

# Fascicule TS2

## LIMITES DE FONCTIONS

### EXERCICE 1 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1)  $f(x)=5x^3-3x+1$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$  et en 1.  
et en (-1).

2)  $f(x)=-2x^4+3$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$  et en 0.  
 $\infty$  et en 2.

3)  $f(x)=(-3x^3+x-1)^3$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$  et en 1.  
 $-\infty$ .

4)  $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

5)  $f(x)=\frac{3x^2-5}{5x-1}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

6)  $f(x)=\frac{(3x-5)^2}{-x^3+2x+4}$  ; en  $+\infty$ , en  $-\infty$

### EXERCICE 2 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1)  $f(x)=2x+5-\frac{x-4}{-x^2+x-11}$  ; en  $-\infty$ .

2)  $f(x)=2+\frac{3}{x^2-9}$  ; en  $+\infty$ .

3)  $f(x)=x+1-\frac{3x^3}{(x+2)^2}$  ; en  $+\infty$ .

4)  $f(x)=-x+1-\frac{3x^3}{(x+2)^2}$  ; en  $-\infty$ .

### EXERCICE 3 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1)  $f(x)=\frac{x-4}{x^2-6x+5}$  ; en 1 et en 5.

2)  $f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$  ; en 2 et en -2.

3)  $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$  ; en 1 et en -2.

4)  $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$  ; en 3 et en -3.

5)  $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}$  ; en 1.

6)  $f(x)=\frac{5x^2-1}{2x-4}$  ; en 2.

### EXERCICE 4 :

Déterminer la limite en a de la fonction f.

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}; a=4.$$

$$2) f(x) = \frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}; a=3.$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+1}}{1-x}; a=1.$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}; a=3.$$

### **EXERCICE 5 :**

Calculer les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sqrt{x} - 5$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x+1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} + x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{5}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3)(5-\sqrt{x})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2+x-7} + 2x$$

### **EXERCICE 6 :**

Etudier les limites de la fonction f en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$1) f(x) = \sqrt{4x^2+2x-1} - 2x + 3$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{x}$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1} - x}{3x}$$

### **EXERCICE 7 :**

Démontrer que pour tout  $x > -1$ ,  $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ .

En déduire la limite en  $+\infty$  de  $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$ .

### **EXERCICE 8 :**

f est une fonction telle que pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x+1}$ .

Quelle est la limite de f en  $+\infty$  ?

### **EXERCICE 9 :**

Démontrer que pour tout  $x$  réel,  $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$ .

En déduire la limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction  $f: x \mapsto x^2 - 5\sin x$ .

### **EXERCICE 10**

Etudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

1)  $f(x) = 2x + 1 + 3\sin x$

3)  $f(x) = \frac{x}{2 - \sin x}$

2)  $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{\sin x}{x}$

4)  $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}$

### **EXERCICE 11 :**

En utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée, étudier la limite de la fonction  $f$  en l'endroit indiqué.

1)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$  ; en  $-\infty$

4)  $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$  ; en  $+\infty$

2)  $f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^3$  ; en  $+\infty$

5)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$  ; en 5

3)  $f(x) = \cos^2 \left( \pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)$  ; en  $+\infty$

### **Exercice 12**

Soit la fonction  $f$  définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Soit  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$  ; montrer que 2 est une racine de  $P$  et factoriser  $P(x)$
2. Déterminer le domaine de définition de  $f$  et Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
3. Montrer la droite  $(D) : x = 1$  est une asymptote verticale de  $(C_f)$
4. Trouver les autres asymptotes de  $(C_f)$  et déterminer la position relative par rapport à  $(C_f)$ .

### Exercice 13

Soit la fonction  $g$  définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

On note  $(C_g)$  sa représentation graphique.

1. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de  $g$ .
3. Démontrer que la droite d'équation  $(D) : y = x + 2$  est une asymptote à la courbe de  $(C_g)$ .
4. Préciser la position relative de  $(C_g)$  et de  $(D)$

## CONTINUITÉ

### Exercice 14

Étudier la continuité en  $x_0$  des fonctions  $f$  ;  $g$  et  $h$

1.  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 7$  ;  $x_0 = 2$
2.  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 27 & \text{si } x = 3 \end{cases}$  ;  $x_0 = 3$
3.  $h(x) = \frac{3x+3}{x-5} + 2x+5$  ;  $x_0 = 4$  ,  $x_0 = 5$

### Exercice 15.

1. Soit  $a$  un nombre réel donné et  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- a. Étudier la continuité au point  $x_0 = 1$ . Discuter suivant les valeurs du réel  $a$ .
- b. Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1 - |x-1|}{x-2}$  ;

- a. Étudier la continuité au point  $x_0 = 1$  ,  $x_0 = 2$ .
- b. Déterminer le plus grand intervalle de  $\mathbb{R}^+$  où  $g$  est continue

### Exercice 16

Les fonctions suivantes sont-elles continues sur leurs ensembles de définition sinon déterminer leurs points de discontinuités :

- |  |  |
|--|--|
| a. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$   | b. $f(x) = 4x^2 + 2x - 100$  |
| c. $f(x) = \frac{4x^2 - x + 2}{x^2 + 5x + 6}$  | d. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 8}$   |
| e. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 4}{x^2 + x + 6}}$  | f. $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{3x + 1}$   |
| g. $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(x) = \frac{mx + 4}{2x - 4} & \text{si } x \neq 2 ; m \in \mathbb{R} \end{cases}$ | h. $\begin{cases} f(x) = -3x + 1 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ f(\frac{3}{2}) = 5 \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ |

### Exercice 17.

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur son ensemble de définition.

- |  |   |
|--|---|
| a. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x-a} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x - b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} f(a) = b \\ f(x) = \frac{x+1}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases}$ |
|--|---|

$$c. \begin{cases} f(x) = 3x+a & \text{si } x > 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = x^2 - \sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} f(a) = 1 \\ f(x) = \frac{x+a}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \end{cases}$$

### Exercice 18.

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$  et

la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 27 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Calculer la limite de  $f$  au point  $x_0 = 3$ . En déduire que la fonction  $g$  est un prolongement par continuité de  $f$ .

### Exercice 19.

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -3x+2 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x+7 & \text{si } -1 < x < 3 \\ f(x) = -5x+28 & \text{si } 3 < x < 6 \\ f(x) = x+3 & \text{si } x > 6 \end{cases} \quad \text{et } f(-1) = 5 \text{ et } f(6) = 4.$$

- Construire le graphe de la fonction  $f$ .
- $f$  est-elle continue en  $x_0 = -1$ ?  $x_0 = 3$ ?  $x_0 = 6$  ?
- Sur quel ensemble  $f$  est-elle continue ?
- Quelle valeur doit on donner à  $f(3)$  pour que  $f$  soit continu en  $x_0 = 3$  ?

## DERIVABILITE

### EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $a$ .

1)  $f(x) = |x^2 - 1|$ ;  $a = 2$

3)  $\begin{cases} f(x) = 5x^2 - 3 & \text{si } x \in [0; 1] \\ f(x) = 3x - 1 & \text{si } x \in [1; 3] \end{cases}$ ;  $a = 1$

2)  $f(x) = \frac{x-2}{2-|x|}$ ;  $a = 0$

## EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, préciser si la courbe représentative de la fonction  $f$  admet une tangente ou des demi-tangentes au point  $x_0$  indiqué. Si oui, donner une équation de la tangente en ce point.

1)  $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{x}; x_0 = \frac{1}{3}$

3)  $f(x) = \sqrt{|x^2 + 3x|}; x_0 = -3$

2)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}; x_0 = 2$

4)  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|; x_0 = 3$

## EXERCICE 3

$a \in \mathbb{R}$ ,  $f_a$  la fonction définie par :  $f_a(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x^2}$ .

a) Déterminer l'ensemble sur lequel  $f_a$  est dérivable.

b) Calculer  $f_a'(x)$  pour tout  $x$  appartenant au domaine de définition de  $f_a'$ .

c) Déterminer  $a$  pour que la courbe de  $f_a$  ait, en son point d'abscisse  $-1$ , une tangente parallèle à la droite d'équation  $y=0$ .

## EXERCICE 4

(C) est la courbe de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ .

a) Trouver le point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y=x+4$ .

b) Donner une équation de cette tangente.

## EXERCICE 5

A l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$

### EXERCICE 6

En utilisant la dérivée de fonctions composées, calculer  $f'(x)$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = (4 - 3x)^3$

4)  $f(x) = \frac{1}{(4 - 5x)^3}$

7)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

2)  $f(x) = (3x + 1)^5$

5)  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

8)  $f(x) = \left(\frac{1}{2 - \cos 3x}\right)^2$

3)  $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)^3$

6)  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

9)  $f(x) = \tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

### EXERCICE 7

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$ .

1) Déterminer la fonction  $f'$  dérivée de  $f$ .

2) En déduire la fonction dérivée des fonctions  $g$  et  $h$  telles que :

$$g(x) = \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} \text{ et } h(x) = \frac{3\cos x-4}{\cos x-2}.$$

### EXERCICE 8

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes.

1)  $h(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$

4)  $m(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

2)  $g(x) = \frac{(x^2+5)^3}{x}$

5)  $n(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

3)  $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$

6)  $v(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

### EXERCICE 9

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

### EXERCICE 10

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[-1; 0]$ .
2. Déterminer la valeur approchée à  $10^{-1}$  près par défaut de  $\alpha$ .

### EXERCICE 11

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[3; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$ .

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. En déduire que l'équation  $\sqrt{x-3} = \frac{4}{x^2}$  possède une unique solution.

### EXERCICE 12

On considère la fonction :

$$f : \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow [1; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

1. Démontrer que  $f$  est bijective.
2. Calculer :  $f^{-1}(\sqrt{2})$  ;  $f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$  ;  $f^{-1}(2)$ .

## ETUDES DE FONCTIONS

**EXERCICE 1** : On se propose d'étudier la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}$$

- 1) Quel est le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  ?
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur ce domaine et en particulier au point  $x = 2$ .
- 3) Etudier les limites aux bornes de  $D_f$ , les variations de  $f$  et construire sa courbe représentative  $(C)$ . On mettra en évidence les deux asymptotes obliques de  $(C)$  et on précisera leurs positions par rapport à  $(C)$ .

**EXERCICE 2** :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

- 1) En étudiant la périodicité et la parité de la fonction  $f$ , justifier le choix de l'intervalle  $I = [0, \pi]$  comme intervalle d'étude.
- 2) Etudier les variations de  $f$  sur  $I$ . Tracer la courbe représentative de la restriction de  $f$  à
- 3)  $[-\pi, \pi]$ .
- 4) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a, dans  $I$ , une solution unique dont on donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

### **EXERCICE 3 :**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  telles que :

$$g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 + x}{1 - x}}$$

- 1) Etudier et représenter graphiquement la fonction  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 2) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  et les limites aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Déterminer les branches infinies de  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .
- 4) Montrer que  $(\forall x \in D_f) f'(x) = \frac{g(x)}{2f(x)(1-x)^2}$
- 5) Tracer  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **EXERCICE 4 :**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable  $x$  définie par :  $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite du point  $x_0 = -1$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 3) Etudier les branches infinies de  $(C)$  et la concavité de  $(C)$ .
- 4) Etudier les variations de  $f$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ 
  - a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$
  - b) Déterminer  $g^{-1}(x)$ .
- 6) Tracer  $(C)$  et la courbe de  $g^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **EXERCICE 5:**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Préciser le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Montrer que  $f$  est impaire.
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  au point  $x_0 = 0$ .
- 4) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 5) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque et donner l'expression de  $f^{-1}(x)$ .
- 6) Préciser la position de  $(C)$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- 7) Tracer  $(C)$  et la courbe de  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**EXERCICE 6 :** On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

On désigne par  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  ( $OI=4\text{cm}$ ,  $OJ=2\text{cm}$ )

- 1) Etudier la continuité de  $f$ .
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-\frac{1}{2}$  et en  $\frac{1}{2}$ .
- 3) Démontrer les équivalences suivantes :
  - a)  $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ .
  - b)  $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right]$ .

En déduire le signe de  $f'$ .

- 4) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

En déduire le tableau de variation de  $f$ .

- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

En déduire que la courbe  $(C)$  admet 2 asymptotes d'équations  $y = -x$  et  $y = 3x$ .  
Construire  $(C)$ .

- 5) a) Démontrer que  $f$  détermine une bijection  $h$  sur  $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ .

Démontrer que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - h^{-1}(x)]$  et en déduire que la représentation  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$  et  $(C)$  ont une asymptote commune.

Construire la courbe  $(\Gamma)$

c) Calculer  $h^{-1}(0)$  et déterminer une équation de la tangente à  $(\Gamma)$  au point de coordonnées  $(0, h^{-1}(0))$ .

EXERCICE 7 : Soit la fonction  $f(x) = \begin{cases} x+2 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x < 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{|x^2 - 2x| + 1}}, & x \geq 0 \end{cases}$

- 1) Déterminer  $D_f$  puis écrire  $f(x)$  sans les valeurs absolues.
- 2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 et en 2.  
b) Interpréter les résultats.
- 3) Etudier les branches infinies de  $f$ .
- 4) Etudier les variations de  $f$
- 5) On pose  $g(x) = f(x)$  dans  $[2, +\infty[$ .  
a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
b) Sans expliciter  $g^{-1}$ , étudier la dérivabilité et les variations de  $g^{-1}$ .  
c) Calculer  $(g^{-1})'(2)$  puis expliciter  $g^{-1}(x)$
- 6) Tracer  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  dans un même repère orthonormé.

EXERCICE 8 : Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < -1, \\ \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} & \text{si } x \geq -1, \end{cases}$

- 1/ Donner le domaine de définition de  $f$  et calculer les limites à ses bornes.
- 2/ Etudier la continuité de  $f$  sur son ensemble de définition.
- 3/ Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ , puis calculer les dérivées de  $f$  sur les intervalles où elle est dérivable, puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4/ Dans un repère orthonormé (unité 2cm) construire la courbe  $(C_f)$ . On précisera les asymptotes ainsi que la tangente au d'abscisse  $x = 0$ .

5/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[-1, +\infty[$ .

- Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$  dont on précisera les variations.
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[-1, +\infty[$ .
- Calculer  $g^{-1}(1)$ .
- Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$ .
- Construire  $Cg^{-1}$  de  $g^{-1}$  dans le même repère que  $Cf$ .

EXERCICE 9 : Soit la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x - |x^2 - 1|}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- Déterminer  $Df$  puis écrire  $f$  sans les valeurs absolues.
- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $0$ . Interpréter les résultats.
- Etudier les branches infinies et les variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[2; 3]$ .
- Soit  $h=f$  sur  $[0, +\infty[$ . Montrer  $h$  admet une bijection réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de définition. Etudier la dérivabilité et les variations de  $h$ .
- Calculer  $h^{-1}(1)$  puis tracer  $Cf$  et  $Ch^{-1}$  dans un même repère.

EXERCICE 10 : Soit la fonction  $g(x) = 1 - 2\cos x$ .

- Résoudre dans  $I = [0, \pi]$   $g(x) = 0$  puis étudier le signe de  $g$  sur  $[0, \pi]$ .
- Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^2 x}$ . Déterminer  $Df$ .
- Etudier la parité et la périodicité de  $f$ . Interpréter.
- Justifier le choix de l'intervalle  $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  comme intervalle d'étude.
- Calculer les limites de  $f$  en  $\pi/2$ .
- Montrer que  $f'(x) = \frac{3(\sin x)g(x)}{\cos x}$ . Donner le tableau de variation de  $f$  sur  $J$ .
- Tracer  $Cf$ .

EXERCICE 11 : Soit  $f(x) = 1 + 4\cos x$

- Déterminer le domaine de  $f$ .

- 2) Montrer que le domaine d'étude peut être réduit à  $[0; \pi]$ .
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Tracer  $C_f$ .
- 5) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  sur  $[0; \pi]$  telle que  $\pi/2 < \alpha < \pi/2$ .

### PRIMITIVES

**EXERCICE 1 :** Déterminer les primitives sur  $I$  de chacune des fonctions suivantes.

- a)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$  ;  $I = \mathbb{R}$
- b)  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x^2}$  ;  $I = ]0; +\infty[$
- c)  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$  ;  $I = ]0; +\infty[$

**EXERCICE 2 :** Déterminer la primitive  $F$  sur  $I$  de chacune des fonctions suivantes vérifiant la condition indiquée :

- a)  $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$  ;  $I = \mathbb{R}$  et  $F(-1) = 0$
- b)  $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x^2}$  ;  $I = ]-\infty; 0[$  et  $F(-2) = 1$
- c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  et  $F(1) = 0$
- d)  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x - 6)^2$  ;  $I = \mathbb{R}$  et  $F(-1) = 9$
- e)  $f(x) = \sqrt{x}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  et  $F(9) = 20$

Indication : calculer d'abord la dérivée de  $x \mapsto x\sqrt{x}$ .

**EXERCICE 3 :** Déterminer une primitive sur  $I$  de chacune des fonctions suivantes :

- a)  $f(x) = (-2x + 1)^5$  ;  $I = \mathbb{R}$
- g)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$  ;  $I = ]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\text{b) } f(x) = x^3 (x^4 - 1)^2 ; I = \mathbb{R}$$

$$= ]1 ; +\infty[$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}} ; I =$$

$$\text{c) } f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 3) ; I = \mathbb{R}$$

$$]-\infty ; -1[$$

$$\text{i) } f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} ; I =$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{3}{(3x + 4)^3} ; I = ]-\frac{4}{3} ; +\infty[$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{6x - 9}{(x^2 - 3x + 2)^4} ; I = ]1 ; 2[$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x + 3}} ; I = ]-\infty ; \frac{3}{4}[$$

**EXERCICE 4 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$  par  $f(x)$

$$= \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}$$

1) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$  distinct de  $-2$  et de  $2$  :

$$f(x) = \frac{a}{(x - 2)^3} + \frac{b}{(x + 2)^3}$$

2) En déduire une primitive de  $f$  sur  $] -2 ; 2[$

**EXERCICE 5 :** Soit  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 1}$

1) Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$

2) En déduire une primitive de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty [$

**EXERCICE 6 :** Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  sur  $I$ .

a)  $f(x) = \cos x + \sin x$  ;

$I = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = x + \sin x$  ;

$I = \mathbb{R}$

c)  $f(x) = x^2 + 1 + \tan^2 x$  ;

$I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

d)  $f(x) = \tan^2 x$  ;

$I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

e)  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$  ;

$I = \mathbb{R}$

f)  $f(x) = \sin x \cos^2 x$  ;

$I = \mathbb{R}$

g)  $f(x) = \frac{1}{3} (5x^4 + 1) \sin(x^5 + x)$  ;

$I = \mathbb{R}$

h)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  ;

$I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

i)  $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$  ;

$I = ]0 ; \pi[$

**EXERCICE 7 :** Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour

tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  on ait : 
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 + \sin x} + \frac{b \cos x}{1 - \sin x}$$

En déduire une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

### **Exercice 8**

1) Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2) En déduire une primitive sur  $]1; +\infty[$  de la fonction  $f / f(x) = \frac{-2}{x(x^2 - 1)}$

### **Exercice 9**

1) On suppose être dans l'intervalle de continuité de f. Déterminer une primitive de f

a)  $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$  ;      b)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$  ;      c)  $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$  ;

d)  $f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$       e)  $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+6x-1)}$  ;

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en a

a)  $f(x) = -x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  ; a=1 ; b)  $f(x) = (x^2-2)\sqrt{x^3-6x+4}$  ; a=0

c)  $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$  ; a= $\frac{\pi}{2}$  ; d)  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$  ; a=0

## **SERIE NOMBRES COMPLEXES**

### **EXERCICE 1 :**

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1.  $z = (2+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

5.  $z = (2+i)(5-8i)(1-i)$

9.  $z = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$

2.  $z = (2+5i)^2$

6.  $z = (2+i)^2(3+4i)$

10.  $z = \frac{3-3i}{1+i}$

3.  $z = \left(\frac{1}{2}-4i\right)^2$

7.  $z = (2+i)^2(3+4i)$

11.  $z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

4.  $z = (2+5i)(2-5i)$

8.  $z = (-1+2i)^3$

12.  $z = \frac{1}{2i-5} - \frac{1-i}{5+2i}$

### **EXERCICE 2 :**

Pour quelles valeurs de x, le nombre complexe  $z=(x+i) [x+5-i (x-7)]$  est – il un imaginaire pur ?

### **EXERCICE 3 :**

Pour tout nombre complexe différent de 1, on définit le nombre complexe  $Z = \frac{z-2i}{z-1}$ . On pose  $z=x+iy$  et  $Z=X+iY$ , avec  $x, y, X$  et  $Y$  réels.

1. Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

#### **EXERCICE 4 :**

Pour tout nombre complexe différent de -1, on pose  $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+z}$ .

1. Montrer que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit réel, est une droite privée d'un point.
2. Montrer que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit, imaginaire pur est un cercle, privé d'un point.

#### **EXERCICE 5 :**

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit réel.

1.  $Z = (z+1)(\bar{z}-2)$
2.  $Z = \frac{z+2i}{z-4i}$
3.  $Z = 2z^2 - 3z + 1.$

#### **EXERCICE 6 :**

Calculer le module de  $z$  dans les cas suivants :

1.  $z=1-i\sqrt{3}$
2.  $z=\sqrt{3}+i$
3.  $z=-2(1+i)^6$
4.  $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$
5.  $z=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$
6.  $z=\frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}$

#### **Exercice 7 :**

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(3-2i)(1-i)-3i+\sqrt{2}+(3-4i)(3+4i) ; (1+i)^2 \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} ; \frac{4+5i}{2-i} - \frac{1-3i}{1+i} + (2i+3)i ;$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}} ; \frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4} ; i^3(1+3i)\left(\frac{1}{i}-2\right) ; (1+i)^n, n \in \mathbb{Z}$$

2. On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculer :  $\bar{j} ; j^2 ; j^3 ; 1+j+j^2 ; 1+j^2+j^4 ; \frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}$ .

### Exercice 8 :

Déterminer et représenter l'ensemble des points  $M(z)$  du plan complexe muni d'un R.O.N.D tels que :

- a)  $Z = (z-2)(\bar{z}+i)$  soit réel ;
- b)  $Z = (\bar{z}-2)(z-i)$  soit imaginaire pur ;
- c)  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$  ; d)  $\frac{1+z}{z} \in \mathbb{R}$  ; e)  $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$
- f)  $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) - 3 = 0$  ; g)  $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$
- h)  $|z+\bar{z}-1| = 4$

### EXERCICE 9 :

1) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : 1

a)  $z_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$  ; b)  $z_2 = \frac{(2-3i)(1+i)}{(3+5i)^2}$  c)  $z_3 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$

2) Mettre chacun des complexes suivants sous forme trigonométrique.

a)  $z_1 = \frac{2i - 2\sqrt{3}}{4i + 4}$ ; b)  $z_2 = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$  c)  $z_3 = \sin \frac{\pi}{2} + i \cos \frac{\pi}{2}$ ; d)  $z_4 = 1 - i \tan \frac{\pi}{10}$  e)

$z_5 = \frac{1 - \cos \theta - i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$ ;  $\theta \in \mathbb{R}$  ; f)  $z = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^3$

3)a) On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; calculer  $j^2$ . En déduire le calcul de :

$1 + j + j^2$ ;  $j^3$ ;  $\frac{1}{j}$

b) Démontrer que ,  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  on a :

$$2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

4) a) Déterminer le module et un argument de :

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = 1 + i$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$

b) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

### EXERCICE 10

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$

a)  $(3 + 5i)z = 2i - z$ ; b)  $\frac{z+1}{z-1} = 2i$  ; c)  $z - (1+i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$ ; d)  $\frac{iz}{z-2i} = 3$  e)

$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$  f)  $\overline{(1+i)z - 1 + i} = \bar{z} - i$  ; g)  $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$

2) On considère la fonction  $f$  de la variable complexe  $z$  définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

a) Montrer qu'elle admet une solution imaginaire pure

b) Résoudre  $f(z) = 0$

c) Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique

3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$$z + \frac{1}{z} = 1; \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

Soit  $p(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$

a) Exprimer  $\frac{p(z)}{z^2}$  en fonction de  $Z = z + \frac{1}{z}$

b) Résoudre  $P(z) = 0$

**4) Soit l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C} : z^2 + 2z + 4 = 0$**

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\text{Im}(\alpha) > 0$  les solutions de cette équation

- Donner la forme algébrique de  $\alpha$  et  $\beta$
- Mettre  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme trigonométrique et placer leurs images dans le plan complexe.
- Déterminer  $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$  en fonction de  $\beta$ . Q'en déduire pour  $\alpha^3$  et  $\beta^3$  ?
- Mettre  $\beta^{24}$  sous forme algébrique.

### **EXERCICE 11**

- Déterminer le module et un argument de  $4\sqrt{3} + 4i$
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E) = z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$ .  
 $\oplus$  en écrivant  $z$  sous la forme  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) (on pourra utiliser l'égalité  $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ )  
 $\oplus$  En écrivant  $z$  sous la forme  $z = re^{i\theta}$   $r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$
- En déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
- Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R} : (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$

### **EXERCICE 12:**

- 
- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :  $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ .

### **EXERCICE 13 :**

- Déterminer les nombres complexes  $z = x + iy$  dont le carré est  $z^2 = -59 - 40i\sqrt{3}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (1) :  $z^2 - (5 - 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$ .

### **EXERCICE 14 :**

Soit  $p$  le polynôme tel que:  $p(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + 6(1 + i)z - 8(1 + i)$ .

- Montrer que l'équation  $z \in \mathbb{R}, p(z) = 0$  admet une solution réelle que l'on déterminera.
- Vérifier que  $2i$  est une solution de l'équation  $p(z) = 0$ .
- Factoriser le polynôme  $p$  et résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $p(z) = 0$ .
- On distinguera les trois solutions  $z_1, z_2$  et  $z_3$  de l'équation  $p(z) = 0$  par :  $|z_1| < |z_2| < |z_3|$ .

- a. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
- b. Montrer que le triangle  $M_1 M_2 M_3$  est rectangle isocèle.

**EXERCICE 15 :**

On considère l'équation (E) :  $z^3 + (1-5i)z^2 - 8(1+i)z - 12 + 4i = 0$ .

1. Démontrer que  $z_1 = -2$  est une solution de (E).
2. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure  $z_2$ , achever la résolution ; on note  $z_3$  la dernière solution.
3. On considère un plan complexe P. Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
  - a. Placer les points A, B et C dans P.
  - b. Démontrer que A, B et C sont alignés.

LES NOMBRES COMPLEXES AU BAC S2

**Exercices 16**

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) \*  $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$  ; \*  $iz - 2\bar{z} + 2 - i = 0$  ; \*  $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$ .

b) \*  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = -1$  ; \*  $3 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 3$ .

c) Soient les nombres complexes  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  ;  $z_2 = 1 - i$ .

\* Mettre sous forme trigonométrique  $z_1$  ;  $z_2$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$ .

\* En déduire que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

\* On considère l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

(E) :  $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$

— Résoudre (E) dans  $\mathbb{R}$  puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Soit C le corps des nombres complexes et  $i$  un nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

a) calculer  $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$ . b) déterminer les réels a, b tels que :

$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2}\sqrt{3}i$ .

3) Linéariser les expressions trigonométriques suivantes .

a)  $A(x) = \cos^4 x \sin x$  ; b)  $B(x) = \cos^3 \frac{x}{2}$ .

### EXERCICE 17 BAC 2003

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation ( $E$ ):  $Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3 + 24i = 0$

- Montrer que ( $E$ ) admet une solution imaginaire pure et la déterminer
- Montrer que  $1+2i$  et  $-2+3i$  sont solutions ( $E$ )
- Donner l'ensemble des solutions de ( $E$ )

Dans le plan rapporté à un repère ortho normal  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  Soit A, B et C d'affixes respectives  $+2i - 3i, -2+3i$

Soit  $G \in \overline{\{(A,2), (B-2), (C,1)\}}$

- Montrer que les vecteurs  $\vec{GA}, \vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i, 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite .
- En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C .Donner les éléments caractéristiques.

### EXERCICE 18 BAC 2002

1) Montrer que dans  $\mathbb{C}$  la somme des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité est égale à zéro ( $n \geq 2$ )

2) En utilisant les résultats du 1) montrer que  $\cos(\frac{\pi}{5})$  est solution de l'équation  $4x^2 - 2x - 1 = 0$

3) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\frac{\pi}{5}, \cos\frac{2\pi}{5}$  et  $\cos\frac{\pi}{10}$

### EXERCICE 19 BAC 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère ortho normal direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C} - \{2i\}$  vers  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$   $f(z)=z$  .Donner les solutions  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

b) Calculer  $z_1^4 + z_2^4$

1) Soit  $M(z)$  un point de (P)

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $f(z)$  soit imaginaire pur ,donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ , Tracer  $(\Gamma)$ .

2) Montrer que  $|z|=1 \Leftrightarrow |f(z)|=1$

### EXERCICE 20 BAC 2000

On considère les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  d'affixes respectives :

$$z_1 = 1 \quad z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes  $z_2 - z_1$  et

$$z_3 - z_1$$

b) Donner une écriture trigonométrique de  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

En déduire les valeurs exactes  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) Soit  $S$  la similitude plane directe transformant  $A_2$  en  $A_3$  et  $A_1$  en  $A_1$

a) Préciser les éléments caractéristiques de  $S$

b) On désigne par  $M'$  d'affixe  $z'$  l'image de  $M$  d'affixe  $z$

Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ . En déduire l'image par  $S$  du point  $B$  d'affixe

$$1 - 4\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

### Exercice 21 BAC 1999

On considère l'équation  $(E) : z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$

1. a) Vérifier que  $(E)$  admet une solution réelle

b) Achever la résolution de  $(E)$

2) Dans le plan complexe on désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1; z_B = -2 + i \quad z_C = i$

a) Déterminer le module et un argument de  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

b) En déduire la nature du triangle  $ABC$

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant  $A$  et transforme  $B$  en  $C$ .

### EXERCICE 22 BAC 1998

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

a)  $Z^2 - 2Z + 5 = 0$

b)  $Z^2 - 2(1 + \sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

On considère dans le plan rapporté à un repère ortho normal  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $1 + 2i; 1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i; 1 - 2i$

a) Placer  $A, B, C, D$  dans le plan  $(P)$

b) Vérifier que  $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$  en déduire la nature du triangle  $ABD$

c) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle  $(C)$  dont on précisera le centre et le rayon.

3) On considère l'équation  $(E) : Z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)Z + 5 + 4\cos\theta = 0; \theta \in \mathbb{R}$

a) Résoudre  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C) .

### EXERCICE 23 BAC 1997

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe  $w = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$

b) En déduire ses racines carrées

2) Résoudre dans C l'équation suivante  $Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$

3) Soit  $Z_1$  la solution imaginaire pure et  $Z_2$  l'autre solution, montrer que

$$\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i} = w$$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  soit A, B et C les points d'affixes respectives  $2i, Z_1, Z_2$

Préciser la nature du triangle ABC en utilisant 1. a)

### Exercice 24

1) Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation :  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$  dans l'ensemble des nombres complexes.

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique .

3) En déduire des questions précédentes les valeurs de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et

$$\sin \frac{11\pi}{12}$$

### EXERCICE 25 BAC 1995

On considère le polynôme P de variable complexe Z définie par  $f(Z) = Z^3 + iZ^2 - 3Z + 5i$

1) Calculer P(i) puis déterminer toutes les racines de P(z) on notera  $Z_1$  la racine dont la partie réelle est négative et  $Z_2$  l'autre racine .

2 a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe  $\frac{Z_1 - i}{Z_2 - i}$

Dans le plan complexe de repère  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A(i), B ( $Z_1$ ) et C( $Z_2$ )

Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.

On considère A(i), B(-i) et M(z) on pose  $Z = \frac{z - i}{z + i}$

1. a) Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel Z soit imaginaire pur

2. a) Interprétez géométriquement les modules de  $z - i$  et  $z + i$

Montrer que  $|Z|=1$  si et seulement si  $z$  est réel

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  déduire de la question précédente que l'équation

(E) :  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a$  n'admet que des solutions réelles.

(on ne demande pas de les calculer).

c) Résoudre l'équation  $Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$ . En déduire les solutions de (E).

### EXERCICE 26

Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les applications  $T_1, T_2$  dont les écritures complexes sont :

$T_1 : z_1 = (\sqrt{3} + i)z$  et  $T_2 : z_2 = (1 - i\sqrt{3})z + 3$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $T_1$  et  $T_2$

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $T_2 \circ T_1$

3) Démontrer qu'il existe un seul point K tel que  $T_1(K) = T_2(K)$ . soit  $L = T_1(K)$

Calculer les affixes des points K et L.

4) Démontrer que le point L est invariable par chacun des applications

$T_2 \circ T_1^{-1}$  et  $T_1 \circ T_2^{-1}$

Quelle est la nature de chacune de ces applications. Préciser leurs éléments caractéristiques

### EXERCICE 27

1) On considère l'équation (E) dans  $\mathbb{C} : Z^4 + 7 + 24i = 0$

a) Vérifier  $Z_0 = 2 - i$  est une solution de (E)

b) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$  et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) Dans le plan complexe de repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  on considère

$A(1 + 2i), B(-2 + i); C(-1 - 2i)$  et  $\Omega(2 - i)$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe  $S_1$  de centre  $\Omega$  qui transforme A en B.

b) Soit  $S_2$  la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point

$M'(z')$  tel que  $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$  caractériser  $S = S_2 \circ S_1$

3) Soit r la rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

a) Donner l'affixe du point D tel que  $r(O) = D$

b) Montrer que les points O, A, D et B appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer l'image du cercle (C) par r.

4) Soit  $T_2 : M(z) \rightarrow M_2(z_2)$  tel que  $z_2 = \alpha^2 z + \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{C}$

Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $S_2 \circ T_2$  soit :

a) Une translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Une rotation de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

### EXERCICE 28

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A'(\alpha = 1 - i)$   $B(\beta = 1 + i)$

A tout point M d'affixe  $z$  distinct de O, la fonction  $\varphi$  associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que  $z' = 2 - \frac{2}{z}$

1) Montrer A et B sont invariants par  $\varphi$ .

2) Soit M(z) distinct de A et de B, d'image M'(z') par  $\varphi$

a) Montrer que  $\frac{z' - \beta}{z' - \alpha} = y \frac{z - \beta}{z - \alpha}$  où  $y = \frac{\alpha}{\beta}$

b) En déduire que  $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$  et donner la relation entre  $(\vec{MA}, \vec{MB})$  et  $(\vec{M'A}, \vec{M'B})$

c) Déduire de ces relations que si M appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  son image par  $\varphi$  appartient à la droite (AB).

### EXERCICE 29

Soit  $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

1) Montrer que  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

a) Calculer P(i)

b) En déduire deux solutions de (E) :  $P(z) = 0$

2. a) Mettre P(z) sous forme d'un produit de deux polynôme de degrés 2

b) Résoudre (E)

### EXERCICE 30

1) Exprimer les racines  $z_k$  dans C de l'équation  $z^5 = 1$  en fonction des

nombre  $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$  où  $0 \leq k \leq 4$

2) Quelle est la nature du polygone dont les sommets  $A_k$  ont pour affixes  $z_k$  ? ( $0 \leq k \leq 4$ )

3) Montrer que  $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4 = 0$  . En déduire une équation du second degré à coefficients entiers dont le nombre  $a = \cos\frac{2\pi}{5}$  est solution. (On

remarquera que  $z_4 = \frac{1}{z_1}$  et  $z_3 = \frac{1}{z_2}$  et  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  )

4) Résoudre cette équation et calculer  $\cos\frac{2\pi}{5}$  ;  $\cos\frac{4\pi}{5}$  ;  $\cos\frac{\pi}{5}$  ;  $\cos\frac{8\pi}{5}$

### **EXERCICE 31**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

a) Posons  $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ . Donner une expression simple de la somme

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme

En déduire l'égalité  $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

b) Quelle est la limite de la suite  $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?

### **EXERCICE 32**

Soit  $n > 0$  ;  $\theta \in ]0; \pi[$  ; on considère les expressions

$$S_n = \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos 2\theta + \dots + \cos^p \theta \cos p\theta + \dots + \cos^n \theta \cos n\theta$$

$$S'_n = \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \sin 2\theta + \dots + \cos^p \theta \sin p\theta + \dots + \cos^n \theta \sin n\theta$$

On pose  $T_n = S_n + i S'_n$

Montrer que  $T_n$  est la somme des  $n$  premiers termes d'une suite

géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison .

En déduire une expression simple de  $T_n$ , puis de  $S_n$  en fonction  $n$  et  $\theta$

(on montera que  $S_n = \cos_{\theta}^{n+1} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta}\right)$ )

### **EXERCICE 33**

Soient, dans le plan complexe  $P$ , deux points  $M$  et  $M'$  d'affixes

respectives  $z$  et  $z'$  tels que l'on ait :  $z' = (1 + i)z + 1$

1°) Calculer le module et un argument de  $1 + i$ .

2°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $(1 + i)z + 1$ .

3°) Déterminer l'ensemble des  $M$  du plan complexe tels que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{OM'}$  aient la même norme.

### EXERCICE 34

Soit  $f$  la transformation du plan complexe qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$ .

1°) Quelle est la nature de  $f$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

2°) Soit  $D$ , droite d'équation :  $x - y\sqrt{3} = 0$ . Quelle est l'équation de l'image  $f(D)$  de  $D$ ?

3°) Quelle est l'image par  $f$  du cercle de rayon 2 dont le centre est le point  $I(2i)$  ?

### EXERCICE 35

Dans plan complexe, soit  $f$  la transformation qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$ .

1°) démontrer que  $f$  admet un unique point invariable  $I$  ; déterminer l'affixe de  $I$ .

Caractériser géométriquement  $f$ .

2°) Soit  $G$  le barycentre des points  $I, M, M'$  affectés respectivement les coefficients 3, 2, 1. Calculer les coordonnées de  $G$  en fonction de celles de  $M$ .

3°) On suppose que le point  $M$  décrit la droite d'équation :  $y = x$ . Quel l'ensemble décrit par le point  $G$ ?

## SERIE SUITE NUMÉRIQUE

### EXERCICE 1

Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 2$

2) Montrer que  $(u_n)$  est croissante

3) En déduire que  $(u_n)$  converge vers un réel  $l$  à déterminer.

4) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$  puis  $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$

5) Retrouver les résultats de la troisième question

## EXERCICE 2

Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$$

- 1) Montrer pour tout entier naturel  $u_n \geq -\frac{1}{2}$
- 2) Etudier les variations de  $(u_n)$
- 3) En déduire que  $(u_n)$  admet une limite à déterminer
- 4) Soit  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ . Démontre que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et étudier la convergence de  $(u_n)$

## EXERCICE 3

Soit 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) Soit  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n\sqrt{2} - n$ . Démontre que  $(v_n)$  est une suite géométrique
- 3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ . Etudier la convergence de  $(u_n)$
- 4)  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$  puis déterminer sa limite

## EXERCICE 4

Soit 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$V_n = u_n + an + b$

- 1) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  sachant que  $(v_n)$  soit une suite géométrique. En déduire  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 2)  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$   
 $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$   
Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$

## EXERCICE 5

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel non nul  $n$  par

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

- 1)  $w_n = v_n - u_n$  pour tout  $n$  non nul. Démontrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique convergente.
- 2) Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Démontrer que  $(u_n)$  décroissante et  $(v_n)$  croissante.
- 4) Démontrer que pour tout entier non nul  $n$ ,  $u_n \geq v_n$  et en déduire que  $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$
- 5) Conclure
- 6)  $T_n = 3u_n + 8v_n$  avec  $n$  entier naturel non nul. Montrer que  $(T_n)$  est une suite constante puis déterminer les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$

### EXERCICE 6

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - \sin x$

- 1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $x_0$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 4$
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1/2(4 + \sin x)$ 
  - a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 \Leftrightarrow g(x) = x$
  - b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 3) Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = g(u_n)$ 
  - a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|$ , en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - x_0|$
  - b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

### Exercice 7 :

$(U_n)$  est une suite arithmétique de raison  $a$  et on note  $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$

- 1°)  $a = 5$  et  $U_0 = 1$  Calculer  $U_4$  et  $S_{10}$
- 2°)  $a = -4$  et  $U_3 = 20$  Calculer  $S_{15}$
- 3°)  $U_5 = 8$  et  $U_{10} = 28$  Calculer  $S_{15}$
- 4°) Calculer  $U_4$  et  $U_5$  sachant que  $U_0 = 2$  et que  $U_4 \times U_5 = 18$
- 5°) Calculer  $U_0$  et  $a$  sachant que  $S_{10} = 88$  et que  $S_{12} = 143$
- 6°)  $a = 3$  et  $U_0 = -10$  Déterminer  $n$  tel que  $S_n = 200$

### Exercice 8

$(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $b$  et on note  $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$

- 1°)  $b = -5$  et  $U_0 = 3$  calculer  $U_3$  et  $S_3$

2°)  $U_2 = 5$  et  $U_3 = 7$  Calculer  $U_4$  et  $S_4$

**Exercice 9:**

On donne  $(U_n)$  définie par  $U_1 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 1}$  calculer les premiers termes et conjecturer une expression de  $U_n$  en fonction de  $n$  et démontrer que votre formule est bonne par récurrence.

**Exercice 10:**

Soit la suite  $(V_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $V_0 = 2$  et  $V_{n+1} = 2V_n - 1$

1°) Démontrer que la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = V_n - 1$  est géométrique

2°) Déterminer l'expression de  $U_n$  puis celle de  $V_n$  et étudier leurs limites.

**Exercice 11:**

On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 1$ ;  $U_1 = 3$  et si  $n \in \mathbb{N}$  :

$U_{n+2} = \frac{1}{2} a^2 U_{n+1} + (a - 3) U_n$  et on introduit  $(V_n)$  par  $V_n = U_{n+1} - U_n$

1°) On pose  $a = 2$

a) Démontrer que  $(V_n)$  est une suite constante.

b) En déduire que  $(U_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer, en fonction de  $n$ ,  $U_n$  et  $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} U_i$  en déduire la somme des

entiers naturels impairs inférieurs à 100

2°) On pose  $a = -4$

a) Vérifier que  $(V_n)$  est géométrique et exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .

b) Calculer la somme  $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} V_i$  en fonction de  $n$

c) Démontrer que  $S_n = U_{n+1} - 1$

**Exercice 12:**

Soient les suites numériques  $(V_n)$  et  $(W_n)$  définie par  $V_0 = -\frac{3}{2}$  et  $V_{n+1} = \frac{2}{3}$

$V_n - 1$

et  $W_n = 2V_n + 6$

1°) Démontrer que  $(W_n)$  est géométrique et donner les expressions en fonction de  $n$  de  $W_n$  et  $V_n$ .

2°) Calculer  $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$   $s'_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

### **Exercice 13**

On considère  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$  définie sur  $[0; 1]$

1°) Résoudre  $f(x) = x$

2°) Démontrer que si  $x \in [0; 1]$  alors  $f(x) \in [0, 1]$

3°) Démontrer que  $f(x) - 1 = \frac{1}{2 \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + 1 \right)} (x - 1)$  et en déduire que  $1 -$

$f(x) \leq \frac{3}{10} (1 - x)$  dans  $[0; 1]$

4°) On définit  $(U_n)$  par  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Pourquoi  $U_n$  est-il toujours dans  $[0; 1]$  ?

b) Justifier que  $1 - U_{n+1} \leq \frac{3}{10} (1 - U_n)$

c) Démontrer par récurrence que  $1 - U_n \leq \frac{1}{2} \times 0,3^n$  et en déduire la limite de  $(U_n)$

### **Exercice 14:**

A] On considère  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$  définie sur  $[0; +\infty[$

1°) Démontrer que si  $0 \leq x \leq 1$  alors  $0 \leq f(x) \leq 1$

2°) Démontrer que  $f(x) - x = \frac{-2x^2 + x + 1}{2 \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + x \right)}$  et étudier le signe de  $f(x) -$

$x$  pour  $x \in [0; 1]$

B] On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

1°) Démontrer par récurrence que si  $n \geq 0$  on a  $0 \leq U_n \leq 1$

2°) Etudier le sens de variation de  $(U_n)$

3°) On rappelle la formule très connue  $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$

a) Démontrer que l'on a  $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  pour  $x \in [0; \pi]$

b) Démontrer par récurrence que si  $n \geq 0$  on a  $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de  $(U_n)$

**Exercice 15:**

$(U_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $U_0 = 2$  et de raison  $-1$

1°) On pose  $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$ . Démontrer que  $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$

2°) On pose  $V_n = e^{U_n}$

a) Démontrer que  $(V_n)$  est géométrique.

b) On pose  $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ ,

Déterminer l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $n$  pour que

$$P_n = e^{-88}$$

**Exercice 16:**

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$  sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$

1°) Démontrer que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) \geq 1$

On peut donc définir la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$

2°) On considère les suites  $(V_n)$  et  $(W_n)$  telles que pour tout  $n$

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n} \quad \text{et} \quad W_n = \ln V_n$$

a) Vérifier que  $(V_n)$  et  $(W_n)$  sont bien définies.

b) Démontrer que  $(W_n)$  est géométrique.

c) Exprimer en fonction de  $n$ ,  $W_n$  puis  $V_n$  et en déduire que  $U_n =$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}. \text{Quelle est la limite de } (U_n).$$

**Exercice 17:**

1°) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = x^2 + \ln x - 2$ .

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  dans  $I = [1,30 ; 1,35]$ .

c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $f(x) = x$  où  $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

2°) On étudie  $f$  sur  $I = [1,30 ; 1,35]$ .

a) Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $I$  et montrer que  $I$  est stable par  $f$ .

C'est à dire que si  $x \in I$  alors  $f(x) \in I$ .

b) Démontrer que pour  $x$  dans  $I$  on a  $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$ .

c) Démontrer que: pour tout  $x$  de  $I$  on a  $|f(x) - a| \leq \frac{1}{3} |x - a|$ .

3°) Soit  $(U_n)$  la suite d'éléments de  $I$  définie par la relation de récurrence  $U_{n+1} = f(U_n)$  et

la condition initiale  $U_0 = 1,3$ .

a) Démontrer que pour tout  $n$   $U_n \in I$ .

b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3} |U_n - a|$ .

c) Démontrer par récurrence que l'on a :  $|U_n - a| \leq \frac{5}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

d) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$  et préciser un entier  $n_0$  tel que  $|U_n - a| \leq 10^{-6}$ .

Donner une valeur approchée de  $U_{n_0}$ .

## FONCTIONS LOGARITHMES

### EXERCICE 1

**A** Exprimer à l'aide de  $\ln 2$  et  $\ln 3$  les nombres  $A = \ln 12$   $B = \ln \frac{1}{36}$   $C = \ln \sqrt{72}$

$D = \ln 0,75$

$E = \ln(2e^2) - \ln(9e)$       $F = \ln 6e - \ln 2e$

**B** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$  et  $g(x) = \ln(x-1)(x-3)$ .

1- Préciser  $D_f$  et  $D_g$ .

2- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $f(x) = \ln 3 + 3\ln 2$  et  $g(x) = \ln 3 + 3\ln 2$

3- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations  $f(x) \geq \ln 3 + 3\ln 2$  et  $g(x) \geq \ln 3 + 3\ln 2$ .

4- On considère  $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$  Calculer  $P(2)$  puis mettre  $(x-2)$  en facteur dans  $P$

Résoudre alors  $3(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - (\ln x) + 10 = 0$

**C** a) Résoudre  $\ln(x+1) + \ln(2x+1) = 0$      b) démontrer que si  $x \geq \sqrt{2}$  ;  
alors  $x + \ln(x^2 - 1) \geq x$

c) Résoudre  $2 \ln(x+1) - \ln(x+3) = 0$      d) Résoudre  $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 4 \leq 0$

- e) Résoudre  $(\ln x)^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$       e) En utilisant log trouver le plus petit n tel que  $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,99$

## **EXERCICE 2**

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

- $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln|x-4|$  ;  $\ln^2 x - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$  ;  $\ln(\ln x) > 0$ .
- $\ln x - 3 > \frac{4}{\ln x}$  ;  $\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \geq \frac{1}{2}$  ;  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ .

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

## **EXERCICE 3**

*Calcul de limites*

1- Etudier la limite en 0 et en  $+\infty$  de f(x) :

$$f(x) = \sqrt{x} \ln x ; f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x} ; f(x) = x \ln(x^2).$$

2- calculer les limites de f en  $+\infty$ .

$$f(x) = \ln x - x ; f(x) = \ln(x-1) - \ln x ; f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} ; f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x}.$$

3- Soit f la fonction définie par  $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$ .

a- Donner Df

b- Calculer les limites de f aux bornes de Df.

## **EXERCICE 4**

1- Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis donner la fonction dérivée de f.

$$f(x) = x^2 \ln(x-1); f(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right); f(x) = \sqrt{1-\ln x}; f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$f_1(x) = \frac{x}{\ln x} \text{ définie sur } ]1; +\infty[ \quad f_2(x) = \frac{1}{x} + \ln x \text{ définie sur } ]0; +\infty[ \quad f_3(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$f_4(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \text{ définie sur } ]0; +\infty[ \quad f_5(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \text{ définie sur } ]-1; +\infty[$$

2- Etudier les variations de f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right); f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}; f(x) = \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1}$$

### EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
- 2- Etudier les variations de f.
- 3- Tracer la courbe de f

### EXERCICE 6

On étudie  $g(x) = -8 \ln x + x^2 + 4$  définie sur  $]0; +\infty[$

1°) Calculer  $g'(x)$  et établir le tableau des variations de g. En déduire le signe de g.

2°) On considère  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2} \ln x$ . Calculer  $f'(x)$  et démontrer que  $f'(x)$

$$= \frac{g(x)}{x^3}.$$

3°) Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[1; e]$  et donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

4°) Démontrer (sans calcul) que  $g(\alpha) = \frac{\alpha^4 + 16}{\alpha^2 + 4}$

### EXERCICE 7 :

$a, b$  et  $c$  sont trois réels strictement positifs. Ecrire, en fonction de  $\ln a, \ln b$  et  $\ln c$

les réels suivants :  $x = \frac{1}{4} \ln(a^8); y = \ln \frac{a}{b} - \ln \frac{c}{b}; z = \ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right).$

### EXERCICE 8:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions données.

$$f(x) = \ln(3x-5); f(x) = \ln(7-4x); f(x) = \ln|3x-5|; f(x) = \ln x^2; f(x) = \ln(3x-5)^2$$

$$f(x) = \ln(3x^3 + x^2 - 4); f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x^2+x-2}\right|; f(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)^2.$$

### EXERCICE 9 :

1) Résoudre les équations suivantes

$$a) \ln(2x-3) = \ln 2; b) \ln(x^2 - 3x - 2) = 0; c) \ln x + \ln(2x+5) = \ln 3; d) 2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0;$$

$$e) (\ln(x-1))^2 - \ln(x-1) - 6 = 0$$

$$f) \ln(2x-5) > 1; g) \ln(2x+1) \leq \ln(x+3); h) \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(3x+2); i) -2(\ln x)^2 - 5\ln x + 3 > 0$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$

$$a) \begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 9\ln x - 6\ln y = 20 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3\ln x - 4\ln y = -6 \\ \ln(x^2) + \ln y = 7 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 12 \end{cases}$$

3) Soit  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

a) Calculer  $p(1)$  en déduire une factorisation complète de  $p(x)$

b) Résoudre :  $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ .

c) Résoudre :  $p(x) > 0$

d) Résoudre :  $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 > 0$ .

### EXERCICE 10 :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x^2 - 5); f(x) = \ln(6 - 8x); f(x) = \ln|-2x + 5|; f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{5x-3}\right); f(x) = \ln(3x-5)^2$$

$$f(x) = \ln(3x^3 + x^2 - 4); f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x^2+x-2}\right|; f(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)^2$$

$$f(x) = x \ln x; f(x) = \frac{2 - \ln x}{\ln x}; f(x) = \ln|\ln x|; f(x) = \sqrt{\ln x}; f(x) = \sqrt{x \ln x}; f(x) = \frac{x^2 - 3}{x \ln x}.$$

### EXERCICE 11 :

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2x+1}{x-1} \right); b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x); c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

### **PROBLEME 1**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x + (1-2x)\ln x$ .

1°) On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{1}{x} - 2\ln x$ .

a- Etudier les variations de  $g$ .

b- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ . Donner un encadrement à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$ .

c- Dédire des questions précédentes le signe de  $g(x)$ .

2°) a- Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe. Donner le tableau de variations de  $f$ .

b- Montrer que  $\ln \alpha = \frac{1}{2\alpha}$  et que  $f(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

c- Construire  $C_f$  courbe de  $f$ .

### **PROBLEME 2**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$ .

1°) Etudier les variations de  $f$ .

2°) Montrer que le point A (1 ; -1) est centre de symétrie de  $C_f$  courbe de  $f$ .

3°) Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé (unité 2cm)

4°) Montrer que pour tout  $x > 1$ ,  $f(x) = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$ . En déduire l'aire A(D)

du domaine:  $D = \{M(x, y); 2 \leq x \leq \alpha \text{ et } f(x) \leq y \leq -1\}; \alpha \geq 2$

5°) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(D)$ .

### **PROBLEME 3**

**A-** Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = 1 - x^2 - x^2 \ln x$ .

1°) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variations.

2°) a- Calculer  $g(1)$ . Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution que l'on déterminera.

b- En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

**B-** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$ .

1°) a- Montrer que  $f'(x) = -g(x)$ .

b- Dresser le tableau de variations de  $f$ .

- c- Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions distinctes 1 et  $\alpha$  tel que  $2 < \alpha < 3$ .
- d- Tracer  $Cf$  courbe de  $f$  dans un repère orthonormé du plan. On placera les points d'intersection de  $Cf$  avec la droite  $y = x$ .

2°) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $[1; +\infty[$ .

- a- Justifier l'existence de  $h^{-1}$ .
- b-  $h^{-1}$  est-elle dérivable en 1 ? Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
- c- Tracer la courbe  $Ch^{-1}$  de  $h^{-1}$

3°) a- Calculer l'aire  $A(D)$  du domaine  $D$  délimité par la courbe  $Cf$ , l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .

b- En déduire l'aire du domaine délimité par  $Ch$ ,  $Ch^{-1}$ , les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .

## **PROBLEME 4**

### **Partie A**

On considère la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$

1°) Etudier les variations de  $h$ . Calculer  $h(0)$  et  $h(-2)$

2°) En déduire le signe de  $h(x)$  pour  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ .

### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln|x+1|}{x+1} - x$ .

1°) Montrer pour tout réel  $x$  de  $Df$ ,  $f'(x) = -\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .

2°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $Df$ .  
Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3°) Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à la courbe  $Cf$  de  $f$ .  
Etudier la position relative de  $Cf$  et  $D$ .

4°) Montrer que le point  $I(-1; 1)$  est un centre de symétrie de  $Cf$ .

5°) Tracer la courbe  $Cf$  dans un repère orthonormé **unité 1 cm**.

6°) Soit  $\alpha$  un réel positif, on note  $A(\alpha)$  l'aire du domaine délimitée par la courbe, la droite  $D$  et les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = \alpha$ .

Calculer en fonction de  $\alpha$   $A(\alpha)$

Calculer la limite de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

## **FONCTION EXPONENTIELLE**

**EXERCICE 1** : 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$

1)  $2e^{2x+1} - 3e^{x+1} - 2e + 3e^{-x+1} = 0$  ; 2)  $\ln[\ln e^x + e^{-\ln x}] = 2 - \ln x$

$$3) (e^x - 1)(e^{-x} - 1) < 0; \quad 4) 3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq 0$$

II) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$

$$1) \begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 19 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} e^{x+1} \cdot e^{y-1} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y+1) \end{cases}$$

### EXERCICE 2 :

1) Déterminer Df, les limites aux bornes de Df puis calculer la dérivée de f

a)  $f(x) = x + e^{-x}$  ; b)  $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$  ; c)  $f(x) = e^{1/x} \ln x$  ; d)  $f(x) = \frac{\sin 2x}{1-e^x}$ .

2) Déterminer l'ensemble des primitives F de f sur  $\mathbb{R}$ .

$f(x) = x - 2 + 2e^{-x/2}$  ; b)  $f(x) = xe^{x^2}$  ; c)  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  ;

3) Etudier et représenter les fonctions si après.

a)  $f(x) = x^2 e^{-x}$  ; b)  $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$  ;

### EXERCICE 3 :

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 - x - 2 = 0$ .

2) En déduire la résolution dans  $\mathbb{R}$  des équations suivantes :

a)  $e^{2x+1} - e^{x+1} - 2e = 0$ .

b)  $[\ln(x+1)]^2 - \ln(x+1) - 2 = 0$ .

**EXERCICE 4 :** Soit  $P(x) = x^3 - 3x + 2$

Calculer  $P(1)$ . Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $e^{3x} - 3e^x + 2 = 0$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $(\ln x)^2 - 3 = \frac{-2}{\ln x}$ .

**EXERCICE 5 :** Soit la fonction f définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

**EXERCICE 6:** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Démontrer que  $f$  est dérivable en 0. Préciser  $f'(0)$  et une équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 0 à la courbe représentative  $C$  de  $f$ .

**EXERCICE 7 :** 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$

2)  $f$  est l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que  $f$  est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

**EXERCICE 8 :**  $f$  est une fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + 1) e^{-1/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que  $f$  est continue en 0.

b) Déterminer  $\lim_{u \rightarrow +\infty} (1 + u) e^{-u}$ . En déduire que  $f$  est dérivable en 0.

**EXERCICE 9 :**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

Démontrer que  $f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 10 :** Le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est orthonormé. Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$$

On désigne par  $C$  la courbe représentative de  $f$ .

1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

2) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à  $C$  en  $-\infty$ .

3) Etudier les variations de la fonction dérivée  $f'$  et en déduire les variations de  $f$ .

4) Tracer  $C$ .

**EXERCICE 11 :**  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-x^2}$

$C$  est sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
(unités: 1cm en abscisses, 5cm en ordonnées)

- Etudier la parité de  $f$ . Que peut-on en déduire sur  $C$  ? On fera l'étude de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et une équation de l'asymptote à  $C$ .
- Etudier les variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
- Calculer  $f''(x)$  et en déduire que pour tout  $x$  positif on a  $f'(x) \geq f' \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

Soit  $T$  la tangente à la courbe  $C$  en  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et soit  $y = h(x)$  son équation réduite.

On pose

$$g(x) = f(x) - h(x)$$

Démontrer que  $g'(x) = f'(x) - f' \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . En déduire le signe de  $g$  sur  $[0, +\infty[$  et

les positions relatives de  $C$  et  $T$  sur cet intervalle.

- Construire  $T$  et  $C$  sur  $[0, +\infty[$ . En déduire la construction de  $C$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 12 :** Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

1) Etudier les variations de la fonction  $f$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction  $f$ . Montrer que  $f(x) - 2x$  tend vers une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et en déduire l'asymptote correspondante de  $(C)$ . Construire la courbe  $(C)$  en précisant la tangente au point de  $(C)$  d'ordonnée nulle.

2) Soit  $k$  un nombre réel strictement positif.

Discuter suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue  $x$  :

$$e^{2x} - e^x + 1 - k = 0.$$

- Par le calcul
- En utilisant la courbe  $(C)$ .

## CALCUL INTEGRAL

### EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x} dx ; \int_2^e \frac{\ln^2 x}{x} dx ; \int_{-1}^1 (e^x - 1) dx ; \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx ; \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx ; \int_0^{\pi/6} \sin^3 x dx ;$$

$$\int_0^1 \left( \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \right) dx ; \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x dx$$

### EXERCICE 2

On pose  $I = \int_0^{\pi/8} e^{-2t} \cos^2 t dt$  et  $J = \int_0^{\pi/8} e^{-2t} \sin^2 t dt$

1°) En intégrant successivement deux fois par parties Calculer

$$K = \int_0^{\pi/8} e^{-2t} \cos(2t) dt$$

En déduire I- J

2°) Calculer I+J ; 3°) Déduire des questions précédentes I et J.

### EXERCICE 3

1°) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2°) Calculer  $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

3°) A l'aide d'une intégration par parties Calculer  $\int_2^4 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$

EXERCICE 4 : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$

1°) Calculer  $\int_0^b f(x) dx$  où  $b$  est un réel positif

2°) Donner la valeur moyenne de  $f$  dans l'intervalle  $[1,4]$

EXERCICE 5 : On pose  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt$  et pour tout entier naturel  $n$   $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{e^t+1} dt$

1°) Calculer  $I_n$ ;  $I_0+I_1$ . En déduire  $I_0$

2°) Calculer  $I_n$  et  $I_{n+1}$ ; En déduire  $I_2$  et  $I_3$

3°) Pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0,1]$  Comparer  $e^{nt}$  et  $e^{(n+1)t}$ . En déduire la variation de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

EXERCICE 6 1°) Calculer  $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

2°) Soit la fonction  $f$  définie par  $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$  ;  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ; calculer  $f'(x)$ .

3°) On pose  $J = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x} dx$  -a) Déduire de 2°) une relation entre  $I$  et  $J$ .

b) Calculer  $J$ .

EXERCICE 7 : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1°) Calculer  $I_1$  et  $I_2$ ; 2°) En intégrant par parties trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$

3°) calculer  $I_3$  et  $I_4$ .

### EXERCICE 8 :

1°) Démontrer que pour tout réel  $x$  on a :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

En déduire l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

2°) On pose  $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$ . En intégrant par partie, calculer  $J$ .

## EXERCICE 9

I°/ Soit  $f$  la fonction définie  $f(x) = xe^{1-x}$ . On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 4cm)

1°) Etudier les variations de  $f$

2°) Tracer la courbe (C)

3°) Soit  $a$  un réel structure positif, exprimer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A(a)$  du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = a$ . Calculer  $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a)$

$a \rightarrow +\infty$

II°/ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1°) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que  $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ . En déduire  $I_2$  et  $I_3$

2°) On pose  $J_n = \int_0^1 x^n dx$

a) Calculer  $J_n$  en fonction de  $n$

b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  ;  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

c) En déduire un encadrement de  $I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

## EQUATIONS DIFFERENTIELLES

### 1) EXERCICE 1

On se propose de résoudre (E):  $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de  $(E_0): y' - 2y = 0$  prenant la valeur 1 en 0

2) Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = \ln 2$  et  $g$  définie par  $f(x) = e^{2x} g(x)$ . Calculer  $g(0)$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et  $g(x)$

3) Montrer que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ .

En déduire l'expression de  $g(x)$  puis celle de  $f'(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de (E).

### EXERCICE 2

1) Résoudre (E)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ . Déterminer la solution  $f$  telle que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -1$

2)  $F(x) = -\frac{1}{5}(f'(x) + 2f(x))$ . Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur

$\mathbb{R}$ . Expliciter  $F(x)$ . En déduire le calcul de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

### EXERCICE 3 BAC 2009

- 1) Résoudre l'équation différentielle  $(E): y'' + 2y' + y = 0$
- 2) Soit  $(E'): y'' + 2y' + y = x + 3$  déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  définie par  $h(x) = ax + b$  soit solution de  $(E')$
- 3) a) démontrer que  $g$  est solution de  $(E')$  si et seulement si  $g - h$  est solution de  $(E)$   
b) Résoudre alors  $(E')$   
c) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1$
- 4) Soit  $k(x) = (x + 2)e^{-x}$ 
  - a) Etudier les variations de  $k$
  - b) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  de  $k$  au point d'abscisse 0
  - c) Démontrer que le point  $I(0 ; 2)$  est un point d'inflexion de la courbe
  - d) Tracer la courbe et la tangente

### EXERCICE 4 BAC 2008

- 1) Soient les équations différentielles  $(E_0): y' + y = 0$  et  $(E): y' + y = e^{-x} \cos x$ 
  - a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  définie par  $h(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$  soit solution de  $(E)$
  - b) démontrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - h$  est solution de  $(E_0)$
  - c) résoudre  $(E_0)$
  - d) Dédire des questions précédentes la solution générale de  $(E)$
  - e) Déterminer la solution  $g$  de  $(E)$  telle que  $g(0) = 0$
- 3) Soit  $l(x) = e^{-x} \sin x$ 
  - a) Exprimer  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$
  - b) Etudier les variations de  $l$  sur  $[0; 2\pi[$
  - c) Calculer  $\int_0^{2\pi} l(x) dx$

### EXERCICE 5 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$

- 1) Calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g'(x)$  est strictement négatif pour tout  $x$  réel

- 2) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
- 3) Dresser le tableau de variations de  $g$
- 4) Donner le signe de  $g(x)$

### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$

- 1) Montrer que  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$
- 2) Déterminer
  - a) La limite de  $f$  en  $-\infty$
  - b) La limite de  $f$  en  $+\infty$ . On pourra remarquer que si on pose

$$X = 1 + 2e^x, f(x) \text{ s'écrit } 4 \frac{X - 1}{(X - 1)^2} \frac{\ln X}{X}$$

- 3) Dresser le tableau de variations de  $f$
- 4) Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé
- 5) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

- a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} = e^{-x} - 2 \left( \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} \right)$  en déduire

$$\text{la valeur de } I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} dx$$

- b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$ ,  $x'x$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \alpha$

### PARTIE C

On considère l'équation différentielle (E):  $y' + 2y = 2 \left( \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} \right)$

- 1) Vérifier que  $f$  est solution de (E)
- 2) Montrer qu'une fonction  $h$  est solution de (E) si et seulement si  $h - f$  est solution de (E'):  $y' + 2y = 0$
- 3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)