PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR (PGCD)

Définition 1

Soit a et b deux entier relatifs non nuls le plus grand commun diviseur a a et b est appelé $pgcd(a;b)$.

On note $pgcd(a,b)$ ou $a \wedge b$

Remarque : comme 1 divise tous nombres entiers a et b alors $pgcd(a;b) \geq 1$

Exemple : $pgcd(24;18) = 6$

Propriétés 1

Soit a, b; r des entiers non nuls

- $pgcd(a;a) = a$
- $pgcd(1;a) = 1$
- $pgcd(a;b) = pgcd(b;a)$
- $pgcd(a;b) = pgcd(-a;b) = pgcd(a;-b)$
- si ${}^{b}/_{a}$, $pgcd(a;b) = |b|$
- si $a = bq + r$ $alors$

$$pgcd(a,b) = pgcd(b;r)$$

Propriété 2

$\forall$ $a, b \in Z^*$ et pour tout entier naturel k non nul

$pgcd(ka;kb) = kpgcd(a;b)$

Théorème 1

Soient a et b deux entiers non nuls les diviseurs communs de a et b sont exactement les diviseurs du $pgcd(a;b)$:

$$\begin{cases} {}^{d}/_{a} \\ {}^{d}/_{b} \end{cases} \Leftrightarrow {}^{d}/_{pgcd(a;b)}$$

Propriété 3

Si d est un diviseur commun de a et b,on note $a = da'$ et $b = db'$ a' et b' sont des entiers naturel non nuls

$$pgcd(a;b) = \delta \text{ et } pgcd(a';b') = \delta'$$

$$\text{alors } \delta = d\delta'$$

Théorème 2

Pour tout entier naturel non nuls a et b il existe deux entiers relatifs u, v tels que

$$au + bv = pgcd(a;b)$$

Méthode Egalite entre deux nombres

Soit d et D deux quantités, pour montrer que d=D

Il suffit :

1-de montrer successivement que $D \leq d$ et

$d \leq D$

2-dans le cas de nombres entiers positifs, on pourra aussi montrer que ${}^{D}/_{d}$ et ${}^{d}/_{D}$

ALGORITHME D'EUCLIDE

Théorème 3

Soit a et b deux entiers naturel non nul tel que b ne divise pas a.

La suite des divisions euclidienne suivantes finit par s'arrêter le dernier reste non nul est alors le $pgcd(a;b)$

$$a \text{ et } b\,, \quad a = bq_0 + r_0 \ \ avec\ b > r_0 \geq 0$$

$$b \text{ et } r_0\,, \quad b = r_0q_1 + r_1 \ \ b > r_0 \geq r_1 \geq 0$$

$$r_0 \text{ et } r_1\,, r_0 = r_1q_2 + r_2 \quad b > r_0 > r_1 \geq r_2$$

Exemple 1 : calculer le $pgcd(4539; 1958)$

$$4539 = 1958 \times 2 + 623$$

$$1958 = 623 \times 3 + 89$$

$$623 = 89 \times 7 + 0$$

Le dernier reste non nul est : 89

Conclusion : $pgcd(4539; 1958) = 89$

Définition 2

On dit que deux entiers relatifs $a\ et\ b$ sont premiers entre eux si

$$pgcd(a; b) = 1\ alors\ ppcm(a; b) = ab$$

Exemple 2 : 10 et 21 sont premiers entre eux.

Applications

Application 1

Déterminer selon les valeurs de n le $pgcd(A\,;B)$

Avec $A = 2n + 1$; $B = n - 5$

Application 2 (CIAM page 30 n° 64)

Soit $a\ et\ b$ deux entiers naturels non nuls

Démontrer que :

$$pgcd(13a + 8b; 5a + 3b) = pgcd(a; b)$$

Application 3

Soient a,b,c et d quatre entiers relatifs tel que

$$a = bc + d$$

1. Montrer que $pgcd(a; b) = pgcd(b; d)$
2. En déduire que $pgcd(a; b) = pgcd(b; a - bc)$

Propositions de corrections

Application 1

1ère Démarche

Posons $d = 2n + 1 \wedge n - 5$

Rappel : $si \begin{cases} a\,/\,b \\ a\,/\,c \end{cases} \Rightarrow a/\lambda b + \beta c$ (Linéarité)

$$\begin{cases} d/2n + 1 \\ d/n - 5 \end{cases} \Rightarrow d/1 \times (2n + 1) - 2(n - 5)$$

Ainsi : $d/11 \iff d \in \{1; 11\}$

- Si $d = 11 \Rightarrow 11/n - 5 \iff n - 5 \equiv 0[11]$

D'où : $n \equiv 5[11] \iff n = 5 + 11k\ ,k \in Z$

Dans le cas ou $n \neq 5 + 11k\ ,k \in Z \Rightarrow d = 1$

Alors : $2n + 1 \wedge n - 5 = 1$

2ème Démarche

Rappel : $a \wedge b = b \wedge r\ \ ou\ pgcd(a; b) = pgcd(b; r)$

$$2n + 1 = 2 \times (n - 5) + 11$$

$$pgcd(2n + 1; n - 5) = pgcd(n - 5; 11)$$

si $11/n - 5 \iff n \equiv 5[11] \Rightarrow pgcd(n - 5; 11) = 11$

Si 11 ne divise pas $n - 5$ alors $pgcd(n - 5; 11) = 1$

Application 2

Rappel : $pgcd(a; b) = pgcd(b; r)$

Avec $a = bq + r$

$$13a + 8b = 2(5a + 3b) + 3a + 2b$$

$$pgcd(13a + 8b; 5a + 3b) = pgcd(5a + 3b; 3a + 2b)$$

$$5a + 3b = 1 \times (3a + 2b) + 2a + b$$

$$pgcd(5a + 3b; 3a + 2b) = pgcd(3a + 2b; 2a + b)$$

$$3a + 2b = 1(2a + b) + a + b$$

$$pgcd(3a + 2b; 2a + b) = pgcd(2a + b; a + b)$$

$$2a + b = 1(a + b) + a$$

$$pgcd(2a + b; a + b) = pgcd(a + b; a)$$

$$a + b = 1 \times a + b$$

$$pgcd(a + b; a) = pgcd(a; b)$$

$donc : pgcd(13a + 8b; 5a + 3b) = pgcd(a; b)$

Application 2

1er Démarche

Rappel : $si\ \delta/\delta'\ et\ \delta'/\delta\ alors\ \delta = \delta'$

$posons\ \delta = pgcd(a; b)\quad et\quad \delta' = pgcd(b; d)$

On a d'une part :

$$\begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/bc + d \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/bc + d - bc \\ \delta/b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta/d \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/pgcd(b; d)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} \delta'/b \\ \delta'/d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta'/bc \\ \delta'/d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta'/bc + d \\ \delta'/d \\ \delta'/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta'/a \\ \delta'/b \end{cases}$$

$$\delta'/pgcd(a; b)$$

$$pgcd(a; b) = pgcd(b; d)$$

2. on a : $a = bc + d \Longrightarrow d = a - bc$

Ainsi $pgcd(a; b) = pgcd(b; a - bc)$

2ème Démarche

Rappel: $pgcd(a; b) = pgcd(b; r)$

On a : $a = bc + d$

Nous avons la divisions euclidienne de a par b

Ainsi $pgcd(a; b) = pgcd(b; d)$

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (PPCM)

Définition 3

Soit $a\ et\ b$ deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de $a\ et\ b$, et on note $ppcm(a; b)$ le plus petit élément strictement positif de $aZ \cap bZ$.

Exemple : $ppcm(12; 16) = 48\ et\ ppcm(5; 7) = 35$

Propriétés 5

Soient $a, b\ et\ k$ des entiers naturels non nuls

- $ppcm(a; b) = ppcm(b; a)$
- $ppcm(a; a) = ppcm(a; 1) = |a|$
- $ppcm(a; 0) = 0$
- $a/b \Leftrightarrow ppcm(a; b) = |b|$
- $ppcm(ka; kb) = kppcm(a; b)$
- $ppcm(a; b) \times pgcd(a; b) = |ab|$

Propriété 6

Soit a, b sont deux entiers non nuls

Si $pgcd(a; b) = \delta\ \ alors\ \ ppcm(a; b) = \delta a'b'$

avec $a = \delta a'\ \ et\ \ b = \delta b'$

Applications

Application 1

Déterminez suivants les valeurs de l'entier naturel non nul n,

1-$pgcd(n(n + 1); 3)$ 2-$ppcm(n(n + 1); 3)$

3-$ppcm(n; 4)$ 4-$pgcd(n; 4)$

5-$pgcd\big(n(n + 1)(n + 2)\big); 2n)$

6-$ppcm\big(n(n + 3)\ ; 2(n + 3)\big)$

7-$pgcd\big(n(n + 3); 2(n + 3)\big)$

l'Autopsie

Application 2

a- $\begin{cases} pgcd(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

b- $\begin{cases} xy = 1008 \\ ppcm(x;y) = 168 \end{cases}$

c- $\begin{cases} ppcm(x;y) = 228 \\ pgcd(x;y) = 12 \end{cases}$

Propositions de corrections

Application 1

1-$pgcd(n(n+1);3)$

$$3/_{n(n+1)} \Leftrightarrow n(n+1) \equiv 0[3]$$

$$n \equiv 0[3]\ ; ou\ n+1 \equiv 0[3]$$

$$n = 3k \quad ou\ n = 3k+2\ \ ; k \in IN^*$$

Alors $pgcd(n(n+1)\ ; 3) = 3$

Si 3 ne divise pas $n(n+1)$ c'est-à-dire si

$n = 3k+1$ alors $pgcd(n(n+1);3) = 1$

2-$ppcm(n(n+1);3)$

Si $3/_{n(n+1)} \Leftrightarrow ppcm(n(n+1);3) = n(n+1)$

Si $n = 3k+1\ alors\ pgcd(n(n+1);3) = 1$

De ce fait $ppcm(n(n+1);3) = 3n(n+1)$

3-$pgcd(n;4)$

$4/n \Leftrightarrow n = 4k\ , k \in IN^*$ alors $pgcd(n;4) = 4$

Si $4\ ne\ divise\ pas\ n\ , n \neq 4k, k \in IN^*$

Alors $pgcd(n;4) = 1$

-si $4\ ne\ divise\ pas\ n\ et\ \ n = 2$

$$pgcd(n;4) = 2$$

4- $ppcm(n;4)$

Si $4/n \Leftrightarrow n = 4k\ ; k \in IN^*$alors $ppcm(n;4) = n$

Si $n \neq 4k\ \ , k \in IN^*$

Alors $ppcm(n;4) = 4n$

Si $n = 2$ alors $ppcm(n;4) = 4$

5-$pgcd(n(n+1)(n+2);2n)$

$2n\ est\ toujours\ \ pair\ \ , n(n+1)(n+2)$ est le produit de trois nombre entier consécutif en effet

$$n(n+1)(n+2) = 6k\ , k \in IN^*\ , n\ non\ nul$$

Alors $pgcd(n(n+1)(n+2);2n) = 2$

6-$ppcm\big(n(n+3);2(n+3)\big)$

$$ppcm\big(n(n+3);2(n+3)\big) = (n+3)ppcm(n;2)$$

Si $2/n \Leftrightarrow n = 2k\ , k \in IN^* \Longrightarrow ppcm(n;2) = n$

$$ppcm\big(n(n+3);2(n+3)\big) = n(n+3)$$

Si 2 ne divise pas n , $n = 2k+1$

Alors $\Longrightarrow ppcm(n;2) = 2n$

$$ppcm\big(n(n+3);2(n+3)\big) = 2n(n+3)$$

7-$pgcd\big(n(n+3);2(n+3)\big)$

$$pgcd\big(n(n+3);2(n+3)\big) = (n+3)pgcd(n;2)$$

Si $2/n \Leftrightarrow n = 2k\ , k \in IN^* \Longrightarrow pgcd(n;2) = 2$

$$pgcd\big(n(n+3);2(n+3)\big) = 2(n+3)$$

Si 2 ne divise pas n, $n = 2k+1, k \in IN^*$

D'où : $pgcd(n;2) = 1$

Donc : $pgcd\big(n(n+3);2(n+3)\big) = (n+3)$

Application 2

a- $\begin{cases} pgcd(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

$\begin{cases} x \,/\, 354 \\ y \,/\, 354 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 354x' \\ y = 354y' \end{cases}$

Avec $pgcd(x';y') = 1$ par suite

$354x' + 354y' = 5664$

$$354(x' + y') = 5664$$

$$x' + y' = 16$$

x' *et* y' Sont deux nombres premiers entre eux dont la somme donne 16

$$(x';y') = (1;15) \quad (x';y') = (7;9)$$

$$(x';y') = (15;1) \quad (x';y') = (9;7)$$

$$(x';y') = (11;5) \quad (x';y') = (5;11)$$

$$(x';y') = (13;3) \quad (x';y') = (3;13)$$

On sait déjà $\begin{cases} x = 354x' \\ y = 354y' \end{cases}$

Ainsi $(x;y) = \begin{Bmatrix} (354;5310);(5310;354); \\ (2478;3186);(3186;2478) \\ (3894;1770);(1770;3894) \\ (4602;1062);(1062;4602) \end{Bmatrix}$

b-

$$\begin{cases} xy = 1008 \\ ppcm(x;y) = 168 \end{cases}$$

Rappel : $ppcm(x;y) \times pgcd(x;y) = xy$

$$168pgcd(x;y) = 1008$$

$pgcd(x;y) = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \end{cases} avec\ x' \wedge y' = 1$

Par suite : $6x'6y' = 1008$

$$36x'y' = 1008$$

$$x'y' = 28$$

Ainsi nous obtenons les couples suivants

$$(x';y') = (1;28);(28;1);(7;4);(4;7)$$

$$\begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \end{cases} avec\ x' \wedge y' = 1$$

En remplaçant les couples précèdent dans le système ci-dessus on obtient

Les solutions sont les couples suivant :

$(x;y) = \{(6;168);(168;6);(42;24);(24;42)\}$

c- $\begin{cases} ppcm(x;y) = 228 \\ pgcd(x;y) = 12 \end{cases}$

Rappel : $\boldsymbol{pgcd(x\,;y) = \delta \quad ppcm(x\,;y) = \delta x'y'}$

avec $\boldsymbol{x' \wedge y' = 1}$

$$ppcm(x;y) = 12 \times 19$$

Par identification : $x'y' = 19$

Ainsi $(x';y') = \{(1;19)\,;(19;1)\}$

$$\begin{cases} x = 12x' \\ y = 12y' \end{cases} avec\ pgcd(x';y') = 1$$

Donc $(x;y) = \{(12;228)\,;(228;12)\}$