

# MATHÉMATIQUES T.S

## T.C-D BAC BLANC 2024

 **Fomesoutra**.com  
*ça soutra !*



Organisation Mathématiques  
des Enseignants Gabonais

DIRECTION D'ACADEMIE PROVINCIALE  
DU HAUT OGOOUE

\*\*\*\*\*

**BACCALAUREAT BLANC-SESSION DE FEVRIER 2024 (LEMA)**

**2024 - MATHEMATIQUES**

**Série : D Coefficient : 4 Durée : 4 heures**

**Utilisation du Blanco est formellement interdite**

**EXERCICE 1 (40 pts)**

Pour chaque question proposée, une seule proposition exacte. Vous indiquerez sur votre copie, dans l'ordre, le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est exigée.

- Une bonne réponse rapporte : **10 pts**
- Une absence de réponse ou une réponse fausse rapporte : **0 pt**

**1- ABC est un triangle équilatéral de côté  $a$ . H est le projeté orthogonal de A sur (BC).**

$\vec{AH} \cdot \vec{CA}$  est égal à

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-\frac{3}{2}a^2$	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{3}{4}a^2$	$-\frac{3}{4}a^2$

**2- Soit  $J = \int_0^\pi e^x \cos x dx$ . Après une double intégration par parties, on trouve :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$J = 0,5(1 + e^\pi)$	$J = \frac{1}{2}(1 - e^\pi)$	$J = -\frac{1}{2}(1 + e^\pi)$	$J = -(1 + e^\pi)$

**3- Les solutions de la résolution dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes de l'équation :**

$$z^2 - 6\cos\frac{\pi}{6}z + 9 = 0 \text{ Sont :}$$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

**4-  $f: x \mapsto e^{-x} + x - 1$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$ . Sans expliciter  $f^{-1}$  et sachant que :  $f(1) = e^{-1}$ , alors  $(f^{-1})'(e^{-1})$  est égale à :**

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$e - 1$	$\frac{e}{e-1}$	$\frac{1}{e} - 1$	$\frac{e-1}{e}$

**EXERCICE 2 (60 points)**

**Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment**

I- L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A(1; 1; 1); B(2; 3; 0); C(2; 2; -1) et D(1; 2; 3)

1. a. Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ , puis en déduire l'aire du triangle ABC.
- b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D_1)$  passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).
- b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite  $(D_1)$  et du plan (ABC)
- c) Calculer  $\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ . Que peut-on en déduire des points A, B, C et D ?

3. Soit  $(\mathcal{P})$  un plan d'équation :  $2x + y + z - 4 = 0$  contenant le point A.

Démontrer que les plans  $(ABC)$  et  $(\mathcal{P})$  sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection  $(D_2)$

4. Soit  $(\mathcal{S})$  la sphère d'équation cartésienne :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

a) Montrer que  $(\mathcal{S})$  est une sphère de centre, un **point que l'on précisera**, et de rayon **3**

b) Calculer la distance entre le point **D** et le plan **(ABC)**

c) En déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(\mathcal{S})$  en un cercle dont-on déterminera le centre et le rayon.

## II- Restitution organisée de connaissances (R.O.C)

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels  $a, b$  et  $c$  de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel  $k$  strictement positif, l'ensemble  $(\mathcal{S}_0)$  des points M de l'espace tels que :

$\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\| = k$  est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs  $a, b$  et  $c$

## PROBLEME (100 points)

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{-x-1} \ln(x+1)$

$(\mathcal{C}_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  (Unité : 4 cm)

### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$

1- Calculer les limites de  $g$  en  $-1$  et en  $+\infty$

2- Calculer  $g'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $] -1; +\infty[$

3- Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $] -1; +\infty[$

4- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

5- En déduire le signe de  $g$  sur  $] -1; +\infty[$

### Partie B : Etude de la fonction $f$

1) a- Calculer la limite de  $f$  en  $-1$  et interpréter graphiquement ce résultat

b- Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (On pourra remarquer que :  $\forall x \in ] -1; +\infty[$ ,

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times (x+1)e^{-(x+1)}$ ). Interpréter graphiquement ce résultat

2) a) Calculer  $f'(x)$ , puis vérifier que,  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = e^{-x-1}g(x)$

b) En déduire, de la partie A, le sens de variation de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$

3) Sachant que  $g(\alpha) = 0$ , montrer que  $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha-1}}{\alpha+1}$ .

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  par deux décimaux d'ordre 1

4) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0

6) Tracer  $(C_f)$  et (T) dans le même repère (on prendra :  $f(\alpha) \approx 0,3$  et  $e \approx 2,7$ )

### **Partie C : Approximation de la solution d'une équation**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $h(x) = e^{\frac{1}{x+1}} - 1$

1- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $h(x) = x$  (on admettra alors que  $\alpha$  est

aussi une solution de l'équation  $h(x) = x$  sur  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ )

2- Montrer que,  $\forall x \in ] -1; +\infty[$ ,  $h'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

3- On fait remarquer que,  $\forall x \in ] -1; +\infty[$ ,  $h''(x) > 0$ . En déduire le sens de variation de  $h'$  sur  $] -1; +\infty[$

4- Montrer que,  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ,  $|h'(x)| \leq 0,9$

5- Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = h(u_n)$

a) Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que  $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,9 |u_n - \alpha|$

c) Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,9)^n$

d) En déduire la limite de la suite  $u$

e) Déterminer un nombre entier naturel  $p$  pour que  $u_p$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près



BACCALAUREAT BLANC 2024

Série : D

Coef. : 4

Durée : 4 heures

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'usage de tout modèle de calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 3 pages numérotées de 1 à 3.

### Exercice 1 (4 points) : QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (qcm). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Vous indiquerez sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse donne 1 point, une mauvaise réponse ou une absence de réponse donne 0 point.

1/ Le nombre complexe  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$  a pour module  $r$  et a pour argument  $\alpha$  alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$r = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{12}$	$r = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{7\pi}{12}$	$r = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$	$r = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{12}$

2/ Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On donne le nombre complexe  $z = x + iy$  et on pose :  $Z = 3|z|^2 + 6iz - 3 - 5i$ .

L'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que :  $Re(Z) = 0$  est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
l'ensemble vide	le point $T$ d'affixe $i$	le cercle de centre $H(i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $x + y - 1 = 0$

3/  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont  $n$  points de l'espace  $\mathcal{E}$ ;  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  nombres réels de somme est non nulle et  $G = \text{bar}\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)\}$ . Alors pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , la somme  $a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$  est égale

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
au vecteur nul	$\sum_{i=1}^n (a_i \overrightarrow{GA_i})$	$(\sum_{i=1}^n a_i) \overrightarrow{MG}$	a un vecteur indépendant du point $M$

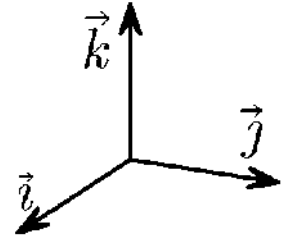
4/ La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{|x|} + \cos x$  est une fonction qui est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
paire	impaire	ni paire, ni impaire	dérivable sur $\mathbb{R}$

## **Exercice (6 points) : Géométrie dans l'espace**

### **Partie A : Restitution organisée des connaissances (ROC)**

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe de l'ensemble des vecteurs de l'espace  $\mathscr{E}$ . On considère les vecteurs  $\vec{U}(x, y, z)$  et  $\vec{V}(x', y', z')$  dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



On donne :  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$  ;  $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$

**1/** Déterminer  $\vec{k} \wedge \vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{i}$  et  $\vec{k} \wedge \vec{i}$

**2/** Démontrer que :  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  a pour coordonnées  $(yz' - zy'$  ;  $zx' - xz'$  ;  $xy' - yx')$

### **Partie B**

On considère les points  $A(3 ; -2 ; 2)$ ,  $B(6 ; 1 ; 5)$ ,  $C(6 ; -2 ; -1)$  et  $D(0 ; 4 ; -1)$ .

- 1) a)** Démontrer que les points  $A, B$  et  $C$  définissent un plan.  
**b)** Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .  
**c)** Justifier que les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires.  
**d)** Calculer la distance  $h$  du point  $D$  au plan  $(ABC)$  puis déterminer l'aire du triangle  $ABC$ .  
**e)** Calculer le volume du tétraèdre  $DABC$ .

**2)**  $(P)$  est le plan d'équation :  $x + y + z = 3$ .  $(S)$  est la sphère de centre  $B$  et de rayon  $5\sqrt{3}$

- a)** Calculer la distance du point  $B$  au plan  $(P)$ .  
**b)** Donner une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .  
**c)** Déterminer la nature de l'ensemble  $(E)$ , intersection de la sphère  $(S)$  et du plan  $(P)$ . Justifier la réponse.

**3) a)** Montrer que le plan  $(P)$  est orthogonal à la droite  $(AB)$ .

**b)** Donner une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .

**c)** En déduire le point d'intersection du plan  $(P)$  et de la droite  $(AB)$ .

**4)** On donne les plans  $(H)$  et  $(R)$  d'équations respectives :  $x - y + 2z = 9$  et  $2x + y - z = 2$

En résolvant soigneusement et clairement un système à trois équations, montrer que les plans  $(P)$ ,  $(H)$  et  $(R)$  ont un seul point d'intersection à préciser.

## **Problème (10 points)**

### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -x^2 + 6 - 4 \ln x$ .

- 1)** Justifier que  $g$  est dérivable et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .
- 2)** Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$  puis dresser son tableau de variation complet
- 3)** Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$  et que :  
 $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$ .
- 4)** Donner le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$  appartenant à  $]0; \alpha[$  et à  $]\alpha; +\infty[$ .

- 5) On désigne par  $h$  la restriction de la fonction  $g$  à l'intervalle  $[1; e]$ .
- Montrer que la fonction  $h$  est une bijection sur  $[1; e]$  vers un intervalle  $J$  à préciser.
  - Montrer que la bijection réciproque  $h^{-1}$  est dérivable sur  $J$ .
  - Calculer  $h(1)$  et  $h'(1)$  puis en déduire  $(h^{-1})'(5)$ .
  - Justifier le sens de variation de  $h^{-1}$  sur  $J$  puis dresser sur  $J$  son tableau de variation.

### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2 \ln(x) - 1}{x}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . unité 2 cm.

- Calculer  $f'(x)$  pour  $x$  élément de  $]0; +\infty[$  et montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .
  - En utilisant la question 4) de la partie A, déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .
  - En remarquant que  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}(2 \ln(x) - 1)$ , calculer la limite de  $f$  en 0 puis donner une interprétation graphique du résultat.
  - En remarquant que  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x}$ , calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Montrer que  $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2}{\alpha} + 3$  (On pourra se rappeler que  $g(\alpha) = 0$ )
  - Dresser le tableau de variation complet de la fonction  $f$ .
- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation :  $y = -\frac{1}{2}x + 3$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .
  - Montrer que le point  $A(\sqrt{e}; -\frac{\sqrt{e}}{2} + 3)$  est le point d'intersection de  $(C)$  et  $(D)$ .
- En prenant  $\alpha = 1,8$ , placer le point  $A$ ; construire la droite  $(D)$  et la courbe  $(C)$ .

On donne le tableau suivant :

$x$	0,37	0,5	1	$\sqrt{e}$	1,8	3	6
$f(x)$	-5,3	-2	1,5	2,2	2,4	1,9	0,4

### Partie C

soit  $k$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $k(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$ .

- En remarquant que  $k(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x}$ , déterminer sur  $]0; +\infty[$  la primitive  $F$  de  $k$  telle que  $F(1) = 0$ .
- On rappelle que pour tout réel  $t$ ,  $\ln e^t = t$ . On considère la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$  et on pose :  $U_n = F(V_{n+1}) - F(V_n)$ .
  - Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_n = \frac{2n+1}{4}$
  - En déduire la nature de la suite  $(U_n)$  en précisant ses éléments caractéristiques.



**BACCALAUREAT BLANC**

Session de Mars 2024

**Epreuve de Mathématiques**

Série : D

Durée : 4h

Coefficient 4

*La qualité de la rédaction, la clarté et la propreté de la copie seront prises en compte au moment de la correction.  
La calculatrice est autorisée mais la communication entre candidats, l'échange de matériel et les téléphones portables sont interdits.  
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Le candidat traitera les quatre exercices dans l'ordre qui lui convient.*

**Exercice 1 : Questions à choix multiples**

(4 points)

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. **Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.** Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte, absente ou surchargée est comptée 0 point.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$ . Sa limite en  $+\infty$  est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2	$\ln 2$	$+\infty$	0

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{e^n}{e^n + 1} u_n \end{cases}$ . On peut affirmer que :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(u_n)$ est croissante	$(u_n)$ n'est pas monotone	$(u_n)$ est décroissante	$(u_n)$ est constante

3. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{2x+1}$ .

La primitive  $G$  de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $G(0) = 1$  est définie par :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$G(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$	$G(x) = 2e^{2x+1} - 2e + 1$	$G(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{1}{2}e - 1$	$G(x) = 2e^{2x+1} - e$

4. On considère deux suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  vérifiant la relation  $w_n = e^{-2v_n} + 2$ .

$a$  est un nombre réel strictement positif. Si  $v_0 = \ln a$ , alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$	$w_0 = \frac{1}{a^2 + 2}$	$w_0 = -2a + 2$	$w_0 = \frac{1}{-2a} + 2$

**Exercice 2 : Nombres complexes et transformation du plan**

(5 points)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.

On considère les points  $A, B$  et  $I$  d'affixes respectives :  $z_A = 3 + 2i$ ,  $z_B = -3$  et  $z_C = 1 - 2i$ .

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2. On appelle  $C$  l'image du point  $I$  par l'homothétie  $h$ .

- Placer les points  $A, B$  et  $I$  sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
  - Déterminer la nature du triangle  $IAB$ .
- Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie  $h$ .
  - Démontrer que le point  $C$  a pour affixe  $z_C = -1 - 6i$  puis placer le point  $C$  dans le repère.
- On considère l'ensemble des points pondérés  $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$ 
  - Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  admettent un barycentre que l'on nommera  $D$ .
  - Calculer l'affixe  $z_D$  du point  $D$  et montrer que  $ABCD$  est un carré.
- On considère l'ensemble  $(\Gamma_2)$  des points  $M$  du plan tels que :  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$ 
  - Montrer que le point  $B$  appartient à l'ensemble  $(\Gamma_2)$ .
  - Déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma_2)$ .

**Exercice 3 : Géométrie dans l'espace**

(4 points)

**Partie A : Restitution organisée de connaissance**

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$  (en unité d'aire)**Partie B : Volume d'un tétraèdre**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, représenté ci-contre

et on munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. a) Démontrer que le vecteur  $\overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{BE}$  a pour coordonnées  $(1; -1; 1)$   
 b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(BGE)$ .
2. Soit K le point d'intersection de la droite  $(FD)$  et du plan  $(BGE)$ .  
 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(FD)$ .  
 b) Démontrer que la droite  $(FD)$  est perpendiculaire au plan  $(BGE)$   
 en un point K de coordonnées  $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$  puis calculer la distance DK.
3. Calculer l'aire du triangle BGE. En déduire le volume du tétraèdre BGED.

**Exercice 4 : Fonctions logarithme et exponentielles népériens**

(7 points)

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x + 2 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = (x+2)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  d'unité 1 cm.**Partie A : Etude et représentation graphique de  $f$** 

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction  $f$  est  $\mathbb{R} - \{-1\}$
2. a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.  
 b) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $-\infty$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  en 0.
4. a) Démontrer que pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)}$ .  
 b) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .  
 c) Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$
5. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et vérifier que  $-3 < \alpha < -2$ .
6. Construire soigneusement la courbe  $(C_f)$  et ses asymptotes.

**Partie B : Etude d'une bijection**Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; -1[$ .

1. Démontrer que  $g$  réalise une bijection de  $] -\infty; -1[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
2. On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque et  $(C_{g^{-1}})$  sa courbe représentative.  
 a) Calculer  $g(-2)$ . En déduire que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\ln 3$  et calculer  $(g^{-1})'(\ln 3)$ .  
 b) Construire soigneusement la courbe  $(C_{g^{-1}})$ .

Ministère de l'Éducation Nationale,  
chargé de la Formation Civique

-----  
Enseignement Privé Catholique  
Diocèse de Port-Gentil

-----  
Collège et Lycée RAPONDA WALKER  
Département de Mathématiques



Année Scolaire: 2023 – 2024

**BACCALAUREAT BLANC - MARS 2024**  
**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Série : D**

**Coefficient : 4**

**Durée : 4 heures**

*Ce sujet comporte 3 pages.*

*Aucune communication n'est autorisée de même que les échanges d'outils pédagogiques.*

*Le téléphone est strictement interdit, même dans les sacs.*

*Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

**N.B.** *Respect stricte des règles de du déroulement du devoir : modalités du début et de la fin.*

**Justifier vos réponses**

**Encadrer les résultats**

**Exercice 1 : QCM et ROC****(4 points)****A/ QCM (Questions à choix multiples)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée. Indiquer sur la copie la code de la réponse choisie (A, B ou C). Une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse, 0 point.

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ .

On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
La suite $(v_n)$ est arithmétique.	La suite $(v_n)$ est géométrique.	La suite $(v_n)$ est constante	Aucune des trois propositions

2. L'Equation  $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  :

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
Aucune solution	Une solution unique	Exactement deux solutions	Trois solutions

3. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on donne le point  $S(1; -2; 0)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y - 3z + 4 = 0$ .

On considère la sphère  $\Sigma$  de centre S et de rayon 3 ; son intersection avec  $\mathcal{P}$  est égale :

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
Au point $I(1; -5; 0)$	Au cercle de centre H et rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$	Au cercle de centre S et rayon $r = 2$	Au cercle de centre H et rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

**B/ ROC (Restitution organisée des connaissances)**

Dans cette partie, l'élève doit établir à l'aide des propriétés du cours la démonstration demandée.

Soit la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{2x}$ .

En admettant que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , démontrer que  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$  ;  $g'$  étant la fonction dérivée de  $g$ .

**Exercice 2 : Nombres complexes****(4 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - 6z + 18 = 0$ .

(On désignera par  $a$  la solution dont la partie imaginaire est positive et par  $b$ , l'autre solution).

2. Déterminer le module et un argument de  $a$  et de  $b$ . Placer dans le repère les points A et B d'affixes respectives  $a$  et  $b$ .

3. a) Placer le point D d'affixe 6.

b) Calculer le module et un argument du complexe  $\frac{b}{a}$ .

En déduire la nature du triangle AOB.

c) Calculer les affixes des vecteurs  $\overline{OA}$  et  $\overline{BD}$ .

Quelle est la nature exacte du quadrilatère  $OADB$  ? Justifier la réponse.

### **Exercice 3 : Géométrie analytique dans l'espace (4 points)**

Dans un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace  $\mathcal{E}$ , on considère les points

$A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; -1; 0)$  et  $C(0; -1; 4)$ .

1. Représenter les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  (unité graphique : 1 cm)
2. a) Déterminer les coordonnées du produit vectoriel  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .  
b) les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.
3. Soit  $G$  l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .  
a) Donner les coordonnées de  $G$ .  
b) La droite  $(OG)$  est-elle perpendiculaire au plan  $(ABC)$  ?
4. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  et calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
5. On donne les équations de deux plans :  
 $P_1: -x + 3y - 2z = 7$  et  $P_2: 5x - 2y - z = -8$ .  
a) Résoudre le système suivant : 
$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 2y - z = -8 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$
  
b) En déduire l'intersection des plans  $P_1$ ,  $P_2$  et  $(ABC)$ .

### **Exercice 4 : Etude d'une fonction comportant ln (8 points)**

On considère la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x), \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique : 2 cm.

#### **Partie A : Etude de $f$**

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $0$ . Que peut-on en déduire pour  $f$  ?  
b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $0$ .  
b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$  ;  $f'$  désignant la dérivée de  $f$ .
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , puis dresser son tableau de variations.
4. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .  
b) Justifier que  $4,48 < \alpha < 4,49$ .

#### **Partie B : Etude de la bijection réciproque d'une restriction de $f$**

On note  $I = [0; e]$ .

1. Démontrer que la restriction  $h$  de  $f$  à l'intervalle  $I$  est une bijection sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

2. La fonction  $h^{-1}$  réciproque de  $h$  est-elle dérivable sur  $J$  ? Justifier votre réponse.
3. Calculer  $h(1)$  puis  $(h^{-1})'(1,5)$ .

**Partie C : Position relative de (C) par rapport à (D).**

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
2. Soit  $g(x) = f(x) - 2x + \frac{1}{2}$ .
  - a) Calculer  $g'(x)$ , puis  $g''(x)$ , où  $g'$  et  $g''$  désignent respectivement les dérivées première et seconde de  $g$ . Etudier le sens de variations de  $g'$ . En déduire le signe de  $g'(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - b) Etudier le sens de variations  $g$  (on ne demande pas de calculer les limites). En déduire la position de (C) par rapport à (D) sur  $]0; +\infty[$ .
3. Construire (C), la tangente (D) et la courbe ( $\Gamma$ ) de  $h^{-1}$  dans le même repère.



BACCALAUREAT BLANC

SESSION MARS 2024

Série : D  
 EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée :4h

Coefficient :4

**EXERCICE1** :( 4points) Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question posée, une seule réponse est exacte. Le candidat écrira sur sa copie uniquement le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Le conjugué de  $z' = \frac{1-z}{3+2i}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$\frac{1+\bar{z}}{3+2i}$	$\frac{1-\bar{z}}{3-2i}$	$\frac{1+z}{3-2i}$

2. Une suite  $(U_n)$  est telle que pour tout entier naturel n, on a  $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$ , est-elle :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
Convergente	Divergente	Constante

3. L'ensemble des primitives sur IR de la fonction  $f: x \mapsto \sin^3 x \times \cos^5 x$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$\frac{-\cos^6 x}{6} - \frac{-\cos^8 x}{8} + K$ ; avec K un réel	$\frac{-\cos^6 x}{6} + \frac{-\cos^8 x}{8} + K$ ; avec K un réel	$\frac{\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^8 x}{8} + K$ avec K un réel

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$  est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$+\infty$	0	$-\infty$

**EXERCICE2** (6points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points  $A(0; 4; 1)$ ,  $B(1; 3; 0)$ ,  $C(2; -1; -2)$ ,  $D(7; -1; 4)$

- Démontrer que les points  $A, B$  et  $C$  définissent un plan.
- Soit  $\Delta$  la droite passant par le point  $D$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2; -1; 3)$ .
  - Démontrer que la droite  $\Delta$  est orthogonale au plan  $(ABC)$
  - En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
  - Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .
  - Déterminer les coordonnées du point  $H$ , intersection de la droite  $\Delta$  et du plan  $(ABC)$ .
- Soit  $P_1$  plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $P_2$  plan d'équation  $x + 4y + 2z = 0$ 
  - Démontrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.
  - Vérifier que la droite  $(d)$ , intersection des plans  $P_1$  et  $P_2$ , a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- La droite  $(d)$  et le plan  $(ABC)$  sont-ils sécants ou parallèles ?

**EXERCICE 3 (10 points) : Etude de fonctions et représentation graphique.**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 + 6 \frac{\ln x}{x}$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal. L'unité étant de  $2\text{cm}$  sur l'axe des abscisses et  $0.5\text{cm}$  sur l'axe des ordonnées.

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) En étudiant le sens de variation de la fonction  $g: x \rightarrow x^3 + 3 - 3 \ln x$ . Montrer que pour tout réel strictement positif  $x$ , on a  $g(x) > 0$
- 3) Calculer la dérivée de  $f$ . En se servant de la question précédente, étudier le sens de variation de  $f$ .
- 4) Ecrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- 5) Étudier la position de  $(C)$  par rapport à la parabole  $(P)$  d'équation  $y = x^2$  dans  $]0; +\infty[$ . Préciser le comportement des deux courbes l'une par rapport à l'autre quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . (on montrera que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = 0$ ).
- 6) Tracer sur le même graphique  $(C)$ ,  $(T)$  et  $(P)$ .
- 7) Montrer graphiquement que, pour toute valeur du réel  $m$  l'équation  $f(x) = m$  a une solution et une seule. Dans le cas où  $m = 0$ , trouver une valeur approchée à  $10^{-1}$  près par défaut de la solution  $x_0$  de l'équation  $f(x) = m$ . On Calculera  $f(0.8)$  et  $f(0.9)$

**-FIN-**



**EXERCICE 1 :**

**Partie A : ROC ..... 02points**

- Démontrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $0 < k < n$ ,  $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ .
- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $a, b$  deux éléments de  $I$  ( $a < b$ ). Soit  $m$  et  $M$  deux nombres réels tels que  $m \leq f'(x) \leq M$  pour tout élément  $x$  de  $I$ .  
Démontrer que  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .

**Partie B : QCM..... 04 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. **Avec justification**, le candidat indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Une **bonne réponse avec une justification correcte** rapporte **0, 5 point**. Une **bonne réponse sans justification** rapporte **0, 25 point**. Une mauvaise ou absence de réponse vaut **0 point**.

1.

a)  $(1 - i\sqrt{3})^5 =$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$1 - 9i\sqrt{3}$	$1 + 9i\sqrt{3}$	$16(1 + i\sqrt{3})$	$16 - i16\sqrt{3}$

b) La forme exponentielle de  $(1 - i\sqrt{3})^5$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{\pi}{3}}$	$32e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$32e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. Une urne contient 3 boules vertes et 2 boules rouges. On tire successivement avec remise 4 boules de l'urne.

a) La probabilité d'obtenir exactement 3 boules rouges est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{24}{625}$	Aucune réponse	$\frac{6}{625}$	$\frac{96}{625}$

b) Une primitive de la fonction  $f(x) = \cos(3x) - \frac{2}{x} + e^{2x}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\sin(3x) - 2\ln x + e^{2x}$	$-\sin(3x) - 2\ln x + e^{2x}$	$\frac{1}{3}\sin(3x) - 2\ln x + e^{2x}$	$\frac{1}{3}\sin(3x) - 2\ln x + \frac{1}{2}e^{2x}$

3. On considère la fonction  $f$  sur définie  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln x$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

a) La dérivée  $f'$  de  $f$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \ln x + 1$	$f'(x) = \ln x - 1$	$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse  $e$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$y = (e - 1)x + e^2 + 2e$	$y = \frac{1}{e}x + e - 1$	$y = (e + 1)x - e^2$	$y = 2x - e$

4. On considère une série statistique double. Les informations la concernant sont données dans le tableau ci-dessous :

Couple des coordonnées du point moyen G	Variance de x	Variance de y	Covariance de x et y
$(\bar{x}; \bar{y}) = (30; 210)$	$v(x) = 20$	$v(y) = 196$ .	$cov(x; y) = 62$ .

a) La droite de régression de y en x a pour équation :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$y = 31,6x + 209,9$	$y = 3,1x + 117$	$y = 0,99x + 207$	Aucune réponse correcte

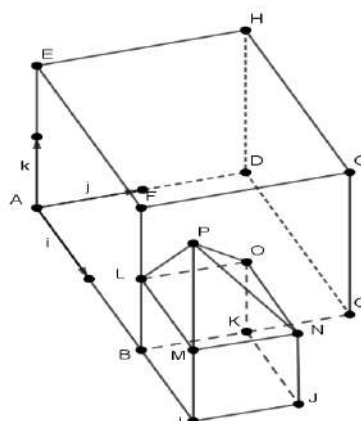
b) Le coefficient de corrélation r est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0,99	0,01	Aucune réponse	0,31

### Exercice 2 : Géométrie de l'espace..... 05 points

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural. Il s'agit d'une maison de forme cubique  $(ABCDEFGH)$  associé à un garage de forme cubique  $(BIJKLMNO)$  où L est le milieu du segment  $[BF]$  et K est le milieu du segment  $[BC]$ .

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale  $(LMNOP)$  de base carré  $LMNO$  et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On muni l'espace d'un du repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , avec  $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  et  $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ .

- Justifier que  $\overrightarrow{AN} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
  - Déterminer les coordonnées des points H, M et N.
  - Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
- L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).

Montrer que les coordonnées du point P sont  $(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ .

- Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ .
  - Calculer la distance PM

On admet que PN a une distance égale à  $\frac{\sqrt{11}}{3}$ .

- c) Pour satisfaire des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle  $\widehat{MPN}$  ne dépasse pas  $55^\circ$ . Le toit pourrait-il être construit?
4. Justifier que les droites  $(HM)$  et  $(EN)$  sont sécantes. Quel est leur point d'intersection?

**Exercice 3 : Similitude et nombres complexes ..... 05 points**

On considère le polynôme  $P$  défini dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes  $z$  par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (-2 + 3i)z + 5 + i$$

1. a) Calculer  $(4 - 3i)^2$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 + (2 - i)z - 1 + 5i = 0$ .  
 b) Vérifier que le nombre  $i$  est une racine de  $P(z)$ .  
 c) Déterminer les nombres complexes  $u$  et  $v$  tels que  $P(z) = (z - i)(z^2 + uz + v)$ .  
 d) On suppose pour la suite l'exercice que  $u = 2 - i$  et  $v = -1 + 5i$ .  
 En déduire dans  $\mathbb{C}$  les solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 1 - i$ ;  $z_B = i$  et  $z_C = -3 + 2i$ . On désigne par  $S$  la similitude directe plane telle que  $S(A) = B$  et  $S(B) = C$ .  
 a) Montrer que le nombre complexe  $a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$  est égale à  $1 + i$  puis préciser le module et un argument de  $a$ .  
 b) En donnant une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe  $a$ , préciser le rapport et l'angle de la similitude  $S$ .  
 c) Montrer que l'écriture complexe de  $S$  est :  $z' = (1 + i)z - 2 + i$ . En déduire l'affixe  $z_\Omega$  du centre  $\Omega$  de  $S$ .  
 d) Déterminer l'affixe  $z_D$  du point  $D$  image du point  $C$  par  $S$ .  
 e) Placer les points  $A, B, C, D$  et  $\Omega$ .

**Exercice 4 : Fonction et intégrale ..... 04 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xe^{-x}$ .  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique  $2cm$ .

1. Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .
2. On pose pour tout entier naturel  $n \geq 2$ :  $I_n = \int_1^n f(x)dx$ .  
 a) Montrer, en intégrant par partie, que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ :  $I_n = \frac{2}{e} - (n + 1)e^{-n}$ .  
 b) En déduire la limite de  $I_n$ .
3.  
 a) Montrer que la restriction  $h$  de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à préciser.  
 b) Calculer  $h(0)$  puis déterminer  $(h^{-1})'(0)$ .  
 c) Peut-on calculer  $(h^{-1})'(\frac{1}{e})$ ? Justifier.  
 d) Sur le même graphique, construire  $(C')$  la courbe représentative de la fonction  $h^{-1}$ , fonction réciproque de  $h$ .
4. Déterminer l'aire, en  $cm^2$ , du domaine délimité par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .



**BACCALAUREAT BLANC SESSION 2024**

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 3 pages numérotées de 1 à 3.*

**EXERCICE 1**

**4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. *Indique sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.*

1. La somme  $\frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{205}{3} + 69$  est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$\frac{5564}{3}$	$\frac{10609}{3}$	$\frac{10816}{3}$

2. L'ensemble  $E$  des points  $M$  de l'espace tels que  $\|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 1$

Réponse A	Réponse B	Réponse C
La sphère de centre $G$ et de rayon 1	La médiatrice du segment $[GG']$	Le cercle de diamètre $[AB]$

3. Une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$F(x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)e^{-x}$	$F(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$	$F(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - x$  est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$-\infty$	0	$+\infty$

**EXERCICE 2****Géométrie dans l'espace****6 points****PARTIE A : Restitution organisée des connaissances (ROC)**

Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

Prouver que  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a pour coordonnées :  $(yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**PARTIE B :**

- Vérifier que  $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$  est un repère de l'espace.
  - Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés, puis en déduire qu'ils définissent un plan.
- Soit  $\vec{n}(a, b, 1)$  un vecteur où  $a$  et  $b$  sont des réels.

  - Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $\vec{n}$  soit normal au plan  $(ABC)$ .
  - En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :  $x + y + z - 1 = 0$
  - Le point  $D$  appartient à  $(ABC)$ .
- On considère la droite  $(D)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3 \\ y = -4\alpha + 1 \\ z = 2\alpha - 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La droite  $(D)$  est-elle orthogonale au plan  $(ABC)$  ?

- Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  vérifiant  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$  et  $(P)$  le plan d'équation cartésienne  $x - 2y - z + 1 = 0$ .

  - Montrer que  $(S)$  est la sphère de centre  $I(3; -1; 2)$  et de rayon 5.
  - Soit  $(\Delta)$  la droite d'intersection de  $(P)$  et  $(ABC)$ . Montrer qu'une représentation paramétrique de  $(\Delta)$  est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = -\frac{3}{2}t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**EXERCICE 3****Nombres complexes****4,5 points**

- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} z_1 + z_2 = 4 \\ z_1 \times z_2 = 8 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 10 \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases}$$

On désigne par  $z_1$  la solution de  $(S_1)$  dont la partie imaginaire est négative.

- Déterminer pour chaque solution le module et un argument.
  - Déterminer  $z_1$  sous forme trigonométrique.
- Le plan complexe  $(P)$  est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  dont l'unité graphique est 1 cm.

    - Placer dans le plan  $(P)$  les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_1 = 2(1 - i)$  et  $z_2 = 2(1 + i)$ .
    - Quelle est la nature du triangle  $OAB$  ? Justifier votre réponse.

**EXERCICE 4****Etude de fonctions****5,5 points**

Soit la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - \ln(x^2 + 1), & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = -x^2 + e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 à gauche et à droite.  
b) Expliquer les branches infinies de  $(C)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
c) Montrer que la parabole  $(T)$  d'équation  $y = -x^2$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .
2. a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Etudier le sens de variation de  $f$ , puis dresser son tableau de variation complet.  
c) Construire  $(C)$  et  $(T)$  dans le repère.
3. Dédire de cette construction que  $(C)$  coupe  $(\vec{OI})$  en deux points dont l'un a une abscisse négative que l'on calculera.



DEPARTEMENT DE  
MATHÉMATIQUES

Année scolaire 2023/2024

## Devoir surveillé n°2 de Mathématiques

Durée : 03h00

Mercredi, 29 novembre 2023

Classes: Terminale D

Examineur :

M.NGOUNGOU- NDOUDI

### Consigne :

- La tenue de la copie, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice est autorisé mais celui du correcteur est strictement interdit ! En cas d'erreur, barrer proprement avec un traceur et écrire le texte de remplacement. Par exemple : ~~je recopie et je complète le tableau ci-dessous en indiquant pour chaque question, la lettre qui correspond à la réponse choisie.~~

### Exercice 1 : Questions à choix multiples \_\_\_\_\_ (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question posée, une seule des quatre propositions de réponses est exacte. Recopie sur ta copie de composition le tableau

Question	1.	2.	3.	4.	5.
Réponse					

et complète-le en indiquant pour chaque question, la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

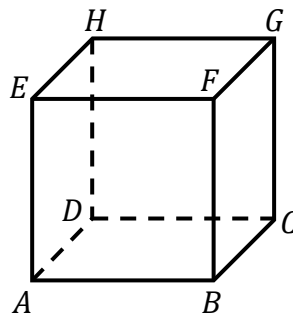
**Barème :** Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte rapporte -0,5 point et l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points est négatif, alors la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\theta$ .

Un argument du nombre complexe  $(1 - i\sqrt{3})z$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-\frac{\pi}{3} - \theta$	$-\frac{\pi}{3} + \theta$	$\frac{\pi}{3} - \theta$	$\frac{\pi}{3} + \theta$

2. On considère le cube  $ABCDEFGH$  ci-dessous, d'arête 1 cm.



Le triplet des coordonnées du point  $D$  dans le repère  $(F, A, H, C)$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(1,1,1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(-1, -1, -1)$	$(2,2,2)$

3. Soit  $a$  un nombre réel et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :
- $$\begin{cases} f(x) = \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1} \\ f(1) = a \end{cases}$$

La valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

4. Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $K$ .

La dérivée de la fonction  $u \circ v$  est la fonction :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$u' \circ v'$	$v' \circ u$	$u' \times v' \circ u$	$v' \times u' \circ v$

5. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , On considère le point  $A(1, 2, -2)$  et le plan  $(\Pi)$  d'équation  $x - y + z - 3 = 0$ .

Une équation de la sphère  $(\Sigma)$  de centre  $A$  et tangente au plan  $(\Pi)$  est :

Réponse A	Réponse B
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 3 = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 3 = 0$
Réponse C	Réponse D
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 3 = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 3 = 0$

**Exercice 2: Géométrie analytique de l'espace** ----- (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , On considère les points  $A(0, 1, 1)$  et  $B(1, 0, 1)$ , le vecteur  $\vec{n}'(-1, 1, 1)$  et le plan  $(\mathcal{P})$  d'équation  $x + 2y + z + 1 = 0$ .

- Démontrer qu'une équation cartésienne du plan  $(\mathcal{P}')$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}'$  est :  
 $x - y - z + 2 = 0$ .
- Démontrer que les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont perpendiculaires, puis déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\mathcal{D})$ , intersection des plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$
- Soit  $d$  la distance du point  $B$  au plan  $(\mathcal{P})$  et  $d'$  celle du point  $B$  au plan  $(\mathcal{P}')$ .  
Calculer  $d$  et  $d'$ .
- Soit  $H$ , le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(\mathcal{D})$ .
  - Déterminer les coordonnées du point  $H$ .
  - Vérifier que :  $AH^2 = d^2 + d'^2$ .

**Exercice 3: Nombres complexes et Barycentre** ----- (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique le centimètre, on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2i, b = 1 - i$  et  $c = 2 - 3i$ .

- Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans ce plan.
- Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- Déterminer l'affixe  $z_K$  du point  $K$ , milieu du segment  $[AC]$ .
- Soit  $G$  le barycentre du système des points pondérés  $S = \{(A; 3), (B; -5), (C; 1)\}$ .
  - Construire le point  $G$ , puis déterminer son affixe  $z_G$ .
  - Déterminer, puis construire l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  du plan tel que :

$$\|3\overrightarrow{MA}, -5\overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{MC}\| = 2$$

**Exercice 4 : Limites** ----- (5 points)

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$  et  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $g$  dans plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- Démontrer que la courbe  $(\Gamma)$  admet une branche parabolique de direction celle de  $(OI)$ .
- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  sur  $[1; +\infty[$ .
- Démontrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , puis dresser son tableau de variation son ensemble de définition.
  - En déduire que  $g$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $K$  que l'on précisera.
- Déterminer la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  sur l'intervalle  $K$ , puis en déduire de la question 2.a) le sens de variation de  $g^{-1}$  sur l'intervalle  $K$ .



## Devoir surveillé n°3 de Mathématiques

Durée : 03h00

Mercredi, 10 janvier 2024

Classes: Terminale D

Examinateur :

M.NGOUNGOU- NDOUDI

### Consigne :

- La tenue de la copie, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice est autorisé mais celui du correcteur est strictement interdit ! En cas d'erreur, barrer proprement avec un traceur et écrire le texte de remplacement. Par exemple : ~~j'indique sur ma copie je recopie et je complète le tableau ci-dessous en indiquant pour chaque question, la lettre qui correspond à la réponse choisie.~~

### Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (ROC) & Questions à choix multiples (QCM) \_ (5 points)

#### 1. ROC

Dans cette partie, l'élève doit établir à l'aide des propriétés du cours la démonstration demandée.

Dans cette partie,  $z$  désigne un nombre complexe non nul.

On rappelle que, si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démontrer que :  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

#### 2. QCM

Dans cette partie, pour chaque question posée, une seule des quatre propositions de réponses est exacte. Recopie sur ta copie de composition le tableau ci-dessous et complète-le en indiquant pour chaque question, la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Question	a)	b)	c)	d)
Réponse				

**Barème :** Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point et l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points est négatif, alors la note de l'exercice est ramenée à zéro.

- a) Soit le nombre complexe  $\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1+i)}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$ .

La forme algébrique de ce nombre complexe est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-1 - i$	$-1 + i$	$1 - i$	$1 + i$

- b) Soit  $f$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\sin(x)\cos(x)$ .

Une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  est la fonction  $F$ , définie par :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$F(x) = -\frac{1}{2}\sin^2(x)$	$F(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$	$F(x) = \frac{1}{2}\cos^2(x)$	$F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$

- c) L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère le point  $A(2; -3; -1)$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des coordonnées respectives  $(1; 2; -1)$  et  $(-2; 1; 3)$ .

$\alpha$  et  $\beta$  étant des nombres réels, une représentation paramétrique du plan  $(\mathcal{P})$  de repère  $(A; \vec{u}, \vec{v})$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha + \beta \\ z = -1 + \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha - \beta \\ z = -1 - \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 - \alpha + 2\beta \\ y = -3 - 2\alpha - \beta \\ z = -1 + \alpha - 3\beta \end{cases}$

- d) Soit l'inéquation  $\ln(4 - x^2) \geq \ln(2 - x)$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$[-1; 2[$	$[-1; 2]$	$] -2; -1[$	$] -2; -1]$

## **Exercice 2: Nombres complexes** \_\_\_\_\_ (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $m$ , associe le point les points  $N$  d'affixe  $n$  telle que  $n = m^2 - 4m$ ,  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $a = 1 - i$ ,  $b = 3 + i$ .

1. a) Déterminer les affixes  $c$  et  $d$  des points  $C$  et  $D$ , images respectives des points  $A$  et  $B$  par l'application  $f$ .  
Que remarque-t-on ?  
b) les points les affixes des points invariants par l'application  $f$ .
2. Soit  $E$  le point d'affixe  $e = -3$ .  
a) Démontrer que le quadrilatère  $OMEN$  est un parallélogramme si  $m^2 - 4m + 3 = 0$ .  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $m^2 - 4m + 3 = 0$ , d'inconnue le nombre complexe  $m$ .
3. Soit  $G$  et  $H$  deux points d'affixes respectives  $g = 2$  et  $h = -4$ .  
a) Exprimer  $(n + 4)$  en fonction de  $(m - 2)$ .  
b) En déduire une relation entre  $|n + 4|$  et  $|m - 2|$ , puis entre  $\arg(n + 4)$  et  $\arg(m - 2)$ .  
c) Démontrer que les points  $M$  du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $G$  et de rayon  $2\text{ cm}$  ont leur image  $N$  sur un même cercle  $(\Gamma)$  que l'on précisera le centre et le rayon.
4. Soit  $K$  le point d'affixe  $k = -4 - 3i$ .  
a) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe  $(k + 4)$ .  
b) Démontrer à l'aide de la question 3.a) qu'il existe deux points dont l'image par l'application  $f$  est le point  $K$ .

## **Problème : Etude d'une fonction rationnelle et irrationnelle** \_\_\_\_\_ (10 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$  et on note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique le centimètre.

### **Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x^3 + 3x + 8$ .

1. Calculer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Justifier que  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ .  
b) Vérifier que  $\alpha \in [-2; -1]$ , puis donner un de ses encadrements d'amplitude 0,1.
4. Etudier le signe de  $g$  suivant les valeurs de  $x$ .

### **Partie B : Etude de $f$**

1. Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Soit  $f'$ , la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
a) Calculer  $f'(x)$ , puis montrer que, pour tout nombre réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 + 1)^2}$ .  
b) En déduire de la question 4 de la partie A, le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
3. Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ .
4. a) Démontrer que  $(\Delta)$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
b) Etudier les positions relatives de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ , puis déterminer les coordonnées du point  $A$ , intersection de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$ .
5. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ , puis en déduire une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .
6. Tracer dans le plan muni d'un un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la droite  $(\Delta)$ , puis construire soigneusement la courbe  $(C_f)$ .

*Le département de Mathématiques vous souhaite une bonne et heureuse année 2024!*

Samedi 12 Janvier 2024

Direction d'Académie du WOLEU -NTEM

Lycée d'Etat Richard NGUEMA BEKALE

Département de Mathématiques

Prof : Charly's Body DYONO NGOUA

Nom et Prénom de l'élève : .....

Note :

Classe : T<sup>le</sup> D

Durée : 4 h

## Devoir N° 2 du deuxième trimestres

Exercice 1 : système d'équation et Application 5 points

1) Résoudre les systèmes d'équations suivantes

$$\text{Soit le système d'équation suivant : } \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs du nombre réel  $m$  par la méthode de PIVOT de GAUSS telles que le système ait :

- Une seule solution
- Aucune solution
- Plusieurs solutions

2) On considère  $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{5x+3}{x+2}$

- Démontrer que  $f$  est plus application
- L'application  $f$  est -elle injective (justifier votre réponse)
- L'application  $f$  est -elle surjective (justifier votre réponse)

3) Déterminer la bijection réciproque  $g^{-1}$  de l'application  $g: ]-\infty; 1[ \rightarrow ]-4; +\infty[$  définie par  $g(x) = x^2 - 2x - 3$

Exercice 2 : angle orientés 5 points

A) ABC est un triangle équilatéral direct, CBD, ACE et AFB sont des triangles rectangle isocèles respectivement en D, E et F

- Faire la figure correctement
- Déterminer la mesure principale des angles :

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}); (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BF}); (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) \text{ et } (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{CB})$$

B) Dans le plan  $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$  on donne les points  $A(0; -3); B(-2\sqrt{3}; -2); h(2; \frac{\pi}{3})$  et

$$p(8; \frac{3\pi}{4})$$

- Donner les coordonnées polaires des points A et B
- Déterminer les coordonnées cartésiennes des points h et p

Exercice 3 : géométrie analytique 5points

- 1) Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(\mathbf{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  unité graphique 1cm, on considère les points :  $A(1; -1; 0)$ ;  $B(2; 3; -4)$ ;  $C(4; -1, -3)$  et  $\vec{n}(8; 15; 17)$  un vecteur normal
- Placer les points A; B et C dans le repère
  - Démontre que les points A; B et C définissent un plan
  - Déterminer une équation cartésienne (P) passant par B et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur normal
  - Déterminer la distance de (P) à C
  - Donner une représentation paramétrique de la droite (CB)
  - Vérifie si Le point A appartient-il à la droite (CB) ?

Exercice 4 : fonction 5points

Soit la fonction  $g$  définie sur  $D_g$  par  $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ ; on note  $C_g$  sa courbe représentative dans le repère orthogonal  $(\mathbf{0}; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Quel est l'ensemble de définition  $D_g$  de la fonction  $g$  ?
- Montrer que  $C_g$  admet la droite  $\Delta: x = \frac{3}{2}$  comme axe de symétrie
- Etudier la dérivabilité de la fonction en 1 ? En faire une interprétation graphique
- Etudier les variations de  $g$  sur  $]\frac{3}{2}; +\infty[$
- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$
- Vérifier si l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution, si oui déterminer sur quel intervalle
- Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x - \frac{3}{2}$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$ , puis étudier la position relative de  $C_g$  et  $D$ .
- En déduire le tracer de  $C_g$  et de ces asymptotes.



## Devoir surveillé n°3 de Mathématiques

Durée : 03h00

Mercredi, 17 janvier 2024

Classes: Terminale D

Examineur :

M.NGOUNGOU- NDOUDI

### Consigne :

- La tenue de la copie, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice est autorisé mais celui du correcteur est strictement interdit ! En cas d'erreur, barrer proprement avec un traceur et écrire le texte de remplacement. Par exemple : ~~j'indique sur ma copie je recopie et je complète le tableau ci-dessous en indiquant pour chaque question, la lettre qui correspond à la réponse choisie.~~

### Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (ROC) & Questions à choix multiples (QCM) \_ (5 points)

#### 1. ROC

Dans cette partie, l'élève doit établir à l'aide des propriétés du cours la démonstration demandée.

Dans cette partie,  $z$  désigne un nombre complexe non nul.

On rappelle que, si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démontrer que :  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

#### 2. QCM

Dans cette partie, pour chaque proposition, une seule des quatre réponses est exacte. Recopie sur ta copie de composition le tableau ci-dessous, puis complète-le en indiquant pour proposition, la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Proposition	1	2	3	4
Réponse				

**Barème :** Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point et l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points est négatif, alors la note de l'exercice est ramenée à zéro.

**Proposition 1 :** Soit le nombre complexe  $\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1+i)}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$ .

La forme algébrique de ce nombre complexe est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-1 - i$	$-1 + i$	$1 - i$	$1 + i$

**Proposition 2 :** Soit  $f$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\sin(x)\cos(x)$ .

La primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en  $\pi$ , définie par :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$F(x) = -\frac{1}{2}\sin^2(x) + \frac{1}{2}$	$F(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + \frac{1}{2}$	$F(x) = \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}$	$F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}$

**Proposition 3 :** L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère le point  $A(2; -3; -1)$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des coordonnées respectives  $(1; 2; -1)$  et  $(-2; 1; 3)$ .

$\alpha$  et  $\beta$  étant des réels, une représentation paramétrique du plan  $(\mathcal{P})$  de repère  $(A; \vec{u}, \vec{v})$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha + \beta \\ z = -1 + \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = -3 + 2\alpha - \beta \\ z = -1 - \alpha + 3\beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 - \alpha + 2\beta \\ y = -3 - 2\alpha - \beta \\ z = -1 + \alpha - 3\beta \end{cases}$

**Proposition 4 :** Soit l'inéquation  $\ln(4 - x^2) \geq \ln(2 - x)$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$[-1; 2[$	$[-1; 2]$	$] -2; -1[$	$] -2; -1]$

« Il n'y a qu'une façon d'échouer : c'est d'abandonner avant d'avoir réussi » Géorges Clémenceau

## **Exercice 2: Nombres complexes** ----- (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $m$ , associe le point  $N$  d'affixe  $n$  telle que  $n = m^2 - 4m$ ,  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $a = 1 - i$ ,  $b = 3 + i$ .

- Déterminer les affixes  $c$  et  $d$  des points  $C$  et  $D$ , images respectives des points  $A$  et  $B$  par l'application  $f$ .  
Que remarque-t-on ?
  - Déterminer les affixes des points invariants par l'application  $f$ .
- Soit  $E$  le point d'affixe  $e = -3$ .
  - Démontrer que le quadrilatère  $OMEN$  est un parallélogramme si  $m^2 - 3m + 3 = 0$ .
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $m^2 - 3m + 3 = 0$ , d'inconnue le nombre complexe  $m$ .
- Soit  $G$  et  $H$  deux points d'affixes respectives  $g = 2$  et  $h = -4$ .
  - Exprimer  $(n + 4)$  en fonction de  $(m - 2)$ .
  - En déduire une relation entre  $|n + 4|$  et  $|m - 2|$ , puis entre  $\arg(n + 4)$  et  $\arg(m - 2)$ .
  - Démontrer que les points  $M$  du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $G$  et de rayon  $2\text{ cm}$  ont leurs images  $N$  sur un même cercle  $(\Gamma)$  que l'on précisera le centre et le rayon.
- Soit  $K$  le point d'affixe  $k = -4 - 3i$ .
  - Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe  $(k + 4)$ .
  - Démontrer à l'aide de la question 3.a) qu'il existe deux points dont l'image par l'application  $f$  est le point  $K$ .

## **Problème : Etude d'une fonction rationnelle** ----- (10 points)

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction  $f$  qui est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$  et de reconnaître sa courbe représentative  $(\mathcal{C})$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### **Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x^3 + 3x + 4$ .

- Calculer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Justifier que  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser son tableau de variation.
- Calculer  $g(-1)$ , puis en déduire de ce qui précède, le signe  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### **Partie B : Etude de $f$**

- Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Soit  $f'$ , la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Calculer  $f'(x)$ , puis montrer que, pour tout nombre réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ .
  - En déduire de la question 3 de la partie A et du signe de  $x$ , les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Dresser le tableau de variations.
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ .
  - Vérifier que  $\alpha \in [1; 2]$ , puis déterminer un de ses encadrements d'amplitude  $0,01$  et en déduire une de ses valeurs approchées aux dixièmes près.
- Démontrer que pour tout réel  $x$  :  $f(x) = x - \frac{x+2}{x^2+1}$ .
  - Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ .
  - déterminer les coordonnées du point  $A$ , intersection de  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$ .
  - Etudier les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- Reconnaitre parmi les deux courbes de la feuille annexe, celle qui représente la fonction  $f$  étudiée dans ce problème.

*Le département de Mathématiques vous souhaite une bonne et heureuse année 2024 !*

« Il n'y a qu'une façon d'échouer : c'est d'abandonner avant d'avoir réussi » **Géorges Clémenceau**

Feuille annexe

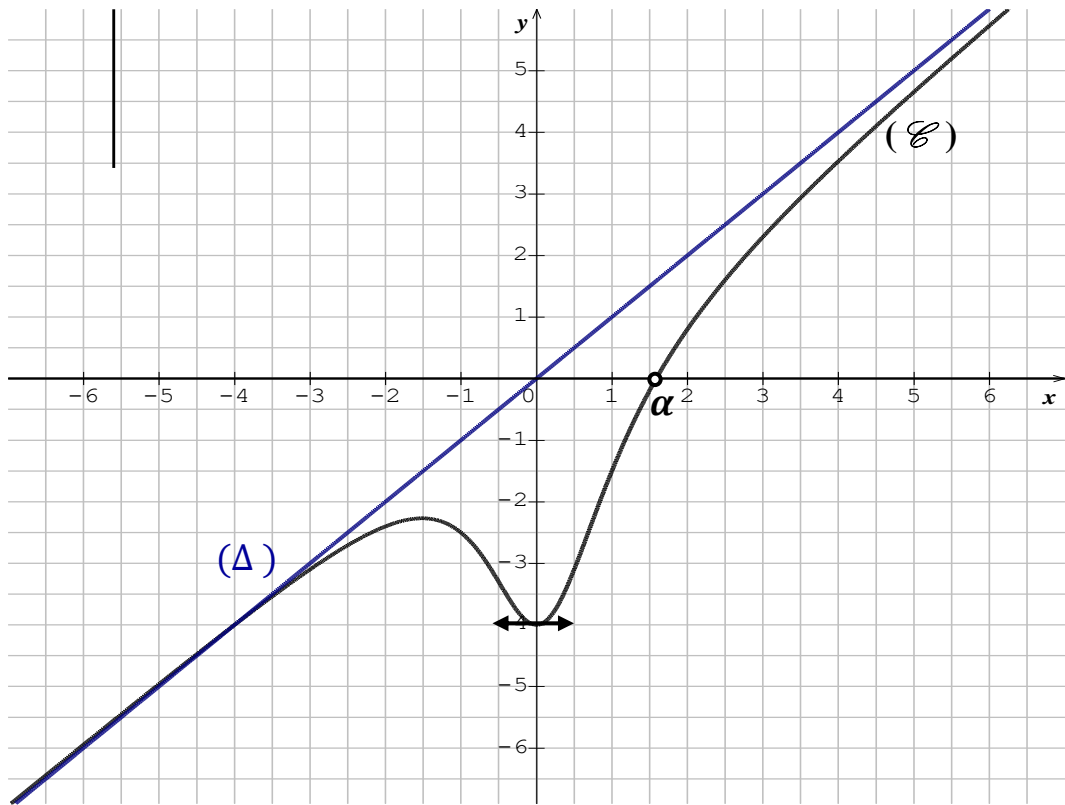


Figure 1

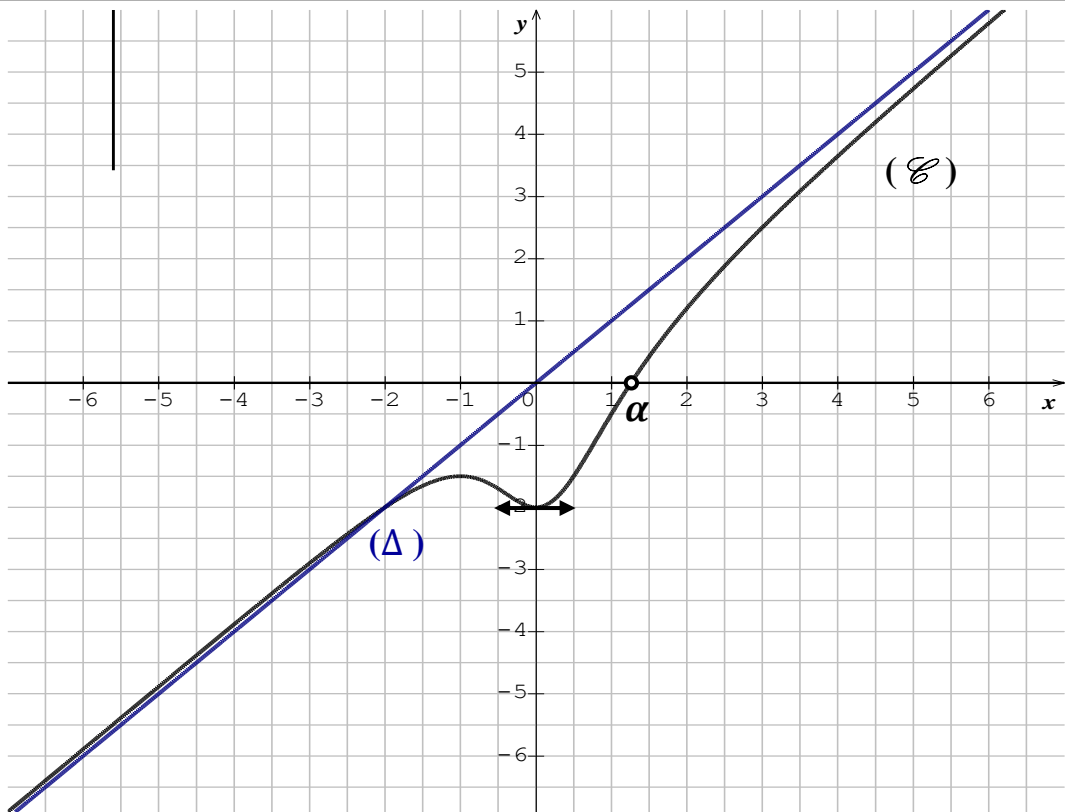


Figure 2

« Il n'y a qu'une façon d'échouer : c'est d'abandonner avant d'avoir réussi » Georges Clémenceau



BACCALAUREAT BLANC / SESSION DE AVRIL 2024

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SERIE : D

Coefficient : 4 Durée : 4heures

**EXERCICE 1 : QCM**

**(5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, une seule d'entre elles est exacte. Chaque réponse donne un point, une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point. Pour chacune des 5 questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse exacte.

1°) Soit  $f$  la similitude direct d'écriture complexe :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ . Alors l'expression analytique de  $f$  est :

A : 
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

B : 
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

C : 
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

D : Aucune réponse proposée n'est pas correct.

2°) On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + 4y = 8e^x$ . Laquelle des fonctions suivantes est solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant les conditions  $y(0) = 2$  et  $y'(\pi) = 0$

A :  $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{-2\pi} \sin(2x)$

B :  $y(x) = e^{-2x} + \cos(2x) + e^{2\pi} \sin(2x)$

C :  $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{2\pi} \sin(2x)$

D : Aucune réponse proposée n'est correct

3°) L'ensemble des points  $M(z)$  du plan tels que le nombre complexe  $\frac{z-4-2i}{z+2+i}$  (avec  $z \neq -2 - i$ ) soit un nombre complexe imaginaire pur est :

A : La droite (D) :  $-x + 2y = 0$

B : Le cercle  $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 10 = 0$

C : Le cercle de centre  $\Omega\left(1 + \frac{1}{2}i\right)$  et de rayon  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$  ;

D : Aucune des réponses proposées n'est juste

4°) Soit  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_n(x) = \cos^n(x)$ . On note  $(H_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2cm. La fonction  $h_n$  est positive sur :

A :  $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$  ;

B :  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  ;

C :  $\left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right[$  ;

D :  $]0; \pi[$

5°) Une primitive sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  de la fonction  $f: x \rightarrow \tan(x)$  qui prend la valeur 2 en 0 est :

A :  $x \rightarrow \ln(x + e^2)$  ;

B :  $x \rightarrow \frac{2}{\cos^2(x)}$

C :  $x \rightarrow -2 \ln \sqrt{\cos(x)} + 2$  ;

D : Aucune des réponses proposées n'est juste.

## EXERCICE 2 : Géométrie de l'espace

(4points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On donne les points  $A(2; 0; 0)$ ;  $B(0; 3; 0)$  et  $C(0; 0; -2)$ .

1°) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  défini par :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ . Puis une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

2°) Soit  $H(a, b; c)$  le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ .

a) Que peut - on dire des vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\vec{u}$  ? En déduire que :  $3a + 2b - 3c - 6 = 0$ .

b) Que peut - on dire des vecteurs  $\overrightarrow{OH}$  et  $\vec{u}$  ? En déduire qu'il existe un nombre réel  $t$  tel que :

$$\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$

c) Déterminer la valeur de  $t$ , puis donner les coordonnées de  $H$ .

d) Calculer la distance du point  $O$  au plan  $(ABC)$ .

3°) Calculer le volume du tétraèdre de base  $ABC$  et de sommet  $O$ .

## PROBLEME :

(11 points)

### PARTIE A : (Equation différentielle)

On considère l'équation différentielle  $(E)$  définie par :  $(E) : \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$

1°) Déterminer le réel  $a$ , tel que la fonction  $v$  définie par  $v(x) = axe^{-2x} + 2$  soit une solution de l'équation  $(E)$ . Pour la suite, on posera  $a = 6$

2°) Donner les solutions de l'équation différentielle  $(E') : \frac{1}{2}y' + y = 0$

3°) a) Montrer que  $u$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $v - u$  est solution de  $(E')$ .

b) En déduire les solutions de  $(E)$ .

4°) Déterminer la solution particulière  $h$  de l'équation différentielle  $(E)$  vérifiant :  $h(0) = 0$ .

### PARTIE B ; (Etude d'une fonction $f$ )

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} 2(3x - 1)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x \ln(x)}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 4cm.

### I/ Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + x + \ln(x)$ .

1°) a) Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$

b) Déterminer le sens de variation de  $g$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2°) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ , puis vérifier que :  $0,2 < \alpha < 0,3$ .

3°) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

## II/ Etude et représentation graphique de $f$

1°) Etudier la continuité de  $f$  en 0.

2°) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

3°) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

4°) Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5°) Etudier le sens de variation de  $f$ . (On montrera que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$  )

6°) Montrer que  $f(\alpha) = -\alpha$  et déterminer le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe  $(Ox)$ .

7°) Dresser le tableau de variation de  $f$ , puis construire la courbe  $(C_f)$ .

## PARTIE C: (Intégrales et aires)

Soit  $\beta < 0$ . On note  $\mathcal{A}(\beta)$  l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations :  $x = \beta$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  et la courbe  $(C_f)$ .

1°) On pose  $F(x) = (cx + b)e^{-2x}$ . Déterminer  $c$  et  $b$  pour que  $F'(x) = (3x - 1)e^{-2x}$ .

2°) Calculer  $\mathcal{A}(\beta)$  en  $\text{cm}^2$

3°) Calculer  $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\beta)$ .



*Epreuve de mathématiques*  
*L'usage de la calculatrice est autorisé*

**EXERCICE 1 (5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Les cinq affirmations sont indépendantes les unes des autres.

Pour chacune des affirmations, une seule des quatre propositions est exacte.

Indiquer sur votre copie, le numéro de l'affirmation et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

**Une réponse exacte** rapporte 1 point à l'affirmation, **une mauvaise réponse** fait perdre 0,5 l'absence de réponse vaut 0 point.

**N.B. Si le total des points est négatif, la note à cet exercice sera ramenée à zéro.**

1. Soit la suite  $(u_n)_{n>0}$  de terme général  $u_n = 2n - 1 - 2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ . La somme  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$n^2 - 2 \ln(n+1)$	$\frac{n(n-1)}{2} - 2 \ln(n+1)$	$n^2 + 2 \ln(n+1)$	$\frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1)$

2. Soit les nombres complexes  $z_1 = \sqrt{3} + i$  et  $z_2 = -1 + i$ . La forme trigonométrique de  $\frac{z_1^3}{z_2^7}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

3. L'espace  $(\mathcal{E})$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  de

représentations paramétriques respectives :  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - 4k; (k \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 2k \end{cases}$  sont :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
coplanaires	non coplanaires	sécantes	parallèles

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation :  $\ln(x^2 - 3x) \leq \ln(6 - 4x)$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$[-3; 0[$	$[-3; 2]$	$] -\infty; -3] \cup [2; +\infty[$	$[2; +\infty[$

5. Une primitive de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + x - \ln x}{(x+1)^2}$  est

la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$F(x) = 1 - x - \frac{x \ln x}{x+1}$	$F(x) = 2 - \frac{\ln x}{x+1}$	$F(x) = 2x - \frac{x \ln x}{x+1}$	$F(x) = x + 2 - \frac{x \ln x}{x+1}$

### EXERCICE 2 (5 points)

### Géométrie dans l'espace

#### Partie A

On considère deux points  $A$  et  $D$  de l'espace et on désigne par  $I$  le milieu du segment  $[AD]$ .

1. Démontrer que pour point  $M$  de l'espace,  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$ .

2. En déduire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  de l'espace tels que :  $MI^2 - IA^2 = 0$ .

#### Partie B

L'espace  $(\mathcal{E})$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(3; 0; 0)$ ;  $B(0; 6; 0)$ ;  $C(0; 0; 4)$  et  $D(-5; 0; 1)$ .

1.a. Vérifier que le vecteur  $\vec{n}(4; 2; 3)$  est un vecteur au plan  $(ABC)$ .

b. Déterminer une équation cartésienne de  $(ABC)$ .

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  orthogonale au plan  $(ABC)$  et passant par  $D$ .

b. En déduire les coordonnées du point  $H$  projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

c. En déduire la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$ .

d. Démontrer que le point  $H$  appartient l'ensemble  $(\Gamma)$  défini dans la **partie A**.

### EXERCICE 3 (5 points)

### Nombres complexes.

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . (Unité 3 cm). On considère

l'application  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $f(z) = \frac{2z}{1+zz}$ . On désigne par  $F$  l'application du plan complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $f(z)$ .

1.a. Calculer  $f(-1+i)$ . Soit  $A$  le point image du nombre complexe  $f(-1+i)$ . Place  $A$  dans le plan.

b. Déterminer et construire l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  tels que  $F(M) = M$ . Que représente ces points pour l'application  $F$ .

2. Soit  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  sont des nombres réels).

a. Ecrire  $f(z)$  sous forme algébrique.

b. Déterminer et construire l'ensemble  $(C')$  des points  $M$  dont l'image  $M'$  a pour abscisse  $\frac{1}{3}$ .

c. Déterminer les antécédents éventuels du point d'affixe  $\frac{1+2i}{3}$ .

2. Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ .
- a. Calculer en fonction de  $r$  et  $\theta$  le module  $r$  et un argument de  $f(z)$ .
- b. Démontrer que pour tout point du plan, on a:  $OM' \leq 1$ .

**EXERCICE 4 (5 points)**

**Etude de fonctions et représentation graphique.**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{cases} \text{ si } x > 0$$

Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$  d'unité 5 cm.

**1. Etude d'une fonction auxiliaire.**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2}$

- a. Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- b. Calculer et vérifier que  $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$ .
- c. Etudier le signe de  $g'(x)$ . Dresser son tableau de variation.
- d. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  une solution unique  $\alpha$ . Vérifier que  $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$ .
- e. Déterminer le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

**2. Etude de  $f$  et représentation graphique de fonction.**

- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x))$ . (On pourra poser  $h = \frac{1}{x^2}$ ). En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Donner une interprétation graphique du résultat.
- b. Vérifier que  $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$  pour tout  $x > 0$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- c. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Montrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$ .
- d. En déduire les variations de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3.a. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- b. Construire avec soin la courbe  $(\mathcal{C})$ .

**-FIN-**



## BACCALAUREAT BLANC SESSION DE MARS 2024

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de calculatrice est autorisé.

**Exercice 1 : Restitution organisée de connaissances et Q.C.M (54 points)**

**Partie A :** Restitution organisée de connaissances.

- 1) Pour tout triplet d'entiers naturels  $(x; y; z)$  et tout entier naturel  $n$  :  
 $((x \equiv y[n] \text{ et } y \equiv z[n]) \Rightarrow x \equiv z[n])$ .
- 2) Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;a), (B;b), (C;c), (D;d)$  et  $(E;e)$ .  
 Démontrer que si  $H$  est le barycentre des points pondérés  $(A;a), (B;b)$  et  $(C;c)$   
 et  $T$  le barycentre des points pondérés  $(D;d)$  et  $(E;e)$  alors  $G$  est le  
 barycentre des points pondérés  $(H; a + b + c)$  et  $(T; d + e)$ .
- 3) Si un entier naturel  $d$  divise  $a$  et  $b$  alors il divise toute combinaison linéaire de  
 $a$  et  $b$ .

**Partie B :** Questions à choix multiples (Q.C.M).

Pour chaque question proposée, une seule proposition est exacte. Vous indiquerez sur votre copie, dans l'ordre le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est exigée. Une bonne réponse rapporte 10 points. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Si on a  $a \equiv 4[5]$  et  $b \equiv 3[5]$  alors le reste de la division euclidienne de  
 $7a^2 - 4b^2 + 2ab$  par 5 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	0	7	5

- 2) Soit  $z$  un nombre complexe non nul. Démontrer que le nombre complexe  
 $\frac{2z - 1}{z^2}$  est réel si et seulement si :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$z = 0$ ou $z = 1 + i$	$z = 0$ ou $z = \frac{1}{2i + 1}$	$z$ réel ou $2z \times \bar{z} = z + \bar{z}$	$z = 2i$ ou $z = 1$

3) Soit  $f$  la fonction définie de  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$  on a donc  
 $x \rightarrow 3 - 4 \cos 2x$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(f^{-1})'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{12}$	$(f^{-1})'(1) = 0$	$(f^{-1})'(1)$ n'existe pas.	$(f^{-1})'(1) = \frac{-1}{2}$

### **Exercice 2 : Suites et intégrales ( 36 points )**

On considère la suite  $u$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right] - \ln(n)$ .

1) Démontrer que pour tout entier  $n$  non nul ,  $U_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$ .

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n - 1$  ,

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

b) En déduire que pour tout entier  $n$  non nul on a :

$$U_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq U_n.$$

3) En utilisant une intégration par parties montrez que  $\int_1^2 \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 1$   
et en déduire de ce qui précède la limite de la suite ( $U_n$ )

### **PROBLEME : Nombres complexes ; Transformations planes ; Arithmétique et Conique (114 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### **Partie A :**

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, le polynôme

$$P(z) = z^3 - \left[2 + (3 + \sqrt{2})i\right]z^2 + \left[-5 - 3\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 1)i\right]z + \sqrt{2} + 5i\sqrt{2}.$$

1) a) Démontrer que  $P(z)$  peut s'écrire sous la forme :

$P(z) = (z + 1 - i) \times Q(z)$  ou  $Q(z)$  est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.

b) Ecris sous la forme algébrique le nombre complexe  $d = \left[3 + (2 - \sqrt{2})i\right]^2$ .

En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$ .

2) On considère la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \times \bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1 + i$  ;  $3 + 2i$  ;  $i\sqrt{2}$ .

a) Calculer les affixes respectives des points  $A'$  et  $C'$ , images respectives des points  $A$  et  $C$  par  $f$ .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

### Partie B :

On désigne par  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\sqrt{2}$  ; et on pose  $g = f \circ h$ .

3) a) Déterminer l'écriture complexe de  $h$ .

b) Démontrer que  $g$  a pour écriture complexe :  $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$ .

4) a) Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  entiers.

On note  $N = g(M)$ .

b) Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BN}$  sont orthogonaux si et seulement si :  $5x + 3y = 15$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $5x + 3y = 15$ .

d) En déduire les points  $M$  du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle  $[-5 ; 5]$  et tels que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BN}$  soient orthogonaux.

### Partie C :

Soit  $\Phi$  une transformation plane d'expression analytique : 
$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

5) Démontrer que  $\Phi$  est une symétrie glissée.

6) Démontrer que la transformation  $r$  définie par  $r = g \circ \Phi$  a pour écriture complexe  $z' = (1-i) \times z$ . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $r$ .

7) Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant :

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0.$$

- a) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma')$  =  $r(\Gamma)$  (l'image de  $(\Gamma)$  par la transformation  $r$ ).
- b) Démontrer que  $(\Gamma')$  est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.
- c) En déduire que  $(\Gamma)$  est aussi une ellipse dont on précisera le centre et les sommets. (Utiliser la question 6 pour répondre à cette question).



## BACCALAUREAT BLANC / SESSION DE FEVRIER 2024

### EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Coefficient : 5

SERIE : C

Durée : 4 HEURES

Remarque importante : L'usage du correcteur (blanco) est strictement interdit.

**EXERCICE 1** : Questions à choix multiples, restitution organisée des connaissances..... (6 points)

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes : la partie A qui est consacré aux questions à choix multiples et la partie B réservée à la restitution organisée des connaissances du cours.

#### Partie A :

Pour chacune des questions posées, quatre (4) réponses sont proposées dont une seule est exacte. Le candidat choisira la lettre correspondante à la bonne réponse pour chaque question. Une bonne réponse vaudra 1 point, une mauvaise ou absence de réponse vaudra 0 point.

1. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -\sin x \cos^{2n-1}(x)$  pour tout  $n > 1$ . La primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et qui s'annule en 0 est la fonction :

A :  $\frac{1}{2n}(\cos^{2n}(x) - 1)$

C :  $\cos^{2n+1}(x) - 2$

B : Aucune des réponses

D :  $\frac{1}{2n+1}(\cos^{2n+1}(x) - 1)$

2. La sphère de centre  $H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  tangente au plan  $(\mathcal{P}) : 4x - 3z + 1 = 0$  à pour équation cartésienne :

A :  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2x - 4y$

C :  $x^2 + y^2 + z^2 = -4 - 2x + 4y$

B :  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2x - 4y$

D :  $x^2 + y^2 + z^2 = -4 + 2x + 4y$

3. On considère la suite  $(U_n)$  de terme générale :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Alors la suite  $(U_n)$  est :

A : croissante et majorée

C : convergente

B : décroissante

D : divergente

4. Soit la fonction  $h$  définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $h(x) = \cos(2x)$ . Cette fonction est bijective de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  vers  $[-1; 1]$  et la dérivée de sa bijection réciproque  $h^{-1}$  sur  $]-1; 1[$  est :

A :  $(h^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

C :  $(h^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1+x^2}}$

B :  $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

D :  $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

**Partie B :**

1. Soit  $x = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0}$  l'écriture décimale de l'entier naturel  $x$ .
  - a) Montrer que  $x$  est congru à  $a_0 + 10a_1$  modulo 4.
  - b) En déduire un critère de divisibilité par 4.
2. Soit  $ABCD$  un tétraèdre de sommet  $D$ . Démontrer que le volume  $\mathcal{V}$  de ce tétraèdre est défini par :
$$\mathcal{V} = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{6}$$
3. Démontrer par récurrence que : pour tout  $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$$

**EXERCICE 2 : Equations différentielles, étude d'une fonction..... (6 points)**

1. On considère l'équation différentielle  $(E) : y' + y = e^{-x}$ .
  - a) Démontrer que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = xe^{-x}$  est une solution de  $(E)$ .
  - b) Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y' + y = 0$ .
  - c) Démontrer qu'une fonction  $v$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de  $(E) \Leftrightarrow v - u$  est solution de  $(E_0)$ .
  - d) En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .
  - e) Déterminer la fonction  $f_2$  solution de  $(E)$ , qui prend la valeur 2 en 0.
2. Soit  $k$  un nombre réel donné, on note  $f_k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ . On note  $(C_k)$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique 2cm.
  - a) Déterminer les limites de  $f_k$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b) Calculer  $f'_k(x)$  pour tout  $x$  réel et déterminer le sens de variation de  $f_k$ .
  - c) En déduire le tableau de variations de  $f_k$ .
  - d) Construire la courbe  $(C_2)$ .

**PROBLEME: Nombres complexes, isométries du plan et barycentre..... (8 points)**

Dans tout cet exercice, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique 2cm.

**Partie A :**

1.
  - a) Calculer le module et un argument du nombre complexe  $1 + i\sqrt{3}$ .
  - b) En déduire la forme algébrique de  $(1 + i\sqrt{3})^3$ .
2. Soit  $P(z) = z^3 - [-1 + i(2 + \sqrt{3})]z^2 - 2[1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})]z + 4(-\sqrt{3} + i)$  un polynôme d'inconnue en  $z$ .
  - a) Calculer  $P(1 + i\sqrt{3})$
  - b) Démontrer que  $P(z) = (z - 1 - i\sqrt{3})Q(z)$  où  $Q$  est un polynôme de second degré.
  - c) Calculer  $(2 + 2i)^2$  puis résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

### Partie B :

On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = -2; b = 2i$  et  $c = 1 + i\sqrt{3}$ .

1. Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan complexe.
2. Justifier que les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à un même cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $O$  dont on précisera le rayon.
3. Construire le barycentre  $G$  des points pondérés  $(A; -1), (B; 1)$  et  $(O; -1)$ .
4. On considère l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points  $M$  du plan tels que  $MA^2 - MB^2 + MO^2 = 12$ .
  - a) Justifier que  $B$  appartient à ( $\Gamma$ ).
  - b) Déterminer et construire ( $\Gamma$ ).

### Partie C :

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $K$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $(OB)$ . On désigne par  $r_1$  la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_2$  la rotation de centre  $O$  qui transforme  $B$  en  $C$ .

1. Démontrer que l'angle de  $r_2$  est  $-\frac{\pi}{6}$ .
2. Démontrer que le triangle  $KOC$  est équilatéral et de sens direct.
3. On pose  $f = r_2 \circ r_1$ . Démontrer que :
  - a)  $f(O) = C$
  - b)  $f$  est une rotation de centre  $K$  dont on déterminera l'angle.
4. Soit  $g$  l'isométrie plane qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tels que :
$$z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}$$
  - a) Justifier que  $g$  possède un unique point invariant à déterminer.
  - b) Calculer  $g(O)$ .
  - c) En déduire que  $g = f$ .
5. Justifier que l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $|z' - 1 - i\sqrt{3}| = 2$  est l'ensemble ( $\mathcal{C}$ ).



**BACCALAUREAT BLANC**  
**SESSION DE MARS 2024**  
**LYCEES PRIVES**  
**FONDATION MBELE**

**MATHEMATIQUES**  
**SERIE : C**  
**COEFFICIENT : 5**  
**DUREE : 4h00**



**R.O.C : Restitution organisée des connaissances (1,5 point)**

1. Soit  $n$  et  $k$  deux nombres entiers naturels tels que :  $0 < k < n$ .  
 Démontrer que :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ;  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ .  
 Soit  $m$  et  $M$  deux nombres réels tels que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[a; b]$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ .  
 Démontrer que :  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .

**EXERCICE 1 : QCM (4 points)**

Chacun des numéros 1. à 4. comporte deux questions a) et b).

Chaque réponse correcte rapporte 0,25 point et la justification rapporte aussi 0,25 point.

On recopiera le numéro de chaque question suivi de l'une des lettres  $A, B, C$  et  $D$ .

Les justifications se feront en bas de l'ensemble des réponses choisies.

**Une mauvaise réponse ou une absence de réponse rapporte 0 point.**

1. On considère dans  $\mathbb{N}^2$  le système :  $\begin{cases} PGCD(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$

a) Ce système admet exactement :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse A
quatre solutions	une solution	trois solutions	Aucune réponse juste

b) Une solution du système est le couple :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(30 ; 30)	(48 ; 12)	(26 ; 34)	Aucune réponse juste

2. a) L'expression analytique du demi-tour d'axe ( $\Delta$ ) ayant pour système d'équations  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$   
 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 6 \\ z' = z + 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 12 \\ z' = z \end{cases}$	$\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -y + 12 \\ z' = z \end{cases}$	Aucune réponse juste

b) L'antécédent du point  $A(1; -1; 1)$  par cette demi-tour est le point :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$B(3; 13; 0)$	$B(-1; 13; 0)$	$B(3; 13; 1)$	Aucune réponse juste

3. On lance un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Pour tout entier naturel  $n$  appartenant à  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , on note  $P_n$  la probabilité d'obtenir le chiffre  $n$ . Les nombres  $P_1, P_2, \dots, P_6$  forment dans cet ordre six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que  $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$ .

a) La valeur de  $P_1$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{2}{21}$	2	$\frac{1}{21}$	Aucune réponse juste

b) On considère les événements :

$A$ : « le nombre obtenu est pair. » et  $B$ : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3. »

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$A$ et $B$ sont incompatibles.	$A$ et $B$ sont indépendants.	$P(A) = \frac{12}{21}$	Aucune réponse juste

4. Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. On désigne par  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et par  $r'$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{5\pi}{3}$ .

a)

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$ror'$ est un antidéplacement	$ror'$ est une symétrie glissée.	$ror'$ n'admet pas de point invariant.	Aucune réponse juste

b)

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$ror'(B) = B$	$ror'(A) = A$	$ror'$ est une symétrie centrale.	Aucune réponse juste

### **EXERCICE 2 : Arithmétique (3 points)**

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  non nul et pour tout entier naturel  $x$ , on a :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans la suite de l'exercice on considère un nombre entier naturel  $a$  supérieur ou égal à 2.

2. Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$ .

a) Démontrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$ .

b) En déduire que  $2^{1002} - 1$  est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur PGCD.

a) Démontrer qu'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :

$$mu - nv = d.$$

b) On suppose que  $u$  et  $v$  sont strictement positifs. Démontrer que :

- ✓  $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$  ;
  - ✓  $a^d - 1$  est le PGCD de  $a^{mu} - 1$  et  $a^{nv} - 1$ .
- c) En utilisant le résultat précédent, calculer le PGCD de  $2^{63} - 1$  et  $2^{60} - 1$ .

**EXERCICE 3 : Similitude directe (5,75 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Soit  $u$  le nombre complexe de module  $r$ , ( $r > 0$ ) et d'argument  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on construit des points  $A_n$  de la façon suivante :
- ✓  $A_0$  est l'origine du repère ;
  - ✓  $A_1$  est le point d'affixe  $i$  ;
  - ✓ Pour  $n$  supérieur ou égal à 2, le point  $A_n$  est l'image de  $A_{n-2}$  par la similitude directe de centre  $A_{n-1}$ , de rapport  $r$  et d'angle  $\alpha$ .

On note  $z_n$  l'affixe du point  $A_n$ .

- a) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, écrire une relation entre  $z_n$ ,  $z_{n-1}$  et  $z_{n-2}$ .
- b) Montrer que :  $\forall n \geq 2$ , on a :

$$z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i.$$

- c) Déterminer l'expression de l'affixe  $z_n$  de  $A_n$  en fonction de  $n$  et de  $u$ .

2. a) Montrer qu'il existe une similitude directe  $S$  et une seule telle que :

$$S(A_0) = A_1 \text{ et } S(A_1) = A_2.$$

Préciser les éléments caractéristique de  $S$ .

- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$A_{n+1} = S(A_n).$$

- c) On note  $S^0$  l'application identique du plan et pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S^{n+1} = S \circ S^n$ .

Soit  $p$  un nombre entier naturel, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+p} = S^n(A_p).$$

- d) Montrer que  $S^4$  est une homothétie.

3. On suppose maintenant que  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . On appelle  $\Omega$  le centre de la similitude  $S$ .

- a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$  et  $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$  sont orthogonaux.

- b) Exprimer  $\Omega A_{n+1}$  en fonction de  $\Omega A_0$  et de  $n$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega A_{n+1}$ .

- c) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$L_n = \sum_{i=0}^n A_i A_{i+1}$$

Déterminer la limite de  $L_n$ .

**EXERCICE 4 : Fonction, suites et intégrale (5, 75 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 6, l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $[1 ; \sqrt{e}]$ .

c) Prouver que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 6}$  est décroissante et qu'elle converge.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  supérieur à 1, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}.$$

b) Calculer en fonction de  $n$  l'intégrale :

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad n \geq 2.$$

3. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :  $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln(n)}{n^2}$ .

a. Montrer que :

$$-\frac{\ln 2}{2^2} + \sum_{k=2}^n \frac{(\ln k)}{k^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq -\frac{\ln(n)}{n^2} + \sum_{k=2}^n \frac{(\ln k)}{k^2}.$$

b. En déduire que :  $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!} \text{ et } I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ . En déduire la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

b. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \times \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ .

c. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$ .

d. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $I_n$  puis déterminer la limite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .



**BACCALAUREAT BLANC SESSION 2024**

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

**EXERCICE 1**

**4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. *Indique sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.*

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Soit la fonction $f$ définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$ La valeur de $m$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$ est :	$m = -1$	$m = 0$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$
2	La suite $(U_n)$ définie par : $U_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$ a pour limite :	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
3	Pour tout réel $x \in ]1; +\infty[$ , on a : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ . L'expression de $f^{-1}(x)$ est égale à :	$x - 1 + \frac{-2}{4(1-x)}$	$x - 1 + \frac{2}{4(x-1)}$	$1 - x - \frac{3}{4(1-x)}$	Aucune bonne réponse
4	$A$ et $B$ sont deux points distincts du plan. On a : $f = r\left(A; \frac{3\pi}{4}\right)$ et $g = r\left(B; \frac{5\pi}{4}\right)$ . L'application du plan dans le plan $f \circ g$ est :	Une rotation	Une translation	Une symétrie orthogonale	Aucune bonne réponse

**EXERCICE 2****6 points****Partie A : Restitution organisée des connaissances (ROC)**

Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

Prouver que  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a pour coordonnées :  $(yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Partie B : Géométrie dans l'espace**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points suivants :  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(-3; -1; 7)$ ,  $C(3; 2; 4)$ ,  $D(-4; 2; 4)$  et  $S(-2; 3; 0)$ .

1. Calculer le produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  et en déduire l'aire  $A_1$  du triangle  $ABC$ .
2. Soit  $(P)$  le plan passant par les points  $A, B$  et  $C$ .  
Déterminer une équation cartésienne du plan  $(P)$ .
3. Soit  $(\Delta)$  la droite orthogonale au plan  $(P)$  et passant par le point  $D$ .
  - a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .
  - b) Calculer la distance du point  $D$  au plan  $(P)$ .
4.  $H$  est le projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(P)$ .  
Déterminer les coordonnées du point  $H$ .
5.
  - a) Démontrer que les points  $A, B, C$  et  $S$  ne sont pas coplanaires.
  - b) Déterminer le volume  $V_1$  du tétraèdre  $SABC$ .
6. On considère la sphère de centre  $D$  et de rayon  $3\sqrt{2}$ .
  - a) Donner l'équation cartésienne de cette sphère.
  - b) Etudier l'intersection de cette sphère et du plan  $(P)$ .

**EXERCICE 3****Arithmétique****4 points**

Dans un système de numération de base  $a$ , on considère les nombres :

$$A = \overline{211}, B = \overline{312} \text{ et } C = \overline{133032}.$$

1.
  - a) Donner l'écriture des nombres  $A, B$  et  $C$  en base  $a$ .
  - b) Expliquer pourquoi  $a$  doit être supérieur à 3.
2.
  - a) Sachant que  $C = A \times B$ , montrer que  $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ .
  - b) En déduire que  $a$  divise 8.
  - c) Déterminer alors  $a$ .
3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4.
4. Pour la suite, on prendra  $a = 4$ .
  - a) Ecrire  $A, B$  et  $C$  dans le système décimal.
  - b) Montrer alors que  $C = A \times B = \text{ppcm}(A, B)$ .
  - c) En déduire que l'équation :  $Ax + By = 1$  a des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .
5. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 37x + 54y = 1$ .
  - a) Vérifier que le couple  $(19; -13)$  est une solution de cette équation.
  - b) Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
  - c) En déduire les couples solutions telles que :  
$$-100 \leq x \leq 200 \text{ et } -140 \leq y \leq 100.$$

**EXERCICE 4****Etude d'une fonction****6 points**

Soit  $n$  un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $f_n$  les fonctions qui sont définies pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}$ . On note  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 5 cm.

**Partie A :**

1. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , on a :  $f'_n(x) = \frac{n-2-2n\ln x}{x^3}$
2. a) Résoudre l'inéquation  $f'_n(x) \geq 0$ .  
b) En déduire le signe de  $f'_n(x)$ .
3. Déterminer la limite de  $f_n$  en 0 et en  $+\infty$ .
4. Etablir le tableau de variation de  $f_n$  et exprimer sa valeur maximale en fonction de  $n$ .
5. a) Résoudre alors l'équation  $f_n(x) = 0$ .  
b) En déduire le signe de  $f_n(x)$ .  
d) Soit  $\alpha_n$  la solution de l'équation  $f_n(x) = 0$ . Etudier la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

**Partie B :**

1. Démontrer que les courbes  $C_n$  passent par un point fixe.
2. a) Calculer  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .  
b) En déduire la position relative de  $C_{n+1}$  par rapport à  $C_n$ .  
c) Dessiner l'allure de  $C_2$  et de  $C_3$ .



L'usage de la calculatrice est autorisé

**EXERCICE 1** : *Restitution organisée de connaissance et questions à choix multiples (21 points)***PARTIE A : ROC**

- Démontrer par récurrence que :  $\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$
- Soit  $a$  ;  $b$  et  $c$  trois nombres entiers relatifs non nul. Démontrer que si  $a$  divise  $bc$  ,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux , alors  $a$  divise  $c$
- Démontrer la formule d'intégration par parties

**PARTIE B : QCM**

- On donne un rectangle ABCD du plan dont les cotés [AB] et [AD] ont pour longueurs respectives  $a$  et  $b$

Pour tout réel non nul  $m$ , on note  $G_m = \text{bar}\{(A ; m), (B ; -1), (C ; 1)\}$ . L'ensemble des points M du plan tels que :  $\|m\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Le cercle de centre $G_m$ et de rayon AB	Aucune réponse	La médiatrice du segment [AC]	Le cercle de centre $G_m$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$

- Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les courbes  $(C_m)$  d'équations :  $mx^2 + (m+2)y^2 - 2m(m+1)x + 2(m+2)y + m^2 - 3m = 0$  avec  $m \in \mathbb{R}$  alors  $(C_m)$  est : ...

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Aucune réponse	Une ellipse si $m = 0$	Une hyperbole si $m = 1$	Un cercle si $m = -1$

- L'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points : A(1 ; 2 ; 5) ; B(-1 ; 6 ; 4) ; C(7 ; -10 ; 8) et D(-1 ; 3 ; 4) alors : .....

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Les points A ; B et C définissent un plan	On admet que les points A ; B et D définissent un plan	Une équation du plan (ABC) est $x - 2z + 9 = 0$	Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases}$

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \frac{2\sin x}{1 - \sin x}$  et  $g$  sa réciproque définie sur  $\mathbb{R}_+$  Alors : .....

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$	$g'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$	Aucune réponse	$g'(x) = \frac{2}{(-x+1)\sqrt{x^2+1}}$

**EXERCICE 2** Equations diophantiennes ; suites numériques ; applications affines (57 points)**Partie A :**

- 1) On donne l'équation (E) :  $5x - y = -3$
- Vérifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$
  - Résoudre l'équation (E)
- 2) Soit les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$  et  $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n; y_n)$  est une solution de l'équation (E)
  - En déduire que si  $x_n$  et  $y_n$  ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux
- 3) On pose  $u_n = x_n + a$  et  $v_n = y_n + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels
- Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  soient des suites géométriques que l'on caractérisera
  - Déduire  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ , puis étudier la convergence des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$

**Partie B :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M(z)$  on associe le point  $M'(z')$  tel que :  $z' = iz + 3 + i$

- Montrer que  $f$  est une isométrie du plan
  - Montrer que  $f$  admet un seul point invariant  $I$  et en déduire la nature de  $f$
- 3a) Déterminer l'affixe du point  $O' = f(O)$

b) Donner une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{IO}; \overrightarrow{IO'})$

4) Donner les éléments caractéristiques de  $f$

5) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; on considère les points :

$$A(0; 2); B(0; 1); C(1; 1); D(1; 2); E(2; 1)$$

Soit  $g$  l'application affine définie telle que  $g(O) = A$  et dont l'application linéaire associée est  $\phi$

On suppose que pour tout point  $M$  de  $(BC)$ , on a  $\overrightarrow{Mg(M)} = \vec{i}$

- Déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$
- Déterminer  $\phi(\vec{i})$  et  $\phi(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
- Soit  $M(x; y)$  un point du plan. Démontrer que :  $\overrightarrow{Mg(M)} = (2 - y)\vec{j}$
- Démontrer que  $g \circ g = g$
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $g$

**PROBLEME** : famille de fonctions – fonctions et suites définies par une intégrale ( 102 points)

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{1-x}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 3 cm

**1a)** déterminer les limites de  $f$  aux bornes son ensemble de définition. Préciser les asymptotes

**b)** Etudier le sens de variation de  $f$ , puis dresser son tableau de variation

**c)** Tracer la courbe (C)

**2a)** soit  $\beta$  un réel strictement positif. A l'aide d'une intégration par parties, Déterminer l'aire  $A(\beta)$  de la région comprise entre la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \beta$

**b)** Calculer  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$

**3)** On considère les fonctions  $f_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$  ;  $\forall n \geq 1$

**a)** calculer les limites de  $f_n$  aux bornes de son ensemble de définition

**b)** Etudier, suivant la parité de  $n$ , le sens de variation de la fonction  $f_n$

**c)** Démontrer que pour tout entier naturel non nul,  $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R})$

**4)** On considère les fonctions  $\psi_n$  définies par :  $\psi_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

**a)** En utilisant la question 3c), calculer  $\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)$ , pour tout réel  $x$

**b)** Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a  $\psi_n(x) = \psi_1(x) - \sum_{k=2}^n f_k(x)$

**c)** En déduire que :  $\psi_n(x) = e - e^{1-x} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$

**5)** Dans cette question, on suppose que  $x \in [0 ; 1]$

**a)** Démontrer que  $\forall n \geq 1, 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$

**b)** En déduire que pour tout  $x \in [0 ; 1]$ ,  $\psi_n(x) \leq \frac{1}{n!}$

**c)** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x)$

**d)** Démontrer que pour tout réel  $x \in [0 ; 1]$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = e^x$

**Partie B**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $g_n$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $\begin{cases} g_n(x) = x \ln^n(x), & \text{si } x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par  $(C_n)$  la courbe de la fonction  $g_n$

On pose  $G_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 g_n(x) dx$  avec  $n \geq 1$  et  $\alpha \in ]0 ; +\infty[$ . On admet que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n(\alpha) = u_n$

**1)** Calculer  $G_1(\alpha)$ , puis en déduire que  $u_1 = -\frac{1}{4}$

**2) a)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall \alpha \in ]0 ; 1[$  et  $n \geq 1$  :

$$G_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} \ln^{n+1}(\alpha) - \frac{n+1}{2} G_n(\alpha)$$

**b)** En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $u_{n+1} = -\frac{n+1}{2}u_n$

**3)** Soit  $A_n$ , l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_n)$ ; l'axe des abscisses et les droites d'équations :  
 $x = 0$  et  $x = 1$

On pose  $A_n = 4|u_n| \text{ cm}^2$

**a)** Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$

**b)** Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $A_{n+1} \geq 2A_n$

**4)** Soit  $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $a > 0$  la suite définie par :  $u_n(a) = \int_0^1 x^n e^{a(1-x)} dx$

**a)** Calculer  $u_0(a)$ , puis montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n(a) \leq \frac{e^a}{n+1}$

**b)** Montrer que la suite  $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

**c)** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a)$

**d)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$au_{n+1}(a) = -1 + (n+1)u_n(a)$$

**e)** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}} \left( e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right)$

### **Partie C**

On pose  $G(x) = \int_1^{e^x} t \times \ln(t) dt$  où  $x \in \mathbb{R}$

**1a)** Sans calculer  $G(x)$ , montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'(x)$

**b)** Déterminer le sens de variation de  $G$

**2a)** Calculer  $G(x)$  en fonction  $x$

**b)** Dresser le tableau de variation de  $G$

Direction d'Académie Provinciale  
du Moyen Ogooué

**BACCALAUREAT BLANC PROVINCIAL - SESSION DE FEVRIER /MARS 2024**  
**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
(Série : C - Durée : 4 heures)

**NB** : L'usage de la calculatrice est autorisé.

**Exercice 1** : (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question posée, une seule des réponses proposées est correcte. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence d'une réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Recopier le numéro de la question et la lettre qui correspond à la proposition choisie.

1°) A tout nombre complexe  $z \neq -2$ , on associe le nombre complexe  $z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$ . L'ensemble des

points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  est un réel est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
un cercle de rayon 1	une demi-droite	une droite privée d'un point	un cercle privé d'un point

2°)  $u$  et  $v$  sont deux fonctions définies sur  $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par :  $u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$  et  $v(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$ . En

posant :  $\forall x \in I, u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ , la primitive  $V$  de  $v$  sur  $I$  telle que  $V(0) = 0$  est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$\frac{1}{3} \left[ \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \tan x \right]$	$\frac{1}{3} \left[ \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2 \tan x \right]$	$\frac{1}{3} \left[ \frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2 \tan x \right]$	Aucune réponse correcte

3°) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g : x \mapsto f(\tan x)$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

et  $g'(x) = \dots$

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$(1 - \tan^2 x) f'(\tan x)$	$\frac{f'(\tan x)}{\cos^2 x}$	$f'(\tan x)$	Aucune réponse correcte

4°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(-4; 6; -1)$ ,  $B(1; 2; 2)$ ,  $C(-1; 4; 3)$  et  $D(-5; 7; 0)$ . Quelle est la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  ?

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{22}}$	$\frac{57}{\sqrt{22}}$

**Exercice 2** : (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On considère la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $x = 6$  et le point  $F \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $\theta$  un nombre réel tel que

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ . On désigne par  $(\Gamma_\theta)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos \theta}$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(\mathcal{D})$ .

1°) Préciser la nature de  $(\Gamma_\theta)$  selon les valeurs de  $\theta$ .

2°) Construire point par point la courbe  $(\Gamma_0)$  correspondant au cas  $\theta = 0$ .

(On ne demande pas une équation de  $(\Gamma_0)$ ).

3.a°) Déterminer une équation cartésienne de la courbe  $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$  correspondant au cas  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

b°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (**Centre, axe focal, sommets principaux, foyers, directrices, excentricité**) de  $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ .

### Exercice 3 : (3 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

1.a°) En raisonnant par récurrence, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = 3^n - 1$ .

b°) Déterminer le plus petit entier naturel non nul tel que  $n$  tel que  $3^n \equiv 1 \pmod{7}$ .

c°) En déduire que  $2u_{2022}$  est divisible par 7.

2.a°) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

b°) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = 81u_n + 40$ . En déduire que si  $u_n \equiv 4 \pmod{5}$  alors

$$u_{n+4} \equiv 4 \pmod{5}.$$

3.a°) Recopier et compléter la tableau de congruences modulo 5 suivant.

$n$	0	1	2	3	4
$3^n$					

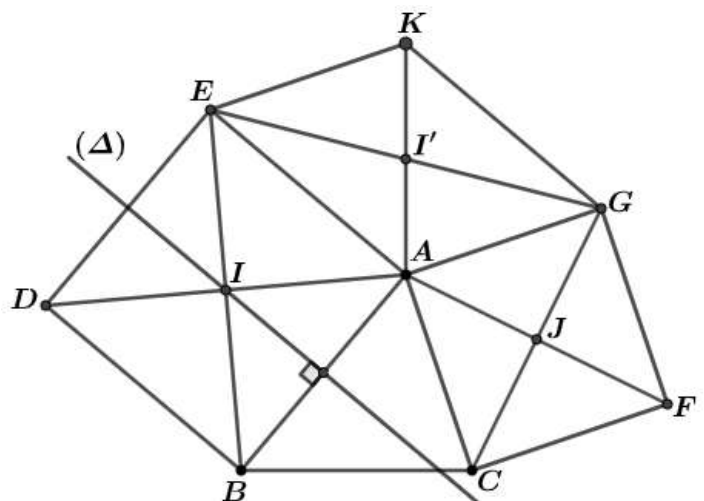
b°) Existe-t-il un entier naturel  $n$  tel que le reste de la division euclidienne de  $u_n$  par 5 soit égal à 2 ?

### Exercice 4 : (3.5 points)

Dans la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle de sens direct,  $ABDE$  et  $ACFG$  sont des carrés de centres respectifs  $I$  et  $J$ , le quadrilatère  $AGKE$  est un parallélogramme de centre  $I'$ .

1.a°) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  qui envoie  $C$  en  $A$  et  $A$  en  $G$ . Justifier que  $f = R_{\left(J, -\frac{\pi}{2}\right)}$ .

b°) Justifier que  $(\overline{AB}; \overline{GK}) = -\frac{\pi}{2}$ , puis déterminer



$f(B)$ . (On pourra utiliser les points  $A$  et  $G$ ).

En déduire que  $FB = CK$ , puis donner une mesure de l'angle  $(\overline{FB}; \overline{CK})$ .

2°) Soit  $g = S_I \circ f$ .

a°) Déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$ . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $g$ .

b°) Montrer que  $DC = BK$ .

3.a°) Soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[AB]$ , montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $h$  tel que  $h(A) = B$  et  $h(E) = D$ . Caractériser  $h$ .

b°) Décomposer  $t_{\overline{AB}}$  en la composée de deux symétries orthogonales. En remarquant que

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ , déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f' = t_{\overline{AD}} \circ h$ .

### Exercice 5 : ( 6,5 points)

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1°) On note  $g_n$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g_n(x) = nx + n + \ln x$ .

a°) Déterminer  $g_n'(x)$ .

b°) En déduire le sens de variation de  $g_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

2.a°) Montrer que l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

b°) Calculer  $g_n(e^{-n})$ , puis vérifier que  $\alpha_n < e^{-n}$ .

c°) Démontrer que :  $0,1 < \alpha_2 < 0,2$ .

d°) Déterminer le signe de  $g_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

3°) On considère la fonction  $f_n$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{x(\ln x)^n}{x+1}, & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

et  $(\mathcal{C}_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 5 cm.

a°) En remarquant que  $f_n(x) = \frac{\left(x^{\frac{1}{n}} \ln x\right)^n}{x+1}$ , étudier la continuité de  $f_n$  en 0.

b°) Étudier la dérivabilité de  $f_n$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c°) En remarquant que  $f_n(x) = \frac{x}{x+1} \times (\ln x)^n$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

4.a°) Justifier que  $f_n$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b°) Déterminer  $f_n'(x)$  et montrer que :  $\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1} g_n(x)}{(x+1)^2}$ .

c°) Étudier le sens de variation de  $f_n$  suivant la parité de  $n$ .

d°) Dresser le tableau de variation de  $f_n$  dans le cas où  $n$  est pair, puis pour  $n$  impair.

5.a°) Démontre que toutes les courbes  $(\mathcal{C}_n)$  passent par trois points fixes dont on précisera

les coordonnées.

**b°)** Construire la courbe  $(\mathcal{C}_2)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**NB :** On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^m \ln x = 0, \forall m > 0$ .



**EXERCICE 1: ( Questions à choix multiples - 4 points)**

Quatre réponses sont proposées pour chaque question. Une seule des réponses est correcte. Le candidat écrira sur sa copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse est noté zéro point et chaque réponse correcte est notée 1 point.

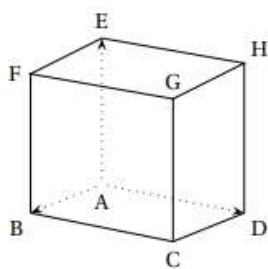
1) La primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x \cos x$  qui prend la valeur 1 en 0 est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$x \mapsto \frac{x^2}{2} \sin x + 1$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} \sin x - 1$	$x \mapsto x \sin x + \cos x$	$x \mapsto \cos x - x \sin x$

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos 4x + 2 \sin 2x$ . On note  $(\Gamma)$  sa courbe représentative :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$f$ est paire	$f'(x) = 4 \sin 2x (1 - \sin 2x)$	$(D): x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de $(\Gamma)$	$f$ est périodique de période $\frac{\pi}{4}$

3)



$ABCDEFGH$  est un cube de côté 1. On considère le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .  $L$  est le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs 1 et 3

Les coordonnées de  $L$  sont :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$(\frac{1}{4}; 0; 0)$	$(\frac{3}{4}; 0; 0)$	$(\frac{2}{3}; 0; 0)$	$(\frac{1}{4}; 1; 3)$

4) La forme exponentielle du nombre complexe  $Z = 1 + \cos x + i \sin x$  avec  $x \in ]\pi; 2\pi[$  est :

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
$2 \cos \frac{x}{2} e^{ix}$	$-2 \cos \frac{x}{2} e^{ix}$	$2 \cos \frac{x}{2} e^{i(\pi + \frac{x}{2})}$	$-2 \cos \frac{x}{2} e^{i(\pi + \frac{x}{2})}$

## EXERCICE 2 : (Restitution organisée des connaissances et Arithmétique - 6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes, les questions de la partie A sont aussi indépendantes.

### Partie A : ( Restitution organisée des connaissances )

1) On rappelle les propriétés suivantes du produit vectoriel dans l'espace qui pourront être utilisées en cas de besoin.

$$* \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} ;$$

$$* \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} ; \quad * \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

\* Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs produit vectoriel est nul.

$A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés de l'espace. Démontrer que l'aire du triangle  $ABC$  est égale à  $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$  ( en unités d'aire ).

- 2) a)  $x$  et  $y$  sont deux nombres entiers relatifs et  $n$  un nombre entier naturel. Définir :  $x \equiv y[n]$   
b) Démontrer que pour tout triplet d'entiers relatifs  $(x, y, z)$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $(x \equiv y[n] \text{ et } y \equiv z[n]) \Rightarrow x \equiv z[n]$ .

### Partie B : ( Arithmétique )

- $R$  et  $S$  sont deux nombres entiers naturels tels que  $R$  s'écrit  $\overline{1a3a}^4$  et  $S$  s'écrit  $\overline{bca35}^7$ .
- 1) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel  $a$ , le reste de la division euclidienne de  $6^n$  par 11.
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $7x + y = 46$ .
- 3) Sachant que  $R$  est divisible par 11 et que le couple  $(b; c)$  est solution de l'équation  $7x + y = 46$ , donner l'écriture de  $R$  en base 4 et de  $S$  en base 7.
- 4) Ecrire  $R$  et  $S$  dans le système décimal.
- 5) a) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système  $\begin{cases} PPCM(u; v) = 170 \\ PGCD(u; v) = 5 \end{cases}$  d'inconnues  $(u; v)$   
b) En déduire les solutions du système  $\begin{cases} PPCM(u; v) = 170 \\ PGCD(u + v; uv) = 5 \end{cases}$

## EXERCICE 3 : ( Géométrie dans l'espace – 4 points )

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les plans  $(P)$  et  $(Q)$  d'équations respectives  $x + y + z = 0$  et  $2x + 3y + z - 4 = 0$ .

- 1) Montrer que l'intersection des plans de  $(P)$  et  $(Q)$  est une droite  $(D)$  dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$
 où  $t$  est un nombre réel
- 2) Soit  $\lambda$  un nombre réel ; on considère le plan  $(P_\lambda)$  d'équation cartésienne :  
 $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$
- Vérifier que le vecteur  $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$  est un vecteur normal au plan  $(P_\lambda)$ .
  - Donner la valeur du nombre réel  $\lambda$  pour laquelle les plans  $(P_\lambda)$  et  $(P)$  sont confondus.
  - Existe-t-il un nombre réel  $\lambda$  pour lequel les plans  $(P_\lambda)$  et  $(P)$  sont perpendiculaires ?
- 3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D')$  intersection des plans  $(P_{-1})$  et  $(P)$ .  
Montrer que les droites  $(D)$  et  $(D')$  sont confondus.
- 4) On considère le point  $A(1; 1; 1)$ . Déterminer la distance du point  $A$  à la droite  $(D)$ .

**EXERCICE 4 : ( Fonction dépendant d'un paramètre – 6 points )**

Pour tout réel , On désigne par  $f_a$  la fonction définie par  $f_a(x) = \ln(x^2 + a)$ .

- 1) a) Indiquer suivant les valeurs de  $a$  , l'ensemble de définition de  $f_a$
  - b) Donner les différents tableaux de variations de  $f_a$  selon les valeurs de  $a$
  - c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x}$  et en déduire la nature des branches infinies des courbes de la fonction  $f_a$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  , et lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .
  - d) On désigne par  $(C_a)$  et  $(C_{a'})$  les courbes représentatives des fonctions  $f_a$  et  $f_{a'}$  ( $a \neq a'$ ). Soit  $M$  le point de  $(C_a)$  et  $M'$  le point de  $(C_{a'})$  de même abscisse. Montrer que  $MM'$  est non nulle. Que peut on en déduire pour  $(C_a)$  et  $(C_{a'})$  ? Montrer que  $MM'$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$
  - d) Tracer dans le même repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  , ( unité 2cm ) , les courbes  $(C_{-1})$  ,  $(C_0)$  et  $(C_1)$ . Les trois courbes doivent être figurées sur un même graphique. Préciser les points d'intersections avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.
- 2) Dans cette question on pose  $a = \frac{3}{4}$  ; on se propose d'étudier la position de  $(C_{\frac{3}{4}})$  par rapport à la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  pour  $x$  positif. A cet effet on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = x - \ln(x^2 + \frac{3}{4})$ .
    - a) Etudier le sens de variation de  $g$  et en déduire la position de  $(C_{\frac{3}{4}})$  par rapport à la droite  $(D)$ .
    - b) Soit  $h$  la restriction de  $f_{\frac{3}{4}}$  à  $\mathbb{R}_+$  ; montrer que  $h$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  vers un ensemble que l'on précisera.
    - c) Tracer la représentation de  $h$  et  $h^{-1}$  dans un repère orthonormé.



BACCALAUREAT BLANC / SESSION DE AVRIL 2024  
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SERIE : C

Coefficient : 5 Durée : 4 heures

**EXERCICE 1 : QCM**

**(5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, une seule d'entre elles est exacte. Chaque réponse donne un point, une réponse fautive ou une absence de réponse n'enlève aucun point. Pour chacune des 5 questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse exacte.

1°) Soit  $f$  la similitude directe d'écriture complexe :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ . Alors l'expression analytique de  $f$  est :

A : 
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

B : 
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

C : 
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

D : Aucune réponse proposée n'est correcte.

2°) On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + 4y = 8e^x$ . Laquelle des fonctions suivantes est solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant les conditions  $y(0) = 2$  et  $y'(\pi) = 0$

A :  $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{-2\pi} \sin(2x)$

B :  $y(x) = e^{-2x} + \cos(2x) + e^{2\pi} \sin(2x)$

C :  $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{2\pi} \sin(2x)$

D : Aucune réponse proposée n'est correcte

3°) Les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $5x \equiv 2[4]$  sont les entiers :

A :  $x = 3k + 2; k \in \mathbb{Z}$

B :  $x = 4k + 2; k \in \mathbb{Z}$

C :  $x = k + 2; k \in \mathbb{Z}$

D : Aucune des réponses proposées n'est juste

4°) Soit  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_n(x) = \cos^n(x)$ . On note  $(H_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2cm. La fonction  $h_n$  est positive sur :

A :  $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$  ;

B :  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  ;

C :  $]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$  ;

D :  $]0; \pi[$

5°) Une primitive sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $f: x \rightarrow \tan(x)$  qui prend la valeur 2 en 0 est :

A :  $x \rightarrow \ln(x + e^2)$  ;

B :  $x \rightarrow \frac{2}{\cos^2(x)}$

C :  $x \rightarrow -2 \ln \sqrt{\cos(x)} + 2$  ;      D : Aucune des réponses proposées n'est juste.

## **EXERCICE 2 : Isométries du plan – similitude.**

**(4 points)**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que :  $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ . On désigne par  $R_A$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ,  $R_B$  la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $R_C$  la rotation de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . D et E sont les points tels que  $R_B(A) = D$  et  $R_C(D) = E$ .

1°) a) Déterminer l'image du point B par  $f = R_C \circ R_B \circ R_A$ , puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

b) En déduire que B est le milieu de  $[AE]$ .

2°) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude direct  $S$  qui transforme A en B et E en D.

3°) Soit  $\Omega$  le centre de la similitude direct  $S$ .

a) Montrer que  $\Omega$  appartient au cercle circonscrit aux triangles ABC et DBE.

b) Construire  $\Omega$ .

4°) a) Démontrer que  $S$  transforme la droite  $(AC)$  en  $(CB)$ .

b) Démontrer que l'image par  $S$  du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre  $[BD]$ .

c) En déduire que l'image de C par la similitude direct  $S$  est le milieu du segment  $[DE]$ .

## **PROBLEME :**

**(11 points)**

### **PARTIE A : (Equation différentielle avec second membre.)**

Soit l'équation différentielle  $(E)$  :  $y' + y = e^{-x}$ .

1°) Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  :  $y' + y = 0$ .

2°) Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tel que  $g(x) = (ax + b)e^{-x}$  soit une solution de  $(E)$  vérifiant la condition  $g(0) = 1$ .

3°) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .

4°) En déduire la solution de  $(E)$  qui s'annule en 1.

### **PARTIE B : (Etude d'une fonction)**

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = xe^{-x}$ .  $(C_\varphi)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 2cm.

1°) Etudier les variations de la fonction  $\varphi$ , puis dresser son tableau de variation complet.

2°) On pose pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :  $I_n = \int_1^n \varphi(x) dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :  $I_n = \frac{2}{e} - (n + 1)e^{-n}$

b) En déduire la limite de la suite  $I_n$ .

3°) a) Montrer que la restriction  $h$  de la fonction  $\varphi$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à préciser.

b) Sur le même graphique, construire  $(C_\varphi)$  et  $(C')$ , courbe représentative de la fonction  $h^{-1}$ , la fonction réciproque de  $h$ .

### **PARTIE C : (Encadrement d'une suite)**

Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel non nul  $n$  par :

$$U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n} = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$$

1°) Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.

2°) a) Soit  $k$  un entier naturel non nul. Montrer que si  $k \leq t \leq k + 1$ , alors on a :

$$\varphi(k + 1) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(k)$$

b) En déduire que :  $ne^{-n} + \int_1^n \varphi(t) dt \leq U_n \leq e^{-1} + \int_1^n \varphi(t) dt$

c) Prouve que la suite  $(U_n)$  est convergente et encadrer sa limite.



<b>Baccalauréat Blanc</b> <b>Session d'avril 2024</b>	Séries: C&SI Durée: 4 heures Coefficient: 5
<b>Epreuve de Mathématiques</b>	

**Exercice 1:..... QCM (Questionnaire à Choix Multiples ).....(4points)**

Pour chacune des questions posées, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Aucune justification n'est demandée. Reporter sur la copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse vaut **1pt**, une mauvaise ou une absence de réponse vaut **0 pt**.

1. Soit  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[$ . On donne dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - [1 + i(\sin \alpha + \tan \alpha)]z + (i - \tan \alpha) \sin \alpha = 0$  admettant une solution imaginaire pure. Alors les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de cette équation sont :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$z_1 = i \cos \alpha$ et $z_2 = i \sin \alpha$	$z_1 = -\frac{1}{\cos \alpha} e^{i(\pi+\alpha)}$ et $z_2 = i \sin \alpha$	$z_1 = \cos \alpha - i \sin \alpha$ et $z_2 = i(\cos \alpha + \tan \alpha)$	$z_1 = 1 - i \tan \alpha$ et $z_2 = i \cos \alpha$ .

2. La valeur moyenne sur  $[0 ; 1]$  de la fonction  $f: x \mapsto x^3 e^{3x}$  est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{4e^3+2}{27}$	$\frac{8 - 2e^3}{27}$	$\frac{3e^3-2}{27}$	Aucune réponse

3. L'écriture algébrique du complexe  $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2024}$  est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	Aucune réponse

4. Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules vertes et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.

Le nombre des tirages contenant exactement 2 boules rouges est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
300	100	125	Aucune réponse

**Exercice2.....Arithmétiques-Equations différentielles..... (5 points)**

Les parties I et II étant indépendantes ; l'élève pourra commencer par la partie qui lui paraîtra plus facile.

**Partie I : .....Arithmétiques.....**

1. Soit  $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12}$  un nombre entier naturel écrit en base 12.
  - a) Montrer que  $N \equiv a_0 [3]$  puis en déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
  - b) Montrer que  $N \equiv \sum_{p=0}^n a_p [11]$  puis en déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
2. Soit l'entier naturel  $M = 999888777666555444333222111$ .
  - a) Montrer que  $M = \sum_{k=1}^9 111k \times 10^{3(k-1)}$ .
  - b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $M$  par 7.

**Partie II : .....Equations différentielles.....**

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , solutions de l'équation différentielle (E):  $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$ .

1. Montrer que la fonction  $f: x \mapsto e^{-x}(\ln x)$  appartient à  $\mathcal{F}$ .
2. Résoudre l'équation différentielle (E'):  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .
3. Montrer qu'une fonction  $g$  appartient à  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $g - f$  est solution de (E').
4. En déduire l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

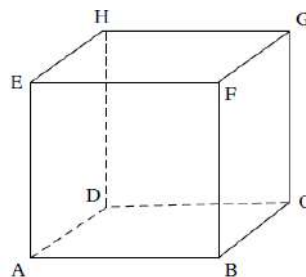
**Exercice3 : .....Géométrie dans l'espace-Similitudes directes planes..... (5points)**

Les parties I et II étant indépendantes ; l'élève pourra commencer par la partie qui lui paraîtra plus facile.

**Partie I : .....Géométrie dans l'espace.....**

La figure ci-dessous est un cube ABCDEFGH d'arrête 1. Dans tout l'exercice, on munit l'espace du repère orthonormé  $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ . On désigne par K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Soit M un point du segment [HG]. On note  $m = HM$  où  $m$  est un réel appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .



1. Montrer que le point K a pour coordonnées  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ .
2. Montrer que pour tout  $m \in [0; 1]$ , le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume est égal à  $:\frac{1}{6}$ .
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est  $:(-1 + m)x + y - mz = 0$ .
4. On note  $d_m$  la distance du point E au plan (MFD).
  - a) Montrer que pour tout réel  $m \in [0; 1]$ , on a  $:d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$ .
  - b) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance  $d_m$  est maximale.
  - c) En déduire que lorsque  $d_m$  est maximale, K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

**Partie II : ..... Similitudes directes planes.....**

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par  $f$  l'application du plan dans le plan qui à tout point  $M(x; y)$  associe le point  $M'(x'; y')$  tels que:  $\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ .

On donne  $A(-1; 1)$  et  $B(0; 6)$  deux points du plan.

- 1.a) On pose :  $z' = x' + iy'$  et  $z = x + iy$ . Montrer que :  $z' = (-1 + i)z + 2 - i$ .
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe  $s$  du plan qui à tout point  $M$  associe le point  $G$  isobarycentre des points  $M, M'$  et  $M''$  où  $M' = f(M)$  et  $M'' = f \circ f(M)$ .
3. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe plane  $g$  qui transforme  $A$  en  $B$  et qui laisse invariant le point  $O$ .

**Exercice4 : ..... Etude d'une famille des fonctions, Suites numériques et Intégrales.....(6points)**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$ .  
On désigne par  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2cm.

**Partie: A..... Etude d'une famille des fonctions.....**

- 1.a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$  suivant la parité de  $n$ .
- c) Donner une interprétation graphique des résultats précédents.
2. Etudier le sens de variation de  $f_n$  suivant la parité de  $n$ .
3. Dresser le tableau de variation complet de  $f_n$  puis en déduire son signe sur  $\mathbb{R}$ , suivant la parité de  $n$ .
4. Etudier les positions relatives des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$  suivant la parité de  $n$ .
5. Construire dans le même repère les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .
6. a) Vérifier que pour tout réel  $x$ , on a :  $f'_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$ .
- b) En déduire en  $cm^2$  l'aire du domaine plan délimité par les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = -1$ .

**Partie: B..... Suite définie par une intégrale.....**

Soit  $\alpha$  un réel fixe tel que :  $0 \leq \alpha < 1$  et on définit sur  $\mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  par :  $u_n = \int_{\alpha}^1 f_n(t) dt$ .

1. Calculer  $u_0$  et  $u_1$  en fonction de  $\alpha$ .
2. a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} e^{\alpha}$ .
- b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} = u_n - \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\alpha}$ .
- b) En déduire que  $u_n = e^{\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(1-\alpha)^k}{k!}$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(1-\alpha)^k}{k!}$ .  
Calculer la limite de  $S_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .



BACCALAUREAT BLANC 2024

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 3 pages numérotées de 1 à 3.

**EXERCICE 1 : Questions à choix multiples.../40 points**

Pour chacune des questions, **une seule des quatre propositions est exacte**. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une bonne réponse rapporte **10 points**, une mauvaise réponse fait perdre **10 points**, l'absence de réponse ne rapporte et ne fait perdre aucun point, si le total des points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Soit  $f$  la transformation du plan dont l'écriture complexe est  $z' = i\bar{z} + 1 + i$ . Laquelle des expressions suivantes est l'expression analytique de  $f \circ f$  ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

2. On donne le nombre complexe  $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{99}$ . Laquelle des expressions ci – dessous est l'écriture algébrique de  $z$  ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$z = 1 + i$	$z = 0$	$z = 1$	$z = 1 - i$

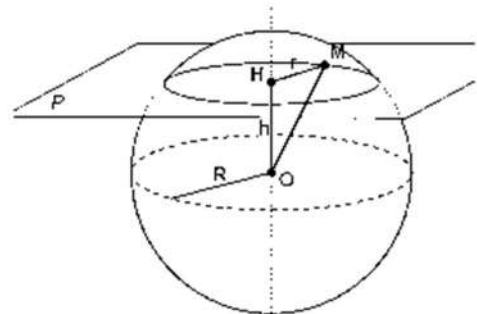
3. Dans l'espace on considère deux points A et B. On désigne par I le milieu du segment  $[AB]$  et par  $(\Gamma)$  l'ensemble des points M de l'espace tel que  $MA^2 - MB^2 = 0$ . Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(\Gamma)$ est la sphère de diamètre $[AB]$	$(\Gamma)$ est le plan médiateur du segment $[AB]$	$(\Gamma)$ est la sphère de centre I et rayon 2	$(\Gamma)$ est le plan passant par B et de vecteur normal $\vec{AB}$

4. L'espace étant muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère ci – contre la section  $(C)$  de la sphère de centre O et de rayon  $R = 4$  par le plan  $(P): x - y + z - 6 = 0$ .

Laquelle des affirmations ci – dessous est correcte ?



Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(C)$ est le cercle de centre $H(3; -3; 3)$ et rayon $r = 2$	$(C)$ est le cercle de centre $H(0; 0; 3)$ et rayon $r = 4$	$(C)$ est le cercle de centre $H(3; -1; 3)$ et rayon $r = 2$	$(C)$ est le cercle de centre $H(3; -3; 3)$ et rayon $r = 4$

**EXERCICE 2 : Congruences – Bases de numération – Critères de divisibilité.../40 points****Partie A : Restitution organisée des connaissances**

Démontrer que si  $a \equiv b \pmod{12}$  et  $c \equiv d \pmod{12}$  alors

1.  $a + c \equiv b + d \pmod{12}$
2.  $a \times c \equiv b \times d \pmod{12}$

**Partie B : Critères de divisibilité et bases de numération**

On note  $0, 1, 2, \dots, 9, A, B$  de l'écriture d'un entier naturel en base 12

1. Soit  $N_1 = \overline{A1B}^{12}$  un entier en base 12 et  $N_2 = 1131$  un entier en base 10
  - a) Déterminer l'écriture de  $N_1$  en base 10
  - b) Déterminer l'écriture de  $N_2$  en base 12
2. Dans toute la suite de l'exercice, un entier naturel en base 12 s'écrira de manière générale  $N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}$ .
  - a) Démontrer que  $N \equiv a_0 \pmod{3}$
  - b) En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un entier en base 12.
  - c) A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_2$  est divisible par 3.
3. a) Démontrer que  $N \equiv \sum_{k=0}^n a_k \pmod{11}$ 
  - b) En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un entier naturel écrit en base 12.
  - c) A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_1$  est divisible par 11.
4. Un entier  $N$  s'écrit  $N = \overline{x4y}^{12}$ . Déterminer  $x$  et  $y$  tels que  $N$  soit divisible par 33.

**PROBLEME : Etude d'une fonction exponentielle – Suites numériques – Intégrales – Notation sigma.../120 points**

Le plan est muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 4cm. On désigne par  $K$  l'intervalle  $]0; +\infty[$

**Partie A : Etude de la fonction  $f$** 

On appelle  $f_0$  et  $f_1$  les fonctions définies sur  $K$  par :  $f_0(x) = e^{-x}$  et  $f_1(x) = xe^{-x}$ ,  $(C_0)$  et  $(C_1)$  leurs représentations graphiques respectives.

1. a) Déterminer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .  
b) Etudier le sens de variations de  $f_1$  sur  $K$ , puis dresser son tableau de variations.
2. a) Vérifier que pour tout  $x \in K$ ,  $f_1'(x) = f_0(x) - f_1(x)$ .  
b) En déduire les positions relatives de  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .
3. a) Comment peut-on construire  $(C_0)$  à partir de la courbe d'équation  $y = e^x$ ? Construire  $(C_0)$ .  
b) Placer les points de  $(C_1)$  d'abscisses respectives 0, 1 et 2 en précisant les tangentes à  $(C_1)$  en ces points.  
c) Construire  $(C_1)$  sur la même figure que  $(C_0)$ .

**Partie B : Etude d'une famille de fonctions  $f_n$** 

On se propose de fabriquer à la suite de  $f_0$  et  $f_1$  les fonctions  $f_2, f_3, \dots, f_n$  dérivable sur  $K$  telles que :

Pour tout  $x \in K$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul : 
$$\begin{cases} f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \\ f_n(0) = 0 \end{cases} \quad (2), \text{ on note } (C_n) \text{ la courbe}$$

représentative de la fonction  $f_n$  ainsi définie.

1. On pose pour tout  $x \in K$ ,  $g_n(x) = e^x f_n(x)$

a) Calculer  $f_n'(x)$  en fonction de  $g_n(x)$  et de  $g_n'(x)$

b) Montrer que  $f_n$  Vérifier la relation (2) si et seulement si pour tout  $x \in K$  : 
$$\begin{cases} g_n'(x) = e^x f_{n-1}(x) \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

2. a) Calculer  $g_2'(x)$  puis  $g_2(x)$ . En déduire  $f_2(x)$

b) Montrer par récurrence que pour tout  $x \in K$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ .

**NB** : On rappelle que pour  $n \geq 1$ ,  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

**Partie C** : Etude d'une suite définie par une intégrale

Soit  $a$  un réel non nul de  $K$ , pour tout entier naturel  $n$  on pose  $I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx$

1. Calculer  $I_0(a)$ .

2. a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}$ .

b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n(a) = 1 - \left( \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$ .

3. On appelle  $(u_n)$  la suite numérique définie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 1 - \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) e^{-1}$

a) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , donner une interprétation géométrique de  $u_n$

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in [0;1]$ ,  $f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$ . En déduire que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ .

c) Calculer la limite de  $u_n$ , en déduire que  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$