

COLLECTION PYRAMIDE



Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

le
T A

CORRIGÉS DES EXERCICES



JD Editions
L'Édition autrement

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

COLLECTION PYRAMIDE



Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques



CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

	Pages
Leçon 1 : Étude de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles	5
Leçon 2 : Probabilité	45
Leçon 3 : Primitives et calcul intégral	71
Leçon 4 : Fonction logarithme népérienne	90
Leçon 5 : Fonction exponentielle népérienne	128
Leçon 6 : Série statistique double	167
Leçon 7 : Suites numériques	187
Leçon 8 : Systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	219

*Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com*

I- Situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	Lors de la visite des élèves d'une classe de terminale à leur camarade malade depuis trois jours
Circonstances	Quel est la préoccupation du père ?	Il se demande pour quelle vitesse, la consommation de son camion est minimale.
Tâche	Qu'ont décidé les élèves de faire pour aider le père de leur camarade ?	Les élèves de terminale A décident d'étudier la fonction C afin de déterminer la vitesse du camion pour laquelle la consommation est minimale.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Activité 1 : Limite d'une fonction polynôme en un point

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction polynôme en un point.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Complétons le tableau

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	0,99	0,9999	0,999999	1	0,999999	0,9999	0,99

2- On constate que $f(x)$ se rapproche de 1 lorsque x est de plus en plus proche de 2. On dit que « $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 2 » ou encore « la fonction f a pour limite 1 en 2 ». On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

3- On a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

a) F ; b) F ; c) V ; d) F

Exercice 2

a)

Exercice 3

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 5x - 1) = 35$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} (8x^2 + x) = 195$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 4x^2 + x - 7) = -5$

Exercice 4

1- B ; 2- A ; 3- C ; 4- B ; 5- A

Activité 2 : Limite à l'infini d'un monôme

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite à l'infini d'un monôme.
- Réponses aux questions de l'activité
 1. Calculs
 - 2.

Complète le tableau ci-dessous

$f(x)$	-2	4	x^2	x^3	$-2x^2$	$-2x^3$	$4x^2$	$4x^3$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	-2	4	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	-2	4	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 5

1-F 2-F 3-V 4-F

Exercice 6

1-F 2-F 3-V 4-F

Exercice 7

1-F 2-V 3-V 4-F 5-V 6-F

Exercice 8

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 19 = 19$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -\infty$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2) = -\infty$

Activité 3 : Limite à l'infini d'une fonction polynôme

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite à l'infini d'une fonction polynôme.
- Réponses aux questions de l'activité
 - 1) $-2x^3$ est le monôme de plus haut degré de f
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$
 - 3) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3)$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 9

- 1- B ; 2- C ; 3- A ; 4- C

Exercice 10

- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$

Exercice 11

- a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

Activité 4 : Limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Complétons le tableau

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	2,42	2,492	2,499	2,5	2,5007	2,507	2,576

2- On constate que $g(x)$ se rapproche de 2,5 lorsque x est de plus en plus proche de 3. On dit que « $g(x)$ tend vers 2,5 lorsque x tend vers 3 » ou encore « la fonction g a pour limite 2,5 en 3 ».

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2,5$

3- On a $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 12

1) F ; 2) V ; 3) F ; 4) F

Exercice 13

a)

Exercice 14

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{17}{3}$ c) 0

Exercice 15

1- B ; 2- A ; 3- C ; 4- A

Activité 5 : Limite à gauche (respectivement à droite) en a de la

fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x-a}$

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite à gauche (respectivement à droite) en a de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

- Réponses aux questions de l'activité

1)

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

- 2) Lorsque x se rapproche par valeurs inférieures de 1, $f(x)$ devient de plus en plus grand en valeur absolue.
- 3) Lorsque x se rapproche par valeurs supérieures de 1, $f(x)$ devient de plus en plus grand.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 16

a)F b)V c)V d)F

Exercice 17

a)+ ∞ b) - ∞ c) - ∞ d)+ ∞ e)- ∞ f)+ ∞

Activité 6 : Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle.
- Réponses aux questions de l'activité
 - 1) $n(x) = 2x^3$
 - 2) $d(x) = x^2$
 - 3) On a pour $x \neq 0$, $\frac{n(x)}{d(x)} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x$
 - 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$
 - 5) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(x)}{d(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$
donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 18

- a) F b) F c) F d) V

Exercice 19

- a) 2 b) 2 c)-1 d) 0

Exercice 20

- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

Activité 7 : Limite d'une somme de deux fonctions

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une somme de deux fonctions.
- Réponses aux questions de l'activité
1- Recopie et complète le tableau

8	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
10	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
18	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
				On ne peut conclure

2a) Il y a égalité entre ces deux limites.

b) Il y a égalité entre ces deux limites.

c) Il y a égalité entre ces deux limites.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21

- a) V b) F

Exercice 22

$$\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + g(x)) = -\frac{19}{2}$$

Activité 8 : Limite d'un produit de deux fonctions

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'un produit de deux fonctions.
 - Réponses aux questions de l'activité
- 1- Recopie et complète le tableau

8	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
6	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
48	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	1
					On ne peut conclure

- 2- a) Il y a égalité entre ces deux limites.
b) Il y a égalité entre ces deux limites.
c) Il y a égalité entre ces deux limites.

3- Non

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 23

a) V b)F c)V d)F

Exercice 24

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \times g(x)) = 9$$

Exercice 25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$$

Activité 9 : Limite d'un quotient de deux fonctions

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'un quotient de deux fonctions.
- Réponses aux questions de l'activité.

1)

a- $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 1) = -2$

b- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$

c- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$

2)

a- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$

b- Non, on ne peut conclure.

3) On veut calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x+3}$

a- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty$

b- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x+3} = 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \times \frac{1}{2x+3} = 0$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 26

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{9}{4} ; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x-5}{x-5} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{x+2} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x-1}{x-3} =$$

$$-\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-4x+2}{-7} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-6x+2}{3} = +\infty$$

Exercice 27

1. F 2. F 3. V 4.F

Exercice 28

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{21}$$

Exercice 29

a)0 b)0 c)0 d)0

Exercice 30

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Exercice 31

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x+1} = 2$$

Activité 10 : Notion d'asymptote verticale

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une asymptote verticale.
- Réponses aux questions de l'activité.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} \frac{3x+2}{x-1} = +\infty$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 32

La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

Activité 11 : Notion d'asymptote horizontale

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une asymptote horizontale.
- Réponses aux questions de l'activité.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 33

1. Vérification correcte
2. La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à (C).

Activité 12 : Notion d'asymptote oblique

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une asymptote oblique.
- Réponses aux questions de l'activité.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 34

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

La droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique à (C).

Exercice 35

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x)] = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C).

Activité 13 : Théorème des valeurs intermédiaires

- L'objectif de cette activité est de connaître le théorème des valeurs intermédiaires.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point compris entre 0 et 1.
 2. $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$
 3. $g(0) \times g(1) < 0$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 36

1-V 2-F 3-F 4-V

Activité 14 : Méthode de dichotomie

- L'objectif de cette activité est d'encadrer la solution d'une équation en utilisant la méthode de dichotomie.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. f est dérivable sur \mathbb{R} donc elle est dérivable sur $[1; 2]$.
 $f(1) \times f(2) < 0$ donc l'équation (E) possède une solution α comprise entre 1 et 2.
 2. On répète cette méthode dans l'intervalle donné
 3. On répète cette méthode dans l'intervalle donné
 4. On répète cette méthode dans l'intervalle donné
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 37

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5.$$

f est dérivable sur \mathbb{R} et décroissante sur $[-4; -3]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4; -3]$.

$$f(-4) \times f(-3,5) > 0 \text{ donc } \alpha \in [-3,5; -3]$$

$$f(-3,5) \times f(-3) < 0 \text{ donc } \alpha \in [-3,5; -3,25]$$

$$f(-3,5) \times f(-3,25) < 0 \text{ donc } \alpha \in [-3,5; -3,375]$$

$$f(-3,5) \times f(-3,375) < 0 \text{ donc } \alpha \in [-3,5; -3,4375]$$

Donc $-3,5 < \alpha < -3,4$

Activité 15 : Méthode de balayage

- L'objectif de cette activité est d'encadrer la solution d'une équation en utilisant la méthode de balayage.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- Tableau

$f(1,01)$	$f(1,02)$	$f(1,03)$	$f(1,04)$	$f(1,05)$	$f(1,06)$	$f(1,07)$	$f(1,08)$	$f(1,09)$	$f(1,1)$
-	-	-	-	-	-				

Poursuivre jusqu'à avoir un signe positif

2- Justification

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 37

$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,4)$	$f(0,5)$	$f(0,6)$	$f(0,7)$	$f(0,8)$	$f(0,9)$	$f(1)$
-	-	-	-	-	-	+	+	+	+

Donc $0,6 < \alpha < 0,7$

Activité 16 : Etude d'une fonction polynôme

- L'objectif de cette activité est d'étudier une fonction polynôme.
- Réponses aux questions de l'activité.
 - 1- f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur \mathbb{R}
 - 2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - 3- Justification.
 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Utiliser le discriminant pour factoriser
 - 4- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[, f'(x) > 0$
 $\forall x \in]-1; \frac{1}{3}[, f'(x) < 0$
 $\forall x \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}, f'(x) = 0$
 - 5- f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.
 f est strictement décroissante sur $]-1; \frac{1}{3}[$
 - 6- Tableau de variation
 - 7- f est dérivable sur \mathbb{R} donc sur $[-2; -1]$ de plus $f(-2)$ et $f(-1)$ sont de signes contraires donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution α comprise entre -2 et -1
 - 8- justification correcte. (Balayage ou dichotomie)
 - 9- Tracé de la courbe
 - 10- a) tracé de la droite (D)
b) Détermination graphique
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 39

Etude de fonction

Activité 17 : Etude d'une fonction rationnelle

- L'objectif de cette activité est d'étudier une fonction rationnelle.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- a) $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $D_g =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$$

2- a) justification

b) $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$

$$\forall x \in]0; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 0[, g'(x) < 0$$

c) g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$
 g est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; 0[$

d) tableau de variation

3- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = 0 \text{ donc la droite d'équation}$$

$y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_g)

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$ donc la droite d'équation

$x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (C_g)

c) Représentation graphique

4- a) construction de la courbe (C_g)

b) résolution graphique

c) vérification algébrique

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 40 Etude de la fonction rationnelle g .

III-DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment calculer la limite à gauche ou à droite en $\frac{b}{a}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{ax-b}$?

Solution de l'exercice non corrigé

a) $-\infty$ b) $-\infty$

Question 2 : Comment calculer la limite d'une fonction rationnelle en un point qui annule le dénominateur et n'annule pas le numérateur ?

Solution de l'exercice non corrigé

a) $-\infty$ b) $+\infty$

Question 3 : Comment démontrer qu'une droite dont une équation est donnée est asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction rationnelle ?

Solution de l'exercice non corrigé

$$f(x) - (3x + 1) = \frac{3x^2 + x + 2}{x} - (3x + 1)$$

$$f(x) - (3x + 1) = \frac{2}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$, que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

Question 4 : Comment démontrer que l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction polynôme ou rationnelle, admet une solution unique sur un intervalle borné en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ?

Solution de l'exercice non corrigé

g est dérivable sur \mathbb{R} car g est une fonction polynôme.

$$g'(x) = 3x^2 - 4, \text{ donc } g'(x) = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

$\forall x \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right], g'(x) \leq 0$, donc la fonction g est décroissante sur $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[, g'(x) \geq 0$ donc la fonction g est croissante sur les intervalles $\left]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ et $\left]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$.

Or $[-3; -2] \subset \left]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ donc la fonction g est croissante sur $[-3; -2]$

$$g(-3) = -13 \text{ et } g(-2) = 2.$$

On a $g(-3) \times g(-2) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-3; -2]$

Question 5 : Comment déterminer le sens de variation d'une fonction polynôme ou rationnelle ?

Solution de l'exercice non corrigé 1

f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ son ensemble de définition. On a : $f'(x) = \frac{(x+4)'(x+1) - (x+1)'(x+4)}{(x+1)^2}$

$$\text{C'est-à-dire } f'(x) = \frac{(x+1) - (x+4)}{(x+1)^2}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

Déterminons le signe de $g'(x)$

Le signe de $g'(x)$ est celui de -3 qui est négatif,

car $(x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Interprétons le signe de la dérivée

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$

Solution de l'exercice non corrigé 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x^2 - x + 2$$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$. g est strictement croissante sur \mathbb{R} ,

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

➤ Exercices de fixation

✓ Limite d'une fonction polynôme en un point

Exercice 1

1) F ; 2) F ; 3) V ; 4) F

Exercice 2

1- C ; 2- B ; 3- C ; 4- C

Exercice 3

1- V ; 2- F ; 3- F ; 4- V

Exercice 4

1) 0 ; 2) 3 ; 3) 10 ; 4) 10

✓ Limite à l'infini d'une fonction polynôme

Exercice 5

1) V ; 2) F ; 3) F ; 4) V ; 5) V ; 6) F

Exercice 6

1) $-\infty$; 2) $-\infty$; 3) $-\infty$; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$

✓ Limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie

Exercice 7

1) 4 ; 2) $\frac{15}{7}$; 3) $\frac{13}{9}$; 4) $\frac{1}{3}$

✓ Limite à gauche, limite à droite en a d'une fonction rationnelle

Exercice 8

1- V ; 2- F ; 3- V ; 4- F

Exercice 9

1) $-\infty$; 2) $-\infty$; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$

✓ Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

Exercice 10

1) V ; 2) F ; 3) V ; 4) V ; 5) F

Exercice 11

1) $\frac{1}{2}$; 2) 0 ; 3) $-\infty$; 4) 0 ; 5) 1

✓ Limites et opérations sur les fonctions

Exercice 12

1) 7 ; 2) $+\infty$; 3) $-\infty$; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$; 6) On ne peut conclure

Exercice 13

1) -10 ; 2) $+\infty$; 3) $-\infty$; 4) $-\infty$; 5) $+\infty$; 6) $+\infty$; 7) $+\infty$; 8) $-\infty$; 9) On ne peut conclure ; 10) On ne peut conclure.

Exercice 14

1) -4 ; 2) 0 ; 3) 0 ; 4) $+\infty$; 5) $-\infty$; 6) $+\infty$; 7) $-\infty$; 8) On ne peut conclure.

Exercice 15

1) $-\infty$; 2) $-\infty$; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$; 5) On ne peut conclure ; 6) On ne peut conclure ; 7) On ne peut conclure

Exercice 16

1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{7}{4}$; 3) 0 ; 4) $\frac{7}{5}$

✓ Dérivées de fonctions élémentaires

Exercice 17

1) $f'(x) = 0$; 2) $g'(x) = 2x$; 3) $h'(x) = 3x^2$; $l'(x) = 8x^7$

Exercice 18

1) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; 2) $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$; 3) $h'(x) = \frac{-3}{x^4}$; $l'(x) = \frac{-4}{x^5}$

✓ Dérivées et opérations sur les fonctions

Exercice 19

1) $g'(x) = 6x^2 + 8x - 5$; 2) $g'(x) = 2$; 3) $g'(x) = 0$;

4) $g'(x) = 14x - 3$;

5) $g'(x) = 20x^4 - 9x^2 - 1$

Exercice 20

1) $f'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$; 2) $f'(x) = \frac{-9}{(x-1)^2}$; 3) $f'(x) = \frac{3x^2+6x-5}{(x+1)^2}$;

4) $f'(x) = 4 - \frac{2}{x^2}$; 5) $f'(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2}$

Exercice 21

- a) $f'(x) = 2$; b) $g'(x) = x + 1$; c) $h'(x) = 12x^2 + 8x + 6$;
d) $l'(x) = 20x^3 + \frac{x}{2}$

Exercice 22

- a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; b) $g'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}$; c) $h'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

Exercice 23

- a) $f'(x) = 30x + 22$; b) $g'(x) = 4x + 11$;
c) a) $h'(x) = 8(4x + 1)$; d) $l'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

Exercice 24

- a) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$; b) $g'(x) = \frac{-6}{(2x-1)^2}$; c) $h'(x) = \frac{-14}{(4x-1)^2}$;
d) $l'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{(2x+3)^2}$

✓ Dérivées et sens de variation

Exercice 25

- 1) Pour $x \in]-\infty; -1]$, $f'(x) \leq 0$ et Pour $x \in [-1; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$
- 2) Pour $x \in]-\infty; \frac{1}{2}]$, $f'(x) \geq 0$ et Pour $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$
- 3) Pour $x \in]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et
Pour $x \in [-5; 1]$, $f'(x) \leq 0$
- 4) Pour $x \in]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ et
Pour $x \in [-1; \frac{1}{3}]$, $f'(x) \geq 0$
- 5) Pour $x \in]-\infty; 0]$, $f'(x) \geq 0$ et Pour $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$

Exercice 26

- 1) Pour $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$;
- 2) Pour $x \in]-\infty; 1]$, $f'(x) \leq 0$ et
pour $x \in [1; 3[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$;
- 3) Pour $x \in]-\infty; -2[\cup]-2; -1]$, $f'(x) \leq 0$ et
pour $x \in [-1; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$;
- 4) Pour $x \in]-\infty; -2]$, $f'(x) \leq 0$ et
pour $x \in [-2; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$

Exercice 27

pour $x \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$

pour $x \in [-1; 1[\cup]1; 3]$, $f'(x) \leq 0$

Exercice 28

f est croissante sur $]-\infty; -1]$

f est constante sur $[-1; 2]$

f est décroissante sur $[2; +\infty[$

Exercice 29

f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[3; +\infty[$.

f est décroissante sur $[0; 1[$ et sur $]1; 3]$.

Exercice 30

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$	
$f'(x)$	+		○	-		○	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 5		↘ 1		↗ $+\infty$	

Exercice 31

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-			+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ -2		↘ $-\infty$			↗ $+\infty$
						↘ 2	↗ $+\infty$

Exercice 32

f est décroissante sur $]-\infty; 0[$;

f est constante sur $]0; 7[$;

f est strictement croissante sur $]7; +\infty[$.

Exercice 33

Les fonctions f et i

✓ Equation de la tangente à une courbe

Exercice 34

1- (T) : $y = -2$

2- (T) : $y = -2x - 1$

Exercice 35

(T) : $y = 8x - 10$

✓ Théorème des valeurs intermédiaires ; méthodes de dichotomie, balayage

Exercice 36

f est dérivable et décroissante sur $[0; 1]$.

On a $f(0) = 3$ et $f(1) = -2$.

$f(0) \times f(1) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 37

1- f est dérivable et croissante sur $[1; 2]$.

On a $f(1) = -2$ et $f(2) = 3$.

$f(1) \times f(2) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; 2]$.

2- Justification de $1,4 < \alpha < 1,5$

Exercice 38

1-V 2-F 3-V 4-V

Exercice 39

$1,4 < \alpha < 1,5$

Exercice 40

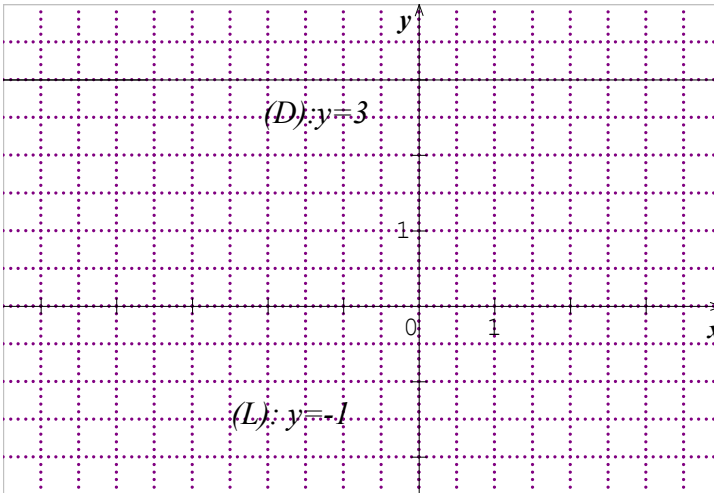
$$-1,7 < \alpha < -1,6$$

✓ Asymptotes à une courbe ; droites horizontales, verticales, obliques

Exercice 41

1) F ; 2) V ; 3) V ; 4) F

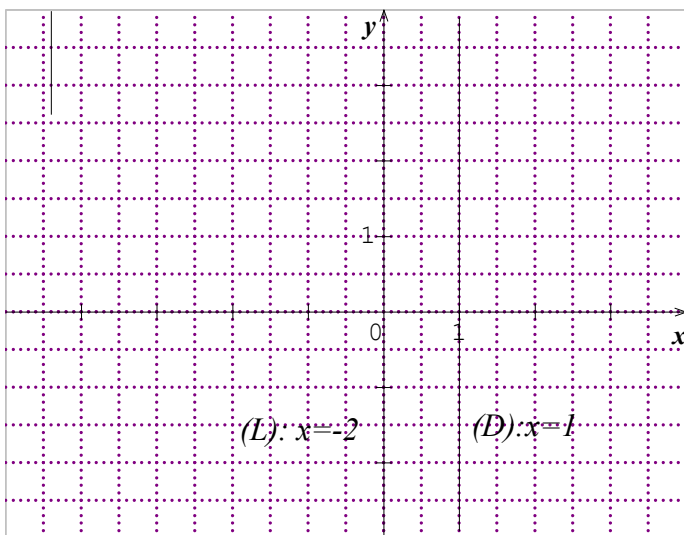
Exercice 42



Exercice 43

1) F ; 2) F ; 3) V ; 4) V

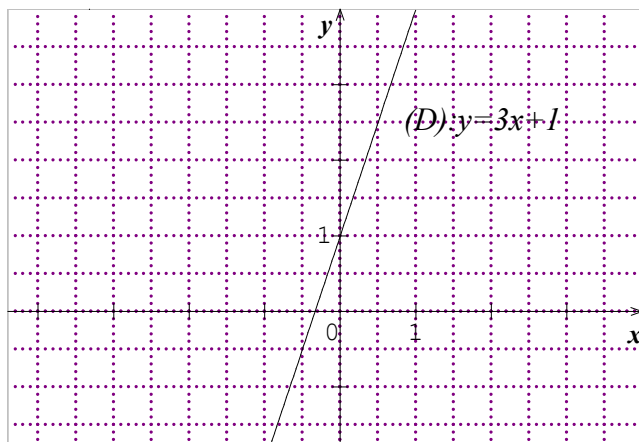
Exercise 44



Exercise 45

1) F ; 2) F ; 3) V ; 4) F

Exercise 46



Exercice 47

- 1) La droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à (C) .
- 2) La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C) .
- 3) La droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
- 4) La droite d'équation $y = 4x + 5$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

Exercice 48

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0$ donc la droite d'équation $y = -2x + 3$ est asymptote oblique à (C) .

Exercice 49

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x - 1)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x - 1)] = 0$ donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à (Cg) .

Exercice 50

(C) est en-dessous de la droite (D) sur $] -\infty; 1[$

(C) est au-dessus de la droite (D) sur $] -\infty; 1[$

➤ Exercices de renforcement/ approfondissement

Exercice 51

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (Cf) .

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (Cf) .

Exercice 52

Sur $] -\infty; -2]$, la courbe (C) est en dessous de la droite (D) .

Sur $[-2; 0]$, la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) .

Sur $[0; 2]$, la courbe (C) est en dessous de la droite (D) .

Sur $[2; +\infty[$, la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) .

Exercice 53

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-3; 1[\cup [2; +\infty[$

Exercice 54

1- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x$

a) $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$

$\forall x \in]0; 2[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; 2[$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

2-a) f est dérivable et croissante sur $[2; 3]$.

On a $f(2) = -3$ et $f(3) = 1$.

$f(2) \times f(3) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.

b) Justification de : $2,8 < \alpha < 2,9$

3- $\forall x \in \mathbb{R}, 1-x \in \mathbb{R}$ et $1+x \in \mathbb{R}$.

$$f(1-x) = -1 + 3x^2 - x^3 \text{ et } f(1+x) = -1 - 3x + x^3.$$

$$f(1-x) + f(1+x) = -2 = 2 \times (-1).$$

Le point A(1 ; -1) est un centre de symétrie de (C).

4- a)

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	-3	0,13	1	0,38	-1	-2,37	-3	-2,1	1

c) construction

Exercice 55

1- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 3$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c) *Tableau de variation*

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

3- a) f est dérivable et croissante sur $[-1; 0]$.

On a $f(-1) = -2$ et $f(0) = 2$.

$f(-1) \times f(0) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1; 0]$.

b) Justification de : $-0,6 < \alpha < -0,5$.

4- a) (T) : $y = 3x + 2$

c) Etude des positions relatives

$$f(x) - (3x + 2) = x^3$$

$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - (3x + 2) < 0$ donc (C) est en dessous de (T) sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (3x + 2) > 0$ donc (C) est au-dessus de (T) sur $]0; +\infty[$

(C) et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

5- a)

x	-2	-1,5	-1	0,5	0	1	2	2,5	3
f(x)	-12	-5,87	-2	3,63	2	6	16	25,13	38

b) construction de (C)

Exercice 56

1- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

2- a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

b) $\forall x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]3; +\infty[$,

$\forall x \in]1; 2[\cup]2; 3[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; 3[$

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+	
$f(x)$					

3- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à (C).

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

c) $\forall x \in]-\infty; 2[, f(x) - (x - 3) < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty; 2[$

$\forall x \in]2; +\infty[, f(x) - (x - 3) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]2; +\infty[$

4- Tableau

x	-4	-2	0	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$f(x)$	-7,17	-5,25	-3,5	-3	0,58		1,5	1	1,5	2,33

5- Construction

Exercice 57

1- a) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C).

2- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

c) $\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) - (2x - 1) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - (2x - 1) < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]1; +\infty[$

3- a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

c) Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$	
$f'(x)$	+			+		
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$		$-\infty$	↗ $+\infty$	

4- $\forall x \in \mathbb{R}, 1-x \in \mathbb{R}$ et $1+x \in \mathbb{R}$.

$$f(1-x) + f(1+x) = 2 = 2 \times (1).$$

Le point $A(1; 1)$ est un centre de symétrie de (C) .

5- Les points communs à la courbe (C) et à la droite (OI) sont : $(\frac{-1}{2}; 0)$ et $(2; 0)$

6- Construction

Exercice 58

PARTIE A





1- $S_{\mathbb{R}} = \{-1; 5\}$

2- Justifier en dressant le tableau de signe de $p(x)$

PARTIE B

1- $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

- 2- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe (C).
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- 3- Démonstration de : $f'(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2}$
- 4- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]5 ; +\infty[$,
 $\forall x \in]-1; 2[\cup]2; 5[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -1; 2[$ et sur $]2; 5[$

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	+	-
$f(x)$	$+\infty$ 			$+\infty$ 	
	6			$-\infty$ 	
				-6	
				$-\infty$ 	

- 5- a) $f(x) = -x + 2 + \frac{9}{x-2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$
 donc la droite d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$
- c) $\forall x \in]-\infty; 2[$, $f(x) - (-x + 2) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $] -\infty; 2[$
 $\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) - (-x + 1) < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]2; +\infty[$
- 6- $\forall x \in \mathbb{R}$, $2-x \in \mathbb{R}$ et $2+x \in \mathbb{R}$.
 $f(2-x) + f(2+x) = 0 = 2 \times 0$
 Le point $A(2 ; 0)$ est un centre de symétrie de (C).
- 7- Construction de (C)

Exercice 59

- 1- $a = -3$
- 2- Tableau de variations

x	$-\infty$	$\frac{-}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$

Exercice 60

- 1- $a = 7$ et $b = 8$
- 2- Tableau de variation

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1 ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ 17 ↗ $+\infty$	

Exercice 61

- 1- a) $D_f = \mathbb{R} - \{0; 2\}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^<} f(x) = -\infty$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0^>} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^<} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^>} f(x) = +\infty$

c) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

$$2- f'(x) = \frac{(x-1)(-2x-3)}{(x(x-2))^2}$$

3- a) $\forall x \in]-\infty; \frac{-3}{2}[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{-3}{2}[$; sur $]1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

$\forall x \in]\frac{-3}{2}; 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\frac{-3}{2}; 0[$ et sur $]0; 1[$,

b) Tableau de variations

4- Représentation graphique de la courbe (C)

➤ Situations complexes

Exercice 62

$$B(x) = -x^3 + 5x^2 + 200x - 400$$

$$B'(x) = -3x^2 + 10x + 200$$

Donner le signe de $B'(x)$ sur $[0; 18]$

Pour que le bénéfice soit maximal l'entreprise doit fabriquer 10 téléphones par jour.

Exercice 63

Soit $B(x)$ la fonction représentant le bénéfice journalier exprimé en millier de francs CFA en fonction du nombre x de parapluies vendus.

$$B(x) = -x^2 + 84x$$

- Etude de $B(x)$

$$B'(x) = -2x + 84$$

Tableau de variation de $B(x)$

x	0	42	60
$B'(x)$	+		-
$B(x)$			

Le bénéfice sera maximal lorsque l'entreprise fabriquera 42 parapluies.

Exercice 64:

- La fonction C est dérivable sur l'intervalle $[20; 130]$

$$C'(v) = 0,2 - \frac{320}{v^2}$$

$$C'(v) = \frac{0,2v^2 - 320}{v^2}$$

$$C'(v) = \frac{0,2(v-40)(v+40)}{v^2}$$

$$C'(v) = 0 \text{ signifie que } v = 40$$

- Le signe de C'

Pour tout élément v de $[20; 130]$, $v + 40 > 0$ et $v^2 > 0$ donc C' a le signe de $v - 40$

On a : $\forall v \in [20; 40], C'(v) < 0$ donc C est décroissante sur $[20; 40]$

: $\forall v \in [40; 130], C'(v) > 0$ donc C est croissante sur $[40; 130]$

- Tableau de variation

v	20	40	130
$C'(v)$	-		+
$C(v)$	20	16	28,46

- La consommation du véhicule est minimale pour une vitesse de 40 km/h. Cette consommation est alors de 16 litres aux 100 km.

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Ou et à quel moment se déroule la situation ?	Lors d'une kermesse organisée dans une école.
Circonstances	-Quel jeu est proposé aux visiteurs ? -Qu'affirme l'un des élèves de Tle A ayant pris connaissance du jeu ?	« On lance deux fois de suite un dé cubique... mais ne perd rien » -Il affirme que ce jeu n'est pas favorable au joueur.
Tâches	-Que font les élèves de retour en classe ? -Pourquoi font-ils ces calculs ?	-Ils font des calculs -Pour vérifier cette affirmation.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILITES

ACTIVITE 1 : Expérience aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une expérience aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. L'expérience 1 conduit à une seule issue possible qui est 6.
L'expérience 2 conduit à deux issues possibles : pile et face
L'expérience 3 conduit à douze issues possibles
 2. Le résultat de l'expérience 1 peut être connu en avance
Les résultats des expériences 2 et 3 ne peuvent pas être connus en avance.
 3. Les expériences peuvent être refaites plusieurs fois dans les mêmes conditions.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

1-V 2-F 3-V 4-V

Exercice 2

Les expériences A et C sont des expériences aléatoires car elles ont chacune plusieurs résultats possibles et on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat qui se produira.

ACTIVITE 2: Eventualité, Univers, Evènement

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une éventualité, d'un univers et d'un évènement.
- Réponses aux questions de l'activité.
 - 1.a) Les résultats possibles de cette expérience sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
 - b) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 2. a) Les résultats où le numéro obtenu est pair sont : 2 ; 4 et 6.
 - b) $A = \{2 ; 4 ; 6\}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

Les éventualités de cette expériences sont : pile et face

Exercice 4

L'univers de cette expérience est l'ensemble : $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Exercice 5

1-V 2-F 3-V

ACTIVITE 3: Evènements contraires, Evènement élémentaire, Evènement certain, Evènement impossible, Réunion et intersection de deux évènements

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'un évènement contraire, d'un évènement élémentaire, d'un évènement certain, d'un évènement impossible, de la réunion et de l'intersection de deux évènements.
- Réponses aux questions de l'activité.
 - 1.a) Les éventualités qui réalisent l'évènement B sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.
 - b) Les éventualités qui réalisent l'évènement F sont : 1 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 et 12.
 - c) On peut dire que les évènements B et F sont contraires.
 - 2.a) L'évènement C est réalisé par une seule issue qui est 10.
 - b) L'évènement D est réalisé par aucune issue.
 - c) L'évènement E est réalisé par les issues 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 et 12.
 - 3.a) Les issues qui réalisent l'évènement A ou l'évènement B sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 et 11.
 - b) Aucune issue ne réalise à la fois l'évènement A et l'évènement.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 6

1. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2. $E = \ll \text{le nombre lu est pair} \gg$

$F = \ll \text{le nombre lu est premier} \gg$

$G = \ll \text{le nombre lu est impair} \gg$

3. L'évènement contraire de A est : « le nombre lu est pair »

4.a) « A ou B » = $\{1 ; 3 ; 5\}$

b) « A et C » = \emptyset

5. Les évènements A et C sont incompatibles.

Exercice 7

1-F

2-V

3-F

4-V

ACTIVITE 4: Probabilité d'un évènement

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la probabilité d'un évènement.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. L'évènement A est réalisé par 4 éventualités
 2. La fraction traduisant la chance de réalisation de l'évènement A est : $\frac{4}{6}$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

La probabilité de l'évènement B est : $\frac{3}{7}$.

Exercice 9

Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un évènement est le quotient qui exprime « la chance » qu'à cet évènement de se réaliser.

ACTIVITE 5: Evènements élémentaires équiprobables

- L'objectif de cette activité est de reconnaître des évènements élémentaires équiprobables.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.a) La probabilité de l'évènement A_1 est $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'évènement B_1 est $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'évènement C_1 est $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'évènement D_1 est $\frac{1}{4}$

b) Les évènements A_1, B_1, C_1 et D_1 ont la même probabilité.

2.a) La probabilité de l'évènement A_2 est $\frac{1}{2}$

La probabilité de l'évènement B_2 est $\frac{1}{4}$

La probabilité de l'évènement C_2 est $\frac{1}{4}$

b) Les probabilités obtenues ne sont pas égales

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10

1-V 2-V 3-F 4-V

Exercice 11

La probabilité d'obtenir pile sur la face supérieure est : $\frac{1}{2}$

Exercice 12

La probabilité d'un évènement élémentaire de cette expérience est : $\frac{1}{4}$.

ACTIVITE 6: Probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité.
- Réponses aux questions de l'activité.
 - 1.a) L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
 - b) $\text{card}(\Omega) = 6$
 - 2.a) $A = \{2 ; 3 ; 5\}$
 - b) $\text{card}(A) = 3$
 - 3.a) $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 - b) La probabilité de l'évènement A est: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 - c) La probabilité de l'évènement A $= \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 13

$$P(A) = \frac{5}{8} \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad P(C) = \frac{3}{8} \quad P(D) = \frac{1}{4}$$

ACTIVITE 7: Probabilité de la réunion de deux évènements

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à la probabilité de l'évènement « A ou B ».
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. $P(A) = \frac{4}{9}$ $P(B) = \frac{4}{9}$
 $P(C) = \frac{2}{9}$
 - 2.a) $A \cup B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8\}$ et $A \cap B = \{2 ; 5\}$
 - b) $P(A \cup B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$

$$c) P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$d) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$3.a) A \cup C = \{0; 1; 2; 3; 5; 6\} \text{ et } A \cap C = \emptyset$$

$$b) P(A \cup C) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ et } P(A \cap C) = 0$$

$$c) P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$d) P(A \cup C) = P(A) + P(C)$$

$$4.a) D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$b) P(D) = \frac{9}{9} = 1$$

$$c) \Omega = D \text{ donc } P(\Omega) = 1$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 14

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,45 + 0,6 - 0,57$$

$$P(A \cup B) = 0,48$$

Exercice 15

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

Comme les évènements S et T sont incompatibles, on a

$$P(S \cap T) = 0.$$

$$\text{Donc } P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

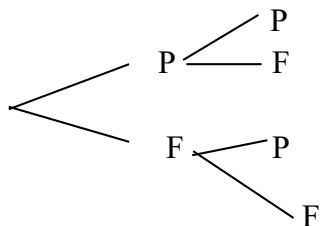
$$P(S \cup T) = \frac{4}{13} + \frac{1}{13}$$

$$P(S \cup T) = \frac{5}{13}$$

ACTIVITE 8: Variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une variable aléatoire
- Réponses aux questions de l'activité.

1.



2.

Eventualités	PP	PF	FP	FF
Nombre de points (valeurs prises par X)	6	2	2	-2

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 16

1-V 2-F 3-V

Exercice 17

a) $(X=1) = \{2 ; 4 ; 6\}$ b) $(X=0) = \{1 ; 3\}$ c) $(X=-2) = \{5\}$

ACTIVITE 9: Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Soient E ; F ; G et H les évènements respectifs d'avoir PP ;PF ;FP et FF

$$P(E)=\frac{1}{4} \quad P(F)=\frac{1}{4} \quad P(G)=\frac{1}{4} \quad P(H)=\frac{1}{4}$$

2.a) $P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{1}{4}$

b)

k	-2	2	6
P(X=k)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) On a : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 18

Tableau 2 et tableau 3

Exercice 19

k	-2	0	1
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

ACTIVITE 10: Espérance Mathématique d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire
- Réponses aux questions de l'activité.

La moyenne m de la variable aléatoire X est :

$$m = (-300 \times 0,1) + (-100 \times 0,25) + (200 \times 0,3) + (300 \times 0,2) + (500 \times 0,15)$$

$$m = -30 - 25 + 60 + 60 + 75$$

$$m = 140$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 20

$$E(X) = (-2 \times 0,1) + (1 \times 0,5) + (6 \times 0,07) + (9 \times 0,06) + (10 \times 0,08) + (14 \times 0,19)$$

$$E(X) = 4,72$$

ACTIVITE 11 : Variance et écart-type

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.

$$1.a) E(X^2) = (-300)^2 \times 0,1 + (-100)^2 \times 0,25 + 200^2 \times 0,3 + 300^2 \times 0,2 + 500^2 \times 0,15$$

$$E(X^2) = 79000$$

$$b) (E(X))^2 = 140^2 = 19600$$

$$2.a) E(X^2) - (E(X))^2 = 79000 - 19600 = 59400$$

$$b) \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{59400} \approx 243,72$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21

Calculons $E(X^2)$.

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,5 + 6^2 \times 0,07 + 9^2 \times 0,06 + 10^2 \times 0,08 + 14^2 \times 0,19$$

$$E(X^2) = 53,52$$

Calculons $[E(X)]^2$

$$[E(X)]^2 = (4,72)^2 = 22,2784$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 53,52 - 22,2784 = 31,2416$$

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X)} = \sqrt{31,2416} \approx 5,59$$

III. DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

- **Question 1** : Comment calculer la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité ?

Solution de l'exercice non corrigé

Soit Ω l'univers associé à l'expérience qui consiste à choisir 4 élèves parmi 45 pour représenter une classe de Terminale A durant une réunion.

Déterminons $\text{card}(\Omega)$

$$\text{Card}(\Omega) = C_{45}^4 = 148995$$

Soit B l'évènement : « les élèves choisis sont du même sexe »

Déterminons $\text{card}(B)$

B est réalisé si les 4 élèves sont soit tous des garçons, soit toutes des filles.

$$\text{Card}(B) = C_{16}^4 + C_{29}^4 = 1820 + 23751 = 25571$$

Calculons $P(B)$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{25571}{148995}$$

- **Question 2 : Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?**

Solution de l'exercice non corrigé

Déterminons les valeurs prises par X.

Les valeurs prises par X sont :-5000 ; 1000 et 2500

Déterminons les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs

- Si X= -5000 alors la boule tirée porte le numéro 1 donc $P(X=-5000)=\frac{1}{9}$
- Si X= 1000 alors la boule tirée porte soit le numéro 2, soit le numéro 3, soit le numéro 5, soit le numéro 7 donc $P(X=1000)=\frac{4}{9}$
- Si X=2500 alors la boule tirée porte soit le numéro 4, soit le numéro 6, soit le numéro 8, soit le numéro 9 donc $P(X=2500)=\frac{4}{9}$

Ainsi la loi de Probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-5000	1000	2500
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

- **Question 3 : Comment calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X connaissant sa loi de probabilité ?**

Solution de l'exercice non corrigé

- **Tableau des produits de t_i par $P(T=t_i)$**

t_i	0	100	200	400
$P(T=t_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$T_i P(T=t_i)$	0	20	80	80

- $E(T) = 0 + 20 + 80 + 80 = 180$

- **Question 4 :** Comment calculer la variance d'une variable aléatoire X connaissant sa loi de probabilité ?

Solution de l'exercice non corrigé

➤ Tableau des calculs

z_i	100	200	400	800
$P(Z=z_i)$	0,4	0,2	0,1	0,3
$Z_i P(Z=z_i)$	40	40	40	240
Z_i^2	10000	40000	160000	640000
$Z_i^2 P(Z=z_i)$	4000	8000	16000	192000

➤ Déterminons $E(X)$

$$E(X) = 40+40+40+240= 360$$

➤ Déterminons $[E(X)]^2$

$$[E(X)]^2= 360^2 = 129600$$

➤ Déterminons $E(X^2)$

$$E(X^2)= 4000+8000+16000+192000= 220000$$

➤ Déterminons $V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = 220000-129600= 90400$$

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

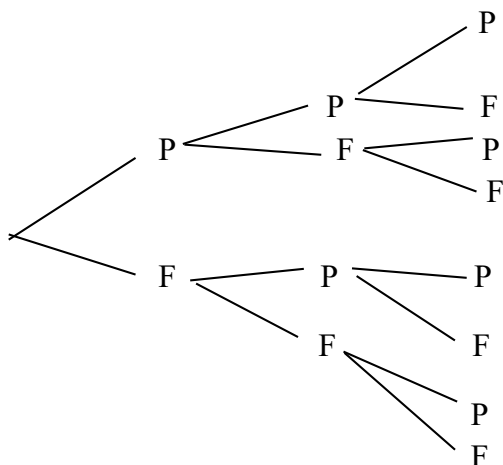
➤ Exercices de fixation

- **Expérience aléatoires et issues**

Exercice 1

Condition 2 ; condition 3 ; condition 4 ; condition 6

Exercice 2



Les éventualités de cette expérience sont:

PPP;PPF;PFP ;PFF ;FPP ;FPF ;FFP et FFF

Exercice 3

Toutes les éventualités de expérience aléatoire sont : RR ; JJ ;
VV ; RJ ; RV ;JR ;JV ; VR et VJ.

Exercice 4

l'univers de cette expérience aléatoire est :

{a ;b ;c ;d ;e ;f ;g ;h ;i ;j ;k ;l ;m ;n ;o ;p ;q ;r ;s ;t ;u ;v ;w ;x ;y ;z}

Exercice 5

L'univers de cette expérience aléatoire est :

{(P ;1) ;(P ;2) ;(P ;3) ;(P ;4) ;(P ;5) ;(P ;6) ;
(F ;1) ;(F ;2) ;(F ;3) ;(F ;4) ;(F ;5) ;(F ;6) }

- **Evènements**

Exercice 6

$$A = \{2 ; 7 ; 11 ; 13\}$$

Exercice 7

$$1\text{-F} \quad 2\text{-V} \quad 3\text{-F} \quad 4\text{-V} \quad 5\text{-F} \quad 6\text{-V} \quad 7\text{-F}$$
$$8\text{-V}$$

Exercice 8

$$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; f ; g ; i\} \quad A \cap B = \{2 ; f\}$$

- **Probabilité d'un évènement**

Exercice 9

$$P(A) = \frac{7}{13} \quad P(B) = \frac{6}{13} \quad P(C) = \frac{4}{13} \quad P(D) = \frac{3}{13}$$

$$P(E) = \frac{5}{13}$$

Exercice 10

Soit l'évènement R : « la boule tirée est rouge ». $P(R) = \frac{5}{12}$

Exercice 11

Les expériences dans lesquels les évènements élémentaires sont équiprobables sont : E_2 et E_3 .

Exercice 12

Soit Ω l'univers associé à l'expérience qui consiste à tirer successivement et sans remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes.

$$\text{Card}(\Omega) = A_{32}^3 = 29760$$

Soit A l'évènement « les cartes tirées sont de mêmes couleurs ».

A est réalisé si les trois cartes sont soit toutes de couleur trèfle, soit toutes de couleur carreau, soit toutes de couleur cœur, soit toutes de couleur pique.

$$\text{Card}(A) = A_8^3 + A_8^3 + A_8^3 + A_8^3 = 1344$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1344}{29760} = \frac{7}{155}$$

Exercice 13

Soit Ω l'univers associé à l'expérience qui consiste à tirer simultanément et au hasard deux bonbons parmi 16 bonbons.

$$\text{Card}(\Omega) = C_{16}^2 = 120$$

1. Soit l'évènement A : « les bonbons tirés sont à la menthe »

$$\text{Card}(A) = C_4^2 = 6$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

2. Soit l'évènement B : « les bonbons tirés sont différents »

$$\text{Card}(B) = C_4^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_7^1 + C_5^1 \times C_7^1 = 83$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{83}{120}$$

Exercice 14

1-F 2-F 3-F 4-V

Exercice 15

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,7 + 0,02 - 0,25 = 0,47$$

Exercice 16

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car les évènements A et B sont incompatibles

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A)$$

$$P(B) = 0,85 - 0,75 = 0,1$$

Exercice 17

$$P(A) = \frac{4}{11} \quad P(B) = \frac{6}{11} \quad P(C) = \frac{3}{11} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{11}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{11}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{11} \quad P(A \cup C) = \frac{6}{11}$$

- **Variable aléatoire**

Exercice 18

Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3

Exercice 19

$(X=2000) = \{2 ; 3 ; 5\}$ et $(X=-500) = \{1 ; 4 ; 6\}$

- **Loi de probabilité d'une variable aléatoire**

Exercice 20

On a : $0,1+0,2+0,4+0,2+0,3=1,2$ donc ce tableau n'est pas la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Exercice 21

On a : $0,2+a+0,25+0,15+0,3=1$

$$0,9+a = 1 \text{ donc } a = 1-0,9=0,1$$

- **Espérance mathématique, variance et écart-type**

Exercice 22

1-V 2-F 3-F 4-V

Exercice 23

1. $E(T) = (-500 \times 0,05) + (-200 \times 0,25) + (0 \times 0,25) + (1000 \times 0,35) + (3000 \times 0,1)$
 $E(T) = 575$

2. La valeur moyenne de la variable aléatoire T est 575.

Exercice 24

1. $E(X^2) = 1 \times \frac{4}{7} + 4 \times \frac{2}{7} + 9 \times \frac{4}{35} + 16 \times \frac{1}{35} = \frac{122}{35}$
 $[E(X)]^2 = \left(\frac{8}{35}\right)^2 = \frac{64}{1225}$
 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{122}{35} - \frac{64}{1225} = \frac{4206}{1225}$

$$2. \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4206}{1225}} \approx 1,85$$

Exercice 25

$$V(X) = [\sigma(X)]^2$$

$$V(X) = (1,6)^2 = 2,56$$

➤ Exercices de renforcement/approfondissement

Exercice 26

$$P(F) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \quad P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad P(G) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Exercice 27

1. Le nombre possible de codes que l'on peut former est : $10^4 = 10000$

$$2. \text{card}(B) = 10^3 = 1000$$

$$P(B) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$$

Exercice 28

Le nombre possible de comité qu'on peut former est : $C_{10}^3 = 120$

$$\text{Card}(A) = C_7^2 \times C_3^1 = 63 \text{ et } \text{card}(B) = C_8^1 = 8$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} \text{ et } P(B) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Exercice 29

Soit Ω l'univers associé à l'expérience qui consiste à tirer simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

$$\text{On a : } \text{card}(\Omega) = C_{32}^5 = 201376$$

1.a) A : « le tirage contient 5 carreaux ou 5 piques »

$$\text{Card}(A) = C_8^5 + C_8^5 = 112$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{112}{201376}$$

b) B : « le tirage contient au moins un roi »

\bar{B} : « le tirage ne contient aucun roi »

$$\text{Card}(\bar{B}) = C_{28}^5$$

$$P(\bar{B}) = \frac{\text{Card}(\bar{B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_{28}^5}{C_{32}^5} \text{ donc } P(B) = 1 - \frac{C_{28}^5}{C_{32}^5} \approx 0,51$$

2.a) Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

$$\text{b) } P(X=0) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5} \approx 0,21$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4}{C_{32}^5} \approx 0,42$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 \times C_{24}^3}{C_{32}^5} \approx 0,28$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^3 \times C_{24}^2}{C_{32}^5} \approx 0,077$$

$$P(X=4) = \frac{C_8^4 \times C_{24}^1}{C_{32}^5} \approx 0,008$$

$$P(X=5) = \frac{C_8^5}{C_{32}^5} \approx 0,0003$$

La loi de probabilité de la variable X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
P(X=k)	0,21	0,42	0,28	0,077	0,008	0,0003

$$\text{c) } E(X) = 0 \times 0,21 + 1 \times 0,42 + 2 \times 0,28 + 3 \times 0,077 + 4 \times 0,008 + 5 \times 0,0003$$

$$E(X) \approx 1,2445$$

Exercice 30

1. Le nombre d'éléments de E est : $9 \times 10^3 = 9000$

$$2. \text{ Card}(A) = 10^3 \text{ donc } P(A) = \frac{10^3}{9 \times 10^3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Card}(B) = 10^2 \text{ donc } P(B) = \frac{10^2}{9 \times 10^3} = \frac{1}{90}$$

Exercice 31

1. $A \cup B$: « l'individu possède une télévision de type E_1 ou une télévision de type E_2 »
 $A \cap B$: « l'individu possède une télévision de type E_1 et une télévision de type E_2 »
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,25 = 0,7$

Exercice 32

1. La probabilité qu'il étudie uniquement le latin est :
$$P_1 = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$
2. La probabilité qu'il étudie uniquement le chinois est :
$$P_2 = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$
3. La probabilité qu'il étudie exactement une langue est :
$$P_3 = P_1 + P_2 = \frac{9}{11}$$

Exercice 33

Soit Ω l'univers associé à l'expérience qui consiste à tirer simultanément et au hasard sans remise 3 jetons d'un sac en contenant 9.

$$\text{Card}(\Omega) = A_9^3 = 504$$

1. $\text{Card}(A) = A_4^3 = 24$ donc $P(A) = \frac{1}{21}$
 $\text{Card}(B) = 3 \times 5 \times A_4^2 = 180$ donc $P(B) = \frac{5}{14}$
2. a) Les valeurs prises par Y sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.
b) $P(Y=0) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$
$$P(Y=1) = \frac{3 \times 4 \times A_5^2}{A_9^3} = \frac{10}{21}$$

$$P(Y=2) = \frac{3 \times 5 \times A_4^2}{A_9^3} = \frac{5}{14}$$

$$P(Y=4) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}$$

La loi de probabilité de la variable X est donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

Exercice 34

1. Tableau a double entrée

	P	1	2	3	4	5	6
D							
P		1P	2P	3P	4P	5P	6P
F		1F	2F	3F	4F	5F	6F

2. a) les valeurs prises par X sont : -1500 ; 0 ; 2500 et 4000

$$b) P(X=-1500) = \frac{1}{4} \quad P(X=0) = \frac{1}{4} \quad P(X=2500) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4000) = \frac{1}{4}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-1500	0	2500	4000
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$c) E(X) = -1500 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 2500 \times \frac{1}{4} + 4000 \times \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 1250.$$

Le gain moyen pour un joueur est de 1250

d) calculons $E(x^2)$

$$E(x^2) = (-1500)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + (2500)^2 \times \frac{1}{4} + (4000)^2 \times \frac{1}{4} = 6125000$$

$$[E(X)]^2 = (1250)^2 = 1562500$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4562500$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4562500} \approx 2136$$

Exercice 35

1. On a : $a+b = 0,15$ et $a+3b=0,35$.

$$\text{Résolvons le système d'équation : } \begin{cases} a + b = 0,15 \\ a + 3b = 0,35 \end{cases}$$

Après résolution on obtient $a = 0,05$ et $b = 0,1$

2. $E(x^2) = 4,95$ et $[E(X)]^2 = 3,0625$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1,8875$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,8875} \approx 1,37$$

Exercice 36

Soit Ω l'univers associé à cette expérience. On a $\text{card}(\Omega) = C_{250}^5$

1. a) Soit l'évènement A : « il obtient exactement un seul billet gagnant »

$$\text{card}(A) = C_{92}^1 \times C_{158}^4$$

$$P(A) = \frac{C_{92}^1 \times C_{158}^4}{C_{250}^5}$$

- b) Soit l'évènement B : « il n'obtient aucun billet gagnant »

$$\text{card}(B) = C_{158}^5$$

$$P(B) = \frac{C_{158}^5}{C_{250}^5}$$

2. a) Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

$$b) P(X=0) = \frac{C_{158}^5}{C_{250}^5} \quad P(X=1) = \frac{C_{92}^1 \times C_{158}^4}{C_{250}^5} \quad P(X=2) = \frac{C_{92}^2 \times C_{158}^3}{C_{250}^5}$$

$$P(X=3) = \frac{C_{92}^3 \times C_{158}^2}{C_{250}^5}$$

$$P(X=4) = \frac{C_{92}^4 \times C_{158}^1}{C_{250}^5} \quad P(X=5) = \frac{C_{92}^5}{C_{250}^5}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{C_{158}^5}{C_{250}^5}$	$\frac{C_{92}^1 \times C_{15}^4}{C_{250}^5}$	$\frac{C_{92}^2 \times C_{15}^3}{C_{250}^5}$	$\frac{C_{92}^3 \times C_{15}^2}{C_{250}^5}$	$\frac{C_{92}^4 \times C_{15}^1}{C_{250}^5}$	$\frac{C_{92}^5}{C_{250}^5}$

Exercice 37

Soit Ω l'ensemble des codes possibles que l'on peut former avec les chiffres 3 ;5 ;6 et 8. On a $\text{card}(\Omega) = 4! = 24$

- La probabilité qu'elle réussisse au premier essai est :

$$P_1 = \frac{1}{24}$$

- La probabilité qu'elle réussisse au deuxième essai est :

$$P_2 = \frac{1}{24}$$

- La probabilité qu'elle réussisse au troisième essai est :

$$P_3 = \frac{1}{24}$$

La probabilité qu'elle puisse effectuer le retrait est

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{8}.$$

Exercice 38

1. $P(A) = \frac{7}{12}$

2. $P(B) = \frac{7}{12}$

3. $P(C) = \frac{1}{30}$

Exercice 39

1. Le nombre de tirages possibles est : $C_{10}^3 = 120$

2. a) Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3

b) $P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$ $P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10} \quad P(X=5) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

c) $E(X^2) = 2$ $E(X) = 1,2$ et $[E(X)]^2 = 1,44$ $V(X) = 0,56$ et $\sigma(X) = 0,75$

Exercice 40

1. Soit Ω l'univers lié à cette expérience.

$$\Omega = \{1 \text{hachuré}; 2 \text{hachuré};$$

3hachuré ; 4hachuré ; 5hachuré ; 6hachuré ; 1 non hachuré ; 2 non hachuré ; 3 non hachuré ; 4 non hachuré ; 5 non hachuré ; 6 non hachuré }

2. a) Les valeurs prises par X sont : -500 ; 0 ; 1000 et 5000

b) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-500	0	1000	5000
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

3. $E(X) \approx 917$. Le gain moyen d'un joueur est 917FCFA.
 4. $V(X) \approx 3659722,22$ et $\sigma(X) \approx 1913,04$

➤ Situations complexes

Exercice 41

Pour vérifier l'affirmation de chacun des élèves, je vais utiliser mes connaissances en probabilités.

*je détermine pour cela, tous les cas possibles de répondre aux quatre questions.

QUESTIONS	A	B	C	D	TOTAL
	V	V	V	V	20
	V	V	V	F	12
	V	V	F	V	12
	V	V	F	F	4
	V	F	V	V	12
	V	F	V	F	4
	V	F	F	V	4
	V	F	F	F	-4
	F	V	V	V	12
	F	V	V	F	4
	F	V	F	V	4
	F	V	F	F	-4
	F	F	V	V	4
	F	F	V	F	-4
	F	F	F	V	-4
	F	F	F	F	-12

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de points obtenus à l'issue des réponses aux quatre questions.

*Je détermine les valeurs que la variable aléatoire X peut prendre.

Les valeurs prises par X sont :-12 ; -4 ; 4 ; 12 et 20

*je détermine les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs :

$$P(X=-12)=\frac{1}{16} \quad P(X=-4)=\frac{1}{4} \quad P(X=4)=\frac{3}{8} \quad P(X=12)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=20)=\frac{1}{16}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-12	-4	4	12	20
$P(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

*je détermine l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

$$E(X) = 4.$$

*La probabilité d'avoir au moins une réponse juste est $\frac{15}{16}$ et celle d'avoir toutes les réponses fausses est $\frac{1}{16}$. L'affirmation du premier élève est donc fausse.

*Aussi la note moyenne qu'un candidat peut obtenir est 4, donc l'affirmation du deuxième élève est également fausse.

Exercice 42

Je vais utiliser mes connaissances en probabilité pour déterminer l'option susceptible de me permettre d'avoir le plus de chance de gagner.

*je détermine la probabilité P_1 de gagner avec l'option 1 : $P_1 = \frac{3}{8}$

*je détermine la probabilité P_2 de gagner avec l'option 1 : $P_2 = \frac{1}{4}$

Comme $P_1 > P_2$ l'option susceptible de me permettre d'avoir le plus de chance de gagner est l'option 1.

I- SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

NB : Il ne faut pas parler de contexte, circonstance et de tâche aux élèves. Il faut poser directement les questions après la lecture et l'explication du texte.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	La scène se déroule dans un musée.
Circonstances	Quel est le problème auquel les élèves de terminale sont confronté ?	Les élèves de terminale éprouvent des difficultés pour déterminer l'aire de la porte du poulailler du lycée qu'ils souhaitent faire fabriquer par le feronnier
Tâche	Que font les élèves de terminale après les indications du professeur de mathématique ?	Les élèves s'organisent pour apprendre à déterminer l'aire de la porte à l'aide du calcul d'une intégrale.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation puis annoncer le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation d'apprentissage durant tout le déroulement de la leçon.

II- DECOUVERTE DES HABLETES

Activité 1 : Définition d'une primitive

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de définir une primitive d'une fonction

- **Réponses aux questions**

1. F est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 3x^2 + 2x$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 1 :

1. V

2. F

3. F

4. V

Exercice 2

g est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$. Donc g est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Activité 2 : Primitives d'une fonction

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction

- **Réponses aux questions**

1. F est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

2. G est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = f(x)$.

3. $H(x) = x^3 + 2$.

4. Non. Les primitives de la fonction f sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto x^3 + c, c \in \mathbb{R}.$$

• **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 3

1. F 2. V 3. V 4. F

Exercice 4

On a : $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Donc deux autres primitives sur \mathbb{R} de f sont : $G(x)$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3 \text{ et } H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 1.$$

Activité 3 : Primitives des fonctions de références

• **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer l'ensemble des primitives des fonctions de référence

• **Réponses aux questions**

Tableau 1

Fonction f	Une primitive F de f sur \mathbb{R}	Forme générale des primitives de f sur \mathbb{R}
$f(x) = 5$	$F(x) = 5x$	$F(x) = ax + c, a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = -2$	$F(x) = -2x$	
$f(x) = \frac{2}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}x$	

Tableau 2

Fonction f	Une primitive F de f sur \mathbb{R}	Forme générale des primitives de f sur \mathbb{R}
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,$ $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4$	

Tableau 3

Fonction f	Une primitive F de f sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$	Forme générale des primitives de f sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c,$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$	

• **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 5

Les primitives sur \mathbb{R} de f sont : G ; H et Q

Activité 4 : Détermination de primitives de fonction

• **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer l'ensemble des primitives des fonctions de chacun des types : $au + bv$ et $u'u^n$.

• **Réponses aux questions**

1.a) On a : $(3f + 2g)(x) = 3f(x) + 2g(x) = 6x + \frac{2}{x^2}.$

$$(3F + 2G)(x) = 3x^2 - \frac{2}{x} = 3F(x) + 2G(x).$$

- b) $3F(x) + 2G(x) = 3u(x) + 2v(x)$
 c) La fonction $3F + 2G$ est une primitive de la fonction $3f + 2g$.

2.a) Après avoir développé et réduit $h(x) = 3(3x - 1)^2$, on obtient le résultat.

b) Une primitive de h sur \mathbb{R} est : $H(x) = 9x^3 - 9x^2 + 3x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, K'(x) = h(x)$; donc K est une primitive sur \mathbb{R} de h .

• **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 6 :

1. V 2. F 3. F 4. V 5. F

Activité 5 : Primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

• **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale.

• **Réponses aux questions**

1. On a : $u(0) = -1, v(0) = 0$ et $w(0) = 4$;

Donc la primitive de f qui prend la valeur -1 en 0 est u .

2. a) $c = -1$.

b) Il existe une et une seule primitive de la fonction f qui prend la valeur -1 en 0 .

• **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 7 :

a) On a :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + c ; c \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } F(1) = 2 \text{ d'où } c = \frac{9}{2}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

b) On a :

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c ; c \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } F(1) = 2 \text{ d'où } c = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Activité 6 : Calcul intégral

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de calculer l'intégrale de a à b d'une fonction où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- **Réponses aux questions**

1. On a : $u'(x) = f(x)$ et $v'(x) = f(x)$; donc u et v sont des primitives de f sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} 2. a) \quad u(b) - u(a) &= \frac{1}{2}b^2 + 2b - \frac{1}{2}a^2 - 2a \text{ puis } v(b) - v(a) \\ &= \frac{1}{2}b^2 + 2b - \frac{1}{2}a^2 - 2a \end{aligned}$$

$$b) \quad u(b) - u(a) = v(b) - v(a).$$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 8 :

$$\begin{aligned} a) \quad \int_0^1 (x+2)dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 & b) \quad \int_{-2}^4 (5x-3)dx &= \left[\frac{5}{2}x^2 - 3x \right]_{-2}^4 \\ \int_0^1 (x+2)dx &= \frac{5}{2} & \int_{-2}^4 (x+2)dx &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \int_2^5 (3t^2 + 4t - 5)dt &= [t^3 + 2t^2 - 5t]_2^5 \\ \int_2^5 (3t^2 + 4t - 5)dt &= 144 \end{aligned}$$

Activité 7 : Calcul d'aire de la partie du plan limitée par une courbe

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de montrer que l'aire de la partie du plan limitée par une courbe est égale une intégrale sur un intervalle où la fonction représentée par la courbe est positive.

- **Réponses aux questions**

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{Rectangle}} + \mathcal{A}_{\text{Triangle}} = 2 \times 4 + \frac{4 \times 4}{2} = 16 \text{ cm}^2$

2. $\int_0^4 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^4 = 16$

3. $\mathcal{A} = \left(\int_0^4 f(x)dx \right) \text{cm}^2$

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 9 :

$f(x) \geq 0$ sur $[1 ; 2]$; d'où : $\mathcal{A} = \left(\int_1^2 f(x)dx \right) ua$;

avec $ua = 3 \times 2 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

On a : $\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 = \frac{11}{6}$;

donc : $\mathcal{A} = 11 \text{ cm}^2$.

Exercice 10 :

$f(x) \leq 0$ sur $[1 ; 2]$; d'où : $\mathcal{A} = \left(- \int_{-2}^0 f(x)dx \right) ua$; avec ua
 $= 2 \times 2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$.

On a : $- \int_{-2}^0 f(x)dx = - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^0 = \frac{10}{3}$;

donc : $\mathcal{A} = \frac{40}{3} \text{ cm}^2$.

Activité 8 : Calcul d'aire d'une partie du plan limitée par deux courbes

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de montrer que l'aire de la partie du plan limitée par deux courbes est égale à une intégrale sur un intervalle où la différence des fonctions représentées par les courbes est positive.

- **Réponses aux questions**

1. a) $\mathcal{A}_1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$ b) $\mathcal{A}_2 = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{3}$ c) $\mathcal{A} = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$

d) $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \frac{1}{6}$ e) $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx \right) u.a$

2. a) $\mathcal{A}'_1 = \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$ b) $\mathcal{A}'_2 = \int_1^2 g(x)dx = \frac{7}{3}$

3. a) $\mathcal{A}' = \frac{5}{6}$ b) $\int_1^2 [g(x) - f(x)]dx = \frac{5}{6}$ c) $\mathcal{A}' = \left(\int_1^2 [g(x) - f(x)]dx \right) u.a$

4. L'aire demandée est : $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} + \mathcal{A}' = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$. Donc : $\mathcal{A}'' = 1$

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 11 :

On a : $\mathcal{A} = \left(\int_0^3 [g(x) - f(x)]dx \right) u.a$;

car : $f(x) \leq g(x)$ sur $[0 ; 3]$ avec $u.a = 1 \text{ cm}^2$.

or : $\int_0^3 [g(x) - f(x)]dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 9$;

donc : $\mathcal{A} = 9 \text{ cm}^2$

III- DES QUESTIONS D'EVALUATION

QUESTION 1 : Comment déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné ?

Solution de l'exercice non corrigé

$$\text{On a : } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c ; c \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } F(0) = 2 \text{ et } F(0) = c, \text{ d'où } c = 2.$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 2.$$

QUESTION 2 : Comment calculer l'intégrale de a à b d'une fonction donnée ?

Solution de l'exercice non corrigé

Une primitive sur $[-2 ; 1]$ de $x \mapsto 4x^2 + 4$ est :

$$x \mapsto \frac{4}{3}x^3 + 4x. \text{ Donc : } \int_{-2}^1 (4x^2 + 4)dx = 24$$

QUESTION 3 : Comment calculer l'aire d'une partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$?

Solution de l'exercice non corrigé

$$\text{On a : } \mathcal{A} = \left(- \int_2^3 [-2x^2 + 2]dx \right) u.a ;$$

$$\text{car } -2x^2 + 2 \leq 0 \text{ sur } [2 ; 3] \text{ avec } ua = 1\text{cm}^2$$

$$\text{or } \int_2^3 (-2x^2 + 2)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_2^3 = -\frac{32}{3} \text{ donc : } \mathcal{A} = \frac{32}{3} \text{cm}^2.$$

QUESTION 4 : Comment calculer l'aire d'une partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$?

Solution de l'exercice non corrigé

$$\text{On a : } \mathcal{A} = \left(\int_4^5 [g(x) - f(x)] dx \right) u. a ;$$

$$\text{car : } f(x) \leq g(x) \text{ sur } [4 ; 5] \text{ avec } u. a = 4\text{cm}^2$$

$$\text{or } \int_4^5 (g(x) - f(x)) dx = \int_4^5 (2x - 8) dx = 1 \text{ donc : } \mathcal{A} = 4\text{cm}^2.$$

IV- MES SEANCES D'EXERCICES

➤ **Exercices de fixation**

✓ **Définition d'une primitive**

Exercice 1 :

a) On a : $F(x) = \frac{2}{3}x - 1$ et $f(x) = \frac{2}{3}$

Donc : F est une primitive de f sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

b) On a : $F(x) = x^2 - 2x + 3$ et $f(x) = 2x - 2$

Donc : F est une primitive de f sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

c) On a : $F(x) = x^3 - 2x^2 - 2021$ et $f(x) = 3x^2 - 4x$

Donc : F est une primitive de f sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

d) On a : $F(x) = (x - 1)(2x + 3) = 2x^2 + x - 3$ et $f(x) = 4x + 1$

Donc : F est une primitive de f sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

Exercice 2 :

Pour chacun des cas a) ; b) ; c) et d), G est une primitive de g sur I car $\forall x \in I, G'(x) = g(x)$.

✓ **Primitives d'une fonction**

Exercice 3 :

a) $H(x) = x^3 - x^2 + 1$ et

$G(x) = x^3 - x^2 - 2$ sont des primitives de f sur \mathbb{R} .

b) $H(x) = \frac{x-2}{x+2} - 5$ et

$G(x) = \frac{x-2}{x+2} + 3$ sont des primitives de f sur $]-2; +\infty[$.

Exercice 4 :

Les primitives de h sur \mathbb{R} sont : P ; S et T.

✓ **Primitives des fonctions de référence**

Exercice 5 :

1.F ; 2.F ; 3.F ; 4.V ; 5.V

✓ **Primitives et opérations**

Exercice 6 :

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$; 2. $F(x) = x^3 - x^2 + 7x$;

3. $F(x) = 5x + \frac{2}{x}$; 4. $F(x) = 3x^4 - 4x^2 + 2x$

Exercice 7 :

1. $F(x) = \frac{1}{2}(3x-1)^2$ 2. $F(x) = \frac{1}{3}(1-2x)^3$

3. $F(x) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{x}\right)^4$ 4. $F(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^3$

Exercice 8 :

$$1. F(x) = x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad 2. F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{6} \quad ; \quad 3. F(x) = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2}$$

Exercice 9 :

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2} \quad ; \quad \text{b) } F(x) = 2x^2 + 2x - 29 \quad ; \quad \text{c) } F(x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 1222 \\ \text{d) } F(x) &= x^3 + x^2 + x + 8 \end{aligned}$$

✓ **Calcul intégral****Exercice 10 :**

$$\begin{aligned} 1. \int_1^2 (2x - 5) dx &= [x^2 - 5x]_1^2 \\ &= -2 \\ 2. \int_1^2 (x^2 - x + 2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 = \frac{17}{6} \\ 3. \int_1^2 -\frac{5}{2x^2} dx &= \left[\frac{5}{2x} \right]_1^2 = \frac{-5}{4} \end{aligned}$$

Exercice 11 :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 (x - 2) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^1 = -\frac{3}{2} \\ \text{b) } \int_{-1}^3 (2 - 4x) dx &= [2x - 2x^2]_{-1}^3 = -8 \\ \text{c) } \int_2^5 (3x^2 - 2x + 5) dx &= [x^3 - x^2 + 5x]_2^5 = 111 \end{aligned}$$

Exercice 12 :

a)
$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

b)
$$\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{3}{4}$$

c)
$$\int_1^3 \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

✓ Calcul d'aire

Exercice 13 :

1.
$$\mathcal{A} = \left(\int_2^5 5 dx \right) \times 2 cm^2 = 30 cm^2 ;$$

2.
$$\mathcal{A} = \left(\int_0^3 (4x + 1) dx \right) \times 2 cm^2 = 42 cm^2$$

3.
$$\mathcal{A} = \left(\int_{-4}^{-1} (x^2 + 2) dx \right) \times 2 cm^2 = 54 cm^2 ;$$

4.
$$\mathcal{A} = \left(\int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx \right) \times 2 cm^2 = 1 cm^2$$

Exercice 14 :

1.
$$\mathcal{A} = \left(- \int_2^5 -\frac{3}{4} dx \right) \times 2 cm^2 = 4,5 cm^2 ;$$

2.
$$\mathcal{A} = \left(- \int_{-3}^{-2} (4x + 1) dx \right) \times 2 = 18 cm^2$$

3.
$$\mathcal{A} = \left(- \int_2^4 \left(-3x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx \right) \times 2 cm^2 = 112,5 cm^2 ;$$

4.
$$\mathcal{A} = \left(- \int_0^1 (2x^3 - 2x) dx \right) \times 2 cm^2 = 2 cm^2$$

Exercice 15 :

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathcal{A} &= \left(\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \right) \times 2cm^2 = \left(\int_1^2 (x^2 + 2x) dx \right) \times 2cm^2 \\ &= \frac{32}{3} cm^2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A} &= \left(- \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \right) \times 2cm^2 = \left(- \int_1^2 \left(-\frac{2}{x^2} \right) dx \right) \times 2cm^2 \\ &= 2cm^2 \end{aligned}$$

➤ Exercices de renforcement /Approfondissement

Exercice 16

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= x^3 - 3x^2 + x + c ; c \in \mathbb{R} ; \text{ b) } F(x) \\ &= -x^4 - \frac{5}{8}x^2 + c ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } F(x) &= -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c ; c \in \mathbb{R} ; \text{ d) } F(x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + c ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 17

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \frac{1}{3}(3x - 1)^3 + c ; c \in \mathbb{R} ; \text{ c) } F(x) = (4x - 1)^4 + c ; \\ &c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{b) } F(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 1)^2 + c ; c \in \mathbb{R} ;$$

$$\text{d) } F(x) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^3 + c ; c \in \mathbb{R}$$

Exercice 18

$$F(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} + 2$$

Exercice 19

$$\begin{array}{l} A = \int_1^3 2dx \\ = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} B \\ = \int_0^2 (2x - 1)dx \\ = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C \\ = \int_1^2 \frac{-1}{x^2} dx \\ = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} D \\ = \int_1^4 \frac{-2}{(2x - 1)^2} dx \\ = -\frac{6}{7} \end{array}$$

Exercice 20

$$1. F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{x+2} + c ; c \in \mathbb{R} \quad 2. \int_0^3 f(x)dx = 0$$

Exercice 21

1. On a : $-x^2 + 1 \geq 0$ sur $[-1 ; 1]$. Donc :

$$\mathcal{A} = \left(\int_{-1}^1 (-x^2 + 1)dx \right) \times 2,25cm^2 = 3cm^2.$$

2. On a : $-x^2 + 1 \geq 0$ sur $[0 ; 1]$ et $-x^2 + 1 \leq 0$ sur $[1 ; 2]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \mathcal{A} &= \left(\int_0^1 (-x^2 + 1)dx \right) \times 2,25cm^2 \\ &+ \left(- \int_1^2 (-x^2 + 1)dx \right) \times 2,25cm^2 = 4,5cm^2. \end{aligned}$$

Exercice 22

On a : $x^2 - x - 2 \leq 0$ sur $[0 ; 2]$, d'où : \mathcal{A}

$$= \left(- \int_0^2 (x^2 - x - 2)dx \right) \times ua = \frac{10}{3}cm^2$$

Exercice 23

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx \right) \times ua = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \times ua = \frac{4}{3} \text{ cm}^2$$

Exercice 24

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout nombre réel x ;

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 2.$$

On a : $\Delta = -8$; alors : pour tout nombre réel x ; $f'(x) > 0$.

Donc : f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. On a : $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x + 2)(x^2 + 2)$ or pour tout nombre réel x ; $x^2 + 2 > 0$

Donc : f est positive sur l'intervalle $[-2 ; 0]$; car $x + 2 \geq 0$ sur $[-2 ; +\infty[$.

$$3. \mathcal{A} = \left(\int_{-2}^0 f(x) dx \right) \times ua = \left(\int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2 + 2x + 4) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + x^2 + 4x \right]_{-2}^0 = \frac{64}{3} \text{ cm}^2$$

Exercice 25

1. Pour tout $x \neq 1$; on a : $f(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{ax^3 + (b - 2a)x^2 + (a - 2b)x + b + c}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 1}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Par identification : $a = 2$; $b - 2a = -7$; $a - 2b = 8$ et

$b + c = -1$. Donc : $a = 2$; $b = -3$; $c = 2$.

2. a) On a : $f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{(x - 1)^2}$; d'où : $F(x)$

$$= x^2 - 3x - \frac{2}{x - 1} + c ; c \in \mathbb{R}.$$

b) $F(0) = 0$ et $F(0) = 2 + c$; $c = -2$;

donc : $F(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} - 2.$

Exercice 26

1. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

2. Pour tout $x \neq -1$; On a : $h(x) = \frac{ax + a + b}{(x + 1)^3} ;$

d'où : $a = 3$ et $b = 1.$

3. a) Pour tout $x \in]-1 ; +\infty[; h(x) = \frac{3}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^3}.$

Donc : Les primitives de h sur $]-1 ; +\infty[$ sont :

$$H(x) = -\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2(x + 1)^2} + c ; c \in \mathbb{R}.$$

b) $H(1) = 0$ et $H(1) = -\frac{13}{8} + c ; c = \frac{13}{8} ;$

donc : $H(x) = -\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2(x + 1)^2} + \frac{13}{8}.$

Exercice 27

1. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[; f(x) - g(x) = \frac{4}{x^2} ;$

d'où : $f(x) - g(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[.$

Donc : Pour tout $x \in]0 ; +\infty[; (C_f)$ est au-dessus de $(C_g).$

2. $\mathcal{A} = \left(\int_1^5 (f(x) - g(x)) dx \right) \times ua$ avec $ua = 4cm^2$

or : $\int_1^5 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^5 \frac{4}{x^2} dx = \frac{16}{5}.$

Donc : $\mathcal{A} = 12,8cm^2.$

3. a) $\mathcal{A}_t = \left(\int_1^t \frac{4}{x^2} dx \right) \times ua = \left[\frac{-4}{x} \right]_1^t ;$

d'où : $\mathcal{A}_t = 16\left(1 - \frac{1}{t}\right) cm^2.$ Donc: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_t = 16 cm^2$

➤ Situations complexes

Exercice 28:

L'aire du jardin est formée de :

– La partie du plan délimitée par l'axe des abscisses ;

la droite d'équation : $y_1 = \frac{4}{5}x + 2$ et les

droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.

– La partie du plan délimitée par l'axe des abscisses ;

la droite d'équation : $y_2 = -6x + 36$ et les

droites d'équations $x = 5$ et $x = 6$.

Comme : $\frac{4}{5}x + 2 \geq 0$ pour tout $x \in [0 ; 5]$ et

$-6x + 36 \geq 0$ pour tout $x \leq 6$;

Alors : $\mathcal{A} = \left(\int_0^5 \left(\frac{4}{5}x + 2 \right) dx + \int_5^6 (-6x + 36) dx \right) \times ua$;

$ua = 1m^2$.

Donc : $\mathcal{A} = \left[\frac{2}{5}x^2 + 2x \right]_0^5 + [-3x^2 + 36x]_5^6 = 23m^2$.

Conclusion : L'aire du jardin est de $23m^2$.

Exercice 29 :

Déterminer le nombre de mètres de grillage revient à calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan comprise entre la courbe du pont, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = 0$ et $x = 550$.

On a : $h(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125$ et $\Delta = -\frac{1}{4}$;

d'où : $h(x) > 0$ sur $[0 ; 550]$.

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = \left(\int_0^{550} \left(\frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125 \right) dx \right) \times ua ; ua = 1m^2.$$

$$\text{Or : } \int_0^{550} \left(\frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125 \right) dx = \left[\frac{x^3}{3 \times 1600} + \frac{x^2}{2 \times 4} + 125x \right]_0^{550}$$

$$\approx 65598,96.$$

Conclusion : Il faut **65 599m²** de grillage pour cette couverture.

Exercice 30

Déterminer l'aire de la porte d'entrée revient à calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan de la figure comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction f et les droites d'équation : $x = -1$ et $x = 1$.

On a : $f(x) = -3x^2 + 3$; or : $-3x^2 + 3 \geq 0$ sur $[-1 ; 1]$

$$\text{D'où : } \mathcal{A} = \left(\int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx \right) \times ua ; ua = 1m^2.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = [-x^3 + 3x]_{-1}^1 = 4m^2.$$

Conclusion : l'aire de la porte d'entrée est de $4m^2$.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

NB : Il ne faut pas parler de contexte, circonstance et de tâche aux élèves. Il faut poser directement les questions après la lecture et l'explication du texte.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	Après qu'un père ait ouvert un compte pour son fils dans une banque.
Circonstances	Quel est le problème auquel le fils est confronté ?	Il veut savoir au bout de combien d'années il pourra avoir accès à son compte
Tâche	Que font les élèves de terminale pour aider leur camarade ?	Les élèves décident de faire des calculs.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation puis annoncer le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation d'apprentissage durant tout le déroulement de la leçon.

II- DECOUVERTE DES HABILITES

Activité 1 : Définition de la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de donner la définition de la fonction ln
- Réponses aux questions de l'activité

a	1	3	2022	10 000	0,001	0,000001	0	-4	-2045	-10000
$\ln(a)$	0	1,09	7,61	9,21	-6,9	-13,8				

a) Ce sont des nombres positifs pour lesquels la calculatrice affiche un nombre réel

b) Ce sont des nombres négatifs pour lesquels la calculatrice n'affiche pas un nombre réel

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction définie sur $]0; +\infty[$, s'annulant en 1 et qui a pour dérivée la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à x associe $\frac{1}{x}$

Exercice 2

$$1 - C ; \quad 2 - B ; \quad 3 - B$$

Activité 2 : Propriétés algébriques de la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés algébriques de la fonction ln
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a :

a	3	4	2022	57
b	2	15	1993	2047
$\ln(ab)$	1,79	4,09	15,20	11,66
$\ln(a) + \ln(b)$	1,79	4,09	15,20	11,66
$\ln\left(\frac{1}{a}\right)$	-1,09	-1,38	-7,61	-4,04
$-\ln(a)$	-1,09	-1,38	-7,61	-4,04
$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$	0,40	-1,32	0,01	-3,58
$\ln(a) - \ln(b)$	0,40	-1,32	0,01	-3,58

2. On a :

a	2	3	5	7
r	2	$\frac{1}{2}$	10	20
$\ln(a^r)$	2,07	0,54	16,09	38,91
$r \ln(a)$	2,07	0,54	16,09	38,91

3.a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; b) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;

c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$; d) $\ln(a^r) = r \ln(a)$.

Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

1 - C ; 2 - B ; 3 - A ; 4 - B

Exercice 4

a) $\ln 4 + \ln 5 = \ln 20$;

b) $\ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{12}) = \ln(\sqrt{36}) = \ln(\sqrt{6^2}) = \ln 6$;

c) $\ln 8 + \ln \frac{1}{4} = \ln\left(8 \times \frac{1}{4}\right) = \ln 2$

Exercice 5

1. C ; 2. B ; 3. D ; 4. B ; 5. A

Activité 3 : Limites en 0 et en $+\infty$

- L'objectif de cette activité est de connaître les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction \ln
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a :

x	10^{-60}	10^{-20}	0,0001	1000000	80000000	900000000
$\ln(x)$	-138,15	-46,05	-9,21	1,381	1,45	20,61
$x\ln(x)$	$-1,38.10^{-58}$	$-4,60.10^{-19}$	-0,0009	$1,38.10^7$	$1,38.10^9$	$1,85 \times 10^{10}$
$\frac{\ln(x)}{x}$	$-1,38.10^{62}$	$-4,6 \times 10^{21}$	$-9,2.10^4$	$1,38.10^{-60}$	$2,27.10^{-7}$	$2,29 \times 10^{-8}$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \ln(x)) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) = +\infty$$

Exercice 7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 + \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 + \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 5 + \ln(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x - \ln(x) = -\infty$$

Activité 4 : Limites à l'infini des fonctions : $x \rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$

- L'objectif de cette activité est de connaître les limites des fonctions : $x \rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$
- Réponses aux questions de l'activité

1. a) Recopie et complète le tableau suivant avec la calculatrice

x	10^5	10^6	10^9
$3x^2 - 2x + 4$	$2,99 \times 10^{10}$	$2,99 \times 10^{12}$	$2,99 \times 10^{18}$
$\ln(3x^2 - 2x + 4)$	24,12	28,72	42,54

b) Il semble que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x^2 - 2x + 4) = +\infty$

2. a) Recopie et complète le tableau suivant avec la calculatrice

x	-10^5	-10^6	-10^9
$3x^2 - 2x + 4$	3×10^{10}	3×10^{12}	3×10^{18}
$\ln(3x^2 - 2x + 4)$	24,12	28,72	42,54

b) Il semble que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3x^2 - 2x + 4) = +\infty$

Exercice 8

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1) = +\infty$; 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + x + 1) = +\infty$
 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x - 6) = +\infty$; 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + x - 6) = +\infty$

Activité 5 : Limites en zéro des fonctions : $x \rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$

- L'objectif de cette activité est de connaître les limites en zéro des fonctions : $x \rightarrow \ln(ax^2 + bx + c)$
- Réponses aux questions de l'activité

1. a) $\lim_{x \rightarrow -2}^> 4 - x^2 = 0$

b)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4 - x^2$	-		+	-

donc $\forall x \in]-2; 2[, 4 - x^2 > 0$

2. a) on a

x	-1,99996	-1,99997	-1,99998	-1,99999
$4 - x^2$	0,00015	0,00011	0,00007	0,00003
$\ln(4 - x^2)$	-8,80	-9,11	-9,56	-10,41

b) il semble que $\lim_{x \rightarrow -2}^> \ln(4 - x^2) = -\infty$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 9

$$\lim_{x \rightarrow 2}^> (x^2 + x - 6) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -3}^< (x^2 + x - 6) = -\infty$$

Exercice 10

$$\lim_{x \rightarrow -1}^< (x^2 - x - 2) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2}^> (x^2 - x - 2) = -\infty$$

Activité 6 : Conséquence du sens de variation de la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la conséquence du sens de variation de la fonction ln :
- Réponses aux questions de l'activité

1. Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ d'où $\frac{1}{x} > 0$ donc, $f'(x) > 0$. D'où la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. a) $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

b) $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 11

a) $\ln 1 < \ln 3$; b) $\ln \frac{1}{2} > \ln \frac{1}{7}$; c) $\ln(2022) > \ln(563)$;

d) $\ln 8 = 3 \ln 2$

Exercice 12

a) $5 < 7 \Rightarrow \ln 5 < \ln 7$

b) $\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} < \ln \sqrt{3}$

c) $29^2 = 841$ et $(4\sqrt{5})^2 = 400$

$(4\sqrt{5})^2 < 29^2 \Rightarrow 4\sqrt{5} \leq 29 \Rightarrow \ln 4\sqrt{5} < \ln 29$

Activité 7: Signe de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$

- L'objectif de cette activité est de connaître le signe de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- Réponses aux questions de l'activité

1. a) $x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1$

$\Leftrightarrow \ln x < 0$

b) $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1$

$\Leftrightarrow \ln x > 0$

2. si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$ et si $x > 1$ alors $\ln x > 0$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 13

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai

Activité 8: Dérivée et sens de variation

- L'objectif de cette activité est de déterminer la dérivée et le sens de variation des fonctions comportant \ln .

- Réponses aux questions de l'activité

1. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$ et Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

2. La dérivée de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est la fonction $x \mapsto 2ax + b$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 14

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$,

a) $f'(x) = -\frac{1}{x}$; b) $g'(x) = 7 + -\frac{1}{x}$; c) $h'(x) = -9 - \frac{1}{x}$;

Exercice 15

1. A ; 2. B ; 3. C ; 4. A ; 5. C ; 6. A

Exercice 16

a) Pour tout $x \in]-4; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x+4}$

2. Pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, $f'(x) = \frac{-2}{-2x+1}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. vrai

Activité 9: Le nombre réel e

- L'objectif de cette activité est de connaître une valeur approchée du nombre e .
- Réponses aux questions de l'activité

1. La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc elle est une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

2. La fonction \ln est une bijection et $1 \in \mathbb{R}$, il existe donc un et un seul nombre réel e tel que son logarithme népérien soit égale à 1.

On a : $\ln(e) = 1$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 17

$$\ln(e^{-5}) = -5 ; \ln(e^2) + (\ln e)^2 + 2\ln(e^3) = 9 ;$$

$$\ln(e^{-5}) + (\ln(e^3))^2 + 2\ln(e^{-1}) = 2$$

Activité 10: Courbe représentative de la fonction \ln

- L'objectif de cette activité est de représenter graphiquement la fonction \ln .
- Réponses aux questions de l'activité

1. Le tableau de variation de la fonction \ln

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	+	
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la courbe représentative de la fonction \ln admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) (droite des abscisses)

3. $(T_1) : y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$

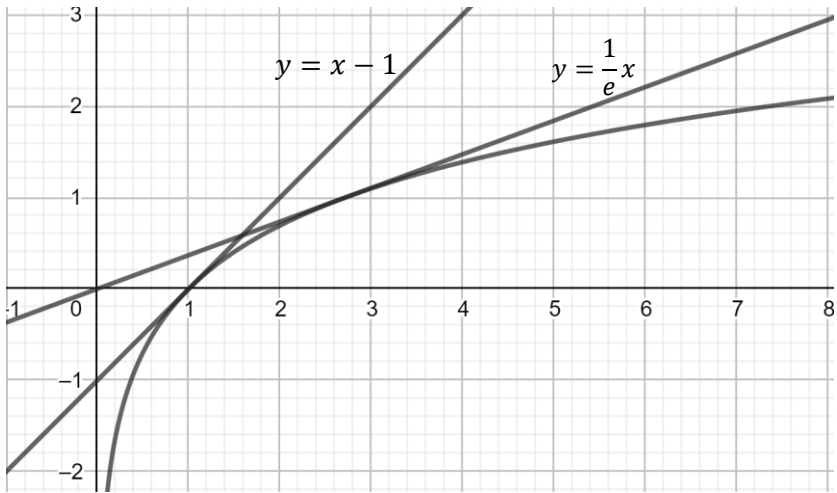
$$(T_e) : y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x$$

4.

a	0,25	0,5	1	2	e	3	4	5	6	7
$\ln a$	-1,38	-0,69	0	0,69	1	1,09	1,38	1,60	1,79	1,94

5. Plaçons chacun des points puis construisons la courbe représentative de la fonction \ln dans le plan muni d'un repère orthonormé.

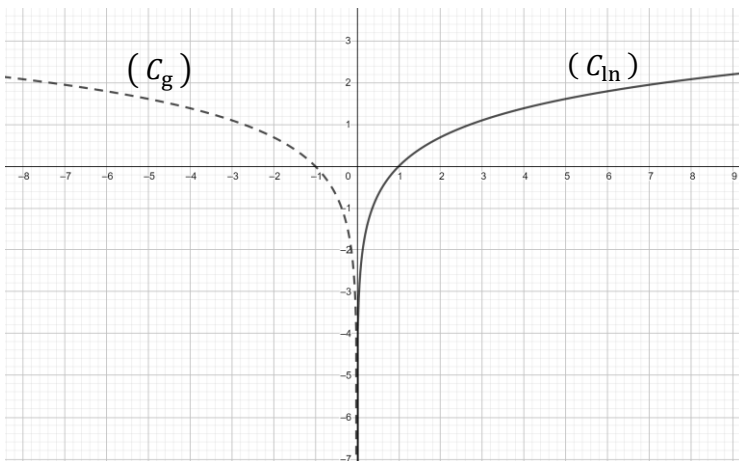
6. Courbe représentative de la fonction \ln .



- Corrigé des exercices de fixation
Exercice 18

Courbe 1

Exercice 19



Activité 11: Equations faisant intervenir la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de résoudre les équations faisant intervenir la fonction ln.
- Réponses aux questions de l'activité

1.a) $\ln(x - 1)$ existe si $x - 1 > 0$ et $\ln(5 - x)$ existe si $5 - x > 0$

b) $x - 1 > 0$ et $5 - x > 0$ donc $1 < x < 5$

par suite l'équation existe si $x \in]1; 5[$

2. a) Pour $x \in]1; 5[$

$$\ln(x - 1) = \ln(5 - x) \Leftrightarrow x - 1 = 5 - x$$

b) $x - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x = 3$

comme $3 \in]1; 5[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 20

a) $1 - x > 0$ donc $x < 1$

par suite l'équation existe si $x \in]-\infty; 1[$

Pour $x \in]-\infty; 1[$

$$\ln(1 - x) = -2 \Leftrightarrow 1 - x = e^{-2} \Leftrightarrow x = 1 - e^{-2}$$

comme $1 - e^{-2} \in]-\infty; 1[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{1 - e^{-2}\}$

b) $3x - 4 > 0$ et $x^2 - 4 > 0$ par suite

l'équation existe si $x \in]2; +\infty[$

Pour $x \in]-\infty; 1[$

$$\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4) \Leftrightarrow 3x - 4 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou}$$

$x = 3$ comme $3 \in]2; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

c) $x > 0$ par suite l'équation existe si $x \in]0; +\infty[$

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[\ln(x) = -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2e}}$$

comme $e^{-\frac{1}{2e}} \in]0; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{e^{-\frac{1}{2e}}\right\}$.

d) $x + 5 > 0$ et $x - 2 > 0$

par suite l'équation existe si $x \in]2; +\infty[$

Pour $x \in]2; +\infty[$

$$\ln(x + 5) = 2\ln 2 - \ln(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{65})$$

$$\text{ou } x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{65})$$

Comme $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{65}) \notin]2; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2}(3 + \sqrt{65}) \right\}$

e) $x > 0$ par suite l'équation existe si $x \in]0; +\infty[$

Pour $x \in]0; +\infty[$

$$(x^2 - 1)\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Comme $-1 \notin]0; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{ 1 \}$

Activité 12: Inéquations faisant intervenir la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de résoudre les inéquations faisant intervenir la fonction ln.
- Réponses aux questions de l'activité

1. a) (E) existe si et seulement si $x - 1 > 0$ et $5 - x > 0$

b) $x - 1 > 0$ et $5 - x > 0$ équivaut à $x \in]1; 5[$

2. a) Pour tout $x \in]1; 5[$, $\ln(x - 1) \geq \ln(5 - x) \Leftrightarrow x - 1 \geq 5 - x$

b) $x - 1 \geq 5 - x \Leftrightarrow x \geq 3$

on a $x \in]1; 5[$ et $x \in [3; +\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}} = [3; 5[$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21

- a) $1 - x^2 > 0$ donc l'équation existe si $x \in]-1; 1[$
Pour $x \in]-1; 1[$
 $\ln(1 - x^2) > \ln e \Leftrightarrow x^2 < 1 - e$ impossible car $1 - e < 0$
alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

- b) $x^2 - 4e^2 > 0$ et $3x > 0$
par suite l'équation existe si $x \in]2e; +\infty[$
Pour $x \in]2e; +\infty[$
 $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4e^2 - 3xe}{3x} < 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

alors $S_{\mathbb{R}} =]2e; 4e[$

- c) $x + e > 0$ et $x - e > 0$
par suite l'équation existe si $x \in]e; +\infty[$
Pour $x \in]e; +\infty[$
 $\ln((x + e)(x + e)) \leq \ln(3e^2) \Leftrightarrow x^2 - 4e^2 \leq 0$
alors $S_{\mathbb{R}} =]e; 2e]$

- d) $2 - x > 0$ et $2 > x$
par suite l'équation existe si $x \in]-\infty; 2[$
Pour $x \in]-\infty; 2[$
 $\ln(2 - x) > 2 \Leftrightarrow x < 2 - e^2$
alors $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 2 - e^2[$

- e) $\frac{x-2}{1-x} > 0$ et $x > 0$ par suite l'équation existe si $x \in]1; 2[$
Pour $x \in]1; 2[$
 $\ln\left(\frac{x-2}{1-x}\right) < \ln x \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
Comme $-1 \notin]0; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} =]\sqrt{2}; 2[$

Exercice 22

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,95 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \text{soit} \quad n > 13,58$$

Le plus petit entier est 14

Activité 13: Primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$

- L'objectif de cette activité est de déterminer les primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$.
- Réponses aux questions de l'activité

1. Pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$

2. Pour $x \in]-\infty; 2[$, $g'(x) = \frac{-1}{2-x}$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{-1}{2-x}$ est $x \mapsto \ln(-x + 2)$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{6x}{3x^2+1}$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{6x}{3x^2+1}$ est $x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 23

1. Une primitive de $f(x) = \frac{1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$ est $F(x) = \ln|x + 2| = \ln(x + 2)$

2. Une primitive de $f(x) = \frac{-5}{-5x+1}$ sur $] -\infty; \frac{1}{5}[$ est $F(x) = \ln|-5x + 1| = \ln(-5x + 1)$

3. Une primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$ sur \mathbb{R} est $F(x) = \ln|x^2 + x + 5| = \ln(x^2 + x + 5)$

Exercice 24

Les primitives de $f(x) = \frac{2}{2x-3}$ sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ sont les fonctions

$$F(x) = \ln|2x - 3| + c = \ln(2x - 3) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Les primitives de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$F(x) = \ln|x^2 + x + 1| + c = \ln(x^2 + x + 1) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

III-Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment réduire une expression comportant \ln ?

Solution de l'exercice non corrigé

$$B = \ln(2^5) - 5 \ln(3 \times 2^4) + \ln(\sqrt{3^2 \times 2^3})$$

$$B = -\frac{27}{2} \ln(2) - 4 \ln(3)$$

Question 2 : Comment résoudre une équation ou une inéquation comportant \ln ?

Solution de l'exercice non corrigé

Les contraintes sur l'inconnue sont : $x^2 - 1 > 0$ et $5 - x > 0$ donc on a

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; 5[$$

$$\text{Pour } x \in]-\infty; -1[\cup]1; 5[, \ln(x^2 - 1) = \ln(5 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 5 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0$$

Le discriminant est égal à 25 d'où $x = -3$ ou $x = 2$

or $x \in]-\infty; -3[\cup]1; 5[$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \{-3; 2\}$$

IV-Mes séances d'exercices

- Exercices de fixation
- ✓ Définition et propriétés

Exercice 1

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est \mathbb{R}	Faux
$\ln(1) = 0$	Vrai
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	Vrai
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	Faux
L'image d'un nombre négatif par la fonction \ln existe.	Faux

Exercice 2

$$\text{On a : } A = \ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = \ln 2^3 + \ln 3 = 3\ln 2 + \ln 3$$

$$B = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$$

$$C = \ln(3^5) - \ln(2^4) = 5\ln 3 - 4\ln 2$$

Exercice 3

$$\text{On a : } D = \ln(5) + \ln(3) = \ln(5 \times 3) = \ln(15)$$

$$E = \ln(2) - \ln(0,1) = \ln\left(\frac{2}{0,1}\right) = \ln(20)$$

$$F = 4 \ln 5 = \ln(5^4) = \ln(625)$$

$$G = 2 \ln(3) + \ln(2) - \ln(6) =$$

$$2 \ln(3) + \ln(2) - \ln(2) - \ln(3) = \ln(3)$$

Exercice 4

$$A = \ln(e^5) = 5$$

$$B = \ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(1 - \sqrt{2}) &= \ln\left((1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})\right) = \\ \ln(2 - 1) &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 6

a) $\ln(4 \times 9) = \ln(4) + \ln(9)$

b) $\ln(4x) = \ln(4) + \ln(x)$

c) $\ln(7\pi) = \ln(7) + \ln(\pi)$

Exercice 7

a) $2 \ln 3 = \ln 9$ et $3 \ln 2 = \ln 8$ comme $\ln 9 > \ln 8$

alors $2 \ln 3 > 3 \ln 2$

b) $\ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$ et $\ln 12 - \ln 5 = \ln \frac{12}{5}$ comme $\ln \frac{12}{5} < \ln \frac{5}{2}$

alors $\ln 12 - \ln 5 < \ln 5 - \ln 2$

✓ Limites

Exercice 8

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + \ln x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(5 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{\ln x}{x}\right) = 5$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x(-2 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x + x \ln x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 2x - 3)) = +\infty$
 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(x^2 + 2x - 3)) = +\infty$

Exercice 9

1. c ; 2. a ; 3. b ; 4. a ; 5. c

Exercice 10

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x) = +\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 5 \ln x) = -\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 + \ln x) = +\infty$

Exercice 11

- a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} (\ln(x^2 + 2x - 3)) = -\infty ;$
 b) $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ <}} (\ln(x^2 + 2x - 3)) = -\infty.$
 c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ <}} (\ln(-x^2 + 3x + 10)) = -\infty ;$
 d) $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ >}} (\ln(-x^2 + 3x + 10)) = -\infty.$

✓ **Sens de variations**

Exercice 12

1. c ; 2. b ; 3. A ; 4. b ; 5. B

Exercice 13

1. b ; 2. a ; 3. c ; 4. b

Exercice 14

1. Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$.

2. Sens de variation de f .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $3 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 15

1. Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$.

2. Sens de variation de f .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $1 - x$

Pour tout $x \in]0; 1[$, $1 - x > 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $1 - x < 0$

Donc pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$

Par suite f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Exercice 16

1. Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = 5 - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x}$.

2. Sens de variation de f .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $5x - 1$

Pour tout $x \in]0; \frac{1}{5}[$, $5x - 1 < 0$ donc $f'(x) < 0$

et pour tout $x \in]\frac{1}{5}; +\infty[$, $5x - 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$

Par suite f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{5}[$, et f est strictement croissante sur $]\frac{1}{5}; +\infty[$.

Exercice 17

1. Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} = -\frac{x+1}{x}$.

2. Sens de variation de f .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $-\frac{x+1}{x} < 0$ donc $f'(x) < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 18

1) Pour $x \in]-2; 1[$, $f'(x) = \frac{-2x+3}{-x^2+3x-2}$

2) Pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $f'(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x-1}$

Exercice 19

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$

2) Pour $x \in]\frac{2}{3}; 1[$, $f'(x) = \frac{-6x+5}{-3x^2+5x-2}$

✓ Résolution d'équations et d'inéquations comportant ln

Exercice 20

a) $S_{\mathbb{R}} = \{5\}$; b) $S_{\mathbb{R}} = \{e^3\}$; c) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$; d) $S_{\mathbb{R}} = \{e^2 - 1\}$
; e) $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

Exercice 21

1) $\ln(2x - 1) = \ln(x + 5)$

2) $\ln(x - 3) = 5$

Ensemble de validité V

Ensemble de validité V

$x \in V \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$ et $x + 5 > 0$

$x \in V \Leftrightarrow x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ et $x > -5$

$\Leftrightarrow x > 3$

$V =]\frac{1}{2}; +\infty[$

$V =]3; +\infty[$

$\ln(2x - 1) = \ln(x + 5)$

$x - 3 = e^5$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$

$x = e^5 + 3$

$\Leftrightarrow x = 6$

$S_{\mathbb{R}} = \{e^5 + 3\}$

$S_{\mathbb{R}} = \{6\}$

$$3)(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

Posons : $X = \ln x$.

L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$

Résolution de cette équation :

$$\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$$

$$X = \frac{-1 - 5}{2} \text{ ou } X = \frac{-1 + 5}{2}$$

$$X = -3 \text{ ou } X = 2,$$

On obtient :

$$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X = -3 \text{ ou } X = 2 \Leftrightarrow \ln x = -3 \text{ ou } \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-3} \text{ ou } x = e^2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-3}; e^2\}$$

Exercice 22

- a) $V =]-\infty; 2[; S_{\mathbb{R}} = \{2 - e\}$; b) $V =]0; +\infty[; S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$
c) $V =]0; +\infty[; S_{\mathbb{R}} = \{e^2\}$; d) $V =]0; +\infty[; S_{\mathbb{R}} = \{e^2; e^{-1}\}$

Exercice 23

- a) $V =]0; +\infty[; S_{\mathbb{R}} =]3; +\infty[$; b) $V =]0; +\infty[; S_{\mathbb{R}} =]0; e^7]$
c) $V =]1; +\infty[; S_{\mathbb{R}} =]1; +\infty[$; d) $V =]-1; +\infty[; S_{\mathbb{R}} =]e^2 - 1; +\infty[$
e) $V = \left] \frac{5}{2}; +\infty[; S_{\mathbb{R}} = \left] \frac{5}{2}; 3[$

Exercice 24

a) $V =]0; +\infty[$; $S_{\mathbb{R}} = \{e^{-3}\}$; b) $V =]0; +\infty[$;
 $S_{\mathbb{R}} = \{e^9\}$

c) $V = \left] \frac{1}{3}; +\infty[$; $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1+e^5}{3} \right\}$; d) $V =]7; +\infty[$;
 $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{7+\sqrt{57}}{2} \right\}$

✓ Primitives

Exercice 25

a) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$
et $I =]0; +\infty[$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$, sont les fonctions F telles que :
 $F(x) = \ln(x) + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

b) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle :

$$f(x) = \frac{2}{-3x+7} \text{ et } I = \left] -\infty; \frac{7}{3} \right[$$

Les primitives de f sur $\left] -\infty; \frac{7}{3} \right[$ sont les fonctions F telles que :

$$F(x) = -\frac{2}{3} \ln(-3x+7) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

c) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3} \text{ et } I =]0; +\infty[$$

Soit $u(x) = x^2 + x + 3$ et $u'(x) = 2x + 1$

On a : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et pour $x \in]0; +\infty[$, $u(x) > 0$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions F telles que :

$$F(x) = \ln(x^2 + x + 3) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 26

a) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que :

$$f(x) = -\frac{1}{x} \text{ et } I =]0; +\infty[$$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\ln(x) + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

b) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle : $f(x) =$

$$\frac{1}{2x-3} \text{ et } I = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

Les primitives de f sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x - 3) + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

c) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle : $f(x) =$

$$\frac{-4x+5}{-2x^2+5x-3} \text{ et } I = \left] 1; \frac{3}{2} \right[$$

Les primitives de f sur $\left] 1; \frac{3}{2} \right[$ sont les fonctions F telles que :

$$F(x) = \ln(-2x^2 + 5x - 3) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

➤ Exercices de renforcement / Approfondissement

Exercice 27

$$V =]1; +\infty[\quad ; \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{ e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} ; e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \right\}$$

Exercice 28

$$1. \quad 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n > 7,53$$

$$\text{Donc } n_0 = 8$$

$$\begin{aligned}
2. \quad 0,999^n < 10^{-100} &\Leftrightarrow n \ln(0,999) < -100 \ln(10) \\
&\Leftrightarrow n \ln(0,999) < -100 \ln(10) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{-100 \ln(10)}{\ln(0,999)} \\
&\Leftrightarrow n > 23014,36
\end{aligned}$$

le plus petit entier n est 23015

$$\begin{aligned}
3. \quad (1,3)^n \leq 5 &\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 5}{\ln(1,3)} \\
&\Leftrightarrow n \leq 6,13
\end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exercice 29

$$1. \quad A(x) = \ln(5x) + \ln\left(\frac{x}{5}\right) + \ln(e^2) = \ln(5) + \ln(x) + \ln(x) - \ln(5) + 2 = 2 \ln(x) + 2$$

$$2. \quad \text{Pour } x \in]0; +\infty[; \quad A(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) + 2 = 0$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1}\}$

Exercice 30

$$1. \quad V =]-2; 3[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}; \quad 2. \quad V =]-\infty; -2[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = \{1\}$$

$$3. \quad V =]-3; +\infty[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = \{-1; -2\}; \quad 4. \quad V =]0; +\infty[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1}; e^2\}$$

$$5. \quad V =]0; +\infty[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = \{e^{-7}; e^{11}\}$$

$$6. \quad V = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[\cup]2; +\infty[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$$

$$7. \quad V =]-\infty; 3[\quad \text{et} \quad S_{\mathbb{R}} = [-2; 3[$$

$$8. =]0; +\infty[\text{ et } S_{\mathbb{R}} = \left[e^{-\frac{1}{2}}; e^2 \right]$$

Exercice 31

1) 1. $\Delta = 49 - 4 \times 2 \times 6 = 25$

$$x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-7+5}{4} = 3;$$

$$S_3 = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

2. a) $P(-1) = 2 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - (-1) + 6$
 $= -2 - 5 + 1 + 6 = 0.$

b)

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 - x + 6 & x + 1 \\
 \hline
 -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - 7x + 6 \\
 \hline
 -7x^2 - x & \\
 \hline
 -(-7x^2 - 7x) & \\
 \hline
 6x + 6 & \\
 \hline
 -(6x + 6) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 - 7x + 6)$$

3. $P(x) = 0$

$$(x + 1)(2x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 3.$$

$$S_3 = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

4. Ensemble de validité : $V =]0; \infty[$. En posant $X = \ln x$,
l'équation devient $2X^2 - 5X^2 - X + 6 = 0$

D'après 3), on a : $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3$.

Par suite, $\ln x = -1$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = 3$.

Soit $X = e^{-1}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e^3$.

$$S_3 = \left\{ e^{-1}; e^{\frac{1}{2}}; e^3 \right\}.$$

Exercice 32

1. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{x+1}{x}$.
2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{x+1}{x} > 0$. Or $-1 < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
On a $f(x) = x \left(\frac{4}{x} - 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
4. Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 33

1. Pour tout $x \in]1; 2[$, $f'(x) = \frac{-2x+3}{-x^2+3x-2}$.
2. Pour tout $x \in]1; 2[$, $x^2 - 2x - 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x + 3$.
 $-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$
 $-2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$
 $f'(x) > 0$ sur $]1; \frac{3}{2}[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\frac{3}{2}; 2[$.
Donc f est strictement croissante sur $]1; \frac{3}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\frac{3}{2}; 2[$.

Tableau de variation de f

x	1	$\frac{3}{2}$	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	-1,38	$-\infty$

Exercice 34

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) = +\infty$.
 b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} (x - 2) = 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x - 2$ est asymptote verticale à (C) .

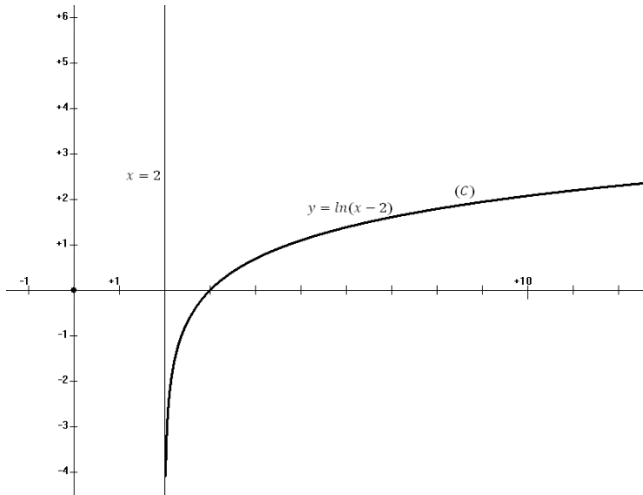
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x-2}$.
- Pour tout $x \in]2; +\infty[$, $x - 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		$+\infty$

- a) Voir énoncé.

x	2,25	2,5	3	5	7	10
$f(x)$	-1,4	1,6	0	1,1	1,6	2,1

b) Tracé de la courbe.



Exercice 35

1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à (C) .

2. Pour tout $x \in]-\infty; 3[$, $f'(x) = \frac{-1}{3-x}$.

3. Pour tout $x \in]-\infty; 3[$, $3 - x > 0$. Or $-1 < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 3[$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$.

x	$-\infty$	3
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4. (T): $y = f'(x)(x - 2) + f(2)$

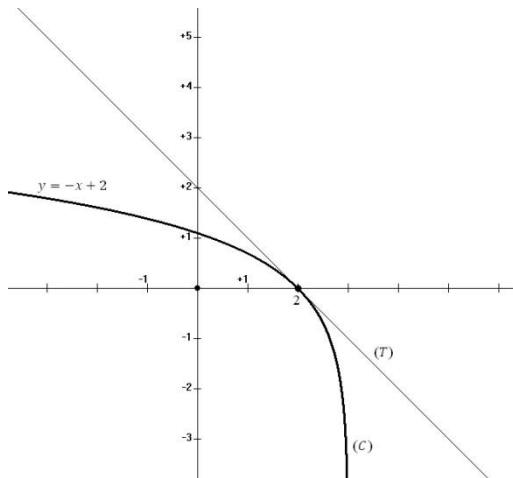
$y = -1(x - 2) + 0.$

(T): $y = -x + 2.$

5. a)

x	-5	-3	0	1	2	2,25	2,5	2,75
$f(x)$	2,1	1,8	1,1	0,7	0	-0,3	-0,7	-1,4

b) Construction de la courbe :



Exercice 36

1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -1}^<(x^2 - 2x - 3) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -1}^< f(x) = -\infty.$

$\lim_{x \rightarrow 3}^>(x^2 - 2x + 3) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 3}^> f(x) = -\infty.$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C).

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à (C).

2. Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}.$

3. Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, $x^2 - 2x - 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x - 2$.

$$2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x > 1;$$

$$2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

$f'(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$.

Donc f est strictement croissante sur $]3; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

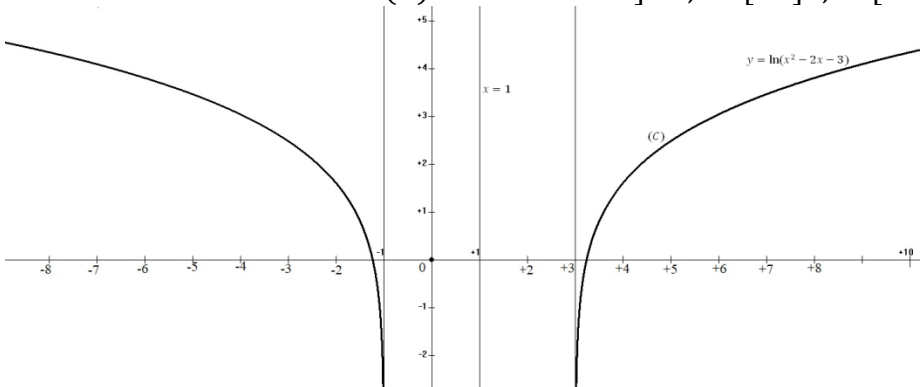
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	$+\infty$ ↙ $-\infty$				$+\infty$ ↗ $-\infty$

4. Pour tout $x \in D_f$ tel que $(2 - x) \in D_f$, on a :

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= \ln((2 - x)^2 - 2(2 - x) - 3) \\ &= \ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3) \\ &= \ln(x^2 - 2x - 3) = f(x). \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C) .

5. Construction de la courbe (C) sur l'intervalle $]-8; -1[$ et $]3; 10[$



Exercice 37

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x + 2$.

$f'(x) < 0$ si $x < -1$ et $f'(x) > 0$ si $x > -1$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↙	0	↘ $+\infty$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(2(-1) - x) \in \mathbb{R}$ et

$$f((2(-1) - x)) = f(-2 - x).$$

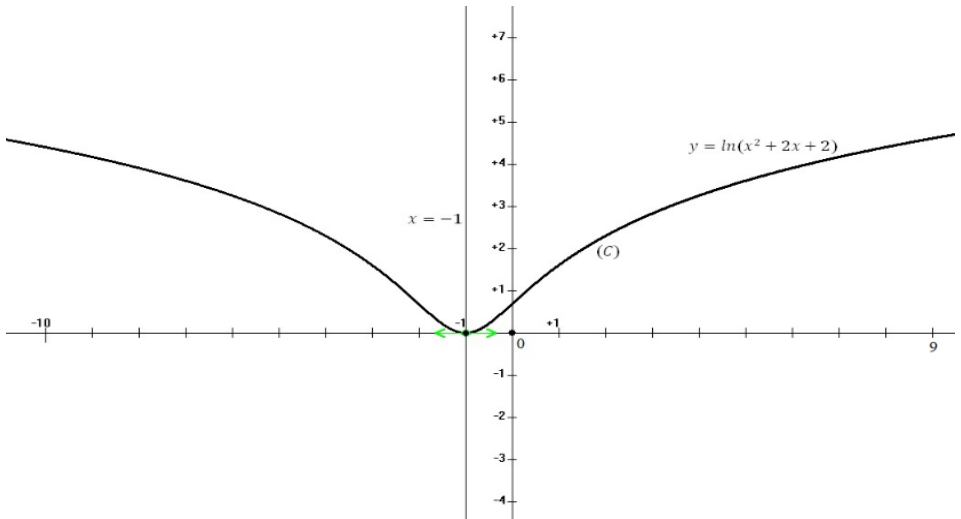
$$= \ln((-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 2)$$

$$= \ln(4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2)$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 2) = f(x).$$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C) .

5. Construction de (C) sur l'intervalle $[-10; 9]$.



Exercice 38

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

b) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C) .

2 a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$.

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ et

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0; 1[$.

c) f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

donc f admet un maximum en 1 qui est 2 par suite

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) < 2$

3. Tableau de variation

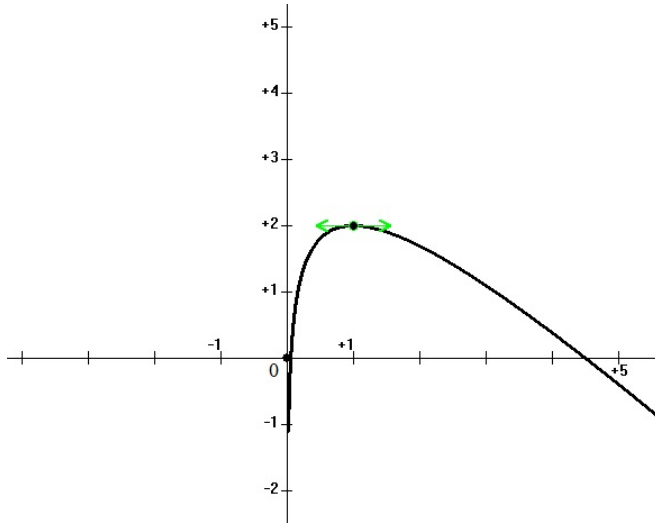
x	1	5
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	2	$-2\ln 5$

4. f est dérivable et strictement décroissante sur $[1; 5]$ en particulier sur $[4; 5]$.

De plus, $f(4) \simeq 0,38$ et $f(5) \simeq -0,39$ sont de signes contraires.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique comprise entre 4 et 5.

5. Construction de la courbe (C) sur l'intervalle $]0; 5]$.



Exercice 39

1. $D_f =]-2; +\infty[$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.
4. pour tout $x \in]-2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2+x}$.
- 5 f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \rightarrow +\infty$

6. $(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.
 $y = \frac{1}{4}(x - 2) + \ln 4$
 $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \ln 4$.

7. $V =]-2; +\infty[$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$S = \{-1\}.$$

Exercice 40

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C) .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{-x+2}{2x}$.

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 2$.

f est strictement croissante sur $]0; 2[$ et strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

c)

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$-\frac{1}{2} + \ln 2$	$-\infty$ $+\infty$

3. a) $f(1) = \frac{-1+1}{2} + \ln 1 = 0 + 0 = 0$.

b) f est dérivable et strictement décroissante sur $]3,5; 4[$.

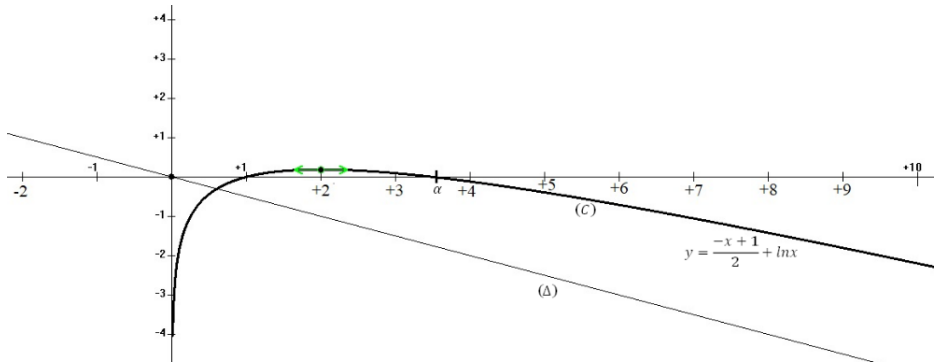
Aussi, $f(3,5) \simeq 0,003$ et $f(4) \simeq -0,11$ sont de signes contraires.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]3,5; 4[$.

c) $f(3,5) \simeq 0,003$ et $f(4) \simeq -0,11$.

$f(3,5) \times f(4) < 0$, donc $3,5 < \alpha < 4$.

4. Tracé de la courbe :



Série A1 uniquement

5. a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$F'(x) = -\frac{2x}{4} - \frac{1}{2} + \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 + \ln x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \ln x = f(x).$$

Donc F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

b) $A = \int_1^e f(x) dx$ u. a. $= (F(e) - F(1))$ u. a.

$$= \left(-\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}e + e - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0 \right) \right) \text{ u. a.}$$

$$= \left(-\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}e + \frac{3}{4} \right) \times 10 \text{ cm}^2.$$

$$= \left(-\frac{2,7^2}{4} + \frac{2,7}{2} + \frac{3}{4} \right) \times 10 \text{ cm}^2 = 2,775 \text{ cm}^2.$$

Exercice 41

1. On a : $\lim_{x \rightarrow 0^>} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^>} (-2x + 1 + \ln x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^>} (-2x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^>} (\ln x) = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^>} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 1 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = -2 \end{array} \right. \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. a) Pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -2x + 1 + \ln x$
 Donc pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -2 + \frac{1}{x} = \frac{-2x+1}{x}$.

b) Pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x + 1$.

$$f'(x) = 0 \text{ équivaut à } -2x + 1 = 0 \text{ équivaut à } x = \frac{1}{2}$$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

Pour tout $x \in]0; \frac{1}{2}[$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

Variations de f

f est strictement croissante sur $]0; \frac{1}{2}[$ et f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

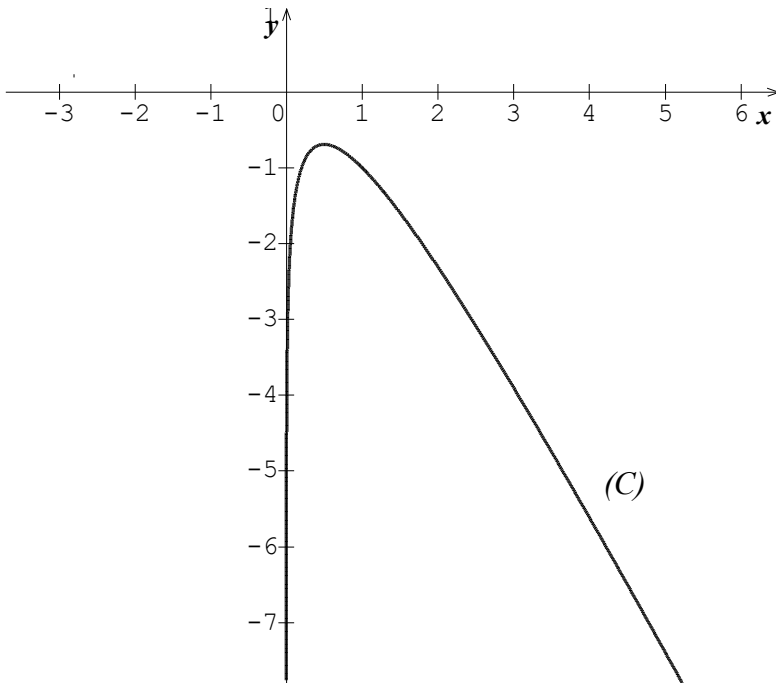
c) Le tableau de variation de f .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$-\ln 2$	$-\infty$

4. Recopions et complétons le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-3,2	-0,7	1	1,6	2,3	3,1	4	4,7	5,6

5. Construction (C) sur l'intervalle $]0; 4]$.



➤ **Situations complexes**

Exercice 42

- 1- $N_1 = 24335$ et $N_2 = 5192$
- 2- Bintou a raison

Exercice 43

Soit P_n la consommation de charbon au bout de n années

$$P_n = 10.000 \times (0,92)^n$$

$$10.000 \times (0,92)^n < 2000 \text{ équivaut à } n > 19.$$

Or en 2030 on aura $n = 12$.

Le pays ne gagnera donc pas cette lutte contre le réchauffement climatique.

I-SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

NB : Il ne faut pas parler de contexte, circonstance et de tâche aux élèves. Il faut poser directement les questions après la lecture et l'explication du texte.

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où ou quand se déroule la scène ?	En ligne sur les réseaux sociaux.
Circonstances	Indique pour quelle raison l'élève en classe de terminale sollicite les élèves de sa classe ? Quel est le problème auquel l'élève en classe de terminale est confronté ?	L'élève en classe de terminale éprouve des difficultés pour calculer le nombre de vues de sa vidéo n jour après sa mise en ligne
Tâche	Qu'ont décidé de faire les élèves de sa classe ?	Les élèves de sa classe ont décidé d'étudier la fonction exponentielle népérienne.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation puis annoncer le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation d'apprentissage durant tout le déroulement de la leçon.

II-DECOUVERTE DES HABILITES

Activité 1 : Définition et conséquences

- **Objectif :**

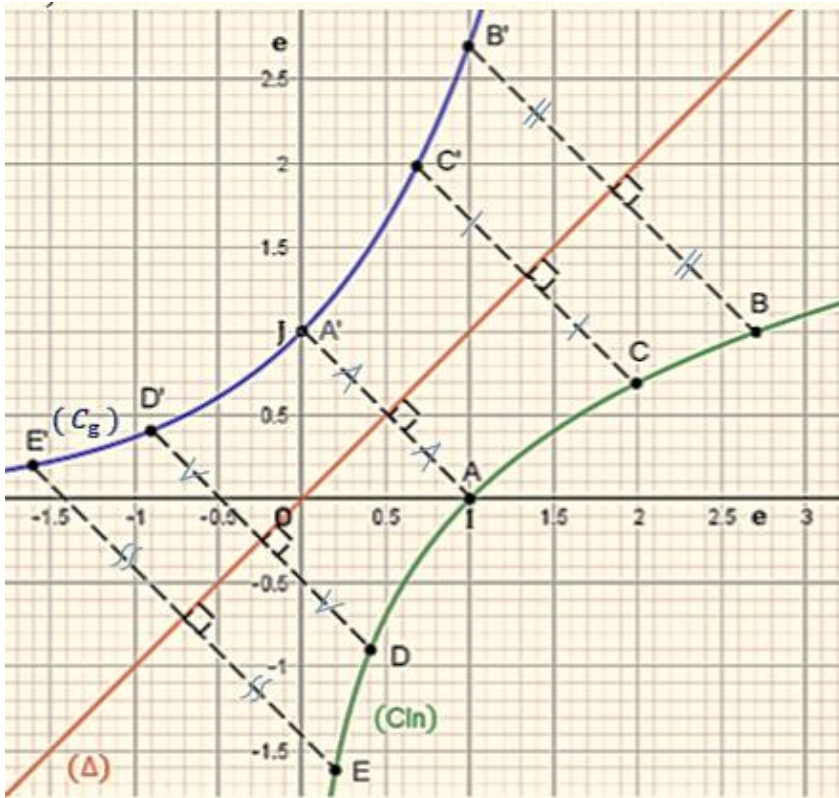
L'objectif de cette activité est de définir par une approche graphique, la fonction exponentielle népérienne à partir de la fonction logarithme népérien et dégager quelques conséquences liées à la définition.

- **Réponses aux questions**

1-

Points	E	D	A	C	B	F	G
x	0,2	0,4	1	2	e	4	5
$\ln x$	-1,6	-0,9	0	0,7	1	1,4	1,6

2-) et 3-a)



3-b) La fonction $x \mapsto \ln x$ prend ses valeurs dans \mathbb{R} tout entier car la fonction g est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$ donc l'ensemble de définition de g est \mathbb{R} .

c) Pour tout nombre réel $x \in [-1,6 ; 1] ; g(x) > 0$.

• **Corrigé des exercices de fixation**

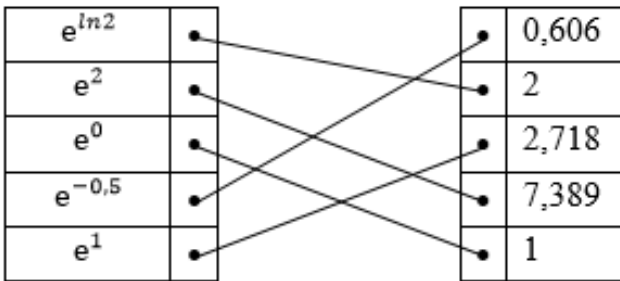
Exercice 1

1- La figure 2 est la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne.

2- L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne correspond aux ensembles :

$] -\infty ; +\infty [$ et \mathbb{R} .

Exercice 2



Exercice 3

Début d'affirmation	Réponses			
	supérieur à 1	strictement supérieur à 0	inférieur à 1	égale à 1
Pour tout nombre réel x , lorsque x est positif, e^x est :	×	×		
Pour tout nombre réel x , lorsque x est nul, e^x est :		×		×
Pour tout nombre réel x , lorsque x est négatif, e^x est :		×	×	
Pour tout nombre réel x , e^x est :		×		

Activité 2 : Limites de la fonction exponentielle népérienne

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer par une approche intuitive à l'aide de la calculatrice, les

limites de la fonction exponentielle népérienne suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}.$$

Réponses aux questions

1-

Tableau 1

x	-7	-5	-3
e^x	0,0009	0,0067	0,0497
xe^x	-0,0063	-0,0336	-0,1493

Tableau 2

x	7	10	20
e^x	1096,63	22026,46	485165195,4
$\frac{e^x}{x}$	156,661	2202,64	24258259,77

2- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc la droite (OI) d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exponentielle népérienne en $-\infty$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 4 :

1-D ; 2-C ; 3-A ; 4-A ; 5-B

Activité 3 : Propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est d'établir par une approche intuitive à l'aide de la calculatrice, les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne.

- **Réponses aux questions**

1-

Tableau 1

x	y	$e^{(x+y)}$	$e^x \times e^y$
2	3	148,413	148,413
-1	2	2,718	2,718

Tableau 3

x	y	$e^{(x \times y)}$	$(e^x)^y$
2	-3	0,002	0,002
-1	-2	7,389	7,389

Tableau 2

x	y	$e^{(x-y)}$	$\frac{e^x}{e^y}$
-2	3	0,007	0,007
-1	-2	2,718	2,718

Tableau 4

x	e^{-x}	$\frac{1}{e^x}$
2	0,135	0,135
-1	2,718	2,718

2- $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $e^{x \times y} = (e^x)^y$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 5 :

1-C ; 2-B ; 3-A ; 4-B

Exercice 6 :

$$e^7 \times e^5 = e^{12} ; e^8 \times e^{-5} = e^3 ; \frac{e^{11}}{e^{13}} = e^{-2} ; (e^{-2})^4 = e^{-8} ;$$
$$\frac{1}{e^{-2}} = e^2$$

Activité 4 : Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle népérienne

- **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de montrer que la fonction exponentielle népérienne est égale à sa fonction dérivée et de donner son sens de variation.

- **Réponses aux questions**

1- a) $f(0) = e^0 = 1$.

- b) La tangente en 0 à la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne passe par les points de coordonnées $(-1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$.

$$\text{Donc : } f'(0) = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1.$$

- 2- a) Justifions que pour tout nombre réel a , $f'(a) = e^a \times f'(0)$.

$$\text{On a : } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ et } f(x) = e^x$$

$$\text{D'où : } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^a \times e^h - e^a}{h}$$

$$\text{Soit : } f'(a) = e^a \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \text{ or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = f'(0).$$

$$\text{Donc : } f'(a) = e^a \times f'(0).$$

- b) Pour tout nombre réel a , $f'(a) = e^a \times f'(0)$ et $f'(0) = 1$, d'où : $f'(a) = e^a$.

$$\text{Donc pour tout nombre réel } x, f'(x) = e^x.$$

- 3- a) On a : $f'(x) = e^x$ et pour tout nombre réel x , $e^x > 0$.

Donc : pour tout nombre réel x , $f'(x) > 0$.

Par conséquent : la fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- b) pour tous nombres réels x et y , $e^x = e^y$ équivaut à $x = y$ et $e^x > e^y$ équivaut à $x > y$.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 7 :

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-V ; 5-V

Exercice 8 :

1-A ; 2-B ; 3-A ; 4-B

Activité 5 : Primitives des fonctions du type : $u'(x)e^{u(x)}$

• **Objectif :**

L'objectif de cette activité est de déterminer une primitive des fonctions du type $u'(x)e^{u(x)}$.

• **Réponses aux questions**

1- a) On a : $f'(x) = e^x$ et $g(x) = e^x$, d'où : $g(x) = f'(x)$.

Donc : une primitive de g est : $G(x) = f(x) = e^x$.

b) On a : $f'(x) = -5e^{-5x+9}$ et $g(x) = -5e^{-5x+9}$, d'où : $g(x) = f'(x)$.

Donc : une primitive de g est : $G(x) = f(x) = e^{-5x+9}$.

c) On a : $f'(x) = (6x - 6)e^{3x^2-6x-11}$ et $g(x) = (6x - 61)e^{3x^2-6x-11}$, d'où : $g(x) = f'(x)$

Donc : une primitive de g est : $G(x) = f(x) = e^{3x^2-6x-11}$.

2- On a : $g(x) =$

$u'(x)e^{u(x)}$. Donc : une primitive G sur K de g est : $G(x) = e^{u(x)}$.

• **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 9 :

✓ On a : $f(x) = 4e^{4x-2}$; posons : $u(x) = 4x - 2$, d'où : $u'(x) = 4$.

Donc : une primitive sur \mathbb{R} de f est : $F(x) = e^{4x-2}$.

✓ On a : $g(x) = 2xe^{x^2}$; posons : $u(x) = x^2$,
d'où : $u'(x) = 2x$.

Donc : une primitive sur \mathbb{R} de g est : $G(x) = e^{x^2}$.

✓ On a : $h(x) = (x + 2)e^{x^2+4x-1}$;
 Posons : $u(x) = x^2 + 4x - 1$, d'où : $u'(x)$
 $= 2x + 4$ et $(x + 2) = \frac{1}{2} u'(x)$.
 Donc : une primitive sur \mathbb{R} de h est :
 $H(x) = \frac{1}{2} u'(x)e^{u(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2+4x-1}$.

III-DES QUESTIONS D'EVALUATION

QUESTION 1 : Comment résoudre les équations comportant la fonction exponentielle népérienne ?

Solution de l'exercice non corrigé

1)

$$\text{On a : } 10e^{x-4} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = \frac{1}{2}$$

$$10e^{x-4} - 5 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = \ln \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où : } 10e^{x-4} - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - \ln 2. \text{ Donc : } S_{\mathbb{R}} = \{4 - \ln 2\}.$$

2)

$$\text{On a : } e^{3x+2} = e^{x+6} \Leftrightarrow 3x + 2 = x + 6.$$

$$\text{D'où : } e^{3x+2} = e^{x+6} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Donc : } S_{\mathbb{R}} = \{2\}.$$

3)

$$\text{On a : } 3e^{2x} - 7e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0.$$

Posons : $X = e^x$ avec $X > 0$.

$$\text{On obtient : } 3X^2 - 7X + 2 = 0.$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 ; \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\text{d'où : } X = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } X = \frac{7+5}{6} = 2.$$

$$\text{Pour } X = \frac{1}{3}, \text{ on a : } e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\ln 3$$

pour $X = 2$, on a : $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-\ln 3 ; \ln 2\}$.

4) On a :

$$2e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0.$$

Posons : $X = e^x$ avec $X > 0$.

On obtient : $2X^2 - 3X + 2 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7$$

$\Delta = -7 < 0$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

QUESTION 2 : Comment résoudre les inéquations comportant la fonction exponentielle népérienne ?

Solution de l'exercice non corrigé

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{x+1} - 1 < 0$.

On a : $e^{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0$.

D'où : $e^{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -1[$.

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation

$$e^{2x+1} \geq e^{-x+3}$$

$$e^{2x+1} \geq e^{-x+3} \Leftrightarrow 2x + 1 \geq -x + 3.$$

$$e^{2x+1} \geq e^{-x+3} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{2}{3} ; +\infty \right[$.

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 > 0.$$

Posons : $X = e^x$ avec $X > 0$.

On obtient : $X^2 - 5X + 4 > 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3 \text{ d'où : } X = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ ou } X = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Etudions le signe de $X^2 - 5X + 4$

X	0	1	4	$+\infty$	
$X^2 - 5X + 4$	+	0	-	0	+

$$X^2 - 5X + 4 > 0 \Leftrightarrow 0 < X < 1 \text{ ou } 4 < X$$

$$X^2 - 5X + 4 > 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1 \text{ ou } 4 < e^x$$

$$X^2 - 5X + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } \ln 4 < x$$

$$\text{Donc : } S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 0[\cup]\ln 4 ; +\infty[$$

4) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation

$$e^{2x} - 2e^x + 2 \leq 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 2 \leq 0.$$

Posons : $X = e^x$ avec $X > 0$.

On obtient : $X^2 - 2X + 2 \leq 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 \text{ et } a = 1 > 0$$

donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

QUESTION 3 : Comment déterminer la limite en un point

d'abscisse x_0 d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b +$

e^x ; $x \mapsto ax + b - e^x$; $x \mapsto (ax + b)e^x$; $x \mapsto \frac{e^x}{ax+b}$

Solution de l'exercice non corrigé

1-

• On a : $\lim_{x \rightarrow -3} k(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (-3x + 1 - e^x),$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 10 - e^{-3}.$

• On a : $\lim_{x \rightarrow -3} h(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^x}{x-1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -3} h(x) = -\frac{e^{-3}}{4}$

2-

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1}^< h(x) = \lim_{x \rightarrow 1}^< \frac{e^x}{x-1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1}^> h(x) = \lim_{x \rightarrow 1}^> \frac{e^x}{x-1} = +\infty$$

$$3- \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1}^< h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1}^> h(x) = +\infty$$

donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de h .

QUESTION 4 : Comment déterminer la limite à l'infini d'une fonction de chacun des types : $x \mapsto ax + b + e^x$; $x \mapsto ax + b - e^x$; $x \mapsto (ax + b)e^x$; $x \mapsto \frac{e^x}{ax+b}$

Solution de l'exercice non corrigé

1. limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune des fonctions f et g

• limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 3 + e^x),$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3 + e^x)$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x} \right).$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de g

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - e^x),$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - e^x)$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} \right).$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

2. limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune des fonctions h et k

- limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de h

$$\text{On a : } h(x) = (-3x + 1)e^x = -3xe^x + e^x$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3xe^x + e^x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -3xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

- limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de k

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-x + 2}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \left(\frac{1}{-x + 2} \right). \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x + 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left(\frac{1}{-1 + \frac{2}{x}} \right). \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} \right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$$

Question 5 : Comment déterminer une primitive des fonctions de chacun des types $x \mapsto e^{ax+b}$;

$$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$$

Solution de l'exercice non corrigé

- Une primitive sur \mathbb{R} de f est la fonction $x \mapsto -e^{-x+1}$.
- Une primitive sur \mathbb{R} de h est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2-3x+5}$

$$\text{car } h(x) = \frac{1}{2}(2x - 3)e^{x^2-3x+5}.$$

IV-MES SEANCES D'EXERCICES

➤ Exercices de fixation

✓ Définitions et conséquences

Exercice 1 :

1-(b) ; 2-(e) ; 3-(a) ; 4-(c) ; 5-(d).

Exercice 2 :

1-

Affirmations	Réponses
e^2 est un nombre positif	V
e^{-2} est un nombre négatif	F
e^0 est égal à 1	V
e^0 est égal à 0	F
$\ln e^x$ est égal à x	V

2- $a = 8$; $b = -5$; $c = 3$; $d = \frac{1}{2}$.

✓ Limites de fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne

Exercice 3

: 1-c ; 2-d ; 3-d ; 4-a ; 5-b

Exercice 4

a) On a : $f(x) = (-x + 3)e^x = (-xe^x + 3e^x)$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3)e^x$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 3e^x)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ car

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{array} \right.$$

b) On a : $h(x) = (-2x + e^x + 1) = x \left(-2 + \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2 + \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + e^x + 1)$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

c) On a : $g(x) = \frac{e^x}{x-3} = \frac{e^x}{x} \left(\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \right)$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left(\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \right)$

or : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \right) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases} ;$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+3}$, Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+3} = 0 \end{cases}$

✓ Propriétés algébriques

Exercice 5 :

$A = e^5 ; B = e ; C = 1 ; D = e^{-6}$

Exercice 6

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{5x} \times (e^{-2x})^3 &= e^{-x} & ; & & \text{b) } \frac{e^{2x}}{(e^{-x})^3} \\ &= e^{5x} & ; & & \text{c) } \frac{e^{2x} \times e^y}{e^{x+y}} = e^x \end{aligned}$$

Exercice 7

1-c ; 2-a ; 3-b

✓ **Equations et inéquations comportant la fonction exponentielle népérienne**

Exercice 8

1-

- A la première ligne de sa résolution : $e^{3-x} = 1$ équivaut à $3 - x = 1$, elle fait une mauvaise utilisation de la propriété : $e^a = b$ équivaut à $a = \ln b$.
- Pour l'ensemble solution, elle devait écrire simplement la valeur de x trouvée.

2-

On a : $e^{3-x} = 1$ équivaut à $3 - x = \ln 1$.

$$e^{3-x} = 1 \text{ équivaut à } 3 - x = 0$$

$$e^{3-x} = 1 \text{ équivaut à } x = 3$$

$$\text{Donc : } S_{\mathbb{R}} = \{3\}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{2-x} = e^{2x-1} \text{ équivaut à } x = 1 & & \text{b) } S_{\mathbb{R}} = \emptyset \text{ car} \\ S_{\mathbb{R}} = \{1\} & & \forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2e^x = e^{2x+1} \text{ équivaut à } x = \ln 2 - 1 \\ S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2 - 1\} \end{aligned}$$

$$\text{d) } e^{2x} - 4e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 5 = 0$$

On pose : $X = e^x ; X > 0$.

On obtient : $X^2 - 4X - 5 = 0$.

D'où : $X = -1$ ou $X = 5$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 5\}$

- e) $2e^{2x} - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - e^x + 1 = 0$
 On pose : $X = e^x ; X > 0$.
 On obtient : $2X^2 - X + 1 = 0$.
 $\Delta < 0$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Exercice 10 :

Ⓒ-Ⓐ-Ⓓ-Ⓑ

Exercice 11

- a) $e^{1-x} < e^{3x+1}$ équivaut à $x > 0$; $S_{\mathbb{R}} =]0 ; +\infty[$
- b) $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ car $\forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0$
- c) $2e^x > e^{2x-1}$ équivaut à $x < \ln 2 + 1$
 $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; \ln 2 + 1[$
- d) $e^{2x} - 4e^x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 5 \geq 0$
 On pose : $X = e^x ; X > 0$.
 On obtient : $X^2 - 4X - 5 \geq 0$.
 D'où : $X \geq 5$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = [\ln 5 ; +\infty[$.
- e) $e^{2x} - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + 1 > 0$
 On pose : $X = e^x ; X > 0$.
 On obtient : $X^2 - X + 1 > 0$.
 $\Delta < 0$ et $a > 0$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.
- f) $e^{2x} - e^x + 1 < 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 < 0$
 On pose : $X = e^x ; X > 0$.
 On obtient : $X^2 - 2X + 3 < 0$.
 $\Delta < 0$ et $a > 0$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
- g) $e^{2x} - 6e^x + 5 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + 1 > 0$
 On pose : $X = e^x ; X > 0$.
 On obtient : $X^2 - 6X + 5 > 0$.
 D'où : $X < 1$ ou $X > 5$;
 donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 0[\cup]\ln 5 ; +\infty[$.

✓ **Dérivées de fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne**

Exercice 12 :

1-b ; 2-d ; 3-a ; 4-c

Exercice 13

a) $f(x) = (1 - x)e^x$
 $f'(x) = -xe^x$

b) $f(x) = 1 - 2x - e^x$
 $f'(x) = -2 - e^x$

c) $f(x) = e^{2-3x}$
 $f'(x) = -3e^{2-3x}$

Exercice 14

$f(x) = (5 - 3x)e^x$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = (2 - 3x)e^x$

$g(x) = e^{x^2-x+3}$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $g'(x) = (2x - 1)e^{x^2-x+3}$

$k(x) = \frac{e^x}{2 - x}$
 $D_k = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et
 $k'(x) = \frac{(3 - x)e^x}{(2 - x)^2}$

✓ **Variations de fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne**

Exercice 15

Affirmations	Réponses
La fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .	F
Pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$; f est strictement croissante.	V
Le nombre dérivé de f en -1 est nul	V
f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$.	F
Pour tout $x \in]-\infty ; -1[$; $f'(x) < 0$.	V
L'image de -1 par f est négative.	V

Exercice 16

g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0,5[$. Donc : pour tout $x \in]-\infty ; 0,5[$; $g'(x) > 0$.

g est strictement décroissante sur $]0,5 ; +\infty[$. Donc : pour tout $x \in]0,5 ; +\infty[$; $g'(x) < 0$.

Exercice 17

- $f(x) = (x - 2)e^x$
1- $f'(x) = (x - 1)e^x$
2- On a : $\forall x \in]-\infty ; 3[; e^x > 0$

D'où : $f'(x)$ et $(x - 1)$ ont le même signe sur $]-\infty ; 3[$.

Or : $\forall x \in]-\infty ; 1[, x - 1 < 0$

et $\forall x \in]1 ; 3[, x - 1 > 0$

D'où : $\forall x \in]-\infty ; 1[, f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$

et $\forall x \in]1 ; 3[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1 ; 3[$.

- $g(x) = e^x - x + 1$
1- $g'(x) = e^x - 1$
2- on a : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$
D'où : $\forall x \in]0 ; 3[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0 ; 3[$,
et $\forall x \in]-\infty ; 0[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

Exercice 18 :

1. $]-6 ; -1[$; 2. $]-1 ; 0,5[$; 3. $]-\infty ; -1[$

✓ **Primitives de fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne**

Exercice 19 :

- 1-B ; 2-A ; 3-C

Exercice 20

$$f(x) = 3e^{3x-2}$$

Une primitive sur \mathbb{R} de f est la fonction :

$$x \mapsto e^{3x-2}$$

$$g(x) = e^{-2x}$$

Une primitive sur \mathbb{R} de g est la

$$\text{fonction } x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$h(x) = (-2x + 3)e^{-x^2+3x-1}$$

Une primitive sur \mathbb{R} de h est la fonction : $x \mapsto e^{-x^2+3x-1}$

➤ **Exercices de renforcement/approfondissement**

Exercice 21

1- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(-1) = 0$.

c) f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$, donc pour tout $x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$, donc pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$

2- Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

Exercice 22

1-a) $f(0) = b$.

b) $f(x) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$. Donc : $x = -\frac{b}{a}$.

2- Par lecture graphique :

a) $f(0) = 3$.

b) la solution de l'équation $f(x) = 0$ est 3.

3- D'après les questions 1-) et 2-),

$$\begin{cases} b = 3 \\ -\frac{b}{a} = 3 \end{cases} \text{ on en déduit que : } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

ainsi : $f(x) = (-x + 3)e^x$

4- Par lecture graphique :

a) $f'(2) = 0$

b) Pour tout x de l'intervalle $]-\infty ; 3[$; $f(x) > 0$.

Pour tout x de l'intervalle $]3; +\infty[$; $f(x) < 0$.

5- D'après la question 3-), $f(x) = (-x + 3)e^x$, d'où :
 $f'(x) = (-x + 2)e^x$.

Il en résulte que : $f'(2) = 0$.

Exercice 23 :

1-A ; 2-C ; 3-B ; 4-A ; 5-C.

Exercice 24

$$A = e^{2x} + e^{-5x}$$

$A > 0$ sur \mathbb{R} ,

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ et $e^{-5x} > 0$

$B = (2 - x)e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ d'où : le signe B est celui de $(2 - x)$ comme $2 - x > 0$ pour $x < 2$ et

$$2 - x < 0 \text{ pour } x > 2.$$

Alors : $\forall x \in]-\infty; 2[$; $B > 0$

$$\forall x \in]2; +\infty[$$
; $B < 0$ pour $x = 2$; $B = 0$

$$C = e^{5x} - e^{3x}$$

$$C = e^{3x}(e^{2x} - 1)$$

Or : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x} > 0$ d'où : le signe B est celui de $(e^{2x} - 1)$ résolvons l'équation $e^{2x} - 1 = 0$

Posons : $X = e^x$; $X > 0$

On obtient : $X^2 - 1 = 0$. D'où : $X_1 = -1$ et $X_2 = 1$

Donc : $\forall x \in]-\infty; 0[$; $C < 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[$$
; $C > 0$ pour $x = 0$; $C = 0$

$$D = e^x - 4e^{-x} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x}$$

Or : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ d'où : le signe D est celui de $(e^{2x} - 4)$

résolvons l'équation $e^{2x} - 4 = 0$

Posons : $X = e^x$; $X > 0$

On obtient : $X^2 - 4 = 0$

D'où : $X_1 = -2$ et $X_2 = 2$

Donc : $\forall x \in]-\infty; \ln 2[$; $D < 0$

$$\forall x \in]\ln 2; +\infty[$$
; $D > 0$ pour $x = \ln 2$; $D = 0$

$E = (e^x - 1)(e^x + 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 2 > 0$

d'où : le signe E est celui de $(e^x - 1)$

comme $e^x - 1 < 0$ pour $x < 0$ et

$e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$.

Alors : $\forall x \in]-\infty ; 0[; E < 0$

$\forall x \in]0 ; +\infty[; E > 0$ pour $x = 0 ; E = 0$

Exercice 25

a) $e^{x^2} = e^{3x+4} \Leftrightarrow x^2 -$

$3x - 4 = 0$

$\Delta = 25$, donc : $S_{\mathbb{R}}$

$= \{-1 ; 4\}$

b) $E_v = \mathbb{R} - \{0\}$

$e^{\frac{4}{x}} - e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-2 ; 2\}$

c) $9e^{-x} = e^x \Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x + 3) = 0$

donc : $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 3\}$ car $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 3 > 0$

d) $(2 - e^{-x})(e^{3x} + 2) = 0$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{3x} + 2 > 0$

D'où : $(2 - e^{-x})(e^{3x} + 2) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-\ln 2\}$

Exercice 26

a) $e^2 \leq e^{4x-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$

donc : $S_{\mathbb{R}}$

$=]-\infty ; \frac{5}{4}]$

b) $E_v = \mathbb{R} - \{0\}$

$e^{\frac{1}{x}} - e^x > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x} > 0$

donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -1[\cup]0 ; 1[$

c) $e^{-x} - e^x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{e^x}$

≥ 0

donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 0]$ car $\forall x$

$\in \mathbb{R}, \frac{e^x + 1}{e^x} > 0$

d) $(2 - e^{-x})(e^{3x} + 2) < 0$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{3x} + 2 > 0$

D'où : $(2 - e^{-x})(e^{3x} + 2) < 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 < 0$

Donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -\ln 2[$

Exercice 27

1- a) $\Delta = 64$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; 3\}$

b) $\forall x \in \mathbb{R} ; e^x + 1 > 0$, d'où : $(e^x + 1)(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 3\}$

2- a) $p(5) = 2 \times 5^3 - 14 \times 5^2 + 14 \times 5 + 30 = 350 - 350$.

Donc : $p(5) = 0$.

b) $p(5) = 0$ d'où : $p(x) = (x - 5)(2x^2 - 4x - 6)$.

D'après la question 1-a), -1 et 3 sont des zéros de $2x^2 - 4x - 6$,

alors $2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x + 1)$. Donc :

$$p(x) = 2(x - 5)(x - 3)(x + 1).$$

3- On a : (E) : $2e^{3x} - 14e^{2x} + 14e^x + 30 = 0$.

$$(E) \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 14(e^x)^2 + 14e^x + 30 = 0.$$

Posons : $X = e^x$; $X > 0$, (E) devient :

$$2X^3 - 14X^2 + 14X + 30 = 0.$$

D'après la question 2-b,

$$2X^3 - 14X^2 + 14X + 30 = 2(X - 5)(X - 3)(X + 1).$$

Donc : (E) $\Leftrightarrow 2(e^x - 5)(e^x - 3)(e^x + 1) = 0$.

D'après la question 1-b, la solution de l'équation :

$$(e^x - 3)(e^x + 1) = 0 \text{ est } \ln 3.$$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 3 ; \ln 5\}$.

Exercice 28

1- $\Delta = 49$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-2 ; \frac{1}{3}\right\}$

2-a) $P(2) = 3 \times 2^3 - 2^2 - 12 \times 2 + 4 = 20 - 20$. Donc : $P(2) = 0$.

b) Après développement réduction :

$$(x - 2)(3x^2 + 5x - 2) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$$

or : $P(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$.

Donc $P(x) = (x - 2)(3x^2 + 5x - 2)$.

c) D'après les questions 1-) et 2-a) les zéros de $P(x)$ sont :

$$-2 ; \frac{1}{3} \text{ et } 2. \text{ Donc : } S_{\mathbb{R}} = \left\{-2 ; \frac{1}{3} ; 2\right\}$$

3- On a : (I) : $3e^{3x} - e^{2x} - 12e^x + 4 \geq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow 3(e^x)^3 - (e^x)^2 - 12e^x + 4 \geq 0.$$

Posons : $X = e^x$; $X > 0$, (I) devient : $3X^3 - X^2 - 12X + 4 \geq 0$.

D'où : (I) $\Leftrightarrow (X - 2)(3X^2 + 5X - 2) \geq 0$.

Tableau de signe de $3X^3 - X^2 - 12X + 4$

X	0	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$X - 2$	-		- 0 +	+
$3X^2 + 5X - 2$	-	0 +		+
$3X^3 - X^2 - 12X + 4$	+	0 -	0 +	+

Comme : $3X^3 - X^2 - 12X + 4 \geq 0$, alors : $X \leq \frac{1}{3}$ ou $X \geq 2$.

Donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -\ln 3[\cup]\ln 2 ; +\infty[$

Exercice 29

1- $P(1) = 1^3 + 13 \times 1 - 12 = 13 - 13$. Donc : $P(1) = 0$.

2- $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$,

or : $P(x) = x^3 - 13x + 12$.

par identification : $a = 1$ et $b = -12$.

3- $\Delta = 49$; donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-4 ; 3\}$.

4-a) D'après les questions précédentes ; les zéros de P sont : -4 ; 1 et 3 . Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-4 ; 1 ; 3\}$.

b) Tableau de signe de P

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$
$x - 1$	-		- 0 +		+
$x^2 + x - 12$	+	0 -		- 0 +	+
$P(x)$	-	0 +	0 -	0 +	+

Comme : $P(x) \leq 0$, alors : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -4] \cup [1 ; 3]$.

5- Posons : $X = e^x$; $X > 0$.

a) l'équation : $e^{3x} - 13e^x + 12 = 0$ devient : $X^3 - 13X + 12 = 0$.

D'après la question 4-a), $X = -4$ ou $X = 1$ ou $X = 3$. Donc :

$$S_{\mathbb{R}} = \{0 ; \ln 3\}.$$

b) l'inéquation : $e^{3x} - 13e^x + 12 \leq 0$, devient :

$$X^3 - 13X + 12 \leq 0.$$

D'après la question 4-b), $X \in [1 ; 3]$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = [0 ; \ln 3]$.

Exercice 30

1- On a : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^{-x}(e^x + 1)}$. Donc : $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

2- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Exercice 31

1- On a : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) \\ = 1 \text{ avec } f(x) = e^x.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$$

2- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$. la droite (OI) d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de g .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Exercice 32

1- $f(x) = 7xe^x$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \text{ donc la droite d'équation } y = 0 \text{ est une}$$

asymptote horizontale à la représentation graphiquement de f .

b) $f'(x) = 7(1 + x)e^x$

c) On a : $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$.

d) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-7e^{-1}$	$+\infty$

2- $g(x) = 2 + 3x - e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $g'(x) = 3 - e^x$

c) On a : $\forall x \in]-\infty ; \ln 3[$, $g'(x) > 0$

donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; \ln 3[$

et $\forall x \in]\ln 3 ; +\infty[$, $g'(x) < 0$ donc

g est strictement décroissante sur $]\ln 3 ; +\infty[$.

d) Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(\ln 3)$	$-\infty$

3- $h(x) = (x - 1)e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une

asymptote horizontale à la représentation graphique de f .

b) $h'(x) = xe^x$

c) On a : $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

et $\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

d) Tableau de variation de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	0	-1	$+\infty$

Exercice 33

1- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2- $g'(x) = 1 - e^x$

3- $\forall x \in]-\infty; 0[$; $g'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) < 0$; donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

4- Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

5- Une primitive de g sur \mathbb{R} est la fonction :

$$G(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2 - e^x.$$

Exercice 34

1- $D_q = \mathbb{R} - \{2\}$

2- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} q(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{2-x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} q(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{2-x} = -\infty$$

Interprétation :

la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de q .

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2-x} = -\infty.$$

Interprétation : la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de q en $-\infty$.

$$3- \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}; q'(x) = \frac{(3-x)e^x}{(2-x)^2}.$$

$$4- \forall x \in]-\infty; 2[\cup]2; 3[, q'(x) > 0$$

donc q est strictement croissante sur chacun

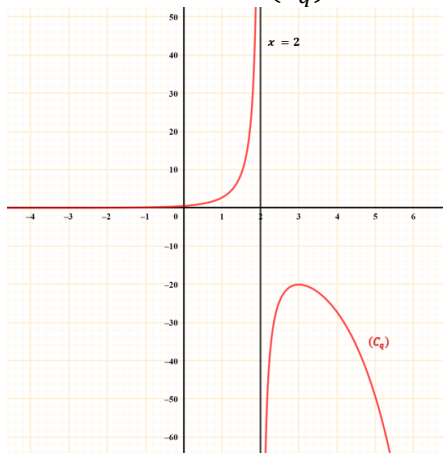
des intervalles $]-\infty; 2[$ et $]2; 3[\forall x \in]3; +\infty[, q'(x) < 0$

donc q est strictement décroissante sur $]3; +\infty[$

5- Tableau de variation de q

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$q'(x)$	$+$		$+$ 0 $-$	
$q(x)$	0 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $-e^3$ ↘ $-\infty$	

6- Construction de (C_q)



Exercice 35

1- $D_f = \mathbb{R}$

2- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3- a) pour tout nombre réel $x \neq 0$, $x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x} \right)$
 $= 1 - x + e^x$ et $f(x) = 1 - x + e^x$.

Donc : pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x)$

$$= x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x} \right)$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x} \right)$,

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (1 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On a : $f(x) - (1 - x) = e^x$, or pour tout nombre réel x , $e^x > 0$.

Donc : la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur \mathbb{R} .

5- a) $f'(x) = -1 + e^x$.

b) $f'(x) = 0$ équivaut à $-1 + e^x = 0$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

c) $f'(x) > 0$ équivaut à $-1 + e^x > 0$. Donc : $S_{\mathbb{R}} =]0 ; +\infty[$.

d) $\forall x \in]0 ; +\infty[; f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ $\forall x \in]-\infty ; 0[; f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

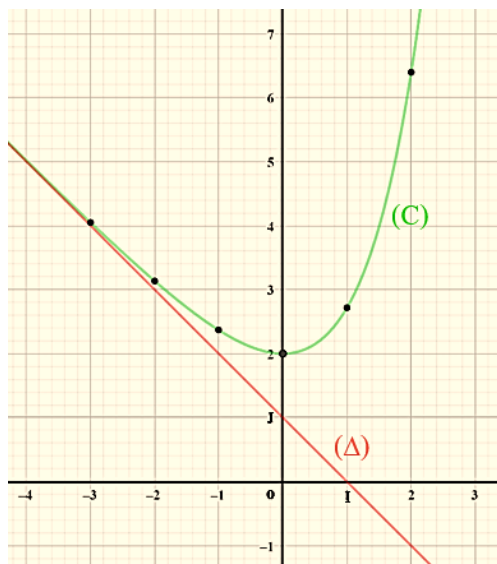
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

6-

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4,1	3,1	2,4	2	2,7	6,4

7. Construction de (C) et (Δ)



Exercice 36

1- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Interprétation :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$

est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

2- $\forall x \in]-\infty ; 4[; f'(x) = (2 - x)e^x$

3- $\forall x \in]-\infty ; 2[; f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; 2[$ et $\forall x \in] 2 ; 4[$,

$f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $] 2 ; 4[$

4- Tableau de variation

x	$-\infty$	2	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	e^2	$-2e^4$

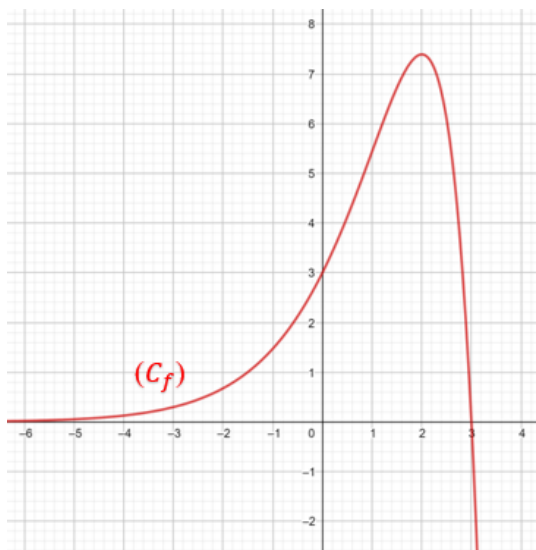
5- f est continue et strictement décroissante sur $]2; 4[$ et $f(2) \times f(4) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur $]2; 4[$.

6- a) $f(3) = (3 - 3)e^3 = 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur $]2; 4[$. Donc : $a = 3$.

b) f est continue et strictement décroissante sur $]2; 4[$ et $f(3) = 0$, alors $f(x) > 0$ sur $]2; 3[$ et $f(x) < 0$ sur $]3; 4[$. De plus $f(x) > 0$ sur $]-\infty; 2]$

Donc : $f(x) > 0$ sur $]-\infty; 3[$ et $f(x) < 0$ sur $]3; 4[$.

7- voir figure ci-dessous.



Exercice 37

1- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

b) la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (C_f) car $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

2- $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[; f'(x) = \frac{(1-2x)e^x + 2e^x}{2(1-2x)^2}$.

Donc : $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[; f'(x) = \frac{(3-2x)e^x}{2(1-2x)^2}$

3- $\forall x \in]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[; f'(x) > 0$,

donc : f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[$

et $\forall x \in]\frac{3}{2}; +\infty[; f'(x) < 0$

donc : f est strictement décroissante sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$

4- Tableau de variation

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$-1,1$	$-\infty$

5- D'après le tableau de variation de f ,

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ est le maximum de f sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ or : $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

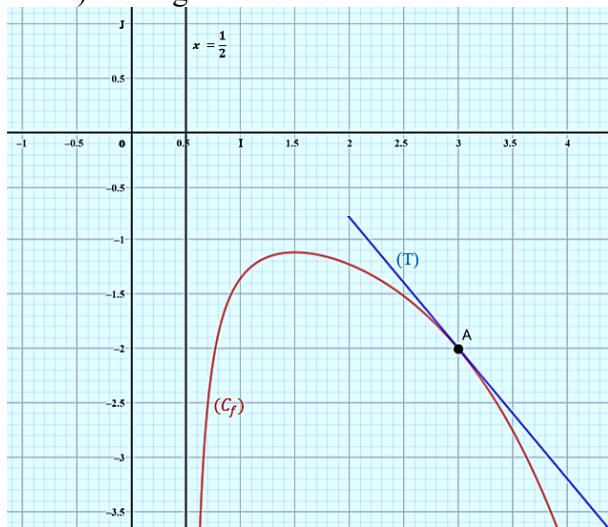
Donc : $f(x) < 0$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

6- a) Une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 3 s'écrit :

$$(T) : y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$(T) : y = -1,2x + 1,6$$

b) voir figure ci-contre.



Exercice 38

1.a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2.a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x+1)e^{x^2+2x-1}$

b) $\forall x \in]-\infty; -1[; f'(x) < 0$, donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

$\forall x \in]-1; +\infty[;$

$f'(x) > 0$, donc : f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

3. $f(x) = 1$ équivaut à

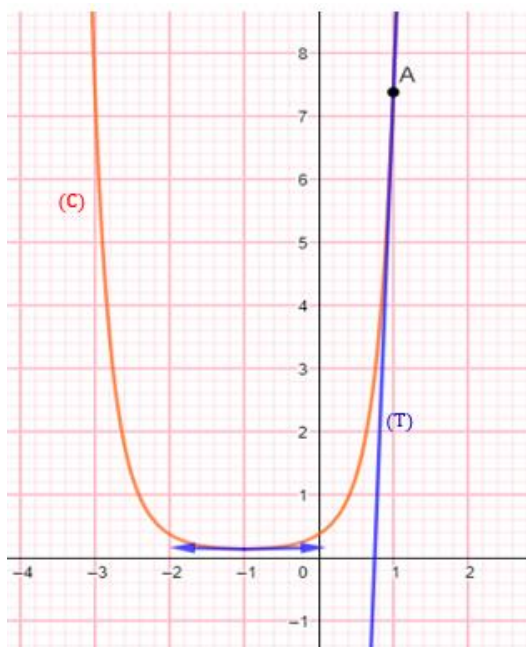
$x^2 + 2x - 1 = 0$. $\Delta = 8$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$.

4.a) (T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

avec $f'(1) = 4e^2$ et $f(1) = e^2$. Donc (T) : $y = 4e^2x - 3e^2$.

b) Construction (C)

(voir figure ci-dessous)



Exercice 39

- $A = 2e^{2x} - 7e^x + 5$

1- $A = 2e^{2x} - 7e^x + 5 = 2(e^x)^2 - 7e^x + 5$

Posons : $X = e^x$; $X > 0$,

On obtient : $A = 2X^2 - 7X + 5 = (X - 1)(2X - 5)$

Donc : $A = (e^x - 1)(2e^x - 5)$

2- $A = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = \frac{5}{2}$

Tableau de signe $2X^2 - 7X + 5$

X	0	1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$X^2 - 5X + 4$	+	0	-	0	+

$X^2 - 5X + 4 > 0 \Leftrightarrow 0 < X < 1$ ou $\frac{5}{2} < X$

$X^2 - 5X + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $\ln \frac{5}{2} < x$

Donc : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\ln \frac{5}{2} ; +\infty[; A > 0$

$\forall x \in]0 ; \ln \frac{5}{2}[; A < 0$

pour $x \in \left\{0 ; \ln \frac{5}{2}\right\} ; A = 0$

- $B = e^x - 3e^{-x} + 2$

1- $B = e^x - 3e^{-x} + 2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x - 3}{e^x}$

En posant : $X = e^x$; $X > 0$,

On obtient : $B = \frac{(X - 1)(X + 3)}{X}$. Donc : $B = \frac{(e^x - 1)(e^x + 3)}{e^x}$

2- Comme : $\frac{e^x + 3}{e^x} > 0$

Alors : le signe de B est celui de $(e^x - 1)$

Donc : $\forall x \in]-\infty ; 0[; B < 0$

$\forall x \in]0 ; +\infty[; B > 0$

pour $x = 0 ; B = 0$

Exercice 40

1.

• $f(x) = 3x^2e^{x^3}$; donc une primitive F sur \mathbb{R} de f est : $F(x) = e^{x^3}$.

• $h(x) = 2e^x + 1$; donc une primitive H sur \mathbb{R} de h est : $H(x) = 2e^x + x$.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $K'(x) = 3(e^x + (x-1)e^x) = 3xe^x$

b) On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $k(x) = 3xe^x$ et $K'(x) = 3xe^x$

Donc : une primitive sur \mathbb{R} de k est : $K(x) = 3(x-1)e^x$.

Exercice 41

1- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x - 3e^x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0$.

Interprétation : la droite d'équation $y = 0$

est une asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

2- a) $\forall x \in]-\infty ; 3[$, $f'(x) = -(-2x + 3)e^x + 2e^x$

Donc : $\forall x \in]-\infty ; 3[$, $f'(x) = (2x - 1)e^x$.

b) $\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$.

$\forall x \in \frac{1}{2} ; 3[$, $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $\frac{1}{2} ; 3[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$-2e^{\frac{1}{2}}$	$3e^3$

c) Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$-2e^{\frac{1}{2}}$	$3e^3$

3- A est le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Donc : $A(x_A; 0)$ c'est-à-dire $f(x_A) = 0$ soit $x_A = 1,5$

B est le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Donc : $B(0; y_B)$ c'est-à-dire $y_B = f(0)$ soit $y_B = -3$

4- Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-0,2	-0,4	-0,9	-1,8	-3	-3,3	-2,7	0	7,4

6-a) F est définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que : $F'(x) = (2x - 3)e^x$ et $f(x) = (2x - 3)e^x$.

Donc une primitive sur \mathbb{R} de f est F car $F'(x) = f(x)$.

b) On a : $f(x) = (2x - 3)e^x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^x > 0$ d'où $f(x)$ et $2x - 3$ ont le même signe.

Or $2x - 3 < 0$ pour $x \leq \frac{3}{2}$.

Donc : pour tout x élément de l'intervalle $[-2; 0]$, $f(x) < 0$.

c) Pour tout x élément de l'intervalle $[-2; 0]$, $f(x) < 0$.

Donc l'aire de la partie du plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = -2 \text{ et } x = 0 \text{ s'écrit : } \mathcal{A} = \left(-\int_{-2}^0 f(x)dx\right) \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \mathcal{A} &= -\int_{-2}^0 f(x)dx = -(F(0) - F(-2)); F(0) = -5 \text{ et } F(-2) \\ &= -9e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 5 - 9e^{-2}. \text{ Donc : } \mathcal{A} \approx 4 \text{ cm}^2.$$

➤ **Situation complexe**

Exercice 42

Sur $]0; 3]$, $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^x$

désigne le bénéfice réalisé par l'entreprise

Donc réaliser un bénéfice maximal revient à déterminer le maximum de f sur $]0; 3]$.

Cela consiste à étudier le sens de variation de f sur $]0; 3]$.

On sait que : f est dérivable sur $]0; 3]$, alors $\forall x \in]0; 3]$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)e^x$$

Comme $\frac{1}{2}e^x > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x)$ et $1-x$ ont le même signe sur $]0; 3]$

D'où $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

$\forall x \in]1; 3]$; $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1; 3]$ avec $f'(1) = 0$

Donc f atteint sa valeur maximale en 1 qui est $f(1) = \frac{e}{2}$.

Conclusion : L'entreprise doit fabriquer 1000 cafetières pour réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 43

Déterminer l'année où M. Tanbian va revendre sa voiture revient à déterminer le nombre d'année

pendant lequel il pourra profiter de sa voiture.

Comme M. Tanbian veut revendre sa voiture lorsqu'elle aura perdu 60% de sa valeur initiale, alors le pourcentage de la nouvelle valeur acquise par rapport à la valeur initiale est de 40%.

C'est-à-dire : $0,4 = 3 - 2e^{0,02x}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } e^{0,02x} &= 1,3 \text{ équivaut à } 0,02x = \ln 1,3. \text{ Soit : } x = \frac{\ln 1,3}{0,02} \\ &\approx 13,12. \end{aligned}$$

Donc : M. Tanbian pourra profiter de sa voiture pendant 14 ans avant de la revendre durant l'année 2031.

Exercice 44

Déterminer le nombre de jours qu'il restait pour que le yaourt ne soit plus comestible revient

à déterminer le nombre de jours au bout duquel le yaourt contient au moins 640 000 bactéries.

C'est-à-dire : $640\,000 = 10\,000e^{0,25t}$.

D'où : $64 = e^{0,25t}$ équivaut à $0,25t = \ln 64$. Soit : $t = \frac{\ln 64}{0,25} \approx 16,63$.

Donc : le yaourt contiendra au moins 640 000 bactéries au bout 17 jours.

Et comme le yaourt a été consommé 10 jours après sa production, il restait encore 7 jours pour qu'il ne soit plus comestible.

Donc le malaise de Mme Yodji n'est pas lié à la consommation d'un yaourt périmé.

Exercice 45

Déterminer le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jour pour que la proportion de la population qui est informée de ces nouvelles offres atteigne 90%.

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} = 0,9$.

D'où : $e^{-0,21t} = 0,1$ équivaut à $-0,21t = \ln 0,1$. Soit : $t = -\frac{\ln 0,1}{0,21} \approx 10,96$

Conclusion : la grande chaîne de magasins fera la publicité pendant 11 jours.

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :
-

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Quand se déroule la situation ?	Après la proclamation des résultats du bac de l'année scolaire 2020-2021.
Circonstances	-Qu'a fait le professeur de philosophie d'une classe de terminale A? -Qu'affirme un élève de l'année en cours ?	Il a relevé dans un tableau les moyennes annuelles et les notes obtenues au BAC par dix de ses élèves. -Il affirme qu'il y a un lien entre la moyenne annuelle de philosophie en classe et la note de philosophie du BAC.
Tâches	-Que décident de faire les élèves ?	-Ils décident de faire des calculs en statistique pour vérifier cette affirmation.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABLETÉS

ACTIVITE 1 : Série statistique double

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une série statistique double.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. a) Les patients d'un médecin
b) L'effectif total de cette population est 5.
 2. a) Les différents caractères étudiés sont la taille et le poids
b) Ces caractères sont des caractères quantitatifs.
- Corrigé des exercices de fixation

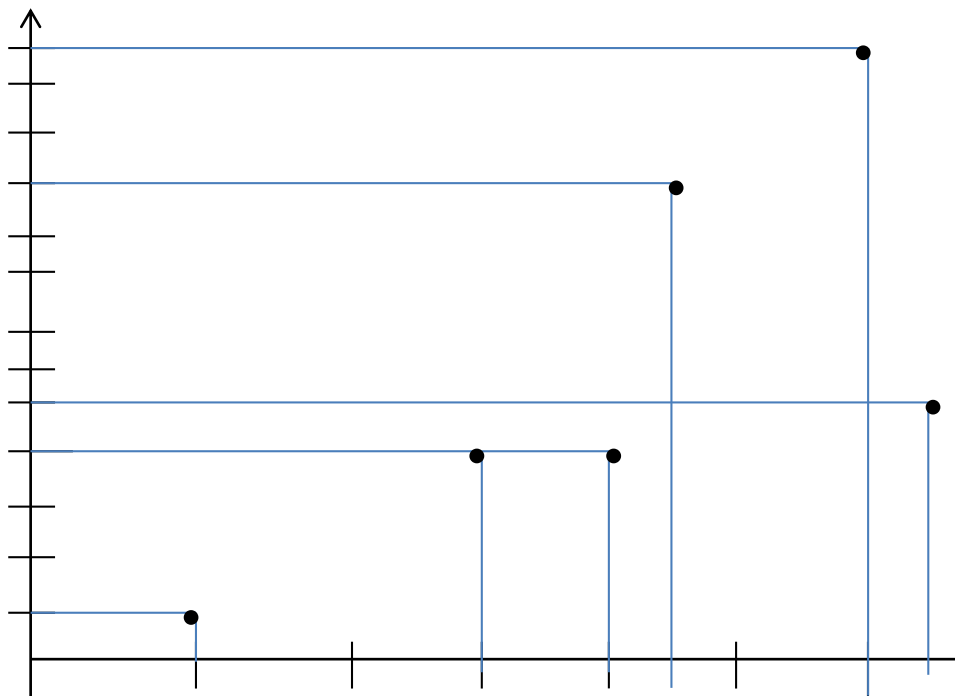
Exercice 1

1^{er} cas : il ne s'agit pas de l'étude d'une série statistique à caractère double.

2^{ème} cas : il s'agit de l'étude d'une série statistique à caractère double.

ACTIVITE 2: Nuages de points

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'un nuage de points d'une série statistique double et de représenter un nuage de points dans un repère orthogonal.
- Réponses aux questions de l'activité.



- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 2

Représentation de nuages de points

ACTIVITE 3: Points moyen d'un nuage

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition du point moyen d'un nuage de points d'une série statistique double et de calculer les coordonnées du point moyen.

- Réponses aux questions de l'activité.

$$\bar{x} = 10,2 \text{ et } \bar{y} = 1,61$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

$$\bar{x} = 12,57 \text{ et } \bar{y} = 9,28$$

ACTIVITE 4: Covariance d'une série statistique double

- L'objectif de cette activité est de connaître la formule de la covariance et de calculer la covariance d'une série statistique double.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $G(9 ; 8,2)$

2. a)

x_i	8	7	9	10	11
y_i	5	6	10	11	9
$X_i y_i$	40	42	90	110	99

b) la somme des $X_i y_i$ est 381.

$$\frac{381}{5} = 76,2 .$$

c) $T - 9 \times 8,2 = 76,2 - 73,8 = 2,4$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 4

1-F 2-F 3-V 4-F 5-V

Exercice 5

$G(13,11 ; 10)$.

On a : $\frac{10,8 \times 9 + 11 \times 10 + 12 \times 9 + 13,5 \times 10 + 14 \times 11 + 15 \times 8 + 15,5 \times 13}{7} - 13,11 \times$

$$10 = 1,14$$

$$\text{Cov}(x ; y) = 1,14$$

ACTIVITE 5: Ajustement affine par la méthode de Mayer

- L'objectif de cette activité est de déterminer une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. $G_1(4 ; 12,33)$ et $G_2(10 ; 24)$
 2. a) placé des points G_1 et G_2
b) Tracé de la droite
 3. a) soit a le coefficient directeur de la droite (D). $a = 1,945$
b) (D) : $y = 1,945x + 4,55$
 4. a) $G(7 ; 18,17)$
b) on a : $1,945 \times 7 + 4,55 \approx 19,7$ donc G appartient à la droite (D).
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 6

$G_1(12,75 ; 65)$ et $G_2(14,25 ; 67,5)$

Soit (D) la droite d'ajustement linéaire.

(D) : $y = 1,67x + 43,7075$

ACTIVITE 6: Droite de régression

- L'objectif de cette activité est de déterminer une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. a) $G(6 ; 7,5)$
b) $\text{cov}(x ; y) = 1,75$
c) $V(x) = 7,5$ et $V(y) = 4,25$

2. a) $a = 0,23$

b) $b = \bar{y} - a\bar{x}$

c) (D) : $y = 0,23x + 6,12$

3. a) $a' = 0,41$

b) $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

c) (D') : $x = 0,41y + 2,925$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 7

1. (D) : $y = 122,976x - 2,618$

2. (D') : $x = 0,008y + 0,11$

ACTIVITE 7: Coefficient de corrélation

- L'objectif de cette activité est de calculer le coefficient de corrélation linéaire.

- Réponses aux questions de l'activité.

1. $G(3,2 ; 50,2)$

2. a) $V(x) = 0,5$ et $V(Y) = 21,25$

b) $\text{cov}(x ; y) = 3,25$

3. $r = 0,997$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

$r = 0,975$

Exercice 9

1-V 2.F 3.V 4.F

III. DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

- **Question 1 : Comment représenter un nuage de points d'une série statistique double dans un repère orthogonal ?**

Solution de l'exercice non corrigé

On considère les points $M_1(1 ; 8)$, $M_2(2 ; 10)$, $M_3(3 ; 9)$, $M_4(4 ; 7)$ et $M_5(5 ; 12)$.

- ✓ On prendra comme échelle $2\text{cm} \rightarrow 1$ unité sur l'axe des abscisses

$1\text{cm} \rightarrow 1$ unité sur l'axe

des ordonnées

- ✓ On place les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , et M_5 dans le repère orthogonal choisi.

✓

- **Question 2 : Comment déterminer le point moyen d'un nuage de points ?**

Solution de l'exercice non corrigé

$G(2,5 ; 252,5)$

- **Question 3 : Comment effectuer un ajustement linéaire par la méthode de Mayer ?**

Solution de l'exercice non corrigé

Considérons les sous-séries suivantes :

Sous-série 1

x_i	0,5	1	2
y_i	5	15	20

Sous-série 2

x_i	3	3,5	4
y_i	25	40	50

On a $G_1(1,17 ; 13,33)$ et $G_2(3,5 ; 38,33)$

Soit a le coefficient directeur de la droite (D).

$a = 10,73$ et $b = 0,775$

(D) : $y = 10,73x + 0,775$

- **Question 4 : Comment déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ?**

Solution de l'exercice non corrigé

- ✓ Déterminons le point moyen G
 $G(13 ; 14,25)$
- ✓ Déterminons $V(x)$ et $V(y)$
 $V(x) = 5$ et $V(Y) = 14,1875$
- ✓ Déterminons $Cov(x ; y)$
 $Cov(x ; y) = 6,75$
- ✓ Déterminons a et a'
 $a = \frac{27}{20}$ et $a' = \frac{108}{227}$
- ✓ Déterminons b et b'
 $b = -\frac{33}{10}$ et $b' = \frac{1412}{227}$
- ✓ Une équation de la droite (D) de régression de Y en X
est : $y = \frac{27}{20}x - \frac{33}{10}$
- ✓ Une équation de la droite (D') de régression de X en Y
est : $x = \frac{108}{227}y + \frac{1412}{227}$

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

➤ Exercices de fixation

- **Série statistique double**

Exercice 1

Tableau 2 et tableau 4

- **Nuage de points**

Exercice 2

Représentation du nuage de points

- **Point moyen d'un nuage de points**

Exercice 3

c)

Exercice 4

G(95 ;5,5)

Exercice 5

1. Représentation du nuage de points

2. a) G(7,5 ;2,5)

b) Placé du point G dans le repère

- **Covariance d'une série statistique double**

Exercice 6

1. G(96,8 ;9,8)

2. $\text{Cov}(x ;y) = - 3,64$

Exercice 7

$\text{Cov}(x ;y) = 1000$

- **Ajustement affine par la méthode de Mayer**

Exercice 8

b)

Exercice 9

$$(D) : y = \frac{77}{17}x - \frac{458}{51}$$

- **Droite de régression**

Exercice 10

$$(D) : y = -\frac{10}{57}x + \frac{219}{57}$$

- **Coefficient de corrélation**

Exercice 11

a)

Exercice 12

$$r = 0,957$$

➤ **Exercices de renforcement/approfondissement**

Exercice 13

1. Représentation du nuage de points
2. a) $G(200 ; 4,2)$
b) Placé du point G
3. $\text{Cov}(x ; y) = 30$
4. a) $V(x) = 5000$ et $V(y) = 2,96$
b) $r = 0,247$

c) il y a une faible corrélation linéaire entre la consommation journalière d'eau et celle de baguettes de pains.

Exercice 14

1-B 2-C 3-A 4-D

Exercice 15

1. a) Représentation du nuage de points

b) $G\left(\frac{13}{2}; \frac{229}{10}\right)$

2. a) (D): $y = -\frac{1}{360}x + \frac{1387}{720}$

b) Tracé de la droite

3. le chiffre d'affaire sera de 1,88 millions en 2015.

Exercice 16

1. $G\left(\frac{211}{5}; 149\right)$

2. (D) : $y = \frac{35}{74}x + \frac{9549}{74}$

3. a) si la taille du tronc est 47m alors le diamètre du tronc est 151,27 m

b) si le diamètre du tronc est de 170m alors la taille du tronc est de 86,6m

Exercice 17

1. Représentation du nuage de point

2. $G(0,375; 7,75)$

3. a) justification de (D) : $y = -11,54x + 12,078$

b) si la tension est de 14V alors l'intensité est de -0,17A

4. $r = -0,99$. Il y a une forte corrélation linéaire entre l'intensité et la tension.

Exercice 18

1. Nuage de points

2. a) $\bar{M} = 3,21$

b) $\bar{T} = 54,1$

3. (D) : $y = -0,23x + 54,8372$

4. a) $r = 0,23$. Il y a une faible corrélation entre la masse et la taille des nouveau-nés

b)(D) : $y = 4,27x + 40,39$

5. a) si sa masse est de 4,7kg alors la taille est de 60,46 cm

b) si sa taille est de 60 cm alors sa masse est de 4,6 kg.

Exercice 19

1. Représentation du nuage de points

2. a) G(45 ;8,035)

b) placé du point G

3. a) $G_1(25 ;8,015)$ et $G_2(65 ;8,055)$

b) Placé de G_1 et G_2 puis tracé de la droite ($G_1 G_2$).

c) ($G_1 G_2$) : $y = 0,001x + 7,99$

Exercice 20

1. Nuage de points.

2. G(1925 ;205)

3. a) (D) : $y = -0,075x + 349,375$

b) Tracé de la droite (D)

4. a) $r = -0,988$. Il existe une forte corrélation linéaire entre le prix de vente de l'unité et le nombre d'exemplaires vendus.

b) le prix unitaire de vente d'un collier dont le nombre d'exemplaires vendus est 300 est de 658FCFA.

Exercice 21

1. $G(13,4 ; 3,2)$

2. $\text{Cov}(x,y) = -1,28$

3. a) $V(x) = 18,64$ et $V(y) = 0,56$

b) $r = -0,396$

il existe une faible corrélation linéaire entre la note sur 20 et la durée de la composition.

Exercice 22

1. $G(3 ; 25,04)$

2. $V(x) = 2$; $V(y) = 0,7944$ et $\text{cov}(x ; y) = 1,26$

3. a) (D) : $y = 0,63x + 23,15$

b) la population ivoirienne atteindra 30 millions en 2026

4. $r = 0,999$. Il y a une forte corrélation linéaire entre le rang de l'année depuis 2015 et la population.

Exercice 23

1. a) Représentation du nuage de points

b) $G(9 ; \frac{93}{8})$

2. $r = -0,32$. Il existe une faible corrélation linéaire entre la note de philosophie et celle de français.

3. (D) : $y = -0,196x + 13,389$

4. si un candidat a 18 en philosophie alors sa note en français pourrait être 10.

Exercice 24

1. $G(2 ; 630,8)$
2. $\alpha = 691$
3. En 2033

Exercice 25

1. $\alpha = 4$ et $\beta = 14$
2. $r = 0,96$. Il y a une forte corrélation linéaire entre la note en musique et celle en dessin
3. (D): $y = \frac{19}{30}x + \frac{8}{3}$

Exercice 26

1. Représentation du nuage de points
2. $G(\frac{13}{2}; \frac{47}{2})$
3. $r = 0,97$. Il y a une forte corrélation linéaire entre la puissance et la quantité d'essences consommée.

4. Méthode des moindres carrés

$$(D) : y = \frac{11}{3}x - \frac{1}{3}$$

Méthode de Mayer

$$(D) : y = \frac{29}{8}x - \frac{1}{16}$$

5. la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance 12 chevaux est estimée à 43,5 litres

Exercice 27

1. Représentation du nuage de points
2. $r=0,97$. Il y a une forte corrélation linéaire entre la superficie et la production.
3. a) justification en utilisant la méthode des moindres carrés
b) la production est de 42,67 tonnes
c) une estimation de la superficie est de 18,58 ha

Exercice 28

1. Représentation du nuage de points
2. $G(51 ; 13,8)$
3. Justification correcte
4. La tension artérielle d'une personne âgée de 78 ans est estimée à 16,93.

Exercice 29

1. $G(2 ; 128,92)$
2. (D) : $y = 2,83x + 123,26$
3. En 2022

Exercice 30

1. Représentation du nuage de points
2. a) $\text{cov}(x ; y) = 29,256$ et $V(x) = 10,64$
b) (D) : $y = 2,75x - 3,04$
3. le volume d'eau utilisé le 15^{ième} jour de la sécheresse est estimé à $38,21\text{m}^3$

Exercice 31

1. $G(3,5 ; 55,5)$
2. a) $V(x) = 2,92$ $V(y) = 0,92$ $\text{cov}(x ; y) = 1,58$
b) $r = 0,96$. Il y a une forte corrélation linéaire entre le rang de l'année et l'espérance de vie.
3. (D) : $y = 0,54x + 53,61$
4. une estimation de l'espérance de vie en 2025 est de 60 ans.

Exercice 32

1. représentation du nuage de points
2. $G(31250 ; 42,25)$
3. (D) : $y = -0,001625x + 81,3125$
4. $r = -0,976$. Il y a une forte corrélation linéaire entre le montant et le nombre de clients.

Exercice 33

1. Représentation du nuage de points
2. $G(650 ; 58,75)$
3. $r = -0,98$. Il y a une forte corrélation linéaire entre le prix de vente et le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil.

Exercice 34

PARTIE A

1. $G_1(4 ; 194,24)$
2. $V(x) = 4$ $V(y) = 15,58$ $\text{cov}(x ; y) = 0,98$
3. $r = 0,12$. Il y a une faible corrélation linéaire entre le rang de l'année et le nombre de visiteurs.

PARTIE B

1. a) Représentation du nuage de points
b) $G_2(194,24 ; 68,2)$
2. a) Démonstration correcte
b) Tracé de la droite (D)
3. le nombre de visiteurs étrangers est estimé à 70274074.

Exercice 35

1. Représentation du nuage de points
2. $G(\frac{58}{3} ; \frac{725}{6})$

3. **Par la méthode de Mayer**

$$(D) : y = \frac{5}{2}x + \frac{145}{2}$$

Par la méthode de méthode des moindres carrés

$$(D) : y = \frac{2305}{844}x + \frac{14355}{211}$$

4. a) 259,2 millions b) 48,32 millions

Exercice 36

1. Représentation du nuage de points
2. $G(9 ; \frac{59}{8})$
3. Démonstration correcte
4. La note en LV2 est 15

Exercice 37

1. Représentation du nuage de points
2. a) $G(6 ; 324)$
b) Placé de G

3. a) Vérification correcte

b) Démonstration correcte

c) le salaire d'un employé à sa 30^{ème} année est 888 706 FCFA

4. $r = 0,98$. Il y a une forte corrélation linéaire entre l'ancienneté et le salaire.

Exercice 38

1. Représentation du nuage de points

2. Partage de la série

3. (D) : $y = \frac{23}{10}x - \frac{113}{15}$

4. La récolte serait de 26,96 ha.

➤ SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 39

Nous allons utiliser nos connaissances en statistiques pour résoudre ce problème.

Nous allons pour cela :

- déterminer le coefficient de corrélation de cette série statistique ;
- vérifier qu'il y a une forte corrélation linéaire ou non entre le rang du mois et le nombre de cartons de sachets ;
- déterminer une équation de la droite de régression de Y en X ;
- donner une estimation du nombre de carton en novembre 2014.
- $r = - 0,99$
- il y a une forte corrélation linéaire entre le rang du mois et le nombre de cartons de sachets.
- (D) : $y = - \frac{412}{7}x + 806$

- En novembre 2014 qui correspond à la 18^{ème} année, on estime le nombre de carton à partir de la droite de régression à est -253.
- Le stock sera donc épuisé avant la date d'entrée en vigueur du décret.

Exercice 40

Nous allons utiliser nos connaissances en statistiques pour résoudre ce problème.

Nous allons pour cela :

- Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X ;
- Déterminer le rang minimum du mois auquel le nombre d'adhérents va dépasser 3000 ;
- Déterminer la période à laquelle le club pourrait recevoir ce don.
 - ❖ (D) : $y = \frac{12305}{143}x + \frac{33490}{33}$
 - ❖ Le rang minimum du mois auquel le nombre d'adhérents va dépasser 3000 est 24
 - ❖ Le club recevra le don en décembre 2019

Exercice 41

Nous allons utiliser nos connaissances en statistiques pour résoudre ce problème.

Nous allons pour cela :

- ✓ Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X ;
- ✓ Donner une estimation du poids d'une personne dont la taille est de 185cm ;

- ✓ Comparer ce poids à 90kg ;
- ✓ Dis si oui ou non la campagne de sensibilisation a été une efficace.
 - ❖ (D) : $y = \frac{35}{1177}x + \frac{63675}{1177}$
 - ❖ Le poids d'une personne ayant une taille de 185 cm est estimé à 59,6kg
 - ❖ $59,6\text{kg} < 90\text{kg}$
 - ❖ La sensibilisation a été une efficace.

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et à quel moment se déroule la situation ?	Au collège moderne KFW, pendant la rentrée scolaire
Circonstances	-Que décide de faire un père en vue d'assurer une formation universitaire à son dernier fils en classe de quatrième ? -Que lui propose le gestionnaire?	-il décide d'ouvrir un compte d'épargne bloqué de 2000000FCFA -Il affirme que ce jeu n'est pas favorable au joueur. -le gestionnaire lui propose deux options
Tâches	-Que fait le grand fils élève en classe de terminale A pour répondre à la préoccupation de son père?	-Il lui promet une bonne réponse après le cours sur les suites numériques que son professeur de mathématiques commencera demain.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

Activité 1 : Définition d'une suite numérique

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une suite numérique.
- Réponses aux questions de l'activité.
 $v(0)=10$; $v(1)=10,8$; $v(2)=11,6$; $v(3)=12,4$; $v(4)=13,2$;
 $v(5)=14$; $v(6)=14,8$; $v(7)=15,6$; $v(8)=16,4$; $v(9)=17,2$;
 $v(10)=18$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

1- 2- 4- 6-

Activité 2 : Suite définie par une formule explicite

- L'objectif de cette activité est de définir une suite par une formule explicite.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. f est définie de \mathbb{N} vers \mathbb{R} donc f est une suite numérique
 2. $f_2 = 39$; $f_{20} = 39981$; $f_{100} = 4999901$ et $f_{50} = 624951$
 3. $f_n = 5n^3 - n + 1$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 2

$$u_0 = 2; u_5 = -623; u_{15} = -16873; v_{50} = \frac{1}{50}; v_{60} = \frac{1}{60};$$

Activité 3 : Suite définie par une formule de récurrence

- L'objectif de cette activité est de définir une suite par une formule de récurrence.
- Réponses aux questions de l'activité.
 1. p est définie de \mathbb{N} vers \mathbb{R} donc p est une suite numérique

2. $p_0 = 5; p_1 = 6,5; p_2 = 8,45; p_3 = 10,985$ et
 $p_4 = 14,2805$

3. $p_{n+1} = 1,3 \times p_n$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

1-V 2-F 3-V 4-V 5-F

Activité 4 : Suite arithmétique

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une suite arithmétique.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. La somme au 3 Mars 2022 est 1200FCFA

2. $u_1 = 1000; u_2 = 1200; u_3 = 1400; u_4 = 1600;$
 $u_5 = 1800; u_6 = 2000$

3. $u_2 - u_1 = 200; u_4 - u_3 = 200$ et $u_6 - u_5 = 200.$

On a : $u_2 - u_1 = u_4 - u_3 = u_6 - u_5$

4. $u_3 = u_2 + 200$ et $u_4 = u_3 + 200$

5. $u_6 = u_5 + 200; u_5 = u_4 + 200; u_4 = u_3 + 200;$
 $u_3 = u_2 + 200; u_2 = u_1 + 200$ et $u_1 = u_0 + 200.$

En se servant de ces différents résultats, on montre que :

$$u_6 = u_0 + 6 \times 200$$

6. $u_n = u_0 + n \times 200$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 4

a)Faux b)Vrai c)Vrai d)Faux e) Vrai

Exercice 5

1. $u_{n+1} - u_n = 5$ donc la suite (u_n) est une suite arithmétique
2. $u_2 = 13$; $u_3 = 16$; $u_4 = 23$ et $u_5 = 28$

Exercice 6

$$1^\circ) \mathcal{V}_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} ; \mathcal{V}_3 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4} ;$$

$$\mathcal{V}_5 = 5 - \frac{3}{4} = \frac{20-3}{4} = \frac{17}{4}$$

$$2^\circ) \mathcal{V}_2 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4} = \frac{3}{2} ; \mathcal{V}_4 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{16-3}{4} = \frac{13}{4} = \frac{7}{2} ;$$

$$\mathcal{V}_6 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{24-3}{4} = \frac{21}{4} = \frac{11}{2}.$$

Exercice 7

La suite (t_n) est une suite arithmétique de raison r , son terme général est de la forme : $t_n = t_0 + nr$.

$$1- t_5 = 7 + 5 \times (-5) = 7 - 25 = -18$$

$$t_{20} = 7 + 20 \times (-5) = 7 - 100 = -93$$

- 2- Pour calculer r , on va résoudre un système d'équations :

$$\begin{cases} t_8 = t_0 + 8r \\ t_1 = t_0 + r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 29 = t_0 + 8r & (E_1) \\ 8 = t_0 + r & (E_2) \end{cases} &\Rightarrow (E_1) - (E_2) \Rightarrow 7r = 21 \Rightarrow r = \frac{21}{7} \\ &= 3 \end{aligned}$$

En utilisant l'une des équations, on tire $t_0 = 8 - 3 = 5$ et $t_4 = t_0 + 4 \times r = 5 + 4 \times 3 = 17$

Activité 5 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

- L'objectif de cette activité est de déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique.
- Réponses aux questions de l'activité.

1-a°) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 3 .

1-b°) Je calcule les termes :

$$u_5 = 3 - 2 \times 5 = -7 ; u_6 = 3 - 2 \times 6 = -9 ;$$

$$u_7 = 3 - 2 \times 7 = -11.$$

Je les range : $u_5 > u_6 > u_7$

1-c°) On a $5 < 6 < 7$ mais $u_5 > u_6 > u_7$, donc La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2-a°) La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 1 .

2-b°) Je calcule les termes :

$$v_2 = 1 + 5 \times 2 = 11 ; v_3 = 1 + 5 \times 3 = 16 ; v_4 = 1 + 5 \times 4 = 21.$$

Je les range : $v_2 < v_3 < v_4$

2-c°) On a $2 < 3 < 4$ et $V_2 < V_3 < V_4$, donc La suite (V_n) est croissante.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

1°) la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{2}n + \frac{5}{3}$ est croissante parce que sa raison est $\frac{5}{3} > 0$.

2°) la suite (U_n) définie par : $U_n = -(3n + \frac{2}{7})$ est décroissante parce que $U_n = -3n - \frac{2}{7}$ sa raison est $-\frac{2}{7} < 0$.

Exercice 9

En considérant que (S_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 0, alors la suite arithmétique (S_n) est croissante car la raison $10 > 0$.

Activité 6 SOMME DE TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

- L'objectif de cette activité est de calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Réponses aux questions de l'activité.

1°) Je calcule les termes :

$$t_1 = -3 \times 1 + 5 = 2 ; t_2 = -3 \times 2 + 5 = -1 ;$$

$$t_3 = -3 \times 3 + 5 = -4 ; t_4 = -3 \times 4 + 5 = -7$$

$$t_5 = -3 \times 5 + 5 = -10 ; t_6 = -3 \times 6 + 5 = -13 ;$$

$$t_7 = -3 \times 7 + 5 = -16$$

2°) Je calcule la somme :

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 2 - 1 - 4 - 7 - 10 - 13 - 16 = -49$$

3°) Je calcule $S = \text{nombre de termes} \times \frac{t_1 + t_7}{2} = 7 \times \frac{2 - 16}{2} = 7 \times$

$$\left(-\frac{14}{2}\right) = 7 \times (-7) = -49$$

$$4°) S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10

Première manière : Je calcule tous les termes de \mathcal{V}_0 à \mathcal{V}_9

$$\mathcal{V}_0 = 0 - 3 = -3 ; \mathcal{V}_1 = 1 - 3 = -2 ; \mathcal{V}_2 = 2 - 3 = -1 ;$$

$$\mathcal{V}_3 = 3 - 3 = 0 ; \mathcal{V}_4 = 4 - 3 = 1 ;$$

$$\mathcal{V}_5 = 5 - 3 = 2 ; \mathcal{V}_6 = 6 - 3 = 3 ; \mathcal{V}_7 = 7 - 3 = 4 ; \mathcal{V}_8 = 8 - 3 = 5 ;$$

$$\mathcal{V}_9 = 9 - 3 = 6.$$

Puis j'effectue leur somme (S) :

$$S = -3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 15$$

Deuxième manière : Je calcule le premier terme $\mathcal{V}_0 = -3$ et le dernier terme $\mathcal{V}_9 = 6$

$$\text{Puis je calcule } S \text{ avec : } S = (9 - 0 + 1) \times \frac{-3+6}{2} = 10 \times \frac{3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Exercice 11

J'applique ma formule :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$\text{Donc } S = (10 - 5 + 1) \times \frac{\mathcal{V}_5 + \mathcal{V}_{10}}{2} = 6 \times \frac{13+62}{2} = 3 \times 75 = 225$$

Activité 7 SUITES GEOMETRIQUES

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une suite géométrique.
 - Réponses aux questions de l'activité.
1. $v_1 = 55000 ; v_2 = 60500 ; v_3 = 66550 ; v_4 = 73205 ;$
 $v_5 = 80525,5 ; v_6 = 88578,05$
 2. $\frac{v_2}{v_1} = 1,1 ; \frac{v_3}{v_2} = 1,1 ; \frac{v_4}{v_3} = 1,1$ et $\frac{v_5}{v_4} = 1,1$. On a $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_5}{v_4}$
 3. $v_3 = 1,1 \times v_2$ et $v_5 = 1,1 \times v_4$
 4. Justifier en utilisant les égalités : $v_6 = 1,1 \times v_5 ; v_5 = 1,1 \times v_4$
 $v_4 = 1,1 \times v_3 ; v_3 = 1,1 \times v_2 ; v_2 = 1,1 \times v_1 ; v_1 = 1,1 \times v_0$
 5. $v_n = v_0 \times (1,1)^n$
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 12

a)Vrai b)Faux c)Faux d)Faux

Exercice 13

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme -3.
2. $u_2 = \frac{-4}{3}$ $u_3 = \frac{-8}{9}$ $u_2 = \frac{-4}{3}$ $u_4 = \frac{-16}{27}$

Exercice 14

(t_n) étant une suite géométrique de raison q , son terme général est de la forme : $t_n = t_0 \times q^n$.

1- $t_3 = (-5) \times 2^3 = -40$

$$t_{16} = (-5) \times 2^{16} = -327680$$

2- Pour calculer q de cette suite avec les données, on va résoudre un système d'équations.

$$\begin{cases} t_8 = t_0 \times q^8 \\ t_2 = t_0 \times q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96 = t_0 \times q^8 \\ 6 = t_0 \times q^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_0 \times q^8}{t_0 \times q^2} = \frac{96}{6} \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow$$

$$q = \sqrt[4]{16} = 2.$$

On déduit t_0 à partir de l'une des équations. $t_0 = \frac{t_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$ et

$$t_5 = t_0 \times q^5 = 3 \times 2^5 = 96.$$

Activité 8 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

- L'objectif de cette activité est de déterminer le sens de variation d'une suite géométrique.
- Réponses aux questions de l'activité.

1-a°) $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 2$.

$$1\text{-b}^\circ) \mathcal{U}_1 = \frac{10}{3}; \mathcal{U}_2 = 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}; \mathcal{U}_3 = 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{250}{27}.$$

On a $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_3$

1-c°) On remarque que pour $1 < 2 < 3$, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_3$, alors $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

2-a°) $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 2$.

$$2\text{-b}^\circ) \mathcal{U}_1 = \frac{6}{5}; \mathcal{U}_2 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18}{25}; \mathcal{U}_3 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{54}{125}.$$

On a $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3$

2-c°) On remarque que pour $1 < 2 < 3$, $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3$, alors $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

3-a°) $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{4}$ et de premier terme $\mathcal{V}_0 = -3$.

$$3\text{-b}^\circ) \mathcal{V}_1 = -3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{-15}{4}, \mathcal{V}_2 = -3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{-75}{16};$$

$$\mathcal{V}_3 = -3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{-375}{64}$$

3-c°) On remarque que pour $1 < 2 < 3$, $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2 > \mathcal{V}_3$, alors on conclut que la suite $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

4-a°) $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$ et de premier terme $\mathcal{V}_0 = -3$.

$$4\text{-b}^\circ) \mathcal{V}_1 = -3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{-12}{5}, \mathcal{V}_2 = -3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{-48}{25};$$

$$\mathcal{V}_3 = -3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{-192}{125}$$

4-c°) On remarque que pour $1 < 2 < 3$, $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2 < \mathcal{V}_3$, alors on conclut que la suite $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

5) Voir le récapitulons

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 15

1-F 2-V 3-V 4-V 5-F

Exercice 16

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(-5) < 1$, donc $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Activité 9 SOMME DE TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

- L'objectif de cette activité est de calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.
- Réponses aux questions de l'activité.

La suite (\mathcal{V}_n) est une suite géométrique de raison 2.

1°) Je calcule les six premiers termes :

$$\mathcal{V}_0 = 2^0 = 1, \mathcal{V}_1 = 2^1 = 2, \mathcal{V}_2 = 2^2 = 4, \mathcal{V}_3 = 2^3 = 8, \\ \mathcal{V}_4 = 2^4 = 16, \mathcal{V}_5 = 2^5 = 32$$

2°) J'effectue l'opération :

$$\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \mathcal{V}_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

3°) Je calcule : $K = \mathcal{V}_0 \times \left(\frac{1-q^6}{1-q}\right) = 1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{1-64}{1-2} = \frac{-63}{-1} = 63.$

4°) $K = S$

5°) voir le récapitulons

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 17

Je calcule d'abord la raison et le premier terme de cette suite.

$$\mathcal{V}_0 = 2 \times 3^0 = 2$$

$\mathcal{V}_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)} = 3 \times \mathcal{V}_n$. Donc $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.

Je calcule la somme S des 10 premiers termes de $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S = \mathcal{V}_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{1-59049}{-2} = \frac{59048}{2} = 29524$$

Exercice 18

$$S = \mathcal{V}_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \times \frac{1-(-2)^{16}}{1+2} = 3 \times \frac{1-65536}{3} = -65535$$

III-Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite arithmétique ?

Solution de l'exercice non corrigé

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2}$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $\frac{1}{15}$

Question 2 : Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite géométrique ?

Solution de l'exercice non corrigé

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2}{3}$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-2}{3}$ et de premier terme $\frac{-1}{7}$

Question 3 : Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Solution de l'exercice non corrigé

1. $S = -1085$
2. $S = -318$

Question 4 : Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Solution de l'exercice non corrigé

$$S = 255$$

Question 5 : Comment résoudre un problème de vie courante à l'aide des suites numériques ?

Solution de l'exercice non corrigé

Le nombre de voitures passées dans ce parking est 2695

IV-Mes séances d'exercices

➤ Exercices de fixation

- ✓ Définition d'une suite arithmétique

Exercice 1

Pour répondre à cette question, je vais calculer les différences entre deux termes consécutifs. Si elles sont égales, je dirai qu'ils suivent une progression arithmétique.

$737 - 729 = 18$; $755 - 737 = 18$; $772 - 755 = 17$. Comme les différences ne sont pas égales, je conclus que les nombres 729 ; 737 ; 755 ; 772 ; 790 ne suivent pas une progression arithmétique.

Exercice 2

Les suites qui sont des suites arithmétiques sont les suites (S_2) et (S_3) parce qu'elles respectent la formule de récurrence d'une suite arithmétique.

$$(S_2): \begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} - v_n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): \begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases} ;$$

$$(S_3): \begin{cases} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_n - t_{n+1} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S_3): \begin{cases} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_{n+1} = t_n - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

$$w_{n+1} = w_n + 3$$

Exercice 4

$w_{n+1} - w_n = -1$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $\sqrt{5}$.

✓ Expression du terme général d'une suite arithmétique

Exercice 5

$$u_n = 2n - 3 \text{ donc } u_5 = 7 ; u_{10} = 17 ; u_{100} = 197$$

Exercice 6

$$r = \frac{3}{7}$$

Exercice 7

$$u_n = -3 + \frac{10}{3}n$$

✓ Sens de variation d'une suite arithmétique

Exercice 8

$-2 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante

Exercice 9

$-5 < 0$ donc la suite (w_n) est décroissante

- ✓ Somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétique

Exercice 10

$$S = 620$$

Exercice 11

$$S = -18900$$

Exercice 12

Calculer le nombre de terme revient à résoudre l'équation : $(n+1) \times$

$$\frac{u_0 + 3 + 2n}{2} = 10200$$

Il y a 99 termes

Exercice 13

$$S = \frac{2002}{6}$$

- ✓ Définition d'une suite géométrique

Exercice 14

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 5$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 3.

Exercice 15

$$v_{n+1} = 3 \times v_n$$

Exercice 16

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 18.

✓ Expression du terme général d'une suite géométrique

Exercice 17

$$w_n = 5 \times (-2)^n$$

Exercice 18

$$v_n = -3 \times (2)^n. \text{ Donc } v_5 = -96 ; v_{10} = -3072.$$

Exercice 19

$$u_n = -3 \times \left(\frac{10}{3}\right)^n$$

✓ Sens de variation d'une suite géométrique

Exercice 20

$-9 < 0$ et $5 > 1$ donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 21

$-2 < 0$ et $\frac{1}{3} < 1$ donc la suite (t_n) est croissante.

Exercice 22

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est de premier terme -18
donc (u_n) est une suite croissante.

✓ Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique

Exercice 23

$$S = \frac{5}{16} (1 - 2^{50})$$

Exercice 24

$$S = \frac{9}{5} (1 - 4^{30})$$

Exercice 25

Cet exercice correspond au calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de dernier terme 24. $S =$

$$(n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Le nombre de coups entendus en 24 heures est :

$$(24 - 1 + 1) \times \frac{1+24}{2} = 24 \times \frac{25}{2} = 300.$$

Exercice 26

$$1^\circ) \text{ Je calcule : } \mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1-2}} = \frac{2}{3^{n-2+1}} = \frac{2}{3^{n-2}} \times \frac{1}{3};$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{3} \times \mathcal{U}_n$$

Et $\mathcal{U}_0 = \frac{2}{3^{-2}} = 2 \times 3^2 = 18$. La suite $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 18$.

2°) Je calcule $S = \mathcal{U}_4 + \dots + \mathcal{U}_{11}$. Pour le faire, je vais calculer \mathcal{U}_4 .

$$\mathcal{U}_4 = \frac{2}{3^{4-2}} = \frac{2}{3^1} = \frac{2}{3}$$

$$S = \mathcal{U}_4 + \dots + \mathcal{U}_{11}$$

$$= \mathcal{U}_4 \times \frac{1-q^{11-4+1}}{1-q} = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561}.$$

$$\text{Donc } S = \mathcal{U}_4 + \dots + \mathcal{U}_{11} = \frac{6560}{6561}.$$

➤ **EXERCICES DE RENFORCEMENT/
APPROFONDISSEMENT**

Exercice 27

1. $r = \frac{-3}{8}$ et $w_0 = \frac{19}{2}$

2. $w_n = \frac{19}{2} + \frac{-3}{8}n$

3. $S = 9 \times \frac{13}{2}$

Exercice 28

1. $u_{14} = u_{12} + 20 = 25$

2. $S = 38000$

Exercice 29

1. $u_{n+1} - u_n = -3$ donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -3.

2. $S_n = \frac{(n+1)(-3n+10)}{2}$

Exercice 30

1. $v_n = -2 \times 3^n$

2. $S = -59048$

Exercice 31

1. La suite (v_n) est croissante.

2. $S = 5115$

Exercice 32

1. La raison $q = \sqrt{6}$ et le premier terme $w_0 = \frac{1}{1296}$
2. $w_n = \frac{1}{1296} \times (\sqrt{6})^n$
3. $S = \frac{1}{1296} \times \frac{(\sqrt{6})^{13} - 1}{\sqrt{6} - 1}$

Exercice 33

1. $u_5 = \frac{1}{8} \times u_2$
2. $u_5 = \frac{5}{8}$ et $u_0 = 20$

Exercice 34

1. $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2 = 4u_n$
2. $u_{3n} = 9u_n$

Exercice 35

Il est question de calculer la somme des $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3, de premier terme 2.

Exercice 36

$$S = 500500$$

Exercice 37

- 1- La production de l'entreprise répond à une suite géométrique de raison $q = (1 - 0,07) = 0,93$

- $$P_n = P_0 \times q^n = 100 \times 0,93^n$$
- 2- $P_n = 100 \times 0,93^n \Rightarrow P_{n+1} = 100 \times 0,93^{n+1} = 100 \times 0,93^n \times 0,93 = 0,93P_n$.
Donc $P_{n+1} = 0,93P_n$.
- 3- La production étant de moitié c'est-à-dire 50 tonnes. On a :
 $100 \times 0,93^n = 50$
 $0,93^n = \frac{1}{2} \Rightarrow n \ln 0,93 = -\ln 2 \Rightarrow n = \frac{-\ln 2}{\ln 0,93} = 9,55$ soit 9 ans et 6 mois. La production sera donc de moitié à partir de l'année $2002+9 = 2011$.
- 4- En 2021, c'est-à-dire 19 ans après, la production de l'entreprise sera de :
 $P_{19} = P_0 \times q^{19} = 100 \times 0,93^{19} = 25,1869$ tonnes.

Exercice 38

1°) La suite est définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$u_n = u_1 + (n - 1)r = 12\,500 + 12\,500(n - 1).$$

2°) La valeur du huitième terme :

$$u_8 = 12\,500 + 12\,500 \times (8 - 1) = 12\,500 + 7 \times 12\,500$$

$$u_8 = 12\,500 + 7 \times 12\,500 = 100\,000$$

3°) Détermination du numéro du terme de valeur 250 000.

On sait que $u_n = u_1 + (n - 1)r$ avec $u_n = 250\,000$, $u_1 = 12\,500$ et $r = 12\,500$

$$250\,000 = 12\,500 + (n - 1) \times 12\,500$$

$$\Rightarrow 237\,500 = 12\,500n - 12\,500 \Rightarrow 12\,500n = 225\,000$$

$$n = \frac{225\,000}{12\,500} = 18 \Rightarrow u_{18} = 250\,000.$$

4°) La suite (u_n) étant arithmétique, la somme des 8 premiers termes obéit à la formule :

$$S = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

$$\text{Donc } S = (8 - 1 + 1) \times \frac{u_1 + u_8}{2} = 8 \times \frac{12\,500 + 250\,000}{2} = 4 \times 262\,500$$

Donc la somme des 8 premiers termes de la suite (u_n) est égale à 1 050 000.

Exercice 39

- 1- La méthode de calcul suit une progression arithmétique parce qu'il y a d'abord une somme fixe de $3 \times 15000 = 45000$ donnée à chaque participant puis une autre qui dépend de la distance parcourue.

Elle a pour raison $r = 40$ f CFA et pour premier terme $S_0 = 45000$ f.

- 2- Puisque (S_n) est arithmétique, alors son terme général est donné par : $S_n = 45000 + 40n$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 45000 + 40 \times (n + 1) \\ &= 45000 + 40n + 40 = S_n + 40 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_0 = 45000 \\ \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 40 \end{cases}$$

- 3- Puisque la distance San Pedro- Jacquville fait 365 en allée, alors la distance totale parcourue est $365 \times 2 = 730$ km.

L'enseignant venu de San Pedro a perçu :

$$45000 + 40 \times 730 = 74200 \text{ f CFA.}$$

- 4- Je calcule la distance pour l'enseignant qui a perçu 105000 f CFA.

$$105000 = 45000 + 40n \Rightarrow 40n = 60000$$

$$\Rightarrow n = \frac{60000}{40} = 1500 \text{ km}$$

Les 1500 km représentent la distance allée et retour, donc la distance qui sépare la ville de cet enseignant et Jacquville est :

$$\frac{1500}{2} = 750 \text{ km.}$$

Exercice 40

- $s_1 = 6; s_2 = 12; s_3 = 24$ et $s_4 = 48$
- a) $s_{n+1} = 2 \times s_n$
b) la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3.
- $s_n = 3 \times 2^n$
- la superficie est 3072 cm^2

Exercice 41

- $R_2 = 1700; R_3 = 1900$ et $R_4 = 2100$
- $R_n = 200n + 1300$
- $R_n = 4100$ équivaut à $n = 14$
- On détermine la somme des recettes au bout des 14 jours.

$$S = 14 \times \frac{1500 + 4100}{2} = 39200$$

$39200 > 35000$ donc Séka aura suffisamment de moyens.

Exercice 42

1. $C_1 = 215000$; $C_2 = 230000$ et $C_3 = 245000$
2. $C_3 - C_2 = 15000$; $C_2 - C_1 = 15000$ donc la suite (C_n) est une suite arithmétique
3. $C_n = 15000n + 200000$
4. $C_6 = 290000$
5. Le capital sera supérieur à 360000 au bout de 11 années

Exercice 43

1. $v_1 = 25500$ et $v_{36} = 938\,000$
2. $S = 17\,244\,000$

Exercice 44

1. $S_2 = 157\,500$ et $S_3 = 165\,375$
2. Montrer que $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1,05$
3. $S = 4\,219\,858$

Exercice 45

1. $u_1 = \frac{19}{2}$; $u_2 = \frac{73}{8}$; $u_3 = \frac{283}{32}$ et $u_4 = \frac{1105}{128}$
2. a) $v_1 = \frac{3}{2}$; $v_2 = \frac{9}{8}$; $v_3 = \frac{27}{32}$ et $v_4 = \frac{81}{128}$
b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4}$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
c) $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3. a) $u_n = v_n + 8$

b) $u_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8.$

Exercice 46

1. a) $u_{n+1} - u_n = 2$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) $u_1 = 3; u_2 = 5; u_3 = 7$ et $u_4 = 9$

c) $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

2. a) $v_1 = -4; v_2 = -8; v_3 = -16$ et $v_4 = -32$

b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -2.$

c) la suite (v_n) est décroissante.

3. a) $u_n = v_n + 3$

b) $u_n = -2^{n+1}$

Exercice 47

(u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$

$$S_{10} = \frac{1}{3} \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{2047}{3}$$

Exercice 48

- S est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

$$S = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right).$$

- R est la somme des 15 premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

$$R = 32767$$

Exercice 49

1. $u_1 \times u_5 = q^4 \times (u_1)^2 = (u_3)^2$
2. On obtient l'équation : $2q^2 - 5q + 2 = 0$ où q est la raison de la suite (u_n) .
 - Si $q = 2$ alors $u_1 = \frac{5}{4}$; $u_2 = \frac{5}{2}$; $u_3 = 5$; $u_4 = 10$ et $u_5 = 20$
 - Si $q = \frac{1}{2}$ alors $u_1 = 20$; $u_2 = 10$; $u_3 = 5$; $u_4 = \frac{5}{2}$ et $u_5 = \frac{5}{4}$

➤ SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 50

Pour répondre à la préoccupation du père de mon camarade de classe, je vais utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques. Pour cela, je vais calculer le capital acquis au bout des cinq années dans l'option 1 et dans l'option 2, puis les comparer pour lui faire la meilleure proposition.

Option 1

Calcul au taux d'intérêt simple calculé sur le capital initial, ce qui veut dire qu'on est en présence d'une suite arithmétique.

Soit A_n = le capital acquis, A_0 = capital initial et $r = 2\,000\,000 \times 0,09 = 180\,000$: la raison

Je détermine le terme général de la suite.

$$A_n = A_0 + r \times n \Rightarrow A_5 = 2\,000\,000 + 180\,000 \times 5 = 2\,900\,000$$

A terme, avec l'option 1, le capital acquis sera de 2 900 000 f CFA.

Option 2

Le capital initial augmente de 8,5% l'an, ce qui veut dire qu'on est en présence d'une suite géométrique.

Soit G_n = le capital acquis, G_0 = capital initial et $q = 1 + 0,085 = 1,085$: la raison

Je détermine le terme général de la suite.

$$G_n = G_0 \times q^n \Rightarrow G_5 = 2\,000\,000 \times (1,085)^5 = 3\,007\,313,38$$

A terme, avec l'option 2, le capital acquis sera de 3 007 313,38 f CFA.

A partir de ces résultats, je lui propose de choisir l'option 2.

Exercice 51

Pour répondre à la requête du professeur je vais utiliser les suites géométriques.

Le volume de la forêt évolue selon une suite géométrique de raison 1,07 et de premier terme 100 000.

Soit V_n le volume de la forêt au bout de n années.

$$V_n = 100\,000 \times (1,07)^n$$

Pour déterminer le nombre d'années qu'il faudra pour atteindre $300.000m^3$ il faut résoudre l'inéquation

$$100\,000 \times (1,07)^n \geq 300\,000 .$$

Il faudra au minimum 17 ans.

Exercice 52

L'évolution de cette pandémie est semblable à celle de la suite arithmétique de raison 120 et de premier terme 1.

Soit S_n le nombre total des personnes contaminées au nième jour.

$$S_n = \frac{(n+1)(120n+2)}{2} = (n+1)(60n+1)$$

Réolvons l'inéquation $S_n > 10\,000$.

On obtient $n = 13$.

La déclaration de mon camarade est donc incorrecte.

Exercice 53

Pour déterminer le contrat le plus avantageux, je vais utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques. Pour cela, je vais calculer le capital acquis au bout des 9 années avec la proposition 1 et avec la proposition 2, puis les comparer pour lui faire la meilleure proposition.

Proposition 1

Augmentation de 4% du salaire de l'année précédente, ce qui veut dire qu'on est en présence d'une suite géométrique.

Soit A_n = le salaire de la nième année, A_0 = le salaire initial et

$r = 1,04$: la raison

Je détermine le terme général de la suite.

$$A_n = A_0 \times (1,04)^n \Rightarrow A_8 = 750\,000 \times (1,04)^8 = 1\,026\,427$$

Au terme des 9 années, avec la proposition 1, l'enseignant aura perçu la somme de 7 937 096 FCFA.

Proposition 2

Le capital initial augmente de 30 000 l'an, ce qui veut dire qu'on est en présence d'une suite arithmétique.

Soit B_n = le salaire de la nième année, B_0 = Salaire initial et $q = 30\,000$: la raison

Je détermine le terme général de la suite.

$$B_n = B_0 + 30\,000n \Rightarrow B_8 = 750\,000 + 8 \times 30\,000 = 990\,000$$

Au terme des 9 années, avec la proposition 2, l'enseignant aura perçu la somme de 7 830 000 FCFA.

A partir de ces résultats, je conclus que le contrat le plus avantageux est le contrat 1.

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Quand se déroule la situation ?	A l'occasion de l'anniversaire de la mère de deux frères.
Circonstances	-Que font ces deux frères? -Que fait l'un deux élève en classe de terminale A ?	Ils s'adressent à un pâtissier. -Il transmet les informations reçues du pâtissier à ses camarades de classe.
Tâches	-Que décident de faire les élèves ?	-Ils décident d'écrire un système d'inéquations pour déterminer le nombre maximum de gâteaux de chaque type que pourra fabriquer le pâtissier et le bénéfice qu'il pourra ainsi réaliser.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABLETÉS

ACTIVITE 1 : Résolution d'un système de type

$$\begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases}$$

- L'objectif de cette activité est de résoudre des systèmes de deux équations faisant intervenir la fonction ln.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Contraintes sur x et y : $x > 0$ et $y > 0$.

2. Posons : $\ln x = X$ et $\ln y = Y$. On obtient par ce changement le

$$\text{système : } (S') : \begin{cases} 2X - Y = 1 & \text{(i)} \\ X + Y = 5 & \text{(ii)} \end{cases}$$

3. Résolvons le système (S') par la méthode de substitution.

- On exprime Y en fonction de X dans l'équation (i).

On a : $Y = 2X - 1$ (iii).

- On remplace dans l'équation (ii), Y par $2X - 1$.

On obtient $X + 2X - 1 = 5$

C'est-à-dire $3X = 6$

Par suite $X = \frac{6}{3} = 2$.

- Déterminons Y en remplaçant X par 2 dans l'égalité (iii)

$$Y = 2X - 1.$$

On obtient $Y = 2 \times 2 - 1$.

C'est-à-dire $Y = 4 - 1 = 3$.

4. On obtient : $\ln x = X = 2$ et $\ln y = Y = 3$.

$$e^{\ln x} = e^2 \text{ et } e^{\ln y} = e^3.$$

D'où : $x = e^2$ et $y = e^3$.

Le couple solution de (S_1) est le couple $(e^2 ; e^3)$.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 1

Le couple solution du système (S) : $(e; e^2)$

Exercice 2

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{1}{e^2}; e \right) \right\}$$

Activité 2 : Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'un système du type

$$\begin{cases} ae^x + be^y = c \\ a'e^x + b'e^y = c' \end{cases}$$

- L'objectif de cette activité est de résoudre des systèmes de deux équations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Posons : $e^x = X$ et $e^y = Y$. On obtient par ce changement le système : (S') : $\begin{cases} 2X - Y = -2 & \text{(i)} \\ 4X + Y = 5 & \text{(ii)} \end{cases}$

2. Résolvons le système (S') par la méthode de substitution.

- On exprime Y dans l'équation (i).

On a : $Y = 2X + 2$ (iii).

- On remplace dans l'équation (ii), Y par $2X + 2$.

On obtient $4X + 2X + 2 = 5$

C'est-à-dire $6X = 3$

Par suite $X = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- Déterminons Y en remplaçant X par $\frac{1}{2}$ dans l'égalité (iii) $Y = 2X + 2$.

On obtient $Y = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2$.

C'est-à-dire $Y = 1 + 2 = 3$.

3. On obtient : $e^x = X = \frac{1}{2}$ et $e^y = Y = 3$.

$e^{\ln x} = e^{\ln \frac{1}{2}}$ et $e^{\ln y} = e^{\ln 3}$.

D'où : $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ et $y = \ln 3$.

Le couple solution du système (S) est le couple $(-\ln 2; \ln 3)$.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 3

Le couple solution du système (S) : $(0; \ln 2)$,

Exercice 4

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(0; \ln 2)\}$$

Activité 3 : Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- L'objectif de cette activité est de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Réponses aux questions de l'activité

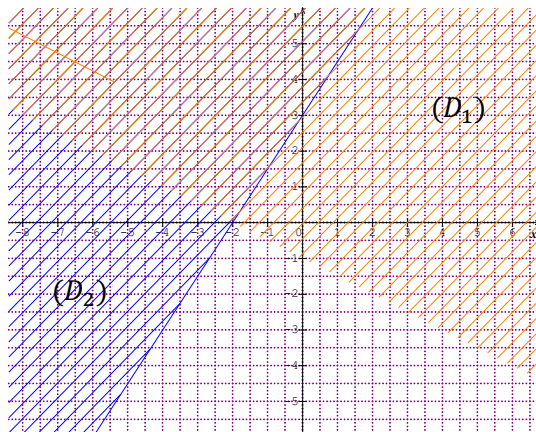
1. Traçons les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $-3x + 2y - 6 = 0$ et

$x + 2y + 2 = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

$$(D_1) : -3x + 2y - 6 = 0 \qquad (D_2) : x + 2y + 2 = 0$$

x	0	-2
y	3	0

x	0	-2
y	-1	0



2. a) hachurons en bleu le demi-plan de frontière (D_1) solution de l'inéquation

$$-3x + 2y - 6 \leq 0. \text{ (voir figure)}$$

b) hachurons en orange le demi-plan de frontière (D_2) solution de l'inéquation

$$x + 2y + 2 \leq 0. \text{ (voir figure)}$$

3. a) Colorions en vert la partie (P) du plan non encore hachurée.

b) Trouve un couple (a, b) solution du système (S).

le couple $(-1 ; -2)$ est solution du système (S)

c) Plaçons le point $M(a, b)$, puis vérifie que M appartient à (P).

$M(-1 ; -2)$ appartient à (P)

d) Trouve un point $N(a', b')$ appartenant à (P), puis vérifie que le couple (a', b') est solution du système (S).

le point $N(-2 ; -3)$ appartient à (P).

le couple $(-2 ; -3)$ est solution du système (S)

4. Déduisons de ce qui précède l'ensemble des solutions du système (S).

L'ensemble des solutions est la partie (P) du plan non hachurée.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 5

Les couples solutions du système (S) sont : $(0; -1)$ et $(-1; -3)$

Exercice 6

- Résolvons graphiquement l'inéquation (I_1): $-x + y - 2 \leq 0$

Traçons la droites (D_1) d'équation $-x + y - 2 = 0$ en utilisant le tableau suivant :

x	0	-2
y	2	0

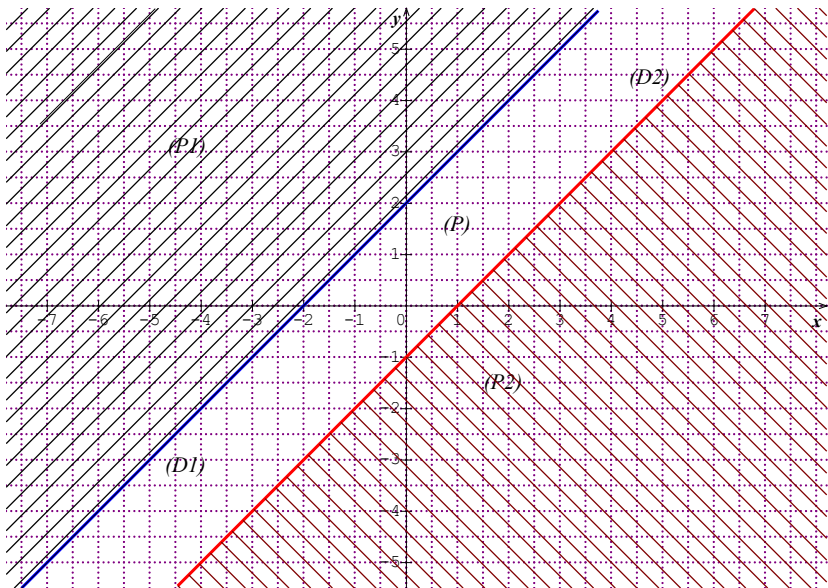
Le demi-plan (P_1) de frontière la droite (D_1) ne contenant pas le point $O(0 ; 0)$ n'est pas solution de (I_1) . Hachurons en bleu le demi-plan (P_1) .

• Résolvons graphiquement l'inéquation $(I_2): x - y - 1 \leq 0$
 Traçons la droites (D_2) d'équation $x - y - 1 = 0$. En utilisant le tableau suivant :

x	0	1
y	-1	0

Le demi-plan (P_2) de frontière la droite (D_2) ne contenant pas le point $O(0 ; 0)$ n'est pas solution de (I_2) . Hachurons en orange le demi-plan (P_2) .

- L'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie (P) du plan non hachurée.



Activité 4 : Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système de trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- L'objectif de cette activité est de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de trois inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Réponses aux questions de l'activité

1. Traçons les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) d'équations respectives $-3x + 2y - 6 = 0$ et $x + 2y + 2 = 0$ et $x - y + 2 = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

$(D_1) : -3x + 2y - 6 = 0$

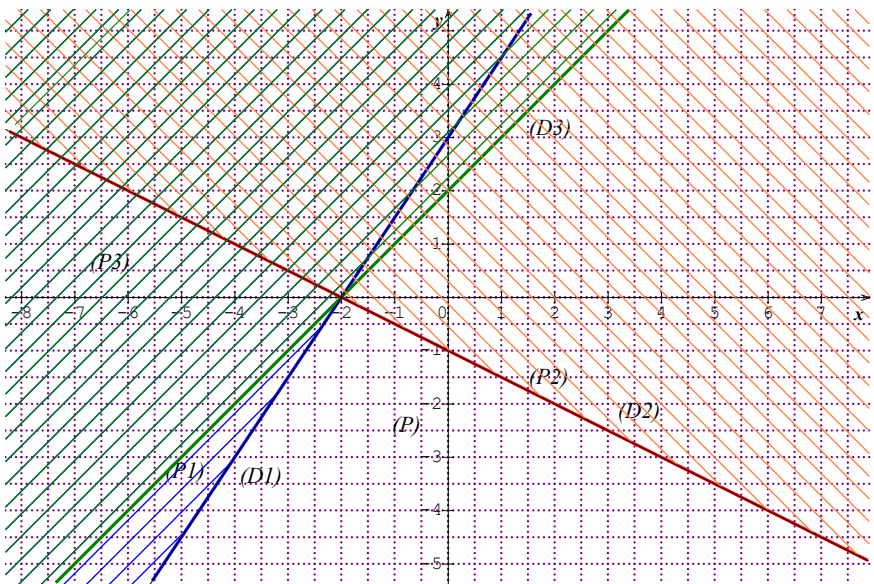
$(D_2) : x + 2y + 2 = 0$

$(D_3) : x - y + 2 = 0$

x	0	-2
y	3	0

x	0	-2
y	-1	0

x	0	-2
y	-1	0



2. a) hachurons en bleu le demi-plan (P_1) de frontière (D_1)
solution de l'inéquation

$$-3x + 2y - 6 > 0. \text{ (voir figure)}$$

b) hachurons en orange le demi-plan (P_2) de frontière (D_2) non
solution de l'inéquation

$$x + 2y + 2 > 0. \text{ (voir figure)}$$

c) hachurons en vert le demi-plan (P_3) de frontière (D_3) non
solution de l'inéquation

$$x - y + 2 \leq 0$$

3. Déduisons de ce qui précède l'ensemble des solutions du
système (S).

L'ensemble des solutions est la partie (P) du plan non hachurée.

- **Corrigé des exercices de fixation**

Exercice 7

Les couples solutions sont : $(-5; 1)$ et $(-1; 0,5)$,

Exercice 8

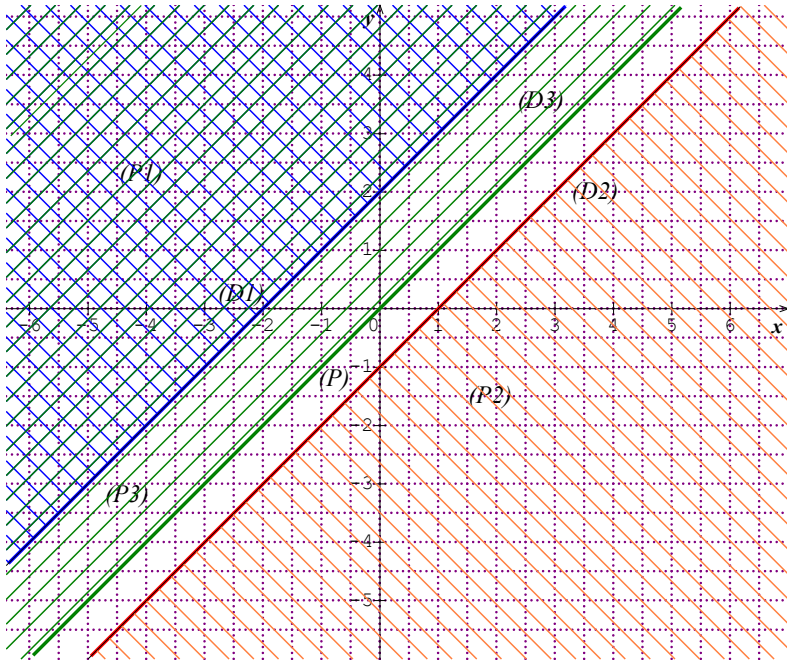
Traçons les droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives
 $-x + y - 2 = 0$ et $x - y - 1 = 0$ et $x - y = 0$ dans le plan muni
d'un repère orthonormé (O, I, J).

$$(D_1) : -x + y - 2 = 0 \quad (D_2) : x - y - 1 = 0 \quad (D_3) : x - y = 0$$

x	0	-2
y	2	0

x	0	1
y	-1	0

x	0	1
y	0	1



Hachurons en bleu le demi-plan (P_1) de frontière (D_1) solution de l'inéquation

$$-x + y - 2 > 0. \text{ (voir figure)}$$

Hachurons en orange le demi-plan (P_2) de frontière (D_2) non solution de l'inéquation

$$x - y - 1 > 0. \text{ (voir figure)}$$

Hachurons en vert le demi-plan (P_3) de frontière (D_3) non solution de l'inéquation

$$x - y \leq 0$$

On Déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions du système (S).est la partie (P) du plan non hachurée.

III-Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment résoudre un système du type

$$\begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases} ?$$

Solution de l'exercice non corrigé

- Contraintes sur x et y : $x > 0$ et $y > 0$.
- Posons : $\ln x = X$ et $\ln y = Y$. On obtient par ce changement le

$$\text{système : } (S') : \begin{cases} -3X + Y = 4 & \text{(i)} \\ 4X - Y = -5 & \text{(ii)} \end{cases}$$

- Résolvons le système (S') par la méthode de substitution.

- On exprime Y en fonction de X dans l'équation (i).

On a : $Y = 3X + 4$ (iii).

- On remplace dans l'équation (ii), Y par $3X + 4$.

On obtient $4X - 3X - 4 = -5$

C'est-à-dire $X = -1$

- Déterminons Y en remplaçant X par -1 dans l'égalité (iii)

$Y = 3X + 4$.

On obtient $Y = 3 \times (-1) + 4$.

C'est-à-dire $Y = -3 + 4 = 1$.

- On obtient : $\ln x = X = -1$ et $\ln y = Y = 1$.

$e^{\ln x} = e^{-1}$ et $e^{\ln y} = e^1$.

D'où : $x = e^{-1}$ et $y = e$.

Le couple solution de (S) est le couple $(e^{-1} ; e)$.

Question 2 : Comment résoudre un système du

type $\begin{cases} a e^x + b e^y = c \\ a' e^x + b' e^y = c' \end{cases} ?$

Solution de l'exercice non corrigé

Le système (S) a pour solution le couple $(\ln 2 ; \ln 4)$.

Question 3 : Comment résoudre graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un système de trois inéquations ?

Solution de l'exercice non corrigé

- Résolvons graphiquement l'inéquation $(I_1): x > 0$

Traçons la droite (D_1) d'équation $x = 0$.

Le demi-plan (P_1) de frontière la droite (D_1) ne contenant pas le point $I(1 ; 0)$ n'est pas solution de (I_1) . Hachurons en bleu le demi-plan (P_1) .

- Résolvons graphiquement l'inéquation $(I_2): y \leq 0$

Traçons la droite (D_2) d'équation $y = 0$.

Le demi-plan (P_2) de frontière la droite (D_2) contenant le point $J(0 ; 1)$ n'est pas solution de (I_2) . Hachurons en orange le demi-plan (P_2) .

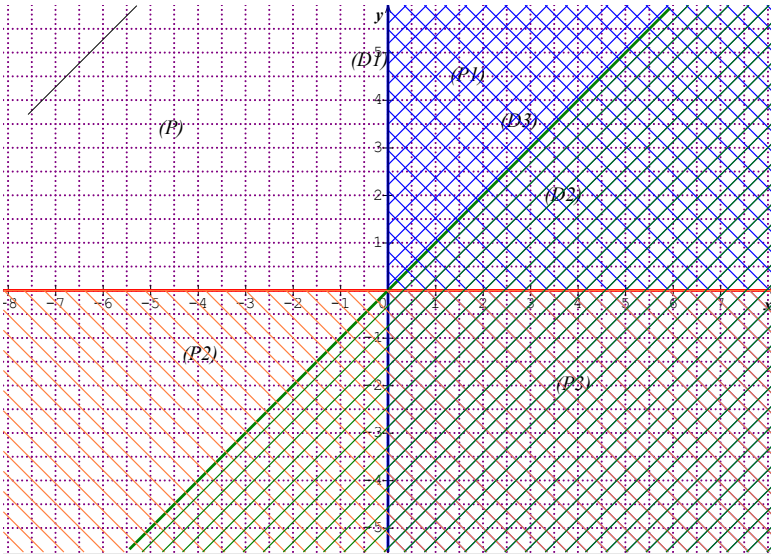
- Résolvons graphiquement l'inéquation $(I_3): x - y < 0$

Traçons la droite (D_3) d'équation $x - y = 0$ en utilisant le tableau suivant :

x	0	1
y	0	1

Le demi-plan (P_3) de frontière la droite (D_3) ne contenant pas le point $I(1 ; 0)$ n'est pas solution de (I_3) . Hachurons en vert le demi-plan (P_3) .

- L'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des couples de coordonnées des points de la partie (P) du plan non hachurée.



IV-Mes séances d'exercices

➤ Exercices de fixation

✓ SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ DU

$$\text{TYPE } \begin{cases} a \ln x + b \ln y = c \\ a' \ln x + b' \ln y = c' \end{cases}$$

Exercice 1

Le couple solution du système (S) est : $(e^2; e)$

Exercice 2

1. Vrai

2. Faux

3. Vrai

Exercice 3

1) $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(1; e)\}$

2) $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^{-2}; e^{-1})\}$

✓ **SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ DU**

$$\text{TYPE } \begin{cases} ae^x + be^y = c \\ a'e^x + b'e^y = c' \end{cases}$$

Exercice 4

Le couple solution du système (S) est: $(\ln 2; 0)$

Exercice 5

1. Faux 2. Faux 3. Vrai

Exercice 6

1 $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(0; \ln 3)\}$ 2. $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \emptyset$

✓ **SYSTEME DE DEUX OU TROIS INEQUATIONS DU
PREMIER DEGRE DANS**

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 7

La partie (P) du plan solution du système d'inéquations correspondant

Figure 1 : (P1)

Figure 2 : (P1)

Figure 3 : (P4)

Exercice 8

Les couples solutions du système (S) sont : $(0 ; 0)$, $(\frac{1}{2}; -3)$ et $(4 ; -4)$.

Exercice 9

Trois couples de nombres réels solutions du système (S) : $(0 ; 0)$, $(3 ; 1)$
et $(-2 ; 0)$

Exercice 10

Trois couples de nombres réels solutions du système (S) : (2 ;4), (3 ;6) et (4 ;5).

➤ Exercices de renforcement/ approfondissement

Exercice 11

Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S1): \begin{cases} 2e^x - e^y = 5 \\ -e^x + e^y = 3 \end{cases} : \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 8; \ln 11)\}$$

$$(S2): \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{3} \ln y = 1 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} : \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(1; e^3)\}$$

$$(S3): \begin{cases} -e^{-x} + e^{-y} = 6 \\ e^{-x} + 2e^{-y} = 3 \end{cases} : \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \emptyset$$

Exercice 12

Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S1): \begin{cases} 2e^x - \ln y = 5 \\ -e^x + \ln y = 3 \end{cases}$$

- Contraintes sur x et y : $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$

- On pose : $X = e^x$ et $Y = \ln y$

$$\begin{cases} 2e^x - \ln y = 5 \\ -e^x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X - Y = 5 \\ -X + Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 8 \\ Y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 8 \\ \ln y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 8 \\ y = e^{11} \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 8; e^{11})\}$$

$$(S2): \begin{cases} -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}e^y = 1 \\ \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{2}e^y = 2 \end{cases} : \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\ln \left(\frac{48}{13} \right); \ln \left(\frac{6}{13} \right) \right) \right\}$$

$$(S3): \begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + 2e^y = 6 \end{cases} : \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(1; e^3)\}$$

Exercice 13

Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S1): \begin{cases} e^{x-1} \times e^{-y-2} = e^{-\frac{8}{2}} \\ \ln x + \ln y = \ln(1-x) + \ln(1-y) \end{cases}$$

- Contraintes sur x et y : $x \in]0; 1[$ et $y \in]0; 1[$

- $(S1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = -\frac{5}{2} \\ xy = (1-x)(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\text{donc } \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4} \right) \right\}$$

$$(S2): \begin{cases} -3\ln x + 4\ln y = 2 \\ \ln \left(\frac{1}{x} \right) - \ln \left(\frac{1}{y} \right) = 3 \end{cases} ; \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^{-10}; e^{-7})\}$$

Exercice 14

Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S1): \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases} ; \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(12; 18); (18; 12)\}$$

$$(S2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln x + \ln y = \ln 91 \end{cases} ; \mathbf{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(7; 13); (13; 7)\}$$

$$(S3): \begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases} ; \mathcal{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(2; \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Exercice 15

Détermination des couples $(x; y)$ de nombres réels tels que :

$$\begin{cases} \ln x \in \mathbb{Z} \text{ et } \ln y \in \mathbb{Z} \\ (\ln x)^2 - (\ln y)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} \ln x \in \mathbb{Z} \text{ et } \ln y \in \mathbb{Z} \\ (\ln x)^2 - (\ln y)^2 = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \in \mathbb{Z} \text{ et } \ln y \in \mathbb{Z} \\ (\ln x - \ln y)(\ln x + \ln y) = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Les couples solutions du système sont : $(e^2; e)$ et $(e^{-2}; e^{-1})$.

Exercice 16

1. Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(2; 3)\}$$

2. a) Justifions que le système $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \\ \ln x + \ln(y^3) = 11 \end{cases}$ a pour

ensemble de validité :

$$V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[.$$

$$x \in V \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ donc } V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$$

b) Justifions que pour $(x; y) \in V$, $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \\ \ln x + \ln(y^3) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x + 3\ln y = 11 \end{cases}$$

On a : pour $(x; y) \in V$, $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \\ \ln x + \ln(y^3) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x + 3\ln y = 11 \end{cases}$

3. Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \\ \ln x + \ln(y^3) = 11 \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^2; e^3)\}$$

Exercice 17

1. Résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équation : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(1; 2)\}$$

2. Dédution de la question précédente l'ensemble des solutions du système (S) :

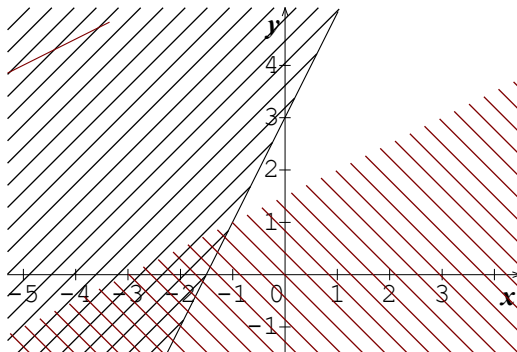
$$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(\ln 2; 0)\}$$

Exercice 18

Résolution graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système de deux inéquations

$$(S) : \begin{cases} -2x + y - 3 < 0 \\ x - 2y + 3 < 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est la partie non hachurée du plan.

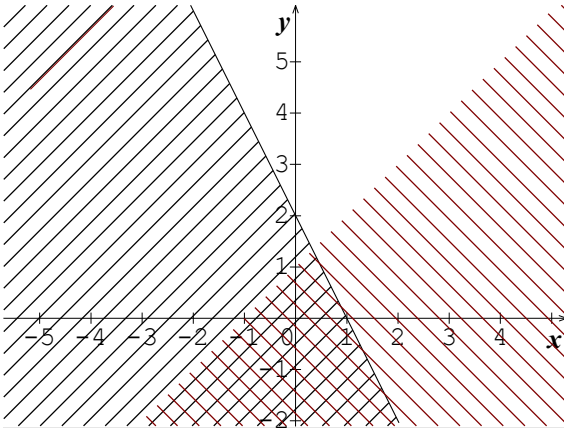


Exercice 19

Résolution graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système de deux inéquations

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - 2 > 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est la partie non hachurée du plan.

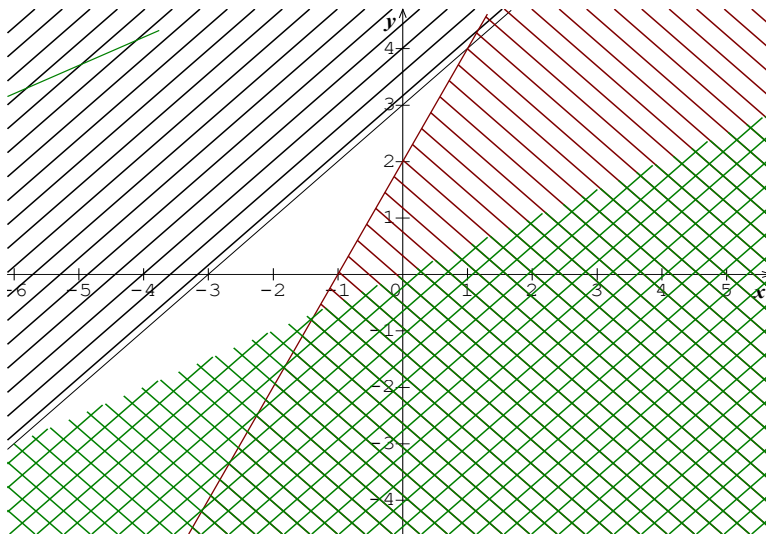


Exercice 20

Résolution graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système de trois inéquations

$$(S) : \begin{cases} -x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y + 2 < 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

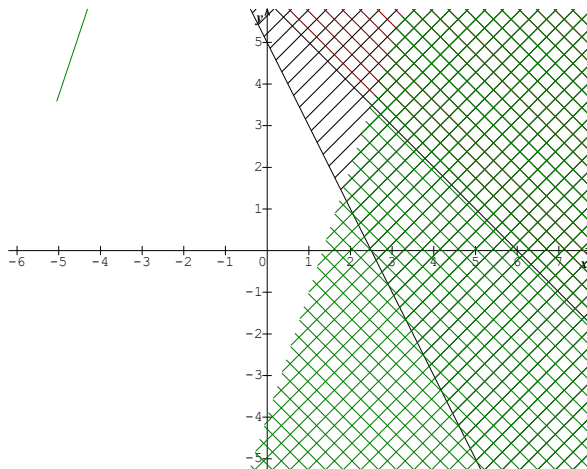
L'ensemble des solutions du système est la partie non hachurée du plan



Exercice 21

Résolution graphique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système (S) :
$$\begin{cases} 2x + y - 5 \leq 0 \\ -x - y + 6 \geq 0 \\ 3x - y - 4 < 0 \end{cases}$$

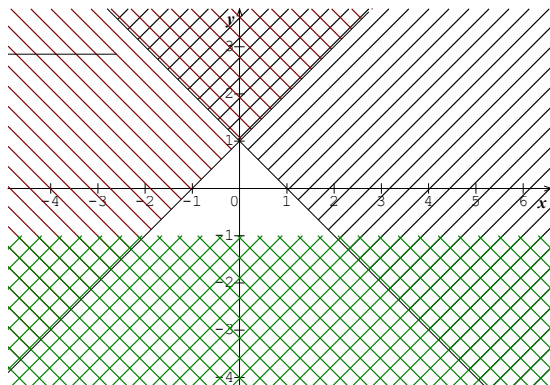
L'ensemble des solutions du système est la partie non hachurée du plan



Exercice 22

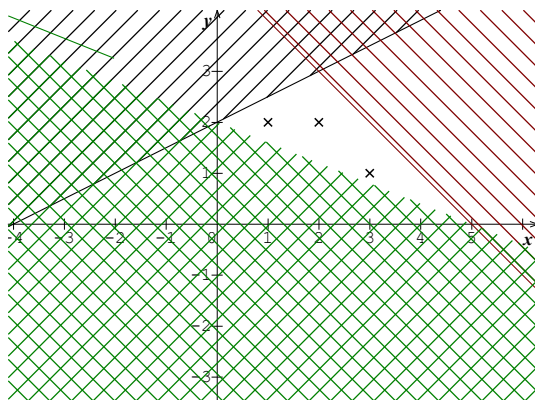
Résolution graphique de chacun des systèmes d'inéquations :

$$1. (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$$



L'ensemble des solutions du système dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est :
 $\{(0; 0); (1; 0); (0; 1)\}$

$$2. (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \begin{cases} x - 2y + 4 > 0 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + 5y - 10 > 0 \end{cases}$$



L'ensemble des solutions du système dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est :
 $\{(1; 2); (2; 2); (3; 1)\}$

Exercice 23

Soit x le nombre d'élèves et p le prix d'un repas.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 500x + 500 = 570x - 200 \\ p = \frac{500x+500}{10} \end{cases}$$

On obtient : $x = 10$ et $p = 550$

Exercice 24

Soit x le nombre de moutons et y le nombre de pintades.

$$\text{On a : } \begin{cases} 2500x + 5000y = 15000 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

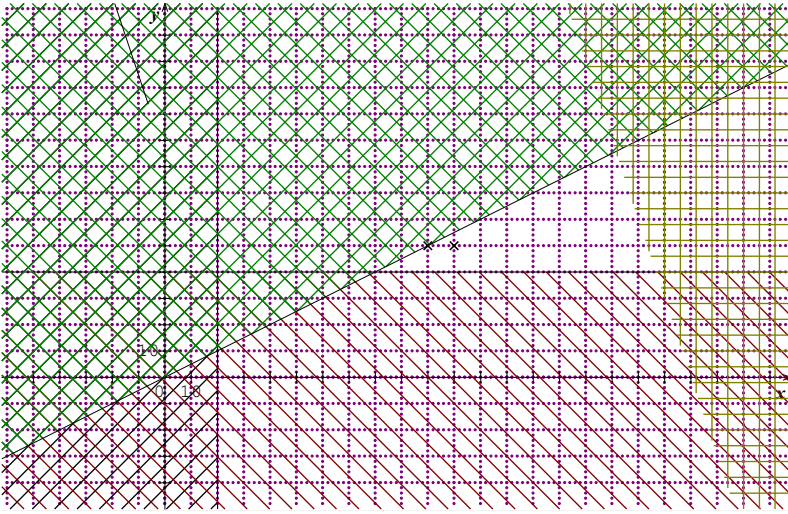
$$\text{On obtient : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Exercice 25

1. Représentation graphique de l'ensemble des solutions

Soit x le nombre de paquets de couvertures et y le nombre de caisses de matériel médical.

$$\text{On a : } \begin{cases} 150x \geq 3000 \\ 50y \geq 2000 \\ x \geq 2y \\ 150x + 50y \leq 30000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 40 \\ x - 2y \geq 0 \\ 3x + y \leq 600 \end{cases}$$



L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des couples d'entiers naturels des points situés dans la partie non hachurée du plan.

1. Le couple $(110; 50)$ est solution du système $\begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 40 \\ x - 2y \geq 0 \\ 3x + y \leq 600 \end{cases}$ donc

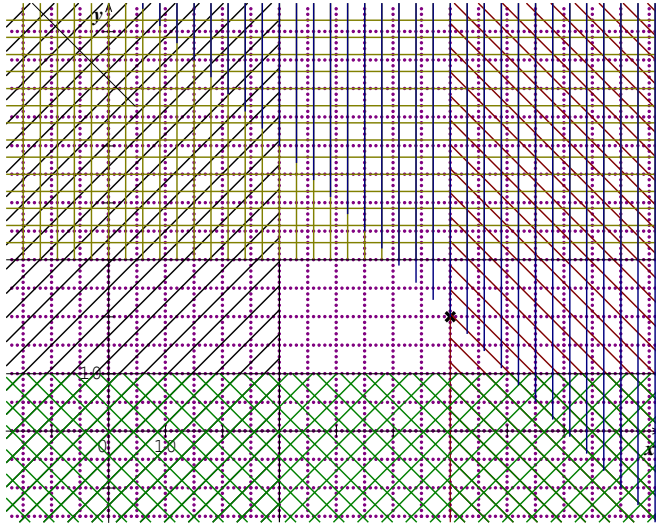
l'ONG peut acheminer 110 paquets de couvertures et 50 caisses de matériel médical.

Exercice 26

Détermination du nombre de blouses de chaque type qu'il faut fabriquer quotidiennement pour avoir un bénéfice maximal.

Soit x le nombre de paquets de couvertures et y le nombre de caisses de matériel médical.

$$\text{On a : } \begin{cases} 30 \leq x \leq 60 \\ 10 \leq y \leq 30 \\ x + y \leq 80 \end{cases}$$



L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des couples d'entiers naturels des points situés dans la partie non hachurée du plan.

Le bénéfice est : $B = 10000x + 8000y$

Le bénéfice est maximal pour le couple $(60 ; 20)$ et ce bénéfice est :

$$B = 760\,000 \text{ F}$$

Exercice 27

Données manquantes dans l'énoncé:

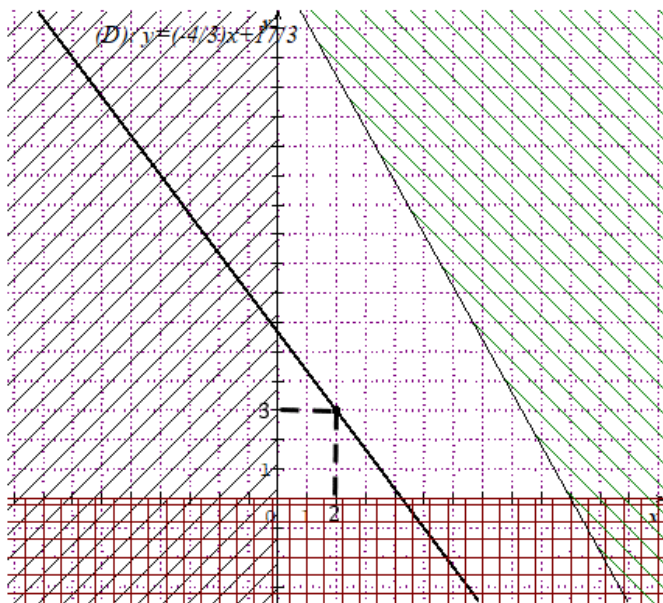
- Le prix de vente d'un sac d'arachide est : 50 000F
- Le prix de vente d'un bidon de miel est : 38 500F

Données à modifier

- Elle doit investir au plus 200 000F
- Elle veut réaliser un bénéfice de 204 000F et non 80 000F

1. Représentation graphique

Soit x le nombre de sacs d'arachides et y le nombre de bidons de miel



2. Le bénéfice est : $B = (50000x + 38500y) - (2000x + 2500y)$
Donc $B = 204000 \Leftrightarrow 4x + 3y = 17$

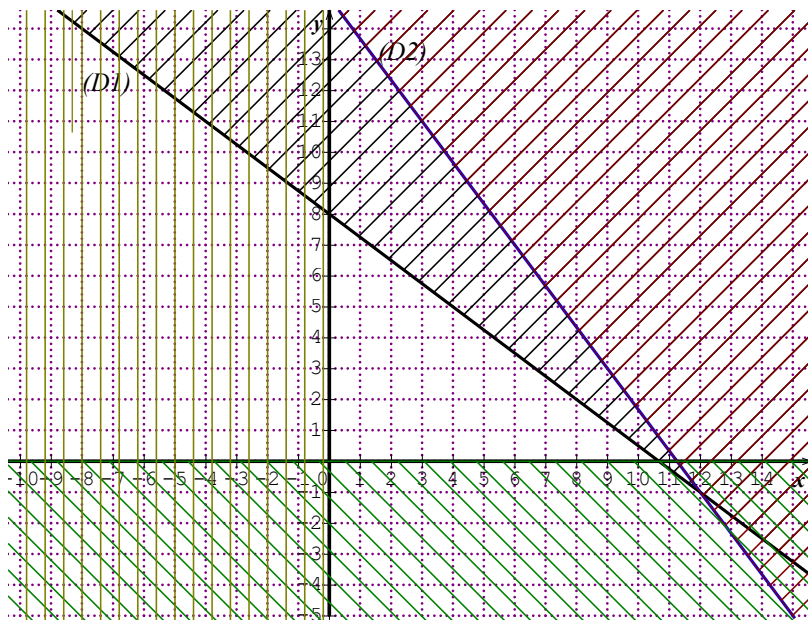
Pour réaliser un bénéfice de 204 000F Madame Yafolo doit acheter 2 sacs d'arachides et 3 bidons de miel.

Exercice 28

1. x étant le nombre de tableau de type A et y le nombre de tableau de type B, on a : $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

De plus on a : $\begin{cases} \frac{3}{4}x + y \leq 8 \\ 4x + 3y \leq 45 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 3x + 4y \leq 32 \\ 4x + 3y \leq 45 \end{cases}$

On obtient donc le système (S) :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 3x + 4y \leq 32 \\ 4x + 3y \leq 45 \end{cases}$$


2.a) Le couple (3; 6) n'est pas solution du système donc l'artiste ne pourra pas fabriquer 3 tableaux de type A et 6 tableaux de type B.

b) Le couple (4; 5) est solution du système donc l'artiste pourra fabriquer 4 tableaux de type A et 5 tableaux de type B.

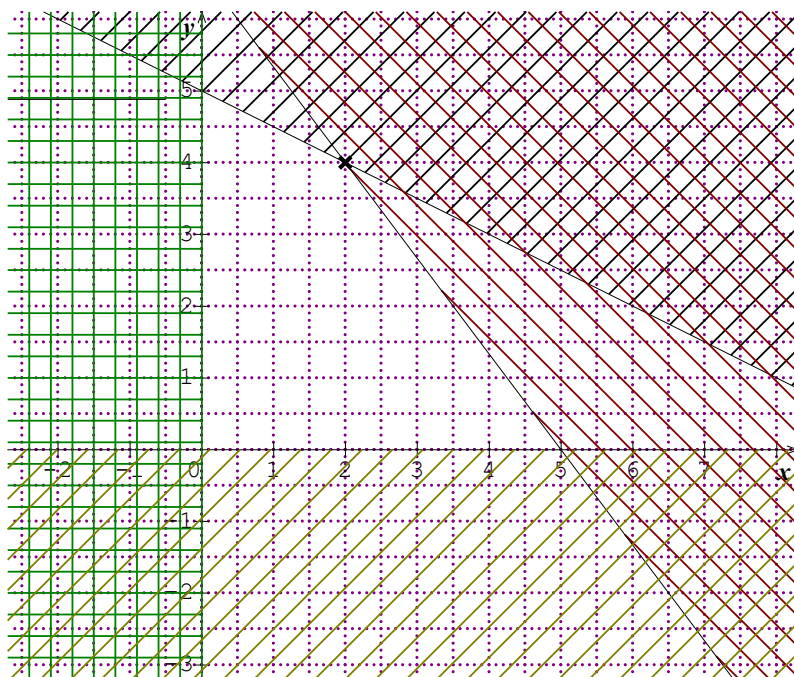
➤ Situations complexes

Exercice 29

Soit x le nombre de camionnettes et y le nombre de mini bus.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ y \in \mathbb{N}^* \\ x + 2y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Représentation graphique



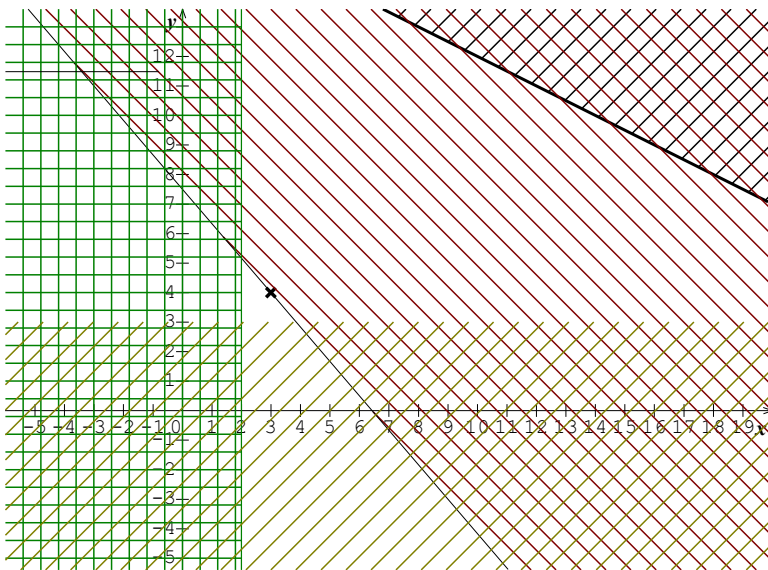
La capacité de UTT est maximale pour $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Exercice 30

Soit x le nombre de poulet de chair et y le nombre de coquelets.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ 5x + 10y < 170 \\ 7000x + 6000y \leq 45\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x + 2y < 34 \\ 7x + 6y \leq 45 \end{cases}$$

Représentation graphique



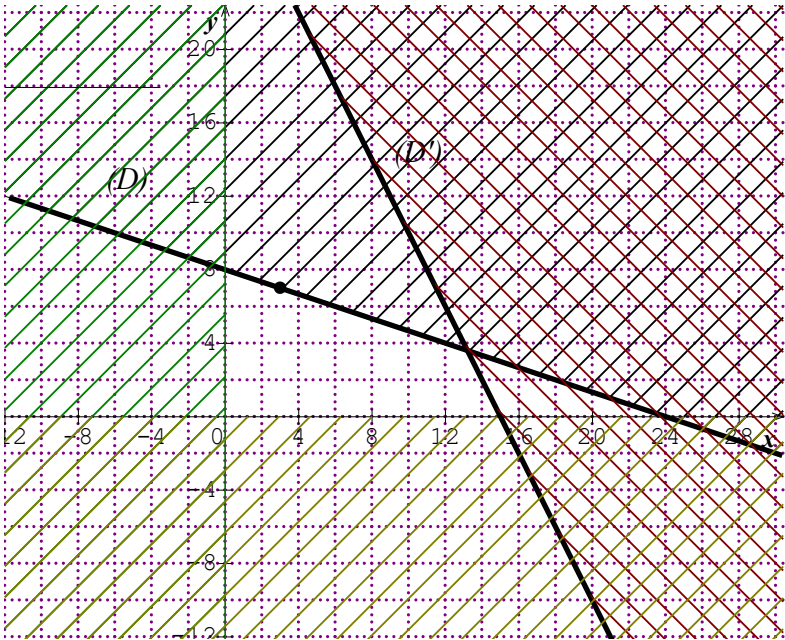
L'unique couple solution du système est (3; 4) donc le père de Koffi pourra ramener de la ferme 3 poulets de chair et 4 coquelets.

Exercice 31

Soit x le nombre de caramels à la fraise et y le nombre de caramels au chocolat.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 3y \leq 24 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $x + 3y - 24 = 0$ et $2x + y - 30 = 0$



Le couple $(x; y)$ pour lequel le bénéfice est maximal est le couple $(3; 7)$.

Donc pour réaliser un bénéfice maximal, Bintou doit confectionner 3 caramels à la fraise et 7 caramels au chocolat. Ce bénéfice est

$$B = 5 \times 3 + 20 \times 7 = 155 F.$$

Exercice 32

Soit x le montant prêté à Achille et y le montant prêté à Hilaire

$$\text{On a : } \begin{cases} 0,15x + 0,2y = 75000 \\ 0,2x + 0,2y = 80000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,15x + 0,2y = 75000 \\ 0,2x + 0,2y = 80000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 1\,500\,000 \\ x + y = 400\,000 \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} x = 100\,000 \\ y = 300\,000 \end{cases}$$

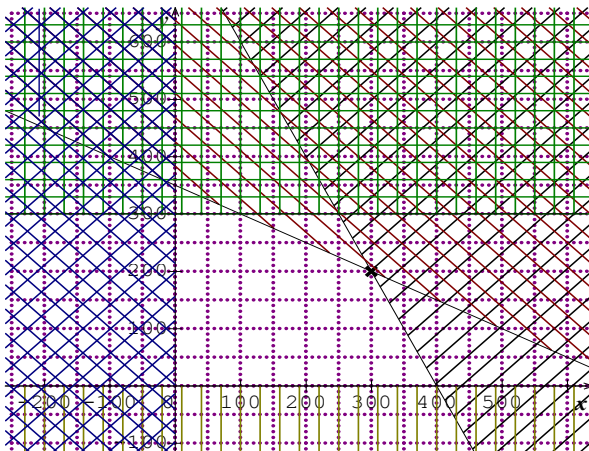
Donc le montant prêté à Achille est 100 000 francs et le montant prêté à Hilaire est 300 000 francs

Exercice 33

Soit x le nombre de yaourt X et y le nombre de yaourt Y.

$$\text{On a : } \begin{cases} 2x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 700 \\ y \leq 300 \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Représentation graphique



Le bénéfice est : $B = 240x + 300y$

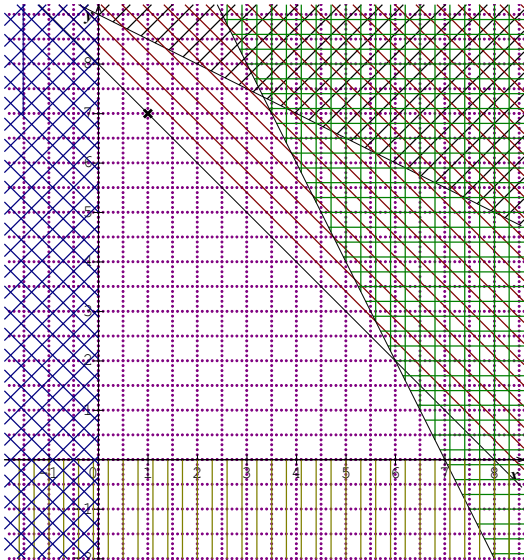
Le bénéfice est maximal pour $\begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$.

Exercice 34

Soit x le nombre d'œufs extra et y le nombre d'œufs sublime.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

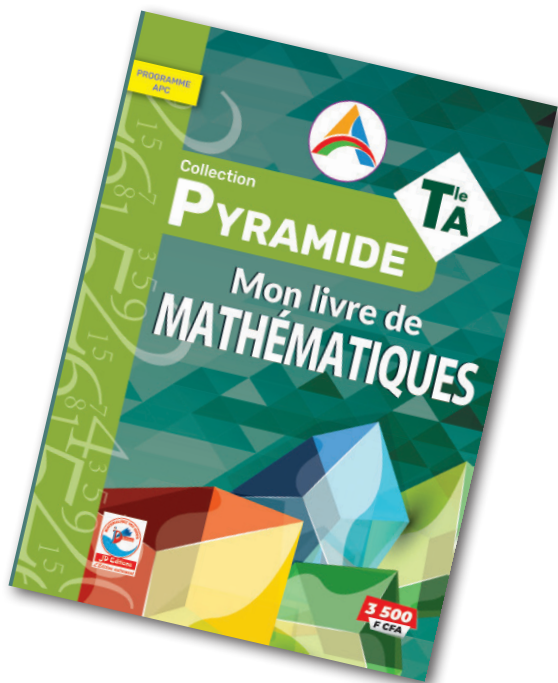
Représentation graphique



Le bénéfice est : $B = 200x + 300y$

Le bénéfice est maximal pour $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

Manuel de base



COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS



Lavez-vous
les mains
fréquemment



Respectez la
distanciation
physique



Portez
un masque



Toussez ou
éternuez dans
votre coude



Ouvrez
les fenêtres



Faites-vous
vacciner