



Lycée ASSAADA - Inzgane - Ait melloil.

Primitives d'une fonction

Prof: Hicham Bouchouch

4 Septembre 2021

1- Équation différentielle du type $y' = ay + b$

Étude d'un exemple:

1- Équation différentielle du type $y' = ay + b$

Étude d'un exemple:

La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$y'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$\text{On a } (e^{3x})' - 3e^{3x} = 0 \quad \text{alors} \quad y'(x) - 3y(x) = 0$$

1- Équation différentielle du type $y' = ay + b$

Étude d'un exemple:

La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$y'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

On a $(e^{3x})' - 3e^{3x} = 0$ alors $y'(x) - 3y(x) = 0$

♣ (E) : $y'(x) - 3y(x) = 0$ est une équation avec l' inconnu $y(x)$ est appelé une équation différentielle de premier ordre.

1- Équation différentielle du type $y' = ay + b$

Étude d'un exemple:

La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$y'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

On a $(e^{3x})' - 3e^{3x} = 0$ alors $y'(x) - 3y(x) = 0$

♣ $(E) : y'(x) - 3y(x) = 0$ est une équation avec l'inconnu $y(x)$ est appelé une équation différentielle de premier ordre.

♣ La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ vérifiant l'équation $y'(x) - 3y(x) = 0$ donc y est une solution d'équation (E)

1- Équation différentielle du type $y' = ay + b$

Étude d'un exemple:

La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$y'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

On a $(e^{3x})' - 3e^{3x} = 0$ alors $y'(x) - 3y(x) = 0$

♣ $(E) : y'(x) - 3y(x) = 0$ est une équation avec l'inconnu $y(x)$ est appelé une équation différentielle de premier ordre.

♣ La fonction $y : x \mapsto e^{3x}$ vérifiant l'équation $y'(x) - 3y(x) = 0$ donc y est une solution d'équation (E)

♣ Les fonction $y : x \mapsto ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$ sont aussi des solutions de l'équation (E) car

$$(ke^{3x})' - 3ke^{3x} = 3ke^{3x} - 3ke^{3x} = 0$$

Définition:

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ L'équation : $y' = ay + b$, dont l'inconnu est une fonction y dérivable sur \mathbb{R} de dérivée y' , est appelée équation différentielle de premier ordre. Toute fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant : $f'(x) = af(x) + b$ pour tout réel x est appelée solution de l'équation différentielle.

Propriété 1:

Soit $a \in \mathbb{R}^*$

Les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y : x \mapsto Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$

Exemple:

- L'équation différentielle $y' = 7y$ admet des solutions sont les fonctions $y : x \mapsto Ke^{7x}$ où $K \in \mathbb{R}$
- L'équation différentielle $y' + 6y = 0$ c-a-d $y' = -6y$ admet des solutions sont les fonctions $y : x \mapsto Ke^{6x}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Propriété 2:

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y : x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $K \in \mathbb{R}$

Exemple:

- L'équation différentielle $y' = 5y + 8$ admet des solutions sont les fonctions $y : x \mapsto ke^{5x} - \frac{8}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$
- L'équation différentielle $y' + 3y = 5$ c-a-d $y' = -3y + 5$ admet des solutions sont les fonctions $y : x \mapsto ke^{-3x} + \frac{5}{3}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Cas particulier:

Les solutions de l'équation différentielle : $y' = b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y : x \mapsto bx + c$ où $c \in \mathbb{R}$

Propriété 2:

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x_0 et y_0 , l'équation différentielle : $y' = ay + b$ admet une unique solution f vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$

Exemple:

On détermine la fonction f solution de l'équation différentielle $y' - 5y - 8 = 0$ et vérifiant : $f(0) = \frac{1}{3}$.

Exercice 00:

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle

$$(E) : 3y' + y = 0 \text{ et vérifiant : } f(0) = -\frac{1}{3}$$

Exercice 01:

On considère l'équation différentielle $(E) : \frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0$

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) telle que la courbe de f admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur 2.

2-Équation différentielle du type :

$$y'' + ay' + by = 0$$

Définition 1:

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation : $y'' + ay' + by = 0$ (où l'inconnu est une fonction y deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' sa dérivée, et y'' sa dérivée second) est appelée **equation différentielle d'ordre 2**.

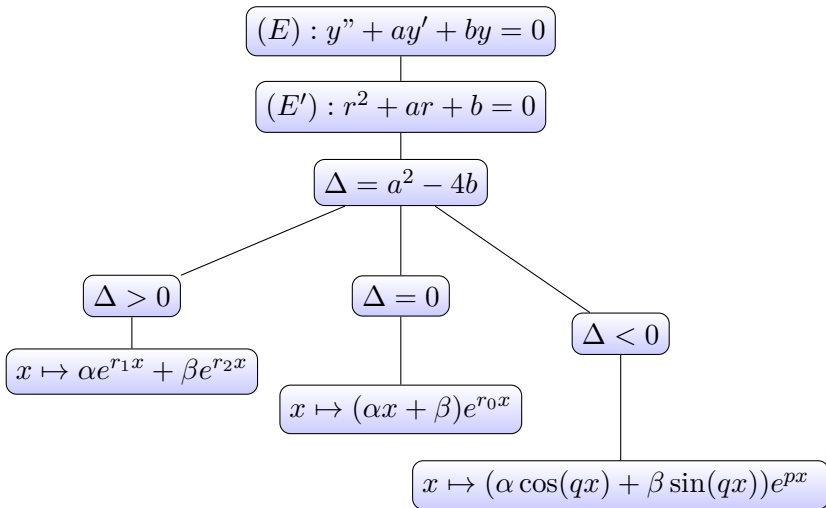
définition 2:

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation : $r^2 + ar + b = 0$ où $r \in \mathbb{C}$; est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ et $(E') : r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique. (où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$). et $\Delta = a^2 - 4b$ est la discriminant de l'équation caractéristique (E') .

- 1 Si le discriminant $\Delta > 0$, donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelle distinctes r_1 et r_2 Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- 2 Si le discriminant $\Delta = 0$, donc l'équation caractéristique admet une seule solution réelle distinctes r_0 Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- 3 Si le discriminant $\Delta < 0$, donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexe conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = \bar{r}_1$ où $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $x \mapsto (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$ où α et β sont des nombres réels.



Exemple:

Résolvons l'équation différentielle (E) : $y'' - 7y' + 12y = 0$

Propriété

♣ L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$ est un cas particulier de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ (où $a = 0$ et $b = \omega^2$). Ses solutions sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 1

Résoudre les équations différentielle suivantes:

- 1 $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$
- 2 $(E_1) : y'' + 2y' + 1y = 0$
- 3 $(E_1) : y'' + 4y' + 13y = 0$

Exercice 2

- 1 Résoudre l'équation différentielle
(E) : $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$
- 2 Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E)
Vérifiant les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Exercice -Devoir à domicile

- 1 Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y - 2 = 0$
qui vérifiant la condition $x_0 = 1 ; y_0 = 2$
- 2 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$
- 3
 - a) Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
 - b) En déduire une primitive de f sur \mathbb{R}