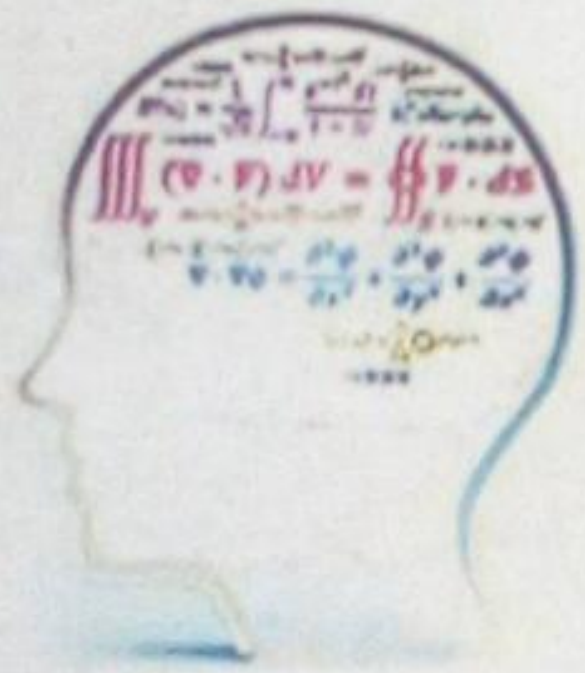


Par
Mr Séverin Bokambelabisso
Professeur Certifié

Fort en Mathématiques



L'Essentiel du Cours + Rappel des Formules
Exercices + Corrigés

Activités Numériques
& Activités Géométriques
Mon Passeport pour la Première

Quelques formules importantes à retenir

1- Amplitude, centre et rayon d'un sous-ensemble borné

Soient a et b deux nombres réels tel que $a \leq x \leq b$.

1-1) L'amplitude (A)

$$A = b - a$$

1-2) Le rayon (R)

$$R = \frac{b - a}{2}$$

ou

$$R = \frac{A}{2}$$

1-3) Le centre (C)

$$C = \frac{a + b}{2}$$

2- Les puissances d'un réel

$\forall a, b \in \mathbb{R}^*$; $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$$a^n = a \times a \times a \dots \times a$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; \sqrt{a} = a^{1/2} ; \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} ;$$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a \times b} = (a \times b)^{1/n} ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

3- Les racines carrées

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a ; \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} -a & \text{si } a \leq 0 \\ +a & \text{si } a \geq 0 \end{cases} ; \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } b \neq 0 ;$$

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = (a \times c)\sqrt{b \times d}$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

avec $c^2 = a^2 - b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b}$

$$\sqrt{a + k\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

$$\sqrt{a - k\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

avec $c^2 = a^2 - k^2 \times b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - k^2 \times b}$
où $k \in \mathbb{R}^+$

4- Les identités remarquables

\forall les réels a et b , on a:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) ;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4- La valeur absolue d'un réel

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ +x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|-x| = |x|; \quad |x|^2 = |x^2| = x^2$$

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ avec } y \neq 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|; \quad |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|;$$

$$|x| = a (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = +a \end{cases}$$

$$|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = y \end{cases}$$

4-1) Transformation d'une écriture contenant la valeur absolue en un intervalle

$\forall a \in \mathbb{R}; \forall r \in \mathbb{R}_+^*$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in]-a; a[$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow x \in [-a; a]$$

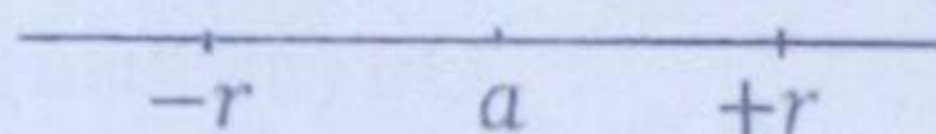
$$|x - a| < r \Leftrightarrow x \in]a - r; a + r[$$

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

$$|x - a| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r[\cup]a + r; +\infty[$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$$

NB : L'intervalle $[a - r; a + r]$ est appelé intervalle fermé de centre a et de rayon r .



4-2) Distance entre deux réels x et y

$$d(x; y) = |x - y| \quad \text{ou} \quad d(x; y) = |y - x|$$

$$d(x; y) \geq 0 \quad ; \quad d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad ;$$

$$d(x; y) = d(y; x)$$

Alors $d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$

5- Les équations et inéquations irrationnelles dans \mathbb{R}

5-1) Les équations irrationnelles

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes, on a :

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

5-2) Les inéquations irrationnelles

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} S_1$$

Ou (inclusif)

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} S_2$$

Alors $S = S_1 \cup S_2$

$$\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$$

6- Les inéquations avec valeur absolue

$$|A(x)| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \leq k \\ -A(x) \leq k \end{cases} \text{ avec } k > 0$$

$$|A(x)| \leq |B(x)|$$

Pour résoudre une telle inéquation, on peut utiliser successivement les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} |A(x)| \leq |B(x)| &\Leftrightarrow [A(x)]^2 \leq [B(x)]^2 \\ &\Rightarrow [A(x)]^2 - [B(x)]^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow [A(x) - B(x)][A(x) + B(x)] \leq 0 \end{aligned}$$

En fin, on utilise les méthodes habituelles

7- Les équations du second degré dans \mathbb{R}

7-1) Définition ; Une équation du second degré à une inconnue est une expression de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels et } a \neq 0.$$

7-2) Forme canonique du trinôme du second degré

$$ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$

Alors
$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

7-3) Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre cette équation on calcule le discriminant noté Δ qui se lit « delta ».

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Discussion

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépendent du signe du nombre réel Δ .

1^{er} cas : Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes x' et x'' telles que : $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\text{Alors } S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

2^{ème} cas : Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double telle que : $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$

$$\text{Alors } S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

3^{ème} cas : Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

$$\text{Alors } S = \emptyset \quad \text{ou} \quad S = \{ \}$$

7-4) Factorisation de trinôme $ax^2 + bx + c$

$$\text{1^{er} cas} : \text{Si } \Delta > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x') (x - x'')$$

$$\text{2^{ème} cas} : \text{Si } \Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$

Ou

$$ax^2 + bx + c = a(x - x'')^2$$

3^{ème} cas : Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de factorisation.

7-5) Somme et produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c$

a- Somme des racines (S)

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

b- Produit des racines (P)

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

c- Equation et signe des racines d'une équation du second degré

a- Existence des racines

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes

$$x' \text{ et } x'' \left(x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine réelle double

$$(x' = x'' = \frac{-b}{a}).$$

- Si $\Delta < 0$, les racines n'existent pas.

b- Signe des racines

Les racines d'une équation du second degré existent lorsque $\Delta > 0$.

P et S permettent de connaître le signe des racines x' et x'' sans les calculer.

$$\text{-Si } \left[\begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{Les deux racines sont de signes} \\ \text{Contraires} \\ P < 0 \text{ (} x' < 0 < x'' \text{ ou } x'' < 0 < x') \end{array} \right.$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont de signes contraires et la} \\ P < 0 \quad \text{plus grande en valeur absolue est } \mathbf{positive} \\ S > 0 \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont de signes contraires ; la} \\ P < 0 \quad \text{plus grande en valeur absolue est } \mathbf{négative} \\ S < 0 \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont de même signe} \\ P > 0 \quad (x' < x'' < 0 \text{ ou } 0 < x' < x'') \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont } \mathbf{positives} \\ P > 0 \quad (0 < x' < x'') \\ S > 0 \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont } \mathbf{négatives} \\ P > 0 \quad (x' < x'' < 0) \\ S < 0 \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{l'une des racines est } \mathbf{nulle} \text{ et l'autre} \\ P = 0 \text{ est égale à } -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{l'une des racines est l'} \mathbf{inverse} \text{ de l'autre} \\ P = 1 \end{cases}$$

$$\text{-Si } \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{les deux racines sont } \mathbf{opposées} \text{ l'une de l'autre} \\ S = 0 \quad (x' = -x'') \text{ ou } (x'' = -x') \end{cases}$$

7-7) Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine, il a le signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a sauf pour la valeur $x = -\frac{b}{2a}$ où il s'annule.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	()	Signe de a

- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a pour les valeurs de x à l'extérieur des racines et du signe contraire de a pour les valeurs de x à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	()	()	Signe de a
		Signe contraire de a		

8- Les vecteurs du plan

8-1) Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

NB : Le réel k est appelé coefficient de colinéarité ou coefficient de dépendance.

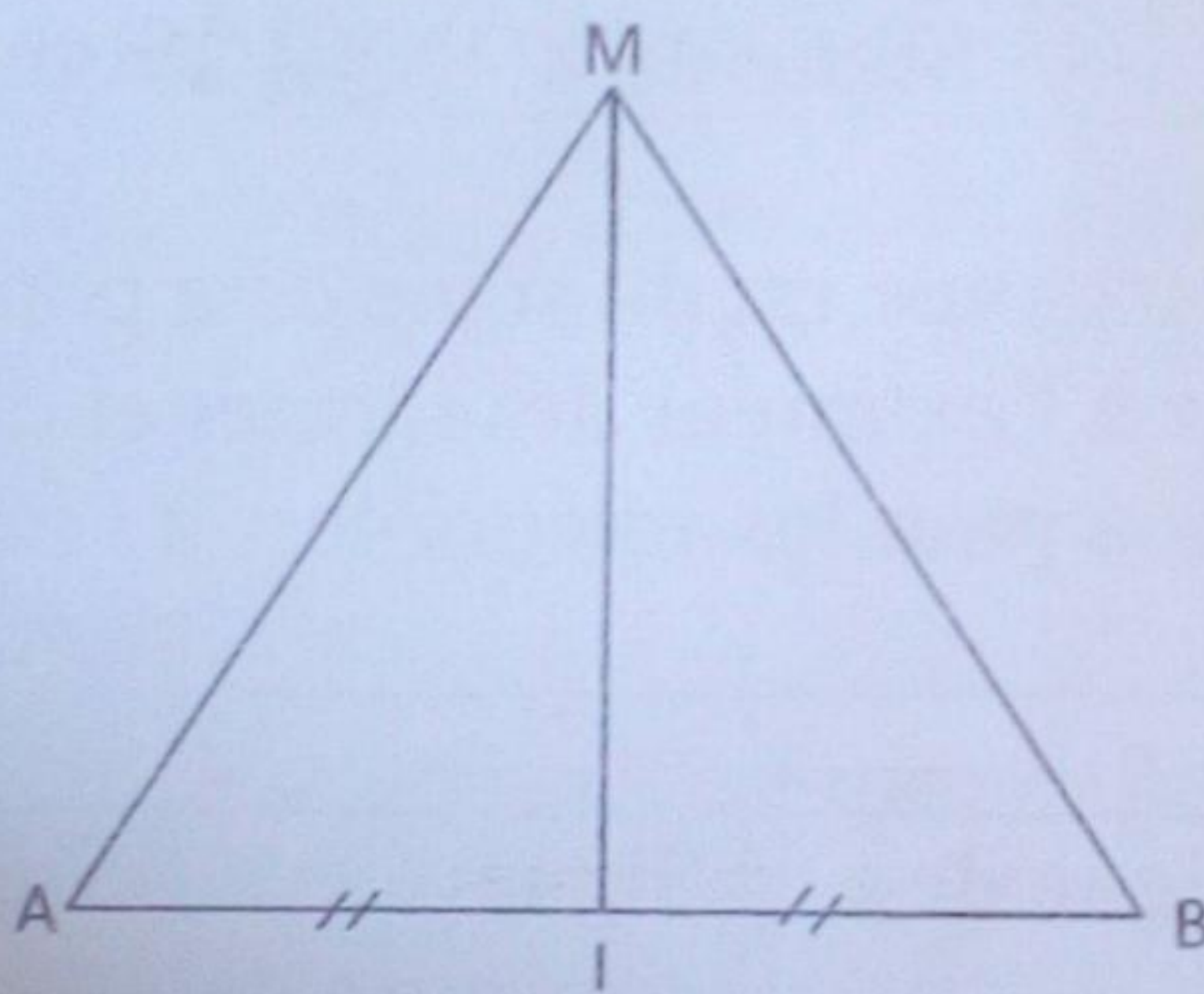
8-2) Les droites parallèles

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles \Leftrightarrow les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires c-à-d $\exists k \in \mathbb{R}^* / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

8-3) Les points alignés

Trois points A, B et C sont alignés \Leftrightarrow les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires c-à-d $\exists k \in \mathbb{R}^* / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

8-4) Milieu d'un segment dans un triangle



$$\boxed{\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \quad \boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}}$$

8-5) Combinaison linéaire de vecteurs

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Le vecteur \vec{w} est combinaison linéaire des vecteurs

\vec{u} et \vec{v} s'il existe deux réels α et $\beta \in \mathbb{R}^2 / \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

9- Produit Scalaire

9-1) Produit scalaire de deux vecteurs à l'aide d'un angle

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Le produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

NB : -Le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit « \vec{u} scalaire \vec{v} ».

- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

9-2) Produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} à l'aide des normes

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

9-3) Produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} à l'aide de l'expression analytique

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

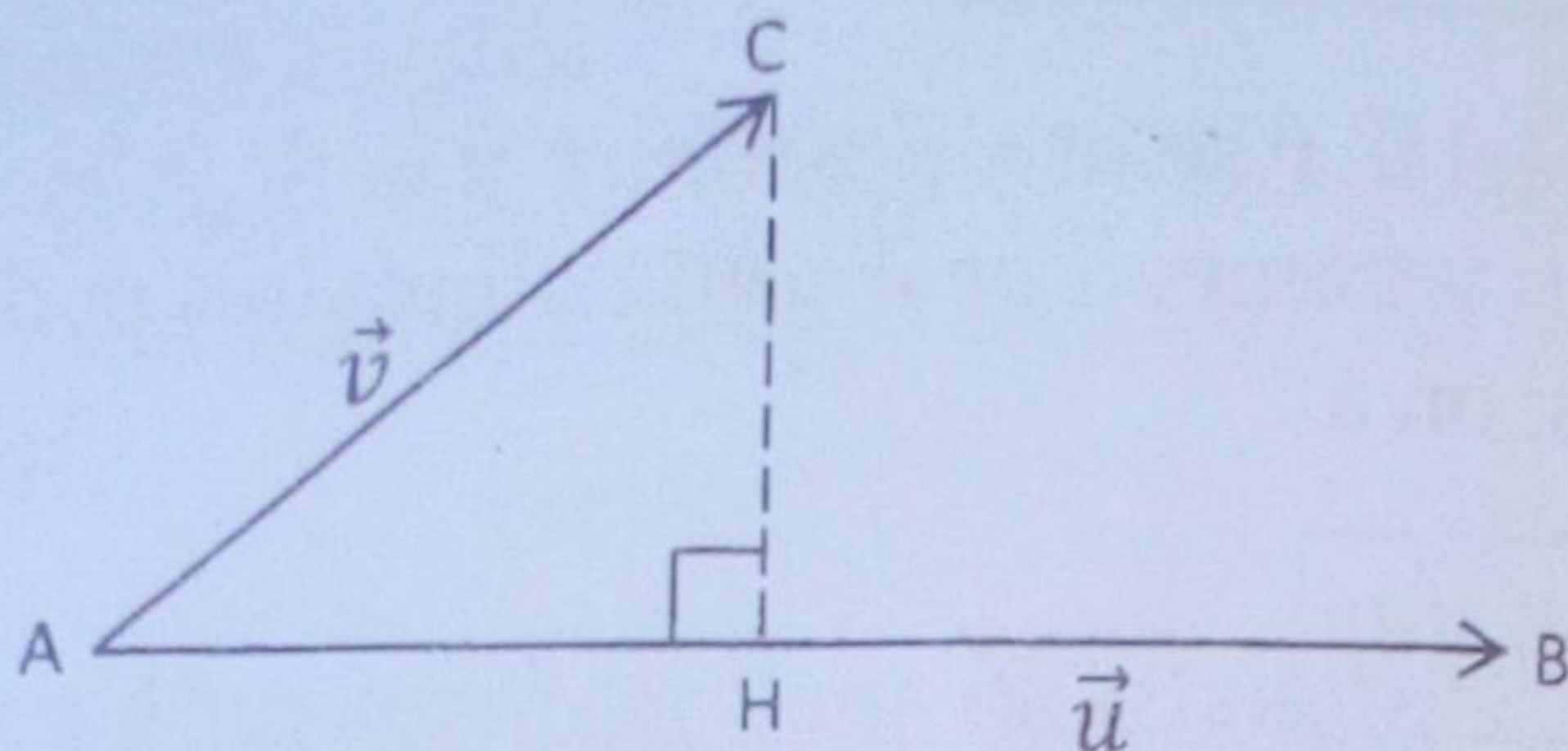
Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Remarque : si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

donc $xx' + yy' = 0$

9-4) Produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} à l'aide de la projection orthogonale



Avec H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

NB : Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont de sens contraires, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \times \overline{AH}$$

9-5) Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{On a : } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Où $\|\vec{u}\|$ se lit « norme de vecteur u ».

NB : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

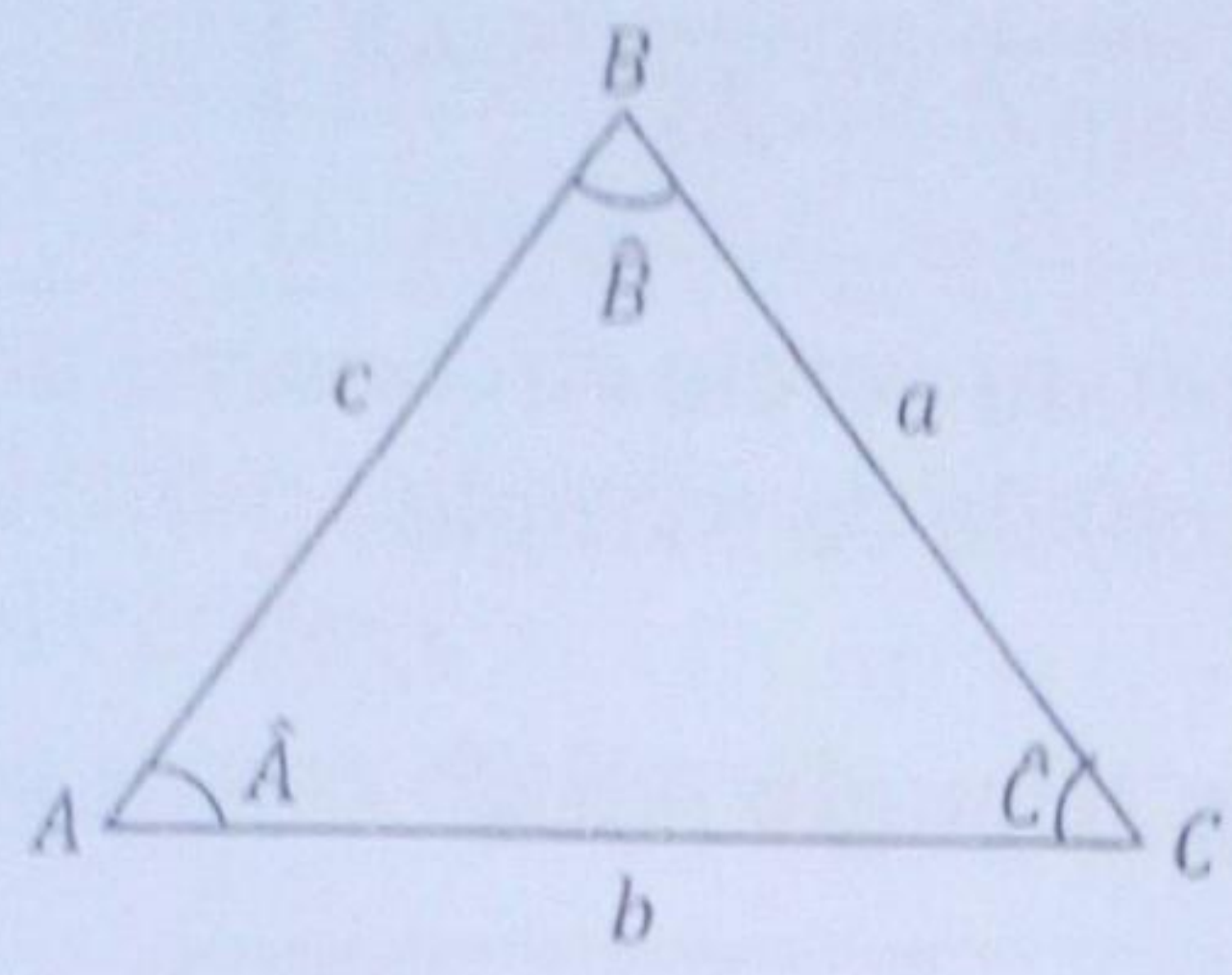
9-6) Distance d'un point à une droite définie par son équation cartésienne

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan et $(\Delta): ax + by + c = 0$ une droite d'équation cartésienne.

On a : $d(A, \Delta) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

9-7) Théorème d'AL-KASHI ou théorème des cosinus

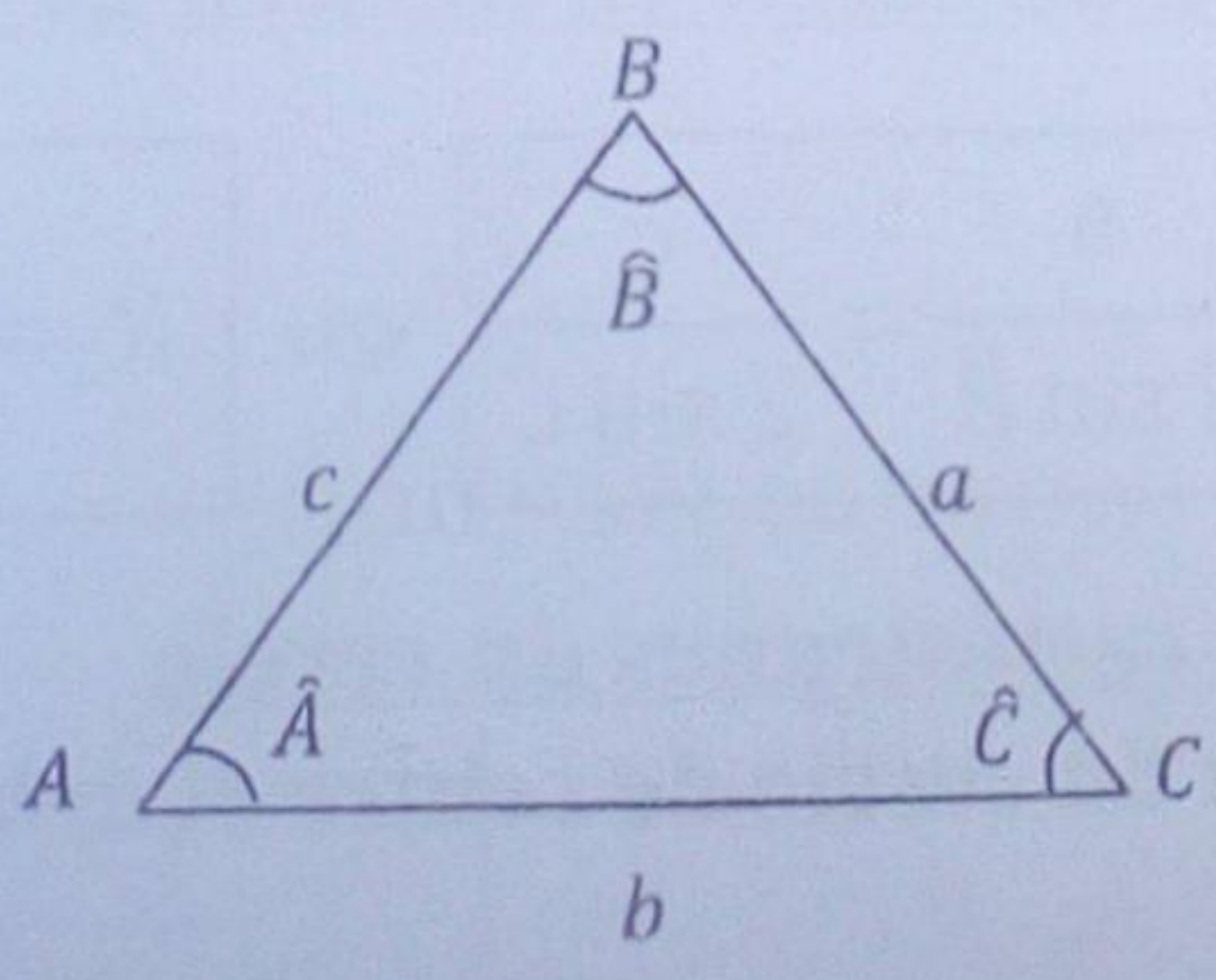
Soit ABC un triangle avec $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

9-8) Théorème des sinus



$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2S} = 2R$$

Ou

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

Où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et S l'aire (surface) de ce triangle.

Calcul d'aire du triangle ABC

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

ou

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

Ou encore

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

Calcul du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

$$R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} = \frac{b}{2 \sin \hat{B}} = \frac{c}{2 \sin \hat{C}}$$

ou

$$R = \frac{abc}{4S}$$

9-9) Equations cartésiennes du cercle

a) Equation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon R

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2S} = 2R$$

Ou

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

Où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et S l'aire (surface) de ce triangle.

Calcul d'aire du triangle ABC

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$

Ou encore

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

Calcul du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

$$R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} = \frac{b}{2 \sin \hat{B}} = \frac{c}{2 \sin \hat{C}} \quad \text{ou} \quad R = \frac{abc}{4S}$$

9-9) Equations cartésiennes du cercle

a) Equation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ou

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

En posant $A = -2a$; $B = -2b$ et $C = a^2 + b^2 - R^2$

On a : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Cette relation définit la forme générale de l'équation cartésienne d'un cercle.

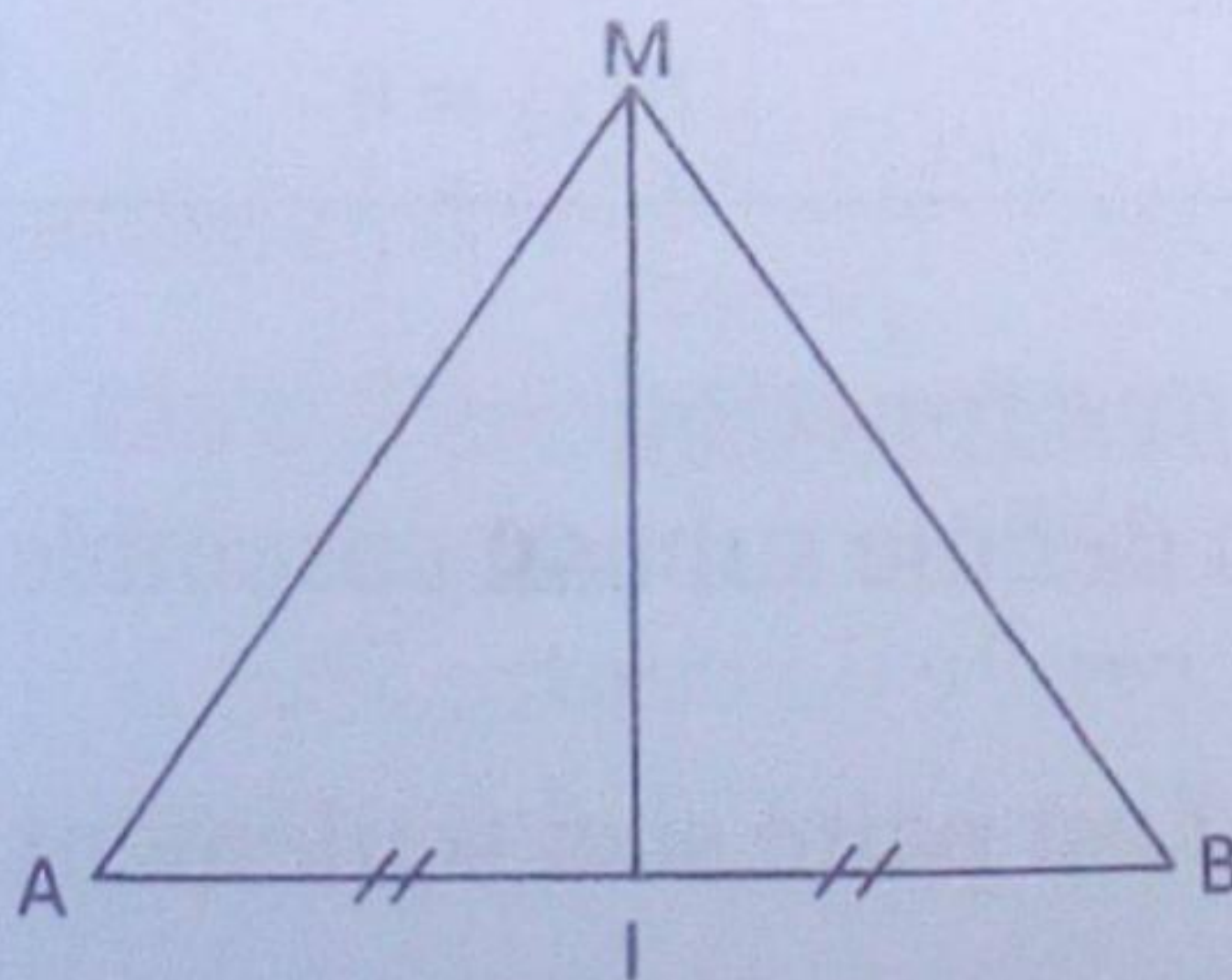
• Calcul du rayon du cercle

$$C = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

b) Equation du cercle de diamètre [AB] avec
 $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

On a : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

9-10) Théorème de la médiane



Soient A et B deux points du plan et I milieu du segment [AB]. Alors pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Où MI est la médiane du triangle ABM.

10- Les fonctions numériques

10-1) Ensemble de définition d'une fonction

Fonctions	Conditions d'existence
polynôme	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$
$f(x) = \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}}$	$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ et $B(x) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \times B(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

10-2) La parité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition E_f .

- La fonction f est paire si et seulement si

$$\forall x \in E_f, \forall (-x) \in E_f / f(-x) = f(x)$$

- La fonction f est impaire si et seulement si

$$\forall x \in E_f, \forall (-x) \in E_f / f(-x) = -f(x)$$

10-3) La monotonie d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$.

- La fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in I$ avec $x_1 < x_2$

On a :
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

- La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in I$ avec $x_1 < x_2$

On a :
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

- La fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in I$ avec $x_1 < x_2$

On a :
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

NB : Le nombre réel $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est appelé taux de variation ou taux d'accroissement.

Sujet n°1

Ex 1 :

que signifie les ensembles suivants : $a \in \mathbb{N}$ et D_a avec $a \in \mathbb{R}$

déterminer les ensembles suivants : $4 \mathbb{N}$; $6 \mathbb{N}$; D_{12} et D_{18}

déterminer les ensembles A et B suivants :

$$A = 4 \mathbb{N} \cap 6 \mathbb{N} \text{ et } B = D_{12} \cap D_{18}$$

calculer ensuite PPCM (4 ; 6) et PGCD (12 ; 18).

déterminer le nombre de diviseurs que contient l'ensemble D_{28}

Ex 2 : Déterminer :

le PGCD et le PPCM des nombres 3150 et 6468.

le PGCD et le PPCM des nombres 6 ; 12 et 150.

Ex 3 : On donne deux nombres X et Y tels que :

$$X = 321321321321321 \dots$$

$$Y = 21321321321321 \dots$$

Montrer que $x = -1 - y$

Le nombre Y est-il rationnel ou irrationnel ?

Justifiez votre réponse.

Donner l'écriture fractionnaire de Y.

Déduire celle de X.

Ex 4 : Calculer et donner l'écriture décimale puis scientifique de A tel que :

$$A = \frac{10^2 \times 1,7 \cdot 10^2}{10^5 \times 10^3}$$

Exercice 5 : Comparer les réels suivants :

a) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ et $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{4 - \sqrt{7}}$ et $\sqrt{4 + \sqrt{7}}$

c) $\frac{3}{7}$ et $\frac{3+\sqrt{7}}{7}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ et $\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}}}{\sqrt{5+\sqrt{11}}}$

e) $5\sqrt{13}$ et 18.

Sujet n°2

Exercice 1 :

On donne le nombre $X = 2,323232\dots$

1) Montrer que X peut s'écrire sous la forme $X = 2 + \frac{a}{b}$
Déterminer a

2) On pose $Y = 0,323232\dots$

Donner une écriture fractionnaire de Y

3) En déduire l'écriture fractionnaire de X.

Exercice 2 :

a et b sont deux réels tels que : $a = 2 - 2\sqrt{2}$ et

$$b = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

1) Comparer a et b

En déduire le signe de a

2) a- Calculer a^2 et b^2

b- Etablir une relation entre a^2 et b^2

c- Déduire de ce qui précède, une relation entre a et b.

Exercice 3 :

1) Montrer que 137 est un nombre premier.

- 2) a- Donner l'ensemble des diviseurs de 137 et de 37.
 b- Donner l'ensemble des diviseurs communs à 137 et 37
 c- Déduire le PGCD (137 ; 37).
 Que peut-on dire des nombres 137 et 37 ?
 3) Donner l'écriture fractionnaire de $X = 2,18181818\dots$

Exercice 4 :

On donne l'intervalle $K = [-7; 6]$
 Calculer l'amplitude, de rayon et le centre de l'intervalle K.

Exercice 5 :

On donne le nombre $X = 0,07070707\dots$

- 1) Montre que $X = \frac{7}{99}$ si et seulement si $100x = 7 + X$
 2) Préciser pour x :
 a) La période ;
 b) La longueur ;
 c) La troncature décimale d'ordre 4 ;
 d) L'arrondi d'ordre 3.

Sujet n°3

Exercice 1 :

Soient A, B et C trois points non alignés du plan (P).

- 1) Construire le point M du plan (P) tel que :
 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
 2) Exprimer alors \overrightarrow{CM} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

- 3) D et E sont les points du milieu de $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$. Quel quadrilatère ADME ?
 4) Construire le point N du plan tel que $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$.
 5) Exprimer \overrightarrow{CN} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 des points N, C et M ?

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle.

- 1) Placer les points A et E tels que \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
 2) Exprimer le vecteur \overrightarrow{AE} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 3) Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires. En déduire la dépendance.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle.

- Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
 1) Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
 2) Les points T et S sont les milieux des segments [MN] et [BC].
 Démontrer que les points T, S et A sont alignés.

Sujet n°4

nombre $x = 3,571428571428571428 \dots$
est-il rationnel ou irrationnel ?
Donner la réponse.

Montrer que :

pour x :

écriture décimale d'ordre 3 ;

li d'ordre 5.

l'écriture fractionnaire de x ;

que le PGCD (3571425 ; 999999) =

montrer que $x = \frac{25}{7}$.

les égalités suivantes :

$$8^{11} \times (\sqrt{7} - \sqrt{8})^9 = 4\sqrt{14} - 15$$

$$\sqrt{72} + \sqrt{11 + \sqrt{72}} = 6$$

l'aide d'intervalles : $d(x; -1) \leq \frac{5}{2}$

l'aide de la notation valeur absolue :
 $5] \cup [3; +\infty[$

gle.

es points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} =$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BA}$$

le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB}$. Quelle
du quadrilatère AQDC ?

3. Exprimer les valeurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{FC} en fonction des
vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

4. Montrer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$. Que dire des points A, E
et D ?

5. Quelle est la position relative des droites (FC) et
(AE) ?

Sujet n°5

Exercice 1 :

A tout réel m , on associe la droite

$$(D_m): (2m - 1)x + (3 - m)y - 7m + 6 = 0$$

1) Montrer que pour tout réel m , (D_m) est une droite.

2) Déterminer m pour que :

a) (D_m) passe par le point A(1 ; 2) ;

b) (D_m) soit parallèle à l'axe (ox) ;

c) (D_m) soit parallèle à l'axe (oy) ;

d) (D_m) passe par l'origine des axes ;

e) (D_m) ait pour coefficient directeur 3 ;

f) (D_m) soit parallèle à la droite

$$(\Delta): 2x - 3y + 1 = 0;$$

g) (D_m) soit perpendiculaire à la droite

$$(\Delta): 2x - 3y + 1 = 0.$$

3) Déterminer les coordonnées du point
d'intersection de (D_1) et de $(\Delta): 2x - 3y + 1 = 0$.

4) Donner une représentation paramétrique de la
droite (D') perpendiculaire à la droite (D_1) et
passant par le point B(2; -3).

5) Montrer que (D_m) passe par un point fixe que
l'on précisera les coordonnées.

6) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') passant par le point $C(1; -2)$ et parallèle à la droite $(\Delta) : 2x - 3y + 1 = 0$. Donner sa représentation paramétrique.

7) On donne la représentation paramétrique de la droite

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = -\lambda + 3 \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Donner l'équation cartésienne de la droite (Δ') ;

b) En déduire ses vecteurs directeur et normal.

Exercice 2 :

Soit un système de points pondérés

$$\{(A, 2); (B, -4); (C, 6)\}.$$

1) Former la fonction de LEIBNIZ $\overrightarrow{f(M)}$ associée à ce système.

2) Exprimez $\overrightarrow{f(A)} - \overrightarrow{f(B)}$ en fonction de \overrightarrow{AB} puis

$$\overrightarrow{f(B)} - \overrightarrow{f(C)} \text{ en fonction de } \overrightarrow{BC}.$$

3) Montrer que \vec{f} est bijective et que $G : \text{bary}\{(A, 2); (B, -4); (C, 6)\}$ Existe.

4) Soit $G' : \text{bary}\{(B, -4); (C, 6)\}$, démontrer que

$$\overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MG'} + 2\overrightarrow{G'A}.$$

5) Déterminer deux réels x et y pour que $G : \text{bary}\{(A, x); (B, y)\}$ et $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Sujet n°6

Exercice 1 : ABC est un triangle quelconque tels que

$$BC = a = 4 \quad AC = b = 3 \quad AB = c = 2$$

- Déterminer $\cos \hat{A}$; $\cos \hat{B}$; et $\cos \hat{C}$
- En déduire les valeurs en degré des angles \hat{A} ; \hat{B} et \hat{C}
- Calculer $\sin \hat{A}$; $\sin \hat{B}$; et $\sin \hat{C}$
- Calculer le rayon de cercle circonscrit au triangle ABC.
- Calculer la surface et le périmètre du triangle ABC.
- Soit A' le milieu du segment $[BC]$. Calculer la longueur de la médiane AA' .

Exercice 2 : Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans suivants :

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2} - 1$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{3} - 1$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

b) $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 3 : On donne les expressions $X = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y}}$

$$\text{Et } Y = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$$

On suppose que x et y sont des nombres rationnels positifs tel que $x^2 - y \geq 0$.

1) Vérifier que $X = Y$

2) On pose $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

a) Calculer $A^2 + B^2$ puis $A \times B$.

b) Déduire le calcul de $(A + B)^2$ et $A + B$.

ACTIVITES NUMERIQUEExercice 1 :

On donne $f_m(x) = x^2 - 3x + 2(m+1)$

- Résoudre suivant les valeurs de m l'équation $f_m(x) = 0$
- Ecrire $f_m(x)$ sous la forme canonique.
- Pour $m = 0$, factorise $f_0(x)$ et étudier son signe.
- Déterminer si possible, le réel m pour que l'on ait : $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 3$.

Exercice 2 :

- Résoudre dans \mathbb{R} les équations et l'inéquation ci-après :
 - $\sqrt{1+x} - \sqrt{3x-4} = 0$; b) $\frac{x^2-4x+3}{x^2+16} \leq 0$;
 - $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
- Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système d'équation suivant ci-après :

$$\begin{cases} 3mx + (m-2)y = m-1 \\ (6m+1)x + 2my = 3m+1 \end{cases}$$

ACTIVITES GEOMETRIQUES :Exercice 3

Soit $(D_m): (1+m)x + (1-m)y - 3 - m = 0$.

- Déterminer m pour (D_m) :
 - Ait pour pente 2.
 - Passes sur l'origine du repère.
 - Soit parallèle à la droite $(\Delta): 2x - 3y + 5 = 0$.

d) Soit perpendiculaire à la droite $(D): 2x - 2y + 1 = 0$.

- Montrer que (D_m) admet un point fixe I que l'on déterminera.

Exercice 4 :

On considère un triangle ABC de côté 3cm. A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$.

Calculer les produits scalaires :
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$; $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$; $\vec{AA} \cdot \vec{AB}$; $\vec{BA} \cdot \vec{BB}'$.

Exercice 5 :

ABC est un triangle, on désigne par G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,4)$, et $(C,-3)$.

- Construire le point I barycentre des points pondérés $(B,4)$ et $(C,-3)$.
 - Montrer que $\vec{GA} + \vec{GI} = 0$. Déduire la position du point G sur la droite (AI) .
- Donner les coordonnées du point G lorsque $A(1,2)$, $B(2,-1)$ et $C(-1,-1)$.
- Démontrer que $\forall m \in \mathbb{P}$, on a :
 $\vec{MA} - 4\vec{BM} - 3\vec{MC} = 2\vec{MG}$

Sujet n°8I- Activités Numériques :Exercice 1 :

Les racines x' et x'' de l'équation paramétrique du deuxième degré vérifient les relations suivantes :

$$(E) \begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ (mx'' - 1)x' = 1 + x'' \end{cases}$$

1. Qu'appelle-t-on équation du second degré ?
2. Former cette équation (E).
3. Discuter suivant les valeurs du paramètre m les solutions de l'équation (E).
4. On suppose que x' et x'' sont les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $\sqrt{2}$. Déterminer m.

Exercice 2 :

On considère l'équation paramétrique (E) telle que :

$$(E): x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 4m = 0.$$

On désigne par S et P respectivement la somme et le produit des racines de (E).

1. Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation (E).
2. a) Exprimer le produit P en fonction de la somme S.
b) En déduire une relation indépendante de m entre les racines x' et x'' de (E).
3. On considère l'équation $(E'): (2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 = 0$.

En utilisant les expressions de la somme et du produit des racines de (E'), calculer :

$$A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \text{ et } B = x'^2 + x''^2$$

Sujet n°9

I. Activités numériques

Exercice 1 :
Résoudre dans \mathbb{R} et discuter suivant les valeurs du paramètre m les équations et inéquations suivantes :

- a) $\begin{cases} (m^2 + 3m)x = m^2 - 9; \\ m > 2 \end{cases}$ b) $x - 5m > 2(1 + 3mx)$
c) $m^2x - 3 = x + 3m;$ d) $m^2x - 3 \geq x + 3m$

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes

- a) $\sqrt{1+x} = \sqrt{3x-3};$ b) $\sqrt{x^2-4} = x+3;$
c) $|5x-2| \geq |x-1|;$ d) $\frac{|3-5x|}{|x+2|} < 1;$
e) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3$

II. Activités géométrique

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les vecteurs $\vec{u}(m-1, 3)$ et $\vec{v}(3; -2)$

- a) Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient orthogonaux.
b) Calculer la norme de \vec{u} et \vec{v} .

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne les points $A(3, -2); B(1; 3)$ et $C(-4; 1)$

- a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$
b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 3 :

On donne le cercle (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$

- a) Caractériser le cercle (C).

Déterminer la distance du point $D(2; -2)$ par rapport à la droite $(\Delta): x - 2y + 3 = 0$
 Déterminer la puissance du cercle par rapport à un point $E(-1; 0)$.

Exercice 10

Activités Numériques

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$(1) \quad x^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1; \quad \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2};$$

$$< 3x - 2$$

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation

suivantes :

$$(2) \quad x + 2m - 3 = (2m + 5)x + 3 - m;$$

$$(1) \quad x - 6m + 9 \leq x \quad (m \in \mathbb{R})$$

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système d'équations suivant :

$$x - y = -m + 6$$

$$mx + (1 - m)y = 2m$$

Exercice 3 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0;$$

$$x^2 + 1 > 0; \quad -4x^2 + 4x - 1 < 0$$

Géométries

Exercice 1 :

Déterminer le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $2\lambda; -1 + \lambda$; et $2 + \lambda$

avec $\lambda \neq 0$

- 1) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le barycentre G existe ou (est défini)
- 2) Déterminer les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de λ
- 3) On pose $\lambda = -1$
 - a) Construire le barycentre G
 - b) Pour tout point M du plan, démontrer que $-2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MG}$

Exercice 5 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , considérer les droites (D) , (D') et (D_m) d'équations suivantes :

$$(D) \quad \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad (D') \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(D_m); mx + (m - 2)y + m - 1 = 0$$

- 1) Démontrer que les droites (D') et (D) sont perpendiculaires
- 2) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection ou de rencontre I
- 3) Déterminer la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D)
- 4) Déterminer la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à la droite (D)
- 5) Déterminer la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à la droite (D)

Sujet n°11

I. Activités numériques

Exercice 1 :

1. Qu'appelle-t-on Zéro ou racine d'un polynôme ?

2. Développer l'expression

$$A(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 5)$$

3. On considère le polynôme h défini par :
 $h(x) = x^3 - 19x - 30$

a) Quel est le degré de $h(x)$? Préciser son coefficient ?

b) Calculer $h(-3)$ puis conclure

c) Déterminer le polynôme q tel que

$$h(x) = (x + 3)q(x)$$

4. Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $h(x) = 0$;

b) En déduire les solutions de $h(x) \geq 0$

NB : $h(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 2 :

1. Du point de vue forme, quelle est la différence entre une équation et une inéquation ?

2. Dans une équation ou inéquation paramétrique, que représente :

a) m ?

b) x ?

3. Soit Δ_p , le déterminant principal d'un système : donner

a) La position éventuelle des droites, si $\Delta_p \neq 0$

b) Les deux positions possibles des droites, si $\Delta_p = 0$

4. Résoudre dans \mathbb{R} , les équations et inéquations suivantes :

a) $x = x$

b) $\frac{x}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 1$

c) $(2m + 1)x + 2mx + 25m + 12 = (m + 3)x + 6$

d) $|x - 4| - |x + 5| = x - 1$

e) $|2m + 1| < |x|$

Exercice 3 :

1. Résoudre dans \mathbb{R}^2 , le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

Donner l'interprétation géométrique de ce système.

2. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} 3(x - 1)^2 + 2y^2 = 14 \\ 2(x - 1)^2 - 3y^2 = 5 \end{cases}$$

II. Activités Géométriques

Exercice 1 :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A; m^2)$ et $(B; 4)$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m :

a) Le point G est isobarycentre des points A et B

b) Le point G existe ?

2. G est-il à l'intérieur du segment $[AB]$? Pourquoi ?

Exercice 2 :

1. Est-ce que le barycentre d'un système est une relation vectorielle ou un point ?

2. On considère dans le plan P , les points distincts A , B et C . M un autre point tel que :

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

a) Montrer que le point M est barycentre des points A , B et C affectés des coefficients que l'on précisera.

b) Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction des vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} .

3. a- Exprimer \overrightarrow{AG} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

- b. En déduire les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
4. a- Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM}$
 b- En déduire une construction des points G et M.
 5. Soit $f(\vec{M}) = 3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, une fonction vectorielle de Leibniz, f est-elle une application bijective ?

Sujet n°12

I. Activités numériques

Exercice N°1 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

- 1) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$; 2) $\frac{1-2x}{x} < 4$;
- 3) $\sqrt{x+2} \geq 4$; 4) $|6-3x| - 9 = 0$

Exercice N°2 :

Soit l'équation d'inconnue x

$$(E): (m-2)x^2 - 2(m+3)x + 5m = 0$$

- 1) Pour quelle valeur de m l'équation (E) est-elle du premier degré ?
- 2) Pour quelles valeurs de m l'équation (E) est-elle du second degré ?
- 3) Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle une solution double ?
- 4) Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle deux solutions distinctes ?
- 5) x' et x'' étant les solutions de (E), calculer $S = x' + x''$ et $P = x' \cdot x''$ en fonction du paramètre m.
- 6) Pour $m=0$, résolvez dans \mathbb{R} l'équation (E).

II. Activité

Exercice N°1 :

- ABCD est un trapèze
- 1) Faire la
 - 2) Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA}$

Résolution sujet n°1

Solution 1 :

1) **Signification de :**

$a\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de a .

D_a est l'ensemble de diviseurs de a .

2) **Déterminons les ensembles :**

$$4\mathbb{N} = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; \dots\}$$

$$6\mathbb{N} = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; \dots\}$$

$$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

3) **Déterminons les ensembles A et B :**

$$A = 4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N} = \{0; 12; 24; \dots\}$$

$$B = D_{12} \cap D_{18} = \{1; 2; 3; 6\}$$

4) **Calculons ensuite :**

$$\text{PPCM}(4; 6) = 12 \text{ et } \text{PGCD}(12; 18) = 6$$

5) **Déterminons le nombre de diviseurs que contient l'ensemble D_{28}**

$$D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$$

Donc l'ensemble D_{28} contient 6 diviseurs.

Solution 2 :

$$\text{a) } 3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \text{ et } 6468 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$$

$$\text{PGCD}(3150; 6468) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

$$\text{PPCM}(3150; 6468) = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 5^2 \times 11 =$$

$$485100$$

$$\text{b) } 6 = 2 \times 3$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$150 = 2 \times 5^2 \times 3$$

$$\text{PGCD}(6; 12; 150) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{PPCM}(6; 12; 150) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$$

Solution 3 :

$$X = -1,321321321321 \dots$$

$$Y = 0,321321321321 \dots$$

a) Montrons que $X = -1 - Y$

$$X = -1,321321321 \dots$$

$$= -1(1,321321321 \dots)$$

$$= -(1 + 0,321321 \dots) = -(1 + Y)$$

$$\text{Donc } X = -1 - Y$$

b) Le nombre $Y = 0,321321321 \dots$ est rationnel car il admet un développement illimité périodique.

c) Écriture fractionnaire de Y

$$Y = 0,321321321321 \dots$$

$Y = \frac{P}{10^L - 1}$ avec $P = 321$ et $L = 3$; P : la période et L : la longueur de la période.

$$Y = \frac{321}{10^3 - 1} = \frac{321}{1000 - 1} = \frac{321}{999} = \frac{3 \times 107}{3 \times 333} = \frac{107}{333}$$

d) Déduisons l'écriture fractionnaire de X

$$X = -1 - Y = -1 - \frac{107}{333} = \frac{-333 - 107}{333} = \frac{-440}{333}$$

Solution 4 :

Calculons et donnons l'écriture décimale puis l'écriture scientifique de A

$$A = \frac{2,6 \cdot 10^2 \times 1,7 \cdot 10^2}{0,2 \cdot 10^5 \times 10^3} = \frac{2,6 \times 1,7 \cdot 10^{2+2}}{0,2 \cdot 10^{5+3}} = \frac{4,42 \cdot 10^4}{0,2 \cdot 10^8}$$

$$\text{Écriture décimale : } A = 22,1 \cdot 10^{4-8} = 22,1 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Écriture scientifique : } A = 2,21 \cdot 10^{-3}$$

Solution 5 :

Comparaison des réels

a) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ et $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{10}$$

$$\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$$

$$\text{Comme } \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2 = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$$

$$\text{Donc } \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

b) $\sqrt{4 - \sqrt{7}}$ et $\sqrt{4 + \sqrt{7}}$

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 = 4 - \sqrt{7} \text{ et } \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2 = 4 + \sqrt{7}$$

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 - \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2 = 4 - \sqrt{7} - 4 - \sqrt{7}$$

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 - \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2 = -2\sqrt{7} < 0$$

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 - \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2 < 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 < \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2$$

$$\text{Donc } \boxed{\sqrt{4 - \sqrt{7}} < \sqrt{4 + \sqrt{7}}}$$

c) $\frac{3}{7}$ et $\frac{3 + \sqrt{7}}{7}$

Les dénominateurs des deux fractions étant égaux comparons leurs numérateurs

$$3 < 3 + \sqrt{7} \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{3 + \sqrt{7}}{7}$$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ et $\frac{\sqrt{6 + \sqrt{11}}}{\sqrt{5 + \sqrt{11}}}$

$$\frac{\sqrt{11} - \sqrt{5}(\sqrt{6} + \sqrt{11})}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{11})} = \frac{\sqrt{66} - \sqrt{55}}{5 + \sqrt{55}} > 0$$

$$> \frac{\sqrt{6} + \sqrt{11}}{\sqrt{5} + \sqrt{11}}$$

8)²

e $X = 2 + a$

323232 ...

32 ...

naire de y

L = 2 ⇒

ionnaire de x

$$X = 2 + 0,323232 \dots \Rightarrow X = 2 + Y \text{ avec } Y = \frac{32}{99} \Rightarrow$$

$$X = 2 + \frac{32}{99} = \frac{198 + 32}{99} = \frac{230}{99}$$

Exercice 2 :

$$a = 2 - 2\sqrt{2} \text{ et } b = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

1) Comparons 2 et $2\sqrt{2}$

$$(2)^2 = 4 \text{ et } (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$$

$$4 < 8 \Rightarrow (2)^2 < (2\sqrt{2})^2 \text{ Donc } 2 < 2\sqrt{2}.$$

Déduisons le signe de a

$$a = 2 - 2\sqrt{2} \text{ or } 2 < 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow a < 0$$

2) a- Calculons a^2 et b^2

$$a^2 = (2 - 2\sqrt{2})^2 = (2)^2 - 2(2)(2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})^2 = 4 - 8\sqrt{2} + 8 \Rightarrow a^2 = 12 - 8\sqrt{2}$$

$$b^2 = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

b- Etablissons une relation entre a^2 et b^2

$$a^2 = 4(3 - 2\sqrt{2}) \text{ avec } b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$a^2 = 4b^2 \text{ ou } a^2 = (2b)^2$$

c- Déduisons une relation entre a et b

$$a^2 = (2b)^2 \Leftrightarrow a = 2b \Rightarrow a = 2b \text{ ou } \frac{a}{2} = b$$

Exercice 3 :

1) Montrons que 137 est un nombre premier

$$137 = 2 \times 68 + 1$$

$$137 = 5 \times 27 + 2$$

$$137 = 7 \times 19 + 4$$

$137 = 11 \times 12 + 5$; Comme la division euclidienne de 137 par tous les nombres premiers qui lui sont

supérieurs donne un reste non nul, donc 137 est un nombre premier.

a- Ensemble des diviseurs communs à 137 et 37
 $D_{137} = \{1; 137\}$ et $D_{37} = \{1; 37\}$

b- Ensemble des diviseurs communs à 137 et 37
 $D_{137} \cap D_{37} = \{1\}$

c- Déduisons le PGCD

PGCD (137 ; 37) = 1. Les nombres 137 et 37 sont premiers entre eux car PGCD (137 ; 37) = 1.

Ecriture fractionnaire de X

$$X = 2,181818 \dots = 2 + 0,181818 \dots = 2 + \frac{P}{10^L - 1}$$

avec $P = 18$ et $L = 2$

$$X = 2 + \frac{18}{10^2 - 1} = 2 + \frac{18}{99} = \frac{198 + 18}{99} = \frac{216}{99}$$

$$= \frac{9 \times 24}{9 \times 11} = \frac{24}{11}$$

exercice 4 :

$$K = [-7; 6]$$

conclusions

L'amplitude (A) : $K = [a; b] \Rightarrow A = b - a$

$$A = 6 + 7 = 13$$

Le rayon (R) : $R = \frac{b-a}{2} = \frac{A}{2} = \frac{13}{2}$

Le centre (C) : $C = \frac{b+a}{2} = \frac{-7+6}{2} = \frac{-1}{2}$

exercice 5 : $X = 0,070707 \dots$

Montrons que $X = \frac{7}{99}$ si et seulement si $100x = 7 + x$

$$100x = 7 + x \Rightarrow 100x - x = 7 \Rightarrow 99x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{99}$$

précisons pour x :

a) La période (p) : $X = 0,0707 \dots \Rightarrow P = 07$

b) Longueur (L) : $P = 07 \Rightarrow L = 2$

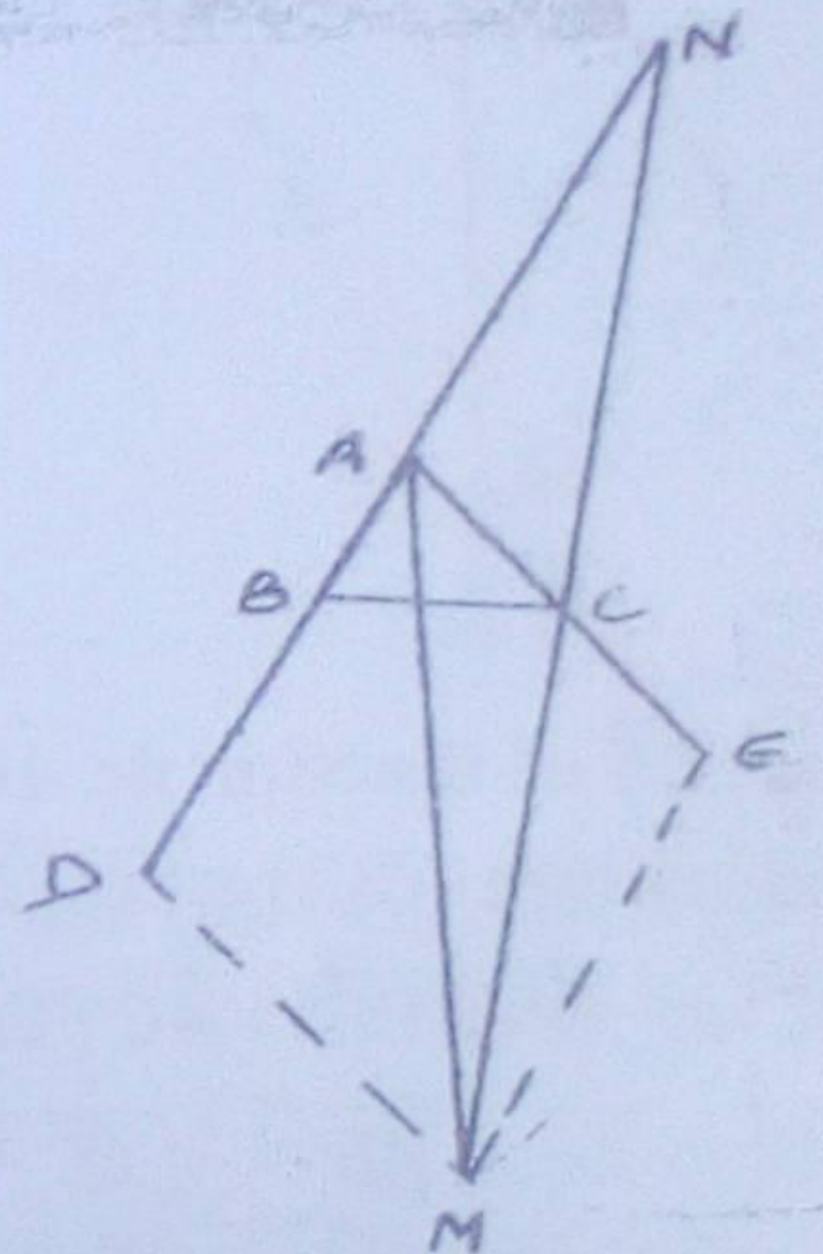
c) La troncature décimale d'ordre 4 de x est 0,0707.

d) L'arrondi de x d'ordre 3 est 0,071.

Résolution sujet n°3

Solution 1 : $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$

1.



2. Exprimons \vec{CM} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC}

$$\vec{AM} + \vec{MC} = \vec{AC} \text{ (Triangle AMC)} \Rightarrow \vec{CM} = \vec{AM} - \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{CM} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC} - \vec{AC} \Rightarrow \vec{CM} = 3\vec{AB} + \vec{AC}$$

3. Le quadrilatère ADME est un parallélogramme

4. Voir figure.

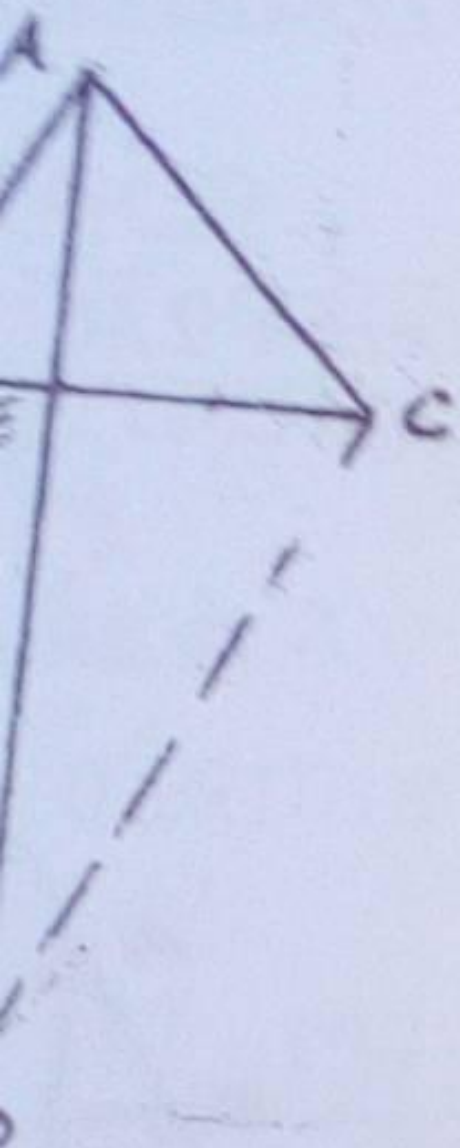
5. Exprimons \vec{CN} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC}

$$\vec{AN} = -3\vec{AB} \text{ Fixons le point C dans } \vec{AN}$$

$$\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{CN} = -3\vec{AB} \Rightarrow \vec{CN} = -3\vec{AB} - \vec{AC}$$

Les points N, C et M sont alignés.

$$\vec{E} = \frac{1}{3}\vec{BC}$$



onction de \vec{AB} et \vec{AC} .

(ABE) avec $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ (Triangle ABC)

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right)\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\frac{1}{3}(2\vec{AB} + \vec{AC})$$

\vec{AE} sont colinéaires

avec $k \in \mathbb{R}$

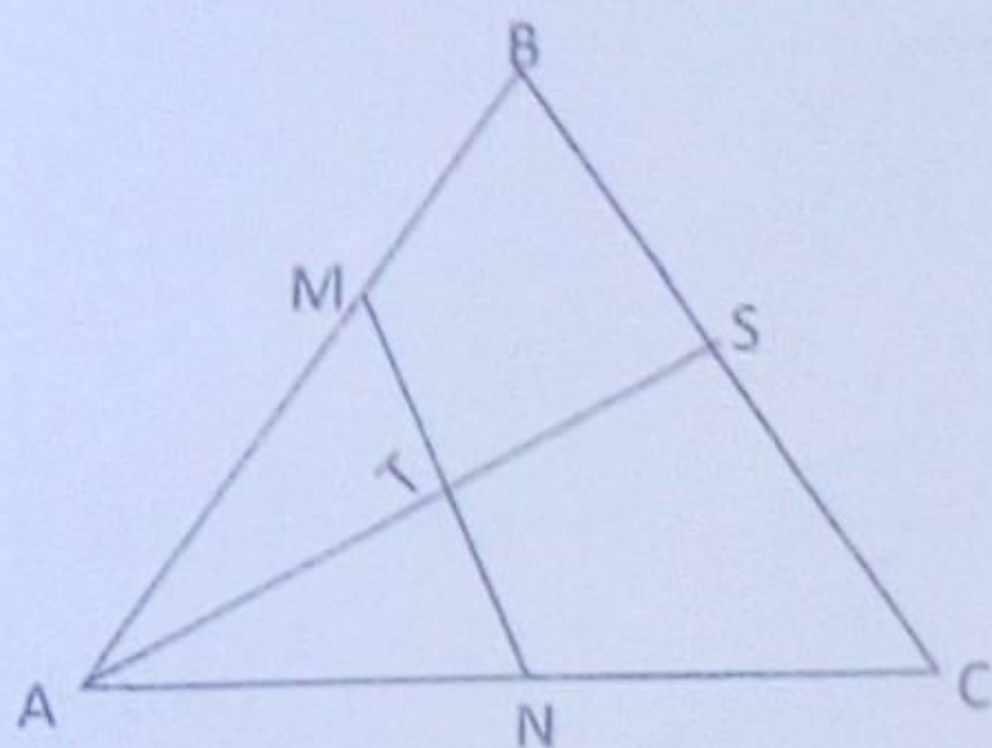
(1) dans (2)

$$\Rightarrow \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD} \text{ avec } k = \frac{1}{3} \text{ ou}$$

$$\vec{AD} = 3\vec{AE} \text{ avec } k = 3$$

Solution 3:

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} \text{ et } \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$



1) Montrons que $(MN) \parallel (BC)$: $\Leftrightarrow \vec{MN}$ et \vec{BC} sont colinéaires c'est-à-dire $\vec{MN} = k\vec{BC}$ ou $\vec{BC} = k\vec{MN}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$\vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN} \text{ (Triangle AMN)}$$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM}$$

$$\text{avec } \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} \text{ et } \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC} \Rightarrow$$

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}(\vec{CA} + \vec{AC}) = \frac{2}{3}\vec{BC} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{BC} \text{ avec}$$

$$k = \frac{2}{3} \text{ ou } \vec{BC} = \frac{3}{2}\vec{MN} \text{ avec } k = \frac{3}{2}$$

, T et S sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AT}$ et \vec{AS}
 c'est-à-dire $\vec{AT} = k\vec{AS}$ ou $\vec{AS} =$
 $\in \mathbb{R}$.

T et S sont les milieux respectifs des
 et $[BC]$. D'après le théorème du
 segment, on a :

(AN)

(C)

$$\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{AT} = \frac{2}{6}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\vec{AS} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$3\vec{AT} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad (1)$$

$$2\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad (2)$$

$$a : 3\vec{AT} = 2\vec{AS} \Rightarrow \vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AS}$$

$$\vec{AT} \text{ avec } k = \frac{3}{2}$$

428 ...

onnel car il admet un
 mal illimité périodique.

b) La longueur : $L_p = 6$

c) La troncature décimale d'ordre 3 est 3,571.

d) L'arrondi d'ordre 5 est 3,57143.

3. a- Je donne l'écriture fractionnaire de x

$$x = 3,571428571428 \dots$$

$$x = 3 + 0,571428571428 \dots$$

$$x = 3 + \frac{P}{10^{Lp} - 1} \text{ avec } P = 571428 \text{ et } L_p = 6$$

$$x = 3 + \frac{571428}{10^6 - 1} = 3 + \frac{571428}{999999}$$

$$x = \frac{3 \times 999999 + 571428}{999999} = \frac{2999997 + 571428}{999999}$$

$$x = \frac{3571425}{999999}$$

b- Je montre que $x = \frac{25}{7}$

$$x = \frac{3571425}{999999} \text{ or } PGCD(3571425; 999999) = 142857$$

$$x = \frac{3571425 : 142857}{999999 : 142857} = \frac{25}{7}$$

d'où $x = \frac{25}{7}$ CQFM

Solution 2 :

1. Je démontre les égalités suivantes :

a) $(\sqrt{7} - \sqrt{8})^{11} \times (\sqrt{7} + \sqrt{8})^9 = 4\sqrt{14} - 15$

$$(\sqrt{7} + \sqrt{8})^9$$

$$(\sqrt{7} - \sqrt{8})^9 \times (\sqrt{7} + \sqrt{8})^9$$

$$[(\sqrt{7} - \sqrt{8})(\sqrt{7} + \sqrt{8})]^9$$

$$= (7 - 8)^9$$

$$= (-1)^9$$

1)

$$x(\sqrt{7} + \sqrt{8})^9 = 4\sqrt{14} - 15$$

$$\sqrt{72} = 6$$

$$\sqrt{\frac{a-c}{2}} \text{ et } \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

$$= \sqrt{11^2 - 72} = \sqrt{121 - 72}$$

$$+ \sqrt{\frac{11-7}{2}}$$

$$3 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6$$

$$\sqrt{72} = 6$$

2. Je traduis à l'aide d'intervalles :

$$d(x; -1) \leq \frac{5}{2} \text{ or } d(x; y) = |x - y|$$

$$\Rightarrow |x + 1| \leq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{2} \leq x + 1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\frac{-5}{2} - 1 \leq x \leq \frac{5}{2} - 1$$

$$\frac{-5-2}{2} \leq x \leq \frac{5-2}{2}$$

$$\frac{-7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{-7}{2}; \frac{3}{2} \right]$$

3. Je déduis à l'aide de la valeur absolu

$$x \in]-\infty; -5] \cup [3; +\infty[$$

$$\text{Or } |x - a| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a - r = -5 & (1) \\ a + r = 3 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{2} \Rightarrow a = -1$$

Je remplace $a = -1$ dans (2)

$$-1 + r = 3 \Rightarrow r = 3 + 1 \Rightarrow r = 4$$

$$\text{On a : } |x - a| \geq r \Rightarrow |x + 1| \geq 4$$

$$\text{D'où } x \in]-\infty; -5] \cup [3; +\infty[\Leftrightarrow |x + 1| \geq 4$$

Solution 3 :

1. Je construis les points D, E et F tels que :

$$\boxed{\vec{FC} = 2\vec{AB} + \vec{AC}}$$

4. Je montre que $\vec{AD} = 3\vec{AE}$

$$\vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED} \quad (\text{Relation de Chasles})$$

$$\text{Or } \vec{ED} = 2\vec{AE}$$

$$\vec{AD} = \vec{AE} + 2\vec{AE}$$

$$\boxed{\vec{AD} = 3\vec{AE}}$$

Comme les vecteurs \vec{AD} et \vec{AE} sont colinéaires, alors les points A, E et D sont alignés.

5. Je donne la position relative des droites (FC) et (AE)

$$\text{Or } \vec{AE} = \frac{1}{3}(2\vec{AB} + \vec{AC}) \text{ et } \vec{FC} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{FC} \text{ ou } \vec{FC} = 3\vec{AE}$$

Comme les vecteurs \vec{FC} et \vec{AE} sont colinéaires, alors les droites (FC) et (AE) sont parallèles.

Résolution sujet n°5

Solution 1:

$$(D_m): (2m - 1)x + (3 - m)y - 7m + 6 = 0$$

1. Montrons que (D_m) est une droite:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \neq 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 3 \end{cases}$$

2. a- Valeur de m pour $A(1; 2) \in (D_m)$

On pose $y = y \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{-x+1}{2} = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 3(-x+1) = 2(2x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{7}$

$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2} = \frac{-1}{14} + \frac{1}{2} = \frac{-1+7}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \Rightarrow y = \frac{3}{7}$

Or $I(x; y) \Rightarrow I\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}\right)$

4. La représentation paramétrique de $(D') \perp (D_1)$ et passant par $B(2; -3)$

$(D_1): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $(D'): y = m'x + p'$

$(D') \perp (D_1) \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}m' = -1 \Rightarrow m = 2$

Alors $(D'): y = 2x + p'$

$B(2; -3) \in (D') \Leftrightarrow -3 = 2(2) + p' = -7$

Alors $(D'): y = 2x - 7$ soit $(D'): 2x - y + 7 = 0$

$\Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(D'): \begin{cases} x = x_B + ak \\ y = y_B + bk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -3 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

5. Montrons que (D_m) passe par un point fixe

$I(x_0; y_0)$

$(D_m): (2m - 1)x + (3 - m)y - 7m + 6 = 0.$

$\Leftrightarrow (2m - 1)x_0 + (3 - m)y_0 - 7m + 6 = 0$

$\Rightarrow 2mx_0 - x_0 + 3y_0 - my_0 - 7m + 6 = 0$

$(2mx_0 - my_0 - 7m) + (-x_0 + 3y_0 + 6) = 0$

$(2x_0 - y_0 - 7)m + (-x_0 + 3y_0 + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 7 = 0 \\ -x_0 + 3y_0 + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 = 7 \\ -x_0 + 3y_0 = -6 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases} \quad \text{Donc } I(3; -1)$$

6. Déterminons une équation cartésienne (D'') // (Δ) et passant par $C(1; -2)$

$$(D''): y = m''x + p'' \quad (\Delta): y = \frac{2}{3}x + p''$$

$$(D'') // (\Delta) \Leftrightarrow m = m'' = \frac{2}{3} \Rightarrow (D''): y = \frac{2}{3}x + p''$$

$$\text{et } (1; -2) \in (D'') \Leftrightarrow -2 = \frac{2}{3}(1) + p'' \Rightarrow p'' = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Alors } (D''): y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad \text{soit } 3y = 2x - 8$$

$$\Rightarrow (D''): 2x - 3y - 8 = 0$$

Donnons la représentation paramétrique de (D'')

$$(D''): 2x - 3y - 8 = 0 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } C(1; -2)$$

$$(D''): \begin{cases} x = x_C + ak \\ y = y_C + bk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 + 2k \end{cases}$$

7. a- Donnons l'équation cartésienne de (Δ')

$$(\Delta') \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = -\lambda + 3 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = -\lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ 2y = -2\lambda + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2y = 2\lambda - 2\lambda - 1 + 6 \Rightarrow x + 2y = 5$$

$$\Rightarrow (\Delta'): x + 2y - 5 = 0$$

b- Déduisons ses vecteurs directeur et normal
 $(\Delta'): x + 2y - 5 = 0$
 Vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution 2 :

$\{(A, 2); (B, -4); (C, 6)\}$

1. Je forme la fonction de LEIBNIZ $f(\vec{M})$

$$f(\vec{M}) = 2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 6\vec{MC}$$

2. J'exprime $f(\vec{A}) - f(\vec{B})$ en fonction de \vec{AB}

$$f(\vec{M}) = 2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 6\vec{MC}$$

$$\Rightarrow f(\vec{A}) = 2\vec{AA} - 4\vec{AB} + 6\vec{AC} \Rightarrow \underline{f(\vec{A}) = -4\vec{AB} + 6\vec{AC}}$$

$$f(\vec{B}) = 2\vec{BA} - 4\vec{BB} + 6\vec{BC} \Rightarrow \underline{f(\vec{B}) = -2\vec{AB} + 6\vec{BC}}$$

$$\text{Alors } f(\vec{A}) - f(\vec{B}) = -4\vec{AB} + 6\vec{AC} - (-2\vec{AB} + 6\vec{BC})$$

$$= -4\vec{AB} + 6\vec{AC} + 2\vec{AB} - 6\vec{BC}$$

$$= -2\vec{AB} + 6\vec{AC} - 6\vec{BC}$$

$$= -2\vec{AB} + 6(\vec{AC} + \vec{CB})$$

$$= -2\vec{AB} + 6\vec{AB}$$

$$= 4\vec{AB}$$

$$\text{d'où } \underline{f(\vec{A}) - f(\vec{B}) = 4\vec{AB}}$$

J'exprime $f(\vec{B}) - f(\vec{C})$ en fonction de \vec{BC}

$$f(\vec{M}) = 2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 6\vec{MC}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\vec{CA} - 4\vec{CB} + 6\vec{CC} \Rightarrow f(\vec{C}) = 2\vec{CA} + 4\vec{BC} \\
 f(\vec{B}) - f(\vec{C}) &= -2\vec{AB} + 6\vec{BC} - 2\vec{CA} - 4\vec{BC} \\
 &= -2\vec{AB} - 2\vec{AC} + 2\vec{BC} \\
 &= -2(\vec{CA} + \vec{AB}) + 2\vec{BC} \\
 &= -2\vec{CB} + 2\vec{BC} \\
 &= 2\vec{BC} + 2\vec{BC} \\
 &= 4\vec{BC}
 \end{aligned}$$

$$f(\vec{B}) - f(\vec{C}) = 4\vec{BC}$$

$$f(\vec{M}) = 2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 6\vec{MC}$$

$+6 = 4 \neq 0$. Comme la somme des coefficients n'est pas nulle, alors f est bijective.

Le barycentre G existe tel que $f(\vec{G}) = \vec{0}$

$$f(\vec{G}) = 2\vec{GA} - 4\vec{GB} + 6\vec{GC} \text{ avec } f(\vec{G}) = \vec{0}$$

$$2\vec{GA} - 4\vec{GB} + 6\vec{GC} = \vec{0}$$

G' : bary $\{(B, -4); (C, 6)\}$

Montrons que $f(\vec{M}) = 4\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A}$

$+2 \neq 0$ Alors le barycentre G' existe tel que $4\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A} + 6\vec{G}'\vec{C} = \vec{0}$

$$= 2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 6\vec{MC}$$

$$2(\vec{MG}' + \vec{G}'\vec{A}) - 4(\vec{MG}' + \vec{G}'\vec{B}) + 6(\vec{MG}' + \vec{G}'\vec{C})$$

$$2\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A} - 4\vec{MG}' - 4\vec{G}'\vec{B} + 6\vec{MG}' + 6\vec{G}'\vec{C}$$

$$(2 - 4 + 6)\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A} - 4\vec{G}'\vec{B} + 6\vec{G}'\vec{C}$$

$$4\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A} - 4\vec{G}'\vec{B} + 6\vec{G}'\vec{C}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } -4\vec{G}'\vec{B} + 6\vec{G}'\vec{C} &= \vec{0} \\
 \Rightarrow f(\vec{M}) &= 4\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A} + \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{f(\vec{M}) = 4\vec{MG}' + 2\vec{G}'\vec{A}} \quad \text{CQFD}$$

5. Je détermine les réels x et y

G : bary $\{(A, x); (B, y)\}$ et $2\vec{GA} - 3\vec{AB} = \vec{0}$

$$G \exists \Leftrightarrow x + y \neq 0$$

$$x\vec{GA} + y\vec{GB} = \vec{0}$$

$$x\vec{GA} + y(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$x\vec{GA} + y\vec{GA} + y\vec{AB} = \vec{0}$$

$$(x + y)\vec{GA} + y\vec{AB} = \vec{0} \text{ or } 2\vec{GA} - 3\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ y = -3 & (2) \end{cases}$$

Je remplace $y = -3$ dans (1)

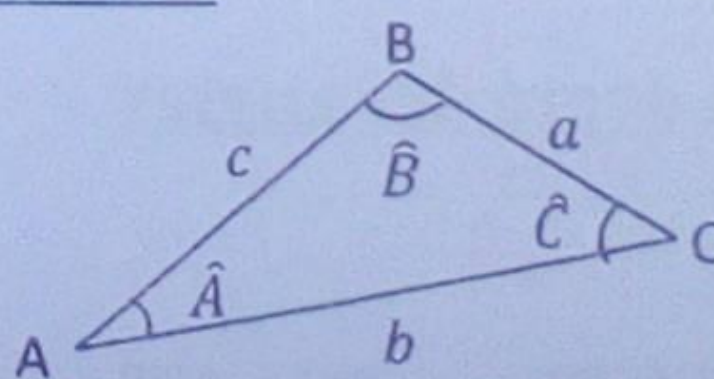
$$x - 3 = 2 \Rightarrow x = 2 + 3 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{d'où } \boxed{x = 5 \text{ et } y = -3}$$

Alors G : bary $\{(A, 5); (B, -3)\}$

Résolution sujet n°6

Solution 1 :



$$\begin{aligned}
 BC &= a = 4 \\
 AC &= b = 3 \\
 AB &= c = 2
 \end{aligned}$$

1. Je détermine $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$

D'après le théorème d'AL-KASHI, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow$$

$$2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{9 + 4 - 16}{12} = -0,25$$

$$\boxed{\cos \hat{A} = -0,25}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow \boxed{\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 2} = \frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$$

$$\boxed{\cos \hat{B} = \frac{11}{16}} \text{ ou } \boxed{\cos \hat{B} = 0,6875}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow \boxed{\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{16 + 9 - 4}{24} = \frac{21}{24}$$

$$\boxed{\cos \hat{C} = \frac{21}{24}} \text{ ou } \boxed{\cos \hat{C} = 0,875}$$

2. Je déduis les valeurs en degré des angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C}

$$\cos \hat{A} = -0,25 \Rightarrow \hat{A} = \cos^{-1}(-0,25) = 104,47^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{A} = 104,47^\circ}$$

$$\cos \hat{B} = 0,6875 \Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(0,6875) = 46,56^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{B} = 46,56^\circ}$$

$$\cos \hat{C} = 0,875 \Rightarrow \hat{C} = \cos^{-1}(0,875) = 28,95^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{C} = 28,95^\circ}$$

3. Je calcule $\sin \hat{A}$, $\sin \hat{B}$ et $\sin \hat{C}$

$$\sin \hat{A} = \sin(104,47) = 0,96 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{A} = 0,96}$$

$$\sin \hat{B} = \sin(46,56) = 0,72 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{B} = 0,72}$$

$$\sin \hat{C} = \sin(28,95) = 0,48 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{C} = 0,48}$$

4. Je calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

D'après le théorème des sinus, on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}}}$$

$$R = \frac{4}{2 \times 0,96} = 2,08 \Rightarrow \boxed{R = 2,08}$$

4 ⇒
2

$$\frac{9 + 4 - 16}{12} = -0,25$$

$$\hat{B} \Rightarrow \boxed{\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$$

$$\boxed{= 0,6875}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}}$$

$$\frac{6 + 9 - 4}{24} = \frac{21}{24}$$

$$\boxed{0,875}$$

s en degré des angles

$$\cos^{-1}(-0,25) = 104,47^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{A} = 104,47^\circ}$$

$$\cos \hat{B} = 0,6875 \Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(0,6875) = 46,56^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{B} = 46,56^\circ}$$

$$\cos \hat{C} = 0,875 \Rightarrow \hat{C} = \cos^{-1}(0,875) = 28,95^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\hat{C} = 28,95^\circ}$$

3. Je calcule $\sin \hat{A}$, $\sin \hat{B}$ et $\sin \hat{C}$

$$\sin \hat{A} = \sin(104,47) = 0,96 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{A} = 0,96}$$

$$\sin \hat{B} = \sin(46,56) = 0,72 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{B} = 0,72}$$

$$\sin \hat{C} = \sin(28,95) = 0,48 \Rightarrow \boxed{\sin \hat{C} = 0,48}$$

4. Je calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

D'après le théorème des sinus, on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}}}$$

$$R = \frac{4}{2 \times 0,96} = 2,08 \Rightarrow \boxed{R = 2,08}$$

érimètre du triangle

$$2AA'^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2} \Rightarrow AA'^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

$$\text{Alors } \boxed{AA' = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{2 \times 3^2 + 2 \times 2^2 - 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{18 + 8 - 16}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{AA' = \frac{\sqrt{10}}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{AA' = 1,58}$$

Solution 2 :

Je calcule le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\text{a) } \|\vec{u}\| = \sqrt{2} - 1; \|\vec{v}\| = \sqrt{3} - 1 \text{ et } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt{12} - \sqrt{4} - \sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ &= -\frac{1}{2} (2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (-2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$\text{b) } \|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}; \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$Y^2 = \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \right)^2 + 2 \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}} \right)^2$$

$$Y^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2} + 2 \sqrt{\frac{(x + \sqrt{x^2 - y})(x - \sqrt{x^2 - y})}{4}}$$

$$+ \frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}$$

$$Y^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 - y} + x - \sqrt{x^2 - y}}{2} + \frac{2\sqrt{x^2 - (x^2 - y)}}{2}$$

$$Y^2 = \frac{2x}{2} + \sqrt{x^2 - x^2 + y}$$

$$\underline{Y^2 = x + \sqrt{y}}$$

Comme $X^2 = Y^2 \Rightarrow \boxed{X = Y}$

2) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

a) Je calcule $A^2 + B^2$ puis $A \times B$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \left(\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)^2 \\ &= 6 + 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5} \\ &= 6 + 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 + B^2 = 12}$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} \right)$$

$$\sqrt{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}$$

$$\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2}$$

$$\sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$$

le calcul de $(A+B)^2$ et $A+B$

$$A^2 + 2A \times B + B^2$$

$$A^2 + B^2 + 2A \times B$$

$$12 + 2 \times 4$$

$$12 + 8$$

$$0 \Rightarrow A+B = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ujet n°7

ériques

$$3x + 2(m+1)$$

suivant les valeurs de m l'équation

0

$$(m+1) = 0$$

$$= -3 \text{ et } c = 2(m+1) = 2m+2$$

$a = 1 \neq 0$, l'équation est du second degré en x

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2m+2)$$

$$\Delta = 9 - 8m - 8$$

$$\Delta = -8m + 1$$

Signe de Δ

$$\text{On pose } \Delta = 0 \Rightarrow -8m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$$

m	$-\infty$	$\frac{1}{8}$	$+\infty$
$\Delta = -8m + 1$	+	0	-

Discussion

$$\text{Si } m \in \left] -\infty; \frac{1}{8} \right[, \Delta > 0$$

l'équation admet deux racines réelles distinctes x' et x'' telles que :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{-8m+1}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{-8m+1}}{2}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{-8m+1}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{-8m+1}}{2}$$

$$\text{d'où } S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{-8m+1}}{2}; \frac{3 + \sqrt{-8m+1}}{2} \right\}$$

$$\text{Si } m = \frac{1}{8} \Rightarrow \Delta = -8 \left(\frac{1}{8} \right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

l'équation admet une racine réelle double telle que

$$x'' = \frac{-b}{2a}$$

$$x'' = \frac{3}{2(1)} = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$\in \left] \frac{1}{8}; +\infty \right[\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de

e.

$$S = \emptyset$$

J'écris $f_m(x)$ sous la forme canonique

$$= x^2 - 3x + 2(m+1)$$

$a = 1; b = -3$ et $c = 2(m+1)$ or $ax^2 + bx +$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$-3x + 2(m+1) = 1 \left[\left(x + \frac{-3}{2(1)} \right)^2 - \frac{(-8m+1)}{4a^2} \right]$$

$$-3x + 2(m+1) = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{8m-1}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{8m-1}{4}$$

$$\frac{(x-3/2)^2 + 8m-1}{4}$$

$$f_m(x) = \frac{(2x-3)^2 + 8m-1}{4}$$

3. Pour $m = 0$, je factorise $f_0(x)$ et j'étudie son signe

$$f_m(x) = \frac{(2x-3)^2 + 8m-1}{4} \text{ avec } m = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_0(x) &= \frac{(2x-3)^2 - 1}{4} \\ &= \frac{(2x-3-1)(2x-3+1)}{4} \\ &= \frac{(2x-4)(2x-2)}{4} \\ &= \frac{4(x-2)(x-1)}{4} \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

$$d'où \boxed{f_0(x) = (x-2)(x-1)}$$

J'étudie le signe de $f_0(x)$

On pose $f_0(x) = 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} (x-2) = 0 \\ (x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-		-	+
$x-1$	-		+	+
$f_0(x)$	+		-	+

$$\boxed{\forall x \in [-1; 2], f_0(x) \leq 0} \text{ et}$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[, f_0(x) > 0$$

4. Je détermine si possible, le réel m

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 3 \Rightarrow \frac{x' + x''}{x'x''} = 3 \text{ or } S = x' + x'' \text{ et } P = x'x''$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P} = 3$$

or $f_m(x) = x^2 - 3x + 2(m+1)$ avec $a = 1; b = -3$ et $c = 2(m+1)$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } P = \frac{c}{a} = \frac{2(m+1)}{1} = 2(m+1)$$

$$\text{On a : } \frac{3}{2(m+1)} = 3 \Rightarrow 6(m+1) = 3$$

$$6m + 6 = 3 \Rightarrow 6m = -6 + 3$$

$$= 6m = -3$$

$$m = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

d'où $m = -\frac{1}{2}$

Solution n°2

1. Je résous dans \mathbb{R} les équations et l'inéquation ci-après

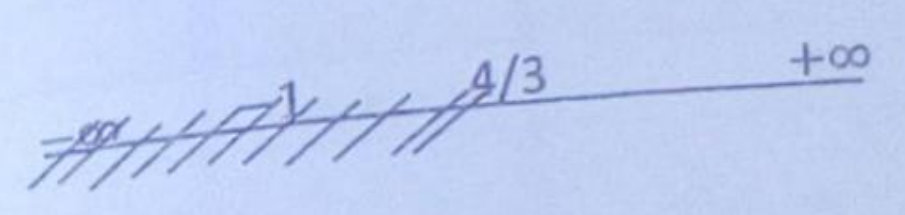
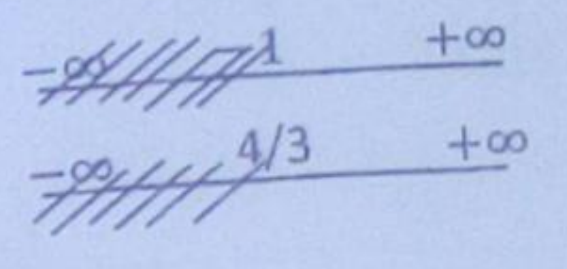
a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{3x-4} = 0$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 3x-4 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{3x-4})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 3x-4 \geq 0 \\ 1+x = 3x-4 \end{cases}$$

Domaine de validité

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 3x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$



Alors $x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$

Je résous : $1+x = 3x-4$

$$3x - x = 1 + 4$$

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Comme $\frac{5}{2} \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$

d'où $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

b) $\frac{x^2-4x+3}{x^2+16} \leq 0$

On pose $\frac{x^2-4x+3}{x^2+16} = 0$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} x^2 + 16 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \text{ avec } a = 1; b' = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } c = 3$$

$$\Delta' = (-2)^2 - (1)(3)$$

$$\Delta' = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \Delta' = 1$$

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2 - \sqrt{1}}{1} = 2 - 1 = 1$$

$$x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2 + \sqrt{1}}{1} = 2 + 1 = 3$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+	
$x^2 + 16$	+			+
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 16}$	+	-	+	

d'où $S = [1; 3]$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$$(x^2)^2 - 5x^2 - 36 = 0$$

On pose : $t = x^2$ avec $t \geq 0$

On a : $t^2 - 5t - 36 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ avec } a = 1; b = -5; \text{ et } c = -36$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-36)$$

$$\Delta = 25 + 144$$

$$\Delta = 169$$

$$t' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{169}}{2(1)} = \frac{5 - 13}{2} = -4$$

$$t'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{169}}{2(1)} = \frac{5 + 13}{2} = 9$$

Alors $t = -4$ et $t = 9$

$t = -4 < 0$ seul $t = 9 > 0$ donc $t = 9$

or $x^2 = t$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

d'où $S = \{-3; 3\}$

2. Je résous dans \mathbb{R}^2 le système d'équation

$$\begin{cases} 3mx + (m-2)y = m-1 \\ (6m+1)x + 2my = 3m+1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3m & m-2 \\ 6m+1 & 2m \end{vmatrix} = 6m^2 - (6m+1)(m-2)$$

$$= 6m^2 - (6m^2 - 12m - 2)$$

$$= 6m^2 - 6m^2 + 11m + 2$$

$$= 11m + 2$$

$$D = 11m + 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 3m+1 & 2m \end{vmatrix}$$

$$= 2m(m-1) - (3m+1)(m-2)$$

$$= 2m^2 - 2m - (3m^2 - 6m + m - 2)$$

$$= 2m^2 - 2m - 3m^2 + 5m + 2$$

$$D_x = -m^2 + 3m + 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3m & m-1 \\ 6m+1 & 3m+1 \end{vmatrix}$$

$$= 3m(3m+1) - (6m+1)(m-1)$$

$$= 9m^2 + 3m - (6m^2 - 6m + m - 1)$$

$$= 9m^2 + 3m - 6m^2 + 5m + 1$$

$$D_y = 3m^2 + 8m + 1$$

Discussion

1^{er} Cas : Si $D \neq 0 \Rightarrow 11m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{2}{11}$
Le système est de CRAMER, il admet un couple unique solution dans \mathbb{R}^2 tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-m^2 + 3m + 2}{11m + 2}$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{3m^2 + 8m + 1}{11m + 2}$$

d'où $S = \left\{ \left(\frac{-m^2 + 3m + 2}{11m + 2}, \frac{3m^2 + 8m + 1}{11m + 2} \right) \right\}$

2^{ème} Cas : Si $D = 0 \Rightarrow 11m + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{11}$

$$D_x = -\left(\frac{2}{11}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{11}\right) + 2$$

$$D_x = \frac{-4}{121} + \frac{6}{11} + 2$$

$$D_x = \frac{-4}{121} + \frac{28}{11}$$

$$D_x = \frac{-4 + 28 \times 11}{121} = \frac{-4 + 308}{121} = \frac{304}{121}$$

$$D_y = 3\left(\frac{2}{11}\right)^2 + 8\left(\frac{2}{11}\right) + 1$$

$$D_y = 3\left(\frac{4}{121}\right) + \frac{16}{11} + 1$$

$$D_y = \frac{12}{121} + \frac{27}{11}$$

$$D_y = \frac{12}{121} + \frac{27}{11} = \frac{12 + 297}{121} = \frac{309}{121}$$

Comme $D = 0$; $D_x \neq 0$ et $D_y \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution.

d'où $S = \emptyset$

Activités géométriques

Solution 3

$(D_m) : (1+m)x + (1-m)y - 3 - m = 0$

1. Je détermine m pour que (D_m) :

a) Ait pour pente 2

$$(1+m)x + (1-m)y - 3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (1-m)y = -(1+m)x + 3 + m$$

$$\Rightarrow y = -\left(\frac{1+m}{1-m}\right)x + \frac{3+m}{1-m}$$

$$\text{Pente } 2 \Leftrightarrow -\left(\frac{1+m}{1-m}\right) = 2 \Rightarrow -(1+m) = 2(1-m)$$

$$\Rightarrow -1 - m = 2 - 2m$$

$$\Rightarrow -m + 2m = 2 + 1 \Rightarrow m = 3$$

d'où $m = 3$

b) Passe par l'origine du repère $O(0;0)$

$$(1+m)x + (1-m)y - 3 - m = 0 \text{ avec } x = 0 \text{ et } y = 0$$

$$\text{On a: } (1+m)(0) + (1-m)(0) - 3 - m = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - 3 - m = 0 \Rightarrow -m = 3 \Rightarrow m = -3$$

d'où $m = -3$

c) Soit parallèle à la droite $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1+m & 2 \\ 1-m & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3(1+m) - 2(1-m) = 0$$

$$-3 - 3m - 2 + 2m = 0$$

$$-m - 5 = 0 \Rightarrow -m = 5 \Rightarrow m = -5$$

d'où $m = -5$

d) Soit perpendiculaire à la droite $(\Delta) : 2x - 2y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-a}{b}\right) \left(\frac{-a'}{b'}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1-m}{1-m}\right) \left(\frac{2}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-1-m}{1-m} = -1$$

$$\Rightarrow -1 - m = -(1 - m)$$

$$-1 - m = -1 + m \Rightarrow 2m = -1 + 1$$

$$2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

d'où $m = 0$

2. Je montre que (D_m) admet un point fixe I que l'on déterminera

Soit $I(x_I; y_I)$

$$(D_m): (1+m)x + (1-m)y - 3 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+m)x_I + (1-m)y_I - 3 - m = 0$$

$$x_I + mx_I + y_I - my_I - 3 - m = 0$$

$$(mx_I - my_I - m) + (x_I + y_I - 3) = 0$$

$$(x_I - y_I - 1)m + (x_I + y_I - 3) = 0$$

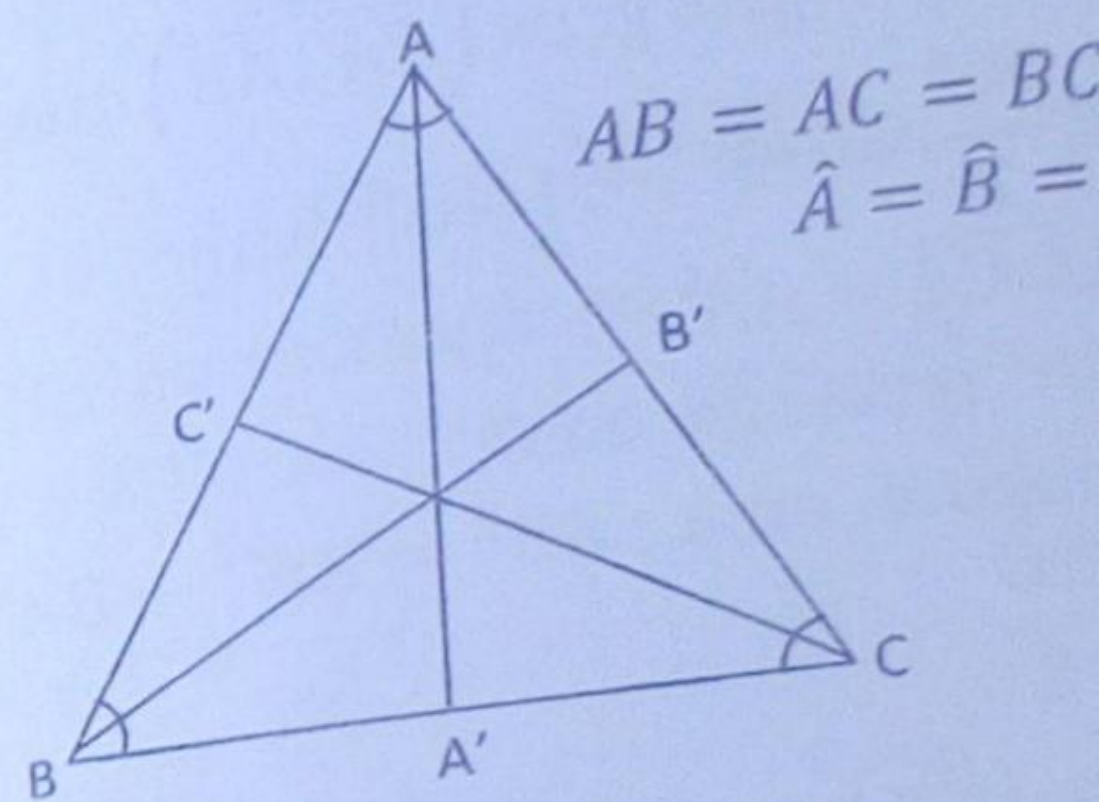
$$\begin{cases} x_I - y_I - 1 = 0 \\ x_I + y_I - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I - y_I = 1 & (1) \\ x_I + y_I = 3 & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2x_I = 4 \Rightarrow x_I = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Je remplace } x_I = 2 \text{ dans } (2): 2 + y_I = 3 \Rightarrow y_I = 1$$

$$\text{or } I(x_I; y_I) \Rightarrow \boxed{I(2; 1)}$$

Solution 4 :



Je calcule les produits scalaires

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \cos \hat{B} \\ &= 3 \times 3 \cos 60 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{9}{2}}$$

$$\text{Ou } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BC} = BA' \times BC \text{ or } BA' \times BC$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{BC}{2} \times BC = \frac{BC^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{9}{2}}$$

$$= 3 \times 3 \cos 60$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{9}{2}$$

$$\vec{B} = \|\vec{AA'}\| \times \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{AA', AB}) \text{ avec } \widehat{AA', AB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

che $\|\vec{AA'}\| = AA'$
e ABA' rectangle en A'

Pythagore, on a : $AB^2 = AA'^2 + BA'^2$
 $AA' = \frac{BC}{2}$

$$AA'^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Rightarrow AA'^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$AA'^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{4AB^2 - BC^2}}{2}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{4 \times 3^2 - 3^2}}{2}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{36 - 9}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$AA' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \cos 30$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{9}{4} \sqrt{9}$$

$$= \frac{9 \times 3}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\vec{AA'} \cdot \vec{AB} = \frac{27}{4}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BB'} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BB'}\| \cos(\widehat{BA, BB'})$$

Le triangle ABB' est rectangle en B'
On a : $AB^2 = BB'^2 + AB'^2$ avec $AB' = \frac{AC}{2}$

$$\text{Alors } BB' = AA' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BB'} = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos 30$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BB'} = \frac{27}{4}$$

Solution 5 :

G : bary $\{(A, 1), (B, 4), (C, -3)\}$

1. a) Je construis le point I barycentre des points pondérés $(B, 4), (C, -3)$

Comme $4 - 3 = 1 \neq 0$ le barycentre I existe:

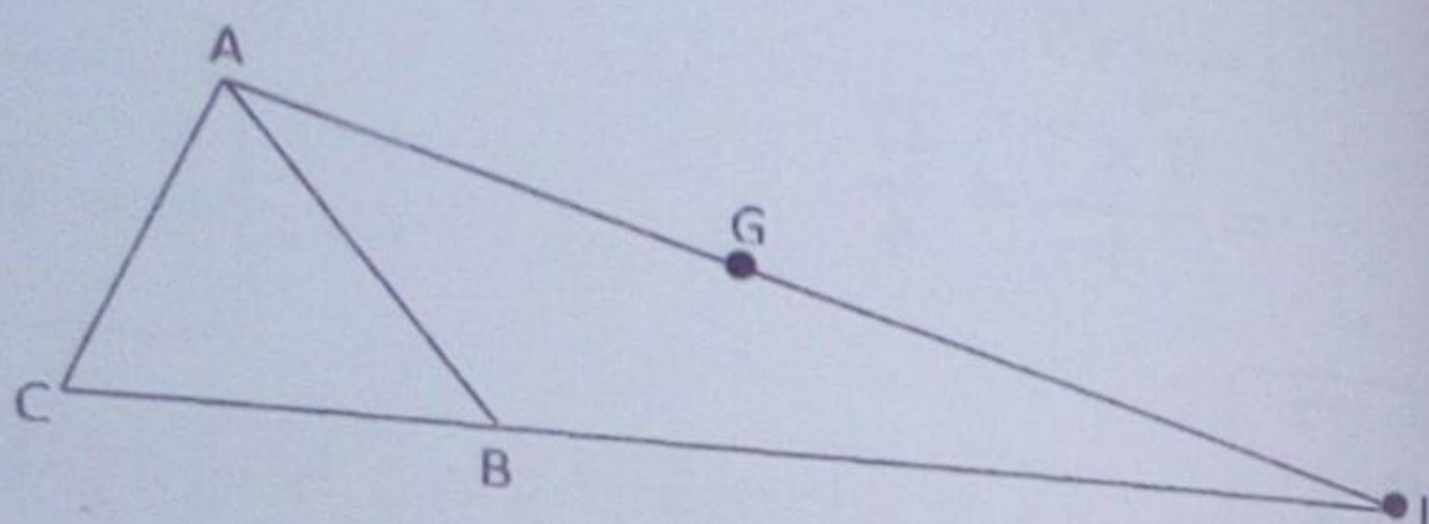
$$4\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$4\vec{IB} - 3(\vec{IB} + \vec{BC}) = \vec{0}$$

$$4\vec{IB} - 3\vec{IB} - 3\vec{BC} = \vec{0}$$

$$\vec{IB} - 3\vec{BC} = \vec{0}$$

$$-\vec{BI} = 3\vec{BC} \Rightarrow \vec{BI} = -3\vec{BC}$$



b- Je montre que $\vec{GA} + \vec{GI} = \vec{0}$

G: bary $\{(A, 1)(B, 4)(C, -3)\}$

Comme $1 + 4 - 3 = 2 \neq 0$ G existe

$$\vec{GA} + 4\vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + 4(\vec{GI} + \vec{IB}) - 3(\vec{GI} + \vec{IC}) = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + 4\vec{GI} + 4\vec{IB} - 3\vec{GI} - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{GI} + 4\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{GI} + 4\vec{IB} - 3(\vec{IB} + \vec{BC}) = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{GI} + 4\vec{IB} - 3\vec{IB} - 3\vec{BC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{GI} + \vec{IB} - 3\vec{BC} = \vec{0}$$

or d'après 1 - a) $\vec{IB} - 3\vec{BC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GI} + \vec{0} = \vec{0}$$

d'où $\vec{GA} + \vec{GI} = \vec{0}$

Je déduis la position du point G sur la droite (AI)

$$\vec{GA} + \vec{GI} = \vec{0}$$

$$-2\vec{AG} = -\vec{AI}$$

$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AI}$$

Donc les points A, G et I sont alignés et de plus G est le milieu du segment [AI].

2. Je donne les coordonnées du point G lorsque

A(1,2), B(2,-1) et C(-1,-1)
Avec (A, 1), (B, 4) et (C, -3)

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}x_B + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}x_C \\ y_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}y_B + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}y_C \end{cases}$$

où $\alpha = 1$; $\beta = 4$ et $\gamma = -3$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{1+4-3}(1) + \frac{4}{1+4-3}(2) + \frac{-3}{1+4-3}(-1) \\ y_G = \frac{1}{1+4-3}(2) + \frac{4}{1+4-3}(-1) + \frac{-3}{1+4-3}(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{2} + \frac{8}{2} + \frac{3}{2} \\ y_G = \frac{2}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1+8+3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ y_G = \frac{2-4+3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = 6 \\ y_G = \frac{1}{2} \end{cases}$$

or $G(x_G; y_G) \Rightarrow \boxed{G\left(6; \frac{1}{2}\right)}$

3. Je démontre que $\forall m \in P$, on a: $\overline{MA} - 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MG}$
 G : bary $\{(A, 1), (B, 4), (C, -3)\}$

$$1 + 4 - 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow G \text{ existe}$$

$$\overline{GA} + 4\overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\overline{GM} + \overline{MA} + 4(\overline{GM} + \overline{MB}) - 3(\overline{GM} + \overline{MC}) = \vec{0}$$

$$\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{GM} + 4\overline{MB} - 3\overline{GM} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$(1 + 4 - 3)\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$2\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = -2\overline{GM}$$

d'où $\boxed{\overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MG}}$

Résolution sujet n°8

Solution 1 :

$$(E): \begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ (mx'' - 1)x' = 1 + x'' \end{cases}$$

1. On appelle équation du second degré, toute expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c des réels et $a \neq 0$.

2. Je forme cette équation (E)

$$\begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ (mx'' - 1)x' = 1 + x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ mx'x'' - x' = 1 + x'' \end{cases}$$

$$\text{Or } P = x'x'' \text{ et } S = x' + x''$$

$$\begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ mx'x'' - (x' + x'') = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 3P & (1) \\ mP - S = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ dans } (2): mP - 3P = 1 \Rightarrow P(m - 3) = 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{m-3} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1): S = \frac{3}{m-3}$$

Cette équation est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{3}{m-3}x + \frac{1}{m-3} = 0 \Rightarrow \frac{(m-3)x^2 - 3x + 1}{m-3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-3)x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

d'où $\boxed{(E): (m-3)x^2 - 3x + 1 = 0}$

3. Je discute suivant les valeurs du paramètre m les solutions de l'équation (E)

$$(m-3)x^2 - 3x + 1 = 0$$

Si $a = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$ l'équation est du 1^{er} degré en x .

$$\text{On a: } (3-3)x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$0x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x_G = 6 \\ y_G = \frac{1}{2} \end{cases}$$

or $G(x_G; y_G) \Rightarrow G\left(6; \frac{1}{2}\right)$

3. Je démontre que $\forall m \in P$, on a: $\overline{MA} - 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MG}$

G : bary $\{(A, 1), (B, 4), (C, -3)\}$

$$1 + 4 - 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow G \text{ existe}$$

$$\overline{GA} + 4\overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\overline{GM} + \overline{MA} + 4(\overline{GM} + \overline{MB}) - 3(\overline{GM} + \overline{MC}) = \vec{0}$$

$$\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{GM} + 4\overline{MB} - 3\overline{GM} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$(1 + 4 - 3)\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$\overline{GM} + \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = -2\overline{GM}$$

d'où $\overline{MA} + 4\overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MG}$

Résolution sujet n°8

Solution 1:

$$\begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ (mx'' - 1)x' = 1 + x'' \end{cases}$$

On appelle équation du second degré, toute expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

2. Je forme cette équation (E)

$$\begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ (mx'' - 1)x' = 1 + x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ mx'x'' - x' = 1 + x'' \end{cases}$$

Or $P = x'x''$ et $S = x' + x''$

$$\begin{cases} x' + x'' = 3x'x'' \\ mx'x'' - (x' + x'') = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 3P \quad (1) \\ mP - S = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ dans } (2): mP - 3P = 1 \Rightarrow P(m - 3) = 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{m-3} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1): S = \frac{3}{m-3}$$

Cette équation est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{3}{m-3}x + \frac{1}{m-3} = 0 \Rightarrow \frac{(m-3)x^2 - 3x + 1}{m-3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-3)x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

d'où (E): $(m-3)x^2 - 3x + 1 = 0$

3. Je discute suivant les valeurs du paramètre m les solutions de l'équation (E)

$$(m-3)x^2 - 3x + 1 = 0$$

Si $a = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$ l'équation est du 1^{er} degré en x .

$$\text{On a: } (3-3)x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$0x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

d'où $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

Si $a \neq 0 \Rightarrow m - 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$ L'équation est du second degré en x .

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = m - 3$; $b = -3$ et $c = 1$

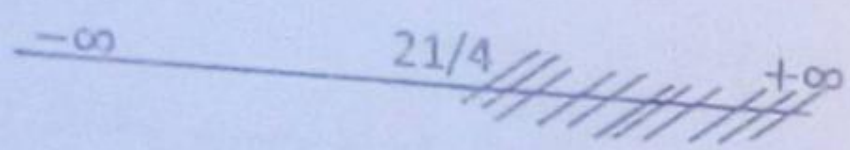
$\Delta = (-3)^2 - 4(m - 3)(1)$

$\Delta = 9 - 4m + 12 \Rightarrow \Delta = -4m + 21$

Discussion

1^{er} cas : Si $\Delta > 0 \Rightarrow -4m + 21 > 0 \Rightarrow -4m > -21$

$\Rightarrow m < \frac{21}{4}$



$m \in]-\infty; \frac{21}{4}[$ L'équation admet deux racines distinctes x' et x'' telles que :

$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{-4m + 21}}{2(m - 3)} = \frac{3 - \sqrt{-4m + 21}}{2m - 6}$

$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{-4m + 21}}{2(m - 3)} = \frac{3 + \sqrt{-4m + 21}}{2m - 6}$

d'où $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{-4m + 21}}{2m - 6}; \frac{3 + \sqrt{-4m + 21}}{2m - 6} \right\}$

2^{ème} cas : Si $\Delta < 0 \Rightarrow -4m + 21 < 0 \Rightarrow -4m < -21$

$\Rightarrow m > \frac{21}{4}$

$m \in]\frac{21}{4}; +\infty[$ L'équation n'admet pas de racine

d'où $S = \emptyset$

3^{ème} cas : Si $\Delta = 0 \Rightarrow -4m + 21 = 0 \Rightarrow 4m = 21$
 $\Rightarrow m = \frac{21}{4}$ L'équation admet une racine réelle double

$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$

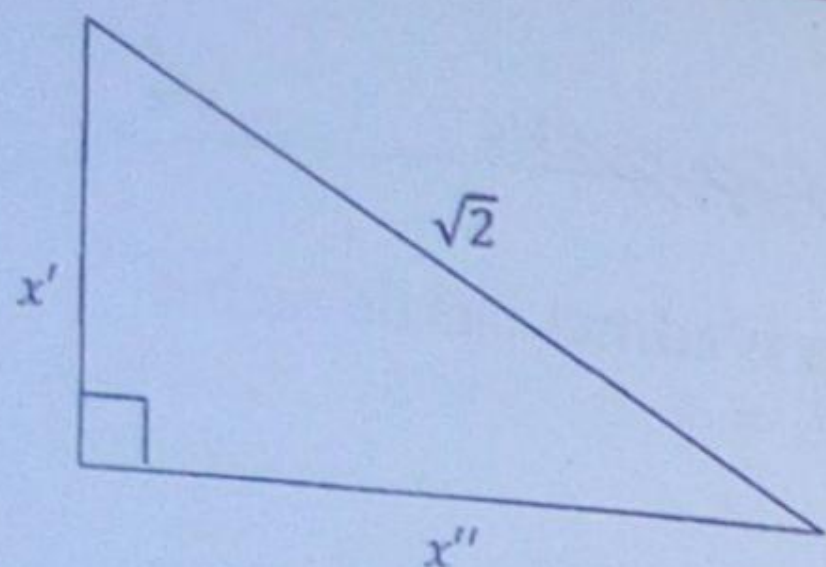
$x' = x'' = \frac{3}{2(m - 3)} = \frac{3}{2m - 6}$ avec $m = \frac{21}{4}$

$x' = x'' = \frac{3}{2\left(\frac{21}{4}\right) - 6} = \frac{3}{\frac{21}{2} - 6} = \frac{3}{\frac{21 - 12}{2}} = \frac{3}{\frac{9}{2}}$

$x' = x'' = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$

d'où $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

4. Je détermine m



D'après Pythagore, on a : $x'^2 + x''^2 = (\sqrt{2})^2$
 $\Rightarrow x'^2 + x''^2 = 2$
 or $(x' + x'')^2 = x'^2 + 2x'x'' + x''^2$
 $\Rightarrow x' + x'' = (x' + x'')^2 - 2x'x''$
 $\Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 2$ avec $S = x' + x''$ et
 $P = x'x''$

$$S^2 - 2P = 2 \text{ or } S = \frac{3}{m-3} \text{ et } P = \frac{1}{m-3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{m-3}\right)^2 - \frac{2}{m-3} = 2 \Rightarrow \frac{9}{(m-3)^2} - \frac{2}{m-3} - 2 = 0$$

$$\frac{(m-3)^2 - 2(m-3) - 2(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$9 - 2(m-3) - 2(m-3)^2 = 0$$

$$\frac{9 - 2m + 6 - 2(m^2 - 6m + 9)}{(m-3)^2} = 0$$

$$\frac{15 - 2m - 2m^2 + 12m - 18}{(m-3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2m^2 + 10m - 3}{(m-3)^2} = 0$$

$$\text{or } (m-3)^2 > 0 \Rightarrow -2m^2 + 10m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 10m + 3 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \text{ avec } a = \frac{-10}{2} = -5 \text{ et } c = 3$$

$$\Delta' = (-5)^2 - (2)(3)$$

$$\Delta' = 25 - 6$$

$$\Delta' = 19$$

$$m' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{5 - \sqrt{19}}{2}$$

$$m'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{5 + \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{d'où } m = \frac{5 - \sqrt{19}}{2} \text{ ou } m = \frac{5 + \sqrt{19}}{2}$$

Solution 2

$$(E) : x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4m = 0$$

1. Je discute suivant les valeurs du paramètre m les solutions de l'équation (E)

$$x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4m = 0$$

Comme $a = 1 \neq 0$, alors l'équation est du second degré

$$\Delta' = b'^2 - ac \text{ avec } a = 1; b' = \frac{-2(m-2)}{2} = -(m-2)$$

$$\text{et } c = m^2 - 4m$$

$$\Delta' = [-(m-2)]^2 - (1)(m^2 - 4m)$$

$$\Delta' = (m-2)^2 - m^2 + 4m$$

$$\Delta' = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 4m$$

$\Delta' = 4 \Rightarrow \Delta' > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes x' et x'' telles que:

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m-2 - \sqrt{4}}{1} = m-2-2$$

$$x' = m-4$$

$$x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m-2 + \sqrt{4}}{1} = m-2+2$$

$$x'' = m$$

d'où $S = \{m; m-4\}$

2. a- J'exprime le produit P en fonction de la somme S

$$x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 4m = 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4m}{1} = m^2 - 4m$$

$$P = m(m-4)$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-2)}{1} = 2m-4$$

$$S = 2m-4$$

$$\begin{cases} P = m(m-4) & (1) \\ S = 2m-4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow 2m = S+4 \Rightarrow m = \frac{S+4}{2} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1): P = \left(\frac{S+4}{2}\right) \left(\frac{S+4}{2} - 4\right)$$

$$P = \left(\frac{S+4}{2}\right) \left(\frac{S+4-8}{2}\right)$$

$$P = \left(\frac{S+4}{2}\right) \left(\frac{S-4}{2}\right)$$

d'où $P = \frac{1}{4}(S+4)(S-4)$ ou $P = \frac{1}{4}(S^2 - 16)$

ou encore $4P = S^2 - 16 \Rightarrow 4P - S^2 + 16 = 0$

b- Je déduis une relation indépendante de m entre les racines x' et x''

$$4P - S^2 + 16 = 0 \text{ avec } P = x'x'' \text{ et } S = x' + x''$$

$$4x'x'' - (x' + x'')^2 + 16 = 0$$

$$4x'x'' - (x'^2 + 2x'x'' + x''^2) + 16 = 0$$

$$4x'x'' - x'^2 - 2x'x'' - x''^2 + 16 = 0$$

$$2x'x'' - (x'^2 + x''^2) + 16 = 0$$

3. (E'): $(2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 = 0$
avec $a = 2 + \sqrt{3}$; $b = -(2\sqrt{3} + 1)$ et $c = \sqrt{3} - 1$

Je calcule A et B

$$P = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \text{ et } S = \frac{-b}{a} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} \text{ or } S = x' + x'' \text{ et } P = x'x''$$

$$A = \frac{S}{P} = \frac{\frac{2\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}}} = \left(\frac{2\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3}}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$A = \frac{(2\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$A = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$x'^2 + x''^2$$

$$\begin{aligned} (x' + x'')^2 &= x'^2 + 2x'x'' + x''^2 \\ x''^2 &= (x' + x'')^2 - 2x'x'' \\ x''^2 &= S^2 - 2P \end{aligned}$$

$$S^2 - 2P = \left(\frac{2\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{(2\sqrt{3} + 1)^2 - 2(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})^2}$$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 1 - 2(2\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3})}{4 + 4\sqrt{3} + 3}$$

$$\frac{4\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{11 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$\frac{-2\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(7 - 4\sqrt{3})} = \frac{77 - 44\sqrt{3} + 14\sqrt{3} - 24}{7^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{0\sqrt{3}}{48} = 53 - 30\sqrt{3}$$

sujet n°9

... \mathbb{R} et je discute suivant les valeurs de m

... et inéquations :

$$(1) x = x^2 - 9$$

(2)

$$+ 3m)x = x^2 - 9$$

$$+ 3)x = (m - 3)(m + 3)$$

Discussion

$$1^{\text{er}} \text{ cas : Si } a \neq 0 \Rightarrow m(m + 3) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m(m + 3)x &= (m - 3)(m + 3) \\ \Rightarrow x &= \frac{(m - 3)(m + 3)}{m(m + 3)} = \frac{m - 3}{m} \end{aligned}$$

$$S_1 = \left\{ \frac{m - 3}{m} \right\}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : Si } a = 0 \Rightarrow m(m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$\text{Pour } m = 0 \Rightarrow 0(0 + 3)x = (0 + 3)(0 - 3)$$

$$0x = -9 \text{ impossible}$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$\text{Pour } m = -3 \Rightarrow -3(-3 + 3)x = (-3 + 3)(-3 - 3)$$

$$0x = 0$$

$$S_3 = \mathbb{R}$$

Je fais la confrontation de la valeur de x trouvée avec 2.

1^{er} cas :

$$x = \frac{m - 3}{m} \text{ or } x > 2$$

$$\Rightarrow \frac{m - 3}{m} > 2 \Rightarrow \frac{m - 3}{m} - 2 > 0$$

$$\frac{m - 3 - 2m}{m} > 0 \Rightarrow \frac{-m - 3}{m} > 0$$

$$\text{On p... } \frac{-m - 3}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m - 3 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Tableau de signes

m	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$-m - 3$	+		-	
m	-		-	
$\frac{-m - 3}{m}$	+		+	

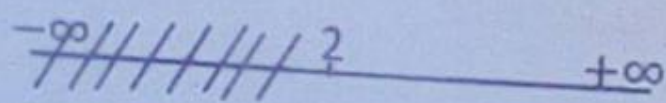
$$S =]-3; 0[$$

2^{ème} cas :

$$\begin{cases} S_2 = \emptyset \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset$$

3^{ème} cas :

$$\begin{cases} S_3 = \mathbb{R} \\ x > 2 \end{cases}$$



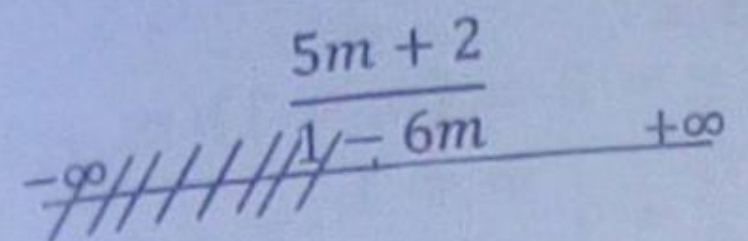
$$S =]2; +\infty[$$

c) $x - 5m > 2(1 + 3mx)$
 $x - 5m > 2 + 6mx$
 $x - 6mx > 5m + 2$
 $(1 - 6m)x > 5m + 2$

Discussion :

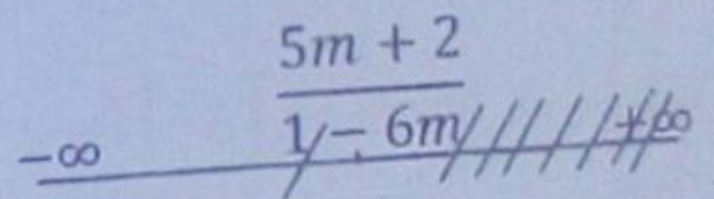
1^{er} cas : si $a > 0 \Rightarrow 1 - 6m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{6}$

$$(1 - 6m)x > 5m + 2 \Rightarrow x > \frac{5m + 2}{1 - 6m}$$



$$S = \left] \frac{5m + 2}{1 - 6m}; +\infty \right[$$

2^{ème} cas : si $a < 0 \Rightarrow 1 - 6m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{6}$



$$S = \left] -\infty; \frac{5m + 2}{1 - 6m} \right[$$

3^{ème} cas : si $a = 0 \Rightarrow 1 - 6m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$

$(1 - 6m)x > 5m + 2$ avec $m = \frac{1}{6}$

$$\left[1 - 6\left(\frac{1}{6}\right) \right] x > 5\left(\frac{1}{6}\right) + 2$$

$0x > \frac{17}{6}$ impossible

$$S = \emptyset$$

c) $m^2x - 3 = x + 3m$
 $m^2x - x = 3m + 3$
 $(m^2 - 1)x = 3m + 3$
 $(m - 1)(m + 1)x = 3(m + 1)$

Discussion :

1^{er} cas : si $a \neq 0 \Rightarrow (m-1)(m+1) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

$$(m-1)(m+1)x = 3(m+1)$$

$$x = \frac{3(m+1)}{(m-1)(m+1)}$$

$$x = \frac{3}{m-1}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{m-1} \right\}$$

2^{ème} cas : $a = 0 \Rightarrow (m-1)(m+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ m+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$(m-1)(m+1)x = 3(m+1)$$

Pour $m = 1 \Rightarrow (1-1)(1+1)x = 3(1+1)$
 $0x = 6$ impossible

$$S = \emptyset$$

Pour $m = -1 \Rightarrow (-1-1)(-1+1)x = 3(-1+1)$
 $0x = 0$ vrai $\forall x \in \mathbb{R}$

d'où $S = \mathbb{R}$

d) $m^2x - 3 \geq x + 3m$
 $m^2x - x \geq 3m + 3$
 $(m-1)(m+1)x \geq 3(m+1)$

J'étudie le signe de a

Avec $a = (m-1)(m+1)$

On pose $a = 0 \Rightarrow (m-1)(m+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ m+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Tableau de signes

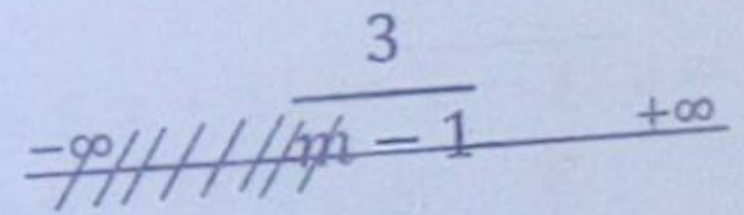
m	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$m-1$	-	o	-	+
$m+1$	-	o	o	+
a	+	o	-	+

Discussion

1^{er} cas : $\forall m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, a > 0$

$$(m-1)(m+1)x \geq 3(m+1) \Rightarrow x \geq \frac{3(m+1)}{(m-1)(m+1)}$$

$$x \geq \frac{3}{m-1}$$



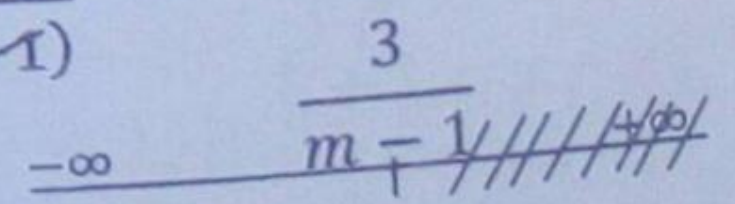
$$S = \left[\frac{3}{m-1}; +\infty \right[$$

2^{ème} cas : $\forall m \in]-1; 1[, a < 0$

$$(m-1)(m+1)x \geq 3(m+1)$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{3(m+1)}{(m-1)(m+1)}$$

$$x \geq \frac{3}{m-1}$$



$$S = \left] -\infty; \frac{3}{m-1} \right]$$

$$= -1 \text{ ou } m = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$(m+1)x \geq 3(m+1)$$

$$1 \Rightarrow (1-1)(-1+1)x \geq 3(-1+1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (1-1)(1+1)x \geq 3(1+1)$$

possible

sur \mathbb{R} les équations et inéquations :

$$\sqrt{3x-3} \Rightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 3x-3 \geq 0 \\ 1+x = 3x-3 \end{cases}$$

validité (D)

$$0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x = 3x - 3$$

$$-x = 1 + 3$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$$[2; +\infty[$$

d'où $S = \{2\}$

b) $\sqrt{x^2-4} = x+3$
 $\Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4 = (x+3)^2 \end{cases}$

Domaine de validité
 $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$D = [-3; +\infty[$

Je résous $x^2 - 4 = (x+3)^2$
 $x^2 - 4 = x^2 + 6x + 9$
 $-4 = 6x + 9 \Rightarrow 6x = -4 - 9$
 $6x = -13$
 $x = -\frac{13}{6}$

Comme $-\frac{13}{6} = -2,16 \in [-3; +\infty[$

d'où $S = \left\{ -\frac{13}{6} \right\}$

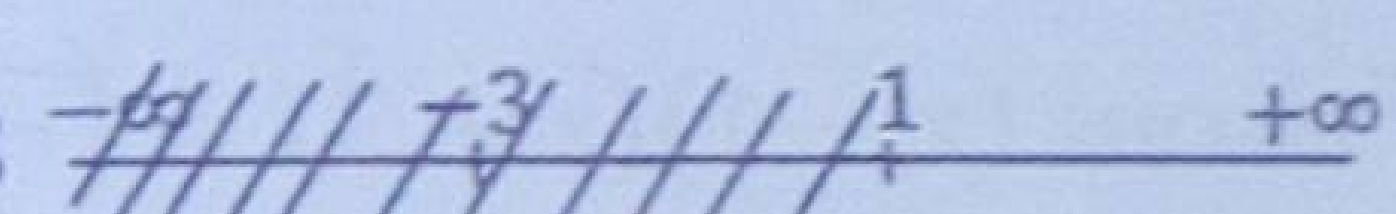
c) $|5x-2| \geq |x-1|$
 $\Leftrightarrow (5x-2)^2 \geq (x-1)^2$
 $(5x-2)^2 - (x-1)^2 \geq 0$
 $[(5x-2) - (x-1)][(5x-2) + (x-1)] \geq 0$
 $(5x-2-x+1)(5x-2+x-1) \geq 0$
 $(4x-1)(6x-3) \geq 0$
 On pose $(4x-1)(6x-3) = 0$

$$e) \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})^2 = 3^2$$

Domaine de validité D_1

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases}$$


$$\underline{D_1 = [1; +\infty[}$$

Je résous $(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})^2 = 3^2$

$$(\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + (\sqrt{x+3})^2 = 9$$

$$x-1 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + x+3 = 9$$

$$2x+2 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 9$$

$$2\sqrt{(x-1)(x+3)} = -2x+9-2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(x+3)} = \frac{-2x+7}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x+7}{2} \geq 0 \\ (x-1)(x+3) = \left(\frac{-2x+7}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Domaine de validité D_2

$$\frac{-2x+7}{2} \geq 0 \Rightarrow -2x+7 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

$$\underline{D_2 =]-\infty; \frac{7}{2}]}$$

$$3m - 3 - 6 = 0 \Rightarrow 3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = 9$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Alors $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3; -2)$

b) Je calcule la norme de \vec{u} et de \vec{v}

$\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3, -2)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ avec } x = 2 \text{ et } y = 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{13}}$$

$\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(3, -2)$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ avec } x = 3 \text{ et } y = -2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{13}}$$

Solution 2 :

$A(3; -2); B(1; 3)$ et $C(-4; 1); O(0; 0)$

a) Je calcule les produits scalaires $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

$\vec{OB} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{AO} \cdot \vec{AC}$

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{OA} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} \begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 3 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x'x'' + yy''$$

$$\vec{OB} = 3 \times 1 + (-2) \times 3 = 3 - 6 = -3$$

$$\vec{OB} = -3$$

$$\vec{BC} = 3(-5) + (-2)(-2) = -15 + 4 = -11$$

$$\vec{BC} = -11$$

$$\vec{AC} = -\vec{OA} \cdot \vec{AC} = -[3(-7) + 3(-2)] = -(-21 - 6) = 27$$

$$\vec{AC} = 27$$

Je détermine l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{MB} \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix} = 0 \text{ avec } A(3; -2) \text{ et } B(1; 3)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -2 - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - x \\ 3 - y \end{pmatrix} = 0$$

$$-x(1 - x) + (-2 - y)(3 - y) = 0$$

$$3x - x + x^2 - 6 + 2y - 3y + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$$

$$\text{à } (C): x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$$

Question 3 :

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$$

Je caractérise le cercle (C)

le centre $I(a; b)$ et le rayon R

$$(C) \text{ est de la forme } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\text{Avec } \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } I(1; 3/2)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}}$$

$$R = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

b) Je détermine la distance de $D(2; -2)$ par rapport à $(\Delta): x - 2y + 3 = 0$

$$d(D, \Delta) = \frac{|ax_D + by_D + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ avec } a = 1; b = -2; \text{ et } c = 3$$

$$x_D = 2 \text{ et } y_D = -2$$

$$d(D, \Delta) = \frac{|1 \times 2 + (-2)(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 + 4 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$d'où \boxed{d(D, \Delta) = \frac{9\sqrt{5}}{5}}$$

c) Je détermine la puissance du cercle par rapport à $E(-1; 0)$

Or le centre de (C) est $I(1; 3/2)$ et $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$P = IE^2 - R^2$$

$$\text{avec } IE = \sqrt{(x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2}$$

$$IE^2 = (x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2$$

$$IE^2 = (-1 - 1)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$IE^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{16+9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$IE^2 = \frac{25}{4}$$

$$P = \frac{25}{4} - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{25}{4} - \frac{13}{4} = \frac{25 - 13}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$d'où \boxed{P = 3}$$

Résolution sujet n°10

Activités numériques :

Exercice 1 :

Résolvons dans \mathbb{R}

$$(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(2x - 1) - x(2x - 1) = (2x - 1)(2x + 1)$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(2x - 1) - x(2x - 1) - (2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)[(2x - 1) - x - (2x + 1)] = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)[2x - 1 - x - 2x - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(-x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2$$

$$\boxed{S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}}$$

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x}{x^2-4}$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

ou

$$E =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+2) - (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x + x + 2 - (x^2 - 2x - x + 2)}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

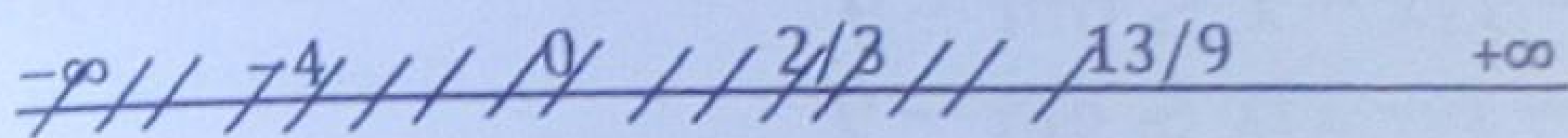
$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} + 3x + 2 - \cancel{x^2} + 3x - 2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{6x - x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Tableau de signe

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \text{Et} \\ x \geq \frac{2}{3} \\ \text{Et} \\ x \in]-\infty; 0[\cup]19/9; +\infty[\end{cases}$$



$$S =]13/9; +\infty[$$

Exercice 2 : Résolvons dans \mathbb{R}

$$(m - 2)x + 2m - 3 = (2m + 5)x + 3 - m$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$(m - 2)x + 2m - 3 = (2m + 5)x + 3 - m$$

$$(m - 2)x - (2m + 5)x = 3 - m - 2m + 3$$

$$\Rightarrow (m - 2 - 2m - 5)x = -3m + 6$$

$$\Rightarrow (-m - 7)x = -3m + 6$$

1^{er} cas : $a = 0 \Rightarrow -m - 7 = 0$

$$\Rightarrow m = -7$$

Si $m = -7$ L'équation devient

$$0x = 27 \text{ faux}$$

d'où $S = \emptyset$

2^{ème} cas : $a \neq 0 \Rightarrow -m - 7 \neq 0$

$$m \neq -7$$

on a: $(-m - 7)x = -3m + 6$

$$\Rightarrow x \geq \frac{6m-9}{m-2}$$

$$S = \left] \frac{6m-9}{m-2}; +\infty \right]$$

Réolvons dans \mathbb{R} le système

$$\begin{cases} mx - y = -m + 6 \\ 2mx + (1-m)y = 2m \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2m & 1-m \end{vmatrix} = m - m^2 + 2m$$

$$D = -m^2 + 3m = m(-m + 3)$$

1^{er} cas : $D = 0$

$$D = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = 3$$

si $m = 0$ le système devient

$$\begin{cases} -y = 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

si $m = 3$ le système devient

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y = 3\}$$

2^{ème} cas : $D \neq 0$

cà-d $m \neq 0$ et $m \neq 3$

$$S =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$$

$$\begin{vmatrix} -m+6 & -1 \\ 2m & 1-m \end{vmatrix}$$

$$+m^2+6-6m+2m$$

$$=5m+6$$

$$=3m-2m+6$$

$$=m-3-2(m-3)$$

$$=(m-3)(m-2)$$

$$\begin{vmatrix} m & -m+6 \\ 2m & 2m \end{vmatrix}$$

$$2m^2+2m^2-12m$$

$$4m^2-12m$$

$$m(m-3)$$

$$= \frac{(m-3)(m-2)}{m(-m+3)} = \frac{m-2}{-m}$$

$$y = \frac{4m(m-3)}{-m(m-3)} = -4$$

$$\left\{ \frac{m+2}{m}; -4 \right\}$$

e 3:
 ons dans \mathbb{R}
 $x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$
 $E = \mathbb{R}$

$$-4ac$$

$$(\sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})(1 + 3\sqrt{2})$$

$$2 + 2\sqrt{2} - (1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 6)$$

$$2\sqrt{2} - (-5 + 2\sqrt{2})$$

$$2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{2}$$

$\Delta' \Rightarrow 0$ l'équation admet deux solutions distinctes

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{8}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = 1$$

$$x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{8}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} + 6}{1 - 2} = \frac{7 + 4\sqrt{2}}{-1}$$

$$x'' = -7 - 4\sqrt{2}$$

$$S = \{-7 - 4\sqrt{2}; 1\}$$

$2x^2 - x + 1 > 0$
 Equation associée
 $2x^2 - x + 1 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $= 1 - 4(2)(1)$
 $= 1 - 8$
 $\Delta = -7$ pas de racine
 $2x^2 - x + 1$ est positif

Tableau de signe

x	$-\infty$
$2x^2 - x + 1$	+

$$S =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

$$x^2 + 4x - 1 < 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

Equation associée
 $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\Delta' = b'^2 - 4ac$$

$$= 4 - (-4)(1)$$

$$= 4 - 4$$

$$\Delta' = 0$$

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$-4x^2 + 4x - 1$		-	\emptyset	-	

$$S =]-\infty; 1/2[\cup]1/2; +\infty[$$

Activités géométriques

Exercice 4

1) Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles le barycentre G existe.

$$G \text{ existe} \Leftrightarrow 2\lambda - 1 + \lambda + 2 + \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \neq -\frac{1}{4}$$

$$G \text{ existe} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

2) Déterminons les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

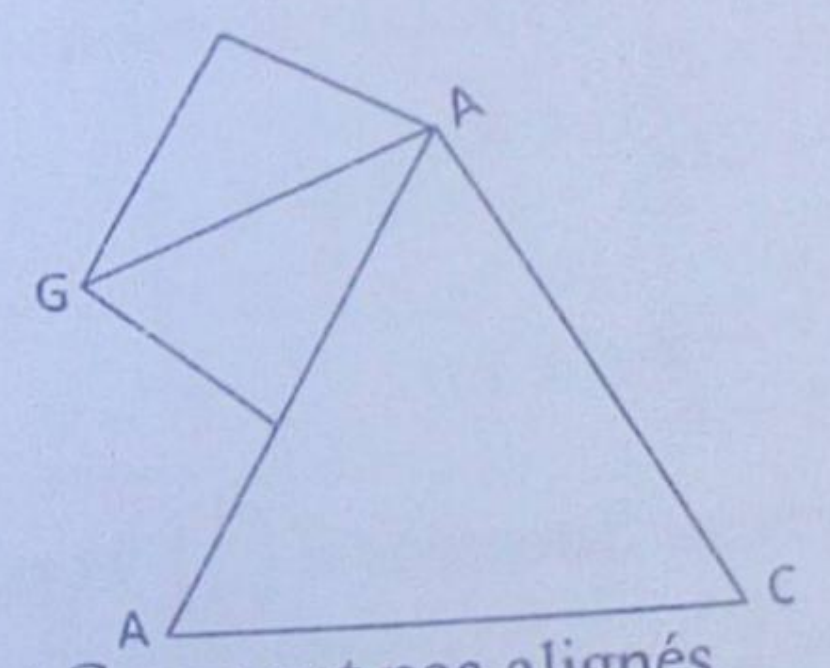
$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1 + \lambda}{4\lambda + 1} \overrightarrow{AB} + \frac{2 + \lambda}{4\lambda + 1} \overrightarrow{AC}$$

3) Construisons le barycentre G lorsque $\lambda = -1$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{-3} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ étant un repère donc les points A, B et C ne sont pas alignés.



Les points A, B et C ne sont pas alignés

donc $G \left(\frac{-1 + \lambda}{4\lambda + 1}; \frac{2 + \lambda}{4\lambda + 1} \right)$

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

b) Pour tout point M, Démontrons que $-2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MG}$

$\lambda = -1, G$ barycentre de $(A, -2), (B, -2)$ et $(C, 1)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -2\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \\
&-2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} \\
&= -2(\vec{MG} + \vec{GA}) - 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) \\
&= -2\vec{MG} - 2\vec{GA} - 2\vec{MG} - 2\vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC} \\
&= -2\vec{MG} - 2\vec{MG} + \vec{MG} - 2\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} \\
&= -3\vec{MG} - \underbrace{2\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC}}_0
\end{aligned}$$

$$-2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = -3\vec{MG}$$

Exercice 5 :

1) Démontrons que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires

$$(D) \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(D') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(D) a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pour coefficient directeur $\alpha = 2$

(D') a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour coefficient directeur $\alpha' = -\frac{1}{2}$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (1)(2) + (2)(-1) \\
&= 2 - 2
\end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y + 11 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -11 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

Cherchons x

$$2x \begin{cases} 2x - y = -11 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -22 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$5x = -23$$

$$x = -\frac{23}{5}$$

Cherchons y

$$2x \begin{cases} 2x - y = -11 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -11 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$-5y = -9$$

$$y = \frac{9}{5}$$

$$I = \left(-\frac{23}{5}; \frac{9}{5} \right)$$

3) Déterminons m pour que (Dm) passe par A(2;3)

$$A \in (Dm) \Rightarrow mx_A + (m-2)y_A + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m(2) + (m-2)(3) + m - 1 = 0$$

$$2m + 3m - 6 + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{7}{6}$$

116

4) Déterminons m pour que (Dm) soit parallèle à (D)

(Dm) a pour vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -m+2 \\ m \end{pmatrix}$ et pour coefficient directeur $\alpha'' = \frac{m}{m+2}$

(D) // (Dm) $\Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{w} sont colinéaires c-à-d

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -m+2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m - 2(-m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m + 2m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

Ou bien

$$(D) // (Dm) \Leftrightarrow \alpha' = \alpha''$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{m}{-m+2}$$

$$\Rightarrow -2m + 4 = m$$

$$\Rightarrow -2m - m = 4$$

$$\Rightarrow -3m = -4$$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

5) Déterminons m pour que (Dm) ait pour pente 3

$$\alpha'' = 3 \Rightarrow \frac{m}{-m+2} = 3$$

117

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &= -3m + 6 \\ \Rightarrow m + 3m &= 6 \\ \Rightarrow 4m &= 6 \\ \Rightarrow m &= \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

Résolution n°11

I. Activités Numériques

Exercice 1 :

1. On appelle zéro ou racine d'un polynôme, la valeur du réel x qui annule le polynôme.

2. Développons $A(x) = (x+3)(x+2)(x-5)$

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2 + 5x + 6)(x-5) \\ &= x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 25x + 6x - 30 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = x^3 - 19x - 30}$$

3. On donne $h(x) = x^3 - 19x - 30$

a) Degré de $h(x)$

• Le degré de $h(x)$ est $\boxed{d^{\circ}h = 3}$

• Coefficient de x^3

Le coefficient du terme dominant est 1

b) Calculons $h(-3)$

$$h(-3) = (-3)^3 - 19(-3) - 30 = -27 + 57 - 30 = 0$$

Conclusion : -3 est la racine de $h(x)$.
c) Déterminons le polynôme q / $h(x) = (x+3)q(x)$

$$h(x) = (x+3)q(x) \Rightarrow h(x) \overline{) \begin{array}{l} x+3 \\ q(x) \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 19x - 30 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ -3x^2 - 19x - 30 \\ \underline{3x^2 + 9x} \\ -10x - 30 \\ \underline{10x + 30} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = x^2 - 3x - 10}$$

4. Résolvons dans \mathbb{R}

$$a) h(x) = 0 \Rightarrow (x+3)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{Ou} \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{ou} \\ (x+2)(x-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{ou} \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \text{ou} \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	-2	5	$+\infty$
+3	-	o	+		
+2	-			+	
-5	-		o	+	+
(x)	o	o	o	o	o

$S = [-3; -2] \cup [5; +\infty[$

Exercice 2 :
 On reconnaît une équation par le symbole d'égalité et l'inéquation par le symbole d'inégalité.
 a- m représente le paramètre
 b- x représente l'inconnue
 a- Si $\Delta_p \neq 0$, les droites sont sécantes
 b- Si $\Delta_p = 0$, alors:
 droites sont confondues
 droites sont parallèles

Résolvons dans \mathbb{R}
 $x = x \Rightarrow x - x = 0 \Rightarrow 0x = 0, S = \mathbb{R}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{x-5} = 1$

Ensemble de définition
 $\begin{cases} x - 4 \neq 0 \\ \text{Et} \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 5 \end{cases}$

Résolution
 $\frac{(x-5) + (x-4)}{(x-4)(x-5)} = 1 \Rightarrow x(x-5) + x - 4 = (x-4)(x-5)$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + x - 4 - x^2 + 9x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

$$S = \left\{ \frac{24}{5} \right\}$$

c) $(2m+1)x + 2mx + 25m + 12 = (m+3)x + 6$
 $\Rightarrow 2mx + x + 2mx - mx - 3x + 25m + 12 - 6 = 0$
 $\Rightarrow (3m-2)x + 25m + 6 = 0 \Rightarrow$

$$(3m-2)x = -25m - 6$$

Discussion :

- Si $3m - 2 \neq 0$
 $m \neq \frac{2}{3}$, alors $x = \frac{-25m-6}{3m-2}$

$$S = \left\{ \frac{-25m-6}{3m-2} \right\}$$

Si $3m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow 0x = \frac{68}{3}$ impossible

D'où $S = \emptyset$

d) $|x-4| - |x+5| = x-1$

x	$-\infty$	-5	-4	$+\infty$
$ x-4 $	-x+4	o	-x+4	x-4
$ x+5 $	-x-5	o	x+5	x+5
$ x-4 - x+5 $	9	o	-2x-1	-9

$$\forall x \in]-\infty; -5], 9 = x - 1 \Rightarrow x = 10 \notin]-\infty; -5]$$

$$\forall x \in [-5; 4], -2x - 1 = x - 1 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 \in [-5; 4]$$

$$\forall x \in [4; +\infty[, -9 = x - 1 \Rightarrow x = -8 \notin [4; +\infty[$$

D'où $S = \{0\}$

e) $|2x + 1| < |x|$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a: $(2x + 1)^2 < x^2$

$$\Rightarrow (2x + 1)^2 - x^2 < 0 \Rightarrow$$

$$(2x + 1 - x)(2x + 1 + x) < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(3x + 1) < 0$$

On pose $(x + 1)(3x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$-1/3$	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$3x + 1$	-	-	0	+
$(x + 1)(3x + 1)$	+	0	-	+

$S =]-1; -1/3[$

Exercice 3 :

1. Résolvons dans \mathbb{R}^2 , le système $3x + 2y = 14$
 $2x - 3y = 5$

• Cherchons Δ_p :

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 \Rightarrow \Delta_p = -13$$

• Cherchons D_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & - \\ 5 & - \end{vmatrix}$$

• Cherchons

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Trouvons x

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-5}{-13}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{-13}{-13}$$

$S = \{(4; 1)\}$

Interprétation
 Les deux droites

2. Dédution
 $\begin{cases} 3(x - 1)^2 \\ 2(x - 1)^2 \end{cases}$

Posons : * $(x - 1) = 2$
 $\Rightarrow (x - 1) - 2$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \\ *y^2 = 1 \Rightarrow y^2 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

D'où $S = \{($

ométries

(B; 4)}

m pour que G soit l'isobarycentre de

$$2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \{-2; 2\}}$$

our que G existe

$$0 \Rightarrow \boxed{m^2 \neq -4}$$

ur du segment [AB] car il est
e A et B.

un système est un point.

M est le barycentre de A, B et C.

$$MC = \vec{0}$$

A, B et C car $3 - 2 + 1 = 2 \neq 0$,
1).

onction de \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC}

$$3\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

in, fixons O.

$$\vec{0} - 2\vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} = \vec{0}$$

$$\vec{OC} = \vec{0}$$

$$-\vec{OB} = \vec{0}$$

$$+\vec{OC})$$

n fonction de \vec{AB} et \vec{AC}

On sait que $\vec{OG} = \frac{1}{2}(3\vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC})$

Pour tout $O = A$, on a $\vec{AG} = \frac{1}{2}(3\vec{AA} - 2\vec{AB} + \vec{AC})$

$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{2}(-2\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\boxed{\vec{AG} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}}$$

b) Coordonnées de G dans le repère (A, \vec{AB} , \vec{AC})

$$\boxed{G = \left(-1; \frac{1}{2}\right)}$$

4) a) Démontrons que $\vec{AG} = \vec{AM}$

$$*\vec{AG} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$*3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

Fixons le point A.

$$3\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} = \vec{0}$$

$$2\vec{MA} - 2\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{MA} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{MA} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\text{En conclusion : } \begin{cases} \vec{AG} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \vec{AM} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\vec{AG} = \vec{AM}}$$

b) Les points G et M sont confondus dans la figure.

$f(M) = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$
 bijective car $3 - 2 + 1 = 2 \neq 0$

Solution sujet n°12
Activités numériques
Exercice 1 :

Tous dans \mathbb{R} les équations et inéquations

$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1; b = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et $c = \sqrt{6}$
 $-(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4(1)(\sqrt{6})$
 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{6}$

$-2\sqrt{6} + 3 - 4\sqrt{6}$
 $2\sqrt{6}$ or $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$
 $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

$\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{2(1)}$
 $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\frac{+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{2(1)}$
 $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

2) $\frac{1-2x}{x} < 4 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} - 4 < 0$

$\frac{1-2x-4x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{1-6x}{x} < 0$

On pose $\frac{1-6x}{x} = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1-6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}$

Tableau de signes

x	$-\infty$	0	1/6	$+\infty$
1-6x	+	0	+	-
x	-	0	+	+
$\frac{1-6x}{x}$	-	/	+	-

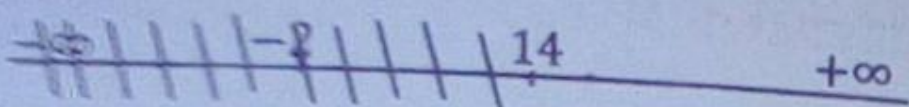
$S =]-\infty; 0[\cup]1/6; +\infty[$

3) $\sqrt{x+2} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (\sqrt{x+2})^2 \geq 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 \geq 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 16 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 14 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [-2; +\infty[\\ x \in [14; +\infty[\end{cases}$

Alors $S = [-2; +\infty[\cap [14; +\infty[$



d'où $S = [14; +\infty[$

4) $|6 - 3x| - 9 = 0 \Rightarrow |6 - 3x| = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x = -9 \\ 6 - 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -9 - 6 \\ -3x = 9 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -15 \\ -3x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{3} \\ x = \frac{-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

d'où $S = \{-1; 5\}$

Solution 2

(E): $(m - 2)x^2 - (m + 3)x + 5 = 0$

1) Valeur de m pour laquelle l'équation (E) est du 1^{er} degré

$$\Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

d'où $m = 2$

2) Valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) est du second degré

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \Rightarrow m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

d'où $m \neq 2$ ou $m \in \mathbb{R} - \{2\}$

3) Valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) admet une solution double

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \text{ ou } \Delta' = 0$$

(E): $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 5m = 0$
 $\Delta' = b'^2 - 4ac$ avec $a = m - 2$ et $b' = \frac{-2(m + 3)}{2}$

$$\begin{aligned} &= -(m + 3) \text{ et } c = 5m \\ \Delta' &= [-(m + 3)]^2 - (m - 2)(5m) \\ \Delta' &= m^2 + 6m + 9 - (5m^2 - 10m) \\ \Delta' &= m^2 + 6m + 9 - 5m^2 + 10m \\ \Delta' &= -4m^2 + 16m + 9 \\ \Delta' = 0 &\Rightarrow -4m^2 + 16m + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta'_m = b'^2 - ac \text{ avec } a = -4; b' = \frac{16}{2} = 8; c = 9$$

$$\Delta'_m = 4^2 - (-4)(9)$$

$$\Delta'_m = 16 + 36 = 52$$

$$m' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'_m}}{a} = \frac{-4 - \sqrt{52}}{-4} = \frac{4 + \sqrt{52}}{4}$$

$$m'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'_m}}{a} = \frac{-4 + \sqrt{52}}{-4} = \frac{4 - \sqrt{52}}{4}$$

d'où $m = \frac{4 - \sqrt{52}}{4}$ et $m = \frac{4 + \sqrt{52}}{4}$

4) Valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) admet deux solutions distinctes

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \text{ ou } \Delta' > 0$$

D'après 3) $\Delta' = -4m^2 + 16m + 9$
Or $\Delta' > 0 \Rightarrow -4m^2 + 16m + 9$
On pose $-4m^2 + 16m + 9 = 0$

Alors $m = \frac{4-\sqrt{52}}{4}$ et $m = \frac{4+\sqrt{52}}{4}$

m	$-\infty$	$\frac{4-\sqrt{52}}{4}$	$\frac{4+\sqrt{52}}{4}$	$+\infty$
$-4m^2 + 16m + 9$	///	0	0	///

d'où $m \in \left] \frac{4-\sqrt{52}}{4}; \frac{4+\sqrt{52}}{4} \right[$

5) Je calcule S et P en fonction du paramètre m

(E): $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 5m = 0$
avec $a = m-2$; $b = -2(m+3)$ et $c = 5m$

$S = \frac{-b}{a} = \frac{2(m+3)}{m-2} = \frac{2m+6}{m-2}$

D'où $S = x' + x'' = \frac{2m+6}{m-2}$

$P = \frac{c}{a} = \frac{5m}{m-2} \Rightarrow P = x' \cdot x'' = \frac{5m}{m-2}$

6) Pour = 0, Je résous dans \mathbb{R} l'équation (E)

$P = x' \cdot x'' = \frac{5(0)}{0-2} = 0$

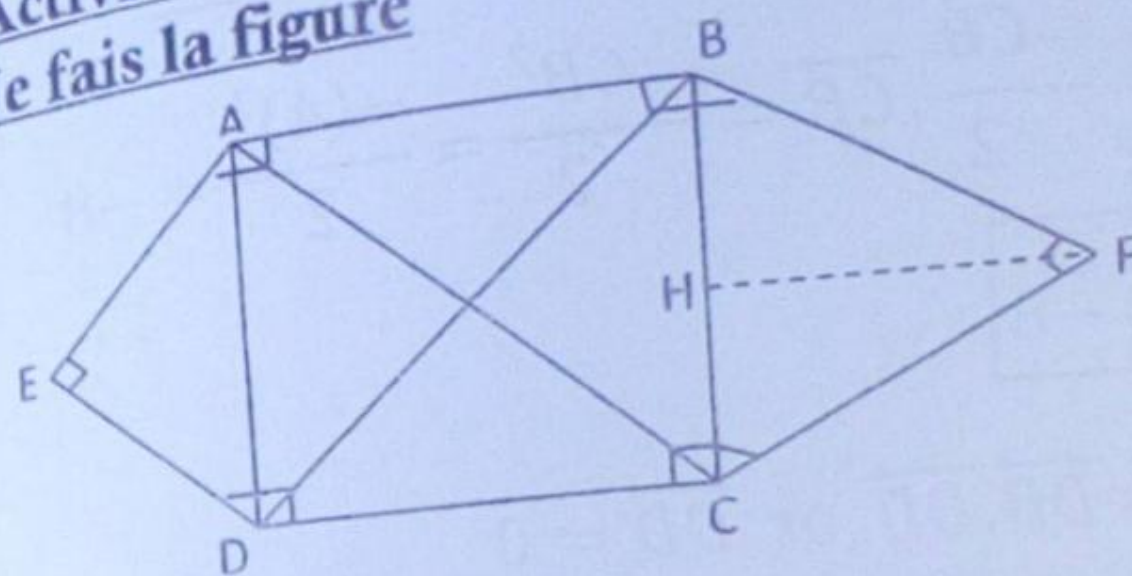
$S = x' + x'' = \frac{2(0)+6}{0-2} = \frac{6}{-2} = -3$

$\begin{cases} x' \cdot x'' = 0 \\ x' + x'' = -3 \end{cases}$ Donc l'une des racines est nulle et l'autre est égale à -3

d'où $S = \{-3; 0\}$

II. Activités géométriques

1) Je fais la figure



$AB = BC = DC = AD = BF = CF = AE = 4$
 $\hat{B} = \hat{C} = \hat{F} = 60^\circ$

2) Je calcule les produits scalaires :

$\vec{DA} \cdot \vec{DB} = \vec{DA} \cdot \vec{DA} = DA^2 = 4^2 = 16$

$\vec{DA} \cdot \vec{DB} = 16$

$\vec{DA} \cdot \vec{BF} = \vec{DA} \cdot \vec{BI}$ or $\vec{BI} = \frac{\vec{BC}}{2}$

$\vec{DA} \cdot \vec{BF} = \vec{DA} \cdot \frac{\vec{BC}}{2}$ or $\vec{BC} = -\vec{DA}$

$\vec{DA} \cdot \vec{BF} = -\vec{DA} \cdot \frac{\vec{DA}}{2} = -\frac{DA^2}{2} = -\frac{(4)^2}{2} = -8$

$\vec{DA} \cdot \vec{BF} = -8$

$\vec{EA} \cdot \vec{AC} = \|\vec{EA}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{EA, AC})$
Avec $(\widehat{EA, AC}) = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$

D'où $\vec{EA} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\overline{FC} \cdot \overline{DA} = \overline{FC} \cdot \overline{CB} = \overline{IC} \cdot \overline{CB} \text{ or } \overline{IC} = -\frac{\overline{CB}}{2}$$

$$\overline{FC} \cdot \overline{DA} = -\frac{\overline{CB}}{2} \cdot \overline{CB} = -\frac{CB^2}{2} = \frac{-(4)^2}{2} = -8$$

$$\boxed{\overline{FC} \cdot \overline{DA} = -8}$$

$$\overline{DB} \cdot \overline{DE} = \overline{DB} \cdot \overline{DD} \text{ or } \overline{DD} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{DB} \cdot \overline{DE} = 0}$$