

PC-SVT

Prof Badr-Ezzamane Mustapha

Suites numériques

2 BAC

2024

Exercice 1 (R 2004) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1
 - a Montrer que : $u_n > 0$, pour tout n de \mathbb{N} .
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 2
 - a Montrer que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$, pour tout n de \mathbb{N} .
 - b En déduire que : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pour tout n de \mathbb{N} puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction de l'exercice 1 :

- 1
 - a Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et on sait que $1 > 0$ donc $u_0 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 0$ d'où :

$$u_n^3 > 0 \quad \text{et} \quad 3u_n^2 + 1 > 0$$

d'où :

$$\frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} - u_n \\ &= \frac{u_n^3 - u_n(3u_n^2 + 1)}{3u_n^2 + 1} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} \\ &= \frac{-2u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} \\ &= \frac{-u_n(2u_n^2 + 1)}{3u_n^2 + 1} \end{aligned}$$

d'après la question 1. a on a : $u_n > 0$ d'où :

$$-u_n < 0 \quad \text{et} \quad 2u_n^2 + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 3u_n^2 + 1 > 0$$

d'où :

$$\frac{-u_n(2u_n^2 + 1)}{3u_n^2 + 1} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

c Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n &= \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} - \frac{u_n}{3} \\ &= \frac{3u_n^3 - u_n(3u_n^2 + 1)}{3(3u_n^2 + 1)} \\ &= \frac{3u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3(3u_n^2 + 1)} \\ &= \frac{-u_n}{3(3u_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

d'après la question 1. a on a : $u_n > 0$ d'où :

$$-u_n < 0 \quad \text{et} \quad 3(3u_n^2 + 1) > 0$$

d'où :

$$\frac{-u_n}{3(3u_n^2 + 1)} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

b • Première cas : si $n = 0$ on a :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

on sait que :

$$1 \leq 1$$

donc :

$$u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

- Deuxième cas : si $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ on a :

$$0 < u_{k+1} \leq \frac{1}{3}u_k$$

d'où :

$$0 < \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times \dots \times \cancel{u_{n-1}} \times u_n \leq \left(\frac{1}{3}u_0\right) \times \left(\frac{1}{3}u_1\right) \times \left(\frac{1}{3}u_2\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{3}u_{n-1}\right)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-0+1} \times u_0 \quad (\text{car : } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0)$$

d'où :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Puisque $u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

puisque $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 2 (R 2005) :

On pose : $u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

Calculer, en fonction de n , la somme : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Correction de l'exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) + \left(2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \dots + \left(n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= (1 + 2 + \dots + n) + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{(n-1+1)(n+1)}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{(n-1+1)(n+1)}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\frac{3-1}{3}} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{\left(1 - \frac{1^n}{3^n}\right)}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{2} \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

Exercice 3 (R 2006) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

On pose : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ et $w_n = 5^n u_n$, pour tout n de \mathbb{N} .

- 1 Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n .
- 2
 - a Montrer que la suite (w_n) est arithmétique de raison 5.
 - b Exprimer w_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n .
- 3
 - a Montrer que $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .
 - b En déduire que $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ pour tout n de \mathbb{N}^* puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction de l'exercice 3 :

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1+1} - \frac{1}{5}u_{n+1} \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1} \\ &= \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1} \\ &= \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \\ &= \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \\ &= \frac{1}{5} \left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_{0+1} - \frac{1}{5}u_0 \\ &= u_1 - \frac{1}{5} \times 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

- 2** **a** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 5^{n+1}u_{n+1} - 5^n u_n \\ &= 5^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n\right) \\ &= 5^{n+1}v_n \\ &= 5^{n+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \cancel{5^n} \times 5^1 \times \frac{1^n}{\cancel{5^n}} \\ &= 5 \times 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad w_{n+1} - w_n = 5$$

d'où la suite (w_n) est arithmétique de raison 5.

- b** Puisque (w_n) est une suite arithmétique de raison 5 alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad w_n = w_0 + (n - 0) \times 5$$

Calculons w_0 :

on a :

$$\begin{aligned} w_0 &= 5^0 u_0 \\ &= 1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad w_n = 5n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$w_n = 5^n u_n$$

d'où :

$$u_n = \frac{w_n}{5^n}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{5n}{5^n}$$

3 **a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a :

$$u_{n+1} = \frac{5(n+1)}{5^{n+1}}$$

on sait que :

$$5(n+1) > 0 \quad \text{et} \quad 5^{n+1} > 0$$

d'où :

$$\frac{5(n+1)}{5^{n+1}} > 0$$

d'où :

$$0 < u_{n+1}$$

on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n &= \frac{5(n+1)}{5^{n+1}} - \frac{2}{5} \times \frac{5n}{5^n} \\ &= \frac{5n+5}{5^{n+1}} - \frac{10n}{5^{n+1}} \\ &= \frac{5n+5-10n}{5^{n+1}} \\ &= \frac{5n-10n+5}{5^{n+1}} \\ &= \frac{-5n+5}{5^{n+1}} \\ &= \frac{5(-n+1)}{5 \times 5^n} \\ &= \frac{-n+1}{5^n} \end{aligned}$$

on sait que :

$$5^n > 0$$

puisque $n \in \mathbb{N}^*$ alors : $n \geq 1$ d'où :

$$-n+1 \leq 0$$

puisque $-n+1 \leq 0$ et $5^n > 0$ alors :

$$\frac{-n+1}{5^n} \leq 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n \leq 0$$

d'où :

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$$

Puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$$

b • Si $n = 1$ on a :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{1-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

on sait que :

$$0 < 1 \leq 1$$

d'où :

$$0 < u_1 \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{1-1}$$

• Si $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$ on a :

$$0 < u_{k+1} \leq \frac{2}{5}u_k$$

d'où :

$$0 < \cancel{u_2} \times \cancel{u_3} \times \dots \times \cancel{u_{n-1}} \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}u_1\right) \times \left(\frac{2}{5}\cancel{u_2}\right) \times \left(\frac{2}{5}\cancel{u_3}\right) \times \dots \times \left(\frac{2}{5}\cancel{u_{n-1}}\right)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1-1+1} u_1 \quad (\text{car} : (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); u_n > 0)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

Puisque $0 < u_1 \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{1-1}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$.

puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 4 (R 2007) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = u_n + n - 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

1 Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

2 a Calculer v_n en fonction de n .

b En déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3 On pose $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ tel que n élément de \mathbb{N} .

Montrer que : $T_n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n} \right)$ et que $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ pour tout n de \mathbb{N} .

Correction de l'exercice 4 :

1 Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + (n+1) - 1 \\ &= u_{n+1} + n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) + n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1 + 5n) \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 4n + 5n - 1) \\ &= \frac{1}{5}(u_n + n - 1) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

2 a Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 + 0 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = u_n + n - 1 \iff u_n = v_n - n + 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et on sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= v_0 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0+1}\right)}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= 1 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)}{\frac{5-1}{5}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)}{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{5}{5^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{5}{5 \times 5^n}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad T_n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} (v_k - k + 1) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{k=n} v_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{k=n} (-k + 1)\right) \\ &= T_n + \frac{(n-0+1)(-0+1-n+1)}{2} \\ &= T_n + \frac{(n+1)(-n+2)}{2} \\ &= T_n + \frac{(n+1)(-(n-2))}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

Exercice 5 (R 2008) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de \mathbb{N} .

① Montrer que : $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

b Montrer que $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout n de \mathbb{N} puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 5 :

① Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2$ et on sait que $2 > 1$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 \\ &= \frac{5u_n - (2u_n + 3)}{2u_n + 3} \\ &= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n + 3} \\ &= \frac{3u_n - 3}{2u_n + 3} \\ &= \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 1$ d'où :

$$3(u_n - 1) > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n + 3 > 0$$

d'où :

$$\frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 1 > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} \\
 &= \frac{\frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1}{\frac{5u_n}{2u_n + 3}} \\
 &= \frac{5u_n - (2u_n + 3)}{5u_n} \\
 &= \frac{\cancel{2u_n} + 3}{5u_n} \\
 &= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n} \\
 &= \frac{3u_n - 3}{5u_n} \\
 &= \frac{3(u_n - 1)}{5u_n} \\
 &= \frac{3}{5} \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)
 \end{aligned}$$

donc :

$$v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n$$

donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{5} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-0}$$

Calculons v_0

on a :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{u_0 - 1}{u_0} \\
 &= \frac{2 - 1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

- b** Soit $n \in \mathbb{N}$
On a :

$$\begin{aligned}
 v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} &\iff v_n u_n = u_n - 1 \quad (\text{car } u_n \neq 0) \\
 &\iff v_n u_n - u_n = -1 \\
 &\iff (v_n - 1)u_n = -1 \\
 &\iff u_n = \frac{-1}{v_n - 1} \\
 &\iff u_n = \frac{1}{1 - v_n} \\
 &\iff u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\
 &\iff u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} \\
 &\iff u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} \\
 &\iff u_n = 2 \times \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}
 \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{3}{5} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{2}{2 - 0} \\
 &= \frac{2}{2}
 \end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 6 (R 2009) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 Vérifier que $1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$ pour tout n de \mathbb{N} et montrer par récurrence que $1 - u_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .
- 2 On pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ pour tout n de \mathbb{N} .

- a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

- b** Montrer que $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de \mathbb{N} puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 6 :

- 1** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \\ &= \frac{7 - 2u_n - (1 + 4u_n)}{7 - 2u_n} \\ &= \frac{7 - 2u_n - 1 - 4u_n}{7 - 2u_n} \\ &= \frac{5 + 2 - 2u_n}{7 - 1 - 2u_n - 4u_n} \\ &= \frac{5 + 2(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)} \\ &= \frac{6 - 6u_n}{5 + 2(1 - u_n)} \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $1 - u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ et on sait que $1 > 0$ donc $1 - u_0 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a :

$$1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $1 - u_n > 0$ d'où :

$$6(1 - u_n) > 0 \quad \text{et} \quad 2(1 - u_n) > 0$$

d'où :

$$6(1 - u_n) > 0 \quad \text{et} \quad 5 + 2(1 - u_n) > 0$$

d'où :

$$\frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)} > 0$$

d'où :

$$1 - u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 1} \\
 &= \frac{2 \times \frac{(1 + 4u_n)}{7 - 2u_n} - 1}{\frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} - 1} \\
 &= \frac{2(1 + 4u_n) - (7 - 2u_n)}{\frac{1 + 4u_n - (7 - 2u_n)}{7 - 2u_n}} \\
 &= \frac{2 + 8u_n - 7 + 2u_n}{1 + 4u_n - 7 + 2u_n} \\
 &= \frac{2 - 7 + 8u_n + 2u_n}{1 - 7 + 4u_n + 2u_n} \\
 &= \frac{-5 + 10u_n}{-6 + 6u_n} \\
 &= \frac{10u_n - 5}{6u_n - 6} \\
 &= \frac{5(2u_n - 1)}{6(u_n - 1)} \\
 &= \frac{5}{6} \times \left(\frac{2u_n - 1}{u_n - 1} \right)
 \end{aligned}$$

donc :

$$v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$$

donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5}{6} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{5}{6} \right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{2u_0 - 1}{u_0 - 1} \\
 &= \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 1} \\
 &= \frac{-1}{-1}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$v_0 = 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

- b** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} &\iff v_n(u_n - 1) = 2u_n - 1 \quad (\text{car } u_n - 1 \neq 0) \\ &\iff v_n u_n - v_n = 2u_n - 1 \\ &\iff v_n u_n - 2u_n = v_n - 1 \\ &\iff (v_n - 2)u_n = v_n - 1 \\ &\iff u_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{0 - 1}{0 - 2} \\ &= \frac{-1}{-2} \end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 7 (N 2010) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- ① Montrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .

- ② On considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} .

- b** Montrer que $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- ③ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

Correction de l'exercice 7 :

- ① Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n - 1 > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ et on sait que $1 > 0$ donc $u_0 - 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 \\ &= \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} \\ &= \frac{3u_n - 2u_n - 1}{2u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{2u_n} \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n - 1 > 0$ d'où :

$$u_n - 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n > 0$$

d'où :

$$\frac{u_n - 1}{u_n} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 1 > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2 \times \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} \\ &= \frac{\frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n}}{\frac{3u_n - 1 - 2u_n}{u_n}} \\ &= \frac{\cancel{2u_n} \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n}}{\cancel{2u_n} \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{u_n}} \\ &= \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2(3u_n - 1) - 2u_n} \\ &= \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{6u_n - 2 - 2u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{6u_n - 2u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 1}{2(2u_n - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} \\ &= \frac{2 - 1}{2 \times 2 - 1} \\ &= \frac{1}{4 - 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} &\iff v_n(2u_n - 1) = u_n - 1 \quad (\text{car } 2u_n - 1 \neq 0) \\ &\iff 2v_n u_n - v_n = u_n - 1 \\ &\iff 2v_n u_n - u_n = v_n - 1 \\ &\iff (2v_n - 1)u_n = v_n - 1 \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \\ &= \frac{0 - 1}{2 \times 0 - 1} \\ &= \frac{-1}{-1} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

③ Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et la fonction \ln est continue en 1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(1)$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

Exercice 8 (R 2010) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- ① Montrer que $u_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .
- ② Montrer que $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ pour tout n de \mathbb{N} .
- ③ Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
- ④ **a** Montrer par récurrence que $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .
- b** Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 8 :

- ① Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et on sait que $1 > 0$ donc $u_0 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 0$ d'où :

$$3u_n > 0 \quad \text{et} \quad 21 + u_n > 0$$

d'où :

$$\frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n &= \frac{3u_n}{21 + u_n} - \frac{u_n}{7} \\ &= \frac{7 \times 3u_n - u_n(21 + u_n)}{7(21 + u_n)} \\ &= \frac{21u_n - 21u_n - u_n^2}{7(21 + u_n)} \\ &= \frac{-u_n^2}{7(21 + u_n)} \end{aligned}$$

d'après la question 1. on a : $u_n > 0$
d'où :

$$-u_n^2 < 0 \quad \text{et} \quad 7(21 + u_n) > 0$$

d'où :

$$\frac{-u_n^2}{7(21 + u_n)} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

- 3 Soit $n \in \mathbb{N}$
d'après la question 2. on a :

$$u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

on sait que :

$$\frac{1}{7} < 1$$

d'où :

$$\frac{1}{7}u_n < u_n \quad (\text{car } u_n > 0)$$

puisque $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ et $\frac{1}{7}u_n < u_n$ alors :

$$u_{n+1} < u_n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} \leq u_n$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

- 4 a Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Initialisation : Pour $n = 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{0+1} \\ &= \frac{3u_0}{21 + u_0} \\ &= \frac{3 \times 1}{21 + 1} \\ &= \frac{3}{22} \end{aligned}$$

on sait que $\frac{22}{3} > 7$ (car $\frac{22}{7} = 7 + \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} > 0$)

d'où :

$$\frac{3}{22} < \frac{1}{7}$$

d'où :

$$u_1 < \left(\frac{1}{7}\right)^1$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après hypothèse de récurrence on a :

$$u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

d'où :

$$\frac{1}{7}u_n < \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n \quad (\text{car } \frac{1}{7} > 0)$$

d'où :

$$\frac{1}{7}u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

d'après la question 2. on a :

$$u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

puisque $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ et $\frac{1}{7}u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ alors :

$$u_{n+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b Soit $n \in \mathbb{N}^*$

d'après la question 1. on a : $0 < u_n$ et d'après la question 4.a on a : $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ d'où :

$$0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

puisque $-1 < \frac{1}{7} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 9 (N 2011) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .

2 On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n .

b Montrer que $u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$ pour tout n de \mathbb{N} puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 9 :

1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et on sait que $1 > 0$ donc $u_0 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 0$ d'où :

$$5 + 8u_n > 0$$

d'où :

$$\frac{u_n}{5 + 8u_n} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} + 2 \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{5 + 8u_n}} + 2 \\ &= \frac{5 + 8u_n}{u_n} + 2 \\ &= \frac{5}{u_n} + \frac{8u_n}{u_n} + 2 \\ &= \frac{5}{u_n} + 8 + 2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{u_n} + 10 \\ &= 5 \left(\frac{1}{u_n} + 2 \right) \end{aligned}$$

donc :

$$v_{n+1} = 5v_n$$

donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5 \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \times 5^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0} + 2 \\ &= \frac{1}{1} + 2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = 3 \times 5^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n} + 2 &\iff \frac{1}{u_n} = v_n - 2 \\ &\iff u_n = \frac{1}{v_n - 2} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$$

puisque $5 > 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 5^n = +\infty \quad (\text{car } 3 > 0)$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \times 5^n - 2) = +\infty$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 10 (R 2011) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 a Vérifier que $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N} .

b Montrer par récurrence que $u_n > \frac{1}{3}$ pour tout n de \mathbb{N} .

2 On considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

3 Montrer que $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de \mathbb{N} et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction de l'exercice 10 :

1 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{1 + 15u_n} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3 \times 6u_n - (1 + 15u_n)}{3(1 + 15u_n)} \\ &= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1 + 15u_n)} \\ &= \frac{3u_n - 1}{3(1 + 15u_n)} \\ &= \frac{3\left(u_n - \frac{1}{3}\right)}{3(1 + 15u_n)} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$$

b Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > \frac{1}{3}$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et on sait que $1 > \frac{1}{3}$ donc $u_0 > \frac{1}{3}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
D'après la question 1.a on a :

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > \frac{1}{3}$ d'où :

$$u_n - \frac{1}{3} > 0 \quad \text{et} \quad 15u_n + 1 > 0$$

d'où :

$$\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \times \frac{6u_n}{1+15u_n}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{18u_n}{1+15u_n}} \\ &= 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{18u_n} + \frac{15u_n}{18u_n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{18u_n} - \frac{15}{18} \\ &= 1 - \frac{15}{18} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{18-15}{18} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{3}{18} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{18u_n} \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3u_n} \right)$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{6} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{6} \right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}v_0 &= 1 - \frac{1}{3u_0} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \times 1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3-1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned}v_n = 1 - \frac{1}{3u_n} &\iff \frac{1}{3u_n} = 1 - v_n \\ &\iff 3u_n = \frac{1}{1-v_n} \\ &\iff u_n = \frac{1}{3(1-v_n)} \\ &\iff u_n = \frac{1}{3-3v_n} \\ &\iff u_n = \frac{1}{3-3 \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1}{3-2 \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3-2 \left(\frac{1}{6}\right)^n} \\ &= \frac{1}{3-2 \times 0} \\ &= \frac{1}{3-0}\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

Exercice 11 (N 2012) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 11 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de \mathbb{N} .
- 2 a Montrer par récurrence que $u_n < 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- c En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de \mathbb{N} .
- a En utilisant la question 1. montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n .
- b Montrer que $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} et calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 11 :

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 12 &= \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 \\ &= \frac{10}{11}u_n + \frac{12 - 11 \times 12}{11} \\ &= \frac{10}{11}u_n + \frac{(1 - 11) \times 12}{11} \\ &= \frac{10}{11}u_n - \frac{10 \times 12}{11} \\ &= \frac{10}{11}u_n - \frac{10}{11} \times 12 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

- 2 a Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < 12$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 11$ et on sait que $11 < 12$ donc $u_0 < 12$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
D'après la question 1. on a :

$$u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n < 12$ d'où :

$$\frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 12 < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} < 12$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - u_n \\ &= \frac{10}{11}u_n - u_n + \frac{12}{11} \\ &= \left(\frac{10}{11} - 1\right)u_n + \frac{12}{11} \\ &= \frac{(10 - 11)}{11}u_n + \frac{12}{11} \\ &= \frac{(-1)}{11}u_n + \frac{12}{11} \\ &= \frac{1}{11}(-u_n + 12) \end{aligned}$$

d'après la question **2.a** on a :

$$u_n < 12$$

d'où :

$$\frac{1}{11}(-u_n + 12) > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

d'où la suite (u_n) est croissante.

- c** Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 12, alors elle est convergente.

- 3** **a** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12$$

d'après la question **1.** on a :

$$u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10}{11} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{10}{11}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}v_0 &= u_0 - 12 \\ &= 11 - 12 \\ &= -1\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = u_n - 12$$

d'où :

$$u_n = 12 + v_n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{10}{11} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12 - 0$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$$

Exercice 12 (R 2012) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

2 On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Vérifier que $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N} et en déduire que $1 - v_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .

b Montrer que $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

3 **a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n .

b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 12 :

1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 3$ et on sait que $3 > 1$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1 \\ &= \frac{4u_n + 3 - (3u_n + 4)}{3u_n + 4} \\ &= \frac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n + 4} \\ &= \frac{u_n - 1}{3u_n + 4} \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 1$ d'où :

$$u_n - 1 > 0 \quad \text{et} \quad 3u_n + 4 > 0$$

d'où :

$$\frac{u_n - 1}{3u_n + 4} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 1 > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} 1 - v_n &= 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ &= \frac{u_n + 1 - (u_n - 1)}{u_n + 1} \\ &= \frac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$$

d'après la question 1. on a : $u_n > 1$

d'où :

$$u_n + 1 > 2$$

d'où :

$$u_n + 1 > 0 \quad (\text{car } 2 > 0)$$

puisque $2 > 0$ et $u_n + 1 > 0$ alors :

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 1 - v_n > 0$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \quad (\text{car } u_n + 1 \neq 0) \\ &\iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \\ &\iff v_n u_n - u_n = -1 - v_n \\ &\iff (v_n - 1)u_n = -(1 + v_n) \\ &\iff u_n = \frac{-(1 + v_n)}{v_n - 1} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

3 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1} \\ &= \frac{4u_n + 3 - (3u_n + 4)}{4u_n + 3 + 3u_n + 4} \\ &= \frac{u_n - 1}{7u_n + 7} \\ &= \frac{u_n - 1}{7(u_n + 1)} \\ &= \frac{1}{7} \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{7} v_n \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{7} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \\ &= \frac{3 - 1}{3 + 1} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

b Puisque $-1 < \frac{1}{7} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

D'après la question **2.b** on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \\ &= \frac{1 + 0}{1 - 0} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 13 (N 2013) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

- ① Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout n de \mathbb{N}^* et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{5}{5 - u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

a Montrer que $v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* et vérifier que

$$v_{n+1} - v_n = 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

b Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de \mathbb{N}^* et en déduire que

$$u_n = 5 - \frac{5}{n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

c Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction de l'exercice 13 :

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a :

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10 - u_n} \\ &= \frac{5(10 - u_n) - 25}{10 - u_n} \\ &= \frac{50 - 5u_n - 25}{5 + 5 - u_n} \\ &= \frac{50 - 25 - 5u_n}{5 + (5 - u_n)} \\ &= \frac{25 - 5u_n}{5 + (5 - u_n)} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $5 - u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : Pour $n = 1$ on a : $5 - u_1 = 5 - 0 = 5$ et on sait que $5 > 0$ donc $5 - u_1 > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a :

$$5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $5 - u_n > 0$ d'où :

$$5(5 - u_n) > 0 \quad \text{et} \quad 5 + (5 - u_n) > 0$$

d'où :

$$\frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} > 0$$

d'où :

$$5 - u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5 - u_{n+1}} \\ &= \frac{5}{5 - \frac{25}{10 - u_n}} \\ &= \frac{5}{\frac{5(10 - u_n) - 25}{10 - u_n}} \\ &= \frac{5 \times (10 - u_n)}{5(10 - u_n) - 25} \\ &= \frac{5(10 - u_n)}{5(10 - u_n - 5)} \\ &= \frac{5(10 - u_n)}{5(10 - 5 - u_n)} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} \\ &= \frac{10 - u_n - 5}{5 - u_n} \\ &= \frac{10 - 5 - u_n}{5 - u_n} \\ &= \frac{5 - u_n}{5 - u_n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_{n+1} - v_n = 1$$

b D'après la question **2.a** on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_{n+1} - v_n = 1$$

d'où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1 alors :

$$v_n = v_1 + (n - 1) \times 1$$

Calculons v_1 : on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{5}{5 - u_1} \\ &= \frac{5}{5 - 0} \\ &= \frac{5}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$v_n = 1 + n - 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_n = n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{5}{5 - u_n} &\iff v_n(5 - u_n) = 5 \quad (\text{car } 5 - u_n \neq 0) \\ &\iff 5v_n - v_n u_n = 5 \\ &\iff v_n u_n = 5v_n - 5 \\ &\iff u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n} \\ &\iff u_n = \frac{5v_n}{v_n} - \frac{5}{v_n} \\ &\iff u_n = 5 - \frac{5}{v_n} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad u_n = 5 - \frac{5}{n}$$

c Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{5}{n} \right) \\ &= 5 - 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$$

Exercice 14 (R 2013) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 Vérifier que : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de \mathbb{N} .

2 a Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n .

b En déduire que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de \mathbb{N} puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 14 :

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4-5}{5} \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{(-1)}{5} \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

- 2 a Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2$ et on sait que $2 > 1$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après la question 1. on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 1$ d'où :

$$\frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 1 > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n \\ &= \frac{1}{5}u_n - u_n + \frac{4}{5} \\ &= \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{(1-5)}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{-4}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5}(-u_n + 1) \end{aligned}$$

d'après la question 2.a on a : $u_n > 1$ d'où :

$$\frac{4}{5}(-u_n + 1) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

c Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, alors elle est convergente.

3 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

d'après la question 1. on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 : on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = u_n - 1$$

d'où :

$$u_n = v_n + 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 \right) \\ &= 0 + 1\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 15 (N 2014) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 13 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 Montrer par récurrence que $u_n < 14$ pour tout n de \mathbb{N} .
- 2 Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et exprimer v_n en fonction de n .
 - b En déduire que $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} puis calculer la limite de la suite (u_n) .
 - c Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 13,99$.

Correction de l'exercice 15 :

- 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < 14$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 13$ et on sait que $13 < 14$ donc $u_0 < 14$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 14 &= \frac{1}{2}u_n + 7 - 14 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 7 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 14)\end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n < 14$ d'où :

$$\frac{1}{2}(u_n - 14) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 14 < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} < 14$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 14 - u_{n+1} \\ &= 14 - \left(\frac{1}{2}u_n + 7\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 14 - \frac{1}{2}u_n - 7 \\ &= 14 - 7 - \frac{1}{2}u_n \\ &= 7 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(14 - u_n)\end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}v_0 &= 14 - u_0 \\ &= 14 - 13 \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = 14 - u_n$$

d'où :

$$u_n = 14 - v_n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \\ &= 14 - 0\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 14$$

c Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}u_n > 13,99 &\iff 14 - \left(\frac{1}{2} \right)^n > 13,99 \\ &\iff - \left(\frac{1}{2} \right)^n > 13,99 - 14 \\ &\iff - \left(\frac{1}{2} \right)^n > -0,01 \\ &\iff \left(\frac{1}{2} \right)^n < 0,01 \\ &\iff \ln \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right) < \ln(0,01)\end{aligned}$$

car la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
donc :

$$\begin{aligned}u_n > 13,99 &\iff n \ln \left(\frac{1}{2} \right) < \ln(0,01) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} \quad (\text{car } \ln \left(\frac{1}{2} \right) < 0) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,01)}{-\ln(2)} \\ &\iff n > \frac{-\ln(0,01)}{\ln(2)}\end{aligned}$$

on a :

$$\frac{-\ln(0,01)}{\ln(2)} \approx 6,64$$

donc la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n > 13,99$ est $n = 7$.

Exercice 16 (R 2014) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

2 On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

a Montrer que $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de \mathbb{N}^* et montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1.

b Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

c Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction de l'exercice 16 :

① Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 2$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : Pour $n = 1$ on a : $u_1 = 5$ et on sait que $5 > 2$ donc $u_1 > 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 2 &= \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2 \\&= \frac{5u_n - 4 - 2(1 + u_n)}{1 + u_n} \\&= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} \\&= \frac{5u_n - 2u_n - 4 - 2}{1 + u_n} \\&= \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} \\&= \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n}\end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 2$ d'où :

$$3(u_n - 2) > 0 \quad \text{et} \quad 1 + u_n > 0$$

d'où :

$$\frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 2 > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 2$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

② **a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$
on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{3}{u_{n+1} - 2} \\&= \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} \\&= \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2(1 + u_n)}{1 + u_n}} \\&= \frac{3(1 + u_n)}{5u_n - 4 - 2(1 + u_n)} \\&= \frac{3(1 + u_n)}{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{3(1+u_n)}{5u_n - 2u_n - 4 - 2} \\ &= \frac{3(1+u_n)}{3u_n - 6} \\ &= \frac{3(1+u_n)}{3(u_n - 2)}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n - 2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{1+u_n}{u_n - 2} - \frac{3}{u_n - 2} \\ &= \frac{1+u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n + 1 - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 2}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_{n+1} - v_n = 1$$

d'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1.

b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1 alors :

$$v_n = v_1 + (n - 1) \times 1$$

Calculons v_1 :

on a :

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{3}{u_1 - 2} \\ &= \frac{3}{5 - 2} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où :

$$v_n = 1 + n - 1$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad v_n = n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{3}{u_n - 2} &\iff v_n(u_n - 2) = 3 \quad (\text{car } u_n - 2 \neq 0) \\&\iff v_n u_n - 2v_n = 3 \\&\iff v_n u_n = 2v_n + 3 \\&\iff u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n} \\&\iff u_n = \frac{2v_n}{v_n} + \frac{3}{v_n} \\&\iff u_n = 2 + \frac{3}{v_n}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad u_n = 2 + \frac{3}{v_n}$$

c Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) \\&= 2 + 0\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

Exercice 17 (R 2015) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 Montrer par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de \mathbb{N} .
- 2 Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} et en déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4 Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n .

b En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 17 :

- 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < 5$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 4$ et on sait que $4 < 5$ donc $u_0 < 5$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 5 &= \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 \\ &= \frac{2}{5}u_n - 2 \\ &= \frac{2}{5}(u_n - 5) \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n < 5$ d'où :

$$\frac{2}{5}(u_n - 5) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 1 < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} < 5$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2 Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5}u_n + 3 - u_n \\ &= \frac{2}{5}u_n - u_n + 3 \\ &= \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + 3 \\ &= \frac{(2-5)}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{-3}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{3}{5}(-u_n + 5) \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$$

d'après la question 1. on a : $u_n < 5$ d'où :

$$5 - u_n > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

d'où la suite (u_n) est croissante.

3) Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 5, alors elle est convergente.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 5 - u_{n+1} \\ &= 5 - \left(\frac{2}{5}u_n + 3\right) \\ &= 5 - \frac{2}{5}u_n - 3 \\ &= 5 - 3 - \frac{2}{5}u_n \\ &= 2 - \frac{2}{5}u_n \\ &= \frac{2}{5}(5 - u_n)\end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{5} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}v_0 &= 5 - u_0 \\ &= 5 - 4 \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$v_n = 5 - u_n$$

d'où :

$$u_n = 5 - v_n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \\ &= 5 - 0\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$$

Exercice 18 (N 2016) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

① Vérifier que : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ pour tout n de \mathbb{N} puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de \mathbb{N} .

② Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} .

b Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout n de \mathbb{N} puis exprimer u_n en fonction de n .

c Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 18 :

① Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 3 &= \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 3 \\ &= \frac{3 + u_n - 3(5 - u_n)}{2 + 3 - u_n} \\ &= \frac{3 + u_n - 15 + 3u_n}{2 + (3 - u_n)} \\ &= \frac{u_n + 3u_n + 3 - 15}{2 + (3 - u_n)} \\ &= \frac{4u_n - 12}{2 + (3 - u_n)}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n - 12}{2 + (3 - u_n)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < 3$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2$ et on sait que $2 < 3$ donc $u_0 < 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n - 12}{2 + (3 - u_n)}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n < 3$ d'où :

$$4(u_n - 3) < 0 \quad \text{et} \quad 2 + (3 - u_n) > 0$$

d'où :

$$\frac{4u_n - 12}{2 + (3 - u_n)} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 3 < 0$$

d'où : $u_{n+1} < 3$ Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} \\ &= \frac{3 + u_n}{3 - \frac{5 - u_n}{3 + u_n}} - 1 \\ &= \frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{3(3 + u_n) - (5 - u_n)} \\ &= \frac{3 + u_n - 5 + u_n}{3(5 - u_n) - (3 + u_n)} \\ &= \frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{3(5 - u_n) - (3 + u_n)} \\ &= \frac{3 + u_n - 5 + u_n}{15 - 3u_n - 3 - u_n} \\ &= \frac{u_n + u_n + 3 - 5}{15 - 3 - 3u_n - u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2}{12 - 4u_n} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{2}{4} \times \left(\frac{u_n - 1}{3 - u_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{u_n - 1}{3 - u_n} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} \\ &= \frac{2 - 1}{3 - 2} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} &\iff v_n(3 - u_n) = u_n - 1 \quad (\text{car } 3 - u_n \neq 0) \\ &\iff 3v_n - v_n u_n = u_n - 1 \\ &\iff u_n + v_n u_n = 3v_n + 1 \\ &\iff (1 + v_n)u_n = 3v_n + 1 \\ &\iff u_n = \frac{3v_n + 1}{1 + v_n} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{1 + 3 \times 0}{1 + 0} \\ &= \frac{1}{1}\end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 19 (R 2016) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1 **a** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - b** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout n de \mathbb{N} puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 2 Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = u_n - 1$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ et exprimer v_n en fonction de n .
 - b** Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N} puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction de l'exercice 19 :

- 1 **a** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2$ et on sait que $2 > 1$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
D'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 1$ d'où:

$$\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16} \quad \left(\text{car } \frac{1}{16} > 0 \right)$$

d'où :

$$\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$$

d'où :

$$\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1 + 15}{16}$$

d'où :

$$\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{16}{16}$$

d'où :

$$\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > 1$$

d'où :

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \frac{1}{16}u_n - u_n + \frac{15}{16} \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{(1 - 16)}{16}u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$$

et d'après la question 1. a on a : $u_n > 1$ d'où :

$$-\frac{15}{16}(u_n - 1) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

c Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, alors elle est convergente.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n + \frac{(15 - 16)}{16} \\ &= \frac{1}{16}u_n + \frac{(-1)}{16} \\ &= \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}(u_n - 1) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{16}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{16} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{16}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_n = u_n - 1$$

d'où :

$$u_n = 1 + v_n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{16} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n\right) \\ &= 1 + 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 20 (R 2017) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 17 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- 1 **a** Montrer par récurrence que : $u_n > 16$ pour tout entier naturel n .
- b** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 2 Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n .
 - a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

- b** En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n) .
- c** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,001$.

Correction de l'exercice 20 :

1 a Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 16$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 17$ et on sait que $17 > 16$ donc $u_0 > 16$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 16$ d'où :

$$\frac{1}{4}u_n > \frac{1}{4} \times 16 \quad \left(\text{car } \frac{1}{4} > 0\right)$$

d'où :

$$\frac{1}{4}u_n > 4$$

d'où :

$$\frac{1}{4}u_n + 12 > 4 + 12$$

d'où :

$$\frac{1}{4}u_n + 12 > 16$$

d'où :

$$u_{n+1} > 16$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{4}u_n + 12 - u_n \\ &= \frac{1}{4}u_n - u_n + 12 \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1\right)u_n + 12 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(1-4)}{4}u_n + 12 \\ &= \frac{-3}{4}u_n + 12 \\ &= \frac{-3}{4}\left(u_n - \frac{4}{3} \times 12\right) \\ &= \frac{-3}{4}(u_n - 16) \end{aligned}$$

d'après la question 1. a on a : $u_n > 16$ d'où :

$$\frac{-3}{4}(u_n - 16) < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 16, alors elle est convergente.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 16 \\ &= \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 \\ &= \frac{1}{4}u_n - 4 \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 16) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = u_n - 16$$

d'où :

$$u_n = 16 + v_n$$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ alors :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0} \\ &= (u_0 - 16) \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= (17 - 16) \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

d'où :

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

c Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}u_n < 16,001 &\iff 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,001 \\&\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,001 - 16 \\&\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,001 \\&\iff \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,001)\end{aligned}$$

car la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. d'où :

$$\begin{aligned}u_n < 16,001 &\iff n \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,001) \\&\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \left(\text{car } \ln\left(\frac{1}{4}\right) < 0\right) \\&\iff n > \frac{\ln(0,001)}{-\ln(4)} \\&\iff n > \frac{-\ln(0,001)}{\ln(4)}\end{aligned}$$

on a :

$$\frac{-\ln(0,001)}{\ln(4)} \approx 4,98$$

donc la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n < 16,001$ est $n = 5$.

Exercice 21 (N 2020) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 1 Calculer u_1
- 2 Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$
- 3 **a** Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$
puis en déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$
- b** Calculer $\lim u_n$.
- 4 On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - a** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
 - b** Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N} .

Correction de l'exercice 21 :

- 1 Calculons u_1 :
on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{0+1} \\ &= \frac{2u_0}{2u_0 + 5} \\ &= \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} \\ &= \frac{3}{3 + 5} \end{aligned}$$

donc :

$$u_1 = \frac{3}{8}$$

- 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 0$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{3}{2}$ et on sait que $\frac{3}{2} > 0$ donc $u_0 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 0$ d'où :

$$2u_n > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n + 5 > 0$$

d'où :

$$\frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 3 a Soit $n \in \mathbb{N}$
d'après la question 2. on a : $u_n > 0$ d'où :

$$0 < u_{n+1}$$

on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n &= \frac{2u_n}{2u_n + 5} - \frac{2}{5}u_n \\ &= \frac{5 \times 2u_n - 2u_n(2u_n + 5)}{2u_n + 5} \\ &= \frac{10u_n - 4u_n^2 - 10u_n}{2u_n + 5} \\ &= \frac{-4u_n^2}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

d'après la question 2. on a : $u_n > 0$ d'où :

$$-4u_n^2 < 0 \quad \text{et} \quad 2u_n + 5 > 0$$

d'où :

$$\frac{-4u_n^2}{2u_n + 5} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$$

puisque $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$$

- Première cas : si $n = 0$ on a :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

on sait que :

$$0 < \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

donc :

$$0 < u_0 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

- Deuxième ca : Si $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ on a :

$$0 < u_{k+1} \leq \frac{2}{5}u_k$$

d'où :

$$0 < u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}u_0\right) \times \left(\frac{2}{5}u_1\right) \times \left(\frac{2}{5}u_2\right) \times \dots \times \left(\frac{2}{5}u_{n-1}\right)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1-0+1} \times u_0 \quad (\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n > 0)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{3}{2}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Puisque $0 < u_0 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

b Calculons $\lim u_n$:

puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ alors :

$$\lim u_n = 0$$

4 a Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_{n+1} = \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3}$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4 \times \frac{2u_n}{2u_n + 5}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 5} + 3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n + 5}}{\frac{4u_n + 3(2u_n + 5)}{2u_n + 5}} \\ &= \frac{8u_n}{4u_n + 3(2u_n + 5)} \\ &= \frac{8u_n}{4u_n + 6u_n + 15} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n + 15} \\ &= \frac{2 \times 4u_n}{5(2u_n + 3)} \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{4u_n}{2u_n + 3} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$$

d'où :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{5}$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b Soit $n \in \mathbb{N}$

puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ alors :

$$v_n = v_0 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-0}$$

Calculons v_0 :

on a :

$$\begin{aligned}v_0 &= \frac{4u_0}{2u_0 + 3} \\&= \frac{4 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 3} \\&= \frac{6}{3 + 3} \\&= \frac{6}{6} \\&= 1\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3} &\iff v_n(2u_n + 3) = 4u_n \quad (\text{car } 2u_n + 3 \neq 0) \\&\iff 2v_n u_n + 3v_n = 4u_n \\&\iff 2v_n u_n - 4u_n = -3v_n \\&\iff (2v_n - 4)u_n = -3v_n \\&\iff u_n = \frac{-3v_n}{2v_n - 4} \\&\iff u_n = \frac{3v_n}{4 - 2v_n}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{3 \left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Exercice 22 (R 2020) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de \mathbb{N}

① Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n < 2$

② On pose pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

b Ecrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N} .

c Calculer la limite de la suite (u_n)

Correction de l'exercice 22 :

① Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n < 2$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et on sait que $1 < 2$ donc $u_0 < 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - 2 &= \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2 \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 2(2u_n - 5)}{2u_n - 5} \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 4u_n + 10}{2u_n - 5} \\
 &= \frac{3u_n - 4u_n - 8 + 10}{2u_n - 5} \\
 &= \frac{-u_n + 2}{2u_n - 5} \\
 &= \frac{2 - u_n}{2u_n - 5}
 \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n < 2$ d'où :

$$2 - u_n > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n - 5 < -1$$

d'où :

$$2 - u_n > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n - 5 < 0 \quad (\text{car } -1 < 0)$$

d'où :

$$\frac{2 - u_n}{2u_n - 5} < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - 2 < 0$$

d'où :

$$u_{n+1} < 2$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
 &= \frac{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 3}{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 3(2u_n - 5)}{3u_n - 8 - 2(2u_n - 5)} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 6u_n + 15}{3u_n - 8 - 4u_n + 10} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 6u_n + 15}{3u_n - 4u_n - 8 + 10} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
 &= \frac{3u_n - 8 - 6u_n + 15}{3u_n - 4u_n - 8 + 10} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{-3u_n + 7}{-u_n + 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\&= \frac{-3u_n + 7}{-(u_n - 2)} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\&= \frac{3u_n - 7}{u_n - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\&= \frac{3u_n - 7 - (u_n - 3)}{u_n - 2} \\&= \frac{3u_n - 7 - u_n + 3}{u_n - 2} \\&= \frac{3u_n - u_n - 7 + 3}{u_n - 2} \\&= \frac{2u_n - 4}{u_n - 2} \\&= \frac{2(u_n - 2)}{u_n - 2}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_{n+1} - v_n = 2$$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

b Puisque (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = v_0 + 2(n - 0)$$

Calculons v_0 :

on a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 2} = \frac{1 - 3}{1 - 2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = 2 + 2n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2} &\iff v_n(u_n - 2) = u_n - 3 \quad (\text{car } u_n - 2 \neq 0) \\&\iff v_n u_n - 2v_n = u_n - 3 \\&\iff v_n u_n - u_n = -3 + 2v_n \\&\iff (v_n - 1)u_n = -3 + 2v_n \\&\iff u_n = \frac{-3 + 2v_n}{v_n - 1} \\&\iff u_n = \frac{-3 + 2(2 + 2n)}{2 + 2n - 1} \\&\iff u_n = \frac{-3 + 4 + 4n}{1 + 2n}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1 + 4n}{1 + 2n}$$

- c Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:
on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4n}{1 + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\frac{1}{n} + 4 \right)}{n \left(\frac{1}{n} + 2 \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + 4}{\frac{1}{n} + 2} \\ &= \frac{0 + 4}{0 + 2} \\ &= \frac{4}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

Exercice 23 (N 2021) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 1 Calculer u_1
- 2 Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$
- 3 a Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
b En déduire la monotonie de la suite (u_n)
- 4 a Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)
b On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} , calculer $\lim v_n$
- 5 a Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$
b En déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N}

Correction de l'exercice 23 :

- 1 Calculons u_1 :
on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{0+1} \\ &= \frac{u_0}{3 - 2u_0} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{3 - 2 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2(3 - 1)} \\ &= \frac{1}{2 \times 2} \end{aligned}$$

donc :

$$u_1 = \frac{1}{4}$$

2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et on sait que $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 \leq \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3-2x}$$

on a f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(3-2x) - x(3-2x)'}{(3-2x)^2} \\ &= \frac{1 \times (3-2x) - x \times (-2)}{(3-2x)^2} \\ &= \frac{3-2x+2x}{(3-2x)^2} \\ &= \frac{3}{(3-2x)^2} \end{aligned}$$

on sait que :

$$3 > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; (3-2x)^2 > 0$$

d'où :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; f'(x) > 0$$

d'où f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

D'après hypothèse de récurrence on a :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \left(\text{car la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$$

d'où :

$$0 < \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{1}{4} \quad \left(\text{car } f(0) = \frac{0}{3-2 \times 0} = 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{3-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\right)$$

d'où :

$$0 < \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{1}{4} \quad \left(\text{car } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}\right)$$

d'où :

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 3 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{1}} \\ &= \frac{1}{3-2u_n} \end{aligned}$$

d'après la question 2. on a :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$-1 \leq -2u_n < 0 \quad (\text{car } -2 < 0)$$

d'où :

$$3-1 \leq 3-2u_n < 3$$

d'où :

$$2 \leq 3-2u_n < 3$$

d'où :

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

- b Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \quad \left(\text{car } \frac{1}{2} \leq 1 \right)$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} \leq u_n \quad (\text{car } u_n > 0)$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

- 4 a • Première cas : si $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{1}{2}$.
on sait que :

$$0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$$

- Deuxième cas : si $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ on a :

$$0 < \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$$

d'où :

$$0 < \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \dots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n\text{-fois}}$$

d'où :

$$0 < \frac{u_n}{u_0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où :

$$0 < u_n \leq u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{car } u_0 > 0)$$

d'où :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où :

$$(n \in \mathbb{N}^*); \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Puisque $0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b D'après la question **2. a** on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - 2u_n) = 3$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - 2u_n) = 3$ et la fonction \ln est continue en 3 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3 - 2u_n) = \ln 3$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 3$$

- 5 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 &= \frac{1}{\frac{3-2u_n}{u_n}} - 1 \\ &= \frac{u_n}{3-2u_n} - 1 \\ &= \frac{3-2u_n}{u_n} - 1 \\ &= \frac{3}{u_n} - 2 - 1 \\ &= \frac{3}{u_n} - 3 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$$

- b D'après la question 5. a on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{\frac{1}{u_{n+1}} - 1}{\frac{1}{u_n} - 1} = 3$$

d'où la suite $\left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{1}{u_n} - 1 = \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right) \times 3^{n-0}$$

soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} - 1 &= \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right) \times 3^{n-0} \iff \frac{1}{u_n} - 1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \right) \times 3^n \\ &\iff \frac{1}{u_n} - 1 = (2 - 1) \times 3^n \\ &\iff \frac{1}{u_n} - 1 = 1 \times 3^n \\ &\iff \frac{1}{u_n} - 1 = 3^n \\ &\iff \frac{1}{u_n} = 3^n + 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1}{3^n + 1}$$

Exercice 24 (R 2021) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

1 Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n < 1$

2 a Montrer que pour tout n de \mathbb{N} $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

b Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3 On pose $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

b Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de \mathbb{N}

c Calculer la limite de la suite (u_n)

4 A partir de quelle valeur de n , a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Correction de l'exercice 24 :

1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $0 < u_n < 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{1}{3}$ et on sait que $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $0 < u_0 < 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1+x}{3-x}$$

on a f est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+x)'(3-x) - (1+x)(3-x)'}{(3-x)^2} \\ &= \frac{1 \times (3-x) - (1+x) \times (-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{3-x+1+x}{(3-x)^2} \\ &= \frac{4}{(3-x)^2} \end{aligned}$$

on sait que :

$$4 > 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in [0; 1]); (3-x)^2 > 0$$

d'où :

$$(\forall x \in [0; 1]); f'(x) > 0$$

d'où f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

D'après hypothèse de récurrence on a :

$$0 < u_n < 1$$

d'où :

$$f(0) < f(u_n) < f(1) \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0; 1])$$

d'où :
$$\frac{1}{3} < \frac{1+u_n}{3-u_n} < 1 \quad \left(\text{car } f(0) = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1+1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1 \right)$$

d'où :
$$0 < \frac{1+u_n}{3-u_n} < 1 \quad \left(\text{car } 0 < \frac{1}{3} \right)$$

d'où :
$$0 < u_{n+1} < 1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2** **a** Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+u_n}{3-u_n} - u_n \\ &= \frac{1+u_n - u_n(3-u_n)}{3-u_n} \\ &= \frac{1+u_n - 3u_n + u_n^2}{3-u_n} \\ &= \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{3-u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{3-u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 2 \times u_n \times 1 + 1^2}{3-u_n} \end{aligned}$$

d'où :
$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$$

- b** Soit $n \in \mathbb{N}$
d'après la question **2. a** on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$$

d'après la question **1** on a :

$$0 < u_n < 1$$

d'où :
$$-1 < -u_n < 0$$

d'où :
$$3 - 1 < 3 - u_n < 3$$

d'où :
$$2 < 3 - u_n$$

d'où :
$$3 - u_n > 0 \quad (\text{car } 2 > 0)$$

on sait que :
$$(u_n - 1)^2 \geq 0$$

d'où :

$$\frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n} \geq 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

d'où la suite (u_n) est croissante.

Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, alors elle est convergente.

- 3 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1 + u_n}{3 - u_n}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{3 - u_n - (1 + u_n)}{3 - u_n}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n}{3 - u_n - (1 + u_n)} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n}{3 - u_n - 1 - u_n} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n}{3 - 1 - u_n - u_n} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n}{2 - 2u_n} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n}{2(1 - u_n)} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{3 - u_n - 2}{2(1 - u_n)} \\ &= \frac{3 - 2 - u_n}{2(1 - u_n)} \\ &= \frac{1 - u_n}{2(1 - u_n)} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}$$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et son premier terme est :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{1 - u_0} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{3 - 1}{3}} \end{aligned}$$

donc :

$$v_0 = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

donc :

$$v_0 = \frac{2}{3}$$

b Puisque (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ alors :

$$v_n = v_0 + \frac{1}{2}(n - 0)$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$v_n = \frac{1}{1 - u_n} \iff 1 - u_n = \frac{1}{v_n} \quad (\text{car } 1 - u_n \neq 0 \text{ et } v_n \neq 0)$$

$$\iff u_n = 1 - \frac{1}{v_n}$$

$$\iff u_n = 1 - \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}u_n}$$

$$\iff u_n = 1 - \frac{1}{\frac{3 + n}{2}}$$

$$\iff u_n = 1 - \frac{2}{3 + n}$$

$$\iff u_n = \frac{3 + n - 2}{3 + n}$$

$$\iff u_n = \frac{n + 3 - 2}{n + 3}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{n + 1}{n + 3}$$

c Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n + 3}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\mathcal{D}\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

$$= \frac{1 + 0}{1 + 0} \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \right)$$

$$= \frac{1}{1}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} u_n \geq \frac{1011}{1012} &\iff \frac{n+1}{n+3} \geq \frac{1011}{1012} \\ &\iff 1012(n+3) \times \frac{(n+1)}{(n+3)} \geq 1012(n+3) \times \frac{1011}{1012} \quad (\text{car } 1012(n+3) > 0) \\ &\iff 1012 \cancel{(n+3)} \times \frac{(n+1)}{\cancel{(n+3)}} \geq 1012(n+3) \times \frac{1011}{1012} \\ &\iff 1012(n+1) \geq 1011(n+3) \\ &\iff 1012n + 1012 \geq 1011n + 1011 \times 3 \\ &\iff 1012n + 1012 \geq 1011n + 3033 \\ &\iff 1012n - 1011n \geq 3033 - 1012 \\ &\iff (1012 - 1011)n \geq 2021 \\ &\iff 1 \times n \geq 2021 \\ &\iff n \geq 2021 \end{aligned}$$

donc à partir de $n = 2021$ on a :

$$u_n \geq \frac{1011}{1012}$$

Exercice 25 (R 2022) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 1
 - a Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 1$
 - b Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente
- 2 On pose pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = u_n - 1$
 - a Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n) .
 - c Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2021}$

Correction de l'exercice 25 :

- 1
 - a Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > 1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2$ et on sait que $2 > 1$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n + \frac{2 - \sqrt{2} - 2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_n - 1) \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > 1$ d'où : $\frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) > 0$ d'où : $u_{n+1} > 1$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - u_n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n - u_n + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}u_n - 2u_n}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - 2)}{2} u_n - \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} (u_n - 1)$$

soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} (u_n - 1)$ et d'après question 1. on a : $u_n > 1$, d'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0$
d'où la suite (u_n) est décroissante.

puisque la suite (u_n) est décroissante et minoré par 1, alors elle est convergente.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n + \frac{2 - \sqrt{2} - 2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_n - 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} v_n \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{car } v_n \neq 0)$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $v_n = u_n - 1$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 1 \\ &= v_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-0} + 1 \\ &= 1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + 1 \end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + 1$$

puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

c On a :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2021} \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 + 1 \right) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + 1 \right) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 \right) + \dots + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2021} + 1 \right) \\ &= 1 \times (2021 - 0 + 1) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2021} \right) \\ &= 2022 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2021-0+1} \right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 2022 + 1 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2022} \right)}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \\ &= 2022 + \frac{2}{(2 - \sqrt{2})} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{1011} \right) \\ &= 2022 + (2 + \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{2^{1011}} \right) \\ &= 2022 + 2 - \frac{2}{2^{1011}} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2^{1011}} \end{aligned}$$

donc :

$$S = 2024 + \sqrt{2} - \frac{1}{2^{1010}} - \frac{\sqrt{2}}{2^{1011}}$$

Exercice 26 (R 2023) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$, pour tout n de \mathbb{N}

- 1 Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > -1$
- 2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente.
- 3 On pose $v_n = \frac{3}{1 + u_n}$, pour tout n de \mathbb{N}
 - a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.
 - b Exprimer u_n en fonction de n , pour tout n de \mathbb{N} et déduire la limite de (u_n)
- 4 On pose $w_n = e^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$, pour tout n de \mathbb{N}
 - a Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b Calculer la limite de la somme S_n

Correction de l'exercice 26 :

- 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $u_n > -1$ ". On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 0$ et on sait que $0 > -1$ donc $u_0 > -1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - (-1) &= u_{n+1} + 1 \\ &= \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} + 1 \\ &= \frac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} \\ &= \frac{u_n + 2u_n - 2 + 5}{2u_n + 5} \\ &= \frac{3u_n + 3}{2u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

d'après hypothèse de récurrence on a : $u_n > -1$ d'où:

$$u_n + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n + 5 > 3$$

d'où :

$$3(u_n + 1) > 0 \quad \text{et} \quad 2u_n + 5 > 0 \quad (\text{car } 3 > 0)$$

d'où :

$$\frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5} > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} - (-1) > 0$$

d'où :

$$u_{n+1} > -1$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} - u_n \\
 &= \frac{u_n - 2 - u_n(2u_n + 5)}{2u_n + 5} \\
 &= \frac{u_n - 2 - 2u_n^2 - 5u_n}{2u_n + 5} \\
 &= \frac{-2u_n^2 + u_n - 5u_n - 2}{2u_n + 5} \\
 &= \frac{-2u_n^2 - 4u_n - 2}{2u_n + 5} \\
 &= \frac{-2(u_n^2 + 2u_n + 1)}{2u_n + 5} \\
 &= \frac{-2(u_n + 1)^2}{2u_n + 5}
 \end{aligned}$$

d'après la question 1. on a :

$$u_n > -1$$

d'où :

$$2u_n > -2 \quad (\text{car } 2 > 0)$$

d'où :

$$2u_n + 5 > -2 + 5$$

d'où :

$$2u_n + 5 > 3$$

d'où :

$$2u_n + 5 > 0 \quad (\text{car } 3 > 0)$$

d'où :

$$\frac{-2(u_n + 1)^2}{2u_n + 5} \leq 0 \quad (\text{car } -2(u_n + 1)^2 \leq 0)$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par -1 , alors elle est convergente.

3 a Soit $n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{3}{1 + u_{n+1}} - \frac{3}{1 + u_n} \\
 &= \frac{3}{1 + \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}} - \frac{3}{1 + u_n} \\
 &= \frac{3}{\frac{2u_n + 5 + u_n - 2}{2u_n + 5}} - \frac{3}{1 + u_n} \\
 &= \frac{3(2u_n + 5)}{2u_n + 5 + u_n - 2} - \frac{3}{1 + u_n}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{6u_n + 15}{2u_n + u_n + 5 - 2} - \frac{3}{1 + u_n} \\&= \frac{6u_n + 15}{3u_n + 3} - \frac{3}{1 + u_n} \\&= \frac{6u_n + 15}{3(u_n + 1)} - \frac{1}{1 + u_n} \\&= \frac{6u_n + 15 - 9}{3(u_n + 1)} \\&= \frac{6u_n + 6}{3(u_n + 1)} \\&= \frac{6(u_n + 1)}{3(u_n + 1)} \\&= \frac{6}{3}\end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_{n+1} - v_n = 2$$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et son premier terme est :

$$\begin{aligned}v_0 &= \frac{3}{1 + u_0} \\&= \frac{3}{1 + 0} \\&= \frac{3}{1}\end{aligned}$$

d'où :

$$v_0 = 3$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{3}{1 + u_n} &\iff 1 + u_n = \frac{3}{v_n} \quad (\text{car } 1 + u_n \neq 0 \text{ et } v_n \neq 0) \\&\iff u_n = \frac{3}{v_n} - 1\end{aligned}$$

puisque (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 alors :

$$v_n = v_0 + 2(n - 0)$$

d'où :

$$v_n = 3 + 2n$$

d'où :

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{3}{3 + 2n} - 1 \\&= \frac{3 - (3 + 2n)}{3 + 2n} \\&= \frac{3 - 3 - 2n}{3 + 2n}\end{aligned}$$

donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{-2n}{3+2n}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:
on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{3+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{n \left(\frac{3}{n} + 2 \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\frac{3}{n} + 2} \\ &= \frac{-2}{0+2} \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \right) \\ &= \frac{-2}{2} \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

4 a Soit $n \in \mathbb{N}$
on a :

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{e^{3-v_{n+1}}}{e^{3-v_n}} \\ &= \frac{e^3 \times e^{-v_{n+1}}}{e^3 \times e^{-v_n}} \\ &= \frac{e^{-v_{n+1}}}{e^{-v_n}} \\ &= \frac{1}{e^{v_{n+1}-v_n}} \\ &= \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{e^2} \quad (\text{car } v_{n+1} - v_n = 2)$$

d'où (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e^2}$ et son premier terme est :

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{3-v_0} \\ &= e^{3-3} \\ &= e^0 \end{aligned}$$

donc :

$$w_0 = 1$$

b Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:
on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_0 + w_1 + \dots + w_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} w_0 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n-0+1}\right)}{1 - \frac{1}{e^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{e^2 - 1}{e^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{e^2 - 1}{e^2}}\end{aligned}$$

puisque $-\frac{1}{e^2} < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1} = 0$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1 - 0}{\frac{e^2 - 1}{e^2}}$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e^2}{e^2 - 1}$$