)=(2x-y+z\,,x+y-z)$.

   a) Donner la matrice A de f relativement aux bases canoniques b et c de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

   b) Donner la matrice A_1 de f relativement aux bases b et $c_1=\{(1,1),(-1,1)\}$.

2) Soit g, une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases c_1 et b est $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $g(x,y)$.

   b) Donner la matrice B_1 de g relativement aux bases c_1 et b.

3) Après avoir montré que $g\circ f$ est bien définie, donner la matrice C de $g\circ f$.

base canonique b de $\mathbb{R}^3$.

Montrer sans calcul que BA = B_1A_1 .

ROBLÈME

f_k la famille de fonctions définies sur [par $f_k(x) = kx^2 + e^{-x}$ où k est un strictement positif quelconque et g_k mille de fonctions également définies sur [par $g_k(x) = 2kx - e^{-x}$.

ote C_k la courbe représentative de f_k dans repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique :

Sens de variation de g_k.

Calculer la dérivée g'_k de g_k ; vérifier que $g'_k(x)$ est toujours strictement positif.

Calculer la limite de $g_k(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel α_k tel que $g_k(\alpha_k) = 0$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_1 et de α_2.

Étudier le signe de $g_k(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

Montrer que $f'_k(x) = g_k(x)$; en déduire le sens de variation de f_k.

Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$.

Déterminer la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$.

Déterminer le signe de $f_k(x) - kx^2$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat ; on note P_k la courbe d'équation $y = kx^2$.

Construction de f_k.

Dresser le tableau des variations de f_k .

Préciser le signe de f_k

Préciser l'équation de la tangente T à C_k au point d'abscisse 0.

Prouver que $f_k(\alpha_k) = k\alpha_k(\alpha_k + 2)$.

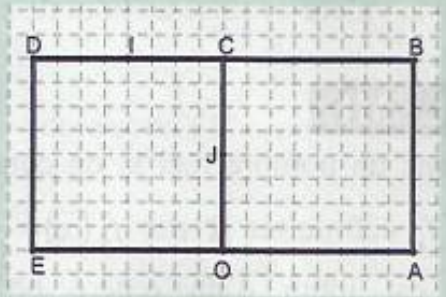
On prend 1 : montrer que le point de coordonnées $(\alpha_1; f_1(\alpha_1))$ appartient à une parabole Q_1 dont on donnera l'équation.

Tracer dans le même repère T, P_1, Q_1 et C_1.

SUJET 10

Exercice 1

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés OABC et OCDE tels que : $Mes(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = Mes(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{2}$.



On désigne par I le milieu du segment [CD], par J le milieu du segment [OC] et par H le point d'intersection des segments [AD] et [IE].

1) Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.
2) Déterminer le rapport de cette similitude s.
   On admet que l'angle de la similitude s mesure $\frac{\pi}{2}$.
3) Donner, sans justifier, l'image de B par s.
4) Déterminer et placer l'image de C par s.
5) Soit Ω le centre de la similitude s.
   a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE].
   b) Montrer que Ω ne peut être le point H.
   c) Construire Ω.
6) On considère le repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$.
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.
   b) En déduire l'affixe du centre Ω de s.

Exercice 2

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$ $e_4 = (-1, 0, -0, 2)$ et $e_5 = (2,3,0,1)$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par : e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4 et e_5. Calculer les dimensions respectives de E, F, E∩F et E + F .

Exercice 3

Un capital de 100 0000F est emprunté à intérêt (annuel) composé pendant 3 ans, à $\quad = 10\%$ pendant 18 mois, à $i_2 = 12\%$ pendant les 8 mois suivants et à $i_3 = 13\%$ pendant les 10 mois suivants. Il est remboursé avec les intérêts au bout des 3 ans.

Quelle est la valeur acquise au bout de ces 3 ans.

PROBLÈME

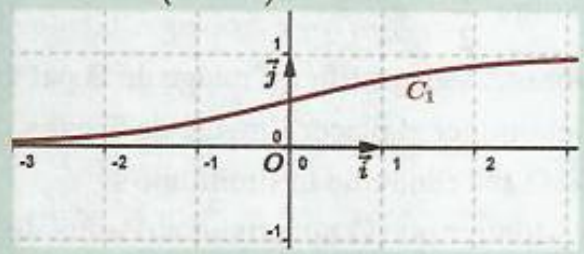
Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=\dfrac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit k = 1. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la suivante :



1) Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3) On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4) On définit le nombre $I=\int_0^1 f_1(x)\,dx$. Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit k = −1 et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1}.

Pour tout réel x, on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x.

On note K le milieu du segment [MP].

1) Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x)+f_{-1}(x)=1$.
2) En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.
3) Tracer la courbe C_{-1} dans le même repère que C_1.
4) En déduire l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par les courbes C_1, C_{-1}, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

Partie C

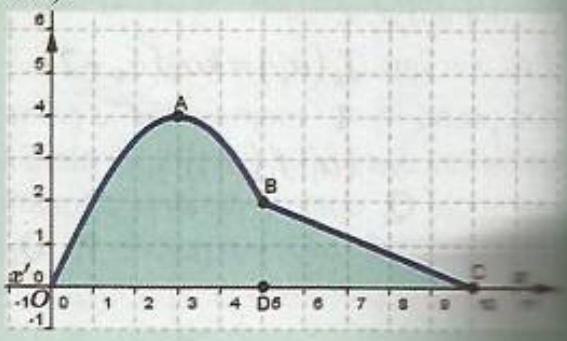
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations y = 0 et y = 1.
2) Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3) Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

SUJET 11

Exercice 1 : Volume d'une toupie

Le but de cet exercice est de calculer le volume d'une toupie. On obtient un modèle réduit de cette toupie par rotation autour de l'axe des abscisses (xx') de la surface coloriée ci-après (le modèle réduit représente la toupie en position couchée).



nité graphique est de 1 cm.

donne les quatre points A(3 ; 4), B(5 ; 2), 10 ; 0) et D(5 ; 0).

partie inférieure du modèle réduit est le cône révolution engendré par le triangle BCD.

partie supérieure du modèle réduit est engenée par la surface limitée par une courbe (G) nt l'allure générale du schéma et vérifiant les ditions suivantes :

courbe (G) passe par les points O, A et B

courbe (G) a une tangente horizontale au t A.

Vérifier que la courbe d'équation $y=4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ (x variant de 0 à 5) remplit es conditions. On admet dans la suite que 'est la courbe (G).

a) En utilisant la formule donnant le volume d'un cône de révolution ou bien en introduisant la fonction dont la courbe représentative est le segment [BC], calculer le volume en cm³ de la partie inférieure du modèle réduit.

Linéariser $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, puis calculer le volume en cm³ de la partie supérieure du modèle réduit.

Sachant que la hauteur OC de la toupie en vraie grandeur est de 30 cm, calculer la valeur exacte du volume en cm^3 de cette toupie, puis en donner une valeur approchée à 0,1 cm³ près .

ercice 2

t un espace vectoriel de base B=$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Quel est la dimension de E ?

Soit f l'endomorphisme de E avec $f(\vec{i})=\vec{i}+\vec{j}, f(\vec{j})=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ et $f(\vec{k})=2\vec{k}$.

Déterminer $f(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$. Que dire de $2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$?

Donner l'écriture analytique de f.

Démontrer que ker$f$ est une droite vectorille de E. (dont on précisera un vecteur de base e_1.

d) Démontrer que Im f est engendré par $(\vec{i}+\vec{j},\vec{k})$.

e) Démontrer que (ker f)+(im f)=E.

Exercice 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(5, 0, 0), B(0, 5, 0), C $(1,1,\frac{\sqrt{17}}{2})$ et le cercle Γ donné par les équations $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{25}{4} \\ z=0 \end{cases}$.

1) Trouver l'équation de la sphère Σ qui passe par C et qui contient le cercle Γ.

2) Trouver les équations des plans tangents à Σ et qui contiennent la droite (AB).

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite D_1 d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe C.

c) Étudier la position de C par rapport à D_1.

2) a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $\ln 3$?

b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe C par rapport à D_2.

4) a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe

C au point d'abscisse 0 a pour équation $y=\frac{1}{4}x+1$.

b) Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty;\ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x)=\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$.

On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C. Tracer la courbe C, les tangentes D_2, D_3 et les asymptotes à la courbe C .On rappelle que l'unité graphique choisie est 2cm.

5) a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+3}$

b) Soit α un réel strictement négatif.

On note A_α l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1, C et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$. Montrer que $A_\alpha=4\ln 4-4\ln(e^\alpha+3)$.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A_\alpha$.

SUJET 12

Exercice 1

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Soit (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $y^2+6y+4x-3=0$.

a) Déterminer la nature de (E) et donner son équation réduite dans un repère d'origine Ω dont on précisera les coordonnées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer, l'équation de la directrice et les coordonnées du foyer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

c) Construire (E) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2

Soit p le polynôme à variable complexe défini par : $p(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$.

a) Montrer que si z est une racine de p, alors $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$ sont aussi racines de p.

b) Vérifier que le nombre $1+i$ est une racine de p.

c) Donner toutes les racines de p.

Exercice 3

ABCD est un est un rectangle de l'espace tel que $AD=2AB$ et de centre O.

1) On considère l'ensemble (Γ) l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $MA^2+MB^2-MC^2-MD^2=-2AD^2$

a) Montrer que A appartient à (Γ).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

2) Soit H le sommet d'une pyramide de base ABCD dont toutes les faces latérales sont des triangles isocèles et les plans (HAB) et (HCD) sont perpendiculaires.

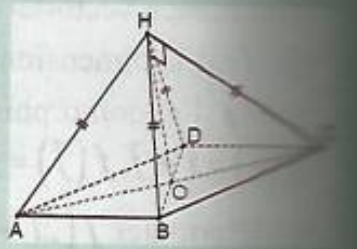
3) Montrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

4) Montrer que $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

5) Dans toute cette question ***on prend AB = 1*** et on considère le repère orthonormé direct $R=(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) Démontrer que dans le repère R, le sommet H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Déterminer les coordonnées des images des points A, B, C, D, O et H par $S_{(OH)}$ demi-tour d'axe (HO).



c) Déterminer l'application $S_{(ABC)}\circ S_{(OH)}$ où $S_{(ABC)}$ est la réflexion de plan (ABC).

d) Déterminer la matrice dans la base

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'endomorphisme φ associé à $S_{(OH)}$. En déduire l'expression analytique de $S_{(OH)}$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ *Unités d'axes : 2 cm*

PARTIE A

Soit f la fonction définie de $[0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\lvert x\ln x\rvert-1 & si\ x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$ de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$

1) Démontrer que : $\begin{cases} f(x)=-x\ln x-1 & si\ x\in]0;1[\\ f(x)=x\ln x-1 & si\ x\in]1;+\infty[\end{cases}$.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi tangentes (T) et (T') au point d'abscisse 1. Préciser leurs équations et l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

3) a) Dresser le tableau des variations de f

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une seule racine α telle que $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.

4) a) Tracer $(\mathcal{C}_f)$; (T) et (T') sachant que $\alpha\in[1,7;2]$.

b) On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine D délimité par $(\mathcal{C}_f)$; l'axe $(O;\vec{i})$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$. Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ comme un polynôme du second degré en α.

Partie B

On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)+1$ et la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_0>0 et u_0\neq 1 \\ \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$

1) Déterminer u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.

2) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de g.

3) On choisit $u_0>e$, démontrer que :

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) $\forall x\in]e;+\infty[,\ g'(x)\geq 2$

c) La fonction $h:x\mapsto 2x-g(x)$ est décroissante. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_{n+1}-u_n\geq 2(u_n-u_{n-1})$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}-u_n\geq 2^n(u_1-u_0)$.

4) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

SUJET 13

Exercice 1

1) $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère dans ce repère les points $F\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$. On pose $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}-\dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{V}=-\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.

a) Déterminer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ l'équation de l'ensemble (Γ) des points $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ tels que $MF+MF'=4\sqrt{2}$.

b) En déduire une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Construire (Γ) dans le repère $(O;i,\vec{j})$

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=2^n+3\times 7^n+14^n-1$.

a) Calculer u_3.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

c) On note P l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble P ?

d) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace E. Soit le plan (Π) d'équation $x-2y+z=1$ et la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-2t \\ z=2+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et le point

$P\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que (Π) est orthogonale à (Δ) en un point C dont on donnera les coordonnées.
2) Déterminer les images B et D par les projections orthogonales de P sur (Π) et sur (Δ) respectivement. Vérifier que le quadrilatère PBCD est un rectangle.
3) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur (Π).
4) Soit (S) la sphère de centre C et de rayon $\sqrt{6}$, déterminer $(S)\cap(\Pi)$.

PROBLÈME

On appelle espace vectoriel euclidien, tout espace vectoriel dans lequel est défini un produit scalaire. Lorsqu'un espace affine est associé à un espace vectoriel euclidien, on l'appelle espace affine euclidien.

Partie A

Soit **P** un plan affine euclidien de plan vectoriel associé V. Soit O un point de **P**.

Soit θ un élément de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Soient et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaire de V tels que $\vec{i}\bullet\vec{j}=\sin\theta$.

1) Démontrer que le triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère $\mathcal{R}$ de **P**.
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé.

unité* = 1 *cm

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   a) Montrer que f est une fonction impaire.
   b) Étudier les variations de f puis construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   c) Démontrer que O est un point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
   d) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera.
   e) Démontrer que $f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ pour tout $x\in K$.
4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-2;0]$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine plan limité par $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x=-2$, $x=0$ et $y=0$. Calculer le volume V de la portion de l'espace obtenue en faisant tourner le domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. On pourra remarquer que $(1-2^x)^2=(1+2^x)^2-4\times 2^x$

Partie B

On considère la famille des courbes $(\mathcal{C}_{a,b})$ d'équation $y=b+\log_2\left(\frac{1-x+a}{1+x-a}\right)$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. [*on rappelle que* : $\ln x=\log_\alpha(x)\times\ln\alpha$ *pour tous* $\alpha,x\in\mathbb{R}$]

1) a) Soit $M(x,y)$ un point de $(\mathcal{C}_{a,b})$. Exprimer y en fonction de $f^{-1}(x-a)$.
   b) En déduire que $(\mathcal{C}_{a,b})$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par une application $\varphi_{(a,b)}$ telle que $\varphi_{(a,b)}=T\circ S_\Delta$ où T est une translation de vecteur $\vec{u}$ et S_Δ une symétrie orthogonale. Préciser $\vec{u}$ et (Δ).
   c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit une symétrie orthogonale.
2) On suppose que $a+b\neq 0$.
   a) Soient A et H deux points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et H le projeté orthogonal de A sur (Δ). Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est la composée commutative de la translation

$T_{\overrightarrow{OH}}$ et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.

b) Donner les éléments caractéristiques de $\varphi_{(3,1)}$ correspondant à $a=3$ et $b=1$.

c) Construire soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_{3,1})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

SUJET 14

Exercice 1

1) Calculer la primitive F sur $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right[$ de la fonction : $x \mapsto (5-3x)^{-\frac{2}{5}}$ qui prend la valeur 1en1.

2) Déterminer suivant les valeurs de $n \in IN$ les restes de la division euclidienne de 7^n par 10.

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ .On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \lambda \\ 4U_{n+1} = 3U_n^{\,2} - 8U_n + 12, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que si $\lambda = 2$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

2) Dans toute cette question : $\lambda = 1$

a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est croissante.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $\left]\frac{2}{3} ; 2\right[$ par la fonction

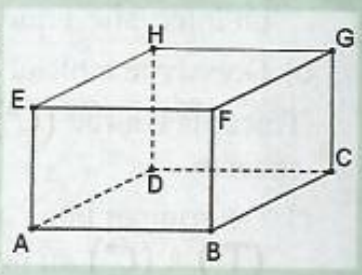
$h : x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{3} < U_n < 2$.

d) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un pavé droit tel que : $AB = 2AD = \frac{3}{2}AE$



$AD=a$ où a est un réel strictement positif.

1) a) Exprimer AC en fonction de a puis déterminer $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$.

b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) a) Reproduire la figure et construire le point P barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,-2)$ et $(E,3)$.

b) Exprimer PA^2, PB^2 et PE^2 en fonction de a.

c) Calculer les coordonnées de P dans le repère (A,B,D,E).

3) Déterminer l'ensemble (Γ_1) et (Γ_2) des points M de l'espace tels que :

$(\Gamma_1) : MA^2 - 2MB^2 + 3ME^2 = \frac{10}{3}a^2$.

$(\Gamma_2) : -2MA^2 + MB^2 + ME^2 = \frac{13}{9}a^2$.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\ln(x-1) + 1 & si\ x > 1 \\ f(x) = xe^{x-1} & si\ x \le 1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.

2) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ***L'unité d'axes est de2 cm .***

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1 ; 1]$

a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

Tracer la courbe (C') de g^{-1} sur la figure précédente.

c) Déterminer une équation de la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0.

4) Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations : $x=-1$; $x=1$ et $y=0$.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}\overline{z}+2$.

1) Démontrer que f est un antidéplacement.

2) Déterminer l'écriture complexe de $f\circ f$. En déduire la nature de $f\circ f$.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+e^{-i\frac{\pi}{6}}$, A et B les points d'affixes respectives 1 et .

a) Vérifier que $\vec{u}=\overline{BA}$ et démontrer que $f(B)=A$. En déduire que $f(B)=t(B)$.

b) Démontrer que $f\circ f=t\circ t$. En déduire que $f(A)$ $t(A)$.

c) Démontrer que $t^{-1}\circ f=S_{(AB)}$ symétrie orthogonale d'axe (AB).

d) Démontrer que $f(A)$ appartient à la droite (AB).

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

SUJET 15

Exercice 1 :

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^p}$

et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $v_n=-\frac{1}{2}+\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}$

1) a) Calculer le premier terme de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

$u_n=u_{n-1}+\frac{1}{n^n}$ et $v_n=v_{n-1}+\frac{1}{2^n}$.

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\le u_n\le v_n$.

3) a) Calculer la limite de la suite (v_n).

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 :

Soit A et B deux point du plan orienté P. À tout point M distinct de B d'un demi-cercle (C) de diamètre [AB] on associe le point P de la demi-droite [AM) n'appartenant pas au segment [AM] tel que PM = MB.

a) Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)$, puis exprimer BP en fonction de BM.

b) Déterminer alors une similitude qui transforme M en P.

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points P lorsque M décrit le demi-cercle (C).

Exercice3 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) a) Étudier les variations de la fonction : $v:x\mapsto x-\ln x$.

b) En déduire que l'ensemble de définition de f est $[0;+\infty[$

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[$

3) Étudier les variations de f.

4) On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt$

a) Démontrer que l'ensemble de définition de g est $[0;+\infty[$.

b) Étudier le sens de variations de g.

c) Donner le signe de g . Interpréter graphiquement.

PROBLÈME

Il comporte 2 parties obligatoires et indépendantes

Partie A

L'espace est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points M(x ; y ; z) vérifiant :
$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-10=0$,

la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est $(\Delta):\begin{cases}x=6+t\\y=-7+t\\z=5+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

2) Déterminer l'intersection de (S) et (Δ).

3) On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-3,0,-2)$; $(1,-2,-2)$; $\left(2,-1,-\frac{1}{2}\right)$ et $(1,2,-1)$.

a) Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, puis calculer le volume du tétraèdre ABCD.

b) Écrire une équation du plan (ABC).

c) Déterminer la nature de l'intersection de (S) et (ABC), puis le caractériser.

Partie B

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que $|(2+3i)z-13|=2\sqrt{13}$.

2) Soit f l'application affine du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z'=\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\bar{z}$.

a) Montrer que l'ensemble des points invariants de f est l'axe réel.

b) Soit z_0 un nombre complexe fixé. On pose $z=z_0+iy$, $y\in\mathbb{R}$.

Montrer que si z_0 est un nombre réel alors $z'-z_0=\frac{1}{3}(z-z_0)$.

c) Montrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a : $|z'_1-z'_2|\le|z_1-z_2|$. Vérifier que pour $z_1=1$ et $z_2=i$ cette inégalité est stricte. En déduire que f n'est pas une isométrie.

3) Soit φ l'endomorphisme associé à f.

Déterminer la matrice de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. En déduire que f est bijective.

4) a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') dans un repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ où Ω est un point dont on donnera les coordonnées .

c) Construire (Γ) et (Γ') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de f ? Démontrer cette conjecture.

SUJET 16

Exercice 1

I. Soit r un entier relatif non nul

a) Déterminer en fonction de r tous les entiers relatifs x tels que : $\begin{cases}x\equiv r[5]\\x\equiv(r+1)[7]\end{cases}$

b) En déduire les valeurs de r pour que tous ces entiers x soient multiples de 35.

II. Un sac contient dix jetons identiques, indiscernables au toucher et portant les numéros :

(1)(1)(1)(2)(2)(2)(4)(4)(4)(4)

On tire au hasard et simultanément deux jetons de ce sac.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A : "Les deux jetons portent le même numéro."

b) B : "Les deux jetons portent des numéros distincts. "

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute paire $\{i;j\}$ associe la valeur $|i-j|$

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

3) On répète cinq fois de suite cette épreuve en remettant chaque fois les deux jetons tirés dans le sac.

Calculer la probabilité à 10^{-4} près par excès d'obtenir exactement trois fois deux jetons portant le numéro 1.

Exercice 2

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(-1;2;1)$; $B(-3;4;5)$ et $C(1;2;0)$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Π) plan médiateur du segment [AB].

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par C et orthogonale au plan (Π).

b) En déduire les coordonnées du point d'intersection H de (Π) et (Δ)

3) Soit p la projection orthogonale sur (Π).

Déterminer p(C) et l'ensemble des antécédents de H par p.

4) Déterminer l'écriture analytique de p.

5) Soit (Π') le plan passant par C et orthogonal à la droite (Δ).

On note S_{Π} et $S_{\Pi'}$ les réflexions de plans (Π) et (Π') respectivement. Donner la nature et caractériser $S_{\Pi}\circ S_{\Pi'}$.

PROBLÈME

$\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan affine P. On note V le plan vectoriel associé à P. Soit A le point de coordonnées $(-1;1)$. On notera M(z) un point M d'affixe z

Partie A

1) On considère l'application $\varphi: V \to V$ qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u})=(-x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$.

Montrer que φ est un automorphisme de V.

2) Soit $q: P \to P$ l'application affine d'endomorphisme associé φ et telle que $q(O)=A$.

a) Déterminer l'écriture analytique de q.

b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points invariants par q.

c) Démontrer que pour tout point M d'image M' par q, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe dont précisera un vecteur directeur.

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de q.

3) Soit $h: P \to P$ l'application affine qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=i\bar{z}+1$.

a) Montrer que pour tout z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, on a $|z'_1-z'_2|=|z_1-z_2|$.

b) En déduire que h est une isométrie de P.

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par h puis donner la nature de h.

4. On pose $g=h\circ q$. Montrer que l'expression analytique de g est : $\begin{cases} x'=2x+2 \\ y'=-x+y-1 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-2\sqrt{x^2+1}$ de courbe représentative (C).

(Γ) désigne l'ensemble des points des points $M(x;y)$ tels que : $-3x^2+y^2-2xy-4=0$

1) Étudier les variations de f et tracer (C) dans le repère $\mathcal{R}$. $1unité=1cm$.

2) a) Montrer que le point O est centre de symétrie à (Γ).

b) Montrer que (Γ) est la réunion de (C) et d'une autre courbe (C') dont on donnera l'équation. Tracer (C') dans repère $\mathcal{R}$.

c) On note (Γ') l'image de (Γ) par l'application affine $g = h \circ q$

a) Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère dont on donnera l'axe focale et l'équation d'une directrice dans un repère que l'on précisera.

b) Tracer (Γ') dans le repère $\mathcal{R}$.

SUJET 17

Exercice 1

a) Déterminer tous les entiers relatifs x tels que $\begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

b) Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2.

On pose $A = n^3 + 3n^2 - 7$ et $B = n + 1$

a) Montrer que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 5.

b) Déterminer n pour que pgcd(A ; B)= 5

c) On considère les équations différentielles

(E_1): $3y''' + 2y'' - y' = 0$

et (E_2): $3y'' + 2y' - y = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) puis en déduire les solutions de (E_1)

b) Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe admet au point $A(0\,;-4)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 1$ et la courbe de sa dérivée seconde passe par le point $B(0;-2)$.

Exercice 2

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{5}{4}z - \frac{1}{4}\bar{z} - i$.

On note (C) le cercle de centre $\Omega(-1+2i)$ et de rayon 2, (Γ_1) l'image de (C) par f.

1) Soit $z_1 ; z_2 ; z_3 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $z_1 - z_3 = \lambda(z_1 - z_2)$. Montrer que : $z'_1 - z'_3 = \lambda(z'_1 - z'_2)$
En déduire que f est une application affine.

2) Déterminer l'écriture analytique de f.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de (Γ_1) .

b) Donner dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$: une équation cartésienne de (Γ_1), sa nature et ses éléments caractéristiques.

c) Construire (C) et (Γ_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que tous les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ où $M' = f(M)$ ont une direction fixe que l'on précisera.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

PROBLÈME

Il comporte deux parties indépendantes

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur

$$D =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\text{ par : } f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

et on pose : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) Déterminer la dérivé f'_n de f_n et montrer que : $\forall x \in D,\ f'_n(x) = f'_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge

3) a) Démontrer que pour tout entier n ≥2 on a : $\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \le u_n \le \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

4) a) En utilisant la question 1) montrer que : $\frac{e}{2^n} - 1 = u_n - n u_{n+1}$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_{n+1})=1$

c) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie B

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace E, ABCD est un tétraèdre régulier d'arrête $3\sqrt{2}$. On désigne par : B' le milieu du segment [CD], H le centre de gravité de la face BCD et G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1) a) Montrer que $\overline{AG}=\frac{3}{4}\overline{AH}$.

b) Calculer les distances BB' ; BH et AH puis en déduire que : $AG=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M de E tels que : $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=54$.

a) Vérifier par calcul que (Γ) passe par les points A, B, C et D.

b) Montrer que (Γ) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit (Π) l'ensemble des points M tels que : $3MA^2-MB^2-MC^2-MD^2=18$.

a) Démontrer que (Π) est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AH}$.

b) b) Montrer que (Π) passe par les points B, C et D.

4) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\Pi)\cap(\Gamma)$

5) On donne $A(2;3;-2)$; $B(-1;0;-2)$; $C(2;0;1)$et $D(-1;3;1)$ et ABCD est bien un tétraèdre régulier d'arrête $3\sqrt{2}$.

a) Calculer les coordonnées de H.

b) Soit p la projection orthogonale sur le plan (BCD). Démontrer que l'ensemble des antécédents de H par p est la droite (AG).

SUJET 18

Exercice 1

On lance n fois de suite un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on considère la variable aléatoire X, qui représente le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 6.

1) Exprimer en fonction de n, la probabilité de chacun des événements suivants :

a) A : « le chiffre 6 n'apparaît aucune fois »

b) B : « le chiffre 6 apparaît une seule fois »

c) C : « le chiffre 6 apparaît au moins deux fois»

2) À tout entier naturel $n\geq1$, on associe le nombre réel $p(n)=1-\frac{5^n+n5^{n-1}}{6^n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq1$, on a $p(n+1)>p(n)$.

b) Calculer (1), $p(2)$, $p(3)$ et $p(4)$ puis déduire les valeurs de n pour lesquelles $p(n)>\frac{1}{10}$.

3) Déterminer la valeur de n pour que l'écart-type de X soit une solution de l'équation $x^2-25=0$.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On désigne par (P) le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$ et par (D) la droite passant par le point $A(0;3;0)$ et dirigée par le vecteur d'équation $\vec{j}-\vec{k}$.

1) Montrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2) Montrer qu'il existe un unique plan (Π) tel que le demi-tour d'axe (D) soit la composée de la réflexion S_P de plan (P) par la réflexion S_Π de plan (Π).

3) Donner une équation cartésienne de (Π).

4) Soit (P') le plan d'équation $2x-y-z+3=0$. On considère le plan (P'') parallèle à (P') et passant par O.

a) Déterminer une équation cartésienne de (Π').

c) Vérifier que $A \in (P')$, puis déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur (Π').

d) Déterminer l'écriture analytique de $S_{\Pi'} \circ S_{P'}$ où $S_{\Pi'}$ et $S_{P'}$ sont respectivement les réflexions de plans (Π') et (P').

Exercice 3

On pose

$$I(a,n) = \int_0^1 x^a (1-x)^n dx \text{ avec } a \in \mathbb{N}^*;$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $I(a,0) = \int_0^1 x^a dx$

1) Montrer, à l'aide d'uneintégration par parties que $I(a+1,n) = \dfrac{a+1}{n+1} I(a,n+1)$.

2. Établir que

$I(a,n) - I(a,n+1) = I(a+1,n)$.

En déduire que

$$I(a,n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a,n).$$

3) Soit $\in \mathbb{N}^*$, calculer $I(a,0)$ et démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)....(a+n+1)}.$$

PROBLÈME

Partie A

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On considère les points $A(1,0)$ et $B(-1,0)$. À tout point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$; on associe le nombre complexe $z = x+iy$ affixe de M.

1) Soit f l'application de P dans P qui à tout point M associe le point M_1 l'affixe $z_1 = x_1 + iy_1$ tel que $z_1 = iz - (1+i)$.

a) Montrer que $Mes\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BM_1 = AM$.

b) Préciser la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M.

d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB].

2) Le nombre réel λ fixé. On considère l'application f_λ de P dans P qui à tout point M associe le point M' barycentre des points M, M_1 et A affectés des coefficients respectifs λ, $-\lambda$ et 1. On note $z' = x' + iy'$ l'affixe de M'.

a) Établir que $z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i)z + 1$.

b) Déterminer la nature de f_λ et ses éléments caractéristiques.

c) Préciser pour quelles valeurs de λ, l'application f_λ est une rotation et donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

Partie B

On considère la fonction numérique g de variable réelle x définie par :

$g(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{2}{2x+1}.$$

1) a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty;-1[\cup]0,+\infty[$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b) Étudier les variations de f sur D_f puis dresser son tableau des variation.

2) a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g, puis calculer les limites de g aux bornes de D_g.

b) Établir que $\forall x \in D_g$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)f(x)}{2\sqrt{x^2+x}} g(x).$$

En déduire les variations de g puis dresser son tableau des variation.

c) Tracer la courbe (C_g) et ses asymptotes

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
$1unité = 2cm$.

SUJET 19

Exercice 1

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère le plan (Π) d'équation cartésienne $2x-y+z=1$.
Déterminer l'expression analytique de la réflexion S de plan (Π).

2) Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'expression analytique est

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y-2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y+2z-6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y-z+12) \end{cases}.$$

Démontrer que f est un demi-tour dont on précisera l'axe (Δ).

Exercice 2

A/- Répondre par vrai ou faux en justifiant à chaque fois.

1) La fonction $x \mapsto (e^x-1)\ln(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) $z' = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 + \sqrt{2}$ est l'écriture complexe d'une similitude d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

3) Le système $\begin{cases} x = -2\cos(\theta)+1 \\ y = 3\sin(\theta)-2 \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$ est la représentation paramétrique d'une ellipse.

4) Le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \int_x^{3x} e^{\frac{1}{2-t}}dt$ est $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[\cup]2, +\infty[$.

B/- On considère l'équation $(E): 13x-84y=7$

1) Vérifier que le couple $(91;14)$ est une solution de l'équation (E).
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).
3) En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
4) Montrer que pour tout couple solution (x,y) de (E) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on a :
$pgcd(x, y)=1$ ou $pgcd(x, y)=7$.
5) En déduire les solutions $(x;y)$ de (E) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telles que :
a) x et y sont premiers entre eux.
b) pgcd $(x, y)=7$.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules noires et 2 boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules.

1) Déterminer tous les évènements élémentaires liés à cette expérience aléatoire et calculer leur probabilité.
2) Peut-on dire qu'il y a équiprobabilité.
3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque évènement élémentaire associe le rang k de la dernière boule noire tirée.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
c) En déduire son écart-type.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'unité graphique est de 3cm.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1.

interpréter graphiquement les résultats.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (Γ).

5) Déterminer une primitive G de la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x^2+x^3}{1-x}$.

6) Soit D le domaine formé des points $M(x,y)$ du plan tels que : $\begin{cases} 0\le x\le \dfrac{2}{3} \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$.

On fait tourner D autour de l'axe des abscisses. On obtient un solide (Σ).

a) Représenter (Σ).

b) On coupe le solide (Σ) par un plan perpendiculaire à l'axe (OI) en un point H d'abscisse $\left(0\le x\le \dfrac{2}{3}\right)$. On note $S(x)$ l'aire de l'intersection de (Σ) et de ce plan.

Calculer $S(x)$. En déduire que la fonction $x\to S(x)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$.

Calculer le volume V du solide (Σ) en cm^3.

Partie B

(u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par : $\begin{cases} 0\le u_0\le v_0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

Calculer $v_{n+1}^2-u_{n+1}^2$ et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le v_n$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le v_0$, puis $\forall n\in\mathbb{N},\ u_0\le v_n$.

Déduire la nature des suites (u_n) et (v_n).

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le v_n-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0).$$

En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

SUJET 20

Exercice 1

1) Soit n un entier naturel non nul.

a) Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entiers 2^n ?

b) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, les entiers naturels 2^n et 1365 sont premiers entre eux.

2) Démontrer que : $\int_0^2 x^{12}(2-x)^2\,dx=\dfrac{2^{15}}{1365}$.

3) p et q sont deux entiers naturels non nuls. En utilisant un changement de variable affine, démontrer que $\int_0^2 x^p(2-x)^q\,dx=\int_0^2 x^q(2-x)^p\,dx$.

4) En déduire sans calcul et sous forme d'une fraction irréductible la valeur de l'intégrale $\int_0^2 x^2(2-x)^{12}\,dx$.

5) Soit n un entier naturel non nul. On considère $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

a) Calculer I_0.

b) En utilisant une intégration par parties, déterminer une relation de récurrente entre I_n et I_{n-1} En déduire la valeur de I_5.

Exercice 2

ABCD est un parallélogramme de sens indirect tel que AB = BD. Soit f l'application affine définie de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ lui-même par : $f(A)=B$, $f(B)=D$ et $f(D)=C$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'application $g=t^{-1}\circ f$.

1) Justifier que g est une application affine du plan.

2) On note $B'=g(B)$.

a) Vérifier que $\overrightarrow{DB'}=-\overrightarrow{AB}$ et montrer que $\overrightarrow{BB'}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) Démontrer que la droite (AD) est invariante par g.

3) Déterminer l'écriture analytique de g dans le

repère (A, B, D).

4) Soit M un point du plan, $M' = g(M)$ et I le milieu de [MM'].
   a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera et que $I \in (AD)$.
   b) Donner en justifiant, la nature exacte de g puis en déduire la nature de f.
5) Construire l'image M' d'un point quelconque M du plan par f.

Exercice 3

1) On lance trois fois de suite un dé non
2) pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir à chaque lancer un multiple de 3.
   b) On note X la variable aléatoire qui associe à ces trois lancers associe le nombre de multiples de trois obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X.

PROBLÈME

Le problème comporte trois parties dépendantes ***A, B et C***.

Partie A

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$.

1) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.(Prendre : $1 - \ln 2 \approx 0,3$)
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1;+\infty[$ une solution unique notée α et vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 3,9.
4) Calculer $f(0)$ et préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1) Démontrer que g est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2) Étudier la dérivabilité de g en 0.
3) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$.
4) a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
   Dresser le tableau des variations de g.
   (***On prendra*** $g(3,9) = 0,8$).
5) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1*cm* sur l'axe $(O;\vec{i})$ et 10*cm* sur l'axe $(O;\vec{j})$.
   Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C :

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1) Démontrer que la fonction g_1 définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0.
   a) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$
   Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0;+\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

En déduire que : $\int_0^1 g(x)dx = 2\ln(2) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

SUJET 21

Exercice 1

I/- Dans un système de numération de base a, on considère les nombres

A = $\overline{211}$, B = $\overline{312}$ et C = $\overline{133032}$.

1) Justifier que a est strictement supérieur à 3.
2) On suppose que C = A × B.
   i) Montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.
   ii) En déduire que a divise 8.
   iii) Déterminer alors a.

a) Démontrer que si k est un entier naturel alors $2^{6k+4}+3^{6k+4}\equiv 2[5]$

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que l'on ait :
$5^n-2\equiv 0[7]$ et $2^n+3^n\equiv 2[5]$

Exercice 2

Calculer :

a) La limite de la fonction $x\mapsto\dfrac{2\sin(3x)}{e^{2x}-1}$ lorsque x tend vers 0 .

b) La limite de la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$ lorsque x tend vers e .

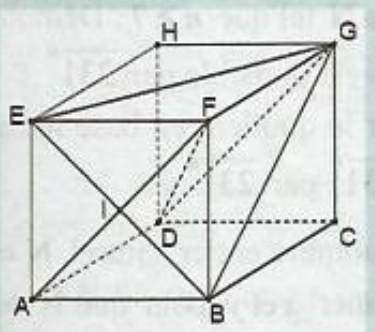
Soit g la fonction définie dans l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Déterminer les réels a et b indépendants de la variable x tel que
$g'(x)=\dfrac{a}{\cos^4 x}+\dfrac{b}{\cos^2 x}$.

b) En déduire la primitive F de la fonction $f:x\to\dfrac{1}{\cos^4 x}$, qui prend la valeur 1 en $\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube d'arête a et I est le centre de la face ABFE.



a) Justifier que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF).

b) En déduire que les droites (AD) et (BE) sont orthogonales.

c) Calculer les produits vectoriels :
$\overline{BF}\wedge\overline{DC}$, $\overline{IB}\wedge\overline{IF}$ et $\overline{AD}\wedge\overline{AF}$.

On considère les vecteurs $\vec{i}=\dfrac{1}{a}\overline{AB}$; $\vec{j}=\dfrac{1}{a}\overline{AD}$ et $\vec{k}=\dfrac{1}{a}\overline{AE}$.

a) Vérifier que (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère orthonormé de l'espace.

b) Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

d) Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre FEBG.

e) Soit O le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

Quelle est l'ensemble des antécédents de O par la projection orthogonale sur (DF) ?

PROBLÈME

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. $1unité=2cm$

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $-2i$, $4-2i$, $4+2i$ et 1.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
Donner la nature du triangle ABC.

2) Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point $M\neq A$ et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
$z'=\dfrac{z-4-2i}{z-i}$.

a) Déterminer les points B' et C' images respectives de B et C par f .

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que $|z'|=1$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$ on a :
$(z'-1)(z+2i)=-4-4i$.

b) Montrer que pour tout point $M\neq A$ et d'image M' par f , on a :

i) $M'\neq D$.

ii) $DM'\times AM=4\sqrt{2}$.

iii) $Mes\left(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{DM'}}\right)+Mes\left(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{AM}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$.

Partie B

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1. On note A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;0)$ et $(-1\ ;0)$.

1) Pour tout point K d'abscisse x du segment [AB] distinct de A et de B, soit (Δ) la perpendiculaire à (AB) passant par K. La droite (Δ) coupe le cercle (C) en deux points M et M'. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.

2) Soit la fonction numérique f de courbe (C_f) définie par : $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$.

a) Étudier la dérivabilité de f en 1 et -1.

En déduire les tangentes à (C_f) à la courbe en 1 et -1.

b) Calculer $f'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité que l'on précisera. f' désigne la dérivée de la fonction f.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f.

d) Calculer $f(0)$ et tracer (C_f) .
$\mathbf{1unité = 4cm}$.

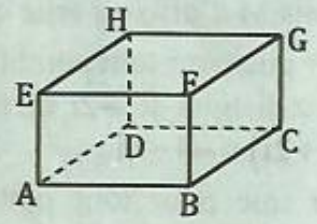
3) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ? En déduire que pour cette valeur x le triangle AMM' est équilatéral.

SUJET 22

Exercice 1

L'unité est le cm

ABCDEFGH est un pavé droit tel que :
$AB = AD = 2\ ;\ AE = \sqrt{2}$.



1) a) Calcule les produits vectoriels :
$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DG}\wedge\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{AF}$.

b) Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace E tels que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = 6$. Soit le projeté orthogonal de H sur la droite (AB).

Montrer que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$, puis déterminer (Γ).

2) Déterminer l'ensemble (Γ') des points M de E tels que : $-2ME^2 + MB^2 + MH^2 = 12$.

3) On pose $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$.

a) Vérifier que $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

b) Écrire une équation cartésienne de (Γ').

c) Soit (P) le plan d'équation cartésienne :

$$x+y+\frac{\sqrt{2}}{2}z+1=0.$$

Montrer que $E\in(P)$. Déterminer l'ensemble des antécédents de E par la projection orthogonale sur (P). Écrire une représentation paramétrique de cet ensemble.

Exercice 2

1) Tout nombre entier naturel x s'écrit $x=\overline{a_p a_{p-1}.....a_1a_0}$ en base 10.

a) Démontrer que $x\equiv a_0[10]$.

b) Déterminer le chiffre des unités du nombre $(2917)^{543}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 7$. Démontrer que $\overline{46431}^n$ est divisible par $\overline{231}^n$.

Préciser le quotient en base n de la division de $\overline{46431}^n$ par $\overline{231}^n$.

3) Soit le nombre entier naturel $N=\overline{2x4y}^5$.

Déterminer x et y pour que N soit divisible par 8.

4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13

Exercice 3

1) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\int_2^{2x} e^{\left(\frac{t^2}{t-1}\right)}dt$$

a) Démontrer que g est définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Calculer g(1) puis dresser le tableau de signe g.

c) Calculer la dérivée de g et donner le sens de variation de g.

2) L'espace E est muni d'un repère orthonormé (O , I , J , K) $1 unité = 1 cm$

Représenter en perspective le solide (Σ) défini par : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ z \ge -1 \end{cases}$, puis calculer le volume de (Σ)

PROBLÈME

Partie : A

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan

1) Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x)=\frac{x-1}{x-2}+\ln|x-2|$.

a) Étudier et dresser le tableau des variations de f.

b) Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de f. suivant les valeurs de x.

c) Quelle est l'image par f de l'intervalle $]2;+\infty[$?

d) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;2[$.

Montrer que h est une bijection de l'intervalle $]-\infty;2[$ vers un intervalle que l'on précisera.

Dresser le tableau des variations de h^{-1} bijection réciproque de h.

2) On définit la fonction numérique g par : $g(x)=(x-1)\ln|x-2|$ de courbe (C)

a) Étudier les variations de g.

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points distincts dont l'un est un point d'inflexion à (C).

c) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) en ce point d'inflexion puis tracer (T) et (C).

Partie :B

On définit une suite numérique (u_n) par : $u_0=\frac{4}{5}$ et $u_{n+1}=\cos u_n+\frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x)=\cos x+\frac{1}{4}$ et $K=\left[\frac{3}{4};1\right]$

1) Montrer que l'équation $\cos x = x-\frac{1}{4}$ admet une solution unique $\alpha \in K$

2) Montrer que $f(K) \subset K$ et $\forall x \in K$, $|f'(x)| \le 0{,}9$.

3) a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ et $|u_{n+1}-\alpha| \le 0{,}9|u_n-\alpha|$.

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \le (0{,}9)^n \left|\frac{4}{5}-\alpha\right|.$$

4) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

SUJET 23

Exercice 1

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 7 pour tout entier naturel n appartenant à l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2) a) Montrer que $2^{n+3}-2^n$ est divisible par 7.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles 2^n a pour reste 1 dans la division euclidienne par 7.

3) a) Montrer 2^n et 2^{4n+3} ont le même reste par la division euclidienne par 7.

b) Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{999} \times 9^{222}$ par 7.

Exercice 2

1) Soit le nombre complexe $z=1-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

a) Démontrer que

$$z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).$$

b) Déterminer le module et un argument de z.

c) En déduire la valeur exacte de chacun des réels : $\sin\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{5\pi}{12}$.

2) On considère le nombre complexe $z = e^{i\theta} - ie^{-i\theta}$.

a) Démontrer que $z = z_0 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ où z_0 est un nombre complexe indépendant de θ.

b) Donner alors le module et l'argument de z pour $\theta \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ et pour $\theta \in]\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}[$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$\arg(2z - 2 + 3i) \equiv \frac{\pi}{5}[\pi]$.

Exercice 3

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(-3,0,1)$; $B(-2,5,1)$ et $C(1,-1,2)$.

1) Démontrer que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

2) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B et C. On note (P) le plan médiateur du segment [OG].

a) Déterminer une équation cartésienne de (P).

b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P).

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(P)} \circ S_{(OG)}$ où $S_{(OG)}$ est le demi-tour d'axe (OG).

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unité d'axe 1 cm*)

Partie A

Soit φ l'application affine du plan $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$.

1) Montrer que $\varphi \circ \varphi = Id$ et que g n'est pas une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par g.

3) Montrer pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

4) En déduire la nature de φ et ses éléments caractéristiques.

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 4}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

3) a) Résoudre dans $]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ l'inéquation : $x + \sqrt{x^2 - 4} > 0$

b) Résoudre dans $]-2 ; 2[$ l'inéquation : $x - \sqrt{4 - x^2} \geq 0$.

4) a) Étudier la dérivabilité de f en en -2 et 2. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité.

c) Dresser le tableau des variations de f.

d) Tracer la courbe de f.

5) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$ de courbe $(\mathcal{C}g)$.

a) Montrer que $(\mathcal{C}g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport au point O origine du repère.

b) Tracer $(\mathcal{C}g)$ sur la même figure que $(\mathcal{C}_f)$

6) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tel que $y^2 - 2xy + 4 = 0$ avec $x \in]-\infty ,-2[\cup]2,+\infty[$.

Montrer que (Γ) est la réunion des restrictions de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}g)$ sur l'ensemble $]-\infty ,-2[\cup]2,+\infty[$.

7) Montrer que l'image (Γ') de (Γ) par φ est une hyperbole équilatère dont on donnera une équation réduite.

SUJET 24

Exercice 1

1) On considère les fonctions suivantes :
$g : x \mapsto \dfrac{x^2+3x}{x^2-1}$ et $t : x \mapsto \tan^2 x$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1+3x}{x^2-1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_2^3 g(x)\,dx$

b) Calculer la valeur moyenne μ de la fonction t sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.
Donner une interprétation graphique de μ.

2) L'espace E est muni du repère orthonormé (O , I , J , K). $1 unité = 2 cm$

a) Représenter en perspective le solide (Σ) défini par : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$

b) Calculer le volume de (Σ).

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique définie par : $\vec{e}_1(1,0,0)$; $\vec{e}_2(0,1,0)$ et $\vec{e}_3(0,0,1)$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $g(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $g(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $g(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

1) Déterminer l'expression analytique de g.

2) Déterminer N(g) le noyau de g. En déduire une base.

3) On note Im(g) le sous espace vectoriel image de g.

a) Montrer que les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ appartiennent à Im(g).

b) Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de Im(g).

4) Démontrer que $Im(g) \oplus N(g) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard et successivement quatre boules en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à la fin de chaque expérience aléatoire associe le nombre de boules blanches obtenues.

1) Déterminer l'univers image Ω par X.

2) Calculer la probabilité de l'événement $\{1 \le X < 3\}$.

3) Déterminer la loi de probabilité de X.

4) Définir et représenter la fonction de répartition de X.

PROBLÈME

On considère dans le plan $\mathcal{P}$ un triangle ABC rectangle isocèle en A et de sens direct tel que $AB = 1$.

Soit D le point du plan tel que C soit le milieu de [BD]. Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que : $f(A) = A$; $f(B) = D$ $f(C) = B$.

On considère le repère (A ; B ; C). $1 unité = 1,5 cm$

Partie A

1) Déterminer les coordonnées du point D et écrire une équation de la droite (BC)

2) On note (x,y) et (x',y') les couples de coordonnées des points M et M' respectivement.

a) Soit φ l'endomorphisme associé à f. Montrer que φ est un automorphisme.

b) Montrer que $M' = f(M)$ si et seulement si $\begin{cases} x' = -x+y \\ y' = 2x \end{cases}$.

c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

3) a) Déterminer l'ensemble $(\ddot{A})$ des point invariants par f.

b) Montrer que la droite (BC) est globalement invariante par f.

c) En déduire qu'il existe un unique point K de la droite (BC) invariant par f.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KB}$ en fonction de $\overrightarrow{KC}$.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Construire l'image M' d'un point quelconque M par f.

Partie B

La fonction g de la variable x est définie par :

$\begin{cases} g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} & si\ x\le 0 \\ g(x)=-x\ln x & si\ x>0 \end{cases}$; $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé ayant 2 centimètres comme longueur d'une unité sur ses axes.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g en 0.
2) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3) Justifier que l'équation $g(x)=-1$. admet une unique solution dans l'intervalle $]1,5;2[$.
4) a) Écrire une équation cartésienne de chaque demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   b) Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C})$.
   c) Construire $(\mathcal{C})$.
5) a) Vérifier que pour tout $x\le 0$, $g(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ puis calculer l'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.
   b) Construire l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par f.

SUJET 25

Exercice 1

1) Soit $n\in\mathbb{N}$, développer et réduire $(n+1)^2-(n-1)^2$.

En déduire que pour $p\in\mathbb{N}$, si $p\equiv 0[4]$ alors p peut s'écrire comme différence des carrés d'entiers naturels.

2) ABCD est un carré de centre O et de sens direct tel que AB = 6 cm.

Soit E le milieu du segment [CD] et DEFG le carré de sens direct de centre O'. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S. Préciser l'image de E par S.

En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BF}\right)$.

b) On note (Γ) le cercle circonscrit au carré ABCD et M un point quelconque de (Γ). Vérifiér que $DO'=\dfrac{1}{2}DO$. En déduire qu'il existe une similitude directe S' qui transforme O en O'. Préciser ses caractéristiques.

Quel ensemble décrit l'image de M par S' lorsque M décrit (Γ) ?

3) Soit a un réel tel que $3<a<4$. On considère la fonction $f:x\mapsto\sqrt{a^2-x^2}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *unité d'axes* : 1*cm*.

a) Représenter graphiquement $(\mathcal{C}_f)$ puis montrer que pour tout point M de $(\mathcal{C}_f)$ on a : $OM=a$.

b) On fait tourner la courbe $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume du solide ainsi obtenu.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$

1) a. Démontrer que : $0\le I_n\le\dfrac{\ln 2}{n+1}$.

   b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

   c) En remarquant que $\forall x\in[0;1]$ on a $\dfrac{x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$, Calculer : $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x}dx$

2) Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout $n\ge 2$, on pose : $S_n=1-x+\ldots+(-1)^n x^n$.

a) Démontrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

b) Démontrer que :

$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1} = ln2-(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x}{1+x}^{n+1}\,dx$.

c) Démontrer que :

$I_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[ln2-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$.

d) En déduire la valeur exacte de:

$\int_0^1 x^2\ln(1+x)\,dx$.

5) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$

PROBLÈME

Partie A

Le Plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application $f : P \to \mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)\overline{z}+1+3i$.

1) a) Montrer que f est une application affine. Écrire la matrice A dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ de son endomorphisme associé φ.

b) Démontrer que f est une isométrie.

2) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que $f \circ f = t_{2\vec{w}}$ où $\vec{w}$ est un vecteur dont on précisera les coordonnées.

3) Soit $S = f \circ t_{-\vec{w}}$.

a) Démonter que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe (Δ).

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Partie B

On considère la fonction numérique F définie par : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}\,dt$

On note f la fonction numérique définie par : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$.

1) a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble de définition de F.

b) Démontrer que f est une fonction paire.

c) En utilisant le changement de variable $u = -t$, démontrer que F est une fonction impaire.

2) On étudie désormais F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

a) Démontrer que $\forall t \in [0;+\infty[$, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \geq \frac{1}{1+t}$.

b) En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[$, on a $F(x) \geq \ln(x+1)$.

c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

3) a) Calculer $F'(x)$, pour tout $x \geq 0$ (F' est la dérivée de F).

b) Dresser le tableau des variations de F

4) a)Démontrer que $\forall t \in [0;+\infty[$, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[$, on a $F(x) \leq x$. Donner la position de la courbe de F par rapport à la droite (D) : $y = x$.

5) a)Démontrer que $\forall t \in [1;+\infty[$, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+|t|+t^2}} \leq \frac{1}{t}$.

b) En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$, on a :

$F(x) \leq \int_0^1 f(t)\,dt + \ln x$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 0$.

6) Tracer (D) et donner l'allure générale de la courbe de F.

SUJET 26

Exercice 1

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan

dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = -(\sqrt{3}+i)z-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1) Justifier que f est une similitude directe et préciser son centre Ù, une mesure de son angle et son rapport.
2) M_0 est le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$. Donner une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{UM_0}\right)$.
3) On considère la suite des points (M_n) définie pour tout entier naturel n par : $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe de M_n.
   a) Montrer par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n < 10^2$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne : $7x - 12y = 1$.
4) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 2

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules portent le nombre -3 , trois portent le numéro 1 et deux portent le numéro -1. Une épreuve consiste à extraire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.

On désigne par « a » le nombre porté par la $1^{ère}$ boule extraite ; «b » le nombre porté par la $2^{ème}$ boule extraite et « c » le nombre porté par la $3^{ème}$ boule extraite. On construit alors :

L'équation différentielle (E) : $y' + by = -\frac{e^x}{x^2}$ où y est définie sur $]0\ ;+\infty[$.

Les plans (P) et (P') d'équations respectives : $ax+cy+z=0$ et $x+y+2z=0$ dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. a ,$betc$ étant les résultats des tirages.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant le nombre –3 et une portant le nombre 1.
2) a-)Pour quelle valeur de « b » la fonction h définie par $h(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de l'équation (E) ?
   b) Déterminer la probabilité de l'évènement A : « h est solution de (E).
3) a) Calculer la probabilité de l'évènement B « (P) et (P') sont perpendiculaires ».
   b) Justifier que l'évènement C : « (P) et (P') sont parallèles » est impossible.
4) On pose (D) = (P) $\cap$ (P').
   a) Montrer que O ∈ (D) et exprimer en fonction de a et c les coordonnées d'un vecteur directeur de (D).
   b) Calculer la probabilité de l'évènement D

derepréssentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

PROBLÈME

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Partie A :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$

1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.
3) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{e} = 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1!}+\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{n!}$

Partie B :

(Γ) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;y)$ vérifiant :

$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2 = 0$

1) On pose $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on considère la transformation g qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = jz$. Montrer que g est une rotation et préci

ses éléments caractéristiques.

2) H désigne l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\text{Re}(z^2) = 1$.

Déterminer une équation cartésienne de H et le construire.

3) Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à (Γ) si et seulement si $\text{Re}\left[(jz)^2\right] = 1$.

4) *Montrer que (H) est l'image de* (Γ) *par la transformation* g. En déduire la nature de (Γ) et tracer (Γ) sur la figure précédente.

SUJET 27

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ (Unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

I. *Résolution de l'équation* (E)

1) Montrer que $-i$ est solution de (E).

2) Déterminer les nombres réels a,b,c tels que $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A,B *et* C les points d'affixes respectives $4+i, 4-i, -i$.

1) Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2) Le point Ω est le point d'affixe 2.
On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.

1) Démontrer que les points B,A,S,C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
Tracer (C).

2) À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle (C ′) de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer (C ′).

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, montrer que $|z'-i| = \frac{10}{|z-2|}$. Donner une interprétation géométrique de cette relation.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par **2009**, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009[10000]$.

Partie A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur N par
$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 \end{cases}$

1) a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)\right]$

c) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 5^{n+1}

2) a. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1[625]$

b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

Partie C

1) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions

précédentes, montrer que $2009^{8001}-2009$ est divisible par 10000.

2) Déterminer alors un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

PROBLÈME

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le but de cet exercice est de calculer une primitive de la fonction f définie sur R par : $f(x)=\sin x \sin 2x$

1) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que la fonction f peut s'écrire :
$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)$

2) Déduire de ce qui précède la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Partie B

Soit la fonction f de R dans R définie par :
$\begin{cases} f(x)=\sqrt{-x^2+2x}, si\ 0\le x\le 1 \\ f(x)=-x+2\sqrt{2-\frac{1}{x}}, si\ x>1 \end{cases}$

(C) Désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
2) Montrer que pour tout réel $x\in]1,+\infty[, f'(x)<0$
3) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau des variations.
4) a) Montrer que f réalise une bijection g de $]1,+\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera.
   b) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une unique solution a dans $[1;+\infty[$ que l'on encadrera à 10^{-1} près.
   c) Calculer $g^{-1}(\sqrt{6}-2)$ et $(g^{-1})'(\sqrt{6}-2)$
   d) Montrer que la bijection réciproque de g est dérivable sur J et donner son sens de variation.
5) Tracer la courbe (C) de f.
6) Montrer que f réalise une bijection h de $[0;1]$ dans un intervalle K que l'on précisera. Définir h^{-1} et construire la courbe (C').de h^{-1}.

SUJET 28

Exercice 1

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et parmi lesquelles deux portent le nombre – 1, une le nombre 1, trois le nombre 0 et quatre le nombre 2.

On extrait au hasard, successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note « a » le résultat obtenu au premier tirage et « b » celui obtenu au second tirage. « a » et « b » étant les réels précédemment définis, on considère :

- l'équation (E) : $2ax-3by=1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs ;
- le nombre complexe $z=a+ib$;
- l'équation différentielle $(F):ay'+by=0$, où y est une fonction définie sur R ;
- l'endomorphisme f d'un plan vectoriel dont la matrice dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

1) a-Déterminer tous les couples (a,b) pour lesquels le couple (1, 1) est solution de (E).
   b) Quelle est la probabilité pour que le couple (1, 1) soit solution de (E) ?
2) a-Quelles sont sous forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$?
   b) Quelle est la probabilité pour que le nombre z soit une racine carrée de $-3+4i$?
3) a-Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle (F) ?
   b) Quelle est la probabilité pour que la fonction f définie par : $f(x)=e^{2x}$ soit solution de (F) ?
4) a-Quelle relation y a-t-il entre a et b

permettant que $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_P}\}$?

b) En déduire la probabilité de l'évènement « f est un automorphisme de P ».

Exercice 2

A. Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace et A(1 ;2 ;1), B(1 ;1 ;0) deux points.

1) Pour tout point $M(x;y;z)$ on pose $\vec{u}(M) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Déterminer l'ensemble D des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}(M)$ soient colinéaires.

2) Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}(M)$ soient orthogonaux.

B. ABCDEFGH est un cube tel que $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct, I le milieu de $[EG]$.

1) Préciser les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I dans ce repère.

2) a-Écrire les équations cartésiennes des plans (ACE) et (CFH).

b) Montrer que ces plans sont perpendiculaires et qu'ils contiennent chacun les points C et I.

3) Donner les expressions analytiques des réflexions s et s' par rapport aux plans respectifs (ACE) et (CFH).

4) En déduire l'expression analytique du demi-tour d'axe (CI).

PROBLÈME

(Ce problème comporte deux parties indépendantes)

Partie :A

Dans le plan muni du repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$, on définit l'application f par son expression analytique : $\begin{cases} x' = x+y+3 \\ y' = -x+y-1 \end{cases}$.

1) Montrer que f est bijective.

2) a-Donner l'écriture complexe de f.

b) En déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.

3) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $5x^2+5y^2-6xy-16=0$.

a) Montrer qu'une équation de (Γ') image de (Γ) par f est : $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$.

b) Quelle est la nature de (Γ') ? Donner ses éléments caractéristiques dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Montrer que (Γ) est une conique dont on précisera la nature, les foyers et les sommets dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Construire (Γ) puis (Γ').

Partie :B

On désigne par g la fonction définie sur R par : $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$. On note (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) a- Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Construire la courbe (C) et ses asymptotes éventuelles.

2) 0n considère les points M et M' de la courbe (C) d'abscisses respectives x et $-x$.

a) Déterminer les coordonnées du point A milieu du segment $[MM']$.

b) Que représente le point A pour la courbe (C) ?

3) Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$, A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.

a) Calculer A_n.

b) Étudier la convergence de la suite (A_n).

4) Soit λ un nombre réel négatif. D la portion

du plan délimitée la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$. On désigne par S le solide de l'espace engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

a) Déterminer les réels a et b tels que :
$$\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\frac{ae^x}{1+e^x}+\frac{be^x}{(1+e^x)^2}.$$

b) Exprimer le volume V(λ) du solide S en fonction de λ et calculer la limite de V(λ) lorsque λ tend vers $-\infty$.

SUJET 29

Exercice 1

Partie A

Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l<L$.

On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

1) a) Dans cette question $l=882$ et $L=945$. Quel est la plus grande valeur possible pour a ? Quels sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question le volume de la boîte B est v = 77 760.

On sait que pour remplir la boîte B la plus grande valeur possible de a est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2) On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, l = 882 et L = 945. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

Partie B

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite :
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On appelle A le point de coordonnée $(2;0)$ et B le point de coordonnée $(0;3)$.

a) Donner les éléments caractéristiques de (E).

b) M étant un point de (E), déterminer le lieu (E') des centres de gravité des triangles ABM quand M décrit (E)

Exercice 2

I/. ABCDEFGH est un cube de cotés 1 cm de centre O.

1) Montrer que l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|=4$ est un cylindre infiniment long dont on précisera le rayon et l'axe de révolution.

2) I et J sont les milieux de $[EH]$ et $[AD]$; O_1 et O_2 les centres respectifs des carrés ADHE et BCGF.

a) On désigne par I' le projeté orthogonal de I sur le plan (ABG) ; exprimer $\overrightarrow{AI'}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$.

b) R est le demi-tour d'axe (OI). Déterminer le plan de la réflexion S_3 telle que $R=S_3 o S_1$, où S_1 est la réflexion de plan (EBH).

c) On pose $f=S_1 o S_2$, ou S_2 est la réflexion de plan (ABG). Justifier que f est une rotation et préciser son axe.

d) On pose g = R o f ; montrer que O_1 et O_2 sont invariants par g.

e) Déterminer la nature puis les éléments caractéristiques de g.

3) On suppose l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

a) Donner une équation cartésienne du plan (ABG).

b) Donner l'écriture analytique de la projection p sur le plan (ABG).

c) Vérifier que l'image de I par p est le point I' vérifiant la relation de la question 2. a-).

PROBLÈME

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A :

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A ,B et E d'affixes respectives –4 ; 4 et 4i. C et D sont des points tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés.

1) Placer les points C et D dans le repère.

2) f est l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z+4+4i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminer l'image par f de A, de O, de la droite (CA) et de la médiatrice du segment $[AO]$.

c) Exprimer, pour tout M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z.

d) En déduire que MM' = MC, et pour tout point M distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle des vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MC}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$.

3) J est le milieu du segment $[EB]$ et I est celui de $[AO]$. Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

PartieB :

1) a- Montrer que $\forall t \in IR, e^t \geq t+1$.

b) En déduire que $\forall t \in IR$, $e^t > t$, que $-te^{-t} > -1$ et que pour tout réel t > -1, $\ln(1+t) \leq t$.

c) En déduire que pour tout réel x, $\ln\left(1-xe^{-x}\right) \leq -xe^{-x}$.

2) On considère la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^2-2\ln\left(e^x-x\right)$. On admet que la limite de f en - ∞ est + ∞.

a) Montrer que $f(x)=x^2-2x-2\ln\left(1-xe^{-x}\right)$ et déterminer la limite de f en + ∞.

b) Calculer $f'(x)$, montrer que $f'(x)=\frac{2(x-1)\left(e^x-x-1\right)}{e^x-x}$ et dresser le tableau de variation de f.

3) Dans un repère orthonormal (unité :3cm), on considère la parabole (P) d'équation $y=x^2-2x$ et (C) la courbe représentative de f. Montrer que (C) et (P) sont asymptotes et étudier leurs positions relatives.

4) Donner une équation de chacune des tangentes (D) et (D') respectivement aux courbes (P) et (C) au point d'abscisse 0.

5) Tracer dans le même repère (P) et (C) ainsi que leurs tangentes (D) et (D').

6) n étant un entier naturel, on pose $U_n=\int_0^n xe^{-x}\,dx$.

a) Montrer que la suite U de terme général U_n est croissante.

b) Calculer U_n à l'aide d'une intégration par parties.

c) Déterminer la limite de la suite U.

7) A_n désigne l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x=0, x=n$, la parabole (P) et la courbe (C).

a) Montrer, en utilisant la question 1.c-), que $A_n \geq 2U_n$.

b) On admet que la suite (A_n) converge vers un réel s. Montrer que $s \geq 2$.

SUJET 30

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)=(2x+1)e^{3x}$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul la dérivée $n^{ième}$ de

f existe et on la note $f^{(n)}$. On pose $f^{(0)} = f$.

1) Déterminer les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$ (1).
2) Démontrer alors que toutes les fonctions dérivées $n^{ième}$ de f vérifie (1).
3) Déterminer l'ensemble des primitives de f. Montrer qu'une et une seule primitive de f vérifie (1).
4) Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = 0$.
5) Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient pour tout entier naturel n : $\begin{cases} f^{(n)} = a_n f' + b_n f \\ a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -9a_n \end{cases}$.

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = -3^{-n-1} b_n \end{cases}$.

6) Montrer que $(v_n) \in \mathbb{N}$ $a_0 = 0$; $b_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)3^n$ et $b_{n+1} = -n3^{n+1}$.
7) Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de x et de n.

Exercice 2

Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, -1 et 2$ avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c où $a, b et c$ sont en progression arithmétique. On suppose l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1) Calculer a, b, c et la variance $V(X) de X$.
2) Soient A, B et C trois points d'abscisses respectives $1, -1 et 2$ d'une droite graduée (D).
   a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,4)\}$.
   b) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MB^2)$ où M est un point de (D). montrer que $\varphi(G) = V(X)$.
   c) Déterminer l'ensemble des point M de (D) tels que $\varphi(M) = 3$.

PROBLÈME

Partie A

On considère pour tout entier strictement positif n la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + ln|x-1|$$

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2cm). On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition de définition.
2) Étudier les branches infinies de f_n. (on distinguera le cas $n = 1$; n impair différent de 1 et n pair).
3) Montrer que f_n est dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \neq 1, f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}$.
4) Étudier les variations de f_n et dresser le tableau de variation de f_n. (on distinguera les cas n impair et n pair).
5) Calculer la dérivée seconde de f_n. Étudier l'ensemble des points d'inflexion de (C_n). (on distinguera le cas $n = 1$; n impair différent de 1 et n pair).
6) Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on note T_n la tangent à (C_n) au point d'abscisse $\frac{n}{n-1}$. Tracer les courbes (C_2) et (C_3) ainsi les tangentes T_2 et T_3.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un réel unique $\alpha_n > 1$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   b) Vérifier que pour tout entier $n > 1$ on a : $f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n^n$ et $-\frac{1}{n}\alpha_n^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$.
   c) En déduire que la suite (α_n) est monotone et convergente.
   d) Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$\frac{1}{p+1} \le \ln(p+1) - \ln(p) \le \frac{1}{p}.$$

e) Vérifier alors que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)>0.$$

f) En déduire que $\alpha_n < 1+\frac{1}{n}$. Calculer alors la limite de la suite (α_n).

Partie B

1) Montre que $\forall x<1, f_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{t-1}dt$ et que $\forall x>1, f_n(x)=\int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1}dt$.

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(-1)| \le \int_0^x (-t)^n dt$; calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-1)$.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

SUJET 31

Exercice 1

1) On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^3-6z^2+12z-16$. Trouver trois réels a, b et γ tels que pour tout complexe z, $P(z)=(z-4)(az^2+bz+\gamma)$.

Résoudre dans C l'équation $P(z)=0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal *direct* $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a=4 \quad b=1+i\sqrt{3} \quad c=\overline{b}$.

a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k=-\sqrt{3}+i$. On appelle G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Calculer l'affixe g du point G sous forme algébrique.

b) Donner les écritures exponentielles de k et de l'affixe f de F.

c) Prouver que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) On note H le point tel que le quadrilatère $COFH$ soit un parallélogramme.

a) Montrer que $COFH$ est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H.

c) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral de sens direct.

5) Pour tout entier naturel n, on note B_n le point d'affixe b^n. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le point B_n appartient à la droite (OC).

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; unité graphique : 2 cm.

Pour tout entier naturel $n>3$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x^3-nx+1$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on précisera les coordonnées.

a) Calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x.

b) En déduire le sens de variations de la fonction f_n. Dresser son tableau des variations.

3) Démontrer que l'équation d'inconnue $x, f_n(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle [0 ;1]. Cette solution, qui dépend de n, sera notée u_n.

a) Tracer la courbe (C_3)

b) Montrer que $0,34 \le u_3 \le 0,35$.

c) Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n \leq \frac{2}{n}$

d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n>3}$

4) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

PROBLÈME

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur à 1.

1) Pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq 3$, calculer le reste de la division euclidienne de 11^k par 7.

2) Montrer que pour tout réel a, $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.

3) En déduire que $11^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

4) Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{2004} par 7.

5) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $17x - 15y = -6$.

6) Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Partie 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

[unité graphique : 6 cm]. On considère la suite (α_n) de nombre réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n.

1) Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{11}$

2) On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

a) Les points M_n, M_{n+6} sont diamétralement opposés.

b) Les points M_n, M_{n+12} sont confondus.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, $z_{n+4} = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_n$.

SUJET 32

Exercice 1 :

1) On considère un entier naturel x plus grand que 2. On pose $y = \overline{14643}^x$

a) Écrire y en base $(x+1)$

b) Déterminer y sachant que $y < 600$

2) Soit p un nombre premier.

a) Démontrer que pour tout entier k tel que $1 < k < p$, C_p^k est un multiple de p.

b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b on a $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel a, $a^p \equiv a[p]$

d) En déduire que si a et p sont premiers entre eux, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exercice 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan *(P)* d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$, la droite *(D)* passant par A(1 ; -1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et S la symétrie orthogonale par rapport au plan *(P)*.

1) Démontrer que *(D)* et *(P)* sont perpendiculaires

2) a) Donner l'expression analytique de S puis donner les coordonnées de A' = S(A)

b) Démontrer que les points E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 2) et G(2 ; 1 ; 1) déterminent le plan *(P)*

c) Calculer alors le volume du tétraèdre AEFG

Exercice 3 :

1) E est un espace vectoriel de dimension 3.

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de E et f est un endomorphisme de E tel que $f(\vec{i})=f(\vec{j})=\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ et $f(\vec{k})=\vec{k}$

a) Déterminer une base de Kerf et une base de Imf

b) Montrer que Kerf et Imf sont deux sous-espaces supplémentaires de E

c) On pose $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$. Montrer que $B=(\vec{a},\vec{b},\vec{k})$ est une base de E, puis donner la matrice de f dans la base B

2) a) F et G sont deux points tels que FG = 10. Dans un repère convenablement choisi, déterminer une équation réduite et construire l'ensemble des points M du plan tels que $|MF-MG|=6$

b) Démontrer le système $\begin{cases} x=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) \\ y=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ $(\alpha\in R)$ est une représentation paramétrique d'une conique dont on déterminera la nature et l'équation réduite

PROBLÈME

le problème comporte trois parties A, B et C

Partie A :

On considère la fonction f_n $(n\in N^*)$ définie sur $R-\{-2\}$ par $f_n=\frac{e^{x+1}}{(x+2)^n}$ et (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer les limites de f_n à gauche et à droite en -2. On distinguera les cas n pair et n impair.

2) Calculer $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n

3) Démontrer que les courbes (C_n) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées, pis écrire une équation de la tangente à (C_n) en A.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f_{n(x)}}{x}\right)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Démontrer que : $f_n'(x)=f_n(x)-nf_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives de (C_1) et (C_2)

d) Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère

Partie B :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n=\int_{-1}^{0}\frac{e^{x+1}}{(x+2)^n}dx$

1) Démontrer que (U_n) est décroissante et à termes positifs, puis conclure.

2) Démontrer que pour tout entier $n\geq 2$, $\frac{1-2^{1-n}}{n-1}\leq U_n\leq\left(\frac{1-2^{1-n}}{n-1}\right)e$, puis déterminer la limite de la suite (U_n)

3) a) Démontrer que pour $n\geq 2$, on a $nU_{n+1}=U_n+1-e2^{-n}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{ne^{x+1}}{(x+2)^{n+1}}dx=1$

Partie C :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=f_1(x-1)$ et (C) sa courbe dans le repère ci-dessus.

1) Construire (C) dans le repère précédent

2) On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=1+\ln(1+x)$

a) Démontrer que $h(x)=x$ équivaut à $g(x)=e$, puis démontrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution α dansl'intervalle I = $[2;3]$.

b) Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)|\leq\frac{1}{3}$ et h(I) est inclus dans I.

3) On considère la suite (V_n) définie par $V_0=2$ et $V_{n+1}=h(V_n)$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite croissante.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n

on a : $|V_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$.

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

SUJET 33

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{e_1}, \vec{e_2})$

1) Placer les points A et B d'affixes respectives 1-i et 7+4i.
2) On considère la transformation plane F d'écriture complexe : $z' = (1-3i)z + (3+6i)$
   a) Déterminer l'affixe du point C = F (A), puis construire C.
   b) Déterminer l'affixe du point D antécédent par F de B, puis construire D.
   c) Démontrer que F admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe *w*.
3) Montrer que pour tout nombre complexe z on a : $z' - z = -3i(z - w)$.
4) En déduire $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right)$.
5) En déduire une construction géométrique de M'image de M par F.

Exercice 2 :

On lance un dé tétraédrique dont les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4. On lit le numéro de la face cachée. Le dé est pipé de telle sorte que les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 d'obtenir respectivement 1, 2, 3 et 4 sur la face cachée soient dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1) Sachant que $P_4 = 0{,}4$, calculer P_1, P_2 et P_3.
2) On lance n fois ce dé ($n \geq 1$). Les lancers sont supposés indépendants deux à deux et identique. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois 4 au $n^{ième}$ lancer.
   a) Exprimer U_n en fonction de n.
   b) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$
      i) Exprimer S_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (S_n).
      ii) Déterminer le plus petit entier n tel que Sn > 0,999.

Exercice 3 :

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+3)}$.
2) Déterminer la primitive K de la fonction k définie sur $]1;+\infty[$ par $k(x) = \frac{1}{x - x^2}$ qui prend la valeur ln4 en 2.
3) Démontrer que la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x + \ln\sqrt{x^2 + 4x + 5}$ est une primitive sur R de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{x^2 + 5x + 7}{x^2 + 4x + 5}$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique 1cm. On considère la fonction g définie par $g(x) = x\ln x - x + 1$ et la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

1) a) Étudier les variations de g puis donner le signe de $g(x)$ en fonction de x.
   b) En déduire la primitive de la fonction *ln* qui prend la valeur 2 en 1.
   c) Montrer que la courbe de g et celle de ln se coupent en deux points dont on déterminera les coordonnées.
2) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
3) Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ puis montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{x(1-x)^2}$ pour tout x de $]1;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer la courbe de f.
5) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet

une unique solution α telle que $3,5<\alpha<3,6$.

6) On considère la fonction h définie par $h(x)=lnx+\frac{x+1}{2}$.

a) Montrer que $f(x)=\frac{1}{2}$ équivaut à $h(x)=x$.

b) Étudier les variations de h puis montrer que pour tout x de $[3;4]$, $|h'(x)|\leq\frac{5}{6}$.

7) On définit la suite (U_n) par $U_0=3$ et $U_{n+1}=\ln(U_n)+\frac{1+U_n}{2}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $3\leq U_n\leq 4$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{5}{6}|U_n-\alpha|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha|\leq(\frac{5}{6})^n$ et que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

d) Déterminer un entier N tel U_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

SUJET 34

Exercice 1 :

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1-3+5-7+\ldots+(-1)^n(2n+1)=(n+1)(-1)^n$

b) En déduire la valeur de : $A=25-27+29+\ldots+65$.

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n+1}+3\times5^{2n+1}$ est un multiple de 17.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $n!\geq2^{n-1}$.

b) Montrer que la suite (a_n) définie sur N* par $\alpha_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ est majorée par 3

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente

Exercice 2 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0=$, $V_0=2$, $U_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$ et $V_{n+1}=\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leq V_n\leq U_n$.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et la suite (V_n) est croissante.

3) En déduire que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, $V_n\leq U_m$.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{2}(U_n-V_n)$.

5) En déduire que pour tout entier naturel n, $0\leq U_n-V_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(\pi-2)$.

6) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et convergent vers la même limite

Exercice 3 :

On considère le polynôme P défini sur C par $P(z)=z^3-(5-i)z^2+(10-6i)z-8+16i$.

1) Montrer que le polynôme P admet une racine imaginaire pure α.

2) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$.

3) En déduire toutes les racines du polynôme P

4) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-i$; $2+2i$; $-2i$ et $2i$

a) Étudier la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'affixe du point E tel que ABCE soit un parallélogramme

c) Déterminer l'affixe du point F, symétrique de A par rapport au milieu du segment [BC]

d) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont précisera le centre et le rayon.

L'importance des Mathématiques exige une stricte conformation au système d'enchâssement logique et continu des connaissances à tous les niveaux d'apprentissage.

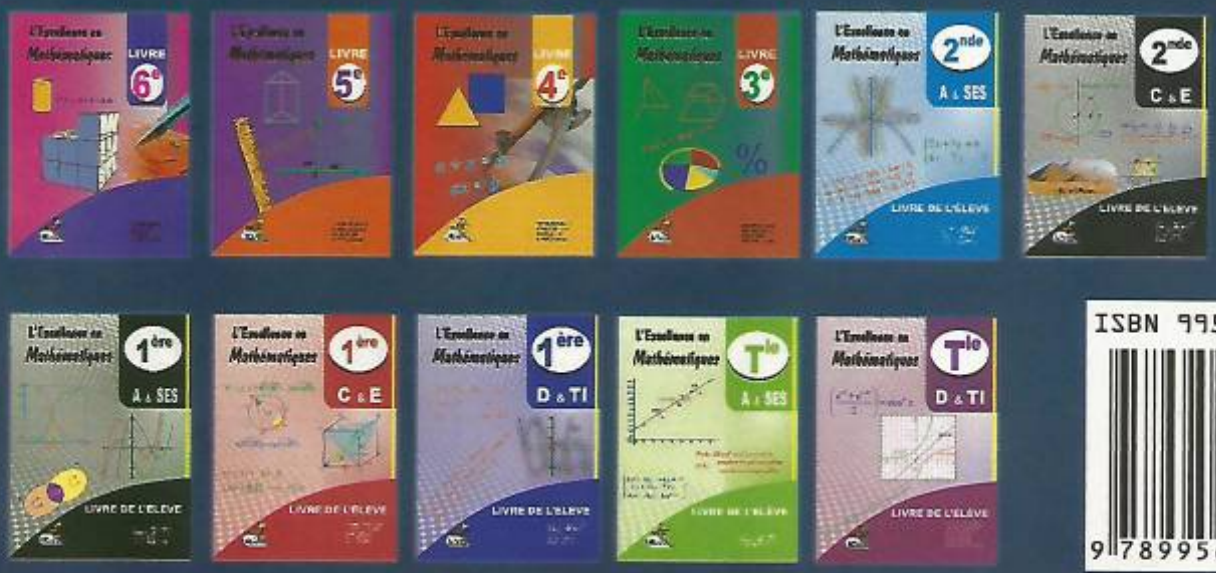
Cette exigence aura présidé à la conception et à l'élaboration des ouvrages de la collection **« L'Excellence en Mathématiques »**, ouvrages rédigés dans l'esprit des principaux objectifs visés pour l'enseignement des Mathématiques, à savoir :

- Affirmer et affiner les facultés latentes d'ordre et de méthode inhérentes à chaque apprenant ;
- Favoriser le développement des capacités de travail individuel de l'élève, de son aptitude à la communication, à la créativité et à la gestion rationnelle du quotidien.

L'ordre des chapitres de chacun des ouvrages de la collection est en lui-même une suggestion d'un plan de progression dans le programme du niveau concerné, plan qui demeure cependant indicatif.

La pertinence du contenu des ouvrages de la collection **« L'Excellence en Mathématiques »** contribuera au bonheur des apprenants et à celui d'autres utilisateurs des ouvrages de l'Enseignement Secondaire.

La collection « L'Excellence en Mathématiques » est l'œuvre d'un groupe d'enseignants ayant une longue pratique de l'enseignement des Mathématiques, doublée d'une expérience appréciable dans la formation des formateurs.



ISBN 9956-802-93-
9 789956 802937