Notes de cours

MATHÉMATIQUES

Seconde A_4

AGOSSEME Kokou Anani
baudespoir@yahoo.fr
Tél: 92 64 56 20 / 98 50 81 78

Sommaire

NOMBRES RÉELS ET ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Contenus

1 Les nombres réels

1.1 Les nombres

1.1.1 Rappels

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels ; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs ; $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels ; $\mathbb{Q} = \left\{4,363636\cdots = \frac{432}{99}; 0,4 = \frac{2}{5}; -2,5 = -\frac{25}{10}; -3 = -\frac{3}{1}\right\}$

Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. $\frac{p}{q}$ est appelé fraction

- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux ; $\mathbb{D} = \{1,52; -O,56\}$

Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^p}$ $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in N$

1.1.2 Les nombres irrationnels

Un nombre est irrationnel s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.
Les nombres rationnels et irrationnels forment l'ensemble des nombres réels. On le note $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des réels négatifs

Exemple 1.1

$\pi ; \sqrt{2} ; 2\sqrt{3}$

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque 1.1

On représente l'ensemble des nombres réels par une droite graduée appelée droite numérique

1.2 Calcul dans $\mathbb{R}$

1.2.1 Somme, produit et quotient

Soit a,b,c et d des nombres réels tel que $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Si $c \neq 0$ $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$
- Pour $x \neq 0$; $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$

EXERCICE 1.1

1-Calculer les nombres suivants en présentant le résultats sous forme de fraction irréductible.

$A = \frac{3}{-\frac{6}{5}}$; $B = \frac{2}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}$, $C = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{5}}$; $D = \frac{7}{8} \times \frac{6}{13}$; $E = \frac{7}{4} \div \frac{35}{26}$

2-Les nombres p et q suivant sont-ils égaux ?

a) $p = \dfrac{375}{57}$ et $q = \dfrac{75}{7}$
b) $p = \dfrac{105}{4}$ et $q = \dfrac{7}{3}$

1.2.2 Puissances

$a, b \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ on a :

- $a^n b^n = (ab)^n$
- $a^n a^p = a^{n+p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

EXERCICE 1.2
Calculer :
3^2 ; 3^5 ; $(-3)^5$; $(-3)^4$; $3^2 \times 3^4$; $5^6 \times 5^{-2}$; $\dfrac{2^2}{2^3}$.

1.2.3 Notation scientifique

Un réel A est écrit en notation scientifique ou écriture normalisée lorsqu'il est sous la forme $A = \alpha \times 10^p$, où $p \in \mathbb{Z}$ et α est un réel ayant un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemple 1.2
$43,56 = 4,356 \times 10^1$; $-3,506 = -3,506 \times 10^0$ et $-0,004356 = -4,356 \times 10^{-3}$

EXERCICE 1.3
Écrire les nombres suivants en notation scientifique :
$18,005 \times 10^{12}$; 64095500 ; $0,0009 \times 10^{-4}$; $6,5$

1.2.4 Racines carrées

Soit a un nombre réel positif, on appel racine carré de a, le nombre réel positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a.

Exemple 1.3
$5^2 = 25$; $(-5)^2 = 25$; $\sqrt{25} = 5$ car 5>0

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$ alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

En effet $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
Attention !!!! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

EXERCICE 1.4
Écris plus simplement
$\sqrt{144}$; $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{72}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}$; $\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{600}$; $-\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

2 Activités numériques

2.1 Valeur absolue et distance

2.1.1 Définition et propriétés

EXERCICE 2.1
1) Déterminer la valeur absolue des nombres suivants :
-1,5 ; 12 ; $\sqrt{3}$-2
2) Sur une droite graduée, placer les nombres suivants 2 ; 5 ; -8 ; 3 et 0. Calculer la distance de 2 et 5 ; 3 et -8 ; 0 et 4

Définition 2.1
$|a| = a \ si \ a \geqslant 0 \ et \ |a| = -a \ si \ a \leqslant 0$

Définition 2.2
Soit a, $b \in \mathbb{R}$. La distance de a et b est $d(a;b) = |a-b|$

Propriété 2.1
Soit a ; $b \in \mathbb{R}$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|-a| = a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|ab| = |a||b|$
- Si $b \neq 0$ alors $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

EXERCICE 2.2
1) Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$; $|x-2| = 3$
a)Écrire l'équation (E) sous forme de distance
b)Sur une droite graduée, placer le nombre 2 et détermine graphiquement les nombres qui sont à la distance 3 de 2.
c)Donner alors les solutions de l'équation (E)
2)a) Détermine graphiquement un réel x à égal distance de -2 et $\frac{5}{2}$
b)En déduire la solution de l'équation $|x+2| = |x-\frac{5}{2}|$
c)Résoudre graphiquement $|x-0,5| = |x+7|$
d)Résoudre graphiquement les équations $|x+1| = \frac{3}{2}$ et $|x-2| = -3$

EXERCICE 2.3
1) On considère l'intervalle $]2;3[$.
a) Représenter graphiquement cet intervalle sur une droite graduée. Déterminer son centre c, son amplitude A et son rayon r.
b) Soit $x \in]2;5[$. Comparer $d(x;c)$ et r.
c) Exprimer ce résultat en utilisant le symbole de valeur absolue.

2) Répondre aux mêmes questions pour l'intervalle $]-3;1[$.
3) Déterminer graphiquement l'intervalle des réels x tels que $|x+\frac{1}{2}| \leqslant 2$.

EXERCICE 2.4
Soit $A = |x-1| - 2|x+\frac{1}{2}|$ Calculer la valeur numérique de A pour $x = 0$; $x = -4$ et $x = \sqrt{2}$

2.1.2 Encadrement, approximations, calculs approchés

EXERCICE 2.5
1) Comparer $\frac{7}{5}$ et $\frac{10}{7}$
2) Calculer $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. En déduire une comparaison de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Définition 2.3
Soit a et b deux nombres réels.

$$\begin{array}{lcl} a \leqslant b & \Leftrightarrow & a-b \leqslant 0 \\ a \geqslant b & \Leftrightarrow & a-b \geqslant 0 \end{array}$$

Propriété 2.2
Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors :
- $a \leqslant a$
- $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.
- $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Propriété 2.3
Soit a, $b \in \mathbb{R}$:
- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c$;
- Si $c \geqslant 0$ alors $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$;
- Si $c \leqslant 0$ alors $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \geqslant b \times c$;

En particulier $a \leqslant b \Rightarrow -a \geqslant -b$

Propriété 2.4

- Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on a $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & d \\ \hline a+c & \leqslant & b+d \end{array}\right.$
- Si a, b, c et d sont tous positifs alors $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & d \\ \hline a\times c & \leqslant & b\times d \end{array}\right.$;
- Si a et b sont tous positifs alors $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$ et $a \leqslant b \Rightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$;
- Si a et b sont tous différents de zéro et de même signe alors $a \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

EXERCICE 2.6

1) Comparer $3\sqrt{5}$ et 7 ; $-\frac{1}{13}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{42}}$; puis $2-2\sqrt{7}$ et $2-3\sqrt{3}$.

2) Soit a un nombre réel supérieur ou égal à 4.

a) Quelle est le signe de $2-\sqrt{a}$?

b) Développer $(2-\sqrt{a})^2$.

c) Comparer $\sqrt{4+a-4\sqrt{a}}$ et $\sqrt{a}-2$.

EXERCICE 2.7

1) A l'aide d'une calculatrice, donner la valeur décimale de $\sqrt{3}$ avec cinq chiffres après la virgule.

2)a) Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ par deux entiers consécutifs. Préciser l'amplitude de cet encadrement.

b) Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 0,1

c) Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 0,001

3) On donne $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $-2,01 < x < -1,05$. Déterminer un encadrement de $x+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-x$ et $x\sqrt{2}$

Activité 2.1

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $3,48 \leqslant x \leqslant 3,52$

1) Déterminer le centre et le rayon de l'intervalle [3,48 ;3,52]

2) Réécrire l'encadrement de x en fonction du centre et du rayon

2.2 Calcul approché

2.2.1 Valeur approchée

Définition 2.4

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On dit qu'un nombre réel b est une valeur approchée *de a à ε près $|a-b| \leqslant \varepsilon$.. On écrit $a \approx b$ à ε près. $\boldsymbol{\varepsilon}$ est appelé* incertitude *de cette valeur approchée.*

Exemple 2.1

On a $\sqrt{2} = 1,4142135623731\cdots$. Donc $|\sqrt{2}-1,414| = 0,0002135623731\cdots$; ainsi $|\sqrt{2}-1,414| \leqslant 10^{-3}$. D'où 1,414 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1
Déterminer cinq autres valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Remarque 2.1

♠ Soit b est une valeur approchée de a à ε près alors $b-\varepsilon \leq a \leq b+\varepsilon$. Ceci est un encadrement de a à d'amplitude 2ε. b est le centre de l'intervalle $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. On ne sait pas si b est plus grand ou plus petit que a.Alors :

➢ Si b est plus petit que a, on dit que b est une valeur approchée de a à ε près par défaut.

➢ Si b est plus grand que a, on dit que b est une valeur approchée de a à ε près par excès.

♠ Parmi les valeurs approchées de a à 10^{-p} près où $p \in \mathbb{N}$, deux sont importantes :

➢ l'approximation décimale d'ordre p par défaut qui est le nombre décimal $\alpha \leq a$ et pouvant s'écrire avec p chiffres après la virgule.

➢ l'approximation décimale d'ordre p par excès qui est le nombre décimal $\beta > a$ et pouvant s'écrire avec p chiffres après la virgule.

3 Situations de proportionnalité

3.1 Tableau de proportionnalité

Définition 3.1

Soit a,b,c et d des nombres réels non nul

a	c
b	d

est un tableau de proportionnalité si et seulement $ad = bc$. Le coefficient de proportionnalité permettant de passer la $1^{ère}$ ligne à la $3^{ème}$ ligne est le nombre réel $k = \dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

EXERCICE D'APPLICATION 3.1
1) Un randonneur a parcouru $400m$ en $5min$. Sachant que la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir sont proportionnels, complète le tableau suivants

Distance parcouru (m)	400	640		2000	1040	
Temps mis (min)	5		10			40

2) Sur une carte $17mm$ représente $0{,}85m$, calculer l'échelle

3) Une carte est réalisée à l'échelle de $\dfrac{1}{10^6}$. Quel est la distance réel séparant 2 villes distant de $80mm$. Calculer la distance entre 2 villes sur la carte situé réellement à $115km$ l'une de l'autre.

Remarque 3.1

$$Echelle = \frac{distance sur la carte}{distance réelle}$$

3.2 Pourcentages

EXERCICE D'APPLICATION 3.2

1) Sur un sachet de $275g$ de café, on peut lire : 30% arabica et 70% robusta. Quel est la masse de chacune des 2 variétés ?
2) Sur un réfrigérateur valant $32000f$ le commerçant conçois une remise de 15% si l'acheteur paie contant. Quel est le prix au comptant
3) Une coopérative agricole comprend 150 personne 60% sont des femmes et 30% des femmes font l'apiculture

Remarque 3.2

1) Pour déterminer le d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{k}{100}$
2) Pour déterminer la valeur d'un objet après une remise (ou une réduction) de k%, on multiplie sa valeur initiale par $(1-\frac{k}{100})$
• Pour déterminer la valeur d'un objet après une augmentation de k%, on multiplie sa valeur initial par $(1+\frac{k}{100})$
3) Pour déterminer a% de b% d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{a\times b}{10000}$

CALCUL LITTERAL

Contenus

1 Diverses factorisations et développements simples

1.1 Utilisation de produits remarquables

EXERCICE 1.1
1) Factoriser les expressions suivantes
$A=(3x-4)(x+2)+2x(3x-4)$
$B=(x+1)^2-2(5x+4)(x+1)$
$C=(5x-1)(-6x+9)+3x(2x-3)$
$D=a(y-2)+\frac{1}{2}(2y-4)(a^2+a+1)$
2) Utiliser les égalités remarquables pour factoriser
$A=9x^2+24x+16$
$B=\frac{x^2}{4}-3x+9$
$C=(9x-5)^2-(x+1)^2$
3) Factoriser
$A=2x^3-18x$
$B=x^2-1+(1-x)(2x-3)$
$C=(x+2)^2+2(x-2)(x+1)+(x-2)^2$

EXERCICE 1.2
1) Développer les expressions suivantes
$A=(x+3)^2$; $B=(3x-1)^2$; $C=(2x+3)(3-2x)$; $D=(-2x+1)^2$; $E=(3+\sqrt{2})^2$; $F=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
2) Rendre rationnel le dénominateur $A=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; $B=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

1.2 Fonctions polynômes

Définition 1.1

Soit $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$. La somme algébrique $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ est appelée polynôme. *Chaque terme de cette somme est appelée* monôme.
n est appelé degré de *P et est noté d°P. Les réels $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ sont les* les cœfficients de *P.*
Pour deux polynômes P et Q,on a $d°(P+Q) \leqslant max\{d°P, d°Q\}$ et $d°(PQ)=d°P+d°Q$
Le polynôme $p(x)=0$ est appelé polynôme nul.Il n'a pas de degré.

Propriété 1.1

Deux polyôme sont égaux si, et seulement si les cœfficients des termes de même degré sont égaux

EXERCICE 1.3
1) Parmi les expressions suivantes préciser celle qui sont des polynômes :
$A=x^2+\frac{1}{x}+4$; $B=x^2+\sqrt{x}+1$; $C=x^5-7x+4$; $D=2$
2) On donne $P(x)=(x-1)^2-(x^2+2)^2$

a) Développer,réduire et ordonner $P(x)$ suivants les puissances décroissantes de x
b) Quel est le degré de P
c) Calculer $P(1)$ et $P(2)$

1.3 Factorisation d'une fonction polyôme

1.3.1 Zéro d'une fonction polyôme

Activité 1.1
On considère $P(x) = 2x^2 - x - 3$
1) Calculer $P(-2)$ et $P(-1)$
2) Déterminer a et b tel que : $P(x) = (x+1)(ax+b)$

Définition 1.2

On appelle zéro d'un polynôme $P(x)$ tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$. α est un zéro de $P(x)$ si et seulement s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$

Exemple 1.1
Dans l'exercice précédent 1 et -2 sont des zéros de $P(x)$.

1.3.2 Factorisation d'une fonction polyôme

➧ **Utilisation des identités remarquables et de facteurs communs**

EXERCICE 1.4
Factoriser les expressions suivantes
$f(x) = (2x-1)(x-3) + (5-x)(3-x) - x + 3$; $g(a) = (a^3 - 8) + (a-2)(4a+5)$
$h(t) = t^4 + 4t^2 + 4$; $P(x) = (x-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) + 3$

➧ **Polynôme du second degré**

Remarque 1.1

L'écriture $P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$ est appelée forme canonique de $P(x)$.

EXERCICE 1.5
Donner la forme canonique des polynôme suivants puis factoriser si possible.
$f(t) = 2t^2 + 4t - 6$; $P(x) = -5x^2 + 2x + 7$; $Q(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $R(y) = y^2 + y + 1$; et $S(u) = -u^2 + 2u - 1$

➧ **Polynôme de degré supérieur à deux**

Propriété 1.2

Soit $f(x)$ un polynôme de degré supérieur à deux et α un nombre réel.
Si α est un zéro de $f(x)$ alors il existe un polynôme $g(x)$ tel que $d\check{r}g = d\check{r}f - 1$ et $f(x) = (x-\alpha)g(x)$. On dit alors que $f(x)$ est divisible ou factorisable par $x-\alpha$ et que $g(x)$ est le quotient de $f(x)$ par $x-\alpha$.

Il existe deux méthodes fondamentales pour déterminer le quotient de $f(x)$ par $x-\alpha$: **la méthode de la division euclidienne et la méthode des cœfficients indéterminés**.

Exemple 1.2

Soit $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 4$.
On a $f(-2) = 0$ donc -2 est un zéro de $f(x)$. Ainsi $f(x)$ est divisible par $x-2$. Il existe un polynôme $g(x)$ tel que $f(x) = (x+2)g(x)$.
Méthode de la division euclidienne

$-2x^3$	$-x^2$	$+4x$	-4	$x+2$
$-(-2x^3$	$-4x^2)$			$-2x^2+3x-2$
	$3x^2$	$+4x$		
	$-(3x^2$	$+6x)$		
		$(-2x$	$-4)$	
		$-(-2x$	$-4)$	
			0	

D'où $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$ et $f(x) = (x+2)(-2x^2 + 3x - 2)$.

Méthode de la division euclidienne
Comme $f(x) = (x+2)g(x)$ et $d\check{r}f = 3$ alors $d\check{r}g = 3 - 1 = 2$. Anisi $g(x)$ est sous la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$. On écrit alors $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$. Par identification à $-2x^3 - x^2 + 4x - 4$ on a $\begin{cases} a &= -2 \\ b+2a &= -1 \\ c+2b &= 4 \\ 2c &= -4 \end{cases}$. D'où $a = -2$; $b = 3$ et $c = -2$.

Exercice 1.6

1) Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
   a) Montrer que 1 est un zéro de $P(x)$.
   b) Déterminer le quotient $Q(x)$ de $P(x)$ par $x-1$.
   c) Factoriser $Q(x)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
2) Factoriser le polynôme suivant : $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

1.4 Signe d'une fonction polynôme

Signe de $ax+b$
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On a
$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

EXERCICE 1.7
Étudier le signe des polynôme suivants :
$f(t)=2t^2+4t-6$; $P(x)=x^3-3x^2-x+3$ et $Q(x)=-x^3+2x^2+x+2$

2 Fonctions rationnelles

Définition 2.1

On appelle fonction rationnelle tout quotient de fonctions polynômes.
Soit f est une fonction rationnelle définit par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ et α est un nombre réel. On dit que α est un zéro de f si $f(\alpha)=0$: ce qui signifie que $P(\alpha)=0$ et $Q(\alpha)\neq 0$.

EXERCICE 2.1
1) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x-2}$.
   a) Les réels 1, -1 et 2 sont-ils zéros de f ?
   b) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Soit $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}$.
   a) On pose $Q(x)=x^3-x^2+x-1$. Montrer que 1 est un zéro de Q. Factoriser $Q(x)$.
   b) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   c) Simplifier $f(x)$ sur D_f.
   d) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3) Déterminer a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$: $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$.

Définition 2.2

Si f est une fonction rationnelle tel que $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors on appelle ensemble de définition de f noté D_f, l'ensemble des nombres réels qui n'annule pas le dénominateur $Q(x)$.
$D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)\neq 0\}$

FONCTIONS

Contenus

1 Généralités sur les fonctions

Activité 1.1

1)Un représentant commercial vend des articles de confection pour le compte d'une marque de vêtement.Il est rémunéré de la façon suivante.Chaque semaine un salaire fixe de 600f plus 120f par article vendue.Notons x le nombre d'article vendus par semaine et y la somme correspondante exprimé en francs et perçu par cette représentation

x	0	2	6	10	15
y					

2) Exprimer y en fonction de x
3) Dans un repère OIJ avec $1cm$ unité sur l'axe des abscisses et $1cm$ pour $100f$ sur l'axe des ordonnées
a) Marquer en rouge les points correspondants au tableau de la question 1)
b) Représenter graphique en bleu l'application affine définie par $y = 120X + 600$

1.1 Ensemble de définition

Activité 1.2

1) On donne la fonction :
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
a) Déterminer l'image de chacun des nombres suivants :-3, -1, 0, $\dfrac{1}{2}$, 1, -5
b) Peut-on trouver l'image de -2 ? Justifier
c) Donner alors l'ensemble des réels de x qui ont une image par f
2) La touche $\sqrt{}$ de la calculatrice détermine une fonction racine carrée
a) À l'aide de la calculatrice trouver si possible les images des réels suivants

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$\sqrt{}$							

b) Quel semble être l'ensemble des réels qui ont une image par la fonction racine carrée
Soit f une fonction d'ensemble A vers un ensemble B. On appelle ensemble de définition de f noté D_f l'ensemble des éléments de A qui ont une image dans B par f.
$D_f = \{x \in A / f(x) existedansB\}$
Détermination de l'ensemble de définition
Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f on peut procédé comme suit
- Écrire toutes les conditions
- Préciser les contraintes les ensembles que détermine les contraintes
- Écrire D_f sous forme d'intervalle

Exemple 1.1

Pour la fonction f de l'activité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

On écrit $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

Déterminer l'ensemble des fonctions suivantes

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{4x}{x^2-1}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x-2}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 3x + 1$

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.2 Représentation graphique

Activité 1.3

Soit la fonction $f : [-2;2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 1$

a) Complète le tableau suivant

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) marquer les points de coordonnées $(x; f(x))$ puis joignes ces points par une ligne

EXERCICE 1.1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur [0 ;3] par $f(x) = 2 - x$

2) Même question pour la fonction g définie par $g(x) = 3 - 2x$

3) Déterminer graphiquement l'image par f de 2.75 ; 0.25

4) Quel est l'antécédent par g de -3 ; 2.5 ; 0

Remarque 1.1

Un point $M(x, y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}f$ d'une fonction f si et seulement si $y = f(x)$

EXERCICE 1.2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [-3 ;3[par $f(x) = x^2$ et g définie sur la même intervalle par $g(x) = -x + 2$

1) Construire les représentations graphique de f et g

2) Étudier graphiquement le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Résoudre graphiquement l'équation $E : f(x) = g(x)$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $I : f(x) > g(x)$

2 Étude d'une fonction

2.1 Variation d'une fonction,extremum

Activité 2.1

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [-4 ;4]
a) On considère la courbe ($\mathscr{C}$) sur [-4 ;-2]. Comment sont rangés les nombres de cet intervalle par rapport à leur image.
b) Même question pour [-2 ;1] et pour l'intervalle [2 ;4]
c) Déterminer les coordonnées du point de la courbe ($\mathscr{C}$) ayant la plus grande ordonnée
d) Déterminer les coordonnées du point de ($\mathscr{C}$) ayant la plus petite ordonnées

Définition 2.1

Soit f une fonction numérique d'une variable définit sur un intervalle E
- *On dit que f est croissante sur E lorsque pour tout élément a et b de E vérifiant $a < b$ on a : $f(a) \leqslant f(b)$*
- *On dit que f est décroissante sur E lorsque pour tout élément a et b de E vérifiant $a < b$ on a : $f(a) \geqslant f(b)$*
- *On dit que f est constante sur E lorsque pour tout élément a et b de E on a : $f(a) = f(b)$*
- *Lorsqu'il existe x_0 appartenant à E tel que $f(x_0) \geqslant f(x)$ on dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur E*
- *Lorsqu'il existe x_0 appartenant à E tel que $f(x_0) \leqslant f(x)$ on dit que $f(x_0)$ est le minimum de f sur E*

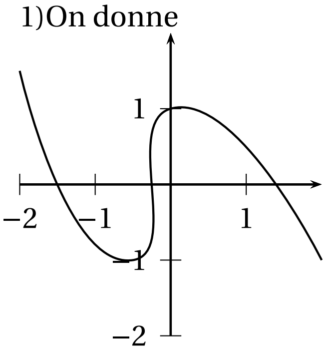
Le maximum et le minimum sont appelés extremum

Remarque 2.1

On rassemble les variations d'une fonction (croissante ou décroissante) dans un tableau appelé tableau de variation
Pour l'activité on a :
⋆ f est croissante sur [-4 ;-2] et sur [1;2]
⋆ f est décroissante sur [-2 ;1]
⋆ f est constante sur [2 ;4]

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

1)On donne



a) Déterminer l'ensemble de définition de f
b) Préciser les extremum de f

c) Dresser le tableau de variation de f
d) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) < 0$
e) Résoudre graphiquement
-L'équation $f(x) = 2$
-L'inéquation $f(x) \geqslant 1$
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 5$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x + 2$
a) Étudier le sens de variation de f puis de g.Dresser leur tableau de variation
b) Construire $(\mathscr{C}f)$ puis $(\mathscr{C}g)$

Remarque 2.2

- La fonction f est sous la forme $f(x) = mx + p$, de même que la fonction g : On dit que ce sont des fonctions affines.
- Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$

-Si $m < 0$ alors f est décroissante
-Si $m > 0$ alors f est croissante
-Si $m = 0$ alors f est constante
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

2.2 Étude de fonctions usuelles

2.2.1 Fonction affine par intervalles

On appelle fonction affine par intervalles, toutes fonctions numériques f dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalle.

EXERCICE 2.1
On considère la fonction f définie par :
Pour $x \in [-3; -1[$ $f(x) = -x - 3$
Pour $x \in [-1; 2[$ $f(x) = 2x$
Pour $x \in [2; 5[$ $f(x) = 4$
1) Préciser l'ensemble de définition de f
2) Calculer les images des réels suivants : -3 ;-1 ;0 et 2
3) Donner le tableau de variation de f
4) Construire $(\mathscr{C}f)$

Solution:

EXERCICE 2.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$. Cette fonction est appelée fonction valeur absolue
1) Écrire f sans le symbole de la valeur absolue
2) Donner son tableau de variation

3) Construire $(\mathscr{C}f)$

Solution:

EXERCICE 2.3
On considère la fonction :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto -2x^2$
1) Donner son ensemble de définition
2) Étudier les variations de f sur $]-\infty;0]$ puis sur $[0;+\infty[$
3) Établir le tableau de variation de f
4) Construire $(\mathscr{C}f)$
5) Construire la droite d'équation $y=-x-1$ puis résoudre graphiquement

Solution:

EXERCICE 2.4

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

1) Déterminer D_f 2) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty,0[$ puis sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Construire $(\mathscr{C}f)$ puis la droite d'équation $y=x+\dfrac{3}{2}$
5) Résoudre graphiquement l'équation : $2x^2+3x-2=0$
6) Étudier la fonction
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto -\dfrac{2}{x-2}$ et construire sa courbe représentative

Solution:

EXERCICE 2.5

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathscr{D}_f$.
3) Dresser le tableau de variation de f. Préciser l'extremum de f.
4) Construire la représentation graphique de la fonction f.
5) Résoudre graphiquement l'inéquation $1\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2$ puis l'équation : $\sqrt{x}-x+2=0$

EXERCICE D'APPLICATION 2.2

EXERCICE 2.6
1) Soit $P(x)=3x^2-5x-2$
a) Vérifier que 2 est un zéro de $P(x)$
b) Déterminer a et b tel que $P(x)=(x-2)(ax+b)$
2) On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x)=\dfrac{P(x)}{-x^2+x+2}$
a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Déterminer les zéros de f
c) Simplifier $f(x)\ \forall x \in D_f$
d) Étudier le signe de $f(x)$

EXERCICE 2.7
Soit $P(x) = (x^2 - 1)^2 + (2x)^2$
1) Développer $P(x)$
2) Factoriser $P(x)$
3) Trouver deux nombre entier p et q tel que $p^2 + q^2 = 101^2$

EXERCICE 2.8
Soit x et y deux réels positifs
1) Développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$
2) En déduire que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$

EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

Contenus

1 Equations

EXERCICE 1.1
Il y a 2 ans Alain était 3 fois plus âgé que Julie et à présent, il est 2 fois plus âgé que lui.
1) Soit x l'âge de Julie.Montrer que $2x-2=3(x-2)$
2) En déduire l'âge de Julie puis celui d'Alain
3) Tracer dans le plan munie d'un repère orthonormée (O,I,J) (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y=2x-2$ et $y=3x-6$.Retrouver graphiquement l'âge de Julie

EXERCICE 1.2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x+\frac{1}{2}=\frac{x}{2}-1$
b) $\frac{x}{2}-3+\frac{1-3x}{2}=\frac{5}{2}-x$
c) $(2x-4)(x-1)=0$
d) $(x+2)^2=(2x+5)^2$
e) $-2x(x-5)=0$
f) $\frac{4x-6}{x-5}=0$
g) $\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{x+1}=0$

1.1 Équation dans $\mathbb{R}^2$

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ toute équation sous la forme $ax+by+c=0$ l'inconnue est un couple x et y de nombre réel.L'ensemble solution de cette équation est alors l'ensemble des couples (α,β) tel que $a\alpha+b\beta+c=0$.
C'est aussi les coordonnées des points de la droite d'équation $ax+by+c$.

EXERCICE 1.3
Soit (E) l'équation $2x-y+1=0$
1) Les couples $(0,1)$ et $(-\frac{1}{2},1)$ sont-ils solution de l'équation ?
2) Déterminer α pour que le couple $(\alpha,-1)$ soit solution de (E)

2 Inéquations

2.1 Inéquations dans $\mathbb{R}$

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du type $f(x)<0$ où f est une fonction polynôme ou rationnelle :
➧ On cherche d'abord l'ensemble de validité
➧ On fait ensuite le tableau de signe de $f(x)$
➧ Puis on lit l'ensemble solution dans le tableau

EXERCICE 2.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivants
a) $2x+1<3x-\frac{1}{2}$

b)$2x^2+3<x^2+x+2$
c)$\dfrac{2x+1}{-2x+\frac{1}{2}}>0$
d)$(x-2)(x+3)<0$
e) $-x^2+x+1>0$

2.2 Inéquations dans $\mathbb{R}^2$

Une inéquation du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est une inéquation du type $ax+by+c<0$

EXERCICE 2.2
Soit la droite (D) d'équation $2x-y+1=0$
1) Construire (D)
2)a) Les couples suivantes sont-ils solutions de l'inéquation $2x-y+1>0$: (1 ;1) ;(-1 ;0) et (0 ;1)
b) Hachurer la partie du plan dont les couples de coordonnées des points sont solution de l'inéquation $2x-y+1>0$

3 Systèmes

3.1 Systèmes d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R}$

EXERCICE 3.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants
$(\Sigma_1):\begin{cases}(x-1)(x-2) &= 0\\ x^2+x-2 &= 0\end{cases}$, $(\Sigma_2):\begin{cases}2x-3 &\leqslant 5x+6\\ -4x+10 &> 8\end{cases}$, $(\Sigma_3):\begin{cases}x+4 &< -x+5\\ 4-x^2 &\geqslant 0\end{cases}$, $(\Sigma_4):\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} &\leqslant 0\\ x+2 &> 0\end{cases}$
$(\Sigma_5):\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1} &< \dfrac{2}{x^2-1}\\ \dfrac{x+2}{x-3} &< 1\end{cases}$

3.2 Systèmes d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$

EXERCICE 3.2
1) Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de substitution.
$a):\begin{cases}x+y &= \dfrac{5}{2}\\ x-y &= 1\end{cases}$, $b):\begin{cases}2x-7y &= 1\\ 5x+2y &= 29\end{cases}$, $c):\begin{cases}10x-5y &= 1\\ 2x-y &= \dfrac{1}{4}\end{cases}$, $d):\begin{cases}x-y &= 1\\ 2x+y &= 1\end{cases}$, $e):$ $\begin{cases}2x-3y &= -7\\ -4x-6y &= 0\end{cases}$
2) Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de combinaison $(\Sigma_1):\begin{cases}3x+2y &= 1\\ 2x+\dfrac{4}{3}y &= \dfrac{2}{3}\end{cases}$;
$(\Sigma_2):\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}y &= 1\\ -x+\dfrac{3}{2}y &= \dfrac{2}{3}\end{cases}$
3) Résoudre graphiquement les systèmes :

$$a):\left\{\begin{array}{rcl} x-y & > & 0\\ 2x+3y & < & 10\end{array}\right. ;\ b):\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y-1 & < & 0\\ 3x-2y+12 & > & 0\\ x+5y+4 & > & 0\end{array}\right.$$

4) L'argent de poche de Fredy est le triple de celui de Lauraine.Fredy en dépense le tiers et Lauraine les quatre cinquième leur dépense totale est 900f

a) Combien chacun avait-il au départ

b) Combien chacun a-t-il dépensé

5) Résoudre

$$(\Sigma_1):\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{y+1} & = & 1\\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{y+1} & = & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. ;\ (\Sigma_2):\left\{\begin{array}{rcl} |x-2|-\dfrac{2}{y-1} & = & 1\\ 2|x+2|+\dfrac{1}{y-1} & = & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Suite numérique