MATHÉMATIQUES T.C & E

Fomesoutra.com
ça soutra !

LARE Gbanfoulene

edbyOh

Scanné avec CamScanner

LES CRACKS

Par

LARE Gbanfoulene
Ingénieur génie civil de l'école des Ponts et Chaussées Paristech
et ancien élève du Lycée Scientifique de Kara

Livre de Mathématiques
Terminale C et E

- Cours-Exercices-Problèmes.
- Épreuves Type BAC proposée
- Épreuves du BAC CE du Togo de 2000 à 2021
- Correction de tous les exercices et problèmes du cours.
- Correction de toutes les épreuves type BAC proposées
- Correction de toutes les épreuves du BAC CE Togo de 2000 à 2022

Avant-propos

Ce document vient pour combler une des lacunes que connait les filières scientifiques en matière de rareté des ouvrages présentant de façon simple, progressive et rigoureuse, les savoirs fondamentaux en mathématiques. Je l'ai conçu et rédigé volontairement dans le but d'aider les élèves en classe de terminale scientifique à mieux préparer les différents examens et concours qu'ils peuvent avoir au cours de l'année académique.

Après trois (03) ans de dur et tenace travail, j'ai pu réunir ici dans cet ouvrage tout le nécessaire du programme de mathématiques de terminale C à savoir :
• Les cours détaillés de tous les chapitres du programme suivi des exercices et problèmes réalistes de niveau de l'examen du BAC avec leurs corrections détaillées ;
• La proposition de quinze (15) épreuves type BAC avec leurs corrections détaillées ;
• Retranscriptions de toutes les épreuves du BAC du Togo de 2000 à 2022 avec leurs corrections détaillées.

L'objectif de cet ouvrage est double : assurer d'une part les bases qui permettront aux élèves de profiter au mieux de l'enseignement qu'ils vont suivre tout en leur habituant à la rigueur mathématique et d'autre part permettre aux élèves de préparer et réussir brillamment les épreuves de mathématiques des différents examens qu'ils passeront. Cependant, le livre ne se substitue pas au cours oral d'un professeur, mais j'espère qu'il constituera pour les élèves un outil de travail de référence.

Quelques conseils
• Les exercices et problèmes sont proposés dans cet ouvrages pour que l'élève puisse maitriser au mieux tout le programme et les corrections détaillées ont pour objectif de permettre à l'élève de se repérer et de s'imprégner de la rigueur mathématique. Il ne s'agit en aucun cas d'apprendre par cœur les corrections mais plutôt de chercher à connaître les astuces et techniques qui ont permis d'aboutir à la réponse.
• L'examen du BAC (surtout dans les épreuves de mathématiques) se prépare depuis le début de l'année et non dans les derniers mois ou dernières semaines avant le début de l'examen. Il est important de connaitre sa grille d'évolution car pour réussir aux épreuves de mathématiques, une seule magie : s'entrainer rigoureusement et intelligemment avec les exercices et problèmes.
• Tout élève doit se dire qu'il est capable de répondre à toutes les questions posées figurant sur les épreuves car si la question est posée par l'examinateur cela veut dire qu'elle du niveau de l'élève. Cependant, il est catégoriquement déconseiller de chercher à "flouer" le correcteur avec un raisonnement ambigu. C'est pourquoi, il faut toujours détailler toutes les étapes ayant permis à aboutir à la solution.

LARE Gbanfoulene
Ingénieur génie civil de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC-France) et de l'Ecole Hassania des Travaux Publics (EHTP-Maroc) et ancien élève du Lycée Scientifique de Kara (LSK-Togo)

Table des matières

I Partie cours **1**

1 Nombre complexes **2**
Introductions aux nombre complexes et opérations dans $\mathbb{C}$ . . . 2
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 7
Forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . 8
Racines n-èmes d'un nombre complexe . . . 10
Application à la trigonométrie . . . 12
Exercices et Problèmes . . . 14

2 Arithmétiques **19**
Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ . . . 19
PGCD - PPCM . . . 23
Nombres premiers entre eux-Équations diophantiennes . . . 28
Congruences et numération de base a . . . 32
Exercices et Problèmes . . . 39

3 Études de fonctions **44**
Limites et continuité de fonctions . . . 44
Dérivation d'une fonction . . . 49
Égalité et inégalité des accroissements finis . . . 52
Étude d'une branche infinie . . . 54
Exercices et Problèmes . . . 55

4 Les fonctions exp **et** ln **61**
Étude de la fonction exponentielle . . . 61
Étude de la fonction logarithme népérien . . . 65
Fonction puissance . . . 72
Exercices et Problèmes . . . 73

5 Primitives et intégration d'une fonction **79**
Primitives d'une fonction . . . 79
Intégration d'une fonction . . . 82
Exercices et Problèmes . . . 83

6 Suite numérique **103**
Exercices et Problèmes . . . 105

7 Équations différentielles **108**
Équations différentielles linéaires du premier ordre 'a coefficients constants . . . 108
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . 111

Exercices et Problèmes . . . 115

8 Courbes paramétrées **118**
Études des courbes paramétrées . . . 118
Exercices et Problèmes . . . 123

9 Les coniques **125**
Introduction aux coniques . . . 125
Paraboles . . . 126
Ellipses . . . 128
Hyperboles . . . 132
Réduction des coniques . . . 135
Exercices et Problèmes . . . 142

10 Probabilités **146**
Rappels sur le dénombrement . . . 146
Théorie de probabilité . . . 152
Probabilité conditionnelle . . . 155
Exercices et Problèmes . . . 160

11 Variables aléatoires discrètes **168**
Variables aléatoires réelles sur un univers fini . . . 168
Espérance, Variance et écart-type . . . 170
Exercices et Problèmes . . . 173

12 Calcul vectoriel et géométrie dans l'espace **176**
Barycentre de n points pondérés . . . 176
Produit scalaire et produit vectoriel . . . 179
Géométrie dans le plan et dans l'espace . . . 184
Exercices et Problèmes . . . 190

13 Applications affines du plan **192**
Applications linéaires et applications affines du plan . . . 192
Affinité du plan . . . 197
Exercices et Problèmes . . . 198

14 Étude de quelques applications affines du plan **201**
Notion de transformation du plan et écriture complexe d'une application affine du plan . . . 201
Étude d'une translation, homothétie, rotation, les symétries, projection et symétrie glissée . . . 202
Exercices et Problèmes . . . 214

15 Similitudes et isométries du plan **216**
Notion et étude de similitudes . . . 216
Notion et étude d'isométrie . . . 222
Exercices et Problèmes . . . 225

II Partie épreuves types BAC proposées & épreuves du BAC Togo **228**

III Partie correction : Correction des exercices et problèmes du cours, des épreuves proposées et les épreuves du BAC Togo série CE **303**

Première partie

Cours

CHAPITRE 1

LES NOMBRES COMPLEXES

I. Introduction aux nombres complexes

1. Ensembles des nombres complexes

Définition 1
– On appelle nombre complexe, tout nombre qui s'écrit de la forme de $z = x + iy$ tel que x et $y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.
– L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$
– Dans l'écriture précédente d'un nombre complexe, x est appelé **partie réelle** de z et noté $\boldsymbol{Re(z)}$ et y, **partie imaginaire** et noté $\boldsymbol{Im(z)}$.

Remarque et vocabulaire
– Tout nombre réel est un nombre complexe mais l'inverse est faux car i est un nombre complexe mais pas un nombre réel. $\mathbb{R}$ est alors inclus dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
– Tout complexe dont la partie imaginaire est nul est un **réel** et tout complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pure**

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

On définit l'addition et la multiplication des nombres complexes de la façon suivante :

1. **Somme** : Pour tous réels x, x', y et y', $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$.
2. **Produit** : Pour tous réels x, x', y et y', $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
3. **Inverse** : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. z' est l'inverse de z ou encore $z' = \dfrac{1}{z}$.

   De plus, si on pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, alors $z' = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Par conséquent on a :

1. Pour tous complexes z et z', $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ et $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$.
2. Pour tous complexes z et z', $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$, $(z + z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$.
3. Plus généralement, pour z et $z' \in \mathbb{C}$, $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} z'^k$ et $(z - z')^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k z^{n-k} z'^k$

NB : Le calcul dans $\mathbb{C}$ est comme dans $\mathbb{R}$ à condition de remplacer i^2 par -1
Exemple
$(3 + 2i)(1 - 7i) + i = 17 - 18i$; $(3 + i)^3 + 3(3 + 3i)(-2 + i) = -9 + 17i$; $\dfrac{4 + i}{1 + i} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$

3. Quelques propriétés

Théorème 1
1. Soient x et y deux réels. $z = x + iy = 0$ si et seulement si $x = y = 0$.
2. Soient x, x', y et y' quatre réels. $x + iy = x' + iy'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
3. Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Démonstration :
1. Soient x et y deux réels tels que $x+iy=0$. Supposons que $y\neq 0$, on peut alors écrire $i=-\frac{x}{y}$ et en particulier, i est un réel. ce qui n'est pas vrai. On en déduit que $y=0$ puis que $x=0$.
2. $x+iy=x'+iy' \Longrightarrow (x-x')+(y-y')i=0$ et d'après le **1.** on déduit que $x=x'$ et $y=y'$.

4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2 : Soit le nombre complexe $z=x+iy$. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par $\boldsymbol{\overline{z}=x-iy}$

Théorème 2 : Pour tout nombre complexe z on a :

1. Si z est un réel alors $\bar{z}=z$ et si z est imaginaire pur, $\bar{z}=-z$.
2. $z+\bar{z}=2Re(z)$ et $z-\bar{z}=2iIm(z)$. Alors : $Re(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
3. $\overline{\bar{z}}=z$.
2. Pour z et $z'\in\mathbb{C}$, $\overline{(z+z')}=\bar{z}+\bar{z'}$ et $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$
3. Pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}^*$ et pour $n\in\mathbb{N}$ on a $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ et $(\overline{z^n})=(\bar{z})^n$

Commentaires :On peut résumer le théorème précédent en disant que « le conjugué marche bien avec toutes les opérations ». Par exemple $\left(\overline{\dfrac{(2+i)z^2+3i}{(z+4-5i)^2}}\right)=\left(\dfrac{(2-i)(\bar{z})^2-3i}{(\bar{z}+4+5i)^2}\right)$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(4+i)z+3-4i=0$;
2. $[(4-3i)z-5][(1+i)z+1-i]=0$;
3. $(3-2i)\bar{z}-1+3i=0$
4. $(1-i)z+(3-i)\bar{z}=1+2i$;

Solution
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations :

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $(4+i)z+3-4i=0\Leftrightarrow z=\left(\dfrac{-3+4i}{4+i}\right)\Leftrightarrow z=-\dfrac{8}{17}+\dfrac{19}{17}i$
2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $[(4-3i)z-5][(1+i)z+1-i]=0\Leftrightarrow((4-3i)z-5)=0$ ou $(1+i)z+1-i=0$
D'où l'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $\{4/5+3i/5,i\}$
3. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $(3-2i)\bar{z}-1+3i=0$ alors $\bar{z}=\dfrac{1-3i}{3-2i}\Rightarrow z=\dfrac{9}{13}+\dfrac{7}{13}i$
4. soit $z=x+iy$ tel que $(1-i)z+(3-i)\bar{z}=1+2i\Leftrightarrow(1-i)(x+iy)+(3-i)(x-iy)=1+2i$. En développant et factorisant on trouve : $4x-2i(x+y)=1+2i$. En identifiant la partie réelle et imaginaire des deux membres on a alors : $4x=1$ et $x+y=-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ et $y=-\dfrac{5}{4}$.
D'où l'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}i\right\}$

Exercice 2

Pour tout nombre complexe z , on pose $f(z)=\dfrac{(1+2i)z-1}{(3+i)z-1}$
1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

Solution

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z)$ existe si et seulement si $(3+i)z-1 \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq \dfrac{1}{3+i}$. D'où $D_f = \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i\right\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z) = 0 \Leftrightarrow (1+2i)z - 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

5. Représentation géométrique d'un nombre complexe

On munit le plan d'un repère orthonormée $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
– A tout point du plan M de coordonnées (x, y), on peut associer le nombre complexe $Z_M = x + iy$. Le nombre complexe Z_M s'appelle **l'affixe du point M.**
– Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le point M de coordonnées (x, y). M s'appelle **l'image ponctuelle du nombre complexe z.**
– A tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x, y) , on peut associer le nombre complexe $z_{\vec{w}} = x + iy$. On dit alors que $z_{\vec{w}}$ **est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.**
– Inversement, à tout nombre complexe $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x, y). $\vec{w}$ **s'appelle image vectorielle du nombre complexe z.**
– Soient A et B deux points du plan. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $Z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
– Soient A et B deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Exemple

Soient deux (02) points M_1, M_2 d'affixes respectives suivantes dans le plan complexe : $z_1 = 4 - i$ et $z_2 = -3 - 2i$
Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $Z = z_{M_2} - z_{M_1} = -7 - i$

Exercice 3

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = (2+i)z + 1 - i$. Déterminer et construire l'ensemble $\mathbb{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = (1-i)z + 3 + i$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que Z soit réel.

Solution

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ avec x et $y \in \mathbb{R}$. $Z = (2+i)(x+iy) + 1 - i \Rightarrow Z = 2x - y + 1 + i(2y + x - 1)$.
Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$
D'où l'ensemble $\mathbb{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur est la droite $2x - y + 1 = 0$.
2. Soient x et y deux réels. Soit M le point du plan de coordonnées (x, y) puis soit $z = x + iy$ son affixe.
Alors $Z = (1-i)(x+iy) + 3 + i \Leftrightarrow Z = x + y + 1 + i(y - x + 1)$.
Z est un réel $\Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Rightarrow y - x + 1 = 0$
L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $y = x - 1$.

6. Le Module d'un nombre complexe

Définition 3
Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **le module** de z est le nombre réel positif noté $|z|$ définit par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque

– Si z est l'affixe d'un point M, $|z|$ représente la distance entre le point M et l'origine du repère O $|z| = OM$ et si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, $|z| = ||\vec{u}||$

– Plus généralement si A et B sont deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B, la distance $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |(x_A - x_B) + i(y_A - y_B)| = |z_A - z_B|$

– La notation $|Z|$ se lit **Module de Z** et non valeur absolue de Z. Par contre si Z est un réel, on peut dire indistinctement **module de Z** ou **valeur absolue**.

Exemple

$|3 + i| = \sqrt{10}$, $|-3| = 3$, $|-3i| = 3$

Quelques propriétés du module

Théorème 2

En appliquant la définition, on déduit immédiatement les résultats suivants :

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ et $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
4. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

Démonstration

Les points **1.** et **2.** découlent directement de la définition du module.

3. Soient z et $z' \in$. $|z \times z'|^2 = (z \times z')\overline{(z \times z')} = (z \times \bar{z})(z' \times \bar{z'}) = (|z| \times |z'|)^2$. D'où le résultat.

Si $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. Puisque $\frac{1}{z'}$ est un nombre complexe qu'on peut noter Z on a alors : $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z \times Z| \Rightarrow |z \times Z| = |Z| \times |z|$. D'où le résultat.

4. S'obtient par récurrence et en utilisant **3.** on a aussi le résultat.

Commentaire

Le théorème précédent dit que «le module fonctionne bien avec la multiplication». Par exemple, si on veut calculer le module de $Z = \frac{(-2+i)(-3+2i)^2}{4-3i}$ il serait très maladroit de chercher à développer le numérateur puis rendre réel le dénominateur avant de calculer le module. Le module de ce nombre complexe peut se calculer facilement ainsi : $|Z| = \frac{|-2+i||-3+2i|^2}{|4-3i|} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$

Exercice 4

1. Calculer le module de $Z = \frac{1+3i}{-3+2i}$ et $z = (1+i)^8$
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tels que $Z = \frac{z-1}{z+1}$ soit de module 1.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ tels que $Z = \frac{z-i}{z+i}$ soit imaginaire pure.

Solution

1. $|Z| = \frac{|1+3i|}{|-3+2i|} = \frac{\sqrt{130}}{13}$ et $|z| = |1+i|^8 = (\sqrt{2})^8 = 16$

2. On sait que : $|Z| = \frac{|z-1|}{|z+1|}$. $|Z| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = 0$

Alors l'ensemble des nombres complexes z tels que $|Z| = 1$ est l'ensemble des imaginaires purs ($i\mathbb{R}$)

3. soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

Puisque $2Re(Z) = Z + \bar{Z}$ et $Z + \bar{Z} = \dfrac{z-i}{z+i} + \dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i}$ alors $2Re(Z) = \dfrac{2(|z|^2-1)}{|z+i|^2}$. Z imaginaire pur signifie que $Re(Z) = 0 \Rightarrow |z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$ avec $z \neq i$ et $z \neq -i \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et ($y \neq 1$ et $y \neq -1$). L'ensemble des solutions est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points de coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Théorème 3 :

i. $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$
ii. $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|Re(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et $|Im(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
iii. $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (**Inégalité triangulaire**)
iv. $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z = 0$ ou ($z \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ / $z' = \lambda z$)

Démonstration

i. $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{(Re(z)^2 + (Im(z))^2} \geq |Re(z)|$
De même, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{(Re(z)^2 + (Im(z))^2} \geq |Im(z)|$
ii. $\forall\, z \in \mathbb{C}$, si $|Re(z)| = |z| \Leftrightarrow |Im(z)| = 0$ et donc $Im(z) = 0$.
De la même façon, on démontre aussi que $|Im(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
iii. $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = (|z|^2 + z\bar{z'} + z'\bar{z} + |z'|^2)$. Or $z\bar{z'} + z'\bar{z} = z\bar{z'} + \overline{z\bar{z'}} = 2Re(z\bar{z'})$
Ainsi $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2Re(z\bar{z'}) + |z'|^2$. Or pour tout réel a , $a \leq |a|$.
Donc $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + 2|Re(z\bar{z'})| + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2(z\bar{z'}) + |z'|^2$ d'après le **i.**. or $|z|^2 + 2|(z\bar{z'})| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$
D'où $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
iv. Puisque $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont des réels positifs, l'inégalité ***iii.*** et une égalité si et seulement si chacune des inégalités décrites en *iii)* est une égalité. C'est à dire :

$$\begin{aligned}
|z + z'| = |z| + |z'| &\Leftrightarrow |z\bar{z'}| = |Re(z\bar{z'}) \text{ et } |Re(z\bar{z'}| = Re(z\bar{z'}) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z'} \in \mathbb{R} \text{ et } |Re(z\bar{z'}| = Re(z\bar{z'}) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z'} \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } (z \neq 0 \text{ et } \frac{z\bar{z'}}{|z|^2} \in \mathbb{R}^+) \text{ (car si } z \neq 0 \text{ alors } |z| > 0) \\
&\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } (z \neq 0 \text{ et } \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } (z \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{tel que } \lambda = \frac{z}{z'}) \\
&\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } (z \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{tel que } z' = \lambda z)
\end{aligned}$$

Réciproquement si $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z = 0$ ou $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors on a : $|z + z'| = (1 + \lambda)|z| = |z| + \lambda|z|$ et par suite $|z + z'| = |z| + |z'|$ (Ne pas oublier que λ est un réel positif).

6. Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

6-1. Racine carrée d'un nombre complexe

Commençons par donner une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux nombres complexes.

Théorème 4 :

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ |z| = |z'| \\ sgn(Im(z)) = sgn(Im(z')) \end{cases}$ (1)

Démonstration

Supposons z et $z' \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ |z| = |z'| \\ sgn(Im(z)) = sgn(Im(z')) \end{cases}$. Notons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy$.

- $Re(z) = Re(z') \Rightarrow x = x'$.
- $|z| = |z'| \Rightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \Rightarrow |y| = |y'|$.
- $sgn(Im(z)) = sgn(Im(z') \Rightarrow y = y'$. Par conséquent $z = z'$

Réciproquement pour z et $z' \in \mathbb{C}$, si $z = z'$ alors on a bien les égalités de (1).

Le théorème ci dessus permet de trouver la racine carrée de n'importe quel nombre complexe.

En effet soit $Z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $Z = z^2$. D'après ce théorème on a :

$$Z = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z^2) = Re(Z) \\ |z^2| = |Z| \\ sgn(Im(z^2)) = sgn(Im(Z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ sgn(2xy) = sgn(b) \end{cases} \quad \text{(Rappel : } z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \\ sgn(2xy) = sgn(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \\ sgn(2xy) = sgn(b) \end{cases}$$

D'après tout ce qui précède, on peut déduire que **tout nombre complexe non nul admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées, opposées l'une à l'autre.**

Exemple

soit $Z = 8 - 6i$. Trouvons les racines carrées de Z dans $\mathbb{C}$:
soit $z = x + iy$ un complexe tel que $Z = z^2$. D'après le théorème on a :

$$z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3, -1) \text{ ou } (-3, 1)$$

Les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $Z = 8 - 6i$ sont : $z = 3 - i$ et $z = -3 + i$.

Exercice 5

Trouver les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes suivants :
1. $Z = 7 + 24i$ **2.** $Z = -5 - 12i$ **3.** $Z = 2i$ **4.** $Z = -4$

Solution

1. $z_1 = 4 + 3i$ et $z_1 = -4 - 3i$. **2.** $z_1 = 2 - 3i$ et $z_1 = -2 + 3i$. **3.** $z_1 = 1 + i$ et $z_1 = -1 - i$.
4. $z_1 = 2i$ et $z_1 = -2i$.

6-2. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$. Soit (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution réelle double : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $z^2 - 6z + 13 = 0$.
2. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$. Avec $\theta \in]0, \pi[$

solution

1. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = -16 = (4i)^2$. Les solutions sont $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 3 - 2i$.
2. $\Delta = (-2\cos(\theta))^2 - 4 = -4\sin^2(\theta)$. Les 2 solutions non réelles $z_1 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ et $z_2 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

6-3. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients complexes .

Cette résolution est similaire à celle d'une équation à coefficients réels :

Théorème 5 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et l'équation $(\mathbb{E})$: $az^2+bz+c=0$. On pose : $\Delta = b^2-4ac$ (Discriminant). Alors $\exists\ \delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

L'équation $(\mathbb{E})$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, distinctes ou confondues, à savoir : $\boldsymbol{z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$ **2.** $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

Solution

1. Soit l'équation $(\mathbb{E})$: $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$. Son discriminant est $\Delta = (6+i)^2-4(11+13i) = -9-40i$ et on déduit que : $\Delta = (4-5i)^2$.

Les solutions sont alors : $z_1 = \dfrac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$ et $z_2 = \dfrac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$.

2. L'équation $(\mathbb{E})$: $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$ a pour discriminant $\Delta = (7+3i)^2-8(2+4i) = 24+10i = (5+i)^2$.

Les solutions sont alors : $z_1 = \dfrac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$ et $z_2 = \dfrac{7+3i-5-i}{4} = \dfrac{1}{2}(1+i)$.

6-4.Somme et produit des racine

Dans ce qui suit, on donne les relations existant entre les coefficients et les racines d'un trinôme du second degré.

Théorème 7 : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et z_1 et z_2 les solutions, distinctes ou confondues, de l'équation $(\mathbb{E})$: $az^2+bz+c=0$. Alors on a : $\boldsymbol{z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}}$.

Exercice 8

On note de z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-(1-i)z+2+3i=0$. Sans calculer z_1 et z_2,

Calculer $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$ et $z_1^2+z_2^2$.

Solution

On a d'après le théorème précédent $z_1+z_2 = 1-i$ et $z_1z_2 = 2+3i$

$\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2} = \dfrac{1-i}{2+3i} = \dfrac{-1-5i}{13}$. Et $z_1^2+z_2^2 = (z_1+z_2)^2-2z_1z_2 = (1-i)^2-2(2+3i) = -4-8i$.

7.Argument d'un nombre complexe non nul. Forme trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

7-1. Argument d'un nombre complexe non nul.

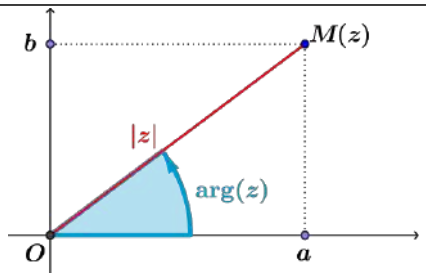
Définition

soit z un nombre complexe non nul.

On appelle **argument** de z, l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ avec M un point ayant pour affixe z.

Notation : L'argument de z se note $arg(z)$. C'est un angle en radian.

Illustration :



Théorème 8

1. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}, arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$.

2. $\forall (\lambda, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}^*, arg(\lambda z) = \begin{cases} arg(z)[2\pi] \text{ si } \lambda > 0 \\ arg(z) + \pi[2\pi] \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$

3. $\forall z \in \mathbb{C}^*, arg(\bar{z}) = arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)[2\pi]$ et $arg(-z) = arg(z) + [\pi]$

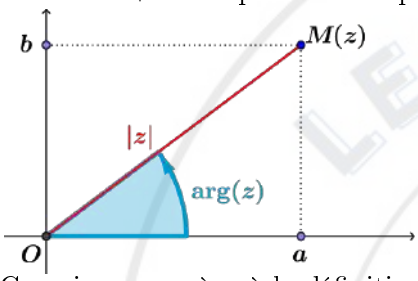
4. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{*2}, arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$ et plus généralement $\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$arg\left(\dfrac{1}{z^n}\right) = n \times arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -n \times arg(z)[2\pi]$.

5. $\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$

7-2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

soit $z = a + ib$. on peut alors représenter le point $M(z)$ comme suit :



A partir de cette figure, on peut déduire que : $\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\sin(\theta) \end{cases}$. Alors on peut écrire $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta = arg(z)$.
Notons donc $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ (Notation qui a bien un sens et qui est déduite à partir des considérations géométriques dont on ne va pas essayer de rentrer dans les détails ici).
On peut finalement écrire $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition
Pour tout z un nombre complexe, on peut mettre z sous la forme de :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

Avec $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$.

La notation $z = r\,e^{i\theta}$ **est l'écriture de z sous forme exponentielle**.

Exemple

i. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = e^{i\frac{\pi}{6}}$ **ii.** $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Méthode pratique pour mettre un nombre complexe z sous sa forme exponentielle

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul où x et y sont deux réels. Pour déterminer la forme complexe de z, il faut suivre les étapes suivantes :
i. Calculer le module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
ii. Mettre $|z|$ en facteur comme suit : $z = |z|\left(\dfrac{x}{|z|} + i\dfrac{y}{|z|}\right) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
iii. Chercher $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$
iv. On obtient donc $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|\,e^{i\theta}$

Propriété :
D'après la définition de la forme exponentielle on a les propriétés suivantes :
$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ avec $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}, z' = |z'|\,\mathrm{e}^{i\theta'}$
1. $z \times z' = |z||z'|\,\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ et plus généralement $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^n = |z|^n\,\mathrm{e}^{ni\theta}$
2. Pour $z' \neq 0$, $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{|z'|}\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{|z|}{|z'|}\,\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$

Exercice 9

1. Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$.
2. En mettant $(1+i)^{16}$ sous forme exponentielle, calculer sa valeur exacte.

Solution
1. En suivant les étapes de la méthode pratique et les propriétés ci-dessus.
On écrit d'abord $z_1 = \dfrac{z_1'}{z_2'}$ avec $z_1' = \sqrt{3} - i$ et $z_2' = 1 + i$

$z_1' = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2' = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

Ainsi $z_1 = \dfrac{z_1'}{z_2'} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}$

2. En suivant les mêmes étapes, on déduit $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

Par suite $(1+i)^{16} = (\sqrt{2})^{16}\,\mathrm{e}^{i\frac{16\pi}{4}} = 256\,\mathrm{e}^{4i\pi}$ or $\mathrm{e}^{4i\pi} = \cos(4i\pi) + i\sin(4i\pi) = 1$ Ainsi $\boxed{(1+i)^{16} = 256}$

7-3. Formules d'Euler

Expression de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de $\mathrm{e}^{i\theta}$. Ces formules sont connues sous le nom de **formules d'Euler**.

Théorème 9 :
i. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})$
Autrement dit : $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$.
ii. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a : $\tan(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{i(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})} = \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta} - 1}{i(\mathrm{e}^{2i\theta} + 1)} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2i\theta}}{i(\mathrm{e}^{-2i\theta} + 1)}$.

Exemple
En utilisant les formules d'Euler, transformons les expressions $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$, $1 - \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\theta'}$:
- $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
- $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
- $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2\cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

8. Racines n-èmes d'un nombre complexe

8-1. Racines n-èmes de l'unité

Définition
soit $n \in \mathbb{N}^*$ et z un nombre complexe.
On appelle racine n-èmes de l'unité, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$
Cet ensemble est le plus souvent noté U_n

Détermination des éléments de U_n

soit $z \in \mathbb{C}$. On peut écrire $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n = r^n\,e^{in\theta}$. Ainsi

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = r^n = 1 \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = r = 1 \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, 1 admet dans $\mathbb{C}$ n racines deux à deux distinctes à savoir $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, 2....., n-1\}$

Exemple

1. Pour n=2, on a $z^2 = 1$ admet pour solution $e^{\frac{2ik\pi}{2}}$, $k \in \{0, 1\}$. C'est à dire que $U_2 = \{-1, 1\}$

2. Pour $n = 3$, on a $z^3 = 1$ admet pour solution $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

En notant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on a alors $U_3 = \{1, j, j^2\}$

Notons qu'avec cette notation, j vérifie :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$
- $1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j = -j^2$, $1 + j^2 = -j$ et $j + j^2 = -1$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = j^2$

3. Immédiatement on a aussi $U_4 = \{e^{\frac{ik\pi}{2}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$

On peut remarquer que la somme des racines n-èmes de l'unité pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ est nulle. Cette remarque est une propriété importante des racines n-èmes de l'unité.

Théorème 10 :
Soient z_0, z_1, $\cdots$, z_{n-1} les racines n-èmes de l'unité deux à deux distinctes.
Pour $n \geq 2$ la somme des ces racines est nulle. Autrement, $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$

En effet pour $n \geq 2$, les racines n-èmes 2 à 2 distinctes de l'unité sont sous la forme de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. $\omega \neq 1$ (car $n \geq 2$) et $\omega^n = 1$. Ainsi on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \text{ (car } \omega^n = 1\text{). D'où le résultat.}$$

8-2. Racines n-èmes d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Z un nombre complexe. On cherche les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = Z$.
1er cas : $Z = 0$
Si $Z = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n = Z = 0$ si et seulement si $z = 0$. Par suite 0 admet une seule racine n-ème à savoir 0.
2eme cas :$Z \neq 0$
On suppose maintenant que $Z \neq 0$, alors on peut écrire $Z = R\,e^{i\alpha}$ avec $|Z| = R$ et $arg(z) = \alpha$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$. En écrivant $z = r\,e^{i\theta}$, on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n\,e^{in\theta} = R\,e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Puis on déduit que $z = \sqrt[n]{R}\,e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$avec $k \in \mathbb{Z}$

Les racines n-èmes de Z deux à deux distinctes sont de la forme de $z = \sqrt[n]{R}\,e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^6 = 4 - 4\sqrt{3}i$

solution

Soit $Z = 4 - 4\sqrt{3}i$. On écrit Z sous forme exponentielle que nous savons déjà faire. On a alors : $Z = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$
Soit donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^6 = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et écrivons $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$

$$z^6 = 4-4\sqrt{3}i \Leftrightarrow r^6\,\mathrm{e}^{6i\theta} = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 8 \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 6\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} r = \sqrt[6]{8} \text{ et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \dfrac{-\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{6} \end{cases}$$

Puis on déduit que :$z^6 = 4 - 4\sqrt{3}i \Leftrightarrow z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{-\pi}{18}+\frac{k\pi}{3})}$ $k \in \mathbb{Z}$. D'où l'ensemble de solutions complexes 2 à 2 distinctes de l'équation $z^6 = 4 - 4\sqrt{3}i$ est : $\boxed{S = \left\{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{-\pi}{18}+\frac{k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}\right\}}$

9. Applications à la trigonométrie

Retrouvons par exemple les formules donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Soit x un réel. $\cos(2x) + i\sin(2x) = \mathrm{e}^{2ix} = (\mathrm{e}^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x)$.
Par identification, on retrouve : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Exercice 11

Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Solution

Soit x un nombre réel. $\cos(3x) + i\sin(3x) = \mathrm{e}^{3ix} = (\mathrm{e}^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3$
Or $(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right)$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient : $\boxed{\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \text{ et } \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).}$

10 Applications aux calculs de longueurs et d'angles

Le plan est muni du repère orthonormée direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème 11 : Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B
1. $AB = |z_A - z_B|$.
2. Si de plus $A \neq B$ alors $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)[2\pi]$

En utilisant les résultats de ce théorème on a directement le théorème suivant :

Théorème 12 : Soient A , B , C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$.

1. $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{CD}{AB}$.
2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Commentaires : Du théorème 2 on peut tirer les conclusions suivantes :
Si $arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et si $arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Théorème 13 : Soient A , B , C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D.
Si c'est quatre points sont non alignés, on dit que A , B , C et D sont **Cocycliques** si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$.
Autrement dit, A , B , C et D sont **Cocycliques** si et seulement si $arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg\left(\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right)[\pi]$

Exercice 13

Le plan est rapporté du repère orthonormée direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A(1,1)$, $B(-1,2)$ et $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Solution

Calculons les 3 distances AB , AC et BC :

$AB = |z_B - z_A| = |-2+i| = \sqrt{5}$, $AC = |z_C - z_A| = \left|-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2}$.

Ainsi $AC = \sqrt{5}$ et enfin $BC = |z_C - z_B| = \left|\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2}$.

Ainsi $BC = \sqrt{5}$

.

Conclusion : $AB = AC = BC = \sqrt{5}$. ABC est alors un triangle équilatéral .

Exercice 13

1. Écrire sous forme algébrique :

a. $z_1 = \dfrac{1 + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$; $0 < \theta < 2\pi$ **b.** $z_2 = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$; $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ **c.** $z_3 = (1-i)^{2024}$

2. Écrire sous forme exponentielle :

a. $z_1 = (1+i)^3(-3+3\sqrt{3}i)$ **b.** $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$ **c.** $z_3 = 1 - \mathrm{e}^{i\theta}$; $\theta \in 0 \leq \theta < 2\pi$

3. Déterminer le module ainsi que le conjugué des nombres complexes suivants

a. $z_1 = 1 - \mathrm{e}^{i\theta}\ \theta$; $\in [-\pi, 0]$ **b.** $z_2 = \dfrac{\tan(\theta) - i}{\tan(\theta) + i}$; $(\theta \neq \dfrac{\pi}{2})$ **c.** $z_3 = \dfrac{1}{1 + i\tan(\theta)}$; $(\theta \in]\dfrac{\pi}{2}, \pi[)$

d. $z_4 = \mathrm{e}^{2i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}$; $(\theta \in [0, \pi[)$

Solution

1-a. $z_1 = \dfrac{1 + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)} = -\dfrac{i}{\tan(\theta/2)}$ **b.** $z_2 = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

c. $z_3 = (1-i)^{2024} = ((1-i)^2)^{1012} = 4^{506}$

2-a. $z_1 = 12\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{17i\pi/12}$ **b.** $z_2 = 32$ **c.** $z_3 = 2\sin(\frac{\theta}{2})e^{(\frac{i\theta}{2} - \frac{i\pi}{2})}$

3-a. Puisque $\theta \in [-\pi, 0]$ alors $|z_1| = -2\sin(\frac{\theta}{2})$; $\overline{z_3} = \left(1 - e^{-i\theta}\right)$

b. $|z_2| = 1$, $\overline{z}_2 = \dfrac{\tan(\theta) + i}{\tan(\theta) - i}$ et $arg(z_2) = 2\theta + \pi$

c. $|z_3| = -\cos(\theta)$, $\arg(z_3) = -(\theta + \pi)$ et $\overline{z}_3 = \dfrac{1}{1 - i\tan(\theta)}$

d. $|z_4| = 2\sin(\frac{\theta}{2})$, $\arg(z_4) = \left(\dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\overline{z}_4 = \mathrm{e}^{-2i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}$

Exercices

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2+z+1=0$ puis résoudre $4z^2-2z+1=0$

b. $2z^2+2z+1=0$ et $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$

c. $\frac{1}{2}z^6+(1+3i)z^3+8+8i=0$ (Indication : poser $Z=z^3$) et $z^4+(3-6i)z^2-8-6i=0$

2- **a.** Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$ puis le mettre sous forme exponentielle.

b. Déduire alors l'expression de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2022}$

3. Déterminer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$. En déduire $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2022}$.

4. En déduire les racines n-èmes de $z_0=\frac{1+i}{(1-i)(1+i\sqrt{3})}$

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe non nul $z\neq i$ on pose : $h(z)=i\left[\frac{z-2i}{z-i}\right]$

a. Vérifier que : $h(z)=z\iff z^2-2iz-2=0$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2iz-2=0$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.
On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tels que $Re(a)=1$. Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a. Montrer que : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\frac{z-a}{z-b}$

b. En déduire que : $(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A})\equiv\pi+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})[2\pi]$

3- **a.** Montrer que si les points M , A et B sont alignés alors les points M , A et B et M' sont alignés.

b. Montrer que si M , A et B ne sont pas alignés alors les points M , A et B et M' sont Cocycliques.

Exercice 3
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. L'unité graphique est 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{z-4}{z}=i$. Écrire les solutions sous forme algébrique

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexes d'affixes respectives : $a=2$; $b=4$; $a'=2i$ et $d=2+2i$. Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives : $e=1-i\sqrt{3}$ et $f=1+i\sqrt{3}$.
Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

5. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre A' et de rayon 2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' de E'.

b. Démontrer que E' est un point du cercle $(\mathcal{C}')$

c. Déterminer $e-d$ en fonction de e' et d. en déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Soit m un nombre complexe non nul.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z : $2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

On suppose que $m \in C \setminus \{0, 1, i\}$ et on pose : $z_1 = \dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \dfrac{1-i}{2}(m+i)$.
On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs 1 , i , m , z_1 et z_2 .

2- **a.** Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$.

b. Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Vérifier que : $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\dfrac{m-1}{m-i}$.

4. Montrer que si les points M et M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω , M, M_1 et M_2 sont cocycliques.
(On remarquera que $\dfrac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Problèmes

Problème 1 :

On considère $z_0 = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$

1. Écrire z_0 sous forme exponentielle. Quel est le module de z_0 ?

2. De la question **1.**, déterminer les racines n-èmes de z_0. Et en particulier les racines cubique de z_0

3. On cherche l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$ (E). On suppose $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Posons $\omega_k = \mathrm{e}^{i(\frac{2\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

a. Prouver que $\omega_k \neq -1$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$.

b. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$ on pose $S_k = \dfrac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$

Montrer que $S_k = \dfrac{\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})} - \mathrm{e}^{-i(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})}}{\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})} + \mathrm{e}^{-i(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})}}$. En déduire que $S_k = i\tan(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})$

c. Déduire que les solutions de (E) sont sous la forme $z_k = \tan(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})$ $k \in \{0, 1, 2\}$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ une racine n-ème de 1. On suppose que $n = 5$.

a. Quelles sont les 4 complexes qui vérifient ces conditions ?

b. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
On pose $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ avec $x \neq 1$

c. Montrer que $f(x) = \frac{1-x^6}{1-x}$.

d. En calculant de deux manières différentes la dérivée de f, calculer $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4$
On suppose n quelconque.

e. Déterminer les racines n-ème de 1 puis déterminer $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

f. On considère $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ avec $x \neq 1$. En calculant la dérivée de f de deux manières différentes, calculer : $\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$

Problème 2 :
Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $|Z| = 2$ et $Z \in \mathbb{R}$

2- **a.** Déterminer l'ensemble des points M tels que : $|Z| = 1$.

On considère l'équation (E) : $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$

b. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.

c. Montrer que pour tout nombre complexe z, $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^{n+1}((z-1)^n - (z+1)^n)$.En déduire que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.

d. Résoudre (E).

3. Calcul de la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$. Pour cela on considère $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

a. Calculer le module et l'argument de Z. En déduire sa forme exponentielle.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, trouver les racines n-èmes de Z qui sont deux à deux distinctes.

c. Déduire alors, sous forme trigonométrique, les racines carrées de Z .

d. En posant $z = x + iy$, trouver les valeurs de x et y tel que $z^2 = Z$.

e. En déduire alors que $\cos(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et trouver la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{8})$.

4. On cherche de même à calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$. Soit $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

a. Calculer Z^2, puis déterminer un argument et le module de Z^2. Écrire Z^2 sous forme exponentielle.

b. Déduire alors un argument et le module de Z et écrire Z sous forme exponentielle.

c. Déterminer les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Problème 3
Soit $n \geq 2$ et z un nombre complexe.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que :

a. $z^{2n} = 1$ et déterminer l'ensemble des z tels que $z^n = -1$.

b. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$ et qui sont deux à deux distincts.

2. soit z un complexe tel que $z^n = -1$ et $z \neq -1$.

Vérifier que $z \neq 1$ puis calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2(n-1)}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

a. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.

b. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^{ix} - 1 = 2i\,\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}} \sin(\frac{x}{2})$

c. Des deux questions précédentes, déterminer $Z_n = 1 + \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{2ix} + \cdots + \mathrm{e}^{i(n-1)x}$ Puis en déduire $X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x)$ et $Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1)x)$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

a. calculer $\dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$.

b. Linéariser alors

i. $A(x) = \cos^3(x)$ et $B(x) = \sin^3(x)$.

ii. $C(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)$; $D(x) = \cos^3(x)\sin(x)$ et $E(x) = \cos(x)\sin^3(x)$

iii. $F(x) = \sin^4(x)$; $G(x) = \cos^4(x)$; $H(x) = \cos(x)\sin^4(x)$

5. soit $z \in \mathbb{C}$ de module r et d'argument θ.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $z^k + \bar{z}^k$.

b. Déduire alors l'expression de $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z^2})\cdots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de r, θ et de $\cos(\theta)\cos(2\theta)\cdots\cos(n\theta)$

Problème 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. Soient A', B' et C' d'affixes respectives $a' = -14$, $b' = 16\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

1. Placer les points A , B , C , A', B' et C' dans le repère.

2. Montrer que O est un point de la droite (BB').

3. Montrer alors que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

4. **a.** Soient z, $z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.(**Inégalité triangulaire**)

b. Déduire plus généralement que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $z_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, 2\cdots, n\}$
$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ (**Inégalité triangulaire généralisée**)

c. De la question **4-b.** déduire pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $|1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}| < n|z|^n$ pour $|z| > 1$.

d. En conclure que $z \in \mathbb{C}$ est solution de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0$ alors $|z| \leq 1$

5- **a.** Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$. Déduire alors que pour un point M d'affixe z quelconque, $|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)^j| = |a + bj^2 + cj| = 22$ (rappel :$a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$)

c. Pour z, z' et $z'' \in \mathbb{C}$, montrer d'après **3-c.** que $|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$.en déduire que la distance $MA + MB + MC$ est minimale pour $M = O$

Problème 5

Partie A

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par : $\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

On note r_n le module de z_n : $r_n = |z_n|$

Dans le plan muni d'un repère orthonormée directe $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A_n, le point d'affixe z_n.

1. **a.** calculer z_1, z_2 et z_3 et placer les points A_1, A_2 dans un graphique.

b. Écrire $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme géométrique

c. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est un triangle rectangle en A_1.

2- **a.** Démontrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer alors r_n en fonction de n. Cette suite converge t-elle ?

b. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 etc. Ainsi $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

3- **a.** Montrer que les rectangles OA_nA_{n+1} sont rectangle et isocèle en A_{n+1}. En déduire que pour tout entier naturel n, $A_nAn + 1 = r_{n+1}$.

b. Donner l'expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Partie B

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3 cm)

1. On désigne par A le point d'affixe i. Une transformation f associe à tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{z^2}{i - z}$

a. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

b. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Montrer que $x' = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$

c. En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs . Dessiner l'ensemble E.

d. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble F.

2. Soit g l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

a. Soit E le point d'affixe E $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par g. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

c. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ .

Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

d. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB)

e. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par g ?

CHAPITRE 2

ARITHMÉTIQUE

Dans tout ce chapitre $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs .

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Définitions

Définition 1
• Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \neq 0$.
On dit que $\boldsymbol{a}$ **divise** $\boldsymbol{b}$ ou que $\boldsymbol{a}$ **est un diviseur de** $\boldsymbol{b}$ si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $\boldsymbol{b = qa}$. Il revient au même de dire que $\boldsymbol{a}$ **divise** $\boldsymbol{b}$ ou que $\boldsymbol{b}$ **est divisible par** $\boldsymbol{a}$.
• Soient a et b deux entiers relatifs.
$\boldsymbol{b}$ **est un multiple de** $\boldsymbol{a}$ si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $\boldsymbol{b = qa}$.
Si de plus $a \neq 0$, alors b est multiple de a si et seulement si a divise b.

Notation :
– Quand $\boldsymbol{a}$ **divise** $\boldsymbol{b}$ on écrit $\boldsymbol{a|b}$.
– La notation $\boldsymbol{a \nmid b}$ signifie que a ne divise pas b.

Remarque : :
– Dans la définition 1, on a imposé à a d'être non nul ou encore on n'écrira jamais une phrase du genre « 0 divise ... ». Néanmoins, puisque $0 = 0 \times 0$, on peut se permettre de dire que 0 est un multiple de 0.
– Si a est un entier relatif, les multiples de l'entier a sont les entiers relatifs de la forme $q \times a$ où q est un entier relatif. Ce sont donc les nombres : $\ldots \quad -3a \quad -2a \quad -a \quad 0 \quad a \quad 2a \quad 3a \quad \ldots$

2. Propriétés de divisibilité

En utilisant la définition précédente, on a les propriétés suivantes :

Propriétés :
i. Soit a un entier naturel non nul. Tout diviseur de a est inférieur ou égal à a.
ii. $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, les diviseurs de a sont les diviseurs de $|a|$.
iii. $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, les multiples de a sont les multiples de $|a|$.

Démonstration :
i. Soit b un entier naturel diviseur de $a > 0$. Alors par définition, il existe un entier naturel $k > 0$ tel que $a = kb \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{k}$. Or $k \in \mathbb{N}$ et $k > 0$ alors $k \geq 1$. On conclut alors que $a \geq b$.
ii. Soit a un entier relatif :
– Si $a \geq 0$, alors $|a| = a$ et le résultat est prouvé.
– Si $a < 0$ alors $|a| = -a$. Soit b un diviseur de a. Par définition, il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. Alors $-a = -kb \Rightarrow |a| = k'b$. Par suite b est aussi un diviseur de $|a|$. Comme b est un diviseur quelconque de a, on conclut alors que tous les diviseurs de a sont aussi les diviseurs de $|a|$.
iii. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si $b = qa$ avec $q \in \mathbb{Z}$, alors $b = (sgn(a)q)|a|$ avec $(sgn(a)q) \in \mathbb{Z}$.

Inversement si $b = k|a|$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $b = (sgn(a)k)a.$ avec $(sgn(a)k) \in \mathbb{Z}$. D'où le résultat.

Théorème 1 :
i. Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, a divise 0. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, 0 est multiple de a.
ii. Pour $a \in \mathbb{Z}$, 1 divise a. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a est multiple de 1.

Démonstration :
i. Soit $a \in \mathbb{Z}^*$, alors on peut écrire $0 = 0 \times a$. Et donc a divise 0 ou encore 0 est multiple de a. Cette dernière affirmation reste claire quand $a = 0$.
ii. Soit $a \in \mathbb{Z}$. $a = a \times 1$ et donc $1|a$ ou encore a est multiple de 1.

Remarque :
Le théorème précédent dit que **tout entier relatif non nul divise 0** ou encore que **0 est multiple de tout entier relatif**. Cependant, **0 n'est le diviseur d'aucun entier relatif**.

Théorème 2 :
i. Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, ***a divise a*** (la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}^*$ ou dans $\mathbb{N}^*$ est réflexive).
ii. Pour $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a|b$ et $b|a \Leftrightarrow a = b$ (la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est anti-symétrique).
iii. Pour $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a|b$ et $b|a \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
iv. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$, $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$ (La transitivité)

Démonstration :
i. Immédiat $(a = 1 \times a)$
ii. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si a divise b et b divise a, alors d'après les propriétés, $a \leq b$ et $b \leq a \Leftrightarrow a = b$.
Réciproquement si $a = b$ alors a divise b et b divise a d'après i).
iii. Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ si $a|b$ et $b|a$ alors $|a|$ divise $|b|$ et $|b|$ divise $|a|$ puis on déduit que $|a| = |b|$ (d'après **ii.**).
Ainsi $a = b$ ou $b = -a$.
réciproquement, si $a = b$ ou $b = -a$, alors a divise b et b divise a .
iv. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ $\begin{cases} a|b \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = qa \\ b|c \Leftrightarrow \exists\ q' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } c = q'b \end{cases}$ $\Rightarrow c = qq'a$ et par suite $a|c$.

Théorème 3 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$
Si $c|a$ et $c|b$ alors $\forall\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $c|(au + bv)$

Démonstration :
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ $\begin{cases} c|a \Leftrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = qc \\ c|b \Leftrightarrow \exists\ q' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = q'c \end{cases}$ $\Rightarrow \forall\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = (qu + q'v)c$
Ainsi c divise aussi $au + bv$.

Commentaire :
Le théorème précédent peut être compris de la façon suivante : si a et b sont des multiples commun de c, alors tout entier de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs, est un multiple de c ou encore que si c est un diviseur commun à a et b, alors c divise tout entier du type $au + bv$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 1

Trouver tous les entiers naturels n tels que $2n + 3$ divise $3n + 7$.

Solution
Soit n un entier naturel tel que $2n + 3$ divise $3n + 7$. Puisque $2n + 3$ divise à la fois $2n + 3$ et $3n + 7$ alors $2n + 3$ divise $2(3n + 7) - 3(2n + 3) = 5$. . Puisque $2n + 3$ est un entier naturel, on a donc nécessairement $2n + 3 = 1$ ou $2n + 3 = 5$ puis $n = -1$ ou $n = 1$ puis $n = 1$ car n est un entier naturel.
Réciproquement si $n = 1$ alors $2n + 3 = 5$ et $3n + 7 = 10$ et par suite $2n + 3$ divise $3n + 7$.
Il existe un et un seul entier naturel n tel que $2n + 3$ divise $3n + 7$ à savoir $n = 1$.

3. Nombres premiers

3-1. Définition

Définition 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$.
On dit que p est un **nombre premier** ou plus simplement qu'il est premier si : il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts à savoir 1 et le nombre lui-même.

Remarque :
- La notion de nombre premier ne concerne que les entiers naturels.
- 0 a une infinité de diviseurs donc il n'est pas premier.
- 1 n'a qu'un seul diviseur, qui est lui-même donc 1 n'est pas premier.
- 2 a exactement 2 diviseurs : 1 et 2 donc 2 est le plus petit des nombres premiers.

Attention : Un nombre premier n'est pas forcément impair. Par exemple 2 est premier mais pair. Les notions de *"parité"* et de *"primarité"* sont bien distinctes.

3-2. Problématique de recherche de nombre premier

A ce jour, il n'existe toujours pas de critère ou de formule qui permet de dire instantanément si un nombre quelconque est premier.
Prenons un entier naturel n différent de 1, pour vérifier si ce nombre est premier ou pas, il suffit alors de partir de 2 et de tester tous les entiers jusqu'à $n-1$. Si nous trouvons un entier naturel p, différent de 1 et de n, qui divise n alors par définition, n n'est pas premier. Sinon n est premier.
Mais prenons par exemple $n = 145237$. Est-il vraiment nécessaire de tester tous les entiers de 2 à 145237 jusqu'à ce que l'on trouve ou non un diviseur de 145237 ?

Nous allons voir des théorèmes qui nous permettent d'affiner nos recherches.

Théorème 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq 1$, alors n admet au moins un diviseur premier.

Démonstration :
On va démontrer ce théorème en distinguant les différents cas possibles :
Cas 1 : Si $n = 0$, 2 divise 0 et par suite n admet au moins un diviseur premier.
Cas 2 : Supposons que $n \neq 0$.
- Si n est premier, ce diviseur est lui-même et la propriété est démontrée.
- Si n n'est pas premier, alors n possède au moins un diviseur différent de 1 et de lui-même.

Notons D l'ensemble des diviseurs de n autre que 1 et n. Par hypothèses, D est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$, alors il possède un plus petit élément que nous noterons p. p n'est pas nul car 0 ne divise pas $n \neq 0$.
Montrons par absurde que p est premier :
Si p n'est pas premier, par définition, on peut conclure que p a un diviseur k différent de 1 et de lui-même.
Puisque $k|p$ alors $k \leq p$ et comme $k \neq p$ alors $k < p$.
Or $p|n$ et $k|p \Rightarrow k|n$ avec $k < p < n$. Mais alors, k est dans D et $k < p$ ce qui contredit le fait que p est le plus petit élément de D. Par suite p est premier.
Conclusion : n admet dans tous les cas un diviseur premier.

Commentaire :
La conséquence immédiate de ce théorème est qu'au lieu de tester tous les entiers naturels compris 2 et $n-1$, on ne va que tester parmi ces entiers, ceux qui sont premiers.

Le théorème suivant, qu'on va admettre, nous permettra d'alléger encore plus nos efforts de recherche de primalité d'un nombre.

Théorème 4 : Méthode de discrimination d'un nombre premier.
Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.
Pour déterminer la primarité de n, il suffit de tester dans l'ordre croissant les nombres premiers inférieurs ou égaux $\sqrt{n}$.
- Si l'un d'eux divise n alors n n'est pas premier.
- Sinon, n est premier.

Exemple

Prenons $n = 247$. Ce nombre est-il premier ?

Pour déterminer si 247 est un nombre premier ou pas, on utilise le théorème précédent.

On a $\sqrt{247} = 15.71$. On va alors tester pour voir s'il existe un nombre premier compris entre 2 et 15 qui divise 247. La liste des nombre premiers compris entre 2 et 15 est : $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.
On teste alors si l'un de ces nombres divisent 247 à l'aide d'une calculatrice. On retrouve que $\frac{247}{13} = 19$.
Donc 247 n'est pas un nombre premier.

Exercice 2

En utilisant la démarche précédente, déterminer si les nombres suivants son des nombres premiers ou pas :
1. $n = 569$ **2.** $n = 437$ **3.** $n = 881$

3-3. Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Nous avons vu que si $n \geq 2$ alors il possède au moins un diviseur premier p_1. Ainsi $\exists\ q_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = q_1 \times p_1$.
Si $q_1 \neq 1$ alors il possède à son tour au moins un diviseur premier p_2 (qui peut être éventuellement égal à p_1).
Ainsi $\exists\ q_2 \in \mathbb{N}$ tel que $q_1 = q_2 \times p_2$ avec $q_2 < q_1$ car $p_2 \neq 1$.
On construit ainsi une suite (q_n) qui est décroissante et minorée par 1. Cette suite s'arrête donc « forcément » or elle ne peut s'arrêter que si l'un de ses termes vaut 1. Ainsi on peut écrire $n = p_1 \times p_2 \times .... \times p_{k+1}$.
En écrivant les produits de nombres premiers égaux entre eux sous forme de puissance, on obtient donc le théorème suivant :

Théorème 5 : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On peut alors décomposer l'entier n de façon unique sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ..... \times p_m^{\alpha_m}$
Où p_1, p_2, ..., p_m sont des nombres premiers tels que : $p_1 < p_2 < ... < p_m$ et α_1 ,α_2, ... ,α_m sont des entiers naturels non nuls.
L'écriture de n sous cette forme est appelée **décomposition de n en produit de facteurs premiers**.

Remarques
– Ce théorème peut être montré de façon rigoureuse à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
– L'ordre strict imposé sur les facteurs sert à garantir l'unicité de la décomposition.
– Quel que soit i : $\alpha_i \neq 0$ donc quel que soit i : $p_i | n$. De plus, il ne peut exister de nombre premier p différent des p_i qui divise n car sinon la décomposition ne serait pas unique.

Exemple de décomposition : technique et présentation.
Décomposons le nombre $n = 420$

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7

Méthode :
- On teste les nombre premiers par ordre croissant et on dispose les calculs comme dans cet exemple.
- Arriver à une étape i, si un entier premier ne divise pas le quotient trouver à l'étape $i-1$, il ne peut plus être un diviseur dans les étapes suivantes.
- A la fin on fait le produit des diviseurs premiers trouvés affectés à leurs ordre de multiplicité.
- Dans notre exemple, $n = 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

Exercice 3

Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants :

1. $n = 2475$ **2.** $n = 1859$ **3.** $n = 18360$

II. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

On admet le théorème suivant :

Théorème 6 : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Il existe un couple (q, r) d'entiers relatifs et un seul tels que :

$$a = bq + r \qquad \text{et } 0 \leq r < b$$

q s'appelle le **quotient** de la division euclidienne de l'entier relatif a par l'entier naturel non nul b et r s'appelle le **reste** de la division euclidienne de a par b.

Exemple

Soit $n = 311$.
On peut écrire $n = 3 \times 103 + 2$. Dans ce cas :
- La division euclidienne de 311 par 3 a pour quotient $q = 103$ et pour reste $r = 2$.
- On peut aussi dire que la division euclidienne de 311 par 103 a pour quotient $q = 3$ et pour reste $r = 2$.

On a immédiatement le résultat suivant concernant la divisibilité d'un entier par un autre :

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

III. PGCD - PPCM

On rappelle ce théorème important :

Théorème 7 :
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

A- PGCD

1. Introduction à la notion de pgcd

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On note par $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a qui sont des entiers positifs et par $D(b)$ celui des diviseurs de b qui sont des entiers positifs. L'ensemble de leurs diviseurs communs est noté : $D(a, b)$ avec $D(a, b) = D(a) \cap D(b)$.

$D(a,b)$ est non vide car on sait que pour tout entier relatif n, 1 divise n. En particulier 1 divise a et b donc $D(a,b)$ n'est pas vide.
De plus, a et b admettant un nombre fini de diviseurs et par conséquent leurs diviseurs communs sont en nombre fini. $D(a,b)$ étant un sous ensemble fini et non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément qu'on note d. d est donc par construction, le plus grand commun diviseur à a et b.

On a alors la définition suivante :

Définition 3 : Soit a et b deux entiers relatifs tous non nuls.
On dit que le nombre d est le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur de a et b lorsque d divise a, d divise b et qu'il n'y a pas un diviseur commun à ces deux nombres plus grands que d.
d est noté le plus souvent $PGCD(a,b)$ mais aussi $a \wedge b$

Remarque :
Si $a = b = 0$, la notion de PGCD de a et b n'a pas de sens car tout entier relatif non nul est un diviseur commun à a et b.

Exemple

Soient $a = -12$ et $b = 26$.
Alors $D(a) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et $D(a) = \{1, 2, 13, 26\}$. Alors $D(a,b) = \{1, 2\}$. On conclut que :
$-12 \wedge 26 = 2$

Dans l'exemple précédent, on peut remarquer rechercher le $PGCD(-12, 26)$ revient à rechercher celui de $(12, 26)$.
On généralise cette remarque dans le théorème suivant :

Théorème 8 :
Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Alors $PGCD(a,b) = PGCD(|a|, |b|)$.

Démonstration :
On a vu dans les propriétés de divisibilité que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, les diviseurs de a sont les diviseurs de $|a|$.
En utilisant cette propriété, on peut conclure que , les diviseurs communs à a et b sont aussi les diviseurs communs à $|a|$ et $|b|$. En particulier, le plus grand des diviseurs communs à a et b est aussi le plus grand des diviseurs communs à $|a|$ et $|b|$ ce qui démontre le résultat.

Commentaire :
Ce résultat ramène la recherche du PGCD de deux entiers relatifs à la recherche du PGCD de deux entiers naturels. Par exemple $PGCD(-35, 30) = PGCD(35, 30)$, $PGCD(-100, -25) = PGCD(100, 25)$ et le $PGCD(50, -60) = PGCD(50, 60)$.

2. Propriétés du PGCD

De la définition du PGCD et les propriétés de divisibilité, on déduit facilement les propriétés suivantes :

Propriétés : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$:
i-a. $PGCD(a,a) = |a|$
b. $PGCD(a,1) = 1$
c. $PGCD(a,0) = |a|$.
ii-a. Si b divise a, alors $PGCD(a,b) = |b|$
b. Si a divise b, alors $PGCD(a,b) = |a|$.
iii-a. Pour tout entier naturel non nul k, $PGCD(ka, kb) = k \times PGCD(a,b)$
b. Pour tout entier relatif non nul k, $PGCD(ka, kb) = |k| \times PGCD(a,b)$

Exercice 4

Déterminer les PGCD suivants :

1. $PGCD(24, 32)$ **2.** $PGCD(221, -187)$ **3.** $PGCD(-240, -32)$.

3. Techniques de recherche du PGCD

3-1. Utiliser l'ensemble de diviseur

Si on connait l'ensemble des diviseurs positifs des deux entiers, on peut facilement déterminer le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Application

Soient $a = 84$ et $b = 726$.
Alors $D(a) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$ et $D(b) = \{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66, 121, 242, 363, 726\}$.
On déduit facilement $a \wedge b = 6$.

3-2. Utilisation de la décomposition d'un nombre en facteur premiers

Si l'on possède les décompositions de a et de b, il est alors inutile de rechercher l'ensemble des diviseurs communs pour n'en garder que le plus grand. La méthode consiste à :
• décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.
• Puis affecter aux facteurs premiers communs l'exposant le plus petit.

Reprenons $a = 84$ et $b = 726$.
♦ On décompose les entiers a et b en produits de facteurs premiers : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $726 = 2 \times 3 \times 11^2$.
♦ Et on affecte aux facteurs premiers communs l'exposant le plus petit :
- En utilisant les décompositions, on voit 2 et 3 sont des facteurs premiers qui divisent 84 et 726.
- Alors $PGCD(84, 726) = 2^1 \times 3^1 = 6$.

Les exemples suivants permettent de mieux comprendre cette technique :
i. Soient $a = 2^7 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$ et $b = 2^3 \times 5^5 \times 7^2 \times 11^2 \times 17^2$.
Alors le $PGCD(a, b) = 2^3 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 = 539000$
ii. Soient $a = 2 \times 7^2 \times 11$ et $b = 3^3 \times 5^2 \times 17^2$. Dans ce cas, a et b n'ont pas de diviseur premier en commun. Alors $PGCD(a, b) = 1$.
iii. Soient $a = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 17$ et $b = 2^2 \times 3 \times 5^5$. Alors le $PGCD(a, b) = 2 \times 3 = 12$.

Exercice 5

En utilisant la décomposition en produits de facteurs premiers, déterminer les PGCD suivants :

1. $PGCD(96, 252)$ **2.** $PGCD(1470, 252)$ **3.** $PGCD(1815, 98)$.

3-3. Utilisation de l'algorithme d'Euclide

Avant d'exposer cette méthode, On commence par le lemme d'Euclide qu'on va admettre :

Lemme d'Euclide : Soit a, b, q et r des entiers relatifs tels $a \neq 0$, $b \neq 0$, $r \neq 0$ et $a = bq + r$.

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r) \qquad (\ a \wedge b = b \wedge r\ )$$

En utilisant ce lemme, on peut énoncer le théorème de l'algorithme d'Euclide :

Théorème de l'algorithme d'Euclide : Soient a et b deux entiers naturels non nuls :
• Si b divise a alors $PGCD(a,b) = b$.
• Sinon $PGCD(a,b)$ est le dernier reste non nul dans les divisons euclidiennes successives du diviseur par le reste.

Donc l'algorithme d'Euclide consiste donc à :
• effectuer les divisions successives de l'algorithme d'Euclide.
• le dernier reste non nul est le $PGCD$ de a et de b.

Remarque :
− Il faut toujours faire la division euclidienne du "grand nombre" par le "petit nombre".
− Si une des divisions a un reste égal à 1 alors $PGCD(a,b) = 1$ car le reste suivant strictement inférieur à 1 ne peut être que nul.

Application

Soient $a = 7260$ et $b = 2574$.
$7260 = 2 \times 2574 + 2112$ $\quad 2574 = 1 \times 2112 + 462$ $\quad 2112 = 4 \times 462 + 264$
$462 = 1 \times 264 + 198$ $\quad 264 = 1 \times 198 + 66$ $\quad 198 = 3 \times 66 + 0$
D'où $PGCD(2574, 7260) = 66$
NB : Il faut bien noter que dans l'algorithme d'Euclide, on prend le **dernier reste non nul** comme PGCD.

Exercice 6

En utilisant la méthode d'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD suivants :
1. $PGCD(66248, 9438)$ **2.** $PGCD(1122, 5915)$ **3.** $PGCD(343, 539)$.

A partir, de l'algorithme d'Euclide, on obtient une propriété importante du PGCD qu'on va admettre.

Théorème 9 : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
• Il existe u et v deux entiers relatifs tel que : $a \wedge b = au + bv$.
• Les diviseurs communs à a et à b sont les diviseurs de leur $PGCD$.

B- PPCM

1. Introduction à la notion de PPCM

Notons Θ l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}^*$ tel que m est multiple de a et b ou encore $\Theta = \{m \in \mathbb{N}^* / \ a|m \text{ et } b|m\}$. Θ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car $|ab| \in \Theta$. D'après le théorème 7, on peut déduire que Θ admet un plus petit élément qui est par définition un entier naturel non nul, multiple commun à a et à b et plus petit que tout multiple commun à a et à b qui est strictement positif. On a alors la définition suivante du $PPCM$.

Définition 4 : On dit que le nombre entier naturel m est le Plus Petit Multiple Commun de deux entiers relatifs a et b lorsque m est un multiple strictement positif de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a,b) = a \vee b$

D'une manière pratique, pour déterminer le $PPCM$ de deux entiers relatifs, on considère leurs valeurs absolues qu'on décompose par la suite en produit de facteurs premiers. Une fois les décompositions trouvées,le PPCM est obtenu en faisant le produit $m_1 \times m_2$ avec :
− m_1 produit des facteurs premiers figurant à la fois dans la décomposition de $|a|$ et celle de $|b|$ affectés aux exposants les plus grand,
− m_2 produit de tous les facteurs premiers figurant dans la décomposition de $|a|$ et celle de $|b|$ affectés à leurs exposants et qui ne sont pas intervenus dans le calcul de m_1.

Cernons bien ce qui a été dit à l'aide d'exemples :

Exemple

i) Soient $a = 440$ et $b = 2100$. On a : $a = 440 = 2^3 \times 5 \times 11$ et $b = 2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.
Application de la méthode :

– On repère les facteurs premiers communs à ces deux puis on fait un premier produit des facteurs communs ayant le plus grand exposant.

– A ce premier produit, on multiplie avec le reste des autres facteurs restants des deux nombres.

En appliquant la méthode, on conclue que $PPCM(440, 2100) = 2^3 \times 5^2 \times 3 \times 11 \times 7 = 46200$.
ii) Soient $a = 2^7 \times 3^2 \times 13$ et $b = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$.
Alors on a $PPCM(a, b) = 2^7 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 13 = 1153152$.
iii) Soient $a = 2^2 \times 3 \times 5$ et $b = 7^2 \times 11$ alors $PPCM(a, b) = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11 \times 5 = 32340$.

Exercice 7

Déterminer les PPCM suivants :
1. $PPCM(66, 660)$ **2.** $PGCD(294, 325)$ **3.** $PGCD(5775, 1365)$.

2. Propriétés du PPCM

De la définition du PPCM on a immédiatement le théorème suivant :

Théorème 10 :
i. Pour tout entier relatif a non nul, $a \vee a = |a|$. En particulier si $a \in \mathbb{N}^*$ alors $a \vee a = a$.
ii. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $PPCM(a, b) = PPCM(|a|, |b|)$
iii. Pour tout a $\mathbb{Z}^*$ alors $a \vee 1 = |a|$.
iv. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, si b divise a alors $a \vee b = |a|$.

Commentaire :
Le théorème 10 permet ramener la recherche du $PPCM$ de deux entiers relatifs à la recherche du $PPCM$ de deux entiers naturels comme dans le cas du $PGCD$.

On peut également mentionner d'autres propriétés du $PPCM$.

Autre propriétés du PPCM : Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$
i. Pour $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $PPCM(ka, kb) = |k| \times PPCM(a, b)$
En particulier si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $PPCM(ka, kb) = k \times PPCM(a, b)$.
ii. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a|(a \vee b)$, $b|(b \vee a)$ et $(a \vee b)|ab$.

Lien entre PPCM et le PGCD

Théorème 11 : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls :
$PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = |ab|$

Commentaire :
Ce théorème nous donnes une autre méthode pour calculer le PPCM de deux nombres connaissant leur PGCD. Il est le plus souvent facile de déterminer le PGCD que le PPCM ou vice versa.

NB : Le $PPCM$ et le $PGCD$ sont toujours des **entiers naturels strictement positifs**.

IV. Nombres premiers entre eux. Théorème de Bézout et Gauss

1. Nombres premiers entre eux

Définition 5 : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux si $PGCD(a, b) = 1$.

Par exemple le $PGCD$ de 10 et 5 est 5. Donc 10 et 5 ne sont pas premiers entre eux.
Le $PGCD$ de 11 et 12 est égale à 1. Donc 12 et 11 sont premiers entre eux.

Commentaire :
– Deux nombres premiers entre eux ont donc 1 pour seul diviseur commun.
– Si a est un nombre premier et que a ne divise pas b alors a et b sont premiers entre eux.

En appliquant le théorème 9 pour deux nombres premiers entre eux, on a le théorème de Bézout :

Théorème de Bézout : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entier relatif u et v tels que : $au + bv = 1$

Commentaire :
– Le couple (u, v) n'est pas forcément unique.
– Ce couple peut être trouvé en « remontant » les divisons de l'algorithme d'Euclide. Cette technique sera vue dans le paragraphe sur les équations diophantiennes.

Le théorème suivant est une application du théorème de Bézout.

Théorème 12 : Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si c est premier avec a et b alors c est premier avec $a \times b$

Démonstration :
c est premier avec a et $b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } au + cv = 1 \\ \exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } bu' + cv' = 1 \end{cases}$ En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $abuu' + c(auv' + bvu' + cvv') = 1$. D'où le résultat d'après le théorème de Bézout.

2. Théorème de Gauss

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de Bézout.

Théorème de Gauss :
Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration :
Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$:
– a divise $bc \Leftrightarrow \exists\ q$ tel que $bc = qa$.
– a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow \exists\ (u, v) \in (\mathbb{Z})^2$ tels que $au + bv = 1$.
On multiplie les deux membres de cette dernière égalité par c et on obtient :
$acu + cbv = c \Rightarrow acu + qav = c \Rightarrow a(cu + qv) = c$. Ainsi a divise alors c.

3. Équations diophantiennes

Une équation diophantienne est une équation d'inconnues relatifs x et y du type : (E) : $ax + by = c$ avec a, b et c des entiers relatifs tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

3-1. Étapes de résolution des équations du type $(E) : ax + ay = c$

• Condition nécessaire et suffisante d'existence de solution :
Notons $d = PGCD(a, b)$. Si (E) admet au moins une solution alors il existe u et v entiers relatifs tels que : $au + bv = c$.Puisque d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b. Par conséquent $d|c$.
Réciproquement supposons que $d|c$, alors $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = kd$. Puisque $d = PGCD(a, b)$ alors il existe des entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$.
En utilisant le théorème de Bézout, on déduit qu'il existe u' et v' deux entiers relatifs tels que $a'u' + b'v' = 1$.
D'où : $kda'u' + kdb'v' = kd$ Soit : $aku' + bkv' = c$. On pose $u = ku'$ et $v = kv'$. Le couple (u, v) est bien une solution de (E).

Conclusion : L'équation (E) admet une solution si et seulement si $\boldsymbol{d = pgcd(a, b)}$ **divise** $\boldsymbol{c}$.

• Recherche de solution particulière :
La solution particulière de l'équation peut être évidente.
Cependant, si la solution particulière n'est pas évidente, on peut obtenir une solution de l'équation (E) en remontant l'algorithme d'Euclide comme on va le voir dans l'exemple qui suit.

Exemple

Retrouvons la solution particulière de l'équation $(E) : 63x + 55y = 1$.

Algorithme d'Euclide :
$63 = 1 \times 55 + 8$
$55 = 6 \times 8 + 7$
$8 = 1 \times 7 + 1$
$7 = 7 \times 1$
Ainsi $PGCD(63, 55) = 1$

Recherche d'une solution de (E) à l'aide de l'algorithme d'Euclide
− On exprime 1 en fonction de 7 et 8 à partir de la dernière égalité : $1 = 8 - 7$.
− On exprime ensuite 7 en fonction de 8 et 55 et donc 1 en fonction de 8 et 55 à partir de l'égalité précédente : $1 = 8 - 7 = 8 - (55 - 6 \times 8) = 7 \times 8 - 55$.
− On exprime enfin 8 en fonction de 55 et 63 et donc 1 en fonction de 55 et 63 à partir de la première égalité : $1 = 8 - 7 = 8 - (55 - 6 \times 8) = 7 \times 8 - 55 = 7 \times (63 - 55) - 55 = 63 \times 7 + 55 \times (-8)$

Le couple $(x_0, y_0) = (7, -8)$ est un couple solution de l'équation $63x + 55y = 1$.

• Résolution complète de l'équation (E)
Soit $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et soit l'équation diophantienne $(E) : ax + by = c$.
On vient de voir que (E) admet une solution si et seulement si le $PGCD(a, b)$ divise c. Quitte à diviser les deux membres de l'équation (E) par le $PGCD(a, b)$, on peut transformer l'équation (E) en une équation du type : $a'x + b'y = c'$ avec $a = da'$, $b = db'$ et $c = dc'$ et de sorte que $a' \wedge b' = 1$.

Par la suite, on peut donc considérer l'équation $(E) : ax + by = c$ avec $a \wedge b = 1$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et soit le couple (x_0, y_0), une solution particulière de (E).
$$(x, y) \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow ax + by = c \Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Leftrightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

− Puisque $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ alors nécessairement b divise $a(x - x_0)$ et comme $a \wedge b = 1$, d'après le théorème de Gauss, b divise $x - x_0$. Donc $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = kb$ ou encore $x = x_0 + kb$.
− De même $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ alors a divise $b(y_0 - y)$ et puisque $a \wedge b = 1$, d'après le théorème de Gauss, a divise $y_0 - y$. Donc $\exists\ k' \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = k'a$ ou encore $y = y_0 - k'a$.

Réciproquement, soient $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ puis $(x, y) = (x_0 + kb, y_0 - k'a)$.
Si le couple (x, y) vérifie : $ax + by = c$ alors, $a(x_0 + kb) + b(y_0 - k'a) = c \Rightarrow ab(k - k') = 0$.
Or $ab \neq 0$ on déduit alors que $k' = k$. (*On vient de montrer maintenant, l'égalité entre les deux variables*)

Conclusion : Les solutions de (E) si elles existent, sont des couples (x, y) de la forme :
$$(x, y) = (x_0 + kb, y_0 - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

3-2. Exemples de résolution des équations diophantiennes

Dans ces exercices, on va détailler les différents points abordés dans le cas général.

Exemple

Soit l'équation diophantienne (E) : $616x + 585y = 12$.

• **On calcul le *PGCD* de 616 et 585 :** (Pour facilement les choses, il faut toujours chercher le $PGCD$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide pour pouvoir utilisé cet algorithme et retrouver une solution particulière)

$616 = 1 \times 585 + 31$
$585 = 18 \times 31 + 27$
$31 = 1 \times 27 + 4$
$27 = 6 \times 4 + 3$
$4 = 1 \times 3 + 1$
$3 = 3 \times 1 + 0$

Alors le $PGCD(616, 585) = 1$. Le $PGCD(616, 585)$ divise $c = 12$. Par suite l'équation (E) admet au moins une solution.

• **Recherche de solution particulière** : Une solution n'est pas évident ici.
On utilise la technique de remonter d'algorithme d'Euclide :

$1 = 4 - 3$
$3 = 27 - 6 \times 4 \Rightarrow 1 = 4 - (27 - 6 \times 4) \Rightarrow 1 = -27 + 7 \times 4$
$4 = 31 - 27 \Rightarrow 1 = -27 + 7(31 - 27) \Rightarrow 1 = 7 \times 31 - 8 \times 27$
$27 = 585 - 18 \times 31 \Rightarrow 1 = -8 \times 585 + 151 \times 31$
$31 = 616 - 585 \Rightarrow 1 = 151 \times 616 - 159 \times 585$
Ainsi $151 \times 616 - 159 \times 585 = 1$

− Pour les étapes de calculs, il ne faut pas donner les résultats des opérations mais les écrire sous forme de produit. Écrire par exemple $1 = -27 + 7 \times 4$ au lieu de $1 = -27 + 28$
− Et vue la probabilité de se tromper dans ce genre de manipulation, il est conseillé de vérifier le résultat trouvé

On a donc $151 \times 616 - 159 \times 585 = 1$, pour avoir une solution particulière de (E), il suffit de multiplier les deux membres par 12. Ainsi $1812 \times 616 + (-1908) \times 585 = 12$.
Par suite le couple $(x_0, y_0) = (1812, -1908)$ est une solution de (E).

• **Solution générale de l'équation (E)** :
Notons $(x_0, y_0) = (1812, -1908)$ la solution particulière et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
(x, y) est solution de $(E) \Leftrightarrow 616x + 585y = 12 = 616x_0 + 585y_0 \Rightarrow 616(x - x_0) = 585(y_0 - y)$.
− Puisque $616(x - x_0) = 585(y_0 - y)$, alors 616 divise $585(y_0 - y)$. Comme $616 \wedge 585 = 1$ alors d'après le théorème de Gauss, on conclut que 616 divise $y_0 - y$. Par suite $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 616k \Rightarrow y = y_0 - 616k$.
− En remplaçant dans l'égalité $616(x - x_0) = 585(y_0 - y)$, y par $y_0 - 616k$ on tire que $x = x_0 + 585k$.
Ainsi si un couple (x, y) est solution de (E) alors $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x = 1812 + 585k \\ y = -1908 - 616k \end{cases}$
Réciproquement, soit un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 1812 + 585k \\ y = -1908 - 616k \end{cases}$
Alors $616x + 585y = 616(1812 + 585k) + 585(-1908 - 616k) = 12$ et le couple (x, y) est solution de (E).

Conclusion : Les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(x, y) = (1812 + 585k, -1908 - 616k)\ k \in \mathbb{Z}$

Exemple

Soit l'équation diophantienne (E) : $731x - 204y = 68$.

• **On calcul le *PGCD* de 731 et 204 avec l'algorithme d'Euclide :**

$731 = 3 \times 204 + 119$
$204 = 1 \times 119 + 85$
$119 = 1 \times 85 + 34$
$85 = 2 \times 34 + 17$
$34 = 2 \times 17 + 0$

Alors le $PGCD(616, 585) = 17$.
$c = 68 = 4 \times 17$, alors le $PGCD(731, 204)$ divise $c = 68$. Par suite l'équation (E) admet au moins une solution.

On divise les deux membre de (E) par le $PGCD(731, 204)$ et on a l'équation (E') : $43x - 12y = 4$.

Alors résoudre (E) revient à résoudre (E') : $43x - 12y = 4$. On considère désormais l'équation simplifiée (E')

• **Recherche de solution particulière** : Une solution de (E') n'est pas évident ici.
On exécute l'algorithme d'Euclide de 43 et 12 puis on refait le chemin inverse pour trouver la solution particulière

$43 = 3 \times 12 + 7$
$12 = 1 \times 7 + 5$
$7 = 1 \times 5 + 2$
$5 = 2 \times 2 + 1$
$2 = 2 \times 1 + 0$

$1 = 5 - 2 \times 2$
$2 = 7 - 5 \Rightarrow 1 = -2 \times 7 + 3 \times 5$
$5 = 12 - 7 \Rightarrow 1 = 3 \times 12 - 5 \times 7$
$7 = 43 - 3 \times 12 \Rightarrow 1 = -5 \times 43 + 18 \times 12$

On a donc $-5 \times 43 + 18 \times 12 = 1 \Rightarrow 43 \times (-5) - 12 \times (-18) = 1$, pour avoir une solution particulière de (E'), il suffit de multiplier les deux membres par 4. Ainsi $43 \times (-20) - 12 \times (-72) = 4$.

Par suite le couple $(x_0, y_0) = (-20, -72)$ est une solution de (E').

• **Solution générale de l'équation (E)** :
Notons $(x_0, y_0) = (-20, 72)$ la solution particulière et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
(x, y) est solution de $(E') \Leftrightarrow 43x - 12y = 4 = 43x_0 - 12y_0 \Rightarrow 43(x - x_0) = 12(-y_0 + y)$.
– Puisque $43(x - x_0) = 12(-y_0 + y)$, alors 43 divise $12(-y_0 + y)$. Comme $43 \wedge 12 = 1$ alors on conclut, d'après le théorème de Gauss, que 43 divise $y - y_0$. Par suite $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 43k \Rightarrow y = y_0 + 616k$.
– En remplaçant dans l'égalité $43(x - x_0) = 12(-y_0 + y)$, y par $y_0 + 43k$ on tire que $x = x_0 + 12k$.
Ainsi si un couple (x, y) est solution de (E') alors $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x = -20 + 12k \\ y = -72 + 43k \end{cases}$
Réciproquement, soit un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = -20 + 12k \\ y = -72 + 43k \end{cases}$
Alors $43x - 12y = 43(-20 + 12k) - 12(-72 + 43k) = 4$ et le couple (x, y) est solution de (E').

NB : (E) et (E') ont les mêmes solutions car c'est la même équation.

Conclusion : Les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(x, y) = (-20 + 12k, -72 + 43k)\ k \in \mathbb{Z}$

Exemple 3

Soit l'équation diophantienne (E) : $84x - 66y = 13$.

Existence d'une solution :

$84 = 3 \times 2^2 \times 7$ et $66 = 3 \times 2 \times 11$. Alors le $PGCD(84, 66) = 3 \times 2 = 6$.
Puisque 6 ne divise pas 13, alors on conclut l'équation (E) proposé n'admet pas de solution.

Récapitulatif :
Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $ax + by = c$ avec a et b des entiers relatifs non nuls.
3 Situations peuvent se présenter :

– **Situation 1** : Le $PGCD(a, b)$ ne divise pas c et dans ce cas, (E) n'admet aucune solution.

– **Situation 2** : Les coefficients a et b sont premiers entre eux .
– **Situation 3** : Les coefficients a et b ne sont pas premiers entre eux . Dans ce cas, **il faut alors simplifier l'équation par leur pgcd** sinon on ne peut pas appliquer le théorème de Gauss.

Exercice 8

Déterminer, si elles existent, les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
1. (E_1) : $323x - 391y = 612$.
2. (E_2) : $42x + 45y = 4$.
3. (E_3) : $212x + 45y = 3$.
4. (E_4) : $162x + 207y = 27$
5. (E_5) : $221x + 247y = 15$

Solution :
1. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \{(-216 + 23k, -180 + 19k), k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Le $PGCD(42, 45) = 3$. Or 3 ne divise pas 4. Donc l'équation (E_2) n'a pas de solution.
3. L'ensemble des solutions de (E_3) est : $S_3 = \{(-21 + 45k, 99 - 212k), k \in \mathbb{Z}\}$.
4. L'ensemble des solutions de (E_4) est : $S_4 = \{(27 - 23k, -21 + 18k), k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Le pgcd de 221 et 247 est 13. Or, 13 ne divise pas 15. L'équation n'admet donc pas de solutions !

V. Congruences

1. Définition

Définition 6 : Soit n un entier naturel. Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que ***a* est congru à *b* modulo *n*** et on écrit $a \equiv b[n]$ si et seulement si $b - a$ est un multiple de n.
Il revient au même de dire qu'il existe un entier relatif k tel que $b = a + kn$.

Commentaire :
– On dit aussi que a et b sont égaux modulo n.
– La congruence modulo 1 ne présente aucun intérêt car dans la division euclidienne par 1, tout nombre a pour reste 0. Et donc deux nombres quelconques sont égaux modulo 1.

Exemple

- $17 = 4 \times 4 + 1 \Rightarrow 17 \equiv 1[4]$.
- $24 = 9 + 3 \times 5$ donc on peut écrire $9 \equiv 24[5]$
- Puisque $-3 = 11 - 2 \times 7$ donc $11 \equiv -3[7]$

Un résultat immédiat est :

Théorème 13 : Soit n un entier naturel non nul. Soit a un entier relatif. Soit r le reste de la division euclidienne de a par n. Alors, $a \equiv r[n]$.

$a \equiv 0[n] \Leftrightarrow n$ divise a.

2. Propriétés de la congruence

Théorème 14 : Soit n un entier naturel.
i. Pour tout entier relatif a, $a \equiv a[n]$ (réflexivité)
ii. Pour tous entiers relatifs a et b, si $a \equiv b[n]$, alors $b \equiv a[n]$ (symétrie) .
iii. Pour tous entiers relatifs a, b et c, si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$ (transitivité)

Démonstration :
i. Pour tout entier relatif a, $a = 0 \times n + a$ et par définition $a \equiv a[n]$.
ii. Pour les entiers relatifs a et b, si $a \equiv b[n]$ alors par définition $(a - b)$ est un multiple de n et par conséquent, $(b - a)$ est aussi un multiple de n. D'où $b \equiv a[n]$.
iii. Soient trois entiers relatifs a, b et c. $a \equiv b[n]$ alors $(a-b)$ est d'un multiple de $n \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b+kn$.
De plus $b \equiv c[n]$ alors $(b - c)$ est d'un multiple de $n \Rightarrow \exists\, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = c + k'n$.
Par suite $a = b + kn \Rightarrow a = c + (k' + k)n$. D'où $a - c$ est un multiple de n. Ainsi $a \equiv c[n]$.

3. Calculs avec des congruences

Opérations sur la congruence :

Théorème 15 : (compatibilité avec l'addition). Soit n un entier naturel
i. Soient a, b et c des entiers relatifs. Si $a \equiv b[n]$ alors $a + c \equiv b + c[n]$.
ii. Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$.

Remarque :
– Ainsi, on peut additionner membre à membre des congruences
– L'écriture $a + c \equiv a + b[n]$ pouvait être écrite $a + c \equiv (a + b)[n]$

Théorème 16 : (compatibilité avec la multiplication). Soit n un entier naturel
i. Soient a, b et c des entiers relatifs. Si $a \equiv b[n]$ alors $ac \equiv bc[n]$.
ii. Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $ac \equiv bd[n]$.
iii. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, Si $a \equiv b[n] \Rightarrow a^k \equiv b^k[n]$.

Ainsi, on peut multiplier membre à membre des congruences.

Commentaires :
Grâce à ces propriétés nous allons pouvoir manipuler la congruence de façon assez intuitive mais attention :
– **La congruence n'est pas compatible avec la division !** c'est-à-dire que si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on ne peut pas écrire que : $\dfrac{a}{a'} \equiv \dfrac{b}{b'}[n]$ pour le simple fait que la congruence est une notion qui s'applique à des nombres relatifs et que le rapport de deux relatifs n'est pas toujours un relatif.
– **Il faudra se méfier des simplifications abusives en particulier lors de la résolution d'équations modulo n.** Plus précisément $ka \equiv kb[n]$ n'implique pas forcement que $a \equiv b[n]$.
En effet :
45 et 63, multiples de 3 sont congrus à 0 modulo 3 donc : $63 \equiv 45[3]$.
En simplifiant par 9, on obtiendrait : $7 \equiv 5[3]$ or $7 - 5 = 2$ qui n'est pas un multiple de 3 et donc on ne peut pas écrire : $7 \equiv 5[3]$

On va maintenant analyser le principal problème des congruences : la possibilité de simplifier un même nombre de part et d'autre d'une congruence.

Théorème 17 : (Simplification). Soit n un entier naturel non nul.
i. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $a + c \equiv b + c[n] \Rightarrow a \equiv b[n]$ (tout entier relatif est simplifiable pour l'addition).
ii. Soient a et b des entiers relatifs, Si $ac \equiv bc[n]$ et $c \wedge n = 1$ alors $a \equiv b[n]$.
iii. Si $n \geq 2$, les entiers relatifs simplifiables modulo n sont les entiers non nuls et premiers à n.

4. Applications de la congruence

4-1. Recherche du reste d'une division euclidienne

Exercice 9

1-a. Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2022} par 5.
2. Quel est le reste de la division par 5 de 1357^{2022}.
3. Déterminer suivant l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 13.
En déduire les entiers naturels n tel que : $5^n \equiv -1[13]$.
4. Déterminer les entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n} + 5^n$.

Solution :
1-a. Cherchons le premier entier $k \geq 1$ tel que $2^k \equiv 1[5]$ ou à défaut on trouve un $k \geq 1$ à partir duquel un cycle apparait.
$2^0 \equiv 1[5]$, $2^1 \equiv 2[5]$ $2^2 \equiv 4[5]$ $2^3 \equiv 3[5]$ $2^4 \equiv 1[5]$.
Ainsi en utilisant les propriétés de congruence, on peut donc classer les entiers n modulo 4 : En effet, si $n = 4k+r$, alors sachant que $2^{2k} \equiv 1^k[5]$ soit $2^{2k} \equiv 1[5]$ et on retrouve que $2^n \equiv 2^r[5]$

- Si $n = 4k$, alors $2^n \equiv 1[5]$
- Si $n = 4k+1$, alors $2^n \equiv 2[5]$
- Si $n = 4k+2$, alors $2^n \equiv 4[5]$
- Si $n = 4k+3$, alors $2^n \equiv 3[5]$

b. Puisque $2022 = 505 \times 4 + 2$. D'après la question 1-a), on conclut que le reste de la division euclidienne de 2^{2022} par 5 est 4.
3. Même technique qu'en 1-a). on a :
$5^0 \equiv 1[13]$, $5^1 \equiv 5[13]$ $5^2 \equiv -1[13]$ (ou $5^2 \equiv 12[13]$) $5^3 \equiv -5[13]$ (ou $5^3 \equiv 8[13]$) $5^4 \equiv 1[13]$.
On déduit à l'aide des propriétés de congruence (comme en 1-a)) que :
- Si $n = 4k$, alors $5^n \equiv 1[13]$
- Si $n = 4k+1$, alors $5^n \equiv 5[13]$
- Si $n = 4k+2$, alors $5^n \equiv -1[13]$
- Si $n = 4k+3$, alors $5^n \equiv -5[13]$

En utilisant ce qui précède, on conclut $5^n \equiv -1[13]$ si $n = 4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
4. On peut écrire $5^{2n} + 5^n = 5^n(5^n + 1)$. Or $5 \wedge 13 = 1$, d'après Gauss, 13 divise $5^n(5^n+1)$ si 13 divise $5^n + 1$.
13 divise $5^n + 1 \Leftrightarrow 5^n \equiv -1[13]$. En utilisant la question précédente, on conclut que $n = 4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

D'où 13 divise $5^{2n} + 5^n$ si $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$

4-2. Résolution de la congruence

• **Résolution de $x + a \equiv 0[n]$.**
Soient n un entier naturel et a et x deux entiers relatifs.
Si $x + a \equiv 0[n]$, alors $x + a - a \equiv 0 - a[n]$ ou encore $x \equiv -a[n]$
Si $x \equiv -a[n]$, alors $x + a \equiv a - a[n]$ ou encore $x + a \equiv 0[n]$
Ainsi $x + a \equiv 0[n] \Leftrightarrow x \equiv -a[n]$

• **Résolution de $ax \equiv b[n]$.**
Supposons il existe un entier relatif a' tel que $a \times a' \equiv 1[n]$ (on dit dans ce cas que a est inversible modulo n).
Alors on a :
Si $ax \equiv b[n]$ alors $a \times a'x \equiv b \times a'[n]$ ou encore $1 \times x \equiv ba'[n]$ ou enfin $x \equiv ba'[n]$.
et si $x \equiv ba'[n]$ alors $a \times x \equiv ba' \times a[n]$ ou encore $ax \equiv b[n]$.

En résumé, si il existe un entier relatif a' tel que $a \times a' \equiv 1[n]$ alors $ax \equiv b[n] \Leftrightarrow x \equiv ba'[n]$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences :
1-a. $6x + 5 \equiv 2[9]$
b. $6x + 5 \equiv 1[9]$
2. $2x + 5 \equiv 0[7]$ et $3x + 5 \equiv 4[7]$
3. Montrer que la congruence $2x \equiv 1[6]$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Solution :
1-a. Soit x un entier relatif tel que : $6x + 5 \equiv 2[9]$ alors $6x + 5 - 5 \equiv 2 - 5[9]$ puis $6x \equiv -3[9]$
$6x \equiv -3[9] \Leftrightarrow \exists\ k\ \mathbb{Z}\ /\ 6x = -3 + 9k \Leftrightarrow \exists\ k\ \mathbb{Z}\ /\ 2x = -1 + 3k.$
$\Leftrightarrow 2x \equiv -1[3]$. Puisque $2 \times 2 = 4 \equiv 1[3]$ alors $2 \times 2 \equiv 2 \times (-1)[3]$
$\Leftrightarrow x \equiv -2[3] \Leftrightarrow x \equiv 1[3]$.

D'où l'ensemble solution est : $S = \{1 + 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

b. Soit x un entier relatif tel que $6x + 5 \equiv 1[9]$ alors $6x + 5 - 5 \equiv 1 - 5[9] \Leftrightarrow 6x \equiv -4[9] \Leftrightarrow 6x \equiv 5[9]$. Par suite :
$6x + 5 \equiv 1[9] \Leftrightarrow \exists\ k\ \mathbb{Z}\ /\ 6x = -4 + 9k \Leftrightarrow \exists\ k\ \mathbb{Z}\ /\ 6x - 9k = -4$
Or l'entier $6x - 9k$ est divisible par 3 alors que 3 ne divise pas -4.
Par suite on conclut que la congruence $6x + 5 \equiv 1[9]$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
2. $-$ Soit x un entier relatif tel que $2x + 5 \equiv 0[7]$ alors $2x \equiv -5[7]$. Or $2 \times 4 = 8 \equiv 1[7]$. Alors :
$2x + 5 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv -20[7] \Leftrightarrow x \equiv 1[7]$

L'ensemble solution est alors $S = \{1 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$

$-$ Soit x un entier relatif tel que $3x + 5 \equiv 4[7]$ alors $3x \equiv -1[7]$ or $3 \times 5 = 15 \equiv 1[7]$. Par suite :
$3x + 5 \equiv 4[7] \Leftrightarrow x \equiv -5[7] \Leftrightarrow x \equiv 2[7]$

L'ensemble solution est alors $S = \{2 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$

3. Soit x un entier relatif tel que : $2x \equiv 1[6]$ alors $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = 1 + 6k \Leftrightarrow 2x = 1 + 2 \times 3k$.
$2x$ est un multiple de 2 alors $1 + 2 \times 3k$ ne l'est pas. D'où la congruence $2x \equiv 1[6]$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

4-3. Les classes d'équivalence

Soit n un entier naturel non nul. On peut regrouper les entiers relatifs dont la division euclidienne par n a un certain même reste r dans une classe.
Cette classe s'appelle la classe d'équivalence de r et se note : $\overline{r}$.
$\overline{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r[n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$.

L'ensemble qui contient toutes les classes d'équivalence modulo n est noté : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$

Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit la somme et le produit des classes, de la façon suivante : $\begin{cases} \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \\ \overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab} \end{cases}$

Par exemple si on désire résoudre dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$: $\overline{9}\overline{x} = \overline{6}$ est équivalent à résoudre dans $\mathbb{Z}$; $9x \equiv 6[24]$.
On sait résoudre dans $\mathbb{Z}$ cette équation. L'ensemble solution est dans $\mathbb{Z}$:
$S = \{6 + 8k, k \in \mathbb{Z}\} = \{6 + 24k, 14 + 24k, 22 + 24k, k \in \mathbb{Z}\}$.
Alors dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, l'équation $\overline{9}\overline{x} = \overline{6}$ a pour solution $S = \{\overline{6}, \overline{14}, \overline{22}\}$.

5. Théorème Chinois (en exercice)

Exercice 11

Théorème chinois :
Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On note $\delta = m \wedge n$ et $\mu = m \vee n$.

1. Démontrer que pour tous entiers a et b, on a : $\begin{cases} a \equiv b[m] \\ a \equiv b[n] \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv b[\mu]$

2. Soient α, β deux entiers. On se propose de résoudre le système : $\begin{cases} x \equiv \alpha[m] \\ x \equiv \beta[n] \end{cases}$ (2)
Démontrer que si $\alpha - \beta$ n'est pas multiple de δ, alors le système n'a pas de solution.

3. On suppose désormais que α et β sont multiples de δ et on désigne par α' et β' leurs quotients respectifs par δ.

a. Justifier l'existence d'un couple d'entiers (u, v) tels que : $mu + nv = \delta$.

b. Justifier que : $\begin{cases} mu \equiv 0[m] \\ mu \equiv \delta[n] \end{cases}$ et $\begin{cases} nv \equiv \delta[m] \\ nv \equiv 0[n] \end{cases}$

c. En déduire que $\beta' mu + \alpha' nv$ est une solution particulière de l'équation (2).

4. Résoudre l'équation (2).

5. Application : Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 0[105] \\ x \equiv 6[81] \end{cases}$

Solution :

1. − Soient a et b deux entiers relatifs et supposons que $\begin{cases} a \equiv b[m] \\ a \equiv b[n] \end{cases}$ alors $a - b$ est un multiple de m et n donc de leur PPCM. D'où $a \equiv b[\mu]$.
− Réciproquement, supposons que : $a \equiv b[\mu]$ alors $a - b$ est multiple de μ et μ est multiple de m et n donc, par transitivité, $a - b$ est multiple de m et n. D'où $\begin{cases} a \equiv b[m] \\ a \equiv b[n] \end{cases}$

2. Supposons par absurde que (2) admet une solution qu'on note x mais que $\alpha - \beta$ n'est pas un multiple de δ. Alors il existe k et k' tel que $\begin{cases} x = \alpha + km \\ x = \beta + k'n \end{cases}$ et par suite on déduit que $\alpha + km = \beta + k'n \Rightarrow \alpha - \beta = k'n - km$. m et n étant des multiples de δ, alors $k'n - km$ l'est aussi et donc $\alpha - \beta$ est aussi un multiple de δ ce qui est absurde .
On conclut alors que si $\alpha - \beta$ n'est pas multiple de δ, alors le système (2) n'a pas de solution.

3-a. On sait que $\delta = m \wedge n$ alors il existe un couple (u, v) tel que $mu + nv = \delta$ (résultat du cours)

b. mu est multiple de m donc : $mu \equiv 0[m]$. D'après la question précédente, $mu - \delta$ est multiple de n, donc : $\begin{cases} mu \equiv 0[m] \\ mu \equiv \delta[n] \end{cases}$. On établi de même que : $\begin{cases} nv \equiv \delta[m] \\ nv \equiv 0[n] \end{cases}$

c. Par produits par α' et par β', on en déduit que : $\begin{cases} \beta' mu \equiv 0[m] \\ \beta' mu \equiv \beta[n] \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha' nv \equiv \alpha[m] \\ \alpha' nv \equiv 0[n] \end{cases}$

puis par sommes, il vient : $\begin{cases} \beta' mu + \alpha' nv \equiv \alpha[m] \\ \beta' mu + \alpha' nv \equiv \beta[n] \end{cases}$

Par suite $\beta' mu + \alpha' nv$ est une solution particulière de l'équation (2).

4. On déduit de **3-c.** et de **1.** que :

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \beta' mu + \alpha' nv[m] \\ x \equiv \beta' mu + \alpha' nv[n] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \beta' mu + \alpha' nv[\mu]$

D'où il vient l'ensemble des solutions de (2) : $S = \{\beta' mu + \alpha' nv + k\mu / k \in \mathbb{Z}\}$

5. Application : $\begin{cases} x \equiv 0[105] \\ x \equiv 6[81] \end{cases}$

On a donc : $(m, n) = (105, 81)$; $(\delta, \mu) = (3, 2835)$; $(\alpha, \beta) = (0, 6)$; $(\alpha', \beta') = (0, 2)$.

De plus : $-10\times105+13\times81=3$; on peut donc prendre : $(u;v)=(-10,13)$; on aura alors : $\beta' mu+\alpha' nv=2106$.

D'où l'ensemble des solutions du système : $S=\{2106v+2835k/k\in\mathbb{Z}\}$

6. Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat :
Soient p un nombre premier et a un entier naturel non nul.
i. Pour tout $a\in\mathbb{N}$, $a^p\equiv a[p]$
ii. Pour tout $a\in\mathbb{N}$, si $PGCD(a,p)=1$ alors $a^{p-1}\equiv 1[p]$.

Remarques :
La démonstration de ce théorème, assez technique, est ici admise.

7. Numération de base a

7-1. Le système de base 10

Dans la base 10, on dispose de dix symboles, les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Tout nombre s'écrit dans le système de numération à l'aide de ces 10 chiffres.
Par exemple 48603 dans la base 10 peut être vu comme $4\times10^4+8\times10^3+6\times10^2+0\times10^1+3\times10^0$.
D'une manière générale, un entier naturel n s'écrivant en base 10 sous la forme $c_nc_{n-1}c_{n-2}\dots c_1c_0$ peut être vu comme $c_n\times10^n+c_{n-1}\times10^{n-1}+\dots+c_1\times10^1+c_0\times10^0$. On a la définition suivante :

Définition 7 : Soit n un entier naturel non nul.
Il existe c_p, c_{p-1}, …, c_1 et c_0 tels que n se note sous la forme $n=c_pc_{p-1}\dots c_1c_0$ ou encore n s'écrit $n=c_p\times10^p+c_{p-1}\times10^{p-1}+\dots+c_1\times10^1+c_0\times10^0$.
Pour dire que nous sommes dans la base 10, on peut aussi noter $n=\overline{c_pc_{p-1}\dots c_1c_0}^{10}$. Le système décimal est le système de numération usuelle.

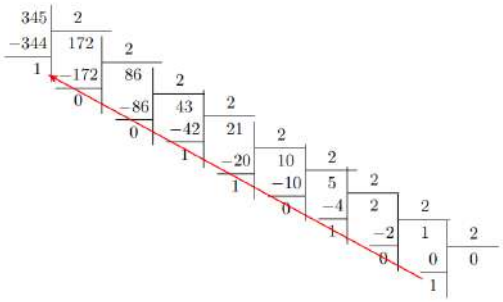
7-2. Le système de base $a\geq2$

En analogie avec le système décimal, pour écrire un entier n dans un système de numération de base $a\geq2$, on aura besoin de a objets. Par exemple :
• Quand $a=2$, on a besoin de deux chiffres. On choisit les symboles 0 et 1 : c'est le **système binaire**
• Quand $a=3$, on a besoin de deux chiffres. On choisit les symboles 0, 1 et 3.
• Quand $a=16$, on a besoin de seize (16) chiffres. On choisit les symboles 0, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F. C'est **l'hexadécimale**
• D'une manière générale, si $a>10$, on utilise, en plus des 10 chiffres, des lettres pour compléter la base.
Si un entier naturel n s'écrit dans la base $a\geq2$ sous la forme $c_pc_{p-1}\dots c_1c_0$ alors la valeur de n dans la base 10 est alors : $n=c_p\times a^p+c_{p-1}\times a^{p-1}+\dots+c_1\times a^1+c_0\times a^0$.
On a alors la définition suivante :

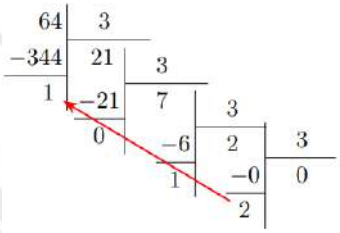
Définition 8 : Soit n un entier naturel non nul et a un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.
Écrire n dans la base a revient à trouver les chiffres c_p, c_{p-1}, …, c_1 et c_0 se trouvant dans la base a tels que n s'écrit dans le système décimal sous la forme $n=c_p\times a^p+c_{p-1}\times a^{p-1}+\dots+c_1\times a^1+c_0\times a^0$.
Dans ce cas, on dit que n s'écrit $c_pc_{p-1}\dots c_1c_0$ dans la base a.
Pour dire que nous sommes dans la base a, on peut aussi noter $n=\overline{c_pc_{p-1}\dots c_1c_0}^a$.

Quelques exemples de bases et de décomposition

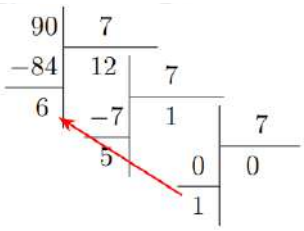
a. La base 2 : les deux chiffres utilisés sont 0, 1.
Soit $n = 345$ écrit dans le système décimal (base 10). Cherchons l'écriture de n dans la base 2. Comme la **définition 8** nous l'indique, il faut chercher le c_p, c_{p-1}, ..., c_1 et c_0 tels que : $n = c_p \times 2^p + c_{p-1} \times 2^{p-1} + \cdots + c_1 \times 2^1 + c_0 \times 2^0$.
Pour ce faire, on peut utiliser la méthode suivante :
On effectue les divisions successives des dividendes par la base a , comme dans l'exemple ci-contre. L'écriture dans la base a s'obtient en écrivant les restes du bas vers le haut (dans la direction de la flèche indiquée)
Ainsi n s'écrit dans la base 2 sous la forme $\overline{101011001}^2$



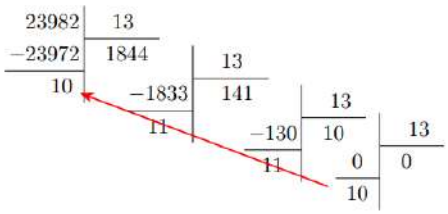
b. La base 3 : les deux chiffres utilisés sont 0, 1 et 2.
Soit $n = 64$ écrit dans le système décimal (base 10). Cherchons l'écriture de n dans la base 3.
Ainsi l'écriture de $n = 64$ dans la base 3 est : $\overline{2101}^3$



c. La base 7
Soit $n = 90$ dans le système décimal. Écrivons ce nombre dans le système de numération de base 7.
Donc $n = 90$ s'écrit en base 7 sous la forme : $\overline{156}^7$



d. La base 13
Soit $n = 23982$ dans la base 10. Écrivons n dans le système de base 13.
Si la base est supérieure à 10, on utilise les lettres avec les correspondance $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, ... et ainsi de suite.
Alors n s'écrit en base 13 sous la forme de $\overline{ABBA}^{13}$



Exercice 12

1-a. Soient $n_1 = 124$, $n_2 = 11$ et $n = 227$ dans la base 10. Écrire ces nombres dans les bases 5 et 11.
b. Soit $n = \overline{21000220}^3$, $n_2 = \overline{27A3}^{11}$ et $n_3 = \overline{BAC}^{2021}$. Écrire ces nombres dans la base 9, 5 et 20.
2. Ecrire $n = 2199$ (écrit dans la base 10) respectivement dans les bases 11, 17 et 19.
3. Déterminer dans la base 10 les nombres suivants : $n_1 = \overline{101101}^2 + \overline{362}^7$ et $n_2 = \overline{A15CD}^{15} + \overline{2054}^7$.
4. soient, dans le système décimal, les nombres $n_1 = 2009$, $n_2 = 2000$ et $n_3 = 2020$. Écrire ces nombres dans le système de numération de base 2, 8 et 15.
5. soit, dans le système décimal, le nombre $n_1 = 44993556$. Écrire ce nombre dans le système de numération de base 2022.

Exercices

Exercice 1

1. Montrer que pour tout entier naturel n, les entiers naturels n et $n+1$ sont premiers entre eux.
2. Soit n un entier naturel. Démontrer que $n(n^4-1)$ est multiple de 5.
3- **a.** Soit n un entier naturel. Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 0, 1 ou 4.
b. En déduire que les nombres de la forme :$8k+7$, $k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas la somme de trois carrés parfaits.
4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $3n+1$.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ est divisible par 7.
6. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Exercice 2

Le but de ce exercice est de trouver le chiffre des unités du nombre $n = 7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}$.

1- **a.** Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
b. En déduire le chiffre des unités de l'entier 7^{2022}.
2- **a.** Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 4.
b. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{2024} par 4.

3. En utilisant les propriétés de la congruence, en déduire alors le chiffre des unités de l'entier : $n = 7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}$.
Vérifier que ce nombre est impair.

4. En déduire de même le chiffre des unités de $n = 4^{4^{4^{4^{4^{4}}}}}$.
On considère l'ensemble des classes d'équivalence modulo 9 noté $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
5- **a.** Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
b. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{2023} par 9.

6. Donner alors la classe de l'entier $n = 7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation suivante : $3^n + 5n + 1 \equiv 0[8]$.
2. Montrer que : 4^n est congru à $1+3n$ modulo 9. En déduire que $2^{2n}+15n-1$ est toujours divisible par 9.
On se propose de déterminer l'ensemble de solution de l'équation (E) : $567x + 2854y = 5$.
3- **a.** Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 567 et 2854 sont premiers entre eux .
b. Utiliser les calculs effectués à la question précédente pour déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :$567u + 2854v = 5$.
c. En déduire l'ensemble de solution de cette équation.
4. Moyennant la question **3.**, déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_0) : $143x - 195y = 52$.

Exercice 4 : (*Anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

1- **a.** Déterminer le $PGCD(49,18)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide. En déduire le $PPCM(49,18)$.
En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $18u + 49v = 1$.
b. Moyennant la question précédente, Est-ce que $\overline{18}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$?Si oui, quel est son inverse ?
2- **a.** En raisonnant comme dans la question précédente, donner l'inverse de $\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.
b. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ l'équation : $\overline{7}y = \overline{2}$.
3- **a.** Préciser l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
b. Moyennant la question **3-a.**, montrer que l'équation : $\overline{2}x = \overline{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
c. En utilisant **3-a.**, résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ les équations (E_1) : $x^2 + \overline{3}x = \overline{0}$ et (E_2) : $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$.
4- **a.** En précisant l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, donner les solutions de l'équation $\overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. (on pourra s'aider du tableau de congruence modulo 5 à double entrées)
b. En déduire de même la résolution dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ de l'équation : $\overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3}$.

c. Donner alors les solutions du systèmes : $\begin{cases} \overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1} \\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3} \end{cases}$

5. En utilisant la technique de la question précédente, résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} \overline{3}x+\overline{7}y=\overline{3} \\ \overline{6}x-\overline{7}y=\overline{0} \end{cases}$

Exercice 5

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) : $35u-96v=1$.

1. Montrer que cette équation admet au moins une solution.
Montrer que le couple $(11;4)$ est une solution particulière de (E) .

2. Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E).

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{35}\equiv 2[97]$

3. Soit x une solution de l'équation (F).

a. Montrer que le nombre 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux.

b. Montrer que : $x^{96}\equiv 1[97]$

c. Montrer que : $x\equiv 2^{11}[97]$

4. Montrer que si le nombre entier x vérifie la condition $x\equiv 2^{11}[97]$, alors x est solution de l'équation (F) .

5. Montrer que l'ensemble solution de l'équation (F) est l'ensemble des nombres entiers naturels de la forme $11+97k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Problèmes

Problème 1

Partie A :

1. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue x : (E) : $3x^2+6x+5\equiv 0[7]$.

a. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') où : (E') : $3x(x+2)\equiv 2[7]$.

b. Recopier et compléter le tableau des congruences modulo 7 suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$3x$							
$x+2$							
$3x(x+2)$							

c. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. Moyennant la démarche précédente, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $x^2-4x+3\equiv 0[12]$.

3. Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^{\beta}$ dans le système de numération de base β et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

a. Démontrer que : $3\beta^2+6\beta-2\equiv 0[7]$.

b. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de β.

4. Vérifier que 8 est une valeur possible de β.

Partie B

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x,y) suivante : (F) : $x^2+10x=y^2+46$.

a. Vérifier que l'équation (F) est équivalente à : $(x+5)^2-y^2=71$.

b. Démontrer que 71 est premier.

c. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (F).

2. On considère à présent l'équation $(G) : 13x + 7y = 16$. On cherche à résoudre (E) dans $\mathbb{Z}$.

- **a.** Déterminer le $PPCM(13, 7)$ et le $PGCD(13, 7)$. En déduire que (G) admet au moins une solution.
- **b.** Vérifier que le couple $(5, -7)$ est une solution de l'équation (G).
- **c.** Déterminer alors les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant (G).

Problème 2

On rappelle ici le petit théorème de Fermat : Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel non nul a, si $a \wedge p = 1$ alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On souhaite déterminer les couples de (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant l'équation $(E_0) : px + y^{p-1} = 2017$ avec p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

I- Préliminaire

Soit a un élément de $\mathbb{N}^*$.

1- **a.** Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$.
On considère dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $(E_1) : x^{2015} \equiv 2[13]$.

- **b.** Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
- **c.** Montrer que : $x \equiv 7[13]$
- **d.** En déduire les solutions de (E_1).

2. Montrer que 2017 est un nombre premier et donner la décomposition primaire de 2016.

II- Résolution de (E_0)

1. Vérifier que $p < 2017$ et monter que p ne divise pas y .
2. Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .
3. En déduire alors que $p = 7$.
4. Résoudre alors l'équation (E_0).

Problème 3

Les trois parties sont totalement indépendantes.

Partie A

1. On considère l'équation $(E) : 25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

- **a.** Déterminer le $PGCD$ de 25 et 49 à l'aide de l'algorithme d'Euclide . Déduire alors le $PPCM$ de 25 et 49 à partir de leur $PGCD$.
- **b.** Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution. Déterminer une solution de (E).
- **c.** Résoudre l'équation (E).
- **d.** Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$.

2- **a.** Justifier que si (x, y) est solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ et $y \equiv 0[5]$.

- **b.** Montrer que $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.

3- **a.** Soit x un entier relatif. Quels sont les restes possibles de x^2 dans la division euclidienne par 7.

- **b.** Existe-t-il un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que (x^2, y^2) soit solution de (E) ?

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $PGCD(a, b) = 1$ alors $PGCD(a^2, b^2) = 1$ ».

On considère ne suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2 PGCD(k^2, (k+1)^2)$.

b. Calculer $PGCD(k, k+1)$.

c. Calculer $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1})$.

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer $PGCD(S_{2k+1}, S_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Partie C

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[p] \end{cases}$ où a ,b ,p et q des entiers relatifs tels que $p \wedge q = 1$.

1- **a.** Montrer qu'il existe un couple de (u_0, v_0) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $pu_0 + qv_0 = 1$.

b. Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système (S) .

2. Soit x une solution du système (S) , montrer que le nombre pq divise le nombre $x - x_0$.

3. Soit x un entier relatif tel que pq divise le nombre $x - x_0$, montrer que x est solution du système (S).

4. En déduire l'ensemble solution du système (S) .

5. Résoudre dans le système : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

Problème 4

On se propose dans ce problème d'étudier le problème (P) suivant :
« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »
On rappelle dès lors que : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

Partie I : Quelques résultats dans la base 10

On désigne x un entier naturel non nul et $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ avec $a_n \neq 0$ son écriture décimale.
On a : $x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0$.

1. Vérifier que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $10^p \equiv 0[5]$. En déduire que : $x \equiv a_0[5]$.

2. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $10^p \equiv 0[4]$. Conclure que $x \equiv \overline{a_1 a_0}[4]$.

3. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $10^p \equiv 1[9]$. Conclure que $x \equiv \sum_{p=0}^{n} a_p[9]$.

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2[19]$

4- **a.** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$. En déduire que 10^{x+1} et 19 sont premiers entre eux.

b. Montrer que $10^{18} \equiv 1[19]$. (On pourra utiliser le petit théorème de Fermat)
En déduire que 10^{18} et 19 sont premiers entre eux.

5. Soit d un diviseur commun de $x+1$ et 18.

a. Montrer que $10^d \equiv 1[19]$. Que dire des nombres 10^d et 19 ?

b. Montrer que $d = 18$. (On pourra considérer l'ensemble des diviseurs de 18)

c. En déduire que : $x \equiv 17[18]$.

Partie II : Retour au problème (P)

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$ et $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer

que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

Problème 5

Partie A

1- **a.** Vérifier que : 503 est entier premier.

b. Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$. En déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$.

2. Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $49x - 6y = 1$.

a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD$ de 49 et 6. Déterminer ainsi le $PPCM$ de 49 et 6 en utilisant leur $PGCD$. Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution.

b. sachant que le couple $(8;1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ (E).

3. On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$.

a. Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation (E) .

b. Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

c. En déduire que N est divisible par 2012.

Partie B

On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $143x - 195y = 52$.

1- **a.** Déterminer le $PGCD$ de 143 et 195 , en déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b. Déterminer une solution particulière de (E). Déterminer alors la solution générale de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2. Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5 , montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3. Soient x et y deux nombres entiers non nuls tels que $x \equiv y[4]$.

a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $n^x \equiv n^y[5]$.

b. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $n^x \equiv n^y[10]$.

4. Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que le couple (x, y) soit solution de l'équation (E) .
Montrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$: les nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal.

CHAPITRE 3

ÉTUDE DE FONCTIONS

I. Limites de fonctions

1. Limite finie et infinie d'une fonction en un point ou à l'infinie

1-1. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ et l un réel.

Définition 1

• On dit que f admet une limite finie en un point a de $]A, +\infty[$ si et seulement si $\exists$ un réel l tel que $\lim_{x\to a} f(x) = l$

• On dit que f admet une limite infinie en un point a de $]A, +\infty[$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Commentaire :

• On définit également la limite de f à gauche en a par : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et la limite de f à droite en a par : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

• Soit D_f le domaine de définition de f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f. Si f admet une limite finie l en a alors la fonction h définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f \setminus \{a\},\ h(x) = f(x) \\ h(a) = l \end{cases}$ est continue en a. On dit que h est le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2+4x+1} = |2x+1| \text{ si } x \leq 1 \\ x^3 + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 ou encore f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$

Définition 2

• On dit que f admet une limite finie en $\pm\infty$ si et seulement si $\exists$ un réel l tel que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$;

• On dit que f admet une limite infinie en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

2. Opérations sur les limites

2-1. limites d'une sommes de deux fonctions.

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Commentaire
Le tableau ci-dessus comporte un (?) qui veut dire qu'il s'agit d'une forme indéterminée. Pour ce cas, on ne peut conclure en toute généralité et nécessite une étude au cas par cas.
Observons les exemples suivants où quand $x \to +\infty$, $f(x) \mapsto +\infty$ et $g(x) \to -\infty$ mais $f+g$ tend vers deux limites différentes :
- $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $g(x) = -3x^2$ alors $f(x) + g(x) = x$. Dans ce cas, $f+g$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
- $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2$ alors $f(x) + g(x) = 1$. Dans ce cas, $f+g$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

2-2. limites du produit de deux fonctions.

f a pour limite	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l=0$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Commentaire
$0 \times \pm\infty$ est une forme indéterminée. Par exemple :
- $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $g(x) = x$ alors $f(x) \times g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) \times f(x)] = 0$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$ alors $f(x) \times g(x) = x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) \times f(x)] = +\infty$

Dans ces deux cas, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) \times f(x)$ diffère d'un cas à l'autre.

2-3. limites du quotient de deux fonctions.

On résume ces différentes possibilités dans le tableau suivant :

f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l=0$
g a pour limite	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0 en étant >0	0 en étant >0	0 en étant <0	0 en étant <0	0
$\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Commentaire :
Pour la limite du quotient de deux fonctions, on a deux indétermination comme le montre le tableau.
Voici 2 exemples où les deux fonctions f et g tendent vers 0 avec à chaque fois un résultat différent concernant la fonction $\dfrac{f}{g}$ quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Voici 2 exemples où les deux fonctions f et g tendent vers $+\infty$ avec à chaque fois un résultat différent concernant la fonction $\dfrac{f}{g}$ quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conclusion : Il y a quatre formes indéterminées $+\infty - \infty$, $0 \times \pm\infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

2-4. Quelques techniques usuelles de lever de certaines indéterminations.

i. Polynômes et fractions rationnelles.

− La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

− La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Par exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}[4x^3+6x] = \lim\limits_{x\to+\infty}[4x^3] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^2-7}{3x^3+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^2}{3x^3} = 0$

ii. Utilisation du nombre dérivé.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et dérivable sur I. Soit x_0 un point de I. Puisque f est dérivable sur I, on a : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Exercice 1 : Application sur l'utilisation du nombre dérivé et changement de variable pour le calcul des limites.

Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

a. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ **b.** $h(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

En utilisant un changement de variable, en déduire les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{2x}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin(3x)}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(5x)}{2x}$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x)\sin(5x)}{\sin(2x)}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(5x)}{\sin(3x)}$.

Solution

a. On pose $f(x) = \sin(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0 et on a :
$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Alors $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x} = f'(0) = \cos(0) = 1$. D'où $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

b. On pose $f(x) = \cos(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0 et on a :
$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$. Alors $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{x} = f'(0) = -\sin(0) = 0$. D'où $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

• $\dfrac{\sin(5x)}{2x} = \dfrac{5}{2}\dfrac{\sin(5x)}{5x}$. On pose $X = 5x$ alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{5x} = \lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin(X)}{X} = 1$. Par suite $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{2x} = \dfrac{5}{2}$

• De même : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin(3x)} = \dfrac{1}{3}$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)} = \dfrac{5}{4}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(5x)}{2x} = \dfrac{5}{2}$;$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x)\sin(5x)}{\sin(2x)} = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(5x)}{\sin(3x)} = \dfrac{5}{3}$

iii. Mise en facteur du terme prépondérant.

Pour une somme contenant un terme **clairement prépondérant**, la technique consiste à mettre le terme prépondérant en facteur.

Exemple : soit $f(x) = \sqrt{4x^2+x+3} - x$. Calculer la limite de f en $+\infty$.

La quantité $\sqrt{4x^2}$ est prépondérante dans $f(x)$. Donc on a :

$f(x) = \sqrt{4x^2}(\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}} - \dfrac{1}{2})$ Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}} - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

iv. Utilisation d'une quantité conjuguée

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

Déterminons la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Aucun terme n'est prépondérant dans $f(x)$. Ceci étant dit, utilisons la technique de conjuguée ici.

On a $\sqrt{x^2+x+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \dfrac{x+1}{x(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1)}$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1)}=\dfrac{1}{2}}$

Exercice 2

Déterminer la limite en $+\infty$ de :

a. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-x$. **b.** $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-2x$.

c. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)$

Solution

a. $\sqrt{4x^2+x+3}-x=\dfrac{(\sqrt{4x^2+x+3}-x)(\sqrt{4x^2+x+3}+x)}{\sqrt{4x^2+x+3}+x}=\dfrac{3x^2+x+3}{x(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1)}=\dfrac{3x+1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}=+\infty}$$

b. $\sqrt{4x^2+x+3}-2x=\dfrac{(\sqrt{4x^2+x+3}-2x)(\sqrt{4x^2+x+3}+2x)}{\sqrt{4x^2+x+3}+2x}=\dfrac{x+3}{2x(\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}}+1)}=\dfrac{\frac{1}{2}+\dfrac{3}{2x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}}+1}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}}+1}=\frac{1}{4}}$$

c. $\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\dfrac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\dfrac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$$

3. Limites et inégalités

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$; a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou une borne de I.

3-1. Limites finies et inégalités

Théorème 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient l et l' deux réels. On suppose que pour tout x dans I, $f(x)\leq g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l'$ alors :

$$\boldsymbol{l\leq l'.}$$

3-2. Limites infinies et inégalités

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 2 : Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout x dans I, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty}$.

Théorème 3 : Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout x dans I, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$.

3-3. Théorèmes des gendarmes

on admet le théorème suivant :

Théorème 4 : Soient f , g et h trois fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit l est un réel. On suppose :
- Pour tout x dans I, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$;

Alors : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(x) = l}$.

Par exemple si une fonction f vérifie pour tout $x \geq 2$, $2 - \dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 2 + \dfrac{1}{x^2}$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

4. Limites d'une composée de deux fonctions

on admet le théorème suivant :

Théorème 5 : Soient I, J, et K trois intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$
a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et a est dans I ou une borne de I et b désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et est dans J ou une borne de J. D'autre part, c désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,
- $\lim\limits_{X\to b} g(x) = c$;

Alors : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c}$.

II. Continuité d'une fonction

1. Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

1-1. Définitions

Définition 1 (continuité en un point) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un réel élément de I.
On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ou encore $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

Définition 2 (continuité sur un intervalle) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si $\forall a \in I$, f est continue en a.

1-2. fonction continues et opérations

Théorème 6 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit a un réel de I. On suppose que f et g sont continues sur I, alors :
- $f + g$ est continue sur I.
- $f \times g$ est aussi continue sur I.
- Si de plus on suppose que g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Théorème 7 : Soient I, J et K trois intervalles de $\mathbb{R}$ et soient f et g deux fonctions définies par : $f : I \to J$ et $g : J \to K$. On suppose que :
• f est continue sur I.
• g sont continues sur J
Alors : $f \circ g$ est continue sur I.

De ces théorèmes on peut déduire que :
– Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
– Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

2. Théorèmes de valeurs intermédiaires

Théorème 8 : Soient f une fonction , I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Si f est **continue** sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Commentaire
L'hypothèse **«f est continue sur I»** est essentielle dans le théorème de valeurs intermédiaires .
En effet : soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $0 \in]f(-1), f(1)[$ pourtant il n'existe pas un réel $c \in]-1, 1[$ tel que $f(c) = 0$ faute de continuité de f sur $]-1, 1[$. (f est plutôt continue sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$)

3. Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

Théorème 9 : Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Si f est une fonction **Continue** et **strictement monotone** sur $[a, b]$ alors :
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = k$.

Conséquence : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.
• Si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a, b]$.
• Tout fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection de K dans $f(K)$

III. Dérivation d'une fonction

1. Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un réel, élément de I.
f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou encore $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$ existe et est finie.
Dans le cas où f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé **nombre dérivé de f en x_0** et noté $f'(x_0)$.
L'équation de la tangente à la courbe de f, (C_f), en $M_0(x_0, f(x_0))$ est donc : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Trois situations où la fonction f n'est pas dérivable en un point x_0 :
– f n'est pas continue en x_0 c'est à dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
– La courbe de f admet une tangente parallèle à l'axe (oy) en x_0 c'est à dire $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$.
– La courbe de f admet deux demi-tangentes de directions différentes en x_0 c'est à dire :
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Dérivabilité d'une fonction sur un segment

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque réel x de I .
La fonction dérivée de f, est notée f'.

3. Opérations sur les dérivées

Théorème 8 : Dérivation de composé de fonctions.
Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit K un intervalle ou un ensemble de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions telles que $f : I \to J$ et $g : J \to K$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Théorème 9 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont dérivables sur I alors $\forall(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \alpha g$ est dérivable et on a $(\lambda f + \alpha g)' = \lambda f' + \alpha g'$.
2. Si f et g sont dérivables sur I alors $f \times g$ est dérivable sur I et on a $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
   Plus généralement pour $n \geq 2$ et pour $f_1, f_2, \cdots$ et f_n des fonctions définies et dérivables sur I, alors $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ est aussi dérivable sur I et on a : $(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_j \right)$.
   En plus si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
3. Si f est dérivable et pour tout $n \geq 2$, $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. Et si de plus f ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{f^n}\right)' = \dfrac{-nf'}{f^{n+1}}$.

Théorème 10 : **Dérivation de la fonction réciproque.**
Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie telle que $f : I \to J$. Si :
- f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I
- f est strictement monotone sur I, bijective de I sur J

Alors : f^{-1} est dérivable et on a $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Par exemple si une fonction f est dérivable sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $]-1, 1[$ alors :

$$(Arcsin(f))' = \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$$

Exercice 4

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
1. $g(x) = arcsin(x)$. pour $x \in]-1, 1[$ **2.** $g(x) = arcos(x)$ **3.** $g(x) = arctan(x)$.

Solution

1. On cherche ici à calculer la dérivée de la réciproque de la fonction $f(x) = \sin(x)$. On définie :

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\to]-1, 1[\\ x &\longmapsto \sin(x). \end{aligned}$$

Vérification des hypothèses.

i. f est bien définie, continue et dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ et sa dérivée est : $f'(x) = \cos(x)$. De plus f' ne s'annule pas sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

ii. Pour tout $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, la fonction qui $x \mapsto \cos(x)$ est strictement positive donc f est strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ (monotonie de f).

f réalise alors une bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers $]-1,1[$ et sa bijection réciproque est $g(x)$.
Toutes les hypothèses sont vérifiées alors on peut appliquer **le théorème de la dérivation de la fonction réciproque**.

$$g'(x)=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\frac{1}{\cos((f^{-1}(x))}\text{avec } f(x)=\sin(x).$$

Or pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\cos(x)>0$ et par suite on peut écrire que $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}$.

Ainsi on a : $g'(x)=(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin((f^{-1}(x)))^2}}$. Par suite : $\boxed{(arcsin(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ avec } x\in]-1,1[}$.

2. De la même façon qu'en **a.**, on pose :

$$\begin{aligned} f:&]0,\frac{\pi}{2}[\to]0,1[\\ &x\longmapsto\cos(x).\end{aligned}$$

Et comme en **a.** on vérifie facilement que toutes les hypothèses du théorème de dérivation de la fonction réciproque sont vérifiées et on a : $g'(x)=(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\dfrac{-1}{\sin((f^{-1}(x))}$

Puisque $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ alors $\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)}$. Ainsi $g'(x)=(f^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-(\cos((f^{-1}(x)))^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Par suite $\boxed{g'(x)=(arcos(x))'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

3. On pose :

$$\begin{aligned} f:&]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}\\ &x\longmapsto\tan(x).\end{aligned}$$

De la même manière : $g'(x)=(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{1+(\tan((f^{-1}(x)))^2}$. D'où $\boxed{g'(x)=(arctan(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}}$

4. Lien entre la continuité et la dérivabilité

Théorème 11
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en un point x_0 de I alors f est continue en x_0.

La réciproque de ce théorème est fausse c'est à dire si f est continue en a alors f n'est pas forcement dérivable en a. En effet :

$$\begin{aligned} f:&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\longmapsto|x|\end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0 mais on a : $f'(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$

Par suite $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ $(-1\neq1)$. Alors f n'est pas dérivable en 0 pourtant elle est continue en 0.

5. Dérivées et sens de variation

Théorème 12 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si $f'\geq0$ (respectivement $f'\leq0$), f est croissante sur I (respectivement décroissante sur I).
- Si $f'>0$ (respectivement $f'<0$), f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I).

Exercice 5

Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$.
a. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
b. Étudier la dérivabilité de f sur D_f et préciser $f'(x)$.
c. En déduire alors les variations de f puis dresser son tableau de variation.
d. Montrer que le graphe de f est un demi-cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. Tracer le graphe de f.

Solution

a. Domaine de définition D_f. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ -x^2+4x-3 \geq 0\}$ d'où $\boxed{D_f = [1,3]}$.

b. f est dérivable sur $]1,3[$ et que pour tout réel x de $]1,3[$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}}$

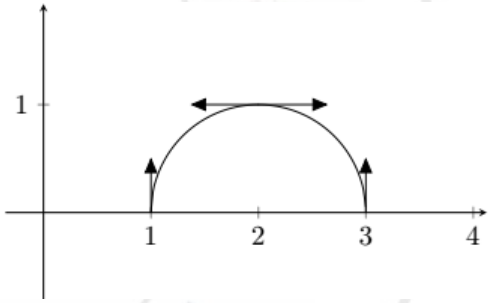
Remarque On peut remarquer que f n'est pas dérivable aux bords c'est à dire en 1 et 3. Ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions, il faut toujours vérifier la dérivabilité de f aux extrémités de l'intervalle aussi.

c. Les variations de f :
– Pour $x \in]1,2[$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]1,2[$.
– Pour $x \in]2,3[$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]2,3[$.
– Pour $x = 2$ on a $f'(2) = 0$ alors f admet un extremum local en $x = 2$ de valeur 1.

d. Soit (C_f) la courbe de f un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.
$M(x,y) \in (C_f) \Leftrightarrow y = \sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow y^2 = -x^2+4x-3 \Leftrightarrow (y-0)^2 + (x-2)^2 = 1^2$.
(C_f) est donc la partie du cercle de centre $\Omega(2,0)$ et de rayon 1 constituée des points tels que $y > 0$.

Tableau des variations de f :

x	1		2		3
$f'(x)$		+	‖	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0



6. Inégalités des accroissement finis

Propriété : Inégalités des accroissements finies
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe $(M,m) \in \mathbb{R}^2$ tel que : pour tout x élément de $[a,b]$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Démonstration
• Soit φ la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\varphi(x) = f(x) - mx$. φ est dérivable sur I de dérivée $\varphi'(x) = f'(x) - m \geq 0$.
Donc φ est strictement croissante sur $I \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$ et par conséquent $f(a) - ma \leq f(b) - mb$
$\Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ (*)
• Soit ψ définie sur $[a,b]$ par : $\varphi(x) = f(x) - Mx$. ψ est dérivable sur I de dérivée $\psi'(x) = f'(x) - M \leq 0$.
Donc ψ est strictement décroissante sur $I \Rightarrow \psi(a) \geq \psi(b)$ et par conséquent $f(a) - Ma \geq f(b) - Mb \Rightarrow$ $M(b-a) \leq f(b) - f(a)$ (**)
De (*) et (**), on conclut que $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Commentaire :
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I et s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous éléments a et b de I, $|f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$

7. Égalités des accroissement finis

Activité

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que : $f(a)=f(b)$.
1.Justifier qu'il existe m et M deux réels tels que $f([a,b])=[m,M]$.
2. On suppose que $m=M$. Que peut-on dire de f ?
3. Dans cette question on suppose que $m\neq M$ et $m<f(a)$
a. Justifier qu'il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=m$ puis déduire que $\forall x\in]a,c[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$.
Montrer également que $\forall x\in]c,b[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$
b. En déduire que $f'(c)=0$
4. Montrer que si $f(a)<M$, il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$
5. En déduire alors que si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que : $f'(c)=0$.

Solution
1. Comme f est continue sur $[a,b]$ alors elle admet un maximum et un minimum qu'on note respectivement M et m. Alors on déduit que $f([a,b])=[m,M]$
2. Si $m=M$, alors f est une constante sur $[a,b]$
3-a. • f est continue, si $m<f(a)$ alors $m\in f([a,b])=[m,M]$ donc il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=m$
• $\forall x\in]a,c[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=\dfrac{f(x)-m}{x-c}$. Or $\forall x\in]a,c[,\ f(x)-m\geq 0$ et $x-c\leq 0$. D'où $\forall x\in]a,c[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$
• $\forall x\in]c,b[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=\dfrac{f(x)-m}{x-c}$. Or $\forall x\in]c,b[,\ f(x)-m\geq 0$ et $x-c\geq 0$. D'où $\forall x\in]c,b[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$
b. $\forall x\in]a,c[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ alors par passage à la limite $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$. Or $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_g(c)$.
Donc $f'_g(c)\leq 0$
De même $\forall x\in]c,b[,\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_d(c)\geq 0$
et puisque f est dérivable en c alors $f'_g(c)=f'_d(c)$. D'où $f'_g(c)=f'_d(c)=0$ puis $f'(c)=0$
4. Si $f(a)<M$, on a la même démonstration qu'en **3.** On déduit qu'il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$
5. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a)=f(b)$ alors il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f([a,b])=[m,M]$. De plus, il existe $c\in]a,b[$ tel $f(c)=m$. Trois cas se présente : $m=M$; $m\neq M$ et $m<f(a)$ ou $m\neq M$ et $f(a)<M$
• Si $M=m$ alors f est une constante $\Rightarrow\forall x\in]a,b[,\ f'(x)=0$. Donc il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$
• Si $m\neq M$ et $m<f(a)$ d'après **3.**, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
• Si $m\neq M$ et $f(a)<M$ d'après **4.**, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

D'où si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que : $f'(c)=0$

On a donc la propriété suivante :

Propriété :
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a)=f(b)$;
alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

Remarque :
• Il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c)=0$.
• Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$ tout entier. Par exemple la fonction $f(x)=|x|$ sur $[-1,1]$. $f(-1)=f(1)$ mais il n'existe pas un $c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$ faute de la dérivabilité de f sur $]-1,1[$.
• De même, le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue sur $[a,b]$ tout entier.

Propriété : **Égalité des accroissements finis**
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$;
alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ou encore $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Démonstration
Soit la fonction $g(x)$ définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a $g(a) = g(b) = 0$. Donc d'après la propriété précédente, on déduit qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exercice 6

1. Soit $f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que f' s'annule sur $]0,1[$
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finies, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$

Solution
1. $f(1) = f(0) = 2$. Donc f est une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et telle que : $f(0) = f(1)$ alors d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$. (ici $f(b) = f(a)$)
2. Soit $f(x) = \sin x$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 1$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur un intervalles de bornes x et 0, on conclut que $|f(x) - f(0)| \leq |x - 0| \Leftrightarrow |\sin x| \leq |x|$

IV. Étude d'une branche infinie

f désigne une fonction de domaine de définition D_f et de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$. Soit $(l, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Asymptotes verticales et horizontales

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors la droite $y = l$ est une asymptote horizontale de $(\mathcal{C}_f)$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ alors la droite $x = x_0$ est une asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

2. Asymptotes obliques

Propriété : Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.
La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si , lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a et $[f(x) - ax]$ tend vers b. Ce qui revient à dire que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - ax - b] = 0$

3. Direction asymptotiques

On suppose dans ce paragraphe que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ a une limite infinie.
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite nulle en $+\infty$ ou $-\infty$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OI)
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie non nulle a en $+\infty$ ou $-\infty$ et $[f(x) - ax]$ a aussi une limite finie b alors la droite $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie non nulle a en $+\infty$ ou $-\infty$ et $[f(x) - ax]$ a une limite infinie alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $y = ax$.

Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)$.

1. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques définies pour tout $n \geq 0$ par $u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $v_n = \dfrac{-\pi}{2} + 2n\pi$

- **a.** Calculer les limites en $+\infty$ des deux suites.
- **b.** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.
- **c.** En supposant que $\sin(x)$ admet une limite en $+\infty$, quelle contradiction trouve t-on avec la question **b.** Déduire ainsi que ni la fonction $\cos(x)$ ni $\sin(x)$ n'a une limite à l'infini.
- **d.** Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

2. Montrer que la fonction $x \longmapsto x\sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0 et préciser son prolongement. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(1/x)$ est finie et préciser cette limite .

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin(1/x)$ est finie mais que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x)$ n'existe pas.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \sin(x)$ et la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = f(U_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{\pi}{6} < U_n < \dfrac{\pi}{2}$

3- **a.** Montrer que : $\forall x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[, |f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- **b.** En déduire que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}|U_n - \alpha|\ \forall n \in \mathbb{N}$
- **c.** Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3

Soit deux fonctions f_m et g_m définie par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$ et $g_m(x) = \dfrac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$ où m est un paramètre et x une variable. A chaque valeur de m correspond deux courbes $(\mathcal{C}_{f_m})$ et $(\mathcal{C}_{g_m})$.

1. Étude de f_m

- **a.** Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_{f_m})$ passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de m.
- **b.** Étudier suivant les valeurs de m, l'ensemble de dérivabilité de f_m. Déterminer $f'_m(x)$.
- **c.** Déterminer m pour que le point d'intersection P de $(\mathcal{C}_{f_m})$ et de l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\dfrac{3}{2}$
- **d.** Pour $m = 0$, étudier les variations de f_m puis construire $(\mathcal{C}_0)$

2. Étude de g_m

- **a.** On suppose $m \neq 1$. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_{g_m})$ passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de m.
- **b.** Soit $x \neq \{-2, 0, 2\}$. Déterminer m pour que $[g_m(x)]^2 = 1$
- **c.** Représenter graphiquement la fonction pour $m = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

1. Déterminer les réels a ; b ; c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

En déduire une équation de la droite (D) asymptote oblique à (C).

2. Étudier les variations de la fonction f (on déterminera les points intersection de (C) avec les axes de coordonnées).

3. On note I le point intersection des asymptotes de (C)

a. Donner les coordonnées de I

b. En déduire que I est un centre de symétrie de (C)

4. Tracer (D) et (C)

5. Déduire de la courbe (C) l'existence et le signe des racines de l'équation $f(x)=m$.

Problèmes

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales.

2. On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x^2+2$.

a. Vérifier que $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

b. Étudier le signe de $P(x)$.

3-. **a.** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ puis exprimer sa dérivée en fonction de $P(x)$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé.

4. **a.** Pour quelle abscisse a la tangente au point d'abscisse a est-elle horizontale ? Justifier.

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) en $x=3$ et la tracer dans le même repère que (C_f).

5. Trouver a, b, c et d tels que $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-2}$

6. On admet que $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}$ et on pose $g(x)=x^2+2x+1$ et (C_g) sa courbe représentative.

a. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)-g(x)$. Que peut-on en déduire sur (C_f) et (C_g) ?

b. Étudier la position relative de (C_f) et (C_g).

c. Tracer (C_g) dans le même repère que (C_f) et (T) en utilisant les résultats des questions **a.** et **b.**

Problème 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

1- **a.** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

b. Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de f soit tangente au point I de coordonnées $(0,3)$ à la droite (T) d'équation $y=4x+3$.

Pour la suite, on suppose que $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$

2. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$, α et β étant deux réels que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de f. Préciser ses limites $+\infty$ et $-\infty$ et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 0. Étudier la position de (C_f) par rapport à (T).
5. Démontrer que I est centre de symétrie de (C_f).
6. Construire la courbe (C_f) et la tangente (T) dans un repère orthonormée.

Problème 3

On considère une fonction f définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ et $f(0)=1$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que f est paire. A partir de la courbe représentative sur $[0,+\infty[$ dans un repère orthonormée de la fonction f dire comment on peut déduire la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.
3. On désigne par g , la fonction numérique définie sur $[0,\pi]$ par : $g(x)=x\cos(x)-\sin(x)$.
Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations. En déduire son signe sur $[0,\pi]$.
4. Pour tout $x\in]0,\pi[$ déterminer f' de f puis étudier les variations de f sur $[0,\pi]$. f est dérivable en π ?
5. Étude de la dérivabilité de f en 0.

a. Prouver que pour tout $x\geq 0$, $0\leq x-\sin(x)\leq\dfrac{x^3}{6}$.

b. Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

c. Construire la courbe représentative de f.

Problème 4

Partie I

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(2x)-2\cos(x)$.
On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1- **a.** Montrer que f est 2π-périodique et paire.

b. En déduire qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $[0,\pi]$.
2- **a.** Montrer que la fonction f est dérivable et donner sa dérivée f'.

b. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0,\pi]$.
3. Tracer (C_f) sur un intervalle de longueur $[-2\pi,2\pi]$.

Partie II

Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}$
On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Montrer que g est 2π-périodique.
pour la suite on étudie f sur l'intervalle $]-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{3\pi}{2}^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)$.
4. Calculer la fonction dérivée de g et étudier son signe. Dresser alors le tableau des variations de g.
5. Tracer (C_g) sur $]-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.

Problème 5

Partie A

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Étude de f.

a. Montrer que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe (Oy). Déterminer la dérivée f' de f.

b. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 1.

c. Étudier la position de (C_f) par rapport à (T).

d. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C_f) au point d'abscisse -1 ?

2. On considère la fonction tangente définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\tan(x)$.

Déterminer la dérivée g' de g, puis étudier les variations de g. Justifier que g induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

3. On appelle *arctangente* et on note $arctan(x)$ la réciproque de g.

a. Montrer que la fonction *arctan* est impaire.

b. Montrer que $arctan(x)$ est dérivable sur J et que $\forall x \in J$ et que $(arctan(x))' = f(x)$.

c. En déduire alors le tableau des variation de $h(x) = arctan(x)$.

d. On appelle Γ la courbe de tangente sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et γ est la courbe représentative $arctan(x)$

Tracez Γ et γ dans un même repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$. (on pourra remarquer que γ, la courbe représentative de $arctan(x)$, est la symétrique de Γ par rapport à la droite $y=x$.)

e. Donner l'équation de la tangente à γ au point d'abscisse 1.

Partie B : Étude d'une composée.

On pose $v : x \longmapsto arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

1- **a.** Justifier que h est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b. On pose $u(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$. En remarquant que $u(x)$ est la composée de la fonction $u_1(x) = \sqrt{x}$ et $u_2(x) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$, Déterminer la partie D de $\mathbb{R}$ sur laquelle v est dérivable.

c. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de h à l'intervalle $I = [0,\pi[$. Déterminer la $\lim\limits_{x\to\pi^-} v(x)$ et en déduire que v est prolongeable par continuité sur $[0,\pi]$. En conclure que h est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que pour tout $x \in]0,\pi[$, $v'(x) = \frac{1}{2}$.

e. En déduire une expression simplifiée de $v(x)$ sur I puis sur $]-\pi,\pi[$ et sur $\mathbb{R}$ tout entier.

f. Tracer la représentation graphique de v sur $\mathbb{R}$.

2- **a.** Soit $x \in]-\pi,\pi[$, donner la forme exponentielle de $1+e^{ix}$ et de $1-e^{ix}$.

b. Montrer que $\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \tan^2(\frac{x}{2})$ à l'aide des formules trigonométriques usuelles . Puis déduire l'expression simplifiée de $v(x)$ trouvée en **1-e.** de la ***Partie B***

Problème 6

Partie I

soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{|2x^2-x-1|}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f.

2. Étudier la continuité de f en -1 et 1.

3. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

4. La fonction f est-elle dérivable en $-1/2$?

5. Montrer que f est dérivable sur $]-1,-1/2[$ et sur $]-1/2,1[$ et déterminer sa dérivée.

6. Déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1,1[$ puis dresser le tableau des variations de f sur $]-1,1]$.

7. Tracer alors la courbe représentative de f en mettant en valeur les tangentes et asymptotes caractéristiques.

Partie II

On considère h et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ et $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1- **a.** Montrer que g est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa dérivée.

b. En déduire le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

3- **a.** Montrer que h est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa dérivée. Trouver une relation entre $h'(x)$ et $g(x)$.

b. En déduire alors le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h.

4. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,1]$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Problème 7

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B, C de coordonnées $(2,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$. Pour tout point M de P, on pose $\phi(M) = MA + MB + MC$ et on se propose de trouver un point M_0 tel que $\phi(M) > \phi(M_0)$ pour tout point M différent de M_0. Autrement dit, on cherche à minimiser ϕ.

Partie A

On note Δ le demi-axe des abscisses correspondant aux x positifs. On suppose que M est sur Δ.

1. Soient f et g définies sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} + x - 2$ et $g(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x + 2$.
Étudier les variations de f et g.

2. Soit h définie sur $[0+\infty[$ par $h(x) = 2\sqrt{x^2+1} + |x-2|$. Étudier, les variations de h.

3. Soit M un point de Δ. Montrer que $\phi(M) = h(x)$ où x est l'abscisse de M . Quel est le minimum de ϕ lorsque M décrit Δ ? En quel point de Δ ce minimum est-il atteint ?

Partie B : Étude de ϕ sur le plan entier

Soit $\varphi(x) = \sqrt{x^2+(a-1)^2} + \sqrt{x^2+(a+1)^2}$.

1. On suppose que $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

a. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a-1| + |a+1| \geq 2$. Pour quelles valeurs de a a t-on l'égalité ?

b. Étudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations.

c. Déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq 2$. Donner la condition sur x pour qu'on puisse avoir $\varphi(x) = 2$. Cette condition étant vérifiée, montrer qu'il existe un seul x de $\mathbb{R}$ où on a l'égalité $\varphi(x) = 2$.

d. Déduire de ce qui précède que pour tout M de P on a : $MB + MC \geq 2$.

2. Étant donné un réel $r \geq 1$ on note Γ_r l'ensemble des points M tels que $MB + MC = 2r$.
On suppose $r = 1$.

a. En utilisant la question **1-c.** de la **partie B**, donner la condition sur l'abscisse x d'un point M du plan P pour que ce point puisse appartenir à Γ_1.

b. En déduire alors Γ_1.

3. On suppose que $r > 1$. Montrer qu'un point $M(x,y) \in \Gamma_r$ si et seulement si son ordonnée y vérifie $-1 \leq \dfrac{y}{r} \leq 1$.
On pose alors $\sin(t) = \dfrac{y}{r}$.
On suppose maintenant que $r \geq 1$.

4. Établir que, pour tout $r \geq 1$,Γ_r rencontre Δ en un unique point T_r dont on précisera l'abscisse.

5. **a.** Vérifier que tout point de Γ_r a pour coordonnées (x,y) telles que $\begin{cases} x = \sqrt{r^2-1}\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases}$

b. Soit M appartenant à Γ_r. Exprimer en fonction de t la différence $MA^2 - T_rA^2$.

c. Montrer que, si M est différent de T_r alors $MA^2 - T_rA^2$ est strictement positive. En déduire alors que, si M est un point de Γ_r et différent de T_r, $\phi(M) > \phi(T_r)$.

6. Soit M_0 le point de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. Montrer que, pour tout point M du plan différent de M_0, on a $\phi(M) > \phi(M_0)$.

Problème 8

On considère les fonctions $f(x) = arctan(x)$, $u(x) = arctan(x) - x$ et $v(x) = x^2$

Partie A : Étude de f et établissement d'une inégalité

Soit a et b deux réels tels que $a < b$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

2. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leq arctan(b) - arctan(a) \leq \dfrac{b-a}{1+a^2}$

3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie B : Étude de u

1- **a.** Justifier que u est dérivable et déterminer sa dérivé.

b. Étudier puis les variations de u puis dresser son tableau de variations.

c. Montrer que la droite d'équation $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de u en $+\infty$.
La courbe de u admet une asymptote en $-\infty$? Si oui, déterminer son équation.
On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

d. Tracer la courbe de u dans le repère précédent.

2. On considère la fonction $g(t) = u(x)v(t) - v(x)u(t)$ sur $[a, b]$ où $a = min(x, 0)$ et $b = max(x, 0)$ avec $x \neq 0$

a. Déterminer la dérivée g' de g. (On ne demande pas l'expression explicite de g')

b. Comparer $g(0)$ et $g(x)$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = 0$

c. En déduire qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(c)}{v'(c)}$

3. En déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{arctan(x) - x}{x^2}$

CHAPITRE 4

LA FONCTION EXPONENTIELLE ET LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ Nous n'avons pas les moyens en terminale de démontrer l'existence d'une telle fonction et nous l'admettons.

Définition 1
La fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$
Pour tout réel x, l'exponentielle du réel x est notée $\exp(x)$.
Par définition,pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

1. Relation fonctionnelle

Théorème 1 : Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

2. Changement de notation : Le nombre e

On pose $\mathrm{e} = \exp(1) \simeq 2,71828...$ (ce nombre est fourni par la calculatrice).
On a donc $\exp(1) = \mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ et aussi $\exp(0) = 1$. Poursuivons les calculs en utilisant le théorème précédent :
$\begin{cases} \exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = \mathrm{e}^2 \\ \exp(3) = \exp(1+1+1) = \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) = \mathrm{e}^3 \\ \exp(4) = \exp(1+1+1+1) = \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) = \mathrm{e}^4 \end{cases}$
Par récurrence on déduit plus généralement que : $\forall\ n\ \mathbb{N}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.
Si n est un entier relatif strictement négatif, le théorème 1 fournit $\exp(n) \times \exp(-n) = 1$ et donc :
$\exp(n) = \dfrac{1}{\exp(-n)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^n$ (Puisque $n < 0$, $-n > 0$ et $\exp(-n) = \mathrm{e}^{-n}$).
A partir de ce qui précède et pour d'autres raisons que l'on ne connaît pas en terminale, on décide de poser pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. La deuxième notation de la fonction exponentielle est alors $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Remarque
– Le nombre $\mathrm{e} = \exp(1) \simeq 2,71828...$ est irrationnel c'est à dire qu'il ne peut s'écrire sous forme de fraction.

– On peut se permettre d'écrire e^{π}, $e^{0.1}$. Mais par exemple e^{π} ne s'interprète plus en disant que l'on a écrit un produit de π facteurs tous égaux à e car π n'est pas un entier.
A partir de maintenant on va utiliser indistinctement la notation $\exp(x)$ et e^x.

3. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

On déduit directement le théorème suivant :

Théorème 2
i. Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$ et on a $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
iii. Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
iv. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a : $e^{nx} = (e^x)^n$.

Exemple
En utilisant le théorème on déduit facilement que :
$f(x) = (e^x)^5 \left(e^{1-2x}\right)^3 = e^{3-x}$; $h(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ et $j(x) = e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}} = -1$

III. Étude de la fonction exponentielle

1. Sens de variation de la fonction exponentielle

Théorème 3
• La fonction exponentielle est strictement positive $\mathbb{R}$
• La fonction $f(x) = e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = e^x$.

Le théorème précédent a des conséquences pour la résolution des équations et des inéquations.

Théorème 4
i. Pour a et $b \in \mathbb{R}$ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
ii. Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$ $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
iii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
iv. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :
$e^{-5x+1} = 1$ $\quad e^{x^2} = e^9$ $\quad e^{2x} - (1+e^2)\,e^x + e^2 = 0$ $\quad e^{3x+5} > 1$ $\quad e^{x^2-3x} \leq e^{-2}$

Solution
• $e^{-5x+1} = 1 = e^0 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$; $e^{x^2} = e^9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$
• $e^{2x} - (1+e^2)\,e^x + e^2 = 0$ on pose $X = e^x$ alors $X^2 - (1+e^2)X + e^2 = 0$. $\Delta = (1+e^2)^2 - 4e^2 = (e^2-1)^2$. On a alors : $\begin{cases} X_1 = e^2 = e^{x_1} \\ X_2 = 1 = e^{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ L'ensemble des solutions est $\{0, 2\}$
• L'ensemble des solutions de $e^{3x+5} > 1$ est $]-5/3, +\infty[$ et celui de l'équation $e^{x^2-3x} \leq e^{-2}$ est $[1, 2]$

2. Limites de e^x en $+\infty$ et $-\infty$

Théorème 5

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3. Croissance comparée

Théorème 6

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0.$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{3+e^x}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)\,e^x$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x^2}$

Solution

En utilisant les théorèmes précédent on déduit :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{3+e^x} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x}\dfrac{1}{x} = +\infty$

4. Graphe de la fonction exponentielle

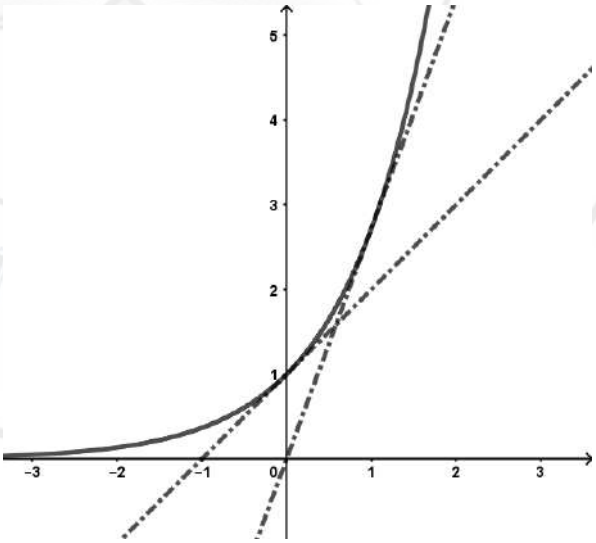
• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Alors l'axe (Ox) est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

• La tangente à la courbe représentative de f au point $(0,1)$ est donc la droite d'équation $y = x+1$.

• La tangente à la courbe représentative de f au point $(1,e)$ a pour équation $y = e\,x$.

Tableau des variations de $f(x) = e^x$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$



Représentation graphique de (C_f)

IV. Compléments sur la fonction exponentielle

1. Dérivée de la fonction composée $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Le théorème de dérivation d'une fonction composée fournit immédiatement :

Théorème 7 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction dérivable sur I.
Alors $\forall x \in I$, la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable en x de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple

1. Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On pose $u(x) = -x^2$. u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

2. Soit $g(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$. Soit $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\exp\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

2. Primitives des fonctions en exponentielle

Théorème 8 :
i. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
ii. Plus généralement, soit $u(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. Une primitive de la fonction $f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

2. Pour $x > 0$ une primitive de la fonction $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ car $u(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $f_2(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Fonction logarithme népérien

I. Définition de la fonction logarithme népérien

L'étude de la fonction exponentielle fait ressortir que la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$. Sa fonction réciproque est le logarithme népérien qu'on note ln.

Définition 1 : Soit x un réel strictement positif. **Le logarithme népérien** de x est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à x . Il est noté $\ln(x)$. ($\exp(\ln x) = x\,;\, \forall x \in]0,+\infty[$)
C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, donc c'est une fonction définie sur $]0,+\infty[$

Par construction de la fonction logarithme népérien, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1 :
i. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in]0,+\infty[$, $\mathrm{e}^a = b \Rightarrow a = \ln(b)$. Et si $a = \ln(b) \Rightarrow \mathrm{e}^a = b$.
ii. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
iii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
iv. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(E_1) : \ln(1+x) = 100 \qquad (E_2) : \ln(x) = -5 \qquad (E_3) : \mathrm{e}^{3x+7} = 5.$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :
$S_1 : \begin{cases} -\ln(x) + 2\ln(y) = 1 \\ 3\ln(x) - 5\ln(y) = -1 \end{cases}$ et $S_2 : \begin{cases} -2\ln(x) + 3\ln(y) = -1 \\ -7\ln(x) - 8\ln(y) = 1 \end{cases}$

Solution
1. Résolution dans $\mathbb{R}$:
- L'ensemble solution de (E_1) est : $\{\mathrm{e}^{100} - 1\}$
- L'ensemble solution de (E_2) est : $\{\mathrm{e}^{-5}\}$
- $x \in \mathbb{R}$ solution de $(E_3) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+7} = 5 \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{3x+7}) = \ln(5) \Leftrightarrow 3x + 7 = \ln(5)$ et donc $\boxed{x = \dfrac{-7 + \ln(5)}{3}}$

2. Résolution dans $\mathbb{R}$ de systèmes d'équations :
- Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\begin{cases} -\ln(x) + 2\ln(y) = 1 \\ 3\ln(x) - 5\ln(y) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\ln(x) + 6\ln(y) = 3 \\ 3\ln(x) - 5\ln(y) = -1 \end{cases} \Rightarrow \ln(y) = 2$

Ainsi $y = \mathrm{e}^2$ et en remplaçant la valeur de y dans l'une des équations on trouve $x = \mathrm{e}^3$.

D'où l'ensemble solution de S_1 est le couple $(x, y) = (\mathrm{e}^3, \mathrm{e}^2)$.

- Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\begin{cases} -2\ln(x) + 3\ln(y) = -1 \\ -7\ln(x) - 8\ln(y) = 1 \end{cases} \Rightarrow 37\ln(y) = -9$

Ainsi $y = \exp\left(\dfrac{-9}{37}\right)$ et en remplaçant la valeur de y dans l'une des équations on trouve $x = \exp\left(\dfrac{5}{37}\right)$.

II. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1. Relation fonctionnelle

Théorème 2 : Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

2. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Théorème 3 :
i. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
ii. Pour tout x et $y \in]0,+\infty[$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
iii. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice 2

1. Simplifier : $A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $B = \ln(3-\sqrt{2}) + \ln(3+\sqrt{2}) + \ln(7)$.
2. Résoudre les systèmes d'équations suivantes :
$S_1 : \begin{cases} x+y=30 \\ \ln(x)+\ln(y) = 3\ln(6) \end{cases}$ et $S_2 : \begin{cases} x^2+y^2=218 \\ \ln(x)+\ln(y) = \ln(91) \end{cases}$

Solution
1. $A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5\ln(2)$ et $B = \ln(3-\sqrt{2}) + \ln(3+\sqrt{2}) + \ln(7) = 2\ln(7)$.
2. Résolution des systèmes d'équations :
• Soient x et y solutions de S_1 alors : $\begin{cases} x+y=30 \\ \ln(x)+\ln(y)=3\ln(6) \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ \ln(x\times y)=\ln(6^3) \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases}$
Ainsi $\begin{cases} x+y=30 \\ x\times y = 6^3 \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases}$ Alors x et y sont solutions de l'équation $x^2-30x+216=0$. Les solutions de cette dernière équation sont 12 et 18. Donc les solutions du système sont les couples $(12,18)$ et $(18,12)$.
• De même que la question précédente, la deuxième ligne du système S_2 est équivalente à $xy = 91$.
$S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=218 \\ xy=91 \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=400 \\ x^2-2xy+y^2=36 \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=20^2 \\ (x-y)^2=6^2 \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases}$
– Si on suppose $x \geq y$ alors on a : S_2 dévient $\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=6 \\ x>0 \text{ et } y>0 \end{cases}$ Les solutions sont $x=13$ et $y=7$.
– Si on suppose $x \leq y$ alors on a : S_2 dévient : $\begin{cases} x+y=20 \\ -x+y=6 \\ x> \text{ et } y>0 \end{cases}$ Les solutions sont $x=7$ et $y=13$.

Les solutions du système S_2 sont les couples : $(13,7)$ et $(7,13)$

III. Étude de la fonction ln

1. Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème 4 : La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $f^{-1}(x) = \ln(x)$ est la réciproque de la fonction exponentielle.
De plus $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque on déduit :
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$ avec $f(x) = e^x$ et $f'(x) = e^x \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$. D'où $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Sens de variation de la fonction logarithme népérien

Théorème 5 :La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Le théorème précédent a des conséquences pour la résolution des équations et des inéquations.

Théorème 6 :
i. $\forall$ a et b dans $]0,+\infty[$, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
ii. $\forall$ a et b dans $]0,+\infty[$, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
iii. Pour $x \in]0,+\infty[$, $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
iv. Pour $x \in]0,+\infty[$, $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ et $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercice 3

1. Résoudre : (E_1) : $\ln(2x+3) > \ln(x+7)$. (E_2) : $\ln(x^2+3) \leq \ln(x) + 2\ln(2)$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^9$.

Solution

1. • $\ln(2x+3) > \ln(x+7) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2x+3}{x+7}\right) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x+7} > 1$. D'où l'ensemble de solutions de (E_1) est donc $]4,+\infty[$.

• $\ln(x^2+3) \leq \ln(x) + 2\ln(2) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{4x}{x^2+3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+3} \geq 1$. D'où l'ensemble solution de (E_2) est $[1,3]$.

2. $2^n \geq 10^9 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^9) \Leftrightarrow n.\ln(2) \geq 9.\ln(10)$ et donc $n \geq \dfrac{9.\ln(10)}{\ln(2)}$

Le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^9$ est alors 30.

3. Limites de $\ln(x)$ en 0 et $+\infty$

Théorème 7 :
i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

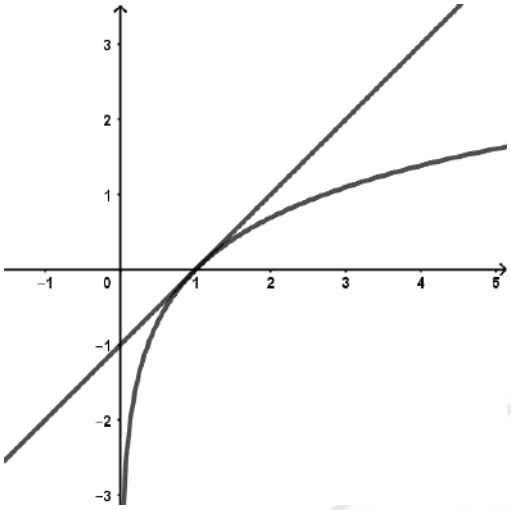
ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

4. Graphe de la fonction logarithme népérien

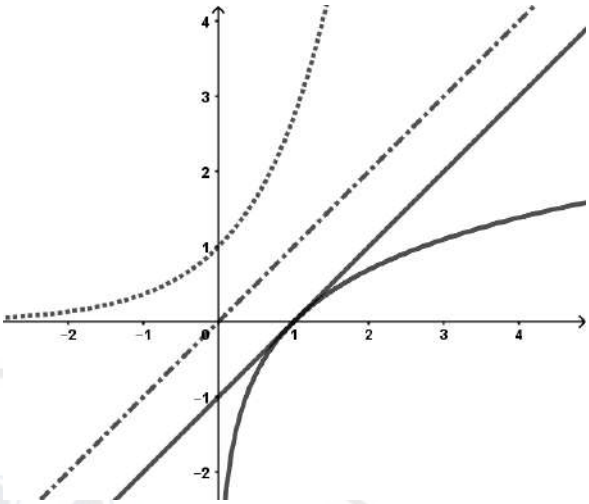
• Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ alors l'axe (Oy) est asymptote à la courbe représentative de $\ln(x)$.
• La tangente à la courbe représentative de ln au point de coordonnées $(1,0)$ a pour équation $y = x - 1$.

Tableau des variations de $f(x) = \ln(x)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



courbe de la fonction ln



courbes de la fonction ln *et* exp

IV. Compléments sur la fonction ln

1. Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème 8 :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie sur I. On suppose que :
i. u une fonction dérivable sur un intervalle I
ii. u est une fonction strictement positive sur I.
Alors pour tout x de I, la fonction f définie par : $f(x) = \ln(u(x))$ est bien définie sur I. De plus f est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice 4

Donner le domaine de dérivabilité puis Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
i. $f(x) = \ln(x^2 + 12)$ **ii.** $g(x) = x^2.\ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ **iii** $h(x) = \ln(\ln(x))$ **iv.** $R(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Solution
i. On pose $u(x) = x^2 + 12$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$. En plus u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = \ln(u(x))$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+12}$.
ii. On pose $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$. En plus u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = x^2.\ln(u(x))$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -x^2\dfrac{2x}{x^2+1} - 2x.\ln(x^2+1)$.
iii. On pose $u(x) = \ln(x)$. D'après l'étude de la fonction *ln*, $u(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$.
Puisque $u(x) > 0$ et dérivable dérivable sur $]1, +\infty[$, alors $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
iv. On pose $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. $u(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow x \in]-1, 1[$. De plus $\forall\ x \in]-1, 1[$, $u(x)$ est dérivable.
$f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

2. Primitives

Théorème 9 :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction. On suppose que :
i. u est dérivable sur I.
ii. u est strictement positive sur I.
Alors les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $x \mapsto \ln(u(x)) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, justifier le fait que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I puis fournir une primitive de f :
1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ **2.** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ **3.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution
1. Pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{-x}$. Pour $x < 0$ on pose $u(x) = -x$. Alors, u est dérivable sur $]-\infty, 0[$ puis pour tout réel $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De plus, la fonction u est strictement positive sur $]-\infty, 0[$. Une primitive de la fonction f sur $]-\infty, 0[$ est la fonction $x \longmapsto \ln(-x)$.
2. Pour tout réel x, posons $u(x) = x^2 + x + 1$. On vérifie facilement que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Donc, une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.
3. Posons $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$. On déduit de même une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(e^x + 1)$.

3. Quelques limites de références

Propriétés :
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et plus généralement pour tout entier $n > 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Démonstration
1. Pour $x > 0$ on pose $X = \ln(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^X$ alors $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{X}{e^X}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.
2. On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$.
3. Soit $f(x) = \ln(x)$. On a $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = f'(1) = 1$.
En posant $g(x) = \ln(1+x)$ on déduit de même que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = g'(0) = 1$.

V. Logarithme décimal

Définition 2 : Soit x un réel strictement positif.

Le logarithme décimal du réel x, noté $\log_{10}(x)$ ou plus simplement $\log(x)$, est : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Plus généralement, pour tout $a > 0$, $\log_a(x)$ désigne la fonction qui à $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln a}$

Exercice 6

Soit $f(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.

1. Domaine de définition de f.

2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer $f'(x)$.

3. Donner le sens de variations de f. Construire alors (C_f)

Solution

1. Domaine de définition :

f existe $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$ et $1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln(\frac{1}{2})} < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{2} > 0$$

Ainsi le domaine de définition de f est alors :

$$D_f = \left]-\infty; \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$$

2. La fonction $x \longmapsto x^2 - 5x + 6$ est dérivable sur D_f.

Par suite la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln(\frac{1}{2})}$ est dérivable sur D_f en tant que composée de deux fonctions dérivables.

De plus, la fonction pour tout $x \in D$,

$1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > 0$.

On conclut alors que $f(x)$ est dérivable sur D_f.

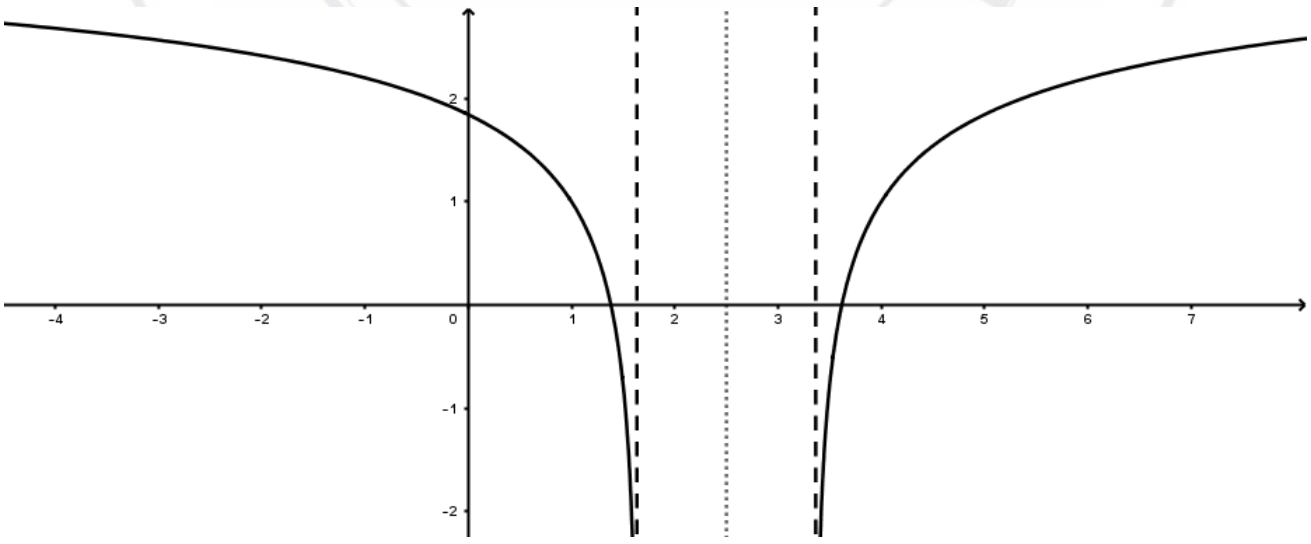
Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)\ln 2\left[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right]}.$$

3. Comme $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2} > \dfrac{5}{2}$ et que $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2} < \dfrac{5}{2}$, on conclut alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$.

NB : On peut remarquer $\forall\, x \in D_f$, $f\left(\dfrac{5}{2} - x\right) = f(x)$.

Donc la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).



Représentation graphique de (C_f)

Exercice 7

Exercice de synthèse

1. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-x}}$. **b.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}-e}{x}$ **d.** $\lim\limits_{x\to0} x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$ **f.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x^2-1})}{x^2-1}$ **g.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{1+x}}$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a. $\ln(x^2-3x-2)=\ln(2x-6)$ **b.** $\mathrm{e}^{2\ln(\frac{1}{x})+1}>2\,\mathrm{e}$ **c.** $\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leq\ln 2$.

d. $\mathrm{e}^{2x}-e^{x}-6=0$ **e.** $3\,\mathrm{e}^{x}-7\,\mathrm{e}^{-x}-20=0$ **f.** $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^{x}$

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases} x+y=2e \\ \ln(x)-\ln(y)=1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \mathrm{e}^{x}-2\,\mathrm{e}^{y}=-5 \\ 3\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{y}=15 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 5\,\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{y}=19 \\ \mathrm{e}^{x+y}=30 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2^{x}=3^{y} \\ x+y=1 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ \ln(x)-\ln(y)=\ln(2) \end{cases}$

4. Donner le domaine de dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ **b.** $g(x)=x\ln(x)-x$ **c.** $h(x)=(\mathrm{e}^{x}-4)\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}$ **d.** $i(x)=x^{-\ln x}$

Solution

1. Calcul de limites :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-x}}=-\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}=1$

c. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}$ **d.** $\lim\limits_{x\to0} x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

e. On pose $X=(x-1)^2$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$

f. On pose $X=x^2-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x^2-1})}{x^2-1}=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln X}{X}\right)=0$

g. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{1+x}}=\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\times\left[-\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{-x}\right]$

Ainsi $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{1+x}}=-\infty$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=0.$

2. Résolution des équations et inéquations :

a. $\ln(x^2-3x-2)=\ln(2x-6)\Rightarrow x^2-3x-2=2x-6$.

L'ensemble solution est : $S=\{4\}$.

b. $\mathrm{e}^{2\ln(\frac{1}{x})+1}>2\,\mathrm{e}\Rightarrow x\in\left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

c. $\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leq\ln 2\Leftrightarrow\ln\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right|\leq\ln 2$

donc, $\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right|\leq 2$ et $x\neq-1$. L'ensemble solution est :

$S=]-\infty,-1[\cup]-1,-3/5]\cup[-1/3,+\infty[$

d. Posons $X=\mathrm{e}^{x}$. Alors l'équation dévient :

$X^2-X+6=0$. Les racines de cette équation sont $X=-2$ et $X=3$.

Puisque l'exponentielle n'est qu'à valeurs strictement positives alors la seule solution est : $S=\{\ln 3\}$

e. L'unique solution est : $x=\ln(7)$

f. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=x\ln(\sqrt{x})$

Alors $\ln(x)\times\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0$. D'où l'ensemble solution est : $S=\{1,4\}$

3. Résolution de systèmes d'équations :

a. $\begin{cases} x+y=2e \\ \ln(x)-\ln(y)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=2\,\mathrm{e}-x \\ \ln(x)-\ln(2\,\mathrm{e}-x)=1 \end{cases}$

On déduit $x=\dfrac{2\,\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}}$ et $y=\dfrac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

b. $x=\ln(25/7)$ et $y=\ln(30/7)$

c. En écrivant $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{y}$ et en posant $a=\mathrm{e}^{x}$ et $b=\mathrm{e}^{y}$, le système dévient : $\begin{cases} 5a-b=19 \\ ab=30 \end{cases}$

On obtient $a=5$ et $b=6$. D'où $x=\ln 5$ et $y=\ln 6$.

d. $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 6}$ et $y = \dfrac{\ln 2}{\ln 6}$

e. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + x^2 = 12 \\ x/y = 2 \\ x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$

Alors $x = 4\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ et $y = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

4. Dérivation :

a. $f'(x) = \dfrac{2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]}{(x^2+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b. $g'(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

c. $h'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x} - 1}}$ pour $x \in]0, +\infty[$

d. $i(x) = x^{-\ln x} = \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$

$i(x)$ est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$i'(x) = -\dfrac{2}{x}(\ln x)\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$

VI. Fonction puissance

1. Définition et propriété

Définition :

Soit a un réel strictement positif.

• Pour tout nombre réel x, on a : $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$

• On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \mapsto a^x$

Conséquences :

– La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

– La fonction exponentielle de base 10 est la fonction réciproque de la fonction logarithme décimal.

– La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Propriétés

Soient $a > 0$ et $b > 0$;

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x \ln(a)$

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a^{x+y} = a^x a^y$ et $(ab)^x = a^x b^x$

3. Pour $y \in \mathbb{R}$, $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(a^x)^y = a^{xy}$

2. Croissance comparée de $\ln x$, e^x, x^α

Propriétés

Pour tout réel $\alpha > 0$

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{\ln(x^{10}+3)}$. Déterminons la limite de f en $+\infty$

$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{x^{10}} \times \dfrac{x^{10}}{x^{10}+3} \times \dfrac{x^{10}+3}{\ln(x^{10}+3)}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{x^{10}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{10}}{x^{10}+3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{10}+3}{\ln(x^{10}+3)} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exercices

Exercice 1

Soient $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x^2}}}$ et $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

1- **a.** Montrer que g est dérivable et déterminer sa dérivée.

b. Démontrer que g est impaire.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = g(x)$.

b. Déduire alors les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau des variations.

d. construire le graphe de f.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$
et sa courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x\,\mathrm{e}^x - 1$

b. En déduire qu'il existe un réel positif unique α tel que : $\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} = 1$. Donner un encadrement de α à 10^{-3}

c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2- **a.** Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

b. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Justifier que : $2.32 \leq m \leq 2.34$

3. Donner une équation de la tangente (T) à C en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.

4. Tracer C et (T)

Exercice 3 :

1- **a.** Montrer que pour tout $x > 0$; $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\,\mathrm{e}^{-x\ln(x)}$.

b. Déterminer alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

c. Soit $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Montrer l'existence de u_n puis calculer sa limite.

2- **a.** Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3- **a.** On considère $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. Étudier les variations de f sur $]0,1[$.

b. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \geq -\ln(2)$.

c. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par : $f(x) = \mathrm{e}\ln x - x$.

a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser un tableau de variations de f.

c. Comparer alors les nombres π^{e} et e^{π}

2. On considère $h(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

a. Étudier h et g. En déduire que $\forall\ x\ ]0,+\infty[$, $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$

b. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Exprimer $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ en fonction de n.

c. En utilisant **2-a.**, montrer $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e}^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ puis que $\frac{(n+1)^n}{n!} < \mathrm{e}^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

d. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n}}{n} < \frac{1}{e}\frac{(n+1)\sqrt[n]{(n+1)}}{n}$. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Problèmes

Problème 1 :

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

Partie I

1. Etudier les variations de f et g sur $[0,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \geq 0$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$

a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

b. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

c. En utilisant les questions **1.** et **2.**, montrer que $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$.

d. Calculer S_n et T_n en fonction de n.

e. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} T_n$.

4. Montrer que la suite u_n est strictement croissante.

5. En déduire que u_n est convergente. On note l sa limite.

6. Montrer que $\frac{5}{6} \leq \ln(l) \leq 1$. En déduire un encadrement de de l.

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(1+n)$.

a. Montrer que (v_n) est décroissante et que (w_n) est croissante.

b. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

c. Trouver la plus petite valeur n pour laquelle la valeur approchée de la limite commune des suites v_n et w_n soit à 10^{-3} près.

Problème 2

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2\ln(x)}{x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On pose $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

2- **a.** Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) et étudier la position de (C_f) par rapport à Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à Δ.

e. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ et soit (E) l'équation $\mathrm{e}^x = 1/x$.

1. Démontrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de f.

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α. Montrer que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$: $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

4. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

5. Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g sur $[0, \alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

7. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

8. Justifier que $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

Problème 3

Partie I

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1- **a.** Étudier les variations de f puis dresser son tableau des variations.

b. Tracer la courbe représentative de f.

c. En déduire que pour tout réel x : $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.

2. Montrer que pour tout $x > -1$: $\ln(1 + x) \leq x$. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

3. Montrer que pour tout $x < 1$: $\ln(1 - x) \leq -x$.

4. Montrer que pour tout $x > 0$: $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Partie II

Etude de deux suites numériques u_n et v_n. Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

1- **a.** En utilisant la question 2, montrer que pour tout $n \geq 1$: $u_n \geq \ln(n + 1)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = u_n - \ln(n)$.

a. Montrer que pour tout $n > 1$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + \dfrac{1}{n})$. En déduire le sens de variation de la suite (S_n).

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $0 \geq \gamma \geq 1$. (γ est appelé la constante d'Euler).

3. En utilisant la **partie I**, montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$

4- **a.** Calculer v_1, v_2 et v_3.

b. Montrer que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} = v_n + \dfrac{1}{2n}$

c. En déduire que $v_n \leq \ln(2) \leq v_n + \dfrac{1}{2n}$.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$.

Problème 4

Partie I

Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par : $f(x) = \dfrac{x.\ln x}{1+x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Soitφ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.

a. Étudier les variations de φ.

b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.

3- **a.** Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f puis dresser son tableau des variations.

b. Vérifier que $f(\beta) = -\beta$.

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5- **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.

b. Démontrer que les equation $f(x) = 1$ et $\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

6. Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}$.

a. Étudier les variations de g.Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$ qu'on notera α.

b. Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.

c. Démontrer que $\forall\ x \in [3; 4]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

7. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = g(u_n)\ \forall\ n \geq 1 \end{cases}$

a. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

c. Pour quelles valeurs de n, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie II

1. soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule. Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2- **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $\alpha_n \geq \mathrm{e}^n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$.

c. Déduire des questions **2-a.** et **2-b.** que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Problème 5

Étude d'une fonction et sa réciproque.

Partie A

On considère pour tout f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b. Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau des variations.

c. Tracer la courbe représentative de f dans le repère orthonormée direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. On considère la suite u_n définie par : $u_0 = \ln(3)$ et $\begin{cases} u_{2n} = \ln(3) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2k-1} \\ u_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2k} \end{cases}$

(u_n) est en fait définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^{\ln(3)} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x$

a. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+2} - u_n = \dfrac{-1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \ln(3)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. Montrer que f est bijective et trouver la fonction réciproque de f.

Partie B

On suppose que la réciproque de f est la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de g et montrer que g est impaire. Que peut-on dire de la courbe de g.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de g puis dresser son tableau de variations.
3. Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que f.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$, par $u_n = f(\frac{1}{n})$.

a. Étudier les variations de la suite (u_n).

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Montrer que g admet une primitive sur $]-1,1[$ puis déterminer cette primitive.

Problème 6

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x) = nx + (n+1)\ln(x)$.

1. Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

2- **a.** Calculer $g_n'(x)$ pour x élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, où g_n' est la dérivée de g_n.

b. En déduire le sens de variation de g_n.

3. Démontrer que pour $x \in]0,+\infty[$ l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0;1[$.
4. Démontrer que : $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [\alpha_n, +\infty[$.

Partie B

On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ définie dans la **partie A** et h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln(x)$.

1. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $\alpha \in]0;+\infty[$.
2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g_{n+1}(x) = g_n(x) + x + \ln(x)$.
3. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n+1}$.

4- **a.** Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est décroissante.

b. En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$.

5. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Partie C :

Soit n un entier naturel non nul différent de 1, f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^n \left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Selon la parité de n, déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- **a.** Démontré que : $\forall \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\forall\ x\ ]0,+\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^3}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{n-1} g_n(x)$.

b. En déduire, selon la parité de n, le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

3. Montrer que $\forall \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $f_n(\alpha_n) = (-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

4. Construire (C_2) et (C_3) . On prendra :$\alpha_2 = \alpha_3 \approx 0,6$.

Problème 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (\mathrm{e}^{-x^2} - 1)\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan (O, I, J)

Partie A

On considère les fonctions f et g dérivables et définies sur $]0,+\infty[$ par :
$h(x) = \ln x + \mathrm{e}^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + \mathrm{e}^x - 1$

1. Étudier la fonction h.

En déduire qu'il existe un $\alpha \in]0;1[$ tel que : $\begin{cases} \forall\ x \in]0;\alpha[,\ h(x) < 0 \\ \forall\ x \in]\alpha;+\infty,\ h(x) < 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$

2. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

3. Justifier que : $\forall\ x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = h(x)$.

4- **a.** Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b. Dresser le tableau des variations de g.

5- **a.** Démontrer que l'équation : $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique β.

b. Justifier que $\beta \in]0.3;0.4[$.

c. Démontrer que $\forall x \in]0,\beta[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\beta;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1- **a.** Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$

b. Montrer que $\forall\ x \in]0;+\infty[$; $-1 \leq -\mathrm{e}^{-x} \leq -1 + x$

c. Montrer que $\forall\ x \in]0;+\infty[$; $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

2. Démontrer que f est continue en 0.

3. Justifier que f est dérivable en 0.

4- **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c. Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions **a.** et **b.**

5. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} g(x^2)$

b. Déterminer les variations de f sur $[0,+\infty[$

c. Dresser le tableau des variations de f.

6- **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

b. Tracer (C_f) et (T) dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

CHAPITRE 5

PRIMITIVE ET INTÉGRATION D'UNE FONCTION

I. Primitives d'une fonction

1. Primitives d'une fonction

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$.
- La fonction $F : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $F : x \mapsto x \ln x - x + 2024$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Propriété :
• Si F est une primitive de f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque
Une fonction continue a une infinité de primitives, donc il ne faut pas dire **la primitive de f** mais plutôt **une primitive de f**

Par exemple les primitives de la $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont sous la forme de $\mathrm{e}^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. Formulaires de primitives usuelles

2-1. Fonctions trigonométriques réciproques

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x)$	$]-1, 1[$	
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[$	$a > 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a} arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{\beta^2+(x+\alpha)^2}$	$\dfrac{1}{\beta} arctan\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$	$\mathbb{R}$	$\beta \neq 0$

2-2. les « fonctions puissances ».

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$	$a > 1$ et $a \neq 1$
$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$	$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	

2-3. la « trigonométrie circulaire »

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - cotan^2(x)$	$cotan(x)$	$]k\pi,(k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert$	$]k\pi,(k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\lvert\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$

3. Quelques propriétés

Théorème 1 : Si F et G sont des primitives de f et g sur I (intervalle donné de $\mathbb{R}$), alors :
- Une primitive de $f+g$ sur I est $F+G$ et une primitive de λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) sur I est λF.
- D'autre part, si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, une primitive de $f' \times (g' \circ f)$ sur I est $g \circ f$.

Le dernier point du théorème précédent fournit le formulaire non exhaustif suivant :

Fonction	Une primitive	Commentaire
$f'f^\alpha$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$	
$\dfrac{f'}{f^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)f^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	
$f'\,\mathrm{e}^f$	e^f	
$f'\sin(f)$	$-\cos(f)$	
$f'\cos(f)$	$\sin(f)$	
$\dfrac{f'}{\cos^2(f)} = f'(1+\tan^2(f))$	$\tan(f)$	
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$arcsin(f)$	
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$arctan(f)$	

Exemple

Déterminons une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^3}$ $I = \mathbb{R}$

$f_1(x)$ est continue sur $I = \mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus $f_1(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(1+x^2)^3}$ avec $((x^2+1)' = 2x)$. En utilisant le tableau précédent on déduit qu'une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$.

2. $f_2 : x \mapsto -\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{5}{x}$ $I =]0,+\infty[$

f_2 est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que somme finie de fonctions continues sur $]0,+\infty[$. Donc f_2 admet une primitive sur $]0,+\infty[$ qui est la fonction $x \mapsto -6\sqrt{x} - \dfrac{3}{2x^2} + 5\ln(x)$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré (on admettra que les fonctions considérées sont définies et continues sur I)

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ avec $I = \mathbb{R}$ **2.** $f_2 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ avec $I = \mathbb{R}$.

3. $f_3 : x \mapsto (1+\ln(x))x^x$ avec $I =]0, +\infty[$ **4.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ avec $I =]0, 2[$

Solution

1. Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+x^2}$ (Avec $(x^2+1) = 2x$). D'après le tableau des primitives, une primitive de f_1 est alors $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(|x^2+1|) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

L'ensemble des primitives de f_1 sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. Pour tout réel x, $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}$ avec $((\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x)$. On déduit qu'une primitive de f_2 est la fonction $x \mapsto Arctan(\mathrm{e}^x)$. L'ensemble des primitives de f_2 sont les fonctions $x \mapsto Arctan(\mathrm{e}^x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3. pour tout $x > 0$; $f_3(x) = [1+\ln(x)]\,\mathrm{e}^{x\ln(x)}$ avec ($(x\ln(x))' = 1+\ln(x)$).Alors une primitive de f_3 sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(x)} = x^x$. Les primitives de f_3 sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto x^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

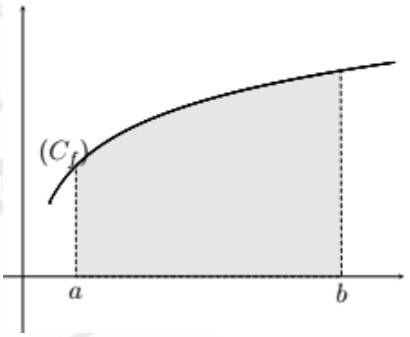
4. Pour tout $x \in]0, 2[$ $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ avec $(x-1)' = 1$. Alors une primitive de f_4 sur $]0, 2[$ est la fonction $x \mapsto Arcsin(x-1)$. Les primitives de f_4 sur $]0, 2[$ sont les fonctions $x \mapsto Arcsin(x-1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

II. Intégration d'une fonction

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

1-1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive

Définition :
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire , exprimée en unités d'aires, du domaine D du plan délimité par les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
Elle se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ce qui se lit « **intégrale de a à b de $f(x)dx$**»



1-2. Calcul d'intégrale d'une fonction continue et positive .

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f, alors on a le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$

Remarque
• Dans le théorème précédent, le calcul de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive F.
En effet soit F une primitive de f. Alors les autres primitives de f sont des fonctions $F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Prenons donc une primitive quelconque $F_k = F + k$ de f alors d'après le théorème :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_k(b) - F_k(a) = (F(b)+k) - (F(a)+k) = F(b) - F(a)$.
• Habituellement pour alléger les calculs on choisit, pour le calcul d'intégrale d'une fonction, une primitive de f dont la constante est nulle.

Exemple

– Une primitive de la fonction f $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est e^x. Alors : $\int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\ln(3)} - \mathrm{e}^0 = 3 - 1 = 2$.

– Une primitive de la fonction f $x \mapsto x^2$ est $\frac{x^3}{3}$. Ainsi $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

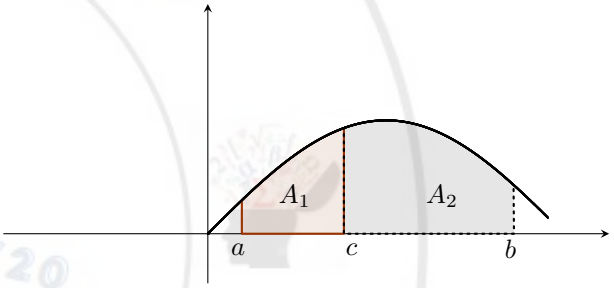
1-3. Relation de Chasles

Théorème 2 :Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
Pour tout réel c de $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

On note D_1 (respectivement D_2) l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et le graphe de f dont l'abscisse est comprise entre a et c (respectivement c et b) puis on note A_1 (respectivement A_2) l'aire de D_1 (respectivement D_2). La relation de Chasles est alors lisible sur le graphique ci-dessous.

$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$



2. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu dans le paragraphe précédent que si f est une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On décide de conserver ce résultat comme définition générale d'une intégrale :

Définition :
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit F une primitive de la fonction f sur $[a,b]$.
L'intégrale de f sur $[a,b]$ est par définition : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Notation

La plupart des calculs d'intégrale se font en deux étapes :Déterminer une primitive F puis calculer $F(b) - F(a)$. Pour cette raison, on introduit la notation $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Interprétation de l'intégrale en terme « d'aire algébrique »

L'intégrale de a à b de f est la somme des aires algébriques quand x varie de a et b.

3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Théorème 3 :

- Pour tout fonction continue sur $[a,b]$; $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et λ et μ deux nombres réels. Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Positivité** : Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- **Croissance** : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Relation de Chasles** : Pour tout réel c de $]a,b[$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Démonstration

– On a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

– **Linéarité** : Puisque f et g sont continue sur $[a,b]$ alors elles ont des primitives sur cet intervalles. On note F une primitive de f et G une primitive de g. Alors une une primitive de la fonction $\lambda f(x)+\mu g(x))$ est $\lambda F(x)+\mu G(x)$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x = (\lambda F(b)-\lambda F(a))+(\mu G(b)-\mu G(a)) = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

– **Positivité** : Cette propriété résulte de la définition même de l'intégrale d'une fonction continue positive comme étant une aire.

–**Croissance** : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout x dans $[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$ alors pour tout x dans $[a,b]$, $g(x)-f(x)\geq 0$. Et d'après la propriété de positivité d'intégrale on déduit que $\displaystyle\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

– **Relation de Chasles** : Même preuve que pour une fonction continue positive.

Exercice 2

Pour tout entier n, on pose $\displaystyle I_n = \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$

1-a. Montrer l'existence de I_n puis étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2-a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leq I_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solution

1-a. • Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[1,2]$, on a $(1+x^2)\neq 0$. Donc, pour tout entier naturel n, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[1,2]$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $[1,2]$ ne s'annulant pas sur $[1,2]$.On en déduit que pour tout entier naturel n, I_n existe.

• Pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{n+1}-I_n &= \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x^2+1)^n}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{-x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\int_1^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \text{ (Par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \geq 0$ Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc la suite I_n est décroissante.

b. Pour tout réel x de $[1,2]$, $\dfrac{1}{(x^2+1)^n} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$. Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

2-a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit x un réel de $[1,2]$. On a $1+x^2 \geq 2$ puis $(1+x^2)^n \geq 2^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$. On déduit que $0 \leq \dfrac{1}{(x^2+1)^n} \leq \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 0\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}x$.

D'où $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

b. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. Intégrale fonction de la borne supérieure

On se donne f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.
Pour a fixé dans I et pour x variable I, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \Rightarrow F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 4 :
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I.
La fonction F définie sur I par : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I de dérivée f.
- En particulier, pour tout x_0 de I, la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en x_0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Par exemple, pour tout réel x, $Arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Commentaire
Dans la notation $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t est muette. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction de x et non de t. Pour cette raison, une phrase du genre : $\forall\, t$..... $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ = ... ne veut rien dire.

Continuité et dérivabilité des fonction de type : $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 5 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Notons u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles J et K de sorte que $\forall x \in J$, $u(x) \in I$ et $\forall x \in K$, $v(x) \in I$
- Si u et v sont continues alors la fonction G définie sur I par : $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.
- De plus, si u et v sont dérivables alors la fonction G est dérivable sur I de dérivée
$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Démonstration
- f est continue sur I alors f admet une primitive sur I que l'on note F. Dans ce cas, $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$. De plus si u et v sont continues alors $F(v(x))$ et $F(u(x))$ sont continues sur I en tant que composée de fonctions continues puis on déduit que G est continue sur I en tant que différence de fonctions continue sur I.
- Si de plus u et v sont dérivables alors $F(v(x))$ et $F(u(x))$ sont dérivables sur I en tant que composée de fonctions dérivables puis on déduit que G est dérivable sur I en tant que différence de fonctions dérivable sur I. De plus $G(x) = F(v(x)) - F(u(x)) \Rightarrow G'(x) = v'(x) \times F'(v(x)) - u'(x) \times F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Exercice 3

Pour tout réel x on pose : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée.
2. Étudier le signe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) au graphe de F en son point abscisse 0.
5. En étudiant la fonction $g : x \mapsto F(x) - x$, déterminer la position relative de (C_F) et de la droite (T).
6. En étudiant la fonction $h : x \mapsto F(x) + F(-x)$, montrer que la fonction F est impaire.
7-a. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1 - \frac{1}{x}$.
b. En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $F(x) \leq 2$.
c. En déduire que pour tout réel x, $F(x) \leq 2$.
8. Donner une idée du graphe de la fonction F.

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,on pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ on en déduit que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$. D'où $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x.

2. Étude de signe de F :

– Pour $x \geq 0$, $\forall\, t \in [0, x]$, $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$.Par positivité de l'intégrale, on déduit : $F(x) \geq 0$.

– Pour $x < 0$ et tout réel t de $[x, 0]$, $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$.Par positivité de l'intégrale, on déduit : $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$

Alors $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq 0$ ou encore $F(x) \leq 0$.

Conclusion : F est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$

3. D'après la question 1), $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout réel $x \Rightarrow$ pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) > 0$.

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

4. L'équation de la tangente (T) est $y = F'(0)(x-0) + F(0)$.

Or $\begin{cases} F'(0) = 1 \\ F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (T) a pour équation $y = x$

5. • La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• De plus on a : $g(0) = F(0) - 0 = 0$. Alors pour $x \geq 0$, $g(x) \leq g(0) = 0$ et pour $x \leq 0$,$g(x) \geq g(0) = 0$.

En résumé : (C_F) est au-dessus de (T) pour $x \in]-\infty, 0]$ et en-dessous de (T) pour $x \in [0, +\infty[$.

6. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, h est dérivable en tant que somme de 2 fonctions dérivables et $h'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0$.

• D'autre part $h(0) = 0$. Alors $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En conclusion : pour tout réel x, $F(-x) = -F(x) \Rightarrow F$ est impaire.

7-a. Pour tout $x \geq 1$ et pour tout $t \in [1, x]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$. D'où pour tout $x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1 - \frac{1}{x}$.

b. Pour tout $x \geq 1$, on a : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (Relation de Chasles) .

Or pour $t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$

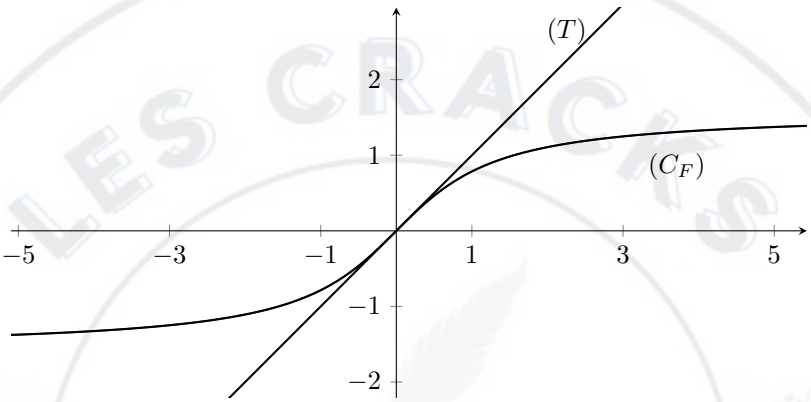
Par suite pour $x \geq 1$, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1 + 1 - \frac{1}{x} \leq 2$

D'où pour tout $x \leq 1$, $F(x) \leq 2$.

c. Par croissance de F sur $\mathbb{R}$, on a : pour tout $x < 1$, $F(x) < F(1) = 2$.

D'où Pour tout réel x, $F(x) \leq 2$.

8. Représentation graphique de (C_F)



5. La formule d'intégration par parties

Nous allons maintenant donner une formule qui permet de transformer le problème du calcul d'une Nous allons maintenant donner une formule qui permet de transformer le problème du calcul d'une intégrale en un problème de calcul d'une autre intégrale beaucoup plus simple à calculer.

Théorème 5 : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient u et v deux fonctions définies dérivables et telles que leurs dérivées soient continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

Par hypothèse, les fonctions u et v sont dérivables sur $[a,b]$ alors $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.Par hypothèses, $u'(x)$ et $v'(x)$ sont continues sur $[a,b]$.

Ainsi $\int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \Rightarrow [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

D'où le résultat.

Exemple

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction qui à $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ n'est pas évidente :

Dans notre cas on pose : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$ alors on a : $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. Alors :

$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ or $\int_0^1 1 \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - 1$. Ainsi $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^1 - (\mathrm{e}^1 - 1) = 1$

2. $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Comme dans le cas précédent, on pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x) \Rightarrow u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Alors $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$ (Intégration par parties). $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Exercice 4

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x$

2. $J = \int_1^2 \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\ \mathrm{d}x$

Solution

1. On pose : $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$

On obtient donc : $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x^2}{3}\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \dfrac{1}{9}(\mathrm{e}^3 - 1)$. D'où $I = \dfrac{2\,\mathrm{e}^3 + 1}{9}$.

2. On pose : $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v(x) = \dfrac{-1}{x}$.

$J = \left[-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \dfrac{1}{x(1+x)}\ \mathrm{d}x$. En écrivant $\dfrac{1}{x(1+x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$.

$\int_1^2 \dfrac{1}{x(1+x)}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}\right)\ \mathrm{d}x = [\ln(x) - \ln(1+x)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3)$.

Ainsi $I = -\dfrac{\ln(3)}{2} + \ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3) = -\dfrac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2)$

6. Changements de variable

6-1) Formule de changement de variable

Théorème 6 : Soit φ une application définie et dérivable de dérivée continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$

Exemple

A l'aide de changement de variable calculons les intégrales suivantes :

1. $\int_1^4 \dfrac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. on pose $f(t) = \dfrac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

On fait le changement de variable en posant $x = \sqrt{t}$ (Ce changement ne se fait pas au hasard car l'objectif c'est de transformer cette intégrale en une intégrale facilement calculable).

• On calcul les nouvelles bornes et dx. On rappelons la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective sur $[1,4]$

Pour $t = 1$,$x = \sqrt{1} = 1$; pour $t = 4$, $x = 2$ et $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$. Ainsi dans l'intégrale précédente :

On remplace $\sqrt{t}$ par x ; $t = 1$ par $x = 1$ et $t = 4$ par $x = 2$; dt par $2\sqrt{t}dx = 2xdx$ car $x = \sqrt{t}$.

On a alors : $\int_1^4 \dfrac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_1^2 \dfrac{1-x}{x} 2x\ \mathrm{d}x = \int_1^2 (2-2x)\ \mathrm{d}x = [2x - x^2]_1^2 = -1$. D'où $\int_1^4 \dfrac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = -1$.

2. $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x$. On fait le changement de variable : $t = \mathrm{e}^x$.

• La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est bijective sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1,2]$.

• $\begin{cases} \text{Pour } x = 1 \text{ et } t = \mathrm{e} \\ \text{Pour } x = 2 \text{ et } t = \mathrm{e}^2 \\ \text{Et } dt = \mathrm{e}^x\, dx \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \dfrac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}}\right)$

Exercice 5

Calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. En utilisant le changement de variable $u = \ln(t)$ calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(t))^n}{t}\ \mathrm{d}t$.

2. On admet que $Arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\ \mathrm{d}t$

3. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t$.

Solution

On suit la démarche de l'exemple précédent :

1. $u = \ln(t) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } t = 1 \text{ et } u = 0 \\ \text{Pour } x = \mathrm{e} \text{ et } u = 1 \\ \text{Et } du = \dfrac{1}{t}dt \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(t))^n}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 u^n\ \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

2. $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } t = 1 \text{ alors } u = \sqrt{\mathrm{e}-1} \\ \text{Pour } x = 2 \text{ alors } u = \sqrt{e^2-1} \\ \text{Et } du = \dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}dt \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\ \mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{1}{u^2+4}\ \mathrm{d}u$

Ainsi $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\ \mathrm{d}u$ On pose $x = \dfrac{u}{2} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} \text{Pour } u = \sqrt{\mathrm{e}-1} \text{ alors } x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}-1}}{2} \\ \text{Pour } u = \sqrt{e^2-1} \text{ alors } x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{2} \\ \text{Et } 2dx = du \end{cases}$

Par suite $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{\mathrm{e}-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{2}} \frac{2}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = Arctan\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{2}\right) - Arctan\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}-1}}{2}\right)}$

3. On fait le changement de variable $x = \sqrt{t}$ alors : $\begin{cases} \text{Pour } t = \dfrac{\pi^2}{4} \text{ alors } x = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Pour } t = \pi^2 \text{ alors } x = \pi \\ \text{Et } dt = 2xdx \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(x)\ \mathrm{d}x = 2[x\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x = -2 - \pi$

$\boxed{\text{Ainsi } \displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t = -2 - \pi}$

6-2)Quelques applications du changement de variables

En procédant à un changement de variables, on a le théorème suivant :

Théorème 7 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

i. Si f est paire, alors pour tout a de I, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x$.

ii. Si f est impaire, alors pour tout a de I, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

iii. Si f est T-périodique avec $T \neq 0$ alors pour tout a, $\displaystyle\int_a^{T+a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\ \mathrm{d}x$.

Par exemple : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$

7. Applications du calcul intégral : Calcul de l'aire du domaine délimité par deux courbes

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $0 \leq g \leq f$ sur $[a,b]$. Alors l'aire du domaine D défini par : $D = \{M(x,y) \in \mathcal{P}$ tels que $a \leq x \leq b$ et $g(x) \leq y \leq f(x)\}$ est donnée, en unité d'aire $(u.a)$, par : $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

Exercice 6

Soit f et g, deux fonctions définies respectivement sur $[0,+\infty[$ et sur $[0,1[$ par : $f(x) = \sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}$ et $g(x) = -\ln(1-x^2)$; (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique $5cm$

1- **a.** Étudier la dérivabilité de f en 0

b. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c. Vérifier que pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$, $f'(x) < 1$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1/2,+\infty[$ une unique solution α et que $0.7 < \alpha < 0.8$.

2. Justifier que f est bijective sur $[0,+\infty[$ puis montrer que $f^{-1}(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1[$

3. Justifier comment tracer la courbe (C_g) à partir de la courbe (C_f). Tracer (C_g) et (C_f).

4. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x) = -2\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}} + \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}\right)$.

Justifier que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $h'(x) = f(x)$.

5- **a.** Déterminer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe (C_f), les droites d'équation $y = x$, $x = 0$ et $x = \alpha$ en fonction de α

b. En déduire l'aire, en cm^2, du domaine $\mathcal{D}$ donné par : $\mathcal{D} = \{M(x,y) \in \mathcal{P}$ tels que $0 \leq x \leq \alpha$ et $g(x) \leq y \leq x\}$ en fonction de α

Pour $\alpha = 0.71$, donner la valeur numérique de cette aire.

6. Déterminer, en unité d'aire puis en cm^2, l'aire du domaine compris entre les courbe (C_f) et (C_g), les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ en fonction de α.

Pour $\alpha = 0.71$, donner la valeur numérique de cette aire.

Solution

1-a. f est bien définie sur $[0,+\infty[$. Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}}$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ la fonction f n'est pas dérivable en 0 et au point d'abscisse 0 (c'est l'origine), il y a une demi tangente verticale.

b. f est alors dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2f(x)} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. (Voir page suivante pour le tableau de variation de f)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite $y = 1$ est asymptote à (C_f).

c. $1 - f'(x) = \dfrac{2f(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2f(x)}$.

• On pose $\varphi(x) = 2f(x) - \mathrm{e}^{-x}$. φ est dérivable sur $[1/2,+\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = 2f'(x) + \mathrm{e}^{-x}$ donc φ est strictement croissante sur $[1/2,+\infty[\Rightarrow \forall\, x \in]1/2,+\infty[$, $\varphi(x) > \varphi(1/2) \simeq 0.6 > 0$.

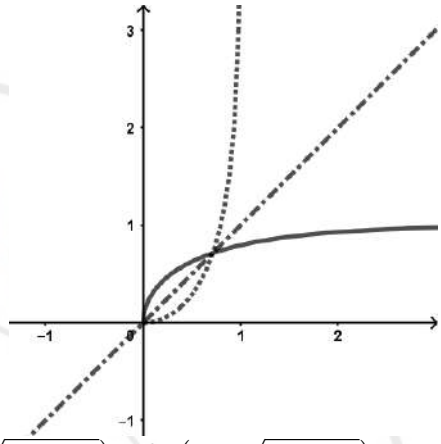
Par conséquent, $\forall\, x \geq 1/2$, $1 - f'(x) > 0$ autrement dit $f'(x) < 1$

• Notons $\psi(x) = f(x) - x$ est continue sur $I =]1/2,+\infty[$.

ψ est dérivable sur I de dérivée $\psi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ alors ψ est strictement décroissante sur I. De plus

$\psi(1/2) \simeq 0.127$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = -\infty$ alors on déduit de cela que l'équation $\psi(x) = 0$ a une unique solution α. (En utilisant le théorème de valeurs intermédiaires et la bijection de f sur I)
Comme $\psi(0.7) = 0.0095 > 0$ et $\psi(0.8) \simeq -0.058 < 0$ alors $0.7 < \alpha < 0.8$
2. f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1[$.
$\forall y \in [0, 1[$, $\exists!\ x \in [0, +\infty[$ tel que $y = f(x)$.
$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}} \Leftrightarrow 1 - y^2 = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $y = f(x) \Leftrightarrow x = -\ln(1 - y^2)$
D'où f^{-1} est la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f^{-1}(x) = -\ln(1 - x^2)$. D'où $f^{-1}(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$
3. Comme g est la réciproque de f alors (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1



4. Pour $x \in]0, +\infty[$, h est dérivable et $h(x) = -2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}} + \ln\left(\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}\right) - \ln\left(1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}\right)$:
Par suite $h'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} \times \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} \times \dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}}$
$h'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} \left[\dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} + \dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}}\right] = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$
Par suite $h'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}$. $h'(0)$ existe. On conclut alors que $\forall x \in [0, +\infty[$, $h'(x) = f(x)$
5-a Pour $x \in [0, \alpha]$, (C_f) est au dessus de la droite $y = x$, donc l'aire demandée est égale, en unité d'aire, à :
$\displaystyle\int_0^\alpha [f(x) - x]\ \mathrm{d}x = h(\alpha) - h(0) - \alpha^2/2$
Par suite, l'aire demandée est égale, en unité d'aire, à : $-2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}\right) - \dfrac{\alpha^2}{2}$
b. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est alors :
$\mathcal{A} = \left[-2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}\right) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right] 5cm \times 5cm$
$\mathcal{A} = 25\left[-2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}\right) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right] cm^2$
Pour $\alpha = 0.71$, $\mathcal{A} \simeq 2.71\ cm^2$
6. Pour $x \in [0, \alpha]$, (C_g) est en dessous de (C_f). Puis en utilisant le fait que (C_g) est la symétrique de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$ et le fait que $f(\alpha) = \alpha$ (question **1-c.**), $f(0) = 0$ on déduit que l'aire demandée est :
• En unité d'aire $\mathcal{A}' = 2\left[-2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}\right) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right]$
• En cm^2, $\mathcal{A}' = 50\left[-2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}}\right) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right]$
Pour $\alpha = 0.71$, $\mathcal{A}' \simeq 5.42\ cm^2$

III. Compléments sur le calcul d'intégrales

1. Inégalité de la moyenne et valeur moyenne d'une fonction

a. Inégalité de la moyenne

Cette propriété est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction F définis sur l'intervalle $[a,b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

Propriété :
Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ tel que $a < b$; m et M deux réels donnés.

- Si pour tout x élément de $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$
- Si pour tout x élément de $[a,b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$

b. Valeur Moyenne d'une fonction

Propriété :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ tel que $a < b$

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$, le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

2. Techniques du calcul d'intégrales

Quand on a une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ à calculer, il est conseillé de raisonner dans l'ordre suivant :

i. Recherche directement une primitive de f

Soit c'est une primitive simple à déterminer ou il faut utiliser les primitives usuelles : Voir si on peut écrire f sous la forme $x \mapsto u'(x) \times u^{\alpha}(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$; $x \mapsto u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$; $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ... (Voir **Exercice 1**/ question **1.**)

ii. Intégration par parties

Dans le cas où une primitive de f n'est pas évidente ; on peut tenter une intégration par parties. Cependant, pour que l'intégration par parties soit efficace, il faut bien choisir "$u(x)$" et "$v'(x)$" pour obtenir une fonction beaucoup plus simple à trouver la primitive. (Voir **Exercice 1**/ question **3.**)

iii. Changement de variables

Si les deux premières méthodes ne marchent pas, on peut essayer de faire un changement de variables. Mais en générale, le changement de variable reste compliqué et peut induire facilement en erreur. (Voir **Exercice 1**/ question **5.**)

Remarque :

- Des fois, il faut faire une petite transformation de la fonction f pour dégager facilement la primitive. C'est le cas d'une fraction rationnelle où des fois, il faut écrire sous forme d'éléments simples (Voir **Exercice 1**/ question **2.** intégrale **K** et **L**) ou transformer le dénominateur (Voir **Exercice 1**/ question **2.** intégrale **I** et **J**).
- Dans le cas des fonctions trigonométriques à puissances, une linéarisation s'impose le plus souvent. (Voir **Exercice 1**/ question **4.**)

- Des fois certaines fonctions n'ont pas primitives (C'est le cas de e^{-x^2}) ; dans ces cas, on peut calculer une valeur approchée de l'intégrale avec la méthode des rectangles, la méthode du point médian ou la méthode des trapèzes (Voir **problème 7** et **problème 8**)

Exercices

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad L = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}\,\mathrm{d}x$

2. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \displaystyle\int_3^4 \frac{2}{x^3-7x+6}\,\mathrm{d}x$ $\quad L = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

3. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$ $\quad L = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$

4. calculer les intégrales suivantes(On peut linéariser les fonctions sous le signe intégrale si nécessaire).

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

5- **a.** En utilisant le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

En posant $u = \tan(x)$ dans la dernière intégrale, Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2

1. Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Justifier que $H(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$ et on note (C_F) sa courbe représentative dans F dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée. En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation de la tangente à (C_F) en son point d'abscisse 0.

5. En considérant la fonction $\varphi : x \mapsto F(x) + F(-x)$, montrer que la fonction F est impaire.

6- **a.** Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) < 2$.

b. En déduire que F a une limite réelle en $+\infty$.

Exercice 3 : Intégrale de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$,on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$. Que dire de la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

4. En utilisant la question précédente, montrer que $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante puis déterminer cette constante.

5. En déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie. Calculer u_nu_{n+1}.

b. On admet que la suite (u_n) est convergente. En utilisant **6-a.**, déterminer sa limite.

7. Moyennant les questions **4.** et **6.**, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

8- **a.** Déduire de la question **3.** que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{cases}$

b. Moyennant ce qui précède, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left[\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^2$.

Exercice 4

On considère F définie sur $]1,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$

1. Étudier les variations de F sur $]1,+\infty[$.

2. Montrer que pour réel $x > 1$, $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{(\ln(x^2))^2} \leq F(x) \leq \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{(\ln(x))^2}$. Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3. Pour tout $t \in]1,+\infty[$, montrer que $0 \leq \ln(t) \leq t-1$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} F(x)$.

On considère G définie sur $]0,1[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

4. Pour tout $x \in]0,1[$ et pour $t \in [x^2, x]$, Montrer que : $\dfrac{1}{t-1} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{x^2-1}{2\ln(x)} \times \dfrac{1}{t-1}$

En déduire que $\forall\ x \in]0,1[\ , \dfrac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2\ln(x)} \leq G(x) \leq \ln(x+1)$. En déduire que G se prolonge par continuité en 1.

5. Justifier que G est dérivable sur $]0,1[$ et déterminer sa dérivée. En déduire que G est dérivable en 1 puis déterminer $G'(1)$.

6. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5

1. Pour tout entier naturel n, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-nx}{2}\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-nx}{2}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et $nI_n - 2J_n = -2\exp\left(\dfrac{-n\pi}{4}\right)$

b. Déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \exp(1-x)\ \mathrm{d}x$

a. Calculer u_1.

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$. En déduire la limite de la suite u_n.

c. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 nx^n\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$

3. On considère les fonctions F et G définies par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Étudier la parité de F et G. Montrer que F et G sont dérivables puis déterminer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b. Etudier les variations des fonctions F et G. Exprimer G en fonction de F

Problèmes

Problème 1

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ sinon} \end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier la continuité de f

2- **a.** Démontrer que pour tout réel x non nul de l'intervalle $]-1, +\infty[$ on a : $0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$

(On pourra montrer ce résultat pour x appartenant à $]0, +\infty[$ et pour x appartenant à $]-1, 0[$).

b. Vérifier que : $\forall \in\,]-1, +\infty[,\ \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + \dfrac{u^2}{1+u}$.

En déduire que : $\forall\, x \in\,]-1, +\infty[,\ x \neq 0\ ,\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u$

c. En exploitant les résultats des questions précédentes, montrer que f est dérivable au point 0.

Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 et étudier la position de (C) par rapport à cette tangente.

d. Étudier la dérivabilité de f.

3. Soit g l'application définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

a. Étudier les variations de g et déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

b. En déduire le sens de variation de f.

4. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1, +\infty[$.

5. Déterminer les droites asymptotes à (C) et préciser la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Construire la courbe (C).

Partie B

1. Justifier que pour tous réels a et b de $]-1, +\infty[$ tels que $a < b$ on a : $(b-a)f(b) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)f(a)$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

2- **a.** En utilisant la fonction g, montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{1+x} \geq 0$.

b. En déduire la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de la fonction : $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Soit h l'application définie sur $]-1, 0]$ par $h(x) = x + 1 - (x+1)\ln(x+1)$.

a. Calculer $h'(x)$ pour $x \in\,]-1, 0]$ et montrer que pour tout réel x de cet intervalle on a $h(x) \in\,]0, 1]$.

b. Montrer que : $\forall\, x \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1)$.

En déduire que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_t^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ est majorée dans $\left]-1, -\dfrac{1}{2}\right]$

c. On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ de terme général $v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n>0}$. En déduire que cette suite est convergente.

Problème 2

Les parties I et II sont totalement indépendantes :

Partie I

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

1- **a.** Dresser le tableau de variation de f.

b. Déduire que pour tout entier $n\geq 6$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1,\sqrt{e}]$ une seule racine notée a_n.

c. Prouver que la suite $(a_n)_{n\geq 6}$ est décroissante, en déduire qu'elle converge.

2- **a.** Montrer que pour tout entier naturel $k>1$, on a : $\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\leq\frac{\ln(k)}{k^2}$.

b. Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\displaystyle\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $n\geq 2$

3. Pour tout entier $n\geq 2$,on pose : $S_n=\dfrac{\ln(2)}{2^2}+\dfrac{\ln(3)}{3^2}+\dfrac{\ln(4)}{4^2}+\cdots+\dfrac{\ln(n)}{n^2}$

a. Montrer que : $S_n-\dfrac{\ln(2)}{2^2}\leq\displaystyle\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\leq S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$

b. En déduire que : $\dfrac{1+\ln(2)}{2}-\dfrac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}\leq S_n\leq\dfrac{2+3\ln(2)}{4}-\dfrac{1+\ln(n)}{n}$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^2\frac{(\ln(x))^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$

a. Montrer que : $\forall\ n\ \mathbb{N}^*$, $0\leq I_n\leq\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire la limite de I_n.

b. Montrer que : $\forall\ n\ \mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

c. En déduire que : $\forall\ n\ \mathbb{N}^*$, $I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+\dfrac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

d. Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n).

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(1+x)$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Tracer la courbe (C_f).

3- **a.** En remarquant $\dfrac{x^2}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$, calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

b. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que l'écriture précédente est une suite numérique bien définie et montrer que $u_1=\dfrac{1}{4}$.

b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\leq u_n\leq\dfrac{\ln(2)}{n+1}$. En déduire alors la limite de la suite (u_n).

5. Pour tout entier naturel $n\geq 2$ et pour tout $x\in[0,1]$,on pose : $s_n(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n$.

a. Justifier que $s_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

b. Montrer que : $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}\right)$.

6. Soit $v_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a. Montrer que : $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$

c. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n$

Problème 3

Partie I

1. Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln(x)} \text{ si } x \neq 1 \\ h(1) = 1 \text{ sinon} \end{cases}$

a. Montrer que la fonction h est continue à droite au point 1.

b. Montrer que : $\forall\, x > 1\,;\, \ln(x) < x - 1$ en déduire que h est strictement décroissante $]1,+\infty[$.

2- **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis dresser le tableau des variations de h.

b. En déduire que : $\forall\, x \geq 1\,;\, 0 < h(x) \leq 1$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = \ln(2) \text{ sinon} \end{cases}$

(C) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- **a.** Vérifier que : $\forall\, x > 1\,;\, \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

b. Montrer que : $\forall\, x > 1\,;\, g(x) - \ln(2) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

c. Montrer que : $\forall\, x > 1\,;\, g(x) - \ln(2) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

2- **a.** Montrer que : $\forall\, x > 1\,;\, (x-\sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln(2) \leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$.

b. En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1.

c. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$.

3- **a.** Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall\, x > 1\,;\, g'(x) = \dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$.

b. En déduire que : $\forall\, x > 1\,;\, 0 < g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$ puis dresser le tableau des variations de g.

c. Construire (C).

Partie III

1. Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]-\infty,\ln(2)]$.

2. En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $1 + g(\alpha) = \alpha$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} 1 \leq u_0 < \alpha \\ u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4- **a.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n < \alpha$

b. Montrer la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

c. Montrer la suite$(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

5- **a.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

c. En déduire une deuxième fois que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Problème 4

-A-

1- **a.** Montrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[\,;\ \int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = x - \ln(1+x)$.

b. On pose $u = t^2$. Montrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[\,;\ \int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

c. En déduire que : $\forall\, x \in]0,+\infty[\,;\ \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

2. Déterminer alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

-B-

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **a.** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

b. Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2- **a.** Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

b. En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c. Vérifier que : $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.

3. Construire la courbe (C_f) et la demi-tangente à droite au point 0.

-C-

1. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a. Montrer que : $\forall\, x\ ]0,+\infty[\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$.

c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$.

2. Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$, Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,;\ u_n > 0$.

b. Montrer que :$\forall\, n \in \mathbb{N}\,;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c. Montrer que :$\forall\, n \in \mathbb{N}\,;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$.

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers a.

Problème 5

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle, $I = [0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **a.** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

b. Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

2- **a.** Calculer, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter analytiquement le résultat obtenu.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3- **a.** Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion A qu'on déterminera.

b. Tracer la courbe (C_f).

Partie B

Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t$

1. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

2- **a.** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_x^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}} - x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t$.

b. Déterminer : $\displaystyle\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

c. Montrer que : $\displaystyle\int_x^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}$.

3. Calculer en l'aire du domaine délimité par la courbe(C_f) et les droites d'équations respectives,$x = 0$,$x = 2$ et $y = 0$.

4. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_n = F(n) - F(n+2)$.

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n, n+2[$ tel que : $u_n = 2\left(1 + \dfrac{1}{v_n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{v_n}}$.

b. Montrer que : $\forall\, n\ \mathbb{N}^*$; $2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{n+2}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie C

1- **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a_n) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right) = -\dfrac{1}{n}$

2- **a.** Montrer que : $\forall\, t \in [0, +\infty[$;$1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

b. Montrer que : $\forall\, x \in [0, +\infty[$; $-\dfrac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

3. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$.

a. Vérifier que : $a_4 \geq 1$, en déduire que :$a_n \geq 1$.

b. Montrer que : $1 - \dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$.

c. Montrer que : $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq a_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Problème 6

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = 2\,(1 - \mathrm{e}^{-x}) - x$.

1- **a.** Étudier les variations de la fonction g.

b. Dresser le tableau de variations de g.

2- **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \,]\ln(4), \ln(6)[$.

b. Étudier le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}_+$

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,(1 - \mathrm{e}^{-u_n}) \;\forall\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall\; n \in \mathbb{N}\; 1 \leq u_n \leq \alpha$.

b. Montrer que : $\forall\; n \in \mathbb{N}\,;\; u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x}}{x^2}$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- **a.** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)\,\mathrm{e}^{x}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau de variations de f.

3. Tracer la courbe (C_f). (On prend $\alpha = 1.5$).

Partie III

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1 - \mathrm{e}^{t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ pour } x > 0 \\ F(0) = -\ln(2) \end{cases}$

1- **a.** En utilisant une intégration par parties montrer que : $\forall\; x > 0\,;\; F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\,\mathrm{d}t$

b. montrer que : $\forall\; x > 0\,;\; \mathrm{e}^{x}\ln(2) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{2x}\ln(2)$.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire que la fonction est continue à droite au point 0 .

2- **a.** Montrer que :$\forall\; x > 0\,;\; F(x) \leq \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x}}{2x}$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que : $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x}\right)^2$.

4- **a.** Soit x un élément de l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]0, x[$ tel que : $F(x) - F(0) = -\dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2c}$.

b. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \leq \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\dfrac{1}{2}$;

c. En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Problème 7 : **Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles**

L'objectif de ce problème est de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles.

Partie A : **Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles**.

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que la dérivée de f est continue sur $[a,b]$ aussi. On note f' la dérivée de f sur $[a,b]$

1- **a.** Justifier brièvement pourquoi $|f'|$ admet un maximum sur $[a,b]$. On note M ce maximum.

b. Justifier que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)-f(a)| \leq M|t-a|$. En déduire que $\displaystyle\int_a^b |f(t)-f(a)|\ \mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$

2. On note, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ et $J_k = \displaystyle\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t$

a. Écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en fonction des J_k avec $k = 0, 1, \cdots, n-1$

b. Vérifier que : $\displaystyle\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left[f(t)-f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]\ \mathrm{d}t$

On remarquera que $\displaystyle\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{b-a}{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$

c. En utilisant la question **1-b.**, déduire que $\displaystyle\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t)-f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|\ \mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^2}{2n^2}$

Puis en déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} R_n(f)$

3. Application

Soit la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $[a,b] = [0,1]$. Donner un majorant de M. Déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-1} près.

Partie B : **Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles pour une fonction croissante**

Soit f une fonction continue croissante sur $[a,b]$. Pour tout entier $n > 0$ et tout $k \in \{0,1,\cdots,n\}$, on pose $h_n = \dfrac{b-a}{n}$ et $x_k = a+kh_n$. On pose enfin $G_n = h_n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, $D_n = h_n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$ et $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

On utilisera certains résultats de la partie **A**/

1. Montrer que pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, on a : $h_n f(x_k) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq h_n f(x_{k+1})$

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

2. En déduire que $G_n \leq I \leq D_n$ (On pourra faire une sommation entre 0 et $n-1$ des inégalités de la question précédente)

3. Démontrer que $D_n - G_n = h_n[f(b)-f(a)]$

4. En déduire une majoration des erreurs $|D_n - I|$ et $|G_n - I|$

5. Que devienne ces résultats si on suppose f décroissante ?

6. Application

On pose $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Que vaut $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ \mathrm{d}t$? En utilisant la partie **B**/, déduire un encadrement de $\ln 2$ à 10^{-1} près.

Problème 8 : Valeur approchée d'une intégrale par la méthode du point Médian et des trapèzes

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle $[a,b]$. On note M le maximum de $|f''|$ sur $[a,b]$ et on pose $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Partie A : Méthode du point médian

On note $I_m = (b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

1. Soit $\varphi(x) = -2xf(c) + \displaystyle\int_{c-x}^{c+x} f(t)\ \mathrm{d}t$ où $c = \dfrac{a+b}{2}$

a. Justifier que φ est deux fois dérivable puis déterminer $\varphi''(x)$

b. Justifier que $|\varphi''(x)| \leq 2xM$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$. (On pourra utilisé l'inégalité des accroissements finis pour f' entre $c-x$ et $c+x$)

c. Que vaut $\varphi'(0)$ et $\varphi(0)$? Prouver que $|\varphi'(x)| \leq Mx^2$.
En déduire que $\left|\varphi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{24}$

d. Exprimer $I - I_m$ en fonction de $\varphi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$. En déduire que $|I - I_m| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{24}$

2. Pour $n \geq 1$, on pose $I_{m,n} = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ où $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

a. Montrer que $\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(t) - f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right]\ \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{24n^3}$

b. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - I_{m,n}\right| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}M$

c. Conclure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_{m,n}$

3. Application
Soit la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $[a,b] = [0,1]$. Donner un majorant de M. Déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-1} près avec la méthode du point Médian. Que peut-on dire de l'efficacité de la méthode du point médian par rapport à la méthode des rectangles ?

Partie B : Méthode des trapèzes

1. En utilisant une double intégration, montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2}f''(t)\ \mathrm{d}t = -(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{12}$

3. On fixe $n \geq 1$ et on pose $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On note I_k l'aire du trapèze (rectangle) dont les sommets sont $(a_k, 0)$; $(a_k, f(a_k))$; $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$ et $(a_{k+1}, 0)$ puis on note I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles

a. Exprimer les I_k en fonction de a_k, a_{k+1}, $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$. Exprimer I_n en fonction des I_k

b. Justifier que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right] + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k-t)(a_{k+1}-t)}{2}f''(t)\ \mathrm{d}t$

c. En déduire que $|I - I_n| \leq M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ puis que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_n$

CHAPITRE 6

SUITES NUMÉRIQUES

Nous allons rappeler ici les différents résultats sur les suites de nombres réels qui sont des suites arithmétiques ou des suites géométriques ou les suites récurrentes.

I. Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition • (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ • (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $\boldsymbol{(u_{n+1} - u_n)}$ **est constante**	**Définition** • (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ • Si (u_n) ne s'annule pas, la suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si la suite $\boldsymbol{\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)}$ **est constante**
Calcul de u_n en fonction n • Si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ • Pour tout entier naturel n et p, $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$	**Calcul de u_n en fonction n** • Si la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ • Pour tout entier naturel n et p, $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$ $(q \neq 0)$
Sommes de termes consécutifs • Si la suite (u_n) est arithmétique, $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}}$ • Si la suite (u_n) est arithmétique, n et $p \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$ $\boldsymbol{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \cdots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}}$ • **Expression littéraire de la somme**. $\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{\text{(1er terme + dernier terme)(nbre de terme)}}{2}$	**Sommes de termes consécutifs** • Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ $(q \neq 1)$ • Si la suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 1$, n et $p \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$ $\boldsymbol{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$ • **Expression littéraire de la somme**. $\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{(1er de terme)} \times \frac{1-q^{\text{(nbre de terme)}}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

II. Limite d'une suite

1. Quelques limites de référence et croissance comparée des suites (a^n), (n^α) et $\ln n$

1. Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ **2.** Si $q = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ **3.** Si $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

4. Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ **5.** Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$

6. Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$

2. Théorème des gendarmes

Théorème 1 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels. On suppose :
i. Qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ $u_n \leq v_n \leq w_n$.
ii. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l}$.

3. Limite d'une suite récurrente

Propriété :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On note (u_n) la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \in I$. Si on démontre que la suite (u_n) est convergente vers un nombre réel l de I alors l est la solution de l'équation $f(l) = l$

NB : Trouver la ou les solutions de l'équation $l = f(l)$ ne prouve pas que la suite (u_n) converge. La convergence de la suite (u_n) dépend aussi de son premier terme u_0

4. Convergence des suites monotones

3-1. Convergence de suites croissantes

Théorème 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
i. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang
ii. Et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée,
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En d'autre termes, toute **suite croissante et majorée converge**.

Remarque : Tout **suite croissante et non majorée diverge** et dans ce cas, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

3-2. Convergence de suites décroissantes

Théorème 3 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
i. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang
ii. Et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée,
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En d'autre termes, toute **suite décroissante et minorée converge**.

Remarque : Tout **suite décroissante et non minorée diverge** et dans ce cas, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Exercices

Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)+3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+(-1)^{n+1}}{7n+(-1)^n}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$

2. On considère la somme : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2$. Montrer par récurrence que $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On considère la somme : $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+\cdots+n^3$. Montrer que $R_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n\geq 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)>0$. Que peut-on dire de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$?

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n\geq 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

4. En déduire que pour tout $n\geq 2$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

5. Moyennant les questions précédentes, calculer la limite de $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

Exercice 3

On considère deux réels a et b tels que $0<a<b$, et les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0=b \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

(rappel : u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n)

Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont strictement positifs.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\leq v_n$.

3. Montrer que, pour tous réels x et y tels que $0<x<y$, on a : $\dfrac{y-x}{2(x+y)}<\dfrac{1}{2}$.

En déduire que $v_{n+1}-u_{n+1}<\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n>0$, on a : $v_n-u_n<\dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.

5. En déduire la limite de v_n-u_n.

6. Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.

7. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_nv_n est constant. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

8. Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ par deux rationnels au cent millième près.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions définies sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=2-x+\ln(2x-3)$ et $g(x)=2+\ln(2x-3)$

1. Étudier f puis dresser son tableau de variation. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $I=[3,4]$

2- **a.** Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$. Montrer que $\forall x\in I$, $g(x)\in I$

b. Montrer que $\forall x\in I$, $|g'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$.

c. En déduire que $\forall x \in I : |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$

3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3, 4]$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c. Étudier la convergence de la suite (U_n) puis donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 5

On considère, pour tout entier naturel n non nul les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.

3. Trouver le plus petit entier n_0 tel que, si $n \geq n_0$, $v_n < \frac{3}{4}$.

4. En déduire que si $n \geq n_0$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$

5. On pose pour tout entier $n \geq 5$, $S_n = \sum\limits_{k=5}^{n} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_5$.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$: $S_n \leq \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c. En déduire que, pour tout entier $n \geq 5$: $S_n \leq 4u_5$.

6. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Exercice 6

Soit f la fonction définies par : $f(x) = \ln(x+2)$; (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur sur les axes étant égale à $2cm$. On appelle (D) la droite d'équation $y = x$ dans le repère précédent ; (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$; (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$

1. Démontrer que (C_f) coupe (D) en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses x_1 et x_2 vérifient : $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$.

2. On note α et β deux réels tels que $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Démontrer $x_1 < f(\alpha) < x_2 < f(\beta)$

3- **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante

c. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante

3. On note I l'intervalle $[1, 2]$

a. Démontrer que, pour tout x de I, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

4- **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{3^n}$

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

Partie A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la **partie B** est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n)

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1- **a.** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$

b. Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 : Étude de deux suites d'intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$

a. Calculer I_0 et I_1

b. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

c. En utilisant une intégration par parties sur I_n, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n + \dfrac{1}{n2^{n+1}}$

d. Calculer alors I_3.

2. On considère la suite (J_n) définie pour tout entier naturel n non nul par, $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$

a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $f : t \mapsto (at+b)\,\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)\,\mathrm{e}^t$ sur $[0,1]$. En déduire la valeur de J_1.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$

c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $J_n \geq 0$

d. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-t)^n\,\mathrm{e}^t \leq \mathrm{e} \times (1-t)^n$

e. En déduire que pour tout n non nul, $J_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n)

CHAPITRE 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Notions d'équations différentielle

Soit l'équation (E) suivante : $y' = 4y + 7$

Résoudre cette équation sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ c'est chercher toutes les fonctions f dérivables sur I et vérifiant pour tout x de I : $f'(x) = 4f(x) + 7$.
Une telle équation, liant une fonction et sa ou ses dérivées est appelée équation différentielle.

Définition 1
Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle x ou t, une fonction qui dépend de cette variable f et un certain nombre de ses dérivées successives f', f'', $\cdots$
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont cette relation.

Remarque
L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation. Par exemple l'équation : $y' + 2y = -3$ est de premier ordre et $y'' - 2y' + y = 7$ est de second ordre.

II. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 2
Une équation différentielle de premier ordre est une équation de type :

$$\boldsymbol{y' + ay = b}$$

Avec a et b dans $\mathbb{R}$

Remarque
Plutôt que d'écrire l'équation : $f'(x) + af(x) = b$, on note $f(x)$ à l'aide de la variable y, qui joue le rôle d'inconnue, ou plutôt de « fonction inconnue ». Ceci car un point $(x; y)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $y = f(x)$. y étant la variable utilisée pour les ordonnées et les images, il est cohérent de l'utiliser pour symboliser une fonction.

1. Résolution des équations de types : $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$

Théorème 1 :
Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $\boldsymbol{y' = ay}$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = C\,e^{ax}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Remarque
– L'équation $y' = ay$ n'admet pas une seule solution. Dans le théorème, le fait que les solutions sont sous forme de $\boldsymbol{f(x) = C\,e^{ax}}$, $C \in \mathbb{R}$ montre qu'on a une infinité de fonctions, solutions de cette équation. Par contre si on précise la condition initiale, alors la solution est unique.

– Si f_0 est une solution quelconque de l'équation différentielle $y' = ay$ alors toutes les autres solutions de cette même équation différentielle peuvent s'écrire sous la forme de $f(x) = Kf_0(x)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Démonstration

• Soit une fonction f sous la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$ $C \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = C.a.\,\mathrm{e}^{ax} \Rightarrow f'(x) = af(x)$.

• Réciproquement supposons f solution de l'équation $y' = ay$ et supposons $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
Alors $g'(x) = -af(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = (-af(x) + f'(x))\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$. Puisque la dérivée de g est nulle sur $\mathbb{R}$ alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $C = g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \Rightarrow f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$.

En conclusion : f est solution de l'équation si et seulement si elle s'écrit sous forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$

Exemple

Résolvons les équations différentielles du premier ordre sans second membre suivants :

1. $(E_1) : y' = 3y$ **2.** $(E_2) : 5y' + 4y = 0$ **3.** $(E_3) : \begin{cases} 6y' - y = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

Solution :

En utilisant le théorème précédent on a directement les résultats :
(Il faut toujours ramener sous la forme de : $y' = ay$)

1. Les fonctions solutions de (E_1) sont sous forme $f(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x}$.

2. Les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme : $f(x) = C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}x}$

3. Les solutions de l'équation différentielle $6y' - y = 0$ sont sous la forme $f(x) = C_3 \exp\left(\frac{1}{6}x\right)$.
De plus : $f(0) = -1$ alors : $C_3 = -1$.
Ainsi la solution de (E_3) est alors la fonction $f(x) = -\exp\left(\frac{1}{6}x\right)$.

2. Résolution des équations différentielles du premier ordre avec second membre constant

Théorème 2 :

Soient a et b deux nombres réels, avec a non nul :
Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E') : $\boldsymbol{y' + ay = b}$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}} \qquad K \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

Notons $h(x) = \dfrac{b}{a}$. h est bien solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$.
Supposons f une solution quelconque de (E'). Alors on :

$$\begin{cases} f'(x) + af(x) = b \\ h'(x) + ah(x) = b \end{cases} \Rightarrow f'(x) + af(x) = h'(x) + ah(x) \Rightarrow (f(x) - h(x))' + a\,(f(x) - h(x)) = 0.$$

Alors la fonction $g(x) = f(x) - h(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$. Ainsi on conclut que g est une fonction de la forme : $x \mapsto K\,\mathrm{e}^{-ax}$, $K \in \mathbb{R}$.

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont des fonctions de la forme :
$f(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$.

Exemple :

Trouvons les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y' + y = -2$ **2.** $(E_2) : 3y' - 4y + 5 = 0$ **3.** $(E_3) : \begin{cases} 6y' - 5 = y \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Solution

En se ramenant à la forme standard du théorème précédent, on a facilement :

1. Les solutions de (E_1) est l'ensemble de fonctions de la forme : $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} - 2$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Les fonctions solutions de (E_2) sont sous forme $f(x) = K \exp\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{5}{4}$.

3. Les solutions générales de $6y' - 5 = y$ sont sous la forme : $f(x) = A \exp\left(\frac{1}{6}x\right) - 5$.

Puisque $f(0) = 0$ alors on déduit que $A = 5$.

D'où la solution de (E_3) est la fonction $f(x) = 5 \exp\left(\frac{1}{6}x\right) - 5$.

3. Résolution des équations différentielles du premier ordre avec second membre variable

Intéressons nous maintenant à la résolution des équations différentielles du type : $\boldsymbol{y' + ay = g(x)}$ avec $g(x)$ une fonction dépendant de x. Ici le second membre n'est plus constant mais variable.

Essayons de résoudre cette équation différentielle $(E) : y' + ay = g(x)$
Soit f une fonction solution de (E) Alors :
$f'(x) + af(x) = g(x) \Rightarrow f'(x)\,\mathrm{e}^{ax} + af(x)\,\mathrm{e}^{ax} = g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$. Or $f'(x)\,\mathrm{e}^{ax} + af(x)\,\mathrm{e}^{ax} = (f(x)\,\mathrm{e}^{ax})'$.
Ainsi f solution de $(E) \Leftrightarrow (f(x)\,\mathrm{e}^{ax})' = g(x)\,\mathrm{e}^{ax} \Leftrightarrow f(x)\,\mathrm{e}^{ax} = C + H(x)$ (par intégration). Avec $H(x)$ une primitive de la fonction : $x \mapsto g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.
On conclut donc que : f solution de $(E) \Leftrightarrow f$ est une fonction sous la forme de : $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + H(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation différentielle : $y' + ay = g(x)$ sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-ax} + H(x)\,\mathrm{e}^{-ax}}$$

Avec $C \in \mathbb{R}$ et $H(x)$ une primitive de la fonction : $x \mapsto g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.

Remarque

– $H(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ et non de $g(x)$.
– L'équation différentielle $y' + ay = g(x)$ est la forme plus générale des équations différentielles $y' + ay = 0$ et $y' + ay = b$ (en prenant respectivement $g(x) = 0$ et $g(x) = b$)

Dans certaines situations, il est facile de trouver une solution particulière de l'équation différentielle. Dans ce cas il sera très maladroit de refaire tout le travail précédent avant de trouver la forme générale des solutions. Le théorème suivant traite ce cas.

Théorème 4 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g(x)$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les solutions de $(E) : y' + ay = g(x)$ sur I sont les fonctions de la forme $Cf_0 + f_1$ où f_0 est une solution non nulle quelconque sur I de l'équation homogène (E_h) associée $y' + ay = 0$, f_1 est une solution particulière de (E) sur I et $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration

D'après le théorème 3, l'équation (E) admet au moins une solution sur I.
Soit f_1 une solution particulière de (E) sur I. Alors $f_1'(x) + af_1(x) = g(x)$.
Notons f_0 une solution non nulle de (E_h) sur I et soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow f'(x) + af(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) + af(x) = f_1'(x) + af_1(x) \\ &\Leftrightarrow (f - f_1)'(x) + a\,(f - f_1)(x) = 0. \\ &\Leftrightarrow f(x) - f_1(x) \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_h). \\ &\Leftrightarrow f(x) - f_1(x) = Cf_0 \text{ (d'après la remarque du théorème 1).} \\ &\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = f_1(x) + Cf_0(x). \end{aligned}$$

Exercice 1

Le but de cet exercice et de résoudre l'équation différentielle : $(E) : 7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(E_h) : 7y' + 2y = 0$.

2. Trouver la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(E_0) : 7y' + 2y = -1$.

3. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer a, b, c et d pour que $P(x)$ soit solution de (E).

4. En déduire alors la forme générale des solutions de (E).

Solution

1. La solution générale de (E_h) est de la forme : $f(x) = C\exp(-\frac{2}{7}x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Les solutions de (E_0) sont des fonctions de la forme : $x \mapsto A\exp(-\frac{2}{7}x) - \dfrac{1}{2}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

3. P solution de $(E) \Leftrightarrow 7P'(x) + 2P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

$\Leftrightarrow 7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

$\Leftrightarrow 2ax^3 + (21a + 2b)x^2 + (14b + 2c)x + (7c + 2d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

Par identification on a alors : $\begin{cases} 2a = 2 \\ 21a + 2b = -5 \\ 14b + 2c = 4 \\ 7c + 2d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 93 \\ d = -326 \end{cases} \Leftrightarrow P(x) = x^3 - 13x^2 + 93x - 326.$

4. D'après le **1.** et le **3.**, on conclut :

Les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + C\exp(-\frac{2}{7}x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

4. Problème de Cauchy

Théorème 5 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g(x)$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction f solution de $(E) : y' + ay = g(x)$ sur I et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$

Démonstration

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de (E) sont : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-ax} + H(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$ avec $H(x)$ une primitive de $x \mapsto g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ et $C \in \mathbb{R}$.
f est une solution de (E) et $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C\,\mathrm{e}^{-ax_0} + H(x_0)\,\mathrm{e}^{-ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0\,\mathrm{e}^{ax_0} - H(x_0)$.
Ceci montre l'existence et l'unicité d'une solution prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemple :

Soit l'équation différentielle suivante $(E) : 2y' - 4y - 3 = 0$

La solution générale de l'équation différentielle (E) : est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{4}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Cependant il existe une et une seule fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$ à savoir $f(x) = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{4}$.

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du type $(E) : y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont trois constantes réelles ($a \neq 0$). Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants .

1. Résolution des équations de types : $y'' + ay' + by = 0$ avec a et $b \in \mathbb{R}$

1-1. Introduction de l'équation caractéristique

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, c'est-à-dire on veut trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout réel x, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$.
Découvrons le résultat. Par analogie avec le premier ordre, cherchons des solutions f de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \Rightarrow (r^2 + ar + b)\,\mathrm{e}^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + ar + b = 0$$

Ainsi la résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, d'inconnue une fonction f, se « transforme » en une équation algébrique ($r^2 + ar + b = 0$) d'inconnue r.

Définition 3
Soient a et b deux nombres réels. Soit (E_h) l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$.
L'équation caractéristique de l'équation (E_h) est l'équation : $\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$.

1-2. Technique de résolution

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre (E_h) suivante : $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$.
L'équation caractéristique de (E_h) est alors : $\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$.
Résoudre (E_h) revient à trouver les solutions de l'équation caractéristique.
Posons alors $\Delta = a^2 - 4b$ (le discriminant). Pour rappel :
• Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique une solution réelle double r_0.
• Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes qu'on note r_1' et r_2'.
Il est à noter aussi que r_1' est le conjugué de r_2'. Posons $r_1' = \overline{r_2'} = \alpha + i\beta$

On admet les résultats du théorème suivants :

Théorème 6 : Soit l'équation différentielle (E_h) : $y'' + ay' + by = 0$ d'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.
- Si $\Delta = a^2 - 4b > 0$ alors les solutions de (E_h) sont les fonctions : $\boldsymbol{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x}}$
- Si $\Delta = a^2 - 4b = 0$ alors les solutions de (E_h) sont les fonctions : $\boldsymbol{x \longmapsto \mathrm{e}^{r_0 x}(\lambda x + \mu)}$.
- Si $\Delta = a^2 - 4b < 0$ alors les solutions de (E_h) sont les fonctions : $\boldsymbol{x \longmapsto (K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))\,\mathrm{e}^{\alpha x}}$

Le tableau ci-dessous résume le théorème précédent :

cas	Les solutions de l'équation caractéristiques	Formes des solutions de l'équation différentielle (E_h)
$\Delta = a^2 - 4b > 0$	$r_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ $r_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$	$x \mapsto A\exp(r_1 x) + B\exp(r_2 x)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$
$\Delta = a^2 - 4b = 0$	$r_0 = -\dfrac{a}{2}$	$x \mapsto \exp(r_0 x)(\lambda x + \mu)$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = a^2 - 4b < 0$	$r_1' = \dfrac{-a + i\sqrt{\Delta}}{2} = \alpha + i\beta$ $r_2' = \dfrac{-a - i\sqrt{\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$	$x \mapsto [K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)]\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :
1. $(E_1) : y'' - 2y' + 2y = 0$ **2.** $(E_2) : y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. $(E_3) : y'' - 7y' + 12y = 0$ **4.** $(E_4) : y'' - 4y = 0$ et $(E_5) : y'' + 4y = 0$.

Solution

1. L'équation caractéristique de (E_1) est $r^2 - 2r + 2$ dont les racines sont $1 - i$ et $1 + i$.
D'où les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \mathrm{e}^x (\mu \cos(x) + \lambda \sin(x))$ avec μ et $\lambda \in \mathbb{R}$
2. L'équation caractéristique de (E_2) est $r^2 + 6r + 9 = 0$ qui admet la racine double $r = -3$. Alors :
Les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-3x}$ avec μ et $\lambda \in \mathbb{R}$
3. L'équation Caractéristique de (E_3) est : $r^2 - 7r + 12$ qui admet $r_1 = 3$ et $r_2 = 4$ comme racines.
Donc les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions : $x \mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{4x} + \beta\,\mathrm{e}^{3x}$ avec α et $\beta \in \mathbb{R}$
4. − L'équation caractéristique de (E_4) est : $r^2 - 4 = 0$ dont les racines sont : $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$.
Les fonctions solutions de (E_4) sont de la forme : $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$
− L'équation caractéristique de (E_5) est : $r^2 + 4 = 0$ dont les racines sont : $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
Les fonctions solutions de (E_5) sont de la forme : $x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

2. Résolution des équations de types : $y'' + ay' + by = g(x)$ avec a et $b \in \mathbb{R}$ et g continue

Théorème 7 : Soient a et $b \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = g(x)$.
La solution générale de l'équation (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée $y'' + ay' + by = 0$ (E_h).

Démonstration

Soit f_0 une solution de (E). Alors $f_0''(x) + af_0'(x) + bf_0(x) = g(x)$.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I :
f solution de (E) sur $I \Leftrightarrow f''(x) + af'(x) + bf(x) = g(x) \Leftrightarrow f''(x) + af'(x) + bf(x) = f_0''(x) + af_0'(x) + bf_0(x)$
$\Leftrightarrow (f'' - f_0'')(x) + a(f' - f_0')(x) + b(f - f_0)(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(x) - f_0(x)$ solution de (E_h) sur I
$\Leftrightarrow \exists\, f_1$ solution de (E_h) sur I telle que $f(x) - f_0(x) = f_1(x)$.
$\Leftrightarrow \exists\, f_1$ solution de (E_h) sur I telle que $f(x) = f_1(x) + f_0(x)$.

Une solution quelconque de (E) sur I est donc la somme d'une solution particulière de (E) sur I et d'une solution quelconque de (E_h) sur I.

Remarque

La fonction $g(x) : x \mapsto b$ avec $b \in \mathbb{R}$ est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donc la résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = b$ avec $b \in \mathbb{R}$ reste le même que celle décrit dans le théorème 7.

Exercice 3 :

Le but est de résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 2y' + y = x$.
1. Trouver l'ensemble de solution de $(E_h) : y'' - 2y' + y = 0$.
2. On pose $R(x) = ax + b$. Déterminer a et b de sorte que $R(x)$ soit une solution de (E).
3. En déduire alors l'ensemble de solutions de (E).

Solution

1. L'équation caractéristique de (E_h) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont $r_0 = 1$ est la racine double.
Par suite les solutions de (E_h) sont sous la forme de : $x \mapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^x$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}$

2. $R(x)$ est solution de $(E) \Leftrightarrow -2a + ax + b = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ D'où $R(x) = x + 2$

3. En utilisant le théorème 7 et les questions **1.** et **2.**, on conclut que :
Les solutions de (E) sont des fonctions de la formes : $x \mapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{x} + (x + 2)$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Théorème de Cauchy

On admet le théorème suivant (dont la démonstration est hors programme et dépasse de toute façon le niveau de maths terminale) :

Théorème 8 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et g une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout $x_0 \in I$ et $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = g(x)$ sur I et une seule vérifiant : $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = z_0 \end{cases}$

Remarque

Ce théorème concerne aussi les cas $y'' + ay' + by = 0$ et $y'' + ay + by = c$ car ce sont les cas particuliers de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = g(x)$ avec $g(x)$ continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble solution du problème de Cauchy (E_1) suivant : $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$

2. Résoudre l'équation (E_h) : $y'' - 4y' + 3y = 0$

3. Déterminer les constantes a et b pour que la fonction $h(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$ soit solution de (E).

4. Déduire alors l'ensemble des solutions de (E).

5. On note f_0 l'unique solution de (E) vérifiant : $\begin{cases} f_0(0) = 0 \\ f_0'(0) = 0 \end{cases}$ Préciser f_0.

Solution

1. L'équation caractéristique de $y'' + 9y =$ est $r^2 + 9 = 0$ dont les racines sont $3i$ et $-3i$.
Par suite les solutions de l'équation $y'' + 9y = 0$ sont de la forme : $x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$ Par suite La fonction $x \mapsto -\sin(3x)$ est la seule solution de E_1

2. L'équation caractéristique de (E_h) est : $r^2 - 4r + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3.
D'où les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{3x}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.

3. Soit $h(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$ alors on a : $\begin{cases} h'(x) = (-ax + (a - b))\,\mathrm{e}^{-x} \\ h''(x) = (ax + (b - 2a))\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

$h(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{5}{16} \end{cases}$ D'où $h(x) = \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{16}\right)\mathrm{e}^{-x}$

4. De **2.** et **3.**, on conclut que les solutions de (E) sont des fonctions de la forme : $x \mapsto \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{16}\right)\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{3x}$
Avec A et $B \in \mathbb{R}$.

5. f_0 solution de (E) avec $\begin{cases} f_0(0) = 0 \\ f_0'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{3}{16} \end{cases}$ Ainsi $f_0(x) = \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{16}\right)\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{3}{16}\,\mathrm{e}^{3x}$.

Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations différentielle suivantes :

1- **a.** $(E_1) : 7y' + y - 2 = 0$

b. $(E_2) : y' + y = 0.$

c. $(E_3) : 3y' = -y + x\,\mathrm{e}^{-x}$

2- **a.** $(E_1) : y'' + 2y' = 0.$

b. $(E_2) : 4y' = y'' + 4y.$

c. $(E_3) : y'' = 3y' - 2y.$

d. $(E_4) : \dfrac{1}{2}y'' + y' = -2y.$

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{x}$ soit solution de (E).

2. Montrer que v est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$.

3. Déterminer les solutions de (E'). En déduire toutes les solutions de (E_1).

4. Trouver la solution f de (E_1) vérifiant $f(0) = 1$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donner le résultat sous la forme $a + \ln(b)$ où a et b sont des entiers.

6. On considère cette fois-ci $(E_2) : y' - 2y = \cos(x) + \sin(x)$.

a. Montrer que la fonction $h(x) = -\dfrac{3}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$ est solution de (E_2).

b. En déduire alors toutes les solutions de (E_2).

c. Trouver la solution g de (E_2) vérifiant $g(0) = \dfrac{2}{5}$.

7. Montrer que pour tout qu'il existe un unique $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

8. En déduire pour tout $x \geq x_0$, $g(x) - f(x) \geq 0$.

Exercice 3 :

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2\sin(\theta)y' + y = x\cos(\theta) + 2\sin(\theta)$

1- **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(e_0) : z^2 + 2\sin(\theta)z + 1 = 0$.

b. Déterminer le module et un argument de chacune des racines (e_0)

2. Donner toutes les solutions de l'équation $(E_h) : y'' + 2\sin(\theta)y' + y = 0$.

3. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f_0(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

4. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f(x) - f_0(x)$ est solution (E_h).

5. Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = u(x)$ avec u une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Notons (E_h) l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

1. On suppose a, b et c dans $\mathbb{R}$. On suppose que (E) admet au moins une solution f_0 sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_h).

2. Applications :

a. On considère l'équation $(E_1) : y' + y = x\,\mathrm{e}^{-x}$ (cas où $a = 0$).

i. Montrer que $v(x) = \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E_1).

ii. En déduire alors toutes les solutions de (E_1).

b. Soit l'équation (E_2) : $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$ (cas où $a \neq 0$).

i. Déterminer les réels a et b pour que $f_0(x) = (ax^2 + bx - 1/2)\,\mathrm{e}^x$ soit une solution de (E_2).

ii. Déterminer toutes les solutions de (E_h) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

iii. En déduire alors toutes les solutions de (E_2).

Problèmes

Problème 1

1. On considère les équations suivantes : (E) : $y'' - 4y' + 4y = 2\cos(x) + \sin(x)$; (E_0) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

a. Déterminer a et b pour lesquels la fonction g définie par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est solution de (E).

b. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0).

c. Résoudre (E_0) et en déduire la forme générale des solutions de (E).

2. Soit la fonction h définie dans $[0;\pi]$ par $h(x) = \dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Calculer pour tout x de $[0;\pi[$, $h'(x)$ et $h''(x)$.

b. Étudier les variations de h' sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ et en déduire que l'équation $h'(x) = 0$ admet dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ une unique solution α avec $2.6 < \alpha < 2.7$.

c. Montrer que $h'(x) > 0$ si et seulement si $x \in]\alpha;\pi[$ et dresser le tableau de variation de h.

d. Tracer (C). (On prendra $\alpha = 2.6$)

Problème 2

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y = 4x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_h) : $y'' - 2y = 0$.

2- **a.** Déterminer les réels a et b pour que $f_0(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{x^2}$ soit une solution de (E).

b. Soit f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_h).

3. En déduire de ce qui précède la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Partie B

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x|x|}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique à cette limite.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation graphique.

3- **a.** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{f(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)-1}{x}$

b. En déduire une interprétation graphique à ces résultats.

c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Soit g la fonction définie sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - \left(x\sqrt{2}+2\right)\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Justifier que : $\forall\, x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$, $g''(x) = 2(2x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

b. Étudier les variations de g'.

c. Démontrer que : $\forall\ x \in \left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right[$, $g'(x) \leq 0$.

d. En déduire le sens de variations de g sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

e. Démontrer que $\forall\ x \in \left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $g(x) \leq 0$ et $\forall\ x \in \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right[$, $g(x) \geq 0$. En déduire les positions relatives de (T) par rapport à (C).

6. Tracer (C) et (T).

Problème 3

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) définie par : $\dfrac{1}{2}y' + y = 3\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$

1. Déterminer le réel a, tel que la fonction v définie par $v(x) = ax\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$ soit une solution de l'équation (E)

2. Donner les solutions de l'équation (E') : $\dfrac{1}{2}y' + y = 0$

3- **a.** Montrer que u est une solution de (E) si et seulement si $v - u$ est une solution de (E').

b. En déduire les solutions de (E).

Partie B

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} 2(3x-1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x \ln x}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On note par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique : $4cm$

I) Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$

1- **a.** Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

b. Déterminer le sens de variations de g.

c. Dresser le tableau de variations de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$. Montrer que α appartient à l'intervalle $]0.2; 0.3[$

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

II) Étude et représentation graphique de f

1. Étudier la continuité de f en 0

2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique.

3. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.

5. Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$

6. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox)

7. Dresser le tableau de variations de f. Construire (C_f)

Partie C

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations : $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe (C_f).

1. On pose $F(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Déterminer a et b pour que $F'(x) = (3x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$

2. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2

3. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. On donne : $\ln 2 = 0.7$; $\ln 3 = 1.10$; $\ln 5 = 1.61$

CHAPITRE 8

COURBES PARAMÉTRÉES

I. Notion d'une courbe paramétrée

Définition : Une courbe paramétrée est une courbe dont l'abscisse et l'ordonnée sont toutes les deux des fonctions d'un paramètre t, c'est-à-dire il s'agit d'une courbe dont l'équation est de la forme $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ où t est la variable.

Remarque
Physiquement, cela s'interprète comme la trajectoire d'un point en fonction du temps : à tout temps t correspond une position (f(t), g(t)).

II. Étude des courbes paramétrées

1. Domaine de définition de la courbe

Le domaine de définition D d'une courbe paramétrée est l'ensemble des points où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies. Alors $D = D_f \cap D_g$ où D_f et D_g sont respectivement les domaines de définition de f et g.

2. Réduction du domaine de définition

On peut réduire le domaine d'étude (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités... Nous allons à travers cet exemple réduire le domaine d'étude :

Exemple :
On considère $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

– Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont clairement définies $\mathbb{R}$.
– Les fonctions $x \mapsto \sin^3(t)$ et $x \mapsto \cos^3(t)$ sont 2π-périodique, on peut donc limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
– Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $-t \in [-\pi, \pi]$ et $\sin^3(-t) = -\sin^3(t)$, $\cos^3(-t) = \cos(t)$. On peut encore restreindre le domaine d'étude sur $[0, \pi]$.
– Par ailleurs, pour $t \in [0, \pi]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Ce qui entraine que $f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc restreindre l'étude $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
– Enfin, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$. Ce qui entraine que $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ est symétrique de $f(t)$ par rapport à la première bissectrice. On peut donc encore limiter à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis compléter par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Au final au lieu de faire l'étude sur $\mathbb{R}$, on peut l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.On trace son support sur cet intervalle puis on complète par symétrie par rapport aux axes des ordonnées et des abscisses ainsi que par rapport à la première

bissectrice.

Pour rappel, on résume les cas possibles qui reviennent le plus souvent dans le tableau suivant :

	Traduction Mathématiques	**Domaine d'étude**	**Exemple**
x(t) et y(t) sont périodiques de période T	$\forall\, t \in D,\, t-T \in D, t-T \in D$ et $x(t+T)=x(t-T)=x(t)$, $y(t+T)=y(t-T)=y(t)$	Intersection de D avec un intervalle de longueur T	Soit $\begin{cases} x(t)=\sin(2t) \\ y(t)=\cos(3t) \end{cases}$ D=$\mathbb{R}$ $\sin(2t)$ et $\cos(3t)$ sont 2π-périodique. On peut faire l'étude sur [-π,π]
x(t) et y(t) sont impaires ou x(t) et y(t) sont paires	$\forall\, t \in D$, $-t \in D$ et $x(-t)=-x(t)$, $y(-t)=-y(t)$ ou $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=y(t)$	$D \cap \mathbb{R}_+$	Soit $\begin{cases} x(t)=\cos(2t) \\ y(t)=\cos(3t) \end{cases}$ D=$\mathbb{R}$ $\cos(2t)$ et $\cos(3t)$ sont paires . On peut faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$
x(t) paire et y(t) impaire ou x(t) impaire et y(t) paire	$\forall\, t \in D$, $-t \in D$ et $x(-t)=x(t)$, $y(-t)=-y(t)$ ou $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=y(t)$	$D \cap \mathbb{R}_+$	Soit $\begin{cases} x(t)=\sin(2t) \\ y(t)=\cos(3t) \end{cases}$ D=$\mathbb{R}$ $\sin(2t)$ est impaire et $\cos(3t)$ est paire . On peut faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$

3. Étude des branches infinies

Les cas suivants sont possibles :

a. $\lim\limits_{x\to t_0} x(t)=l, l\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to t_0} y(t)=\pm\infty$: La courbe (C) admet la droite Δ d'équation $x=l$ comme asymptote verticale.

b. $\lim\limits_{x\to t_0} x(t)=\pm\infty$, et $\lim\limits_{x\to t_0} y(t)=l$, $l\in\mathbb{R}$: La courbe (C) admet la droite Δ d'équation $y=l$ comme asymptote verticale.

c. $\lim\limits_{x\to t_0} x(t)=\pm\infty$, et $\lim\limits_{x\to t_0} y(t)=\pm\infty$: On étudie $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$:

i. Si $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}=\pm\infty$: alors (C) admet une branche parabolique dans la direction $(0y)$.

ii. Si $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}=0$: alors (C) admet une branche parabolique dans la direction $(0x)$.

iii. Si $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}=a\neq 0$: on étudie la fonction $y(t)-ax(t)$:

- Si $\lim\limits_{x\to t_0}(y(t)-ax(t))=b$, $b\in\mathbb{R}$: alors C admet la droite Δ d'équation $y=ax+b$ comme asymptote, et la position de (C) par rapport à Δ dépend du signe de $y(t)-ax(t)-b$.
- Si $\lim\limits_{x\to t_0}(y(t)-ax(t))=\pm\infty$, alors C admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y=ax$.
- Si $y(t)-ax(t)$ n'a pas de limite, on ne peut pas conclure.

iv. Si $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ n'admet pas de limite, on ne peut conclure sur la nature de l'arc infini.

4. Dérivées et points particuliers

La dérivation et le sens des variations se font comme dans le cas de fonctions ordinaires rencontrées.

Points particuliers :
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet une tangente horizontale en $(x(t_0), y(t_0))$.
- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la courbe admet une tangente verticale en $(x(t_0), y(t_0))$.
- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet un un point singulier en $(x(t_0), y(t_0))$.

5. Tableau des variations

L'étude de $x'(t)$ et $y'(t)$ permet de connaître les variations de $x(t)$ et $y(t)$. Reporter les résultats obtenus des variations conjointes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

t	
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

6. Construction méticuleuse de la courbe

On place dans l'ordre les deux axes et les unités. On construit ensuite toutes les droites asymptotes. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote,. . .). Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer l'arc grâce aux règles suivantes :
Tracé de la courbe paramétrée $(x(t), y(t))$
- Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
- Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
- Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
- Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

7. Étude de deux exemples congrès

Exemple 1 :
Courbes de Lissajous.

Étude et construction de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$

♦ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(2t)$ et $\sin(3t)$ sont bien définis. Ainsi le domaine de définition $D = \mathbb{R}$
♦ Pour tout réel t, $\sin(2(t + 2\pi) = \sin(2t)$ et $\sin(3(t + 2\pi) = \sin(3t)$. Ainsi $x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodique. On peut réduire alors le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.

♦ Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $-t$ est aussi dans $[-\pi, \pi]$, $\begin{cases} x(-t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) \\ y(-t) = \sin(-3t) = -\sin(3t) \end{cases}$ On peut encore restreindre le domaine d'étude sur $[0, \pi]$. puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

♦ De plus pour $t \in [0, \pi]$ $\begin{cases} x(-t) = \sin(2(\pi - t)) = -\sin(2t) \\ y(-t) = \sin(3(\pi - t)) = \sin(3t) \end{cases}$ On étudie et on construit la courbe pour t $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis symétrie centrale de centre O.

Variations conjointes de x(t) et y(t) :

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions $x \mapsto \sin(2t)$ et $x \mapsto \sin(3t)$ sont dérivables et on a : $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = 3\cos(3t) \end{cases}$

Par suite :

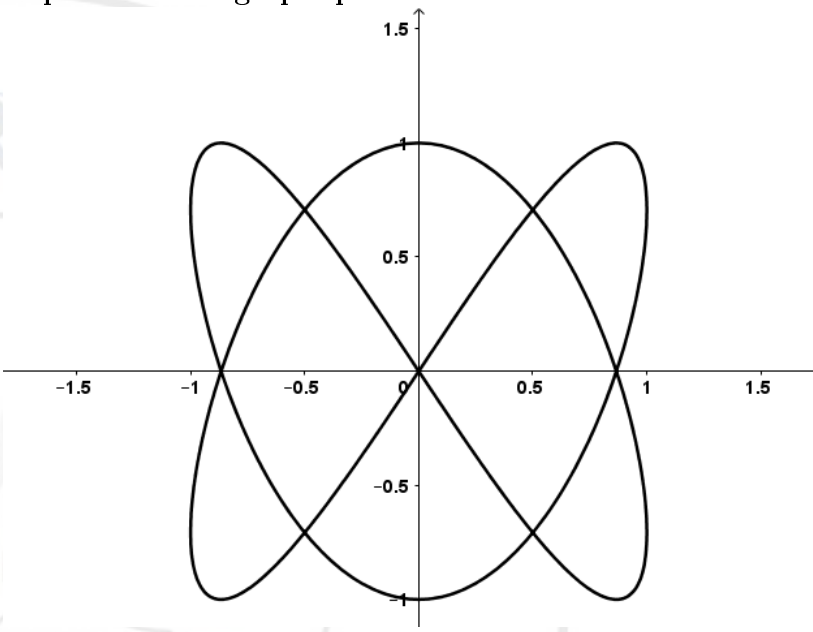
– Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\cos(3t) \geq 0$ donc $y(t)$ est croissante et pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(3t) \leq 0$ d'où $y(t)$ est décroissante.

– Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(2t) \geq 0$ donc $x(t)$ est croissante et pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2t) \leq 0$ d'où $x(t)$ est décroissante.

Tableau des variations

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	

Représentation graphique



Exemple 2 :

Étude et construction de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

• On peut déduire directement que le domaine de définition est $\mathbb{R}$

• Les fonctions $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$ et $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$ sont toutes impaires, alors on peut réduire le domaine d'étude à $[0, +\infty[$.

• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, un calcul simple donne : $\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t) \\ y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t) \end{cases}$ Ainsi les points $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $M(t)$ sont donc images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère. On peut donc étudier la courbe simplement sur l'intervalle [0,1].

Variations conjointes de x(t) et y(t) :

Pour tout $t \in [0, 1]$, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables et on a : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} \end{cases}$

Par suite on a :

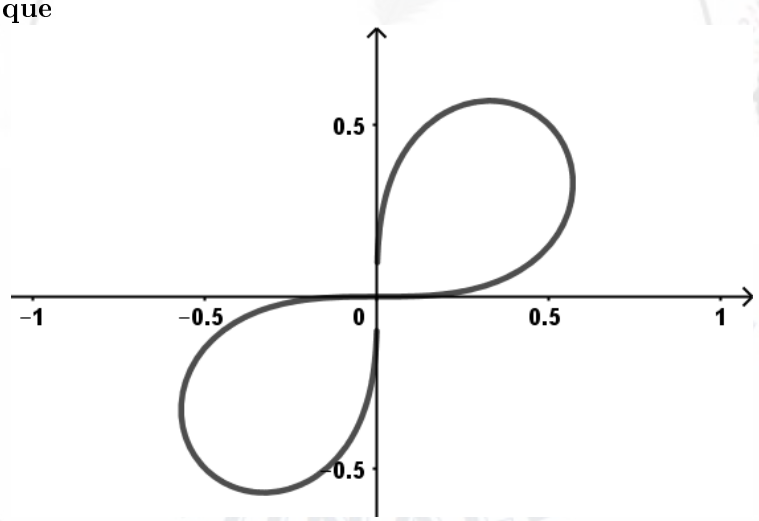
– Pour $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, $x'(t) \geq 0$ donc $x(t)$ croissante et pour $t \in \left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1\right]$, $x'(t) \leq 0$ donc $x(t)$ décroissante.

– Pour $t \in [0,1]$, $y'(t) \geq 0$. Par suite, $y(t)$ est croissante sur $[0,1]$.

Tableau de Variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↗	0.57	↘	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	0	↗	0.32	↗	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$		$+$		$+$	

Représentation graphique



Problèmes

Problème 1

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. M(t) est un point mobile de coordonnées $x(t)$; $y(t)$ par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

(C) est la courbe décrite par la trajectoire de $M(t)$.

1- **a.** Montrer que les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont périodiques de période T que l'on précisera.

b. Que peut-on dire des positions des points $M(t)$ et $M(t+T)$?

c. Calculer Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et en déduire les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$.

d. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$

2. Soit la courbe (C') définie par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$; $(t \in [0, \pi])$

a. Comment obtient-on (C) à partir de (C') ?

b. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variations des fonctions x et y.

c. Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est verticale.

d. Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale.

3. Tracer la courbe (C).
On donne : $\sqrt{3} = 1.7$

Problème 2

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère M(t) un point mobile de coordonnées $x(t)$; $y(t)$ tels que : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

Soit (C) la trajectoire décrite par $M(t)$.

1- **a.** Démontrer que $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période T que l'on déterminera.

b. Montrer que $M(\pi + t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine du repère O.

c. Déterminer $M(-t)$. Que peut-on dire de la position du point $M(-t)$ par rapport à $M(t)$?

d. Calculer $M(\frac{\pi}{2} - t)$. En déduire la position de $M(\frac{\pi}{2} - t)$ par rapport à $M(t)$.

e. En déduire de ce qui précède qu'on peut réduire le domaine d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2- **a.** Déterminer les variations de $x(t)$ et $y(t)$ puis dresser le tableau de variation conjointe de $x(t)$ et $y(t)$.

b. Montrer que le point $M(0)$ est un point stationnaire. Quelle est la pente à la trajectoire (C) au point $M(0)$?

c. A partir de la représentation graphique de (C) sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, dire comment peut-on obtenir la courbe totale.

d. Déterminer les points de la courbe (C) se situant sur l'axe des abscisses.

e. Déterminer les points de la courbe (C) se situant sur l'axe des ordonnées.

f. Tracer alors (C) sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis compléter la courbe sur $\mathbb{R}$.

Problème 3

On considère M(t) un point mobile de coordonnées $x(t)$; $y(t)$ tels que : $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

Soit (C) la trajectoire décrite par $M(t)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de cette courbe paramétrée. Que dire de sa parité ?

2. On considère la fonction $g(t)$ définit par : $g(t) = \dfrac{1}{t}$.

a. Dresser le tableau de variations de g.

b. Exhiber alors un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $J \cup g(J) = \mathbb{R}$.

3. **a.** Pour tout t de D, que dire de $M(t)$ et $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$?

b. Conclure alors qu'on peut restreindre le domaine d'étude de cette courbe paramétrée sur $]-1,1]$.

4. Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser le tableau de variation conjointe de $x(t)$ et $y(t)$.

5. Déterminer les points où on a de tangentes horizontales et verticales.

6. Montrer que cette courbe paramétrée admet un point double dont on précisera les coordonnées.

7. Montrer que la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{3}$ est une asymptote à la courbe. Étudier la position relative de cette asymptote par rapport à la courbe sur $]-1,1]$.

8. Connaissant la représentation graphique de la courbe sur son ensemble d'étude, comment faire pour obtenir la totalité de la courbe sur son domaine de définition ?

9. Tracer (C) sur son ensemble de définition.

Problème 4

On considère M(t) un point mobile de coordonnées $x(t)$; $y(t)$ tels que :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

Soit (C) la trajectoire décrite par $M(t)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de (C) sur $[0, \pi]$.

2. Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser le tableau de variation conjointe de $x(t)$ et $y(t)$.

3. Déterminer les points où on a des tangentes horizontales et verticales.

4. La courbe admet-elle de points multiple ? Justifier.

5. Connaissant la représentation graphique de la courbe sur $[0, \pi]$, dire comment faire pour obtenir la totalité de la courbe sur son domaine de définition ?

6. Déterminer l'ensemble des points , intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

7. Construire (C)

CHAPITRE 9

LES CONIQUES

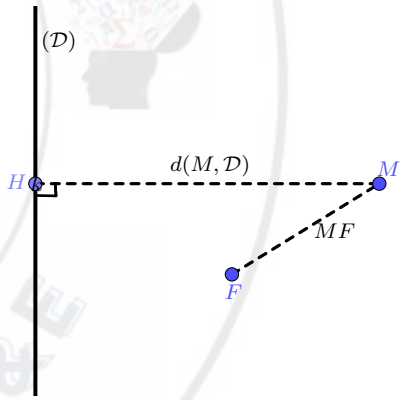
Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, $\mathcal{P}$ désigne le plan rapporté à un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Étude générale des coniques

1. Définition géométrique

Définition 1 : Soient F un point de $\mathcal{P}$, $(\mathcal{D})$ une droite ne passant pas par le point F et e un nombre réel strictement positif ($e > 0$).
On appelle **conique d'excentricité e, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$** , l'ensemble
$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / MF = e \times d(M, D)\} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \dfrac{MF}{MH} = e \right\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$

Déterminons l'équation générale d'une conique :
Soit $\mathcal{C}$ une conique d'excentricité e, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.
$M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF = eMH$
On choisit un repère orthonormé d'origine F et on note $d = d(F, \mathcal{D})$.
Alors $MF = eMH \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$
.
Ainsi $\boxed{(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0}$. **(eq1)**



Il faut donc trouver un repère dans lequel l'expression est encore plus simple. Cependant on peut remarque que suivant les valeurs de e on peut avoir plusieurs possibilités : Par exemple, si $e = 1$, on n'aura pas de terme devant x^2

On admet le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit $\mathcal{C}$ une une conique d'excentricité e.
- Si $0 < e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse.
- Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole.
- Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Remarque :
– Quand l'excentricité e tend vers 0, la conique se rapproche d'un cercle.
– Quand e tend vers $+\infty$, la conique se rapproche de sa directrice.

2. Vocabulaires

2-1. L'axe focal

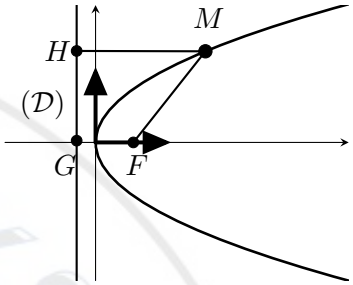
Soit (Γ) la droite passant par le foyer F et orthogonale à la directrice $(\mathcal{D})$. **(Γ)** est appelée **axe focal** de $\mathcal{C}$. **L'axe focal** (Γ) est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}$.

2-1. Les sommets de $\mathcal{C}$

Les points d'intersection de l'axe focal (Γ) et de la conique $\mathcal{C}$ sont appelés **sommets** de $\mathcal{C}$. On admet que :
– Si $e = 1$, l'axe focal (Γ) coupe la conique $\mathcal{C}$ en un seul point.
– Si $e \neq 1$ l'axe focal (Γ) coupe la conique $\mathcal{C}$ en deux points. Cependant, nous verrons plus loin que les ellipses admettent d'autres points qu'on appelle également « sommets ».

A- Étude de la parabole : Cas où $e = 1$

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F de sommet O et de directrice $(\mathbf{D})$.
On considère le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$.
$M(x,y) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow MF = MH$ (d'après la définition d'une conique).
Or $MH = \sqrt{(x - x_H)^2}$ et $MF = \sqrt{(x - x_F)^2 + y^2}$.
On pose alors $KF = p \Rightarrow F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}$.
Ainsi $M(x,y) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$.
D'où si $M \in (\mathcal{P})$ alors ses coordonnées vérifient : $y^2 = 2px$.



On vient de démontrer que pour $e = 1$, l'équation **(eq1)** peut s'écrire simplement dans un repère bien choisi sous la forme : $y^2 = 2px$. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

1. Définition

Définition 2 : Soit $(\mathcal{P})$ **une parabole** de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$. Alors il existe un repère dans lequel l'équation réduite de $(\mathcal{P})$ est sous la forme :

$$y^2 = 2px \text{ avec } p > 0$$

Ainsi une parabole est une conique dont l'équation réduite est de la forme : $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.

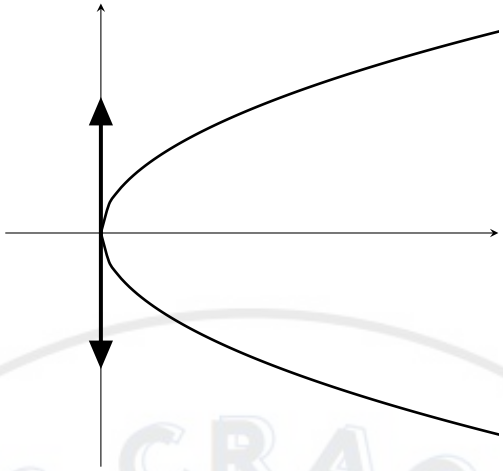
Commentaire :
– On peut aussi définir une parabole d'excentricité $e = 1$, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$, comme étant l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / MF = MH\}$ H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ (**Définition géométrique**).
– Une parabole a **un seul foyer** qu'on note généralement F et une seule directrice qu'on note $(\mathcal{D})$.

2. Étude analytique

Soit M de coordonnées x et y. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y^2 = 2px$ avec $p > 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$ avec $x \in [0, +\infty[$.
On pose alors $f(x) = \sqrt{2px}$ et (C_f) sa courbe représentative.
D'après l'expression de y, on conclut que la parabole $\mathcal{P} = (C_f) \cup (C_{-f})$ avec (C_{-f}) la symétrie de (C_f) par rapport à l'axe (ox). Étudier la parabole $\mathcal{P}$ revient à étudier (c_f).

Etude de f
• f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, f est dérivable de dérivée : $f'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}$. f est alors croissante sur $[0, +\infty[$.
• $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{2px}}{x} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$. Ainsi f admet une tangente verticale en $x = 0$.
• La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) + \sqrt{2px_0}$ Ainsi $yy_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) \times \sqrt{2px_0} + 2px_0$
On tire alors que : $yy_0 = p(x + x_0)$. Par symétrie par rapport à l'axe (ox) on conclut que : La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole a pour équation : $yy_0 = p(x + x_0)$.

Représentation graphique (Allure générale pour $p > 0$)



Remarque :
Avec un simple changement de repère, on peut avoir d'autres formes simples d'équation réduite d'une parabole.
– Une permutation de l'axe $(O, \vec{i})$ et l'axe $(0, \vec{j})$ conduit à une équation réduite de la forme : $x^2 = 2py$.
– Si le foyer F se situer sur le côté des x négatifs, l'équation réduite aura la forme $y^2 = -2px$.
– Si le foyer F se situer sur le côté des y négatifs, l'équation réduite aura la forme $x^2 = -2py$
On va déterminer dans ce qui suit, les différents paramètres de ces formes réduites

3. Les paramètres d'une parabole

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$, de sommet O et de paramètre p. On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ défini précédemment.

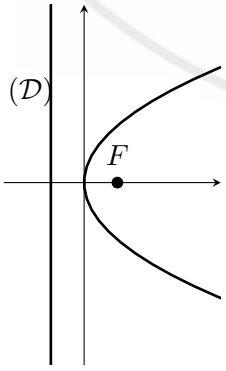
a- Cas où le foyer est sur l'axe (ox)

Si F est du côté des x positifs :

♦ L'équation réduite de la parabole est : $y^2 = 2px$.
♦ L'axe (ox) est l'axe focal.
♦ Le foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.
♦ Le paramètre de la parabole est p.
♦ L'équation de la directrice $(\mathcal{D})$ est : $x = -\frac{p}{2}$.
♦ L'équation de la tangente (T) en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole est :

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Allure générale.

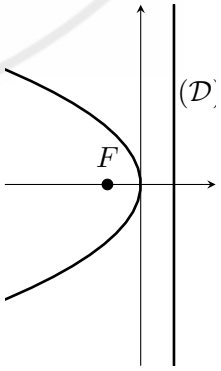


Si F est du côté des x négatifs :

♦ L'équation réduite de la parabole est : $y^2 = -2px$.
♦ L'axe (ox) est l'axe focal.
♦ Le foyer F a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.
♦ Le paramètre de la parabole est p.
♦ L'équation de la directrice $(\mathcal{D})$ est : $x = \frac{p}{2}$.
♦ L'équation de la tangente (T) en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole est :

$$y_0 y = -p(x + x_0).$$

Allure générale.



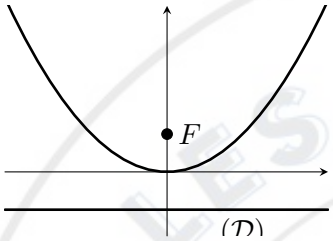
b- Cas où le foyer est sur l'axe (oy)

Si F est du côté des y positifs :

- L'équation réduite de la parabole est : $x^2 = 2py$.
- L'axe (oy) est l'axe focal.
- Le foyer F a pour coordonnées $\left(0, \frac{p}{2}\right)$.
- Le paramètre de la parabole est p.
- L'équation de la directrice $(\mathcal{D})$ est : $y = -\frac{p}{2}$.
- L'équation de la tangente (T) en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole est :

$$x_0 x = p(y + y_0).$$

Allure générale.

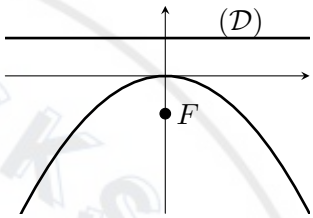


Si F est du côté des y négatifs :

- L'équation réduite de la parabole est : $x^2 = -2py$.
- L'axe (oy) est l'axe focal.
- Le foyer F a pour coordonnées $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$.
- Le paramètre de la parabole est p.
- L'équation de la directrice $(\mathcal{D})$ est : $y = \frac{p}{2}$.
- L'équation de la tangente (T) en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole est :

$$x_0 x = -p(y + y_0).$$

Allure générale.



Remarque : Pour les différents cas énumérés ci-dessus, l'étude et l'établissement de l'équation de la tangente se font de la même manière que dans le cas de **l'étude analytique** de la section 2.

B- Étude d'ellipse : Cas où $0 < e < 1$

Pour $0 < e < 1$ on peut démontrer, comme dans le cas d'une parabole, que l'équation **(eq1)** peut s'écrire simplement dans un repère adapté sous la forme de : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Ceci nous conduit à la définition suivante d'une ellipse :

1. Définition

Définition 3 : Soit $\mathcal{C}$ **une ellipse** de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $0 < e < 1$. Alors il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Ainsi une ellipse est une conique dont l'équation réduite peut se mettre sous la forme de : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$ dans un repère bien choisi.

Remarque :

– Comme une ellipse est une conique, on peut alors définir une ellipse d'excentricité $0 < e < 1$, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$, comme étant l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = e \right\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

– Une ellipse a **deux foyers** qu'on note généralement F et F' et deux directrices qu'on note $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

– Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on peut réduire l'équation **(eq1)** sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est en fait le repère dont l'axe $(0x)$ est parallèle à l'axe focal (OF). (F se trouve alors forcement sur l'axe (Ox)).

2. Étude analytique

Soit un point M de coordonnées x et y.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ avec $x \in [-a, a]$

On pose alors $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.
D'après l'expression de y, on conclut que l'ellipse $\mathcal{C} = (C_f) \cup (C_{-f})$ avec (C_{-f}) la symétrie de (C_f) par rapport à l'axe (ox). Étudier l'ellipse $\mathcal{C}$ revient à étudier (C_f).

Étude de f

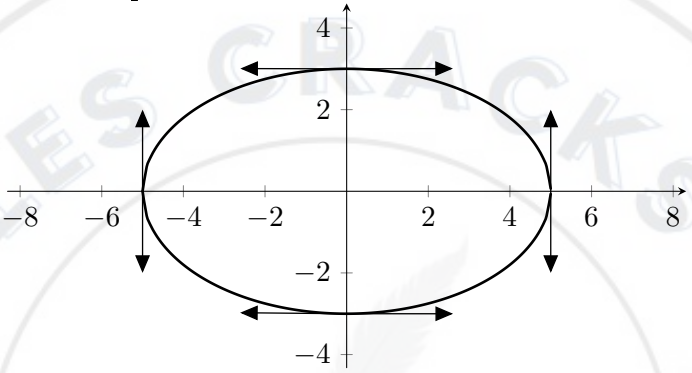
♦ f est définie et continue sur $[-a, a]$. De plus f étant paire donc on peut réduire le domaine d'étude sur $[0, a]$.

♦ Pour tout $x \in [0, a[$, f est dérivable de dérivée : $f'(x) = \dfrac{b}{a}\dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. f est alors décroissante sur $[0, a]$.

♦ $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{-(a - x)} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$.

Ainsi f admet une tangente horizontale en $x = 0$ et une tangente verticale en $x = a$.

Représentation graphique de l'ellipse $\mathcal{C}$ avec $a = 5$ et $b = 3$



3. Les paramètres d'une ellipse

L'équation réduite d'une ellipse est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$ comme nous venons de voir dans la définition. Par contre les paramètres des ellipses avec $a \geq b$ ne s'expriment pas de la même manière que ceux des ellipses avec $b \geq a$. Pour cela nous allons dans les deux cas, donner l'expression des différents paramètres.

Premier cas : cas où $a \geq b > 0$

Soit une ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a \geq b > 0$. Toutes les notions que nous allons voir ici serons illustrer sur la figure ci-dessous.On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

3-1. Les foyers et la distance focale

♦ Les foyers F et F' ont pour coordonnées dans ce cas : $F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

♦ La distance focale FF' est appelée **distance focale** et de plus $\boldsymbol{FF' = 2c}$.

♦ L'ellipse a pour axe focal l'axe (ox) de demi grand axe a et de demi petit axe b.

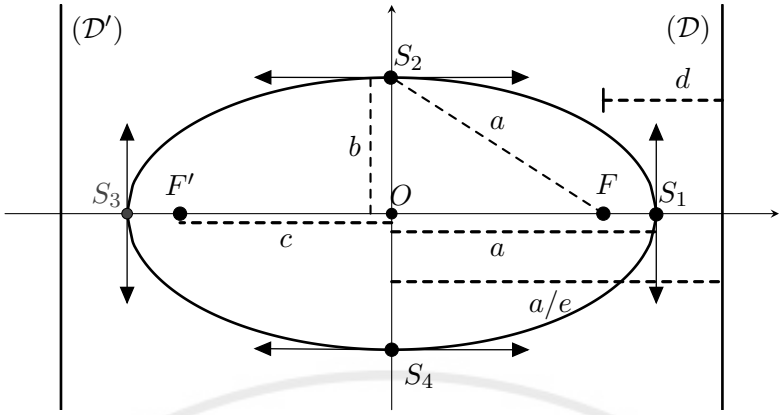
3-2. Expression de l'excentricité et équations des directrices

♦ L'excentricité e de l'ellipse a pour expression : $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \dfrac{c}{a}$ (toujours strictement inférieure à 1).

♦ Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations $(\mathcal{D})$: $x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}')$: $x = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{a^2}{c}$

3-3. Le paramètre de l'ellipse p et les sommets

Les sommets ont pour coordonnées : $S_1\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_2\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $S_3\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S_4\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ (Voir la figure 3 de la page suivante).
S_1 et S_3 sont les sommets principaux.



$fig3$

Remarque :
– En utilisant la figure ($fig3$), on peut directement déduire aussi que : $\boldsymbol{OF = OF' = c}$.
– Sur la ($fig3$), on remarque aussi que le triangle OFS_2 est un triangle rectangle en $O \Rightarrow \boldsymbol{FS_2 = a}$

Deuxième cas : cas où $b \geq a > 0$

On considère à présent une ellipse $\mathcal{C}'$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b \geq a > 0$. On pose $c^2 = b^2 - c^2$.
En tenant compte de la remarque on a les expressions suivantes pour les paramètres dans le cas où $b \geq a > 0$:

♦ Dans le cas où $b \geq a > 0$, l'ellipse a pour axe focal l'axe (oy) de demi grand axe b et de demi axe a.
♦ Les foyers ont pour coordonnées $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$. Et la distance focale $FF' = 2c$.
♦ L'excentricité e a pour expression : $e = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{c}{b}$.
♦ Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations : $(\mathcal{D})$: $y = \dfrac{b}{e} = \dfrac{b^2}{c}$ et $(\mathcal{D}')$: $y = -\dfrac{b}{e} = -\dfrac{b^2}{c}$.
♦ Les sommets ont pour coordonnées : $S_1\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_2\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, $S_3\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S_4\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ (Voir la figure).
S_2 et S_4 sont les sommets principaux.

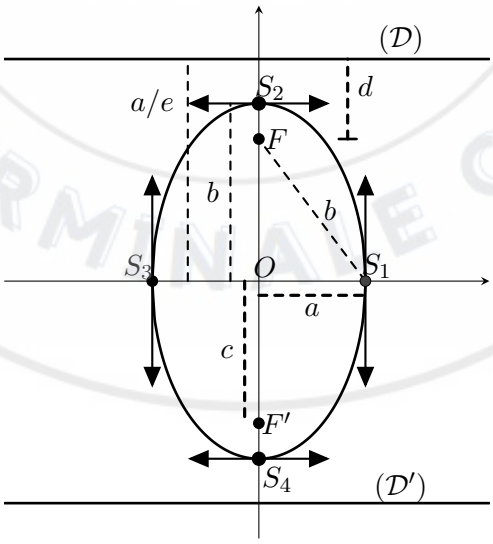


fig 4

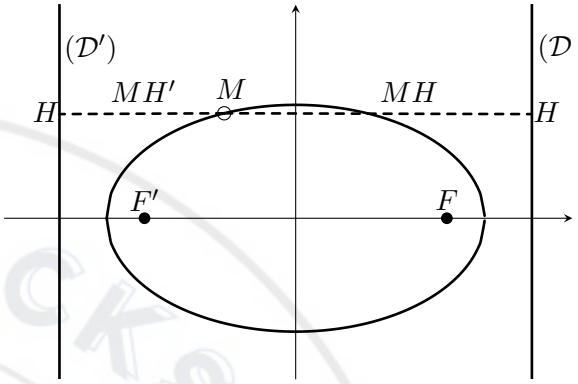
Remarque :
On peut remarquer que les paramètres de $\mathcal{C}'$ et ceux de $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire que le cas où $a \geq b > 0$) s'expriment de la même manière à condition de remplacer a dans les expressions par b et b par a et d'inverser les coordonnées des foyers. Tout se passe comme si on intervertissait les axes (Ox) et (Oy).

4. Les propriétés d'une ellipse

Propriété : Soit $\mathcal{C}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$ et $b>0$. On note F et F' les foyers de $\mathcal{C}$.
i. L'origine du repère O est le milieu du segment $[FF']$. O est appelé **centre de l'ellipse.**
ii. Pour tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{C}$, $MF+MF'=2a$. (**Définition bifocale**)

Démonstration

Le point **i.** est assez évident (En considérant les coordonnées de F et F').
ii. Soit M un point de $\mathcal{C}$.
On va raisonner ici avec le cas $a\geq b>0$. Le raisonnement est le même avec le cas $b\geq a>0$
Par définition $\begin{cases} MF=eMH \\ MF'=eMH' \end{cases} \Rightarrow MF+MF'=e(MH+MH')$
or $MH+MH'=d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=2\frac{a}{e}$.
Ainsi $MF+MF'=2a$.



5. Équation de la tangente en un point de l'ellipse

On admet le théorème suivant. Il s'obtient de manière analogue à celui concernant les paraboles.

Théorème 2 : Soit $\mathcal{C}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$ et $b>0$.
Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de l'ellipse $\mathcal{C}$. L'équation de la tangente (T) au point M_0 est :

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

Commentaire
Il est très facile de retenir cette expression de l'équation de la tangente en un point d'une ellipse. Il suffit juste de prendre l'équation de l'ellipse puis remplacer un x par x_0 et un y par y_0

On résume dans ce tableau, l'essentiel à retenir :

Soit $a\geq b>0$. Alors la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est appelée ellipse d'axe focal (ox) de demi grand axe a, de demi petit axe b et d'excentricité $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}<1$ avec $c^2=a^2-b^2$. C'est une ellipse dont les foyers F et F' sont : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$. Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations : $(\mathcal{D}):x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}'):x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}$. Les points $S_1(a,0)$, $S_2(0,b)$, $S_3(-a,0)$ et $S_4(0,-b)$ sont appelés sommets de l'ellipse. Pour tout point $M_0(x_0,y_0)$ de l'ellipse, l'équation de la tangente en ce point est : $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.	Soit $b\geq a>0$. La courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est appelée ellipse d'axe focal (oy) de demi grand axe b, de demi petit axe a et d'excentricité $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{c}{b}<1$ avec $c^2=b^2-a^2$. C'est une ellipse dont les foyers F et F' sont : $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$. Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations : $(\mathcal{D}):y=\frac{b}{e}=\frac{b^2}{c}$ et $(\mathcal{D}'):y=-\frac{b}{e}=-\frac{b^2}{c}$. Les points $S_1(a,0)$, $S_2(0,b)$, $S_3(-a,0)$ et $S_4(0,-b)$ sont appelés sommets de l'ellipse. Pour tout point $M_0(x_0,y_0)$ de l'ellipse, l'équation de la tangente en ce point est : $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

C-Hyperbole : Cas où $e > 1$

Pour $e > 1$ on peut également démontrer que l'équation **(eq1)** peut s'écrire simplement dans un repère adapté sous la forme de : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On a alors la définition suivante d'une hyperbole :

1. Définition

Définition 4 : Soit $\mathcal{C}$ **une hyperbole** de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $e > 1$. Alors il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Ainsi une hyperbole est une conique dont l'équation réduite peut s'écrire sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$ dans un repère bien choisi.

Remarque :
− Une hyperbole est une conique, alors on peut alors définir une hyperbole d'excentricité $e > 1$, de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$, comme étant l'ensemble $\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = e \right\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.
− Une hyperbole a **deux foyers** qu'on note généralement F et F' et deux directrices qu'on note $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.
− Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on peut réduire l'équation **(eq1)** de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est en fait le repère dont l'axe $(0x)$ est parallèle à l'axe focal (OF).

2. Étude analytique

Soit un point M de coordonnées x et y. $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(-1 + \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ avec $x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$
On pose alors $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.
On conclut que l'hyperbole $\mathcal{H} = (C_f) \cup (C_{-f})$ avec (C_{-f}) la symétrie de (C_f) par rapport à l'axe (ox).
Étudier l'hyperbole $\mathcal{H}$ revient à étudier (C_f).

Étude de f
♦ f est définie et continue sur $]-\infty, -a]$ et sur $[a, +\infty[$. De plus f étant paire donc on peut réduire le domaine d'étude sur $[a, +\infty[$.
♦ Pour tout $x \in]a, +\infty[$, f est dérivable de dérivée : $f'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{-a^2 + x^2}}$. f est alors croissante sur $[a, +\infty[$.
♦ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{b}{a} \times \frac{\sqrt{-a^2 + x^2}}{x - a} = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{x - a}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$.
Ainsi f admet une tangente verticale en $x = a$.
♦ Les droites (Δ) et (Δ') d'équations : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ sont des asymptotes de (C_f) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$ (se démontre facilement avec les connaissances d'études de fonctions).
♦ Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de (C_f). Alors la tangente en M_0 a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Ainsi on a : $y = \frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{x^2 - a^2}}(x - x_0) + \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2} \Rightarrow \frac{yy_0}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} - 1$.
D'où l'équation de la tangente de la tangente (T) en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation :

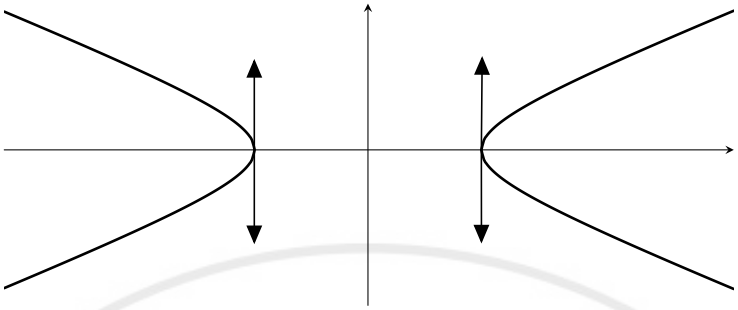
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Compte tenu de la symétrie de $\mathcal{H}$ par rapport à l'axe (ox) on conclut :

Pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$, la tangente en M_0 a pour équation :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Représentation graphique de l'ellipse (Allure générale)



3. Les paramètres d'une hyperbole

L'équation réduite dans un repère adapté d'une hyperbole peut s'écrire sous la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Une permutation des axes du repère conduit à l'équation réduite de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Ce sont les deux équations les plus simples d'une hyperbole. Pour cela on va dans les deux cas, donner l'expression des différents paramètres.

Premier cas : Équation réduite sous la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

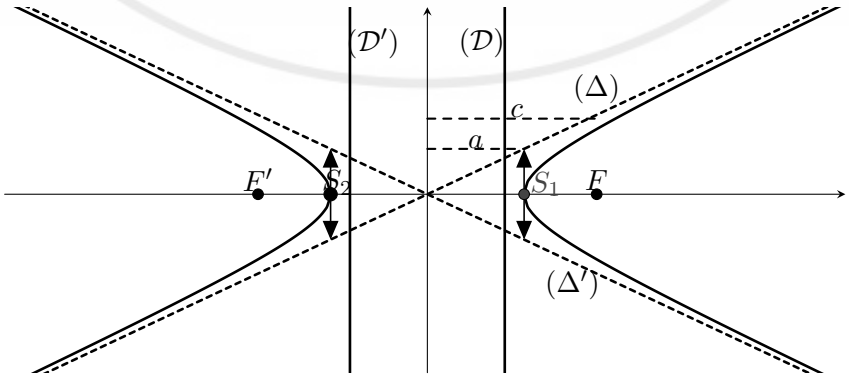
Soit une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Toutes les notions que nous allons voir ici sont illustrées sur la figure ci-dessous.On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

3-1. Les foyers et la distance focale

- Les foyers F et F' ont pour coordonnées dans ce cas : $F(c, 0)$ et $F(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- La distance focale FF' est appelée **distance focale** et de plus $\boldsymbol{FF' = 2c}$.
- Les distances origine du repère foyers sont telles que : $OF = c$ et $OF' = c$. L'axe (ox) est l'axe focal .
- Les sommets ont pour coordonnées : $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$

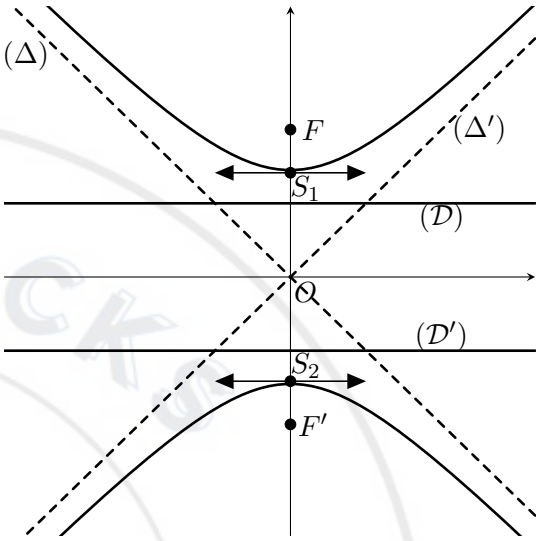
3-2. Expression de l'excentricité, équations des directrices et des asymptotes

- L'excentricité e de l'hyperbole a pour expression : $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}$ (toujours strictement supérieure à 1).
- Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations : $(\mathcal{D})$: $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}')$: $x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$.
- L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet également deux asymptotes (Δ) et $(\Delta)'$ d'équations : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$



Deuxième cas : Équation réduite sous la forme : $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Soit une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$ et $b>0$. On pose $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Cette hyperbole a les caractéristiques suivantes :



♦ Les foyers F et F' ont pour coordonnées : $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$.
♦ La distance focale FF' est telle que $\boldsymbol{FF'=2c}$.
♦ Les distances origine du repère foyers sont telles que : $OF=c$ et $OF'=c$. L'axe focal est l'axe (oy) .
♦ L'excentricité e a pour expression : $e=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\dfrac{c}{b}$.
♦ Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations : $(\mathcal{D})$: $y=\dfrac{b}{e}=\dfrac{b^2}{c}$ et $(\mathcal{D}')$: $y=-\dfrac{b}{e}=-\dfrac{b^2}{c}$.
♦ L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet également deux asymptotes (Δ) et $(\Delta)'$ d'équations : (Δ) : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$ et $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$.
♦ Les sommets ont pour coordonnées : $S_1(0,b)$ et $S_2(0,-b)$

4. Les propriétés d'une hyperbole

Propriété : Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$ et $b>0$.
i. L'origine du repère O est le milieu du segment $[FF']$. O appelé centre de l'hyperbole.
ii. Pour tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{H}$, $|MF-MF'|=2a$ (**Définition bifocale**).
iii. Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{H}$. La tangente à l'hyperbole en M_0 a pour équation :

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

Démonstration :
Les démonstrations des points **i.** et **iii.** sont analogues à ceux d'une parabole.
ii. Démontrons que pour tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{H}$, $|MF-MF'|=2a$.

$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ et $MF=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ ($F(c,0)$ et $F(-c,0)$). or $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$.

Ainsi $MF=\dfrac{c}{a}\left|x-\dfrac{a^2}{c}\right|$ et $MF'=\dfrac{c}{a}\left|x+\dfrac{a^2}{c}\right|\Rightarrow|MF-MF'|=2a$.

Tableau récapitulatif sur les hyperboles : *Voir le tableau de la page suivante*

Soit $a >$ et $b > 0$. Alors la courbe d'équation :
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole d'axe focal (ox) et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a} > 1$ avec $c^2 = a^2 + b^2$.
C'est une hyperbole dont les foyers F et F' ont pour coordonnées : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.
Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations :
$(\mathcal{D}) : x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$.
Les points $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$ sont appelés sommets de l'hyperbole.
Pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ de l'hyperbole, l'équation de la tangente en ce point est : $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.
Les asymptotes à l'hyperbole qu'on note (Δ) et (Δ') ont pour équation : $(\Delta) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $(\Delta') : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

Soit $b > 0$ et $a > 0$. Alors la courbe d'équation :
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée hyperbole d'axe focal (oy) et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{c}{b} > 1$ avec $c^2 = b^2 + a^2$.
C'est une hyperbole dont les foyers F et F' ont pour coordonnées : $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$.
Les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour équations :
$(\mathcal{D}) : y = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : y = -\frac{b}{e} = -\frac{b^2}{c}$.
Les points $S_1(0, b)$ et $S_2(0, -b)$ sont appelés sommets de l'hyperbole.
Pour tout point $M_0(x_0, y_0)$ de l'hyperbole, l'équation de la tangente en ce point est : $-\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.
Les asymptotes à l'hyperbole qu'on note (Δ) et (Δ') ont pour équation : $(\Delta) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $(\Delta') : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

Exercice 1

Application directe du cours

1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on définit 4 paraboles par leurs équations cartésiennes réduites :

a. $y^2 = 12x$ **b.** $x^2 + 9y = 0$ **c.** $y^2 - \frac{5}{6}x = 0$ **d.** $8x^2 - 5y = 0$

Pour chacune d'elles, précisez l'axe focal, le foyer, le paramètre p , l'excentricité e et la directrice. Construisez-les.

2. On considère les coniques d'équations suivantes :

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **b.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **c.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **d.** $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Pour chacune de ces coniques, préciser les éléments qui les caractérisent. Construisez-les.

II. Réduction des coniques (complement)

1. Positionnement du problème

Analysons les deux représentations graphiques ci-dessous :

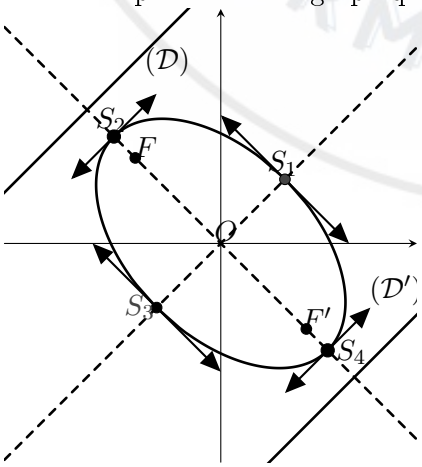


figure 1

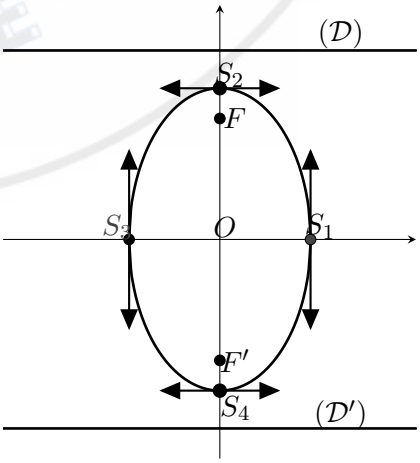


figure 2

On remarque facilement que l'axe focal de l'ellipse de la *(figure 1)* (la droite (S_2S_4)) ne coïncide ni avec l'axe

des abscisses, ni avec l'axe des ordonnées.
On peut également remarquer qu'avec un changement de repère, on peut obtenir l'ellipse de la *figure 1* à partir de l'ellipse de la *figure 2*.

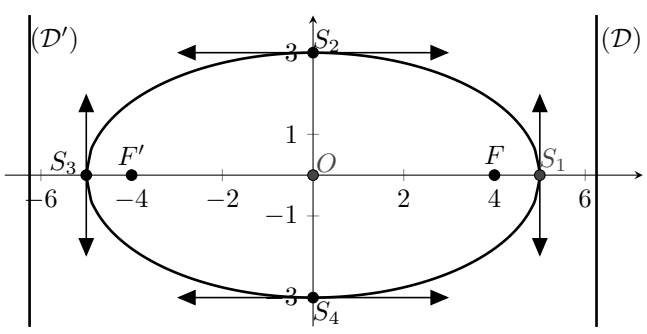
Plus généralement : Toute conique admet dans un repère orthonormé quelconque $(O,\vec{i},\vec{j})$ une équation de la forme : $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$. Le but est alors de trouver un repère orthonormé adapté $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ pour que cette équation soit la plus simple possible c'est-à-dire une équation réduite.

Remarque : Dans la plupart des cas, on donne le repère qui permet d'avoir une expression réduite de l'équation de la conique. Le reste du travail sera alors de déterminer les paramètres de la conique dans l'ancien repère. Mais pour des cas simple où le changement de repère est facile à faire, c'est à vous de déterminer le " bon " où l'étude sera simple.
Nous allons traiter ces deux cas qui peuvent se présenter en terminale à l'aide d'exercices suivants.

Exercice 2

Le but de ce exercice est de tracer la conique $\mathcal{C}$ d'équation : $17x^2+17y^2-16xy-84\sqrt{2}x+66\sqrt{2}y+9=0$
On considère alors l'ellipse $\mathcal{C}_0$ d'équation : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. On note par $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ les directrices de $\mathcal{C}$ et par F et F' ses foyers
1. Déterminer le centre, l'excentricité , les coordonnées des foyers et les équations des directrices de cette ellipse. Quel est l'axe focal ?
2. Construire alors l'ellipse $\mathcal{C}_0$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'origine O coïncide avec le centre de l'ellipse et l'axe $(O,\vec{i})$ avec l'axe focal de l'ellipse.
On considère l'application T du plan dans lui-même d'expression analytique :
$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+2\sqrt{2} \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-\sqrt{2} \end{cases}$$
3. Déterminer F_T et F'_T image respective de F et F' par l'application T.
Donner de même les équation de (Δ) et (Δ') image respectives de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ par T.
4. Soit $M(x,y)$ un point de l'ellipse $\mathcal{C}_0$. On note par $M'(x',y')$ l'image de M par T .
Montrer que les coordonnées de M' vérifient : $17x'^2+17y'^2-16x'y'-84\sqrt{2}x'+66\sqrt{2}y'+9=0$
5. On admet que l'application T conserve la forme et les distances. En déduire que la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques. Construire $\mathcal{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ précédent.

Solution :
1. (C'est une application directe du cours) : $c=\sqrt{25-9}=4$
– L'ellipse $\mathcal{C}_0$ a pour centre l'origine du repère O et pour excentricité $e=\dfrac{c}{a}=0.8$.
– Ses foyers F et F' ont pour coordonnées : $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$.
– Les équations des directrices : $(\mathcal{D})$: $x=\dfrac{a}{e}=6.25$ $(\mathcal{D}')$: $x=-\dfrac{a}{e}=-6.25$.
– L'axe (ox) est l'axe focal de cette ellipse.
2.



3. Notons $F_T(X_1, Y_1)$ et $F'_T(X_2, Y_2)$.

– On a : $F_T = T(F) \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + 2\sqrt{2} \\ Y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 4\sqrt{2} \\ Y_1 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow F_T(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

– De même on a : $F'_T = T(F) \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(-4) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + 2\sqrt{2} \\ Y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(-4) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow F'_T(0, -3\sqrt{2})$.

– Équation de (Δ) image de $(\mathcal{D})$ par T.

La droite $(\mathcal{D})$ a pour équation $x = 6.25 = \dfrac{25}{4}$.

Ainsi pour tout point $M(x, y)$ de $(\mathcal{D})$, $T(M)$ aura pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(\dfrac{25}{4}) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(\dfrac{25}{4}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{41\sqrt{2}}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \dfrac{17\sqrt{2}}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Rightarrow X + Y = \frac{29}{4}\sqrt{2}.$$

Par suite pour tout point M de $(\mathcal{D})$, son image $T(M)$ appartient à la droite d'équation $y = -x + \dfrac{29}{4}\sqrt{2}$.

Ainsi la droite (Δ) image de $(\mathcal{D})$ par T a pour équation : $y = -x + \dfrac{29}{4}\sqrt{2}$.

– De la même façon, soit un point $M(x, y)$ de la droite $(\mathcal{D}')$, alors son image $T(M)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(-\dfrac{25}{4}) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.(-\dfrac{25}{4}) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{9\sqrt{2}}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = -\dfrac{33\sqrt{2}}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Rightarrow X + Y = -\frac{21}{4}\sqrt{2}.$$

Par suite pour tout point M de $(\mathcal{D}')$, son image $T(M)$ appartient à la droite d'équation $y = -x - \dfrac{21}{4}\sqrt{2}$.

Ainsi la droite (Δ') image de $(\mathcal{D}')$ par T a pour équation : $y = -x - \dfrac{21}{4}\sqrt{2}$.

4. Soit $M(x, y)$. Alors les coordonnées de $M'(x', y')$ image de M par T vérifient : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$

On exprime alors les coordonnées de M en fonction de celles de M'. On a : $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - 1 \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' + 3 \end{cases}$

Puisque $M \in \mathcal{C}_0$ alors $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. En remplaçant par leurs expressions x et y puis en développant et réduisant on retrouve que les coordonnées du point $M'(x', y')$ vérifient : $17x'^2 + 17y'^2 - 16x'y' - 84\sqrt{2}x' + 66\sqrt{2}y' + 9 = 0$.

5. Par hypothèse, l'application T conserve la forme et pour tout point M de $\mathcal{C}_0$, l'image de M par T appartient à la conique $\mathcal{C}$. On conclut alors que $\mathcal{C}$ est aussi une ellipse.

Les paramètre de $\mathcal{C}$.

– Puisque T conserve les distances alors on déduit l'excentricité de $\mathcal{C}$ est la même que que celle de $\mathcal{C}_0$.

D'où $\mathcal{C}$ a pour excentricité $e' = 0.8$.

– Les foyers ont pour coordonnées d'après la question 3 : $F_T(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $F'_T(0, -3\sqrt{2})$.

– D'après la question 3, les directrices de $\mathcal{C}$ sont : $y = -x + \dfrac{29}{4}\sqrt{2}$ et $y = -x - \dfrac{21}{4}\sqrt{2}$.

– Les coordonnées des sommets sont :

• $S_1' = T(S_1) = \begin{cases} x_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.5 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + 2\sqrt{2} \\ y_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_1'\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

De manière analogue, on a : $T(S_2) = S_2'\left(0, -\sqrt{2}\right)$; $T(S_3) = S_3'\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ et $T(S_4) = S_2'\left(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$.

− Le centre Ω de l'ellipse $\mathcal{C}$ est l'image du centre O de l'ellipse $\mathcal{C}_0$ par T.

Ainsi en notant $\Omega(X, Y)$ on a alors : $\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + 2\sqrt{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Omega(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

− Axe focal de $\mathcal{C}$:

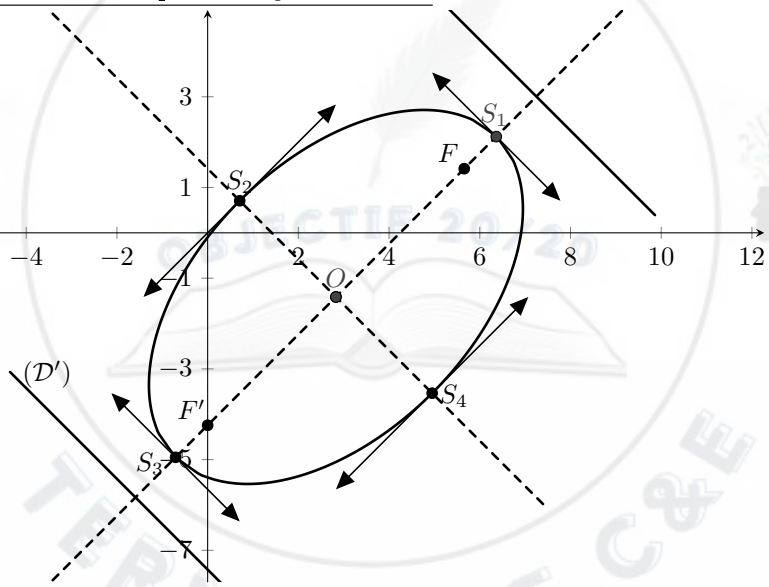
Notons (σ) l'image de l'axe (ox) par rapport à l'application T.

Soit $M(x, y)$ un point de l'axe focal (ox) et soit $M'(x', y')$ sont image par T.

On a alors : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 + 2\sqrt{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.0 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x' - y' = 3\sqrt{2}$.

Alors si un point M appartient à l'axe (ox), son image appartient à la droite d'équation $y = x - 3\sqrt{2}$.

D'où l'axe focal de $\mathcal{C}$ est la droite d'équation : $y = x - 3\sqrt{2}$.



Exercice 3

1. On considère la conique $\mathcal{H}_0$ d'équation : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de la conique. Construire $\mathcal{H}_0$

Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. On considère l'application T du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$

b. Montrer que pour M de $\mathcal{H}_0$, démontrer que $M' = T(M)$ est un point de $\mathcal{H}$.

c. En déduire alors les caractéristiques de l'hyperbole $\mathcal{H}$ puis donner sa représentation graphique.

2. Soit la conique $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$.

Déterminer les éléments caractéristiques de cette conique puis Construire $\mathcal{C}$.

3. On considère la courbe $(\mathcal{P})$ d'équation : $y^2 + 3y - 5x + 3 = 0$

Donner les paramètres de la courbe $(\mathcal{P})$ puis la construire.

Solution

1-a. Les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{H}_0$.

L'équation de $\mathcal{H}_0$ est celle d'une hyperbole. (Les formules pour les caractéristiques sont dans le cours).

- La distance focale $c = \sqrt{16+9} = 5$.
- L'excentricité $e = \dfrac{c}{a} = 1.25$
- Les foyers sont : $F(5,0)$ et $F'(-5,0)$.
- Les directrices :

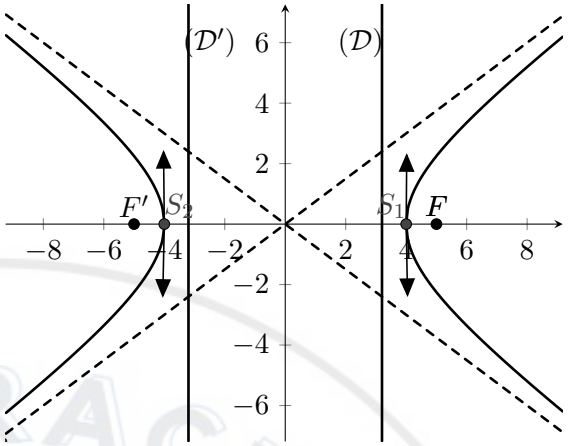
$(\mathcal{D})$ $x = 3.2$ et $(\mathcal{D}')$ $x = -3.2$.

- Les sommets ont pour coordonnées :

$S_1(4,0)$ et $S_2(-4,0)$.

- Les asymptotes de $\mathcal{H}_0$ sont :

$\Delta : y = \dfrac{3}{4}x$ et $\Delta' : y = -\dfrac{3}{4}x$.



représentation graphique de $\mathcal{H}_0$

b. Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{H}_0$. Notons x' et y' les coordonnées de $T(M)$:

Alors : $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y' \end{cases}$. Comme $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ alors $\dfrac{(x'+2)^2}{16} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$ (en remplaçant).

Par suite $M' = T(M)$ appartient à $\mathcal{H}$.

c. De la question **b.** on conclut que $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathcal{H}_0$ par T.

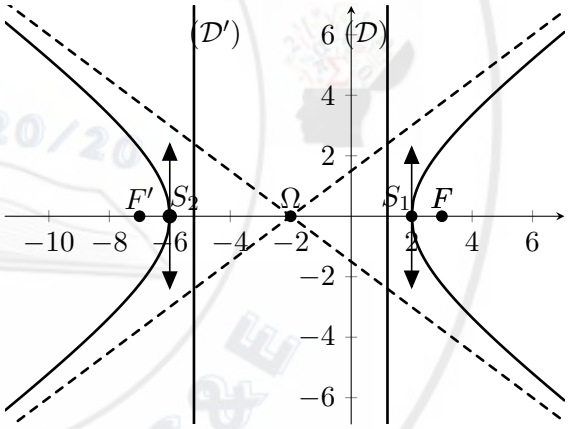
On déduit alors que :

- L'excentricité de $\mathcal{H}$ est celle de $\mathcal{H}_0$. D'où $e' = 1.25$.
- Le centre Ω de $\mathcal{H}$ est l'image du centre de $\mathcal{H}_0$ qui est O par T.Ainsi Ω a pour coordonnées $\begin{cases} x' = 0-2 \\ y' = 0 \end{cases}$.

De manière analogue, les sommets de $\mathcal{H}$ sont : $S_T(2,0)$ et $S'_T(-6,0)$ et ses foyers sont : $F_T(3,0)$ et $F'_T(-7,0)$.

- Si un point M appartient à $(\mathcal{D})$ alors son image $M'(x',y')$: $\begin{cases} x' = 1.2 \\ y' = y \end{cases}$ $\Rightarrow$ l'image de $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $x = 1.2$.

De manière analogue on déduit que l'image de $(\mathcal{D}')$ est la droite $x = -5.2$, l'image de (Δ) est la droite $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$ et l'image de (Δ') est la droite $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}$



représentation graphique de $\mathcal{H}$

NB : $\mathcal{H}$ est en fait l'image de $\mathcal{H}_0$ par la translation du vecteur $u(-2,0)$.

2. Le premier travail est de transformer l'équation de cette conique.

On a : $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = (x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 - 17 = (x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 25$.

Ainsi $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{25} + 4\dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$.

En restant dans l'esprit de la question **1.**, on considère l'application T suivante : $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$

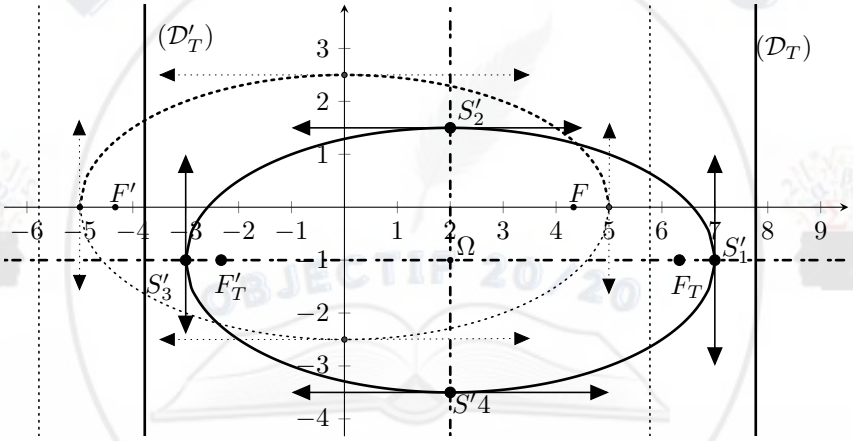
Soit M un point de la conique $\mathcal{C}$ et notons $M'(x',y')$ l'antécédent de M par T. Alors on a :

$\begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-1 \end{cases}$. Et puisque $\dfrac{(x-2)^2}{25} + 4\dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$ alors $\dfrac{x'^2}{25} + 4\dfrac{y'^2}{25} = 1$.

Par suite, la conique $\mathcal{C}$ est l'image de la conique $\mathcal{C}_0$ d'équation $\dfrac{x^2}{25} + 4\dfrac{y^2}{25} = 1$.

$\mathcal{C}_0$ est une ellipse d'axe focal (ox) d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de sommets : $S_1(5,0)$, $S_2\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, $S_3(-5,0)$ et

$S_4\left(0,-\frac{5}{2}\right)$, de foyers $F\left(\frac{5}{2}\sqrt{3},0\right)$ et $F\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3},0\right)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ et $(\mathcal{D}') : x=-\frac{10}{3}\sqrt{3}$.
On conclut alors que $\mathcal{C}$ est une ellipse :
– d'excentricité $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
– Soit $S_1'(x',y')$ l'image de S_1 par T alors on a : $\begin{cases} x'=5+2 \\ y'=0-1 \end{cases} \Rightarrow S_1'(7,-1)$. De manière analogue, on calcul les images des autres sommets et les foyers. On retrouve $S_2'\left(2,\frac{3}{2}\right)$, $S_3(-3,-1)$ et $S_4'\left(2,-\frac{7}{2}\right)$
Les foyers $F_T\left(\frac{5\sqrt{3}+4}{2},-1\right)$ et $F_T'\left(\frac{-5\sqrt{3}+4}{2},-1\right)$.
– Images des différentes droites :
Image de l'axe focal (ox) : Soit $M(x,y)$ un point de (ox). On note par $M'(x',y')$ image de M par T.
Alors on a : $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=-1 \end{cases} \Rightarrow$ l'image de l'axe (ox) est la droite $y=-1$.
De manière analogue, on détermine les images par T des autres droites caractéristiques. On trouve que l'image de $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $x=\frac{6+10\sqrt{3}}{3}$ et l'image de $(\mathcal{D}')$ est la droite d'équation $x=\frac{6-10\sqrt{3}}{3}$.



NB : *En pointillés la courbe de $\mathcal{C}_0$ et en trait plein celle de $\mathcal{C}$*

Commentaire :
La courbe $\mathcal{C}$ est en fait l'image de la courbe $\mathcal{C}_0$ par la translation du vecteur $\vec{u}(2,-1)$.
3. *Le travail ici est similaire à celui des deux premières questions*
On a : $y^2+3y-5x+3=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}-5x+3=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-5x+\frac{3}{4}$.
Ainsi $y^2+3y-5x+3=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{3}{2}\right)^2=5\left(x-\frac{3}{20}\right)$.
On considère l'application T du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x'=x+\frac{3}{20} \\ y'=y-\frac{3}{2} \end{cases}$
Soit $M(x,y)$ un point de $(\mathcal{P})$ et un $M'(x',y')$ tel que $M=T(M')$. Alors $\begin{cases} x=x'+\frac{3}{20} \\ y=y'-\frac{3}{2} \end{cases}$
Puisque $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=5\left(x-\frac{3}{20}\right)$ alors les coordonnées de M' vérifient : $y'^2=5x'$.
On conclut que la conique $(\mathcal{P})$ est l'image d'une certaine conique $(\mathcal{P}_0)$ d'équation $y^2=5x$ par T .
$(\mathcal{P}_0)$ est une parabole d'axe focal l'axe (ox), de paramètre $p=\frac{5}{2}$, de sommet $O(0,0)$, de foyer $F\left(\frac{5}{4},0\right)$ et

de directrice $(\mathcal{D})$ d'équation : $x = -\dfrac{5}{4}$. Par suite, $(\mathcal{P})$ est aussi une parabole avec les caractéristiques suivantes :

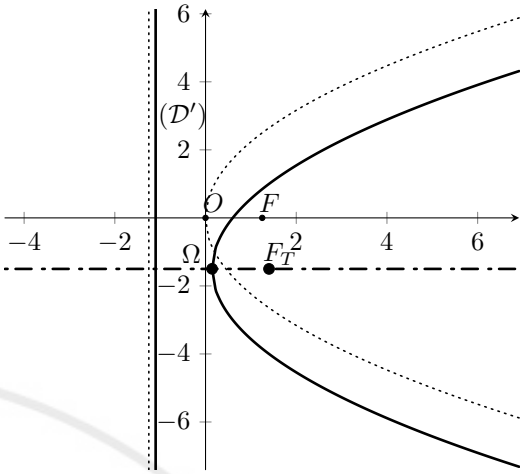
– Paramètre $p = \dfrac{5}{2}$. Soit $\Omega = T(O) \Rightarrow \Omega\left(\dfrac{3}{20}, -\dfrac{3}{2}\right)$

De manière analogue on déduit que le foyer de $(\mathcal{P})$ est $F_T\left(\dfrac{7}{5}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

– L'image de l'axe focal (ox) par T est la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}$.

Par suite l'axe focal est la droite : $y = -\dfrac{3}{2}$.

De manière analogue, on déduit que la directrice de $(\mathcal{P})$ image de droite $(\mathcal{D})$ par T est la droite : $x = \dfrac{-11}{10}$.



2. Paramétrages classiques des coniques étudiées

Théorème 3 : Soient a et b deux réels non nuls et deux réels c et d quelconque :

i. L'équation cartésienne $\begin{cases} x = a\cos(\theta) + c \\ y = b\sin(\theta) + d \end{cases}$ est une équation paramétrique d'une ellipse.

ii. L'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = a\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} + c \\ y(t) = b\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} + d \end{cases}$ est celle d'une hyperbole.

iii. L'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2pt^2 + c \\ y = 2pt + d \end{cases}$ représente une parabole

Démonstration :

i. Simple à démontrer.

ii. De la même façon, si une courbe à pour équation cartésienne $\begin{cases} x(t) = a\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} + c \\ y(t) = b\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} + d \end{cases}$

Alors $\dfrac{(x-c)^2}{a^2} + \dfrac{(y-d)^2}{b^2} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 = 1$. On retrouve ainsi l'équation d'une hyperbole.

iii. Soit l'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 2pt^2 + c \\ y = 2pt + d \end{cases}$ Alors $(y-d)^2 = 2p(x-c)$ qui est une parabole.

Exercice 4

Étudier puis tracer les courbes suivantes :

1. La courbe $\mathcal{H}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} - 1 \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \end{cases}$

2. Les courbes $\mathcal{H}$ de représentations paramétriques : $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\theta) + 2 \\ y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin(\theta) - 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 6t + 2 \\ y = 6t^2 - 1 \end{cases}$

Exercices

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$, on considère l'ensemble C_α des points M de coordonnées (x, y) telles que : $x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$

- **a.** On considère le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{u}, \vec{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de $\mathcal{R}$, on note $(X; Y)$ les coordonnées de M dans ce nouveau repère repère. Comment choisir $\theta \in [0; 2\pi]$ pour que le terme en XY de l'équation C_α dans ce repère soit nul ? Quel est alors l'équation de C_α.
- **b.** Discuter en fonction de α du genre de la conique.
- **c.** Préciser les ensemble C_0 ; C_{-1} et C_1
- **d.** En déduire les paramètres a, b, c et e dans $\mathcal{R}_\theta$ suivant les valeurs de α

2. Soit a, b avec $0 < a < b$. Pour tout $t \notin \{a, b\}$ on considère la courbe C_t d'équation : $\dfrac{x^2}{a-t} + \dfrac{y^2}{b-t} = 1$

- **a.** Quelle est la nature de C_t ? Montrer que si C_t est une conique, ces foyers ne dépendent pas de t.
- **b.** Montrer que si C_t et C_u, pour $t \neq u$, se coupent en M, alors elles sont orthogonales (c'est-à-dire les tangentes en M à C_t et à C_u sont orthogonales).

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On désigne par (C_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 - 2\sqrt{3}y - 2x = 0$.
Déterminer la nature de (C_1). Donner les éléments caractéristiques de (C_1) et la construire.

2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2 et F un point de $\mathcal{C}$. Justifier que la parabole de foyer F et de directrice $\Delta : x = -2$ passe par O

3. Soient $A(a; 0)$ et $B(-a; 0)$ deux points distincts du plan et soit I le milieu $[AB]$

- **a.** Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MA \times MB = MI^2$
- **b.** On considère la courbe $\mathcal{C}_a$ d'équation : $\dfrac{x^2}{2a^2} - \dfrac{y^2}{2a^2} = 1$. Caractériser cette courbe.
- **c.** Tracer $\mathcal{C}_2$.

Exercice 3

Les parties A et B sont totalement indépendantes.

Partie A On considère dans P la courbe $(\mathcal{P})$ d'équation $2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0$.

1- **a.** Montrer que $(\mathcal{P})$ est une parabole dont on déterminera le sommet S, le foyer F et la directrice $(\mathcal{D})$.

- **b.** Construire $(\mathcal{P})$.

2. Soit M_0 le point de $(\mathcal{P})$ d'abscisse -3 et d'ordonnée $y_0 \geq 0$.

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{P})$ en M_0.
- **b.** Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en M_0.

3. (T) coupe l'axe focal Δ de $(\mathcal{P})$ au point I et (N) coupe Δ en J.

- **a.** Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$.
- **b.** Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur Δ . Montrer que $JK = \dfrac{1}{3}$.

Partie B

1. Soit $\mathcal{C}$ une ellipse de foyers F, F' et de centre O. On note a la longueur du demi grand axe et $c = OF$.
Montrer $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF' \times MF + OM^2 = 2a^2 - c^2$

2. Un point M d'une hyperbole $\mathcal{H}$ est projeté orthogonalement en les points H et H' sur les axes de $\mathcal{H}$.
Prouver que le produit $MH \times MH'$ est constant

3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $C(x, y)$ coupant (ox) en M et M' tel que $MM' = a$ et soit D le point de tangence du cercle à l'axe (oy). On note I le projeté orthogonal de C sur l'axe (ox)

a. Déterminer CD ; CM et CM'. Quelle est la nature du triangle MIC

b. En déduire le lieu des centres des cercles tangents à (oy) et coupant l'axe (ox) en deux points M et M' tels que $MM' = a$ avec $a > 0$

Problèmes

Problème 1

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **a.** Montrer que f est dérivable sur $]0;2[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;2[$.

b. Déduire les variations de f puis tracer $\mathcal{C}$.

2. Soit $\mathcal{C}'$ le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $(O;\vec{i})$, on note $\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

a. Montrer que Γ a pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b. Montrer que Γ est une ellipse dont on précisera le centre Ω l'excentricité e et les foyers F et F' et l'équation des directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ (On note par F, le foyer dont l'ordonnée est positive et par $(\mathcal{D})$ la directrice proche de F).

c. Montrer que pour tout point M de Γ ; $MF + MF' = 2$.

d. Soit M un point de Γ et note par H son projeté sur la droite $(\mathcal{D})$. Montrer alors que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3- **a.** Donner une équation de la tangente (T) à Γ en son point M_0 d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'ordonnée y_0 positive.

b. Soient H_1 et H_2 les projetés orthogonaux respectifs des foyers F et F' sur (T).
Montrer que $FH_1 \times F'H_2 = 1$.

3. On désigne par F la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{1+\cos(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$

a. Montrer que F est dérivable sur $[0;\pi]$ et que pour tout x de $[0;\pi]$, $F'(x) = -2\sin^2(x)$.

b. Calculer $F(\pi)$ et en déduire l'expression de $F(x)$ pour toutx de $[0;\pi]$.

c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire de l'intérieur de l'ellipse Γ .

4. On pose : $\begin{cases} u_0 = 2\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x \\ u_n = 2\displaystyle\int_0^2 x^n\sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a. Calculer $u_0 - u_1$,en déduire u_1.

b. Vérifier que $\forall\ n\ \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^2 x^n(2-2x)\sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$ puis montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right) u_n$

c. En déduire l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$

d. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \pi$.

e. Montrer que si la suite (u_n) converge vers l alors $l = 0$. Conclure.

Problème 2

Le plan (P) est rapporte a un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C_m) la courbe d'équation :
$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$, où m est un paramètre réel.

Partie I

1. Montrer que quel que soit le réel m, la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

2. On suppose que m est non nul.

a. Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre I_m a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{2m}, 0\right)$.

b. Préciser suivant les valeurs de m, si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole.

c. Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.

3. Soit (α, β) un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P), qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \alpha z + \beta$.

b. Déterminer α et β sachant que les points $A(3,0)$ et $B(-3,0)$ ont pour images respectives les points $A'(3,-3)$ et $B'(-3,3)$.

b. Donner la nature de f, puis déterminer ses éléments caractéristiques.

Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.

4. Justifier que l'ensemble (C'_{-1}), image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Soit M le point de coordonnées (x, y) et M' le point de coordonnées (x', y'), image de M par f.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis x et y en fonction de x' et y'.

b. En déduire une equation cartésienne de (C'_1) image de (C_1) par f.

c. Construire (C'_1) dans le repère précédent.

Partie II

Soit (D) la droite d'équation : $5x - y - 21 = 0$.

1. Déterminer une equation de (D'), image de (D) par f.

2. E et F (F d'ordonnée positive) sont les points d'intersection de (C_1) et (D), E' et F' leurs images respectives par f. Déterminer les coordonnées des points E, F, E' et F' .

3. Soit (S) la surface délimitée par la courbe (C_1) et le segment $[EF]$ et (S') son image par f. Calculer l'aire $A(S')$ de (S') et en déduire l'aire $A(S)$ de (S).

Partie III

On prend $m = 0$.

1. Quelle est la nature de (C_0) ? On note par F son foyer et $(\mathcal{D})$ sa directrice.

2. Tracer (C_0) dans un autre repère.

3. Soit M un point de (C_0) et H le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathcal{D})$.

a. Démontrer que la tangente à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

b. En déduire une relation entre $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM})$ et $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HF})$.

4. Soit G le barycentre du système $(A,2),(B,1),(M,1)$ où M est un point de (C_0), A et B les points définis dans la partie **I**/. On note (Γ_0) la courbe décrite par G lorsque M parcourt la courbe (C_0). Démontrer que (Γ_0) est l'image de (C_0) par une homothétie de centre $K(1;0)$ dont on précisera le rapport.

Problème 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère l'application ψ définie par : $\psi(O) = O$ et pour tout point M de $\mathcal{P}$ distinct de O, $\psi(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

1- **a.** Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\psi \circ \psi(M) = M$.

b. Justifier que l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ distincts de O tels que $\psi(M) = M$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

Pour toute la suite, $(\mathcal{D})$ est une droite quelconque de $\mathcal{P}$, A est un point fixé de $(\mathcal{D})$ distinct de O ; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$. On pose $\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\overrightarrow{OA} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

2. Justifier que $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = a + it$ où $t \in \mathbb{R}$.

3. Soient M et M' deux points de $\mathcal{P}$ tous distincts de O et d'affixes respectifs z et z'.

a. Montrer que $\psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\overline{z}}$.

b. En supposant $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$, montrer que $\psi(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{4a}{a^2+t^2} \\ y' = \dfrac{4t}{a^2+t^2} \end{cases}$

c. Vérifier que dans ce cas, $\left(x' - \dfrac{2}{a}\right)^2 + y'^2 = \dfrac{4}{a^2}$.

d. En déduire que si M appartient à $(\mathcal{D})$, alors $\psi(M)$ appartient au cercle (C_1) de diamètre $[OH']$ où H' est l'image par ψ du projeté orthogonal H de O sur $(\mathcal{D})$.

4. Soit h l'application affine qui à tout point $M(x;y)$ associe $M_1(x_1, y_1)$ tel que $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \dfrac{2}{3}y \end{cases}$ Montrer que l'image de (C_1) par h est une ellipse dont dont donnera l'excentricité.

5. On considère l'ellipse $(\mathcal{C})$ d'équation : $(x-1)^2 + \dfrac{9}{4}y^2 = 1$.

a. Soit m un réel. Déterminer les droites de coefficient directeur m qui sont tangentes à $(\mathcal{C})$ (**Indication** : prendre une droite $(D) : y = mx + c$ puis chercher les valeurs possibles de c en fonction de m).

b. A quelle condition les droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont elles perpendiculaires ?

c. En déduire que le lieu des points du plan par lesquels passent deux tangentes à $(\mathcal{C})$ qui sont perpendiculaires est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Problème 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 9y^2 = 9$.
On considère le cercle (C_1) de centre O et de rayon 1, et le cercle (C_2) de centre O et de rayon 3.
N est le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. P est le point de coordonnées $(3\cos(\theta), 3\sin(\theta))$, où θ est un réel appartenant à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Soit M le point de coordonnées $(3\cos(\theta), \sin(\theta))$.

a. Vérifier que M est un point de l'ellipse et placer le point M.

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en M.

2. La tangente (T) coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.
Déterminer les coordonnées des points H et K. En déduire que : $HK^2 = \dfrac{9}{\cos^2(\theta)} + \dfrac{1}{\sin^2(\theta)}$

3. Soit f la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a. Déterminer la dérivée de f. En déduire θ pour que la distance HK soit minimale.

b. On par D le point de l'ellipse $\mathcal{C}$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Déterminer l'équation de la tangente en ce point à l'ellipse $\mathcal{C}$.

4. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ puis tracer $\mathcal{C}$ et les cercles (C_1) et (C_2) de $\mathcal{C}$. (On note par F le foyer d'abscisse positive et par $(\mathcal{D})$ la directrice proche de F).

5. Montrer que $MF + MF' = 6$ pour $M \in \mathcal{C}$.

6. On considère une droite variable Δ passant par F coupe l'ellipse $\mathcal{C}$ en M et M'.
Prouver que $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'} = 6$.

CHAPITRE 10

PROBABILITÉ

I. Analyse combinatoire et outils de dénombrement

1. Le cardinal d'un ensemble

Définition 1 :
Soit E un ensemble non vide fini. Le cardinal de E est le nombre d'éléments de E. Il est noté **card(E)**.

Dans la suite de cette section, pour mieux comprendre, nous allons illustrer certaines notions à l'aide de l'expérience aléatoire suivante : l'urne contient 4 jetons indiscernables au toucher numérotées a, b, c et d puis nous allons généraliser par la suite.

2. Les p-uplets

2-1. Définition

Expérience 1 :

Tirages successifs avec remise de 3 éléments parmi 4 :

- On pioche un premier jeton, par exemple : b et on le remet dans le sac.
- On pioche un deuxième jeton, par exemple : a et on le remet dans le sac.
- On pioche un troisième jeton, par exemple : a et on le remet dans le sac.

L'expérience est terminée et le résultat est le suivant : (b, a, a).
Les résultats possibles de cette expérience sont des listes de 3 éléments , avec répétition d'éléments possible.
Plus généralement, une liste de p éléments est appelée un **p-uplet** ou une **p-liste**.

Attention ! ! ! !
Une liste respecte un ordre : $(b; a; a) \neq (a; a; b)$. Dans une liste, il y a un premier élément, un deuxième élément, etc...

2-2. Dénombrement : p-uplets ou p-liste

Dans notre exemple, en tenant compte du fait que la répétition d'un même élément est possible, alors tous les éléments, c'est-à-dire a ou b ou c ou d peuvent être tirés 3 fois :
on trouve qu'il existe : $\mathbf{4 \times 4 \times 4}$ triplets possibles, soit **64 triplets** possibles.

Cas général : soit un entier naturel $n \geq 1$ et soit p entier naturel tel que : $p \geq 1$.
Le nombre de **p-uplets ou de p-listes** d'un ensemble à n éléments est : $\boldsymbol{n^p}$.

Remarque :
Comme il peut y avoir répétition d'éléments, p peut être strictement plus grand que n.

3. Arrangements

3-1. Définition

Expérience 2 :

Tirages successifs sans remise.

• On pioche un premier jeton, par exemple : b que l'on ne remet pas dans le sac.
• On pioche un deuxième jeton, par exemple : a que l'on ne remet pas dans le sac.
• On pioche un troisième jeton, par exemple : c que l'on ne remet pas dans le sac.
L'expérience est terminée.Le résultat est noté à l'aide de parenthèses : $(b; a; c)$
• Une liste de 3 éléments sans répétition possible est appelée un arrangement de 3 éléments.
• Plus généralement, une liste de p éléments sans répétition possible est appelée un arrangement de p éléments de E.

3-2. Dénombrement : arrangements

Dans notre exemple, au premier tirage on a 4 choix possible. Au deuxième tirage, on a 3 choix possible et au troisième tirage on a 2 choix possible.
Le nombre de tirage possible est donc $\mathbf{4 \times 3 \times 2 = 24}$.

Cas général : Soit un entier naturel $n \geq 1$ et soit p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$.
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté : $\boldsymbol{A_n^p}$.
Et en généralisant le raisonnement tenu sur le cas particulier, on a :$\boldsymbol{A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p+1))}$

4. Permutation

– La permutation est un cas particulier d'arrangement. Si $p = n$ on dénombre alors les permutations d'éléments de E.
– Sur notre cas particulier on a alors $\mathbf{4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24}$ permutations de E.

Cas général : Soit $n \geq 1$.
Une permutation étant un arrangement de n éléments de E alors Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté : $\boldsymbol{n!}$ (se lit "**factoriel** $\boldsymbol{n}$")
Avec $\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1}$

Remarque :
– D'un point de vue calculatoire (qui perd le sens du dénombrement) : $\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times .... \times 2 \times 1}$. Il s'agit tout simplement du produit des n premiers entiers.
– Par convention : $\mathbf{0! = 1}$.

5. Combinaison

5-1. Définition

Expérience 3 :

Tirages Simultanés.

On pioche trois jetons en une seule fois, par exemple : a, d et c. Le résultat est noté à l'aide **d'accolades** : $\boldsymbol{\{a; d; c\}}$.Les résultats possibles de cette expérience sont des sous-ensembles de E ou parties de E, possédant 3 éléments. Un sous-ensemble de E comportant 3 éléments est appelé une combinaison de 3 éléments de E.
Plus généralement, une partie de E possédant p éléments est appelée une combinaison de p éléments de E.

Remarque :
– L'ensemble $\boldsymbol{\{a; d; c\}}$ possède les mêmes éléments que l'ensemble $\boldsymbol{\{d; a; c\}}$. Ils sont donc égaux d'un point de vu combinaison.

– Il est à noter qu'une combinaison de p éléments de E est différente d'une liste de p éléments de E. En effet contrairement aux listes, l'ordre d'écriture des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance. Cette absence d'importance de l'ordre est marquée par l'utilisation de l'écriture avec accolades pour une combinaison, écriture réservée aux ensembles.

5-2. Dénombrement de combinaison

Considérons la combinaison de 3 éléments de E :$\{a;b;c\}$. En permutant ses éléments, il est possible de former des arrangements de 3 éléments de E. Et le nombre de permutations d'un ensemble de 3 éléments étant : 3!, il est donc possible à partir de cette combinaison de former 6 arrangements de 3 éléments de E.
On peut évidemment faire de même avec les autres combinaisons de 3 éléments de E, obtenant ainsi tous les arrangements de 3 éléments de E. De plus, deux combinaisons différentes ne peuvent générer deux arrangements identiques. Donc, si nous notons $\boldsymbol{C_4^3}$ le nombre de combinaisons de 3 éléments de E, par analogie avec la notation $\boldsymbol{A_4^3}$ des arrangements de 3 éléments de E, on a alors :
$\boldsymbol{A_4^2 = 6C_4^3}$ or $\boldsymbol{A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24}$ donc $\boldsymbol{C_4^3 = 4}$.

Cas général : soit un entier naturel $n \geq 1$, et soit p entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$.
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté : $\boldsymbol{C_n^p}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{p}}$
et se lit **combinaison de p parmi n**.
$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Remarque :

– Il est à noter que les notations $\boldsymbol{C_n^p}$ et $\boldsymbol{\binom{n}{p}}$ désignent la même chose. Cependant il faut faire attention quand aux positions de n et p dans les deux notations.
– **Le cas $p = 0$** : La notion de liste n'a plus de sens pour $p = 0$ par contre, un sous-ensemble de E possédant 0 éléments existe, il est unique et il s'agit de l'ensemble vide. On a alors $\binom{n}{0} = 1$.

5-3. Quelques formules de combinaison

Propriétés : soit un entier naturel $n \geq 1$, et soit p entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$.
i. $\binom{n}{0} = 1$
ii. $\binom{n}{n} = 1$
iii. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
iv. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :

En utilisant le fait que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, on démontre facilement les points **i.** , **ii.** et **iii.**

iv. On a : $\binom{n-1}{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!}$ et
$\binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \dfrac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}$.
Alors $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.

5-4. formule du binôme de Newton

Propriété : Pour tous a et b réels et pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Commentaires :
- Cette formule est également valable, de façon plus générale, pour a et b nombres complexes.
- On peut remarquer que la somme des exposants de chaque monôme vaut toujours n.
- En raison de leur rôle dans cette formule, les C_n^p sont aussi appelés coefficients binomiaux.

Tableau récapitulatif :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	type de dénombrement	Nombres de tirages possible
Tirages successifs avec remise	oui	Non	p-uplet de E	$\boldsymbol{n^p}$
Tirages successifs sans remise	oui	Oui	Arrangement de p éléments de E	$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$
Tirages simultanés	Non	Oui	Combinaison de p éléments de E	$\boldsymbol{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

6. Quelques principes importants du dénombrement.

Propriété 1 : Principe multiplicatif.
Si un ensemble fini A se décompose en un produit cartésien d'ensembles A_0, $A_1 \cdots A_k$. Alors :
$$\boldsymbol{card(A) = card(A_0) \times card(A_1) \times card(A_2) \times \cdots \times card(A_k)}$$

Nous allons voir dans l'exercice qui suit, comment on utilise cette propriété :

Exercice 1

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.
1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
2. Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
3. Quel est le nombre de comités où un élève X donné est président ?
4. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
5. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Solution :
1. On veut un président, un vice-président et un secrétaire parmi les 30 élèves. (On veut alors 3 élèves distincts parmi les 30 élèves). L'ordre de choix compte et il n'y a pas de répétition.
- Pour le premier choix (par exemple le président), on a 30 possibilités : On note A_0 cet ensemble possible alors $\boldsymbol{Card(A_0) = 30}$.

– Le président étant choisi, il reste le vice-président qu'on peut choisir parmi les 29 élèves restants : on note A_1 cet ensemble possible alors $\boldsymbol{Card(A_1) = 29}$.
– Le vice président et le président étant choisis, il reste un secrétaire qu'on choisit parmi les 28 élèves restants : On note de même A_2 cet ensemble donc $\boldsymbol{Card(A_2) = 28}$.
Notons A ={ comité composé d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire}.
un "comité" est dans A, alors il doit forcement contenir un président, un vice-président et un secrétaire. Et un comité ayant un président, un vice-président et un secrétaire est dans A. Par suite $\boldsymbol{A = A_0 \times A_1 \times A_2}$.
Ainsi le $card(A) = card(A_0) \times card(A_1) \times card(A_2) = 30 \times 29 \times 28 = 24360$.

D'où on peut former 24360 comités possibles

Remarque :
– *On pouvait tout simplement remarquer qu'il s'agissait d'un arrangement de 3 éléments parmi 30 car il s'agit en quelque sorte d'un tirage successif sans remise.*
– *Dans cet exemple, on peut croire qu'il s'agit plutôt d'une combinaison. Dans le cas de doute, il est conseillé de décomposer l'expérience en des expériences élémentaires comme nous venons de le faire plus haut.*

2. On choisit 1 fille parmi les 12 filles (on note l'ensemble B_1 ; $card(B_1) = 12$). Puis après on choisit successivement 2 élèves parmi les 29 restants (On note B_2 cet ensemble donc $card(B_2) = A_{29}^2$).

Comme dans la question **1.**, On peut avoir dans ce cas $12 \times A_{29}^2 = 9744$ comités possibles.

3. Comme l'élève X est dans le comités, alors on va choisir successivement les 2 élèves restants dans 29 restants. De plus, pour l'élève X, il y a trois possibilités (il peut être président, vice-président ou secrétaire et le comité dans lequel il est président est différent du comité dans lequel où il est vice-président ou secrétaire)

On a alors $3 \times 1 \times A_{29}^2 = 2436$ comités possibles

4. On suit toujours la même démarche qu'en **1.**.
– Le président est garçon, alors on a 18 possibilités.
– Secrétaire est une fille , on a alors 12 possibilités.
– on choisit le vice président parmi les 28 élèves restants. on a alors 28 possibilités.

le nombre de possibilités est donc : $18 \times 12 \times 28 = 6048$

5. – les possibilités de formé un comité avec une fille présidente et un garçon vice-président sont 12×18.
– les possibilités de formé un comité avec un garçon président et une fille vice-présidente sont 12×18.
– les deux membres du comité étant choisis, on choisit un autre membre parmi les 28 élèves restants : donc on a : 28 possibilités.

Le nombre de possibilités est donc $2 \times 12 \times 18 \times 28 = 12096$

Propriété 2 : Principe additif.
Si A_0 , $A_1 \cdots A_k$ forment une partition d'un ensemble fini A alors on a :
$\boldsymbol{Card(A) = Card(A_0) + Card(A_1) + \cdots + Card(A_k)}$

Remarque :
• A_0 , $A_1 \cdots A_k$ forment une partition d'un ensemble fini A si :
  – pour tout i et j avec $i \neq j$; $A_i \cap A_j = \emptyset$
  – $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$
• Ce principe est très utilisé en dénombrement et caractérisé le plus souvent le **"Ou"**.

Exemple

On veut choisir 2 boules de couleurs différentes parmi les 5 boules rouges, 10 boules blanches et 6 boules noires : Combien y a-t-il de possibilités ?

On peut avoir (une boule rouge et une boule blanche) ou (une boule rouge et une boule noire) ou (une boule noire et une boule blanche).
- le nombre de possibilité pour avoir une boule rouge et une boule blanche est : $C_5^1 \times C_{10}^1$.
- le nombre de possibilité pour avoir une boule rouge et une boule noire est : $C_5^1 \times C_6^1$.
- le nombre de possibilité pour avoir une boule noire et une boule blanche est : $C_6^1 \times C_{10}^1$.

On déduit d'après le principe précédent qu'il y a : $C_5^1 \times C_{10}^1 + C_5^1 \times C_6^1 + C_6^1 \times C_{10}^1 = 140$ possibilités

Propriété 3 : Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On note $\bar{A}$, le complémentaire de A :
i. $Card(A) + Card(\bar{A}) = Card(E)$
ii. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

Exercice 2

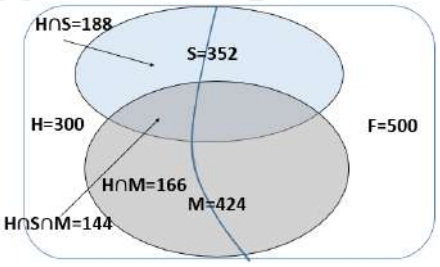
Dans une entreprise, il y a **800 employés**.
- 300 sont des hommes.
- 352 sont membres d'un syndicat.
- 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués
- 166 sont des hommes mariés.
- 208 sont syndiqués et mariés
- 144 sont des hommes mariés syndiqués. On cherche à déterminer le nombre de femmes célibataires non syndiquées.

1. Quel est nombre des employés qui sont des femmes ?
2. Quel est le nombre de femmes mariées ? Quel est le nombre de femme syndiquées ?
3. Quel est le nombre de femme mariées et syndiquées ?
4. Quel est le nombres de femmes célibataires non syndiquées ?.

Solution

Conseil : *Pour ces genres d'exercices, il faut toujours réaliser un diagramme pour mieux voir les choses.*

Le diagramme de cet énoncé est ci-contre.



1. Il y a 800 employés dont 300 hommes. Donc il y a 500 femmes.
2. – Du diagramme, on a $424 - 166 = 258$ femmes mariées.
– Le nombre de femmes syndiquées est : $352 - 188 = 164$
3. Le nombre de femmes mariées et syndiquées est :
$208 - 144 = 64$.
4. le nombres de femmes célibataires non syndiquées est :
$500 - 352 - 424 + 188 + 166 - 144 + 208 = 142$.

II. Théorie des probabilités

1. Notions de bases de la probabilité : quelques définitions

A partir d'un exemple concret nous allons définir ce que sait qu'une expérience aléatoire, la notions d'issue, d'univers et d'évènement .

Exemple

Soient un jeton à deux faces numérotées 1 et 2 et un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On jeter simultanément le jeton et le dé puis on note le résultat sous la forme d'un couple.

Pour un lancé du dé et du jeton, le couple qu'on obtient est forcement dans cet ensemble :
$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6)\}$.

Avant de lancer le dé et le jeton, on ne peut pas prévoir à l'avance quel résultat on va obtenir. Les résultats obtenus sont aléatoires.

Définition 2 :
– **Une Expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec certitude à priori.
– Les résultats possibles de cette expérience sont appelés des **issues** ou, une **éventualité** ou un **résultat possible**. Par exemple $(1,1)$ et $(1,2)$ sont des issues.
– L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et est le plus souvent noté $\mathbf{\Omega}$.

L'univers Ω peut être diviser en de sous-ensemble.Par exemple le sous-ensemble dont « le chiffre sur le jeton est 1 ». Ces sous-ensembles ou parties de Ω sont appelés des **Événements**.

Définition 3 :
Un évènement est une partie (sous-ensemble) de l'univers Ω.
Exemple :
– **Événement $\boldsymbol{A}$** : « le chiffre sur le jeton est 1 ».
– **Événement $\boldsymbol{B}$** : « au moins un des chiffres obtenus est pair ».

cas particuliers :
– L'ensemble vide, $\varnothing$, représente un événement impossible.
– L'univers $\mathbf{\Omega}$, représente un événement certain.

2. Opérations sur les évènements

A partir de certains événements, on en construit d'autres.

Définition 4 : Soit $\mathbf{\Omega}$ un univers fini et non vide associé à une certaine expérience aléatoire. Soient **A** et **B** deux événements.
– L'événement contraire de l'événement **A** est l'événement noté $\bar{\boldsymbol{A}}$.
– L'événement « **A** ou **B** » est l'événement $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.
– L'événement « **A** et **B** » est l'événement $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.
– Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$ alors les évènements **A** et **B** sont dits **incompatibles** ou **disjoints**

Exemple

Soient les évènements :
– **A**=« le chiffre sur le jeton est 2»
– **B**= « le chiffre sur le dé est pair ».
Alors l'évènement **A** ou **B** est l'évènement : « le chiffre sur le jeton est 2 ou le chiffre sur le dé est pair ».
L'évènement $\overline{B}$ est l'évènement « le chiffre sur le dé est impair ».

3. Probabilité d'un évènement

Considérons l'expérience aléatoire de lancé simultané de dé et de jeton décrit ci-dessus et son univers $\mathbf{\Omega}$ associé. En supposant que le dé et le jeton son parfait alors on a par exemple :

– **Une chance** sur **douze** de réaliser l'évènement « Avoir le couple $(2, 4)$ » soit une probabilité de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$.

– L'évènement « Avoir un nombre pair sur le dé et le chiffre 1 sur le jeton » a trois chance sur douze de se réaliser soit une probabilité de $\frac{1}{4}$.

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de l'univers Ω.

Définition 5 : Soit $\mathbf{\Omega}$ un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire (ayant donc un nombre fini d'issues).
Une **probabilité** sur Ω est une application **P** de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbf{[0, 1]}$ vérifiant :
– $P(\Omega) = 1$;
– $\forall\ (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Commentaire :
– La probabilité d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est notée $P(\{\omega_i\})$
– La seule donnée de l'univers ne définit évidemment pas la probabilité. De même, qu'à une expérience aléatoire, on peut associer plusieurs univers, à un même univers on peut associer plusieurs probabilités. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie, un univers associé à cette expérience, est $\Omega = \{pile, face\}$. Si la pièce n'est pas truquée, la probabilité associée est définie par $P(\{Pile\}) = P(\{Face\}) = \frac{1}{2}$. Mais si la pièce est truquée, on peut avoir par exemple $P(\{Pile\}) = \frac{2}{3}$ et $P(\{Face\}) = \frac{1}{3}$.

NB : La **probabilité** d'un élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$ est **toujours inférieur ou égale à 1** ($0 \leq P(A) \leq 1$)

4. Propriétés de calcul des probabilités

Théorème 1 : Soit l'univers fini $\mathbf{\Omega}$ muni d'une probabilité $\boldsymbol{P}$.
i. $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
ii. $P(\varnothing) = 0$
iii. $\forall\ (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
iv. P est **croissant** au sens de l'inclusion : $\forall\ (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Démonstration :
i. $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$. D'après la définition de la probabilité, $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.
$P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
ii. On a : $\overline{\varnothing} = \Omega \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.
iii. soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ tel que $A \subset B$. $B = A \cup (B \setminus A)$ or $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
On déduit que $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
iv. Puisque pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ tel que $A \subset B$, $0 \leq P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ alors $P(B) \geq P(A)$.

Théorème 2 : Soit l'univers fini Ω muni d'une probabilité P. On pose $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et les ω_i, $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux distincts.
i. $\forall\ (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
ii. On pose $P_i = P(\{\omega_i\})$ pour $1 \leq i \leq n$ alors : $\sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$

Commentaire :
– Le point **ii.** traduit le fait que $P(\Omega) = 1$. Ω est un évènement certain.
– A l'opposé de Ω, $\varnothing$ est un événement impossible donc le pourcentage de chance pour qu'il se produise lors de la réalisation d'une expérience aléatoire est nul.

Exercice 3

On lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé.
– Le 1 a une chance sur 2 d'être obtenu .
– les 5 autres numéros ont tous la même probabilité d'être obtenus.
Calculer la probabilité d'obtenir un numéro impair.

Solution :

Notons P_i la probabilité d'obtenir le numéro i pour $1 \leq i \leq 6$. On a alors : $\begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{2} \\ P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 \end{cases}$.

Or pour un lancé de dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

D'après le théorème 2 on a : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = P_1 + 5P_2 = 1$. Or $P_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P_2 = \dfrac{1}{10}$.

D'où la probabilité d'obtenir un numéro impair est : $P_1 + P_3 + P_5 = \dfrac{7}{10}$.

5. Cas d'équiprobabilité : Probabilité uniforme

C'est le cas où les événements élémentaires sont équiprobables :

Définition 5 :
Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un univers fini non vide associé à une certaine expérience aléatoire. On pose $\boldsymbol{card(\Omega) = n}$.
La **probabilité uniforme** sur Ω est la probabilité $\mathbf{P}$ définie par les égalités : $\forall\ \omega \in \Omega$, $\boldsymbol{P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}}$.
Autrement dit, si les événements élémentaires ont tous la même probabilité de se produire, on dit que les issues sont équiprobables, ou encore, que l'univers est équiprobable.

Commentaire :
Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » ... indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité .

Théorème 3 : Soit Ω un univers fini non vide associé à une certaine expérience aléatoire. Soit P la probabilité uniforme sur Ω. Alors :

$$\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Commentaire :
– La formule $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$ peut se réénoncer traditionnellement sous la forme : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

– Dans le cas d'un univers équiprobable, le calcul d'une probabilité se ramènera donc à savoir dénombrer l'univers et ses sous ensembles

Exercice 4

1. Sur une grille sur laquelle sont écrits les numéros de 1 à 49, on coche 6 de ces numéros.
Dans une grosse boule transparente et creuse sont placées 49 boules numérotées de 1 à 49. Le jour du tirage du loto, 6 boules sont extraites au hasard de l'urne. On gagne si on a coché les 6 numéros extraits.
Quelle est la probabilité de gagner au loto ?
2. Une course de chevaux a 18 partants numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux terminent la course et il n'y a pas d'ex-æquo. Avant la course, un joueur coche au hasard sur une grille 3 chevaux dans leur ordre d'arrivée. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Solution :
1. Dans la pratique, les boules sont tirées successivement l'une après l'autre sans remise mais l'ordre ne compte pas. Cela revient à un tirage simultané de 6 boules successivement.
On choisit donc pour univers Ω l'ensemble des tirages simultanés de 6 boules parmi 49. Alors
$card(\Omega) = C_{49}^6 = 13\ 983\ 816$.
On a tiré les 6 boules au hasard. On est dans la situation où les événements élémentaires sont équiprobables. Soit A l'événement : « on gagne ». Il existe un et un seul tirage pour lequel l'événement A est réalisé (quand les 6 numéros que l'on a coché sortent) ou encore $card(A) = 1$. La probabilité de gagner au loto est :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{13\ 983\ 816} = 7.15\ 10^{-8}$$

2. On peut modéliser cette expérience comme un tirage successif sans remise et sans répétition. Donc, c'est un arrangement sans répétition de 3 éléments dans un ensemble de 18 éléments.
Alors $card(\Omega) = A_{18}^3 = 4\ 896$.
Parmi ces 4 896 arrivées possibles, une et une seule est favorable au joueur.

Alors La probabilité demandée est donc $P = \frac{1}{4896} = 2.04\ 10^{-4}$.

III. Probabilités conditionnelles

1. Découverte des probabilités conditionnelles

Exemple

Dans un certain lycée, il y a 747 élèves répartis comme suit :

	seconde	**Première**	**Terminale**	**Total**
Filles	183	96	141	420
garçons	120	114	93	327
Total	303	210	234	747

On choisit un élève au hasard. On note :
F : « l'élève choisi est une fille »
G : « l'élève choisi est une garçon »
S : « l'élève choisi est un élève de seconde »
P : « l'élève choisi est un élève de première »
T : « l'élève choisi est un élève de terminale »

• La probabilité que l'élève choisi soit un élève de terminale est : $\frac{234}{747} = 0.313$ et la probabilité que cet élève soit une fille est $\frac{420}{747} = 0.562$.

• Si on choisit cet élève parmi les filles uniquement, la probabilité qu'il soit un élève de terminale est $\frac{141}{420} = 0.336$.
On a ainsi considéré uniquement les 420 élèves qui sont des filles. Cette dernière probabilité est une probabilité conditionnelle : c'est la probabilité que l'élève choisi soit un élève de terminale conditionnée par le fait que cet élève est une fille.
Dit autrement, on a calculé la probabilité que l'élève choisi soit un élève de terminale sachant que cet élève est une fille. On note $P_F(T)$ (et on lit « la probabilité de T sachant F »).($P_F(T) = 0.336$)

NB : Il faut bien distinguer cette probabilité de la probabilité de l'événement « l'élève choisi est une fille de terminale » qui est l'événement $F \cap T$. Pour ce dernier événement, on considère de nouveau les 867 élèves. Parmi ces 867 élèves, il y en a 141 qui sont des élèves des filles en classe de terminale.

Il y a un lien entre les probabilités $P_F(T)$ et $P(F \cap T)$: $P_F(T) = \frac{141}{420} = \frac{\frac{141}{747}}{\frac{420}{747}} = \frac{P(F \cap T)}{P(F)}$

Ainsi la probabilité que l'élève choisi est une fille sachant qu'elle est en terminale est notée $P_F(T)$ est $= \frac{P(F \cap T)}{P(F)}$.

On pose donc la définition suivante :

2. Définition de la probabilité de A sachant B

Définition 7 : On suppose donné un univers Ω fini et une loi de probabilité P sur Ω.
Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'évènement B sachant que l'événement A est réalisé est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

Remarque :
– la probabilité de B sachant A peut être notée aussi : $P(B/A)$ ou $P_{/A}(B)$
– Il faut remarquer que pour un évènement A, la probabilité de $\overline{A}$ sachant A est nulle ($P(\overline{A}/A) = 0$ car $P(A \cap \overline{A}) = 0$ puisque $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $P(\varnothing) = 0$ par définition.

3. Propriétés des probabilités conditionnelles

En appliquant la définition de probabilité conditionnelle, on a les propriétés suivantes :

Théorème 4 : Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
i. Pour tout événement B, $0 \leq P_A(B) \leq 1$
ii. $P_A(\varnothing) = 0$ et $P_A(\Omega) = 1$
iii. Pour tout évènement B, $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$. De plus si $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.
iv. Pour tout événement B, $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
v. Si B et C sont deux événements incompatibles, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$

4. Formule de probabilité totale

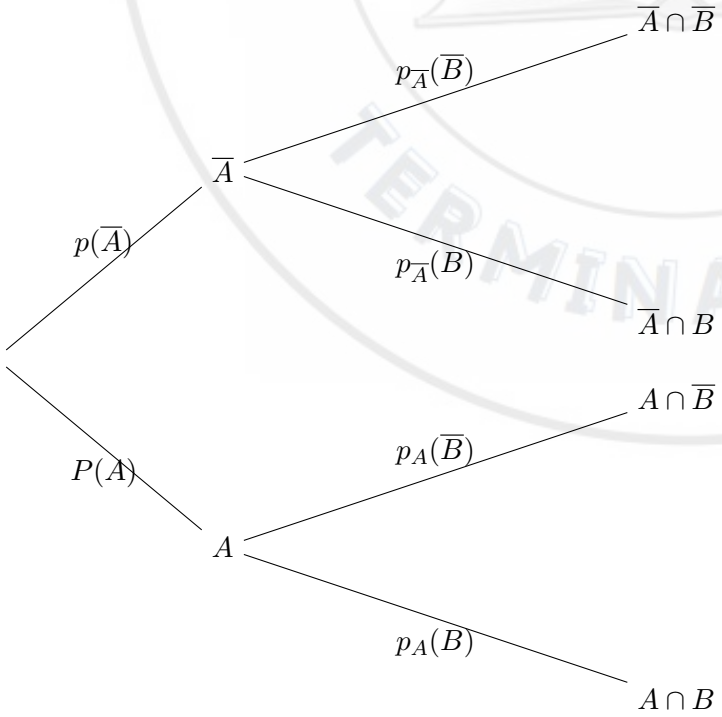
Propriété :
Soit Ω un univers. Soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n une partition de Ω.
i. Pour tout événement B, $P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n)$ (1)
ii. Pour tout k $(1 \leq k \leq n)$ $P(B \cap A_k) = P_{A_k}(B) \times P(A_k)$
Et par conséquent, pour tout évènement B, $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$ (2)

Démonstration
Rappel : A_1, A_2, $\cdots$, A_n une partition de Ω signifie que pour tout i et j entre 1 et n avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (les évènements A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont dits deux à deux incompatibles) et $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = \Omega$. On déduit que pour un évènement B, $B = \bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k$ et comme les évènements A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont deux à deux incompatibles alors les évènements $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $\cdots$, $B \cap A_n$ sont aussi deux à deux incompatibles
• Ainsi, pour un évènement B, $B = \bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k \Rightarrow P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$ car les évènements $B \cap A_k$ sont deux à deux incompatible. Donc $P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n)$ (*)
• En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, on a : $P(B \cap A_k) = P_{A_k}(B) \times P(A_k)$ (**)
De (*) et (**) on déduit que pour tout évènement B, $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$

Remarque :
• Dans la propriété précédente, la formule (2) est une autre façon d'écrire (1). Donc les formules (1) et (2) sont identiques et sont appelées formule de probabilité totale.
• La démonstration de cette propriété avec une application fait l'objet du **problème 7**

5. Utilisation d'un arbre pondéré

On énonce ici les différentes règles de construction d'un arbre de probabilités permettant de modéliser certaines expériences aléatoires.



– **Règle n°1** : A chaque colonne, les évènements forment une partition de l'univers.
– **Règle n°2** : A partir d'un nœud de l'arbre, on dessine des « branches ». A partir du deuxième niveau, la probabilité des branches sont des probabilités conditionnelles.
– **Règle n°3** : La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches ;
– **Règle n°4** : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui y conduisent.

Exercice 5

A propos de covid-19

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par le nouveau Corona virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
– La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
– La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).
On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T .

1-a. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$ et $P_V(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

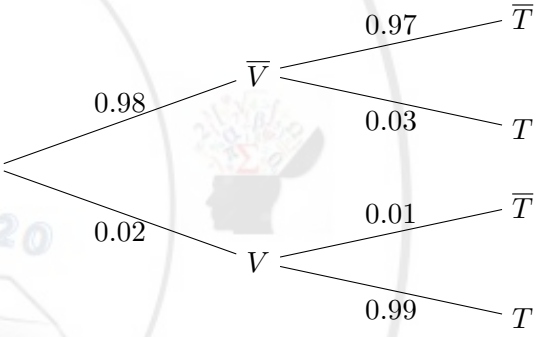
b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est $0,0492$.

3-a. Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chances » que la personne soit contaminée ».

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Solution :
1-a. L'énoncé fournit : $P(V) = 0.02$, $P_V(T) = 0.99$, $P_{\overline{V}}(T) = 0.03$ Représentons la situation par un arbre :
$P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0.97$ et $P_V(\overline{T}) = 0.01$



b. Comme $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V)$ alors $P(V) = 0.0198$
2. Pour une personne prise au hasard on a deux possibilité :
– Soit la personne est saine mais le test est positif,
– Soit la personne est malade et le test est positif :
Alors $P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$.
Or $P(\overline{V} \cap T) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(T) = 0.98 \times 0.03 = 0.0294$
Ainsi $P(T) = 0.0492$.
3-a. On va calculer alors $P_T(V)$:
$P_T(V) = \dfrac{P(T \cap V)}{P(T)} = \dfrac{0.0198}{0.492} = 0.4$. D'où $P_V(T) = 0.4$
b. On va chercher $P_{\overline{T}}(\overline{V})$:
$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{V})}{P(\overline{T})}$. Or $P(\overline{T} \cap \overline{V}) = P_{\overline{V}}(\overline{T}) \times P(\overline{V}) = 0.97 \times 0.98 = 0.9506$ et $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 0.9508$
Ainsi $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0.9998$

6. Indépendance de deux événements

Définition 8 : Soient A et B deux événements.
A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

De la définition précédente, on déduit le théorème suivant :

Théorème 5 : Soient A et B deux événements de probabilités respectives non nulles.
– A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
– A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.
– Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants

Commentaire :
– Quand A et B sont indépendants (et A a une probabilité non nulle), savoir A n'a aucune incidence sur la probabilité de B.

– Il faut prendre garde à ne pas confondre la notion d'incompatibilité de deux événements et la notion d'indépendance de deux événements. Déjà, la notion d'incompatibilité est une notion ensembliste (A et B incompatibles si et seulement si $A \cap B = \varnothing$). Cette notion est définie sans qu'intervienne des probabilités alors que la définition de l'indépendance fait référence à une probabilité.
– Les quatre situations sont possibles : incompatibles et indépendants, incompatibles et non indépendants, non incompatibles et indépendants, non incompatibles et non indépendants. Par exemple, si A et B sont incompatibles et tous deux de probabilités non nulles, avec $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$, alors A et B ne sont pas indépendants.

Exemple

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches et donc 10 boules au total. On tire deux boules de cette urne. On note A l'événement « la première boule tirée est noire » et B l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

– Si le tirage de ces deux boules s'effectue **successivement avec remise** de la boule tirée dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{10}$ et ceci quelle que soit la couleur de la boule tirée en premier. Dans cette situation les événements A et B sont indépendants.
– Si le tirage de ces deux boules s'effectue **successivement sans remise** de la boule dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{9}$ si la première boule tirée est blanche et $\frac{1}{9}$ si la première boule tirée est noire. La probabilité de B varie en fonction de la réalisation ou non de l'événement A. Dans cette situation les événements A et B ne sont pas indépendants.

Remarque :
• Pour démontrer que deux évènements A et B sont **indépendants ou non**, On détermine $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$:
– Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors les évènements A et B sont indépendants.
– Si $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ alors les évènements A et B ne sont pas indépendants.
• Pour démontrer que deux évènements A et B sont **incompatibles ou non**, On détermine $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$:
– Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ alors les évènements A et B sont incompatibles.
– Si $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$ alors les évènements A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice 6

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication deux défauts peuvent apparaître, désignés par a et b. 2% des montres fabriquées présentent le défaut a et 10% présentent le défaut b. Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :
A : « la montre tirée présente le défaut a » ; B : « la montre tirée présente le défaut b » ; C : « la montre tirée ne présente aucun défaut » ; D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».
On suppose les événements A et B indépendants.
1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0.882
2. Calculer la probabilité de l'événement D.

Solution :
1. Une montre tirée ne présente aucun défaut si elle ne présente ni le défaut de type a, ni le défaut du type b. Puisque les événements A et B sont indépendants, on sait que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants et donc : $P(C) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.882$.
2. Si on tire une montre au hasard, elle peut être défectueuse ou non. La probabilité qu'elle soit défectueuse est de 0.118 d'après la question 1.
Ainsi $P(D) = 1 - P(C) - P(A \cap B) = 1 - P(C) - P(A) \times P(B)$. D'où $P(D) = 0.116$

Exercices

Dénombrements

Exercice 1

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros 1, 2,$\cdots$, 49. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on en extrait 6. On obtient ainsi les numéros gagnants.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages nous fournissent exactement 1 numéro gagnant ?
3. Combien de tirages nous fournissent exactement 2, 3, 4, 5, 6 numéros gagnants ?

Exercice 2

1. Un groupe de 3 élèves de Terminale doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 élèves dans la classe).
2. Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ? (Sans se préoccuper du sens des mots)
3. Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois Combien doit-on organiser de matchs ?
4. De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Exercice 3

1. Dans une promotion de 36 étudiants :
   - 22 maîtrisent le C++.
   - 22 maîtrisent le C et 18 maîtrisent le Java.
   - De plus, 10 étudiants maîtrisent à la fois le C++ et le C
   - 9 maîtrisent à la fois le C et le Java
   - 11 maîtrisent à la fois le C++ et le Java.

   Combien d'étudiants maîtrisent les trois langages de programmation ?
2. Dans un lycée de 100 élèves :
   - 53 pratiquent le football
   - 20 pratiquent seulement basket-ball sans football
   - et 13 le football et basket-ball.

   a. Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

   b. Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?

   c. Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

Exercice 4

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Dans cette question les codes peut avoir des chiffres identiques ou distincts :
   a. Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   b. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

   c. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

   d. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   a. Combien y-a-t-il de codes possibles ?

   b. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

c. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 5

Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1. Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
2. Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?
3. Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice 6

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que :

- 112 membres ont voté pour A
- 67 ont voté pour A et B
- 32 ont voté pour A et C
- 12 ont voté pour A, B et C
- 5 ont voté pour B et C mais pas pour A
- 56 ont voté pour C mais pas pour A ni B
- et 22 ont voté pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 7

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. au moins une boule blanche a été tirée
2. une boule noire au plus a été tirée
3. trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
4. deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées.

Exercice 8

Dans une urne se trouvent 9 boules :

- 4 rouges numérotées 0 ;1 ;1 ;2
- 3 vertes numérotées 1 ;2 ;2
- et deux noires numérotées 1 ; 3.

On en tire 3 boules et on considéré les évènements suivants :
A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes deux à deux »
B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »
C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 »
D « obtenir au moins une boule rouge »
Trouver le nombre de possibilités des évènements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :

1. Tirage de 3 boules simultanément
2. Tirage de 3 boules successivement avec remise
3. Tirage de 3 boules successivement sans remise.

Exercice 9

Soient les entiers naturels n et p tel que $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer que : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} C_{n-1}^p = 0$

Probabilité

Exercice 1

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate ?
3. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate ?
4. Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice 2

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1. On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :
   - **a.** De ne tirer que 3 jetons verts ;
   - **b.** De ne tirer aucun jeton vert
   - **c.** De tirer au plus 2 jetons verts ;
   - **d.** De tirer exactement 1 jeton vert.
2. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions **a.**,**b.**, **c.** et **d.**.

Exercice 3

1. On lance un dé à 6 faces. On note P_i la probabilité de sortie de la face marquée i . Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : 1 $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.
   - **a.** Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?
   - **b.** Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
2. Maintenant On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.
   - **a.** Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
   - **b.** Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 4

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse ;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 2 et est défectueuse. En déduire la probabilité que la pièce soit défectueuse ;
4. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 5

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relectures pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ?
3. Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 6

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.

- 60% des élèves pratiquent un instrument à cordes (C) .
- 45% des élèves pratiquent un instrument à vent (V)
- 10% des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.

1. On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.
   a. Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »
   b. Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »
2. On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.
   a. Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0,999$

Exercice 7

Une urne U contient 8 boules indiscernables au toucher : 4 Boules rouges et 4 boules bleues
Une urne V contient 6 boules indiscernables au toucher : 2 Boules rouges et 4 boules bleues.
On considère l'expérience suivante :
On tire au hasard une boule de l'urne U : Si elle est rouge, on la met dans l'urne V, puis on tire une boule de l'urne V, Si elle est bleue, on la met à côté, puis on tire une boule de l'urne V.
On considère les deux événements :
R_U : « la boule tirée de l'urne U est rouge »
B_U : « la boule tirée de l'urne U est bleue »
R_V : « la boule tirée de l'urne V est rouge »
B_V : « la boule tirée de l'urne V est bleue » .

1. Calculer la probabilité de chacun des événement : R_U et B_U.

2- a. Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que et l'événement R_U est réalisé.
   b. Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que et l'événement B_U est réalisé.
   c. Montrer que $P(B_V) = \dfrac{13}{21}$.
   d. En déduire la probabilité de l'événement R_V

Exercice 8

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\varepsilon = \{A, B, C, D, \Omega\}$. Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de ε à un autre. La seule contrainte est que si un saut relis deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. A chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ (c'est-à-dire avant le premier saut) elle se trouve au point Ω.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Ω_n l'évènement «la puce se trouve au point Ω à l'issue de son n-ième saut»
On définit de même les évènements A_n ,B_n ,C_n et D_n. On notera $p_n = p(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$)

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier les égalités :
   $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$

3. Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. On pose $q_n = p_n - \dfrac{1}{4}$. Montrer que $(q_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

5. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.
En déduire la probabilité que la puce se trouve en Ω pour un nombre infini de sauts.

Problèmes

Problème 1

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit n un entier tel que $0 \leq n \leq 10$. On place maintenant n boules blanches et $10 - n$ boules noires dans l'urne A et les $10 - n$ boules blanches et n boules noires restantes dans l'urne B.
On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
On désigne M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend $n = 6$. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\dfrac{1}{55}\left(-n^2 + 10n + 5\right)$

c. Pour quelles valeurs de n l'évènement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{M}$?

Problème 2

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est 0.1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0.8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0.6

On note, pour tout entier naturel n non nul :
– G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
– p_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $p_1 = 0.1$.

1. Montrer que $p_2 = 0.62$.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie.
Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite (p_n).

6. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

7. En déduire la limite de la suite (p_n).

8. Déterminer par calcul le plus petit entier naturel n tel que $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.

Problème 3

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(a, -5, 1-a)$ et $(1+b, 1, b)$.

Montrer que la probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est égale à : $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrit ci-après : Au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

- Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
- Si B obtient des vecteurs orthogonaux et A des vecteurs non orthogonaux, B est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie et le jeu continue.
Pour tout entier naturel n, on désigne par :
A_n l'évènement : "A gagne la n-ième partie"
B_n l'évènement : "B gagne la n-ième partie"
C_n l'évènement : "le jeu continue après la n-ième partie"

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$

Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$

3- **a.** Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égale à 0.01

Problème 4

Dans un lycée, les élèves candidats au baccalauréat se répartissent en 2022 selon les trois séries du lycée : C_4, D et A_4. Nous savons de plus que :

- 37% des candidats ont choisi la série C_4.
- 25% des candidats ont choisi la série A_4.
- 21% des candidats ont choisi la série C_4 et ont obtenu le baccalauréat.
- $32,5\%$ des candidats ont choisi la série D et ont obtenu le baccalauréat.
- De plus, parmi les candidats ayant choisi la série A_4, $72,5\%$ ont obtenu le baccalauréat.

On interroge un candidat pris au hasard. On note :
C l'événement « le candidat a choisi la série C_4 » ;
D l'événement « le candidat a choisi la série D » ;
A l'événement « le candidat a choisi la série A_4 » ;
R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».
On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.

2- **a.** Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi la série D.

b. Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi la série A_4 et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi la série A_4 et ait échoué au baccalauréat ?

4. Ce candidat a choisi la série C_4. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?

5. Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats dans ce lycée est $71,6\%$.

6. On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.

a. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit admis ?

b. Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient admis ?

Problème 5

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :

- sa sensibilité : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
- sa spécificité : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
- sa valeur prédictive positive (ou valeur diagnostique) : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
- sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
– la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
– la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).
On notera par la suite les évènements M :"l'individu est malade " et T :" le test est positif ".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.

a. Calculer la probabilité de l'évènement T.

b. Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.

c. On admet que le résultat du test est correct s'il est conforme à l'état de santé de la personne soumise au dépistage.
Déterminer la probabilité que le résultat du test soit correct.

2. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.

a. Déterminer de même que précédemment les valeurs prédictives positive et négative que l'on notera respectivement $G(f)$ et $H(f)$.

b. Étudier les fonctions G et H et tracer l'allure de leur courbe représentative.

c. Quel inconvénient majeur présente, dans une population, le dépistage d'une maladie rare ?

Problème 6

Partie I

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

1. Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

2. Pour $n \geq 2$, on considère les évènements A_1, $A_2 \cdots A_n$ tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$

a. En remarquant que pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}$, montrer que $P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k)$ est bien définie.

b. Écrire plus simplement $\prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k)$.

c. En déduire que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k)$.

Partie II

Application 1 : Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne.
Pour $1 \leq i \leq n$, on note E_i :« On obtient deux boules de couleurs différentes au i-ième tirage »

1. Déterminer $P(E_1)$.

2. Pour $1 \leq i \leq n-1$, déterminer $P_{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k}(E_{k+1})$.

3. En utilisant la partie **I**/, déduire que $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

4. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Application 2

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

– si au temps n, la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$, elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

– si au temps n, la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On note A_n l'événement « au temps n, la particule est à l'état 1 » et T_n l'événement « la première fois que la particule est à l'état 1 est le temps n ».

On note P_n la probabilité de l'événement A_n et on suppose que $P_0 = 1/2$.

1. Trouver une relation entre P_{n+1} et P_n. En déduire que $P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4^n}\left(P_0 - \frac{1}{3}\right)$ puis en déduire la valeur explicite de P_n.

2. Calculer $P(T_0)$ et $P(T_1)$.

3. Déterminer $P(T_n)$ pour tout $n \geq 2$.

Problème 7

Partie A

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé fini (Ω, P) tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

1. Montrer que $P_B(A) = P(A) \times P_A(B)/P(B)$.

2. On suppose de plus que $P(\overline{A}) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$.

3. Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A_1, $A_2 \cdots A_n$ des évènements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ et pour $1 \leq k \leq n$, $P(A_k) \neq 0$.

a. Soit B un évènement. On admet $B = \bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k$.

Que peut-on dire des évènement $A_k \cap B$ pour $1 \leq k \leq n$?

En déduire que pour tout évènement B, $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$.

b. En déduire que pour tout évènement B, et pour $1 \leq k \leq n$, $P_B(A_k) = \dfrac{P(A_k) \times P_{A_k}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}$

Partie B : Application.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 »

a. Déterminer $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$. En déduire $P(B)$. On pourra remarquer que (A et $\overline{A}$) vérifient les hypothèses de la question 3 partie **A** et on pourra utiliser les résultats de cette question pour $n = 2$.

b. Moyennant la question **1.** partie **A**, Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Notons une nouvelle fois A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ».

a. Déterminer $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$. En déduire $P(B)$.

b. Montrer que $P_B(A) = \dfrac{3^{n-1}}{1+3^{n-1}}$.

c. On note P_n, la probabilité que le dé soit pipé, déterminer P_n.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. Interpréter la limite trouvée.

CHAPITRE 11

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES RÉELLES

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, on illustrera toutes les notions à l'aide de l'expérience aléatoire suivante :

Expérience aléatoire d'illustration :
Soient un jeton à deux faces numérotées 1 et 2 et un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On jette simultanément le jeton et le dé puis on note le résultat sous la forme d'un couple.

L'univers engendré est alors :
Ω={(1,1) ;(1,2) ;(1,3) ;(1,4) ;(1,5) ;(1,6) ;(2,1) ;(2,2) ;(2,3) ;(2,4) ;(2,5) ;(2,6)}

I. Variables aléatoires réelles sur un univers fini

A l'univers $\mathbf{\Omega}$ ci-dessus , on peut associer plusieurs opérations aux issues possibles. Par exemple :
• On note le produit de chiffres qui apparaissent à chaque lancé. Alors les valeurs possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 et 12.
• ou on peut désirer faire la somme de chiffres qui apparaissent à chaque lancé. Et dans ce cas les valeurs possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
• ou encore on peut chercher à savoir le nombre de chiffre pairs qui apparaissent à chaque lancé : Les valeurs possibles sont alors : 0, 1, 2.

On peut facilement remarquer qu'à partir d'une expérience aléatoire, qu'il est possible de définir une infinité d'opérations. Ces opérations sont appelées de **variables aléatoires**.

1. Définition d'une variable aléatoire réelle

Définition 1 : Soit Ω un univers non vide.
Une **variable aléatoire réelle** X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Il s'agit donc d'un événement, qui peut être noté : $[X = x_i]$ ou $(X = x_i)$

Notations
– $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ sont les valeurs valeurs possibles. Par exemple si la variable aléatoire attachée à chaque issue est égale à la somme des chiffres de l'issue alors $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
– La notation $[X = x_i]$ désigne l'évènement « X prend la valeur x_i ». Par exemple $(X = 6)$ désigne l'évènement :« la somme des chiffres vaut 6 ».
– On peut également définir des événements à l'aide d'inégalités sur X : Par exemple la notation $[X < \beta]$ désigne l'évènement : « X prend des valeurs strictement inférieurs à β »

Commentaire :
On notera qu'une « variable aléatoire » n'est ni une variable (puisque c'est une application), ni aléatoire (aucune probabilité n'apparaît dans la définition d'une variable aléatoire).

2. La loi de probabilités d'une variable aléatoire

Définition 2 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application :

$$P_i : \{x_1, x_2, ..., x_p\} \to [0,1]$$
$$x_i \longmapsto P(X = x_i)$$

Concrètement, définir la loi de probabilité d'une variable X, c'est :
i. lister les valeurs possibles de la variable.
ii. remplir le tableau suivant.
Loi de probabilité de X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
$P[X = x_i]$	$P[X = x_1]$	$P[X = x_2]$	$\cdots$	$P[X = x_p]$

$\sum_{i=1}^{p} P[X = x_i] = 1$

Remarque :
Il faut donc toujours vérifier, une fois le tableau de la loi de probabilité rempli, que la somme de tous les $P[X = x_i]$ vaut bien 1 : $\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{P[X = x_i] = 1}$.

Exemple

On revient à notre exemple de lancé de dé et de jeton. On considère X la variable aléatoire qui représente le produit des chiffres qui apparaissent.

Alors on a : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$.
Pour le calcul des probabilités pour ces genres d'expériences, on peut utiliser un tableau double comme ci-dessous :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12

Pour chaque case, faire *ligne* $\times$ *colonne*

Du tableau précédent, on peut facilement calculer les probabilités $P[X = x_i]$.
La loi de probabilité de X

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**
$\boldsymbol{P[X = x_i]}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On vérifie bien que $\sum_{i=1}^{12} P[X = x_i] = 1$

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 3 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω.
La **fonction de répartition** associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x)$$

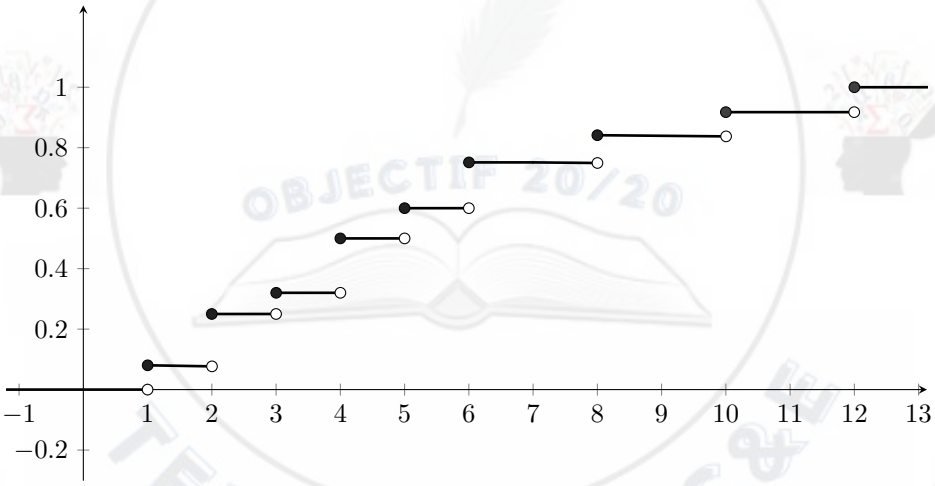
Exemple

Déterminons et représentons la fonction de répartition de la variable aléatoire de l'exemple 1.

En utilisant les résultats de l'exemple on a :

- Pour $x < 1$, $F(x) = 0$.
- Pour $1 \leq x < 2$, $F(x) = \dfrac{1}{12}$
- Pour $2 \leq x < 3$, $F(x) = \dfrac{3}{12}$
- Pour $3 \leq x < 4$, $F(x) = \dfrac{4}{12}$
- Pour $4 \leq x < 5$, $F(x) = \dfrac{6}{12}$
- Pour $5 \leq x < 6$, $F(x) = \dfrac{7}{12}$.
- Pour $6 \leq x < 8$, $F(x) = \dfrac{9}{12}$
- Pour $8 \leq x < 10$, $F(x) = \dfrac{10}{12}$
- Pour $10 \leq x < 12$, $F(x) = \dfrac{11}{12}$
- Pour $x \geq 12$, $F(x) = \dfrac{12}{12} = 1$

Représentation graphique de la fonction de répartition



II. Espérance, Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Espérance E(x) d'une variable aléatoire

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
notons $x_1, \ldots, x_n$, les valeurs réelles deux à deux distinctes prises par la variable aléatoire X.
L'espérance de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

2. La variance

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
notons $x_1, \ldots, x_n$, les valeurs réelles deux à deux distinctes prises par la variable aléatoire X.
La Variance de la variable aléatoire X est :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ avec } E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i)$$

Commentaire

– La variance est toujours un réel positif.

– Habituellement le calcul se fait à travers la formule : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)\right)^2$.

3. L'écart type

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
L'écart-type de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque

L'écart-type est bien défini car la variance est toujours positive.

La lois de probabilité de X de l'exemple 1 est :

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**
$\boldsymbol{P[X = x_i]}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

De la loi de probabilité, on peut calculer l'espérance, la variance et l'écart-type :

– $\boxed{E(X) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{2}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{2}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{2}{12} + 8 \times \frac{1}{12} + 10 \times \frac{1}{12} + 12 \times \frac{1}{12} = \frac{21}{4}}$

– Pour le calcul de la variance, on connait déjà $E(X)$. Il faut juste calculer $E(X^2)$.

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{12} + 2^2 \times \frac{2}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} + 4^2 \times \frac{2}{12} + 5^2 \times \frac{1}{12} + 6^2 \times \frac{2}{12} + 8^2 \times \frac{1}{12} + 10^2 \times \frac{1}{12} + 12^2 \times \frac{1}{12} = \frac{133}{4}$.

D'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{133}{4} - \frac{441}{16} = \frac{91}{16}$. $\boxed{V(X) = \frac{91}{16}}$

– l'écart type est alors : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{91}}{4}}$

Exercice

Soient un jeton à deux faces numérotées 1 et 2 et un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On jeter simultanément le jeton et le dé . On note X la variable aléatoire attachée à chaque issue qui représente le nombre de chiffres pairs puis on lit les chiffres pairs de l'issue.

1. Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

On constitue à l'aide de cette expérience un jeu de chance qui est le suivant :

Le joueur mise $600F$ et lance simultanément le jeton et le dé et on lit les chiffres qui apparaissent sur la face de .

- si le joueur n'obtient aucun nombre pair, il gagne $900F$
- si le joueur obtient un unique chiffre pair, il perd sa mise.
- si le joueur obtient deux nombres pairs, il gagne 1 200F.

Soit G la variable aléatoire qui représente le gain algébrique, c'est à dire le gain moins la mise de départ.

2-a. Déterminer la loi de probabilité de G.

b. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type associés à G.

c. Ce jeu est t-il favorable au joueur ?

Solution

1. A chaque issue, les deux chiffres qui apparaissent sur les faces supérieures du jeton et du dé peuvent être tous pairs, tous impairs ou seulement un est pair et l'autre impair. Alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Le tableau à double entrées permet de trouver facilement les probabilités :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$

X	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{P[X = x_i]}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$

2-a. D'après l'énoncé, le joueur peut gagner -$600F$, $300F$ ou 600.

Alors $X(\Omega) = \{-600, 300, 600\}$.

En utilisant la question précédente, la loi de probabilité de G est alors :

X	**-600**	**300**	**600**
$\boldsymbol{P[X = x_i]}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$

b. – L'espérance de G : $E(G) = -600 \times \frac{6}{12} + 300 \times \frac{3}{12} + 600 \times \frac{3}{12} = -75$

– La variance : $E(X^2) = 600^2 \times \frac{6}{12} + 300^2 \times \frac{3}{12} + 600^2 \times \frac{3}{12} = 292\ 500$ Alors $V(X) = 286\ 875$

– L'écart-type est alors : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 535.61$

c. L'espérance mathématique est négative donc le joueur a plus de chance de perdre que de gagner. Le jeu est alors défavorable au joueur.

Exercices

Exercice 1 :
Un joueur lance un dé à 6 faces qui a été truqué de la façon suivante :

- La probabilité de sortie du 6 est le double de celle obtenue dans le cas d'équiprobabilité ;
- Les probabilités de sortie des cinq autres résultats sont égales.

On appelle X la variable aléatoire égale au résultat de sorti.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quel est le résultat dont la sortie est le plus probable ?
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. On suppose le dé non truqué, reprendre les questions précédentes.

Exercice 2 :
Une urne contient sept(7) boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule.

- Si elle est rouge, il gagne $600F$
- si elle est jaune, il perd $300F$
- si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée.
- Si cette deuxième boule est rouge, il gagne $480F$, sinon il perd $240F$.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur .

1. Établir la loi de probabilité de la variable X.
2. Calculer l'espérance de X .
3. Calculer la variance et l'écart-type de X .
4. Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique .
5. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice 3
Dans une urne il y a $n-1$ boules blanches, n boules vertes, $n+1$ boules rouges. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. On tire 3 boules simultanément de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.
   a. Calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et vérifier qu'elle est indépendante de n.
   b. Déterminer la Variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

2. On suppose désormais que $n = 4$.
Un premier tirage simultanée de 3 boules ayant été effectué, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on tire une deuxième fois trois boules simultanément. On désigne par A_0, A_1, A_2 , A_3, et B les événements suivants :

$\boldsymbol{A_0}$: le premier tirage ne contient pas de boule verte.
$\boldsymbol{A_1}$: le premier tirage contient exactement une boule verte.
$\boldsymbol{A_2}$:le premier tirage contient exactement deux boules vertes.
$\boldsymbol{A_3}$: le premier tirage contient exactement trois boules vertes.
$\boldsymbol{B}$: le deuxième tirage contient exactement une boule verte.

a. Calculer les probabilités des événements A_0, A_1, A_2 et A_3.
b. Calculer $p(B/A_0)$, $p(B/A_1)$, $p(B/A_2)$, $p(B/A_3)$.·
c. En déduire les probabilités des événements $B \cap A_0$, $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $B \cap A_3$.
d. Calculer la probabilité de l'événement B.

Exercice 4

Afin d'éviter des licenciements dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et de la faire passer de cinq à quatre jours.
L'un des trois jours de congés sera dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine. Dans un sac, on dispose six boules portant chacune le nom d'un jour de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé choisit ses deux jours de congé autre que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux boules de ces boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1- **a.** Soit A l'évènement : L'un des jours de congé est le Lundi et B l'évènement : L'un des jours de congé est le samedi.
Démontrer que : $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

b. On définit les évènements C et D suivants :
C : parmi les jours de congés, figurent le lundi ou le samedi ou les deux jours.
D : les jours de congés sont trois jours consécutifs.

Calculer $P(C)$ et $P(D)$.

c. Hervé choisit mardi et jeudi et Assou aimerait bien avoir les mêmes jours de congé qu'Hervé. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte six employés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Calculer l'espérance mathématiques et la variance de X. En déduire l'écart-type de X.

c. Calculer la probabilité pour qu'au plus 4 employés tirent le samedi comme jour de congé.

d. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux employés tirent le samedi comme jour de congé.

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Une urne contient des boules numérotées de 1 à $2n$. On y trouve :

- 1 boule portant le numéro 1
- 2 boules portant le numéro 2
- 2^2 boules portant le numéro 3
- 2^3 boules portant le numéro 4

etc, et enfin :

- 2^{2n-1} boules portant le numéro $2n$.

1. On appelle N le nombre de boules contenues dans l'urne, montrer que $N = 4^n - 1$ et que c'est un multiple de 3.

2. On désigne par I le nombre de boules portant un numéro impair, et par P le nombre de boules portant un numéro pair.

a. Montrer que $I = \frac{4^n - 1}{3}$.

b. Exprimer alors I en fonction de N et montrer que : $P = 2I = \frac{2N}{3}$.

On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne et on désigne par X le nombre de boules tirées portant un numéro pair.

3. Donner en fonction de N, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4. Calculer son espérance mathématique et vérifier qu'elle ne dépend pas de N.
On suppose maintenant que $100 \leq I \leq 1000$.

5. Quel est le plus grand numéro porté par les boules.

6. On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule porte un numéro supérieur ou égal à 8.

Exercice 6 :
Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques.
4. Le droit de participation au jeu est de 3.000 francs.

- si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
- s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 ;
- s'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :
a. Déterminer les valeurs prises par X .
b. Déterminer la loi de probabilité de X .
c. Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 7

1. Soit $p \in]0,1[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ on définit $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} kp(1-p)^{k-1}$ et $v_n = \sum_{k=m+1}^{n+1} p(1-p)^{k-1}$

a. Montrer $\dfrac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \in]0,1[$

b. En déduire que $u_n = \dfrac{1 - n(1-p)^{n-1} + (n-1)(1-p)^n}{p}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{p}$

c. Montrer que $v_n = \sum_{i=0}^{n-m} p(1-p)^{m+i}$. Puis déduire que $v_n = (1-p)^m\left[1 - (1-p)^{n-m+1}\right]$

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2. Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité : $p(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a. On admet que $E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis donner $E(X)$

b. Justifier brièvement que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $p(X > m) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Expliciter $p(X > m)$

c. Pour n et $m \in \mathbb{N}^*$, justifier que : $p(\{X > n+m\} \cap \{X > n\}) = p(X > n+m)$

d. En déduire que pour n et $m \in \mathbb{N}^*$, $p_{X>n}(X > n+m) = p(X > m)$ (La loi de X est dite alors « **sans mémoire** » car la connaissance du résultat des k premiers tirages ne modifie pas les probabilités pour les suivants)

3. Applications :
Soit un dé truqué avec une probabilité d'obtenir 6 égale à $0,1$. On lance ce dé jusqu'à l'obtention du premier 6. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.
Quelle est la loi de probabilité de X ? En déduire $E(X)$.
Calculer $p(X > 5)$ et $p_{X>8}(X > 12)$

CHAPITRE 12

CALCUL VECTORIEL

A- Barycentre de n points pondérés

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Définition

Définition 1 :
Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés avec $\alpha+\beta\neq 0$. Il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
Le point G est appelé **barycentre** des points pondérés (A,α) et (B,β).
On note $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

Remarque :

Si G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) on peut aussi noter : G=bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\ \hline \alpha & \beta\\ \hline\end{array}$. Mais cette notation est lourde à utiliser que la notation $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. Pour cette raison, on adopte, dans la suite de ce cours, la dernière notation.

2. Propriétés

Propriété 1 : Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés tel que $\alpha+\beta\neq 0$.
Le barycentre G du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ est un point de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Démonstration :
$G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$
$\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}\iff\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (car par hypothèse $\alpha+\beta\neq 0$)
Puisque $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ alors G appartient bien à la droite (AB). D'où le résultat.

Propriété 2 : Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés tel que $\alpha+\beta\neq 0$.
Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ alors pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre du système $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$.

Démonstration :
$G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}\iff\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\iff k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ or $\alpha+\beta\neq 0\Rightarrow k\alpha+k\beta\neq 0$ car $k\neq 0$.Ainsi, par définition, on conclut que G est aussi barycentre du système : $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$.

Conséquences :
– Si on considère $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ avec $\alpha\neq 0$ alors on aura $G=\text{bar}\{(A,1),(B,1)\}$. Ce point s'appelle isobarycentre des points A et B ou tout simplement le milieu de $[AB]$.
– Puisque pour tout $\alpha+\beta\neq 0$, $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ est un point de (AB) la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.

Propriété 3 : Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés tel que $\alpha+\beta\neq 0$.
$G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \iff$ pour tout M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration :
Si $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \iff \alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
$\iff \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$. D'où le résultat.

3. Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, notons (x_A,y_A) les coordonnées de A et (x_B,y_B) celles de B.

Soit $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. Les coordonnées (X_G,Y_G) de G sont : $\begin{cases} X_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ Y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$

En effet, d'après la propriété 1, si $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$, alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

On a alors : $\begin{cases} X_G-x_A=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(x_B-x_A) \\ y_G-y_A=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(y_B-y_A)\end{cases}$. En ramenant x_A et y_A au second membre, on a le résultat souhaité.

Exemple : On considère les points $A(0,3)$ et $B(6,3)$ et $G=\text{bar}\{(A,1),(B,2)\}$. On note $G(X_G,Y_G)$.
On a alors : $\begin{cases} X_G=\dfrac{0+6}{3}=2 \\ Y_G=\dfrac{3+6}{3}=3\end{cases}$

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition

Définition 2 :
Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Le point G est appelé **barycentre** des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ).
On note $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

2. Propriétés

Propriété 4 : (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Le barycentre G du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ est tel que : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Démonstration
Soit $G=\text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. Il suffit d'écrire $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\gamma(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$
Ainsi $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$ puis on conclut que : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Remarque
Connaissant les coordonnées des points A, B et C, on peut facilement retrouver les coordonnées de G en appliquant la propriété 4.

De manière analogue que pour le barycentre de deux points pondérés, on a la propriété suivante :

Propriété 5 :.
Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha),\ (B,\beta),\ (C,\gamma)\}$ alors pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre du système $\{(A,k\alpha),\ (B,k\beta),\ (C,k\gamma)\}$.

Conséquences :
Si on a $G=\text{bar}\{(A,\alpha),\ (B,\alpha),\ (C,\alpha)\}$ avec $\alpha\neq 0$ alors $G=\text{bar}\{(A,1),\ (B,1),\ (C,1)\}$. Ce point s'appelle isobarycentre des points A, B et C .

Propriété 6 : (**Propriété de caractérisation**).
Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
$G=\text{bar}\{(A,\alpha),\ (B,\beta),\ (C,\gamma)\}\iff$ pour tout M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

Démonstration :
$G=\text{bar}\{(A,\alpha),\ (B,\beta),\ (C,\gamma)\}\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})+\gamma(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC})=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$. D'où le résultat.

Remarque
– Le barycentre de trois points non alignés de l'espace appartient au plan définit par ces points.
– L'isobarycentre de trois points non alignés A, B, et C est le centre de gravité du triangle ABC.

III. Barycentre de n points pondérés

Cette section est consacrée à une étude plus générale du barycentre de n points pondérés.

1. Définition

Définition 3 :
Soient $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. Il existe un unique point G tel : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.
Le point G est appelé **barycentre** des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.
On note $G=\text{bar}\{(A_1,\alpha_1),\ (A_2,\alpha_2)\cdots(A_n,\alpha_n)\}$.

2. Propriétés

Propriété 7 : Soient $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$.
Si G est le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1),\ (A_2,\alpha_2)\cdots(A_n,\alpha_n)\}$ alors pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre du système $\{(A_1,k\alpha_1),\ (A_2,k\alpha_2)\cdots(A_n,k\alpha_n)\}$

Remarque
Le barycentre de n points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points.

Propriété 8 : (**Propriété de caractérisation**)
Soient $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés. Pour tout point M, on a :
– Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ alors $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$ avec G le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$.
– Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM}$ est indépendant de M.

Démonstration
soit M un point du plan.
– Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.
$G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_i}) = \vec{0}$.
Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$.
– Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{n} \alpha_i$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM} = \alpha_1 \overrightarrow{A_1M} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM} = -\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{A_1M} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM}$.
Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{A_iM} + \overrightarrow{MA_1}) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iA_1}$.
Ainsi le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_iM}$ est bien indépendant de M.

Exemple :
Soit ABC un triangle. Réduire les sommes :
1. Réduire la somme : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$
2. Monter que la somme $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M.

1. Notons $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, -5)\}$.
Alors $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG}$;
2. $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
D'où la somme $-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M

Propriété 9 : (**Coordonnées du barycentre**)
L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{j})$.
Soient $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$.
On suppose (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i avec $1 \leq i \leq n$ et (X_G, Y_G, Z_G) celle de G. Alors :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \qquad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \qquad \text{et} \qquad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Démonstration
Puisque par hypothèse $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors pour tout point M, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$.
En particulier pour $M = O$ on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OG}$ et on déduit facilement les coordonnées de G.

B- Produit scalaire et angles orientés

I. Produit scalaire

1. Définition

Définition 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Cas particulier :
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et par suite : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si : $\begin{cases} - \text{ ils sont de même sens alors : } \vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}|| \\ - \text{ ils sont de sens contraire alors : } \vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}||\cdot||\vec{v}|| \end{cases}$
• Si l'un des vecteurs est nuls alors le produit scalaire des deux vecteurs est nul.

Remarque
– Le produit scalaire est toujours un nombre réel.
– Pour démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux, il suffit alors de démontrer que leur produit scalaire est nul.

Définition 5 : (**Définition à l'aide des coordonnées**)
i. Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre : $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\cdot x' + y\cdot y'$.
ii. Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre : $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$

2. Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs et α un réel donnée. On a :
• $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$;
• $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$;
• $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
• $||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
• $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

II. Angles orientés

1. Orientation

• **Sens direct**= sens trigonométrique=sens positif=sens contraire des aiguilles d'une montre.
• **Sens indirect**= sens rétrograde=sens négatif=sens des aiguilles d'une montre.

2. Angles orientés de vecteurs et angles de droites

• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
L'écriture $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha[2\pi]$ signifie que α est une mesure en radian de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que toute autre mesure de cet angle s'écrit sous la forme $\alpha + 2k\pi$.
Cependant, il existe une et une seule mesure de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comprise entre $-\pi$ et π et cette mesure est appelée **mesure principale** de l'angle $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
• Si on considère maintenant deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les deux droites définissent deux angles orientés $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},-\vec{v})$. Ainsi si α est une mesure de l'un de ces angles alors l'autre mesure serait $\alpha+\pi$.

3. Théorèmes usuels

Théorème : Soit (C) un cercle de centre O, A et B deux points distincts de (C). Les illustrations sont sur les figures ci-dessous (page suivante).
i. Pour tout point M de (C), distinct de A et B, on a : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$ (*fig i*)
ii. Pour tout point T de la tangente à (C) en A, on a : $2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$ (*fig ii*)
iii. Quatre points A, B, C et D non alignés sont **cocycliques** si et seulement si : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$.
Ce qui est équivalent à : $\dfrac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \times \dfrac{Z_D - Z_A}{Z_D - Z_B}$ est un réel.

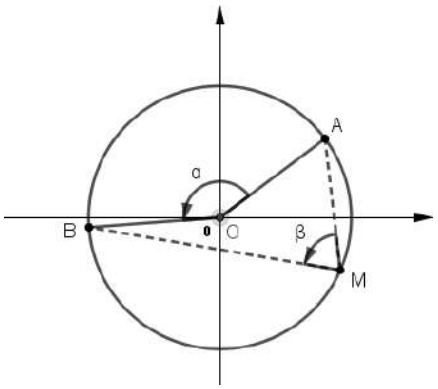


fig i ($\alpha = 2\beta$)

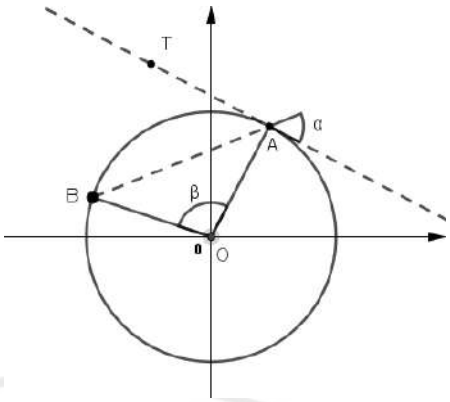


fig ii ($\beta = 2\alpha$)

C- Produit vectoriel

1. Définition

Définition 6 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe.
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est de norme $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Cette définition est lourde à utiliser. Nous allons donner dans ce qui suit une autre définition plus pratique.

Définition 7 : (**Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée directe**)
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si (x, y, z) désignent les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et (x', y', z') celles du vecteur $\vec{v}$, alors le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

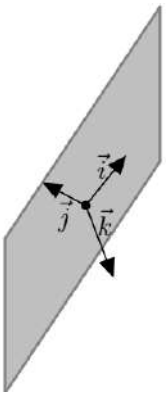
$$\boldsymbol{(zy' - zy', zx' - xz', xy' - yx')}$$

Conséquences
Si $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = \vec{j} = (0, 1, 0)$ alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
De manière analogue, on a : $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$. On alors :
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$.
- $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

Remarque
– Le produit vectoriel de deux vecteurs est toujours un vecteur.
– Le produit vectoriel de deux vecteurs appartenant à un plan (P) est un vecteur orthogonal à ce plan.

Par exemple soit (P) un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de ce plan.
On note $\vec{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à la fois à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (Par conséquent, $\vec{k}$ n'est pas dans le plan (P))

Tout point $M(x,y)$ du plan (P) n'a pas coordonnées suivant $\vec{k}$. Cela revient à écrire $M(x,y,0)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Dans cette logique, on peut récrire alors dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de cette forme : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$



Par conséquent, on a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\xy'-yx'\end{pmatrix}$ En appliquant la définition 4.

On voit bien que le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est suivant $\vec{k}$ donc orthogonal au plan (P).

Technique pour retrouver les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs :
Soient $\vec{u}=(x,y,z)$ et $\vec{v}=(x',y',z')$

1- Première étape : On dispose les coordonnées comme suit : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

2- Deuxième étape : Calcul de la coordonnée suivant $\vec{i}$:
On barre la ligne des x puis on calcul le déterminant $\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}=yz'-zy'$ (c'est la composante suivant $\vec{i}$)

3- Troisième étape : Calcul de la coordonnée suivant $\vec{j}$:
On barre la ligne des y puis on calcul l'opposé du déterminant $\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}=xz'-zx'$
Donc la coordonnée suivant $\vec{j}$ est $-(xz'-zx')$. (Il ne faut pas oublier de multiplier par -1 à cette étape)

4- Quatrième étape : Calcul de la coordonnée suivant $\vec{k}$:
On barre la ligne des z puis on calcul le déterminant $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$ (c'est la composante suivant $\vec{j}$).
On retrouve à la fin les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ suivant $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

On alors à travers cette méthode dire que : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\right)$ avec $\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}=ab'-ba'$.

Exercice 1

1. On donne les vecteurs $\vec{u}=(4,-1,2)$; $\vec{v}=(1,5,-3)$ et $\vec{w}=(2,0,-4)$. Calculez puis comparez :
- **a.** $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}\wedge\vec{u}$.
- **b.** $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
- **c.** $\vec{u}\wedge(2\vec{v})$, $(2\vec{u})\wedge\vec{v}$ et $2(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
- **d.** $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$.

2. On considère deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\vec{a}=(4,-1)$ et $\vec{b}=(5,-3)$
Calculer puis comparez $\vec{a}\wedge\vec{b}$ et $\vec{b}\wedge\vec{a}$

Solution :
1-a. $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-7,14,21)$ et $\vec{v}\wedge\vec{u}=(7,-14,-21)$. Alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$.
b. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=(-3,34,23)$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}=(-3,34,23)$. D'où $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
c. $\vec{u}\wedge(2\vec{v})=(-14,28,42)$; $(2\vec{u})\wedge\vec{v}=(-14,28,42)$ et $2(\vec{u}\wedge\vec{v})=(-14,28,42)$
Ainsi $\vec{u}\wedge(2\vec{v})=(2\vec{u})\wedge\vec{v}=2(\vec{u}\wedge\vec{v})$
d. $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(14,0,-28)$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(-56,14,-28)$. Alors $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\neq(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$
2. $\vec{a}\wedge\vec{b}=-7\vec{k}$ et $\vec{b}\wedge\vec{a}=7\vec{k}$ avec $\vec{k}$ un vecteur unitaire tel que $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit un repère direct.
On déduit que $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

Les propriétés vues dans la question **1.** sont les principales propriétés du produit vectoriel. Nous généralisons ces propriétés à tout vecteur dans le théorème suivant :

Théorème 2 : L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel donné. On a les propriétés suivantes :

i. $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

ii. $\vec{u}\wedge(k\vec{v})=(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

iii. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

Remarque

– On n'a pas toujours une relation entre $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ comme le montre l'exercice précédent.

– $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Par conséquent, pour démontrer que deux vecteurs sont colinéaires, on peut démontrer que leur produit vectoriel est vecteur nul.

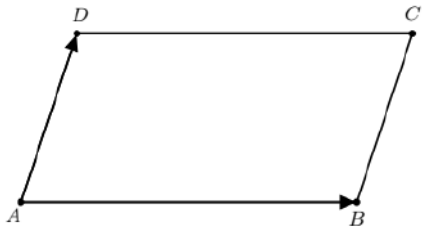
2. Applications du produit vectoriel

Théorème 3 : . (**aire d'un parallélogramme ou d'un triangle**).

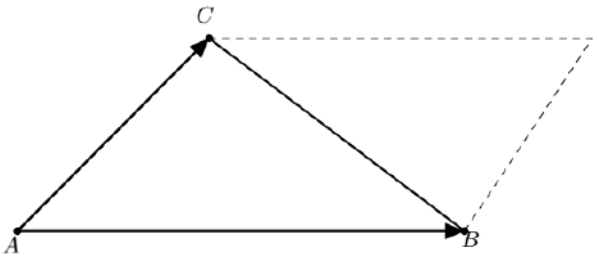
• Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire $\mathcal{A}$ de ce parallélogramme est : $\mathcal{A}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.

• Soit ABC un triangle. L'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle est : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Illustration :



$\mathcal{A}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$



$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

Exemple :

1. Par exemple, soient $A(3,0,-1)$, $B(0,2,2)$ et $C(1,1,5)$ alors :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\\1\end{pmatrix}$ puis l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{\sqrt{226}}{2}$

2. On donne les points $A(2,1,-2)$; $B(2,3,0)$; $C(6,6,5)$ et $D(6,4,3)$.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$

On peut remarque que $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. On conclut alors que $ABCD$ est un parallélogramme.

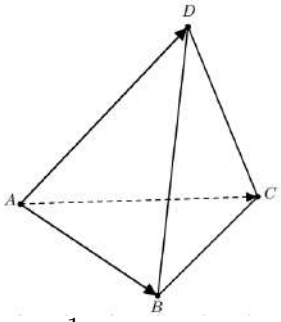
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\-8\end{pmatrix}$ puis l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme $ABCD$ est : $\mathcal{A}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=12$

Théorème 4 : (**Volume d'un tétraèdre ou d'un parallélépipède**).

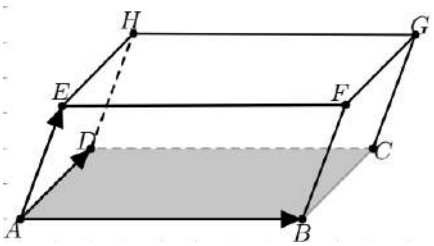
• Soit $ABCD$ un tétraèdre. Le volume $\mathcal{V}$ de ce tétraèdre est : $\mathcal{V}=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

• Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède. Le volume $\mathcal{V}$ de ce parallélépipède est : $\mathcal{V}=\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AE}\right|$

Illustration



$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$



$\mathcal{V} = \left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|$

D- Géométrie dans le plan et dans l'espace

I. Droites dans le plan (Rappels)

On se remémore les connaissances acquises dans les classes intérieures sur les droites.

1. Équation cartésienne d'une droite

Proposition 1 :
Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soient α, β et c trois réels tels que α et β ne sont pas tous deux nuls :
1. La droite D passant par le point A de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathcal{R}$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ admet une équation cartésienne de la forme : $\alpha x + \beta y + c = 0$.
2. Réciproquement, l'ensemble des points du plan d'équation $\alpha x + \beta y + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-\beta, \alpha)$

Remarque

La représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est la représentation paramétrique, dans le plan, d'une droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Proposition 2 :
• On considère une droite (D) d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + c = 0$. Alors le vecteur $\vec{u}\,(-\beta, \alpha)$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}\,(\alpha, \beta)$ est un vecteur normal à (D).
• Un repère orthonormal étant fixé, la droite (D) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-\beta, \alpha)$ a pour équation : $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$

2. Distance d'un point à une droite

Proposition 3 :
Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (D) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et soit $M(x_M, y_M)$ un point donné du plan .
La distance du point M à la droite (D) notée $d(M, D)$ est donnée par : $d(M, D) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1,-2)$ et $B(-2,3)$.
a. Écrire une équation cartésienne de la droite (AB).
b. Déterminer la distance du point $C(1,1)$ à la droite (AB).
c. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB).
d. Retrouver la distance du point C à la droite (AB) en utilisant la question précédente.

Solution :
a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3,5)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Donc (AB) a une équation de la forme : $5x+3y+c=0$. Or le point $A \in (AB)$ donc on déduit que $c=1$.
L'équation de la droite (AB) est alors : $(AB) : 5x+3y+1=0$.
b. Avec la formule du cours, $d(C,(AB)) = \dfrac{|5+3+1|}{5^2+3^2} = \dfrac{9}{\sqrt{34}}$.
c. Puisque H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors le vecteur normal (AB) dirige (CH). Or $\vec{n}(5,3)$ est normal à (AB), il dirige (CH) et comme C appartient à la droite alors (CH) a pour équation : $3x-5y+2=0$.
H appartient à (CH) et (AB) alors ses coordonnées vérifient : $\begin{cases} 5x+3y+1=0 \\ 3x-5y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{34} \\ y=\dfrac{7}{34} \end{cases}$
Ainsi $\overrightarrow{CH} = \left(-\dfrac{45}{34}, -\dfrac{27}{34}\right) \Rightarrow H = \left(-\dfrac{11}{34}, \dfrac{7}{34}\right)$
d. Il s'en suit que $\left\|\overrightarrow{CH}\right\| = \dfrac{9}{\sqrt{34}}$

II. Géométrie élémentaire de l'espace

Dans tout ce qui suit, on notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1. Notions de base : Combinaisons linéaires de vecteurs, droites et plans dans l'espace

Définition 8 : **Droite vectorielle, droite affine**.
• Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. On appelle **la droite vectorielle engendrée (ou dirigée) par $\vec{u}$** , l'ensemble D des vecteurs de l'espaces colinéaires à $\vec{u}$: $D = \{v \in \mathcal{V} \ / \ \exists \ \lambda \in \mathbb{R} : \vec{v} = \lambda\vec{u}\}$
• Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. La **droite affine passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$** est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M de l'espace tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :
$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} \ / \exists \ \lambda\mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}\}$$

Remarque
Se donnant deux points distincts A et B de l'espace, la droite de l'espace passant par les points A et B est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

Définition 9 : **Combinaison linéaire de deux vecteurs**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{w}$ **est combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si il existe deux réels α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Définition 10 : **Plan Vectoriel, plan affine**
– Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace $\mathcal{V}$. On appelle **plan vectoriel engendré (ou dirigé) par les vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble, qu'on note $\mathcal{P}$, des vecteurs $\mathcal{V}$ qui sont combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$$\mathcal{P} = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
– Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace $\mathcal{V}$ et $A \in \mathcal{E}$ un point de l'espace. On appelle **plan affine engendré (ou dirigé) par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par A** l'ensemble, noté $\mathcal{P}$, des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} / \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}$

Remarque
– Avec les notations précédentes : M est élément du plan affine passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est élément du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\mathcal{P}$.
– On peut aussi définir un plan affine $\mathcal{P}$ en se donnant trois points non alignés A, B et C de $\mathcal{P}$. On définit le plan affine passant par ces trois points comme étant le plan affine passant par A et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 11 : **Vecteur normal**
Un vecteur est dit **normal à un plan** $\mathcal{P}$ si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Remarque
– Se donner un plan vectoriel revient à se donner un vecteur normal à ce plan.
– Se donner un plan affine revient à se donner un vecteur normal à ce plan et un point de ce plan.
– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

2. Vecteurs coplanaires, bases

Définition 12 : **Vecteurs coplanaires, Base de l'espace**
– Trois vecteurs non nuls sont **coplanaires** si l'un des trois est élément du plan engendré par les deux autres (ou ce qui est équivalent si l'un de trois est une combinaison linéaire des deux autres).
– Un triplet de vecteurs de $\mathcal{V}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{V}$ si il est formé de trois vecteurs non coplanaires.

Commentaire : En prenant la négation de ce qui précède : trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si on ne peut écrire aucun des trois comme combinaison linéaire des deux autres (on dit qu'ils sont linéairement indépendants).

3. Plans dans l'espace

3-1. Représentation cartésienne

Pour tout ce paragraphe, on fixe un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$.

Proposition 4 : **Équation cartésienne d'un plan**
• Soit $\mathcal{P}$ un plan affine passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace $\mathcal{E}$ et admettant le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
• Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c, d sont des réels et où a, b, c ne sont pas tous nuls est un plan affine de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Remarque
– Un plan est entièrement défini par la donnée d'un vecteur normal à ce plan et un point appartenant à ce plan.
– Nous pouvons donner une représentation paramétrique d'un plan :

En effet, soient $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}(x'_0, y'_0, z'_0)$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Alors $\begin{cases} x = x_A + \alpha x_0 + \beta x'_0 \\ y = y_A + \alpha y_0 + \beta y'_0 \\ z = z_A + \alpha z_0 + \beta z'_0 \end{cases}$
est une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
– Si $\mathcal{P}$ est un plan passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors dire qu'un point M appartient à $\mathcal{P}$ est équivalent à : $\exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Exemple
Soient $A(1, 0, 1)$ un point de l'espace et le vecteur $\vec{n}(1, -1, 2)$.
– D'après la formule, le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal est $\vec{n}(1, -1, 2)$ est : $x - y + 2z - 3 = 0$.

– Pour trouver la représentation paramétrée de $\mathcal{P}$, il nous faut connaître deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui engendrent $\mathcal{P}$. Il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$. C'est le cas par exemple de $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v}(2,0,-1)$. Donc $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = 1+t+2s \\ y = t \\ z = 1-s \end{cases}$ avec t et $s \in \mathbb{R}$

3-2 Position relative de deux plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Définition 13 : (**Plans parallèles, Plans perpendiculaires**)
• Deux plans de l'espace sont parallèles si et seulement si ils admettent un vecteur normal non nul commun.
• Deux plans de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux non nuls orthogonaux.

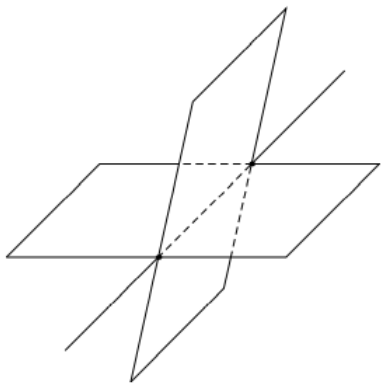
Remarque : Explications de la définition :
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n}'(a',b',c')$ d'équations $\mathcal{P}$: $ax+by+cz+d=0$ et $\mathcal{P}'$: $a'x+b'y+c'z+d'=0$. La définition 11 dit que :
• Les plans plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0 \Longleftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$.
• Les plans plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{0}$.

Exemple

a. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations $\mathcal{P}$: $x-y+z=1$ et $\mathcal{P}'$: $x+2y+z=0$.
Ainsi le vecteur $\vec{n}(1,-1,1)$ et $\vec{n}'(1,2,1)$. $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
b. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations $\mathcal{P}$: $4x-2z=1$ et $\mathcal{P}'$: $-2x+z=0$.
Ainsi le vecteur $\vec{n}(4,0,-2)$ et $\vec{n}'(-2,0,1)$. On vérifie que $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{0}$ et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Proposition 5 :
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants alors leur intersection est une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\vec{n}'$.

Illustration :



3-3 Distance d'un point à un plan

Théorème 5 : (**Quand le plan est donné par une équation cartésienne**)
On rapporte le plan à un repère orthonormal. Soient $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de l'espace. La distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4. Droites dans l'espace

4-1 Représentation cartésienne

Puisqu'une droite de l'espace est l'intersection de deux plans non parallèles d'après la proposition 5 nous déduisons l'équation d'une droite dans la proposition suivante :

Proposition 6 :
• Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal de l'espace. On se donne des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont non nuls et non proportionnels. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\vec{n'}$ où $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n'}(a',b',c')$.
• Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

Remarque
On peut aussi caractériser une droite de l'espace à travers sa représentation paramétrique. En effet, soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_0,y_0,z_0)$, une équation paramétrée de $\mathcal{D}$ est :
l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} x=x_A+tx_0 \\ y=y_A+ty_0 \\ z=z_A+tz_0 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

4-2 Distance d'un point à une droite

Théorème 6 : (**Distance d'un point à une droite**)
Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point de l'espace. Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ notée $d(M,\mathcal{D})$:

$$d(M,\mathcal{D})=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\|u\|}$$

Exercice 3
On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives :$x-y+z+1=0$ et $2x+y-z-1=0$.
a. Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.
b. Déterminer une paramétrisation de leur intersection $\mathcal{D}$
c. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_0$ passant $A=(1,1,0)$ et perpendiculaire aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A=(1,-2,0)$ et dirigée par $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $B(0,1,-2)$ un point de l'espace.
d. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$.
e. Calculer de deux manières différentes la distance de B à la droite $\mathcal{D}$.

Solution :
a. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1,-1,1)$ et $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\vec{n'}(2,1,-1)$.
Or $\vec{n}\wedge\vec{n'}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Ainsi les deux plans ne sont pas parallèles.
b. $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{n}\wedge\vec{n'}=(0,3,3)$ ou encore le vecteur $\vec{u}=(0,1,1)$. De plus le point $M(0,0,-1)$ appartient à $\mathcal{D}$. Ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors : $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.
c. Le plan $\mathcal{P}_0$ étant perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ admet donc $\vec{u}=(0,1,1)$ comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme : $y+z+c=0$. Comme $A(1,1,0)\in\mathcal{P}_0$ alors on conclut que $c=-1$.
Ainsi l'équation de $\mathcal{P}_0$ est : $y+z-1=0$.

d. L'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. De plus une équation du plan passant B et de normal $\vec{u}$ est : $x+y-z-3=0$. Le point H forme l'intersection de ce plan et de la droite D et ses coordonnées satisfont le système : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -t \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$ Par conséquent, on déduit que $H(7/3, -2/3, -4/3)$

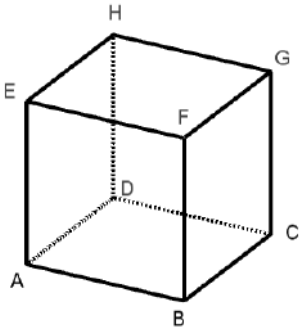
e. La distance de B à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par $\left\|\overrightarrow{BH}\right\| = \sqrt{\dfrac{26}{3}}$. On a aussi : $d(B,\mathcal{D}) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{\dfrac{26}{3}}$

5. Coordonnées du milieu, coordonnées d'un vecteur,$\cdots$

Proposition 7 : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace et $\vec{u}(x,y,z)$; $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace. Soit $k \in \mathbb{R}$
1. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'; y+y'; z+z')$
2. Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky, kz)
3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
4. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}; \dfrac{y_A+y_B}{2}; \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exercice 4

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[EH]$, $[FG]$, $[AD]$ et $[BC]$. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
a. Donner, en le justifiant, les coordonnées des neuf points A, B, C, D, E, F, G, H et L.
b. Montrer que les plans (ABI) et (GHK) sont parallèles.



Solution
1-a. A est l'origine du repère et donc $A(0,0,0)$; $\overrightarrow{AB} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AD} + 0\cdot\overrightarrow{AE} \Rightarrow B(1,0,0)$
De la même manière, on déduit que $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$. $\overrightarrow{AC} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD} + 0\cdot\overrightarrow{AE} \Rightarrow C(1,1,0)$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AD} + 1\cdot\overrightarrow{AE} \Rightarrow F(1,0,1)$;
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 0\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD} + 1\cdot\overrightarrow{AE} \Rightarrow H(0,1,1)$
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD} + 1\cdot\overrightarrow{AE} \Rightarrow G(1,1,1)$.
L est le milieu de $[BC] \Rightarrow I(1, 1/2, 0)$
b. $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{BF} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$. Donc, le quadrilatère $ABJI$ est un parallélogramme et en particulier, le point J appartient au plan (ABI).
De même, le quadrilatère $GHKL$ est un parallélogramme et en particulier, le point L appartient au plan (GHK).
$\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BL}$. Donc, $AKLB$ est un parallélogramme. En particulier, la droite (AB) est parallèle à la droite (KL) qui est une droite du plan (GHK). Donc, la droite (AB) est parallèle au plan (GHK).
$\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IH}$. Donc, le quadrilatère $AKHI$ est un parallélogramme. En particulier, la droite (AI) est parallèle à la droite (HK) qui est une droite du plan (GHK). On en déduit que la droite (AI) est parallèle au plan (GHK).
Ainsi, le plan (GHK) est parallèle aux droites (AB) et (AI) qui sont deux droites sécantes du plan (ABI). Donc, le plan (GHK) est parallèle au plan (ABI).

Exercices

Exercice 1

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1, 2, -3)$, $B(-3, 1, 4)$ et $C(2, 6, -1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5, 9, 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D) passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite (D) et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

f. Le plan P a pour équation cartésienne $x + 2y - 2z - 4 = 0$. Déterminer la position relative des plans P et (ABC).

Exercice 2

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points : $A(2, 0, 1)$, $B(3, -2, 0)$ et $C(2, 8, -4)$.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x et y les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

2. Résoudre le système S : $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$ On fera figurer toutes les étapes de la résolution.

3. Démontrer qu'il existe un unique point vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N.

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}bh$ où b représente l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base ou par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$.

a. Le point étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$.

b. Calculer l'aire du triangle ABC.

c. Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC)

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que : $AB = AC$. On note E le milieu du segment $[BC]$. On donne : $AE = 8\ cm$; $BC = 4\ cm$.

1. On note G le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 1)(C, 1)\}$. Déterminer et construire le point G.

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

3. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que :
$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Exercice 4

Dans le plan (P), soient A, B et C les sommets d'un triangle équilatéral dont la longueur d'un cote est $2d$.

1- **a.** Déterminer l'ensemble E des nombres réels β tels que les points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, β et 1 admettent un barycentre G_β.

b. Quel est l'ensemble des points G_β lorsque β parcourt E ?

2. On prend $\beta = 1$.

a. Déterminer G_1.

b. On pose : $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que : $f_1(M) = 8d^2$.

3. On prend $\beta = -2$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\vec{V}$ indépendant de M. Déterminer $\vec{V}$.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 0$

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$

a. Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z+2i)(z^2+az+b)$.

b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient A, B et C les images des solution de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a. Placer les points A, B et C.

b. Calculer l'affixe du point G, barycentre du système $\{(O,3),(A,-4),(B,1),(C,2)\}$. Vérifier que A est barycentre du système $\{(O,5),(B,-5),(G,2)\}$.

c. Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

3. Pour tout point M du plan, on pose : $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, où k est un réel.

a. discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k.

b. Déterminer et construire Γ_{16}.

Exercice 6

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points : $A(-1,0,2)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,-4,2)$ et $D(5,-2,4)$. On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) se coupent en un point L dont on déterminera les coordonnées.

5. Montrer que $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

Plus généralement, dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ ainsi que les points I, J, K définis par I milieu de $[AB]$, K milieu de $[CD]$, $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A,3),(B,3),(C,1),(D,1)\}$.

6. Déterminer le barycentre G_1 du système $\{(A,3),(D,1)\}$ et G_2 barycentre du système $\{(B,3),(C,1)\}$.

7. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 7

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points : $A(2,1,3)$, $B(3,2,1)$, $C(4,1,4)$, $D(5,3,-2)$ et $E(6,-2,-4)$.

1- **a.** Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer un représentation paramétrique de la droite (DE).

d. Déterminer les coordonnées de F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DF}$.

2- **a.** Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. (On rappelle que $V = \dfrac{1}{3}Base \times hauteur$)

b. Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30$$
$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36$$

CHAPITRE 13

APPLICATIONS AFFINES DU PLAN

I. Applications linéaires

Activité 1

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de vecteur du plan $\mathcal{P}$ et l'application :

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u}) = k\vec{u} \qquad (\ k \in \mathbb{R}^*\ )$$

1. Montrer que $\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2 : \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
2. Montrer que $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\,;\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V} : \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$

Solution
1. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$. $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in \mathcal{V}$. $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda k\vec{u} = \lambda\varphi(\vec{u})$.Les conditions **1.** et **2.** étant vérifiées, on dit que φ est une **application linéaire**.

1. Définition

Définition : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de vecteur du plan $\mathcal{P}$.
On appelle **application linéaire** de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, toute application φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ telle que :
i. $\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2 : \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
ii. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\,;\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V} : \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$

2. Propriétés d'une applications linéaire

En utilisant la définition d'une application linéaire, on déduit les propriétés suivantes :
Si φ est une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ alors :
i.$\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$ et $\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$.
ii. $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$.
iii. $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

II. Applications affines

Activité 2

Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que : } \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$$

Soit G est le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1).....(A_n,\alpha_n)\}$ et on note $G' = f(G)$.
a. Quelle est la traduction vectorielle de : G est le barycentre du système $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$?
b. Montrer que $2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{G'A'_i}$.

c. Déduire d'après les questions précédentes que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$.

d. Sachant que $A'_i = f(A_i)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ que représente le point G' pour le système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$?

Solution

a. G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ signifie que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

b. On a d'après la relation de Chasles $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i})$.

En multipliant membre à membre par 2, on obtient :

$2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-2\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{OA'_i})$. D'où $2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$.

c. Puisque $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ alors déduit d'après b) que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$.

d. On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ et $A'i = f(A_i)$. Donc $G' = f(G)$ est le barycentre du système système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On vient de montrer que si G est barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors $G' = f(G)$ est barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On dit alors que f « conserve » le barycentre. Ainsi une application ponctuelle f qui conserve le barycentre est appelée une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

1. Définition

Définition :
On appelle **application affine** de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, toute application qui donne pour image du barycentre de tout système de points pondérés de $\mathcal{P}$, le barycentre de points images de ce système.

On allège dans le théorème suivant la définition d'une application affine.

Théorème 1 :
Une application ponctuelle f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une **application affine**, si et seulement si f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés au moins.

Exercice 1

Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et g l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par :

$$g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que : } \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^*.$$

Montrer que l'application g conserve le barycentre.

2. Application linéaire associée

Définition :
Soit f une application affine. L'application linéaire Φ :

$$\Phi : \quad \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{f(M)f(N)}.$$

est appelée application linéaire associée à l'application affine f.

Remarque : En notant $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ on peut donc conclure que pour $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ alors $\Phi(\vec{u}) = \overrightarrow{M'N'}$. On peut facilement démontrer que Φ est bien linéaire.

3. Expressions analytique d'une application affine

Activité 3

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ et soient $A(3,2)$; $B(1,1)$; $C(0,1)$ trois points non alignés de $\mathcal{P}$ d'images respectives $A'(6,6)$; $B'(3,3)$; $C'(2,1)$ par une application affine f.
Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{P}$ d'image $M'(x,y')$ par f. Soit Φ qui à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ on associe $\Phi(\vec{u}) = \overrightarrow{M'N'}$ avec $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$ (Φ est l'application linéaire associée à f)
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AM}$, et $\overrightarrow{A'M'}$.
b. Montrer que $\Phi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$. En déduire que $\Phi(\overrightarrow{OJ})$
c. Écrire $\Phi(\overrightarrow{AM})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
d. Sachant que $\Phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$ donner l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

Solution
a. On a dans le repère (O,I,J) : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'M'}\begin{pmatrix}x'-6\\y'-6\end{pmatrix}$.
b. On sait que $\begin{cases}\Phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}\\ \Phi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\Phi(\overrightarrow{OI}) - \Phi(\overrightarrow{OJ}) = -3\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}\\ -3\Phi(\overrightarrow{OI}) - \Phi(\overrightarrow{OJ}) = -4\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}\end{cases}$ $(\star)$ (en utilisant la question précédente et la linéarité de l'application Φ) .
Ainsi de la relation $(\star)$, on déduit que $\Phi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$. On déduit de même $\Phi(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.
c. Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ dans le repère (O,I,J), on peut alors écrire :
$\Phi(\overrightarrow{AM}) = \Phi\left[(x-3)\overrightarrow{OI} + (y-2)\overrightarrow{OJ}\right] = (x-3)\Phi(\overrightarrow{OI}) + (y-2)\Phi(\overrightarrow{OJ})$.
En remplaçant $\Phi(\overrightarrow{OI})$ et $\Phi(\overrightarrow{OJ})$; on déduit que $\Phi(\overrightarrow{AM}) = (x+y-5)\overrightarrow{OI} + (2x-y-4)\overrightarrow{OJ}$.
d. Comme $\Phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$ on a alors : $\begin{cases}x+y-5 = x'-6\\ 2x-y-4 = y'-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x' = x+y+1\\ y' = 2x-y+2\end{cases}$

On donne une autre définition d'une application affine.

Définition :
Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ et soit l'application f définie :
$$f : \begin{array}{ccc}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ M(x,y) & \longmapsto & M'(x',y')\end{array}$$
f est une **application affine**, si et seulement si l'expression analytique de l'application f est de la forme :
$$\begin{cases}x' = ax+by+c\\ y' = a'x+b'y+c'\end{cases} \quad \text{avec } a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c' \text{ des réels.}$$

Pour une application affine f d'expression analytique $\begin{cases}x' = ax+by+c\\ y' = a'x+b'y+c'\end{cases}$, si $ab'-a'b \neq 0$ alors f est bijective et f est appelée **transformation du plan**.

Définition :
Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et soit l'application f définie :
$$f : \begin{array}{ccc}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ M(x,y) & \longmapsto & M'(x',y')\end{array}$$
f est dite une **transformation du plan** du plan dans lui-même si l'application affine f est bijective c'est-à-dire :
i. Tout point du plan $\mathcal{P}$ a une image unique.
ii. Tout point du plan $\mathcal{P}$ a un antécédent unique.

Propriétés :
Soit f une transformation du plan dans lui-même. On a les propriétés suivantes :
i. f admet une application réciproque, notée f^{-1}, qui est elle aussi une transformation du plan.

ii. Si $A \neq B$ alors $f(A) \neq f(B)$. Deux points distincts ont des images distinctes.

iii. Si f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ alors $ab' - a'b \neq 0$.

4. Image d'une droite, d'un plan et Conservation du parallélisme par une application affine

4-1. Image d'une droite

Théorème 2
Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f une application affine du plan dans lui-même.
L'image d'une droite (AB) par l'application affine f est :
• La droite passant par $f(A)$ et $f(B)$ si et seulement si $f(A)$ est différent de $f(B)$.
• L'ensemble $\{f(A)\}$ si et seulement si $f(A)$ est égale de $f(B)$

Remarque :
L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

4-2. Image d'un Plan

Théorème 3
Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f une application affine du plan dans lui-même.
L'image d'un plan (ABC) par l'application affine f est :
• Le plan passant par $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ si et seulement si les points $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ ne sont pas alignés.
• La droite passant par $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ si et seulement si $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$) sont alignés non tous confondus.
• L'ensemble $\{f(A)\}$ si et seulement si $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont tous confondus.

4-3. conservation du parallélisme

Théorème 4 :
Si f est une application affine du plan dans lui-même qui transforme une droite $(\mathcal{D})$ en une droite $(\mathcal{D}')$, alors elle transforme toute droite parallèle à $(\mathcal{D})$ en une droite parallèle à $(\mathcal{D}')$

Remarque : En générale une application affine ne conserve pas l'orthogonalité, les distances, le rapport des distances.

5. Points invariants par une application affine

Théorème 5 :
Soient $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f une application affine du plan dans lui-même.
• On dit qu'un point M est invariant par une application affine f si et seulement si $f(M) = M$.
• On dit qu'un ensemble E est globalement invariant par f si et seulement si $f(E) = E$.
C'est-à-dire pour tout point M de E, $f(M)$ appartient à E
• E est dit invariant point par point si pour tout point M de E, $f(M) = M$.

Exemple

Soit l'application affine f d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -3x/5 - 4y/5 + 2/5 \\ y' = -4x/5 + 3y/5 + 1/5 \end{cases}$

Cherchons l'ensemble des points invariants :

Soit $M(x, y)$ un point invariant par f.

Alors $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 4x + 2y - 1 = 0$

Ainsi M est un point point invariant par f si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = -2x + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

Pour chacun des applications suivantes, déterminer l'ensemble des points invariants.

1. L'expression de f est : $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{2}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

2. f a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$

3. f a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = x - 2\sqrt{2} \\ y' = y + \sqrt{2} \end{cases}$

Solution : La démarche de recherche des points invariants est la même que dans l'exemple.
On donne ici directement les réponses, essayez de les retrouvées .

1. L'ensemble des point invariants est la droite d'équation $4x - 2y + 1 = 0$.

2. Le seul point invariant est le point $\Omega\left(\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}, \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Cette application affine n'admet pas de point fixe.

Remarque :
Dire que E est globalement invariant par f ne signifie pas que tous les points de E sont fixes par f. Par exemple : Un segment $[AB]$ est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[AB]$, mais seul le milieu de $[AB]$ est un point fixe par cette application.

6. Composée d'applications affines

Théorème 6 :
Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soient f et g deux applications affines.
La composée $f \circ g$ de ces deux applications affines du plan est aussi une application affine du plan.

Exercice 3

On considère les applications affines f et g d'expressions analytiques suivantes :

$f : \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$

1. Déterminer l'expression analytique de $f \circ g$.

2. Vérifier que $f \circ g$ est bien une application affine.

Solution

1. Expression analytique de $f \circ g$: Soit $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ tel que $g(M) = M'$ et

$M'' = f(M') = f(g(M))$. Alors x' et y' vérifient $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{2} \end{cases}$ et donc x'' et y'' vérifient

$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y'' = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$ En remplaçant x' et y' par leurs valeurs on a :

$$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{2}\right) \\ y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -y + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \\ y'' = x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3}) \end{cases}$$

Par suite l'application $f \circ g$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -y + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \\ y' = x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3}) \end{cases}$

2. A travers l'expression analytique de $f \circ g$ on conclut que $f \circ g$ est une application affine.

Remarque :
Généralement, les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes. On n'a pas toujours une égalité entre les deux applications.

7. Affinité du plan d'axe $(\mathcal{D})$, de direction δ et de rapport k

Définition :
Soit $\mathcal{D}$ une droite, δ une direction de droite distincte de celle de $(\mathcal{D})$ et k un nombre réel.
On appelle affinité d'axe $(\mathcal{D})$, de direction δ et de rapport k l'application f qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction δ.

Remarque :
• Si $k = 0$, alors f est la projection sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction δ.
• Si $k = 1$, alors f est l'application identité du plan.
• Si $k = -1$ et si la direction de $(\mathcal{D})$ est orthogonale à δ, alors f est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$.

Étude de quelques affinités

Exemple 1 : Soit f, l'application affine du plan dans lui même définie par : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}(x + y + 1) \end{cases}$

• L'ensemble des points invariants par f est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$.
• Pour tout point M du plan n'appartenant pas $(\mathbb{D})$, $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(x - y + 1)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle de $\vec{j}$
• H le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $\vec{j}$ alors H a pour coordonnées $(x, x+1)$ par suite $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}[-x + y - 1]\vec{j}$ et $\overrightarrow{HM} = [y - x - 1]\vec{j}$. D'où $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$
On déduit alors que f est l'affinité de rapport $\frac{1}{2}$, d'axe la droite $y = x + 1$ et de direction $\vec{j}$.

Exemple 2 : Expression analytique de l'affinité d'axe $(\mathcal{D})$: $y = b$, de direction celle de $\vec{j}$ et de rapport k.
Soit T une telle affinité. Pour $M(x, y)$ d'image par T le point $M'(x', y')$, $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction $\vec{j}$. On a : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$
D'où l'expression analytique de l'affinité d'axe $y = b$, de direction celle de $\vec{j}$ et de rapport k est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$

Exercices

Exercice 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. On considère l'application affine f qui à tout point M de $\mathcal{P}$, de coordonnées x et y, associe le point M' de coordonnées x' et y' données par : $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y - \dfrac{1}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

a. Étudier l'ensemble (D) des points invariants par f.

b. Montrer que, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant qu'on précisera. f est-elle une transformation affine du plan ? Justifier.

c. Prouver que pour tout point M du plan, $f(M) = M' \in (D)$.

d. Déterminer $f \circ f$ en fonction de f.

2. Soit g l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, au point $M(x, y)$, associe le point $M''(X, Y)$ défini par : $\begin{cases} X = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y - \dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 \end{cases}$

a. Étudier l'ensemble des points invariants par g.

b. Montrer que g peut s'écrire $h \circ f$ où h est une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même dont on précisera l'expression analytique.

Prouver que h est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

c. Vérifier que $h \circ f \neq f \circ h$

Exercice 2

Dans le plan affine euclidien d'un repère orthonormé, on considère l'application f qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{4} \\ y' = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{4} \end{cases}$

1. Montrer qu'il s'agit d'une application affine bijective. Définir son application réciproque f^{-1}.

2- **a.** Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D_0) que l'on précisera .

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient (D_0).

c. En déduire une construction simple de M' connaissant le point M.

d. Déterminer l'expression analytique de $f \circ f$.

2. Soit (E) la courbe d'équation : $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0$.

a. Déterminer une équation de l'image de (E) par f.

b. Quelle est la nature de cette courbe image.

Exercice 3

Dans le plan affine euclidien d'un repère orthonormé, on considère l'application f qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

1. L'application laisse invariant un point du plan ? Si oui, déterminer les coordonnées de ce point.

2. Soient $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$. On note $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.

a. Calculer les distances $d(M, N)$ et $d(M', N')$. Comparer ces distances trouvées.

b. Quelle conclusion peut-on tirer de la transformation f ?

Problèmes

Problème 1 : **Étude d'une rotation**.

Partie A

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ et soit f l'application du plan dans lui-même transformant les points $A(0,-1)$; $B(-1,0)$ en $A'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et laissant invariant le point O.

Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{P}$ d'image $M'(x,y')$ par f. Soit Φ qui a tout vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ on associe $\Phi(\vec{u})=\overrightarrow{M'N'}$ avec $M'=f(M)$ et $N'=f(N)$.

1. Justifier que f est une application affine du plan et bijective.

2. Démontrer que Φ est une application linéaire.

3. En remarquant que $\Phi(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}$, montrer que $\Phi(\overrightarrow{OJ})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OI}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ}$.

4. Sachant que $\Phi(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OM'}$ donner l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

On considère φ une application du plan dans lui-même d'expressions analytiques : $\varphi:\begin{cases}x'=x-3\\y'=y+2\end{cases}$

Soit h l'application du plan dans lui-même définie par $h=f\circ\varphi$.

5. Montrer que h a pour expression analytique : $\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}\\y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

6. On considère l'application g du plan dans lui-même qui, à tout point $M'(x',y')$ avec $\begin{cases}x'-3=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}\\y'+2=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

a. Montrer que g admet un seul point invariant A dont on précisera.

b. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Partie B

On considère dans cette partie l'application r du plan dans lui même d'expression analytique :

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{-4+3\sqrt{3}}{2}\\y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{-7+2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

On note $M(x,y)$ et par $M'(x',y')$, l'image du point M par l'application r.

1. Déterminer le point invariant par r. On notera Ω ce point.

2. Justifier que r est une transformation du plan. Déterminer la bijection réciproque r^{-1} de r.

3. Démontrer que pour tout point $M(x,y)$ du plan, $\Omega M=\Omega M'$ et que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}})=\frac{\pi}{6}$.

4. Déterminer l'expression analytique de $r\circ r$.

5. Montrer que $r\circ r$ et r ont le même point invariant Ω.

Démontrer de même que pour tout point $M(x,y)$ du plan d'image $M''(x'',y'')$ par $r\circ r$ on a :

$\Omega M=\Omega M''$ et que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}})=\frac{\pi}{3}$.

Note : L'application affine r est en fait la rotation de centre $A(3,-2)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On verra dans le chapitre suivant que plus généralement, une rotation de centre $A(x_A,y_A)$ et d'angle θ a pour expression analytique : $\begin{cases}x'=(x-x_A)\cos(\theta)-(y-y_A)\sin(\theta)+x_A\\y'=(x-x_A)\sin(\theta)+(y-y_A)\cos(\theta)+y_A\end{cases}$ De plus la composée de deux rotations d'angle θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$.

Problème 2 : **Étude d'une symétrie axiale**.

Partie A

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ et soit S l'application du plan dans lui-même transformant les points $O(0,0)$; $A(-5,5)$ et $B(5,5)$ en respectivement $O'\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(-\frac{3}{5},\frac{36}{5}\right)$ et $B'\left(-\frac{33}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

On appelle par Φ l'application linéaire associée à S.

1. Justifier que S est une application affine du plan et bijective.
2. Exprimer $\Phi(\overrightarrow{OI})$ et $\Phi(\overrightarrow{OJ})$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Pour tout $M(x,y)$, exprimer $\Phi(\overrightarrow{OM})$ en fonction de $\Phi(\overrightarrow{OI})$ et $\Phi(\overrightarrow{OJ})$.
4. Sachant que $\Phi(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{O'M'}$ et en utilisant les questions **2.** et **3.**, exprimer les coordonnées de $M'(x',y')$ en fonction de celles de $M(x,y)$.
5. Déterminer l'ensemble des points invariants par S
6. Donner l'expression analytique $S\circ S$. Vérifier que $S\circ S$ est l'application identité.

Partie B

Dans cette partie on admet que S a pour expression analytique : $\begin{cases} x'=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{2}{5} \\ y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{1}{5}\end{cases}$

On considère une autre application S' du plan dans lui-même même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5} \\ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{1}{5}\end{cases}$$

1. Montrer que S' une transformation affine dont on déterminera l'ensemble des points invariants.
2. Déterminer l'expression analytique de $S'\circ S'$. Que peut-on conclure
3. Déterminer l'expression analytique de $S\circ S'$. Vérifier que $R(0,1/2)$ est le seul point invariant de $S\circ S'$.

On considère l'application affine $t_{\vec{u}}$ du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+4\end{cases}$

4. Déterminer l'expression analytique de $S\circ t_{\vec{u}}$.
5. Vérifier que $S\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ S$.
6. On note $g=S\circ t_{\vec{u}}$. Démontrer que $g\circ g$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y+8\end{cases}$

Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M''(x'',y'')$ image de M par $g\circ g$.
7. Déduire alors que $g\circ g$ conserve les distances.
Vérifier que $\overrightarrow{MM''}$ garde une direction fixe que l'on précisera.

Note : Les applications S et S' sont en réalité des symétries axiales d'axes respectifs $(\mathcal{D})$: $4x+2y-1=0$ et $(\mathcal{D}')$: $4x-2y+1=0$.

Nous verrons, dans le prochain chapitre, que plus généralement, que la symétrie axiale ou symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$: $ax+by+c=0$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}y-\frac{2ac}{a^2+b^2} \\ y'=-\frac{2ab}{a^2+b^2}x-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y-\frac{2cb}{a^2+b^2}\end{cases}$

CHAPITRE 14

ÉTUDES DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN

I. Quelques notions utiles

1. Notion de transformation du plan

Une application affine du plan bijective est appelée une transformation du plan .

Définition 1 :
Une transformation du plan, ou transformation plane est une bijection du plan dans lui-même.

Exemple

– L'application identique du plan, $Id_{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire l'application du plan dans lui-même définie par : $Id_{\mathcal{P}}(M) = M$; est une transformation du plan.
– Les translations, les rotations, les réflexions et les homothéties sont des transformations.

Remarque
– La composée de deux transformations plane est une transformation plane.
– La réciproque d'une transformation plane est une transformation plane.
– On suppose que f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ f est une transformation du plan si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

2. Écriture complexe d'une application affine du plan

Soit f une application affine du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$
L'écriture complexe de f consiste à trouver une relation entre l'affixe z du point M et l'affixe z' de son image. Par exemple une relation de la forme : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec a, b des nombres complexes et $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$.

Par exemple : On considère la transformation du plan f d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - 3y + \sqrt{3} \\ y' = -3x - y + 1 \end{cases}$
Déterminons son écriture complexe : Pour $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$ on a : $\begin{cases} x' = x - 3y + \sqrt{3} \\ y' = -3x - y + 1 \end{cases}$
La technique de recherche est toujours la même : On multiple la ligne de y' par i puis on essayer de combiner les deux lignes du système pour avoir une expression correcte : $\begin{cases} x' = x - 3y + \sqrt{3} \\ iy' = -3ix - iy + i \end{cases}$ on multiplie par i
Alors $x' + iy' = x - 3y + \sqrt{3} - 3ix - iy + i$ alors $x' + iy' = x(1 - 3i) - iy(1 - 3i) + \sqrt{3} + i$.
Ainsi $x' + iy' = (1 - 3i)(x - iy) + \sqrt{3} + i$ et donc $z' = (1 - 3i)\overline{z} + \sqrt{3} + i$.
L'écriture complexe de f est alors : $z' = (1 - 3i)\overline{z} + \sqrt{3} + i$.

Exercice 1

1. Pour les applications du plan dans lui-même données par leurs expressions analytique, déterminer leurs écritures complexes.

a. $\begin{cases} x' = x - 2y + 4 \\ y' = 2x + y + 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x' = 5x + y - 3 \\ y' = x - 5y - 2 \end{cases}$

2. Pour les applications du plan dans lui-même données par leurs écritures complexes, déterminer leurs expressions analytiques :

a. $z' = (2 - 3i)z + 4 - i$ **b.** $z' = 3i\overline{z} - 7 - i$ **c.** $\overline{z'} = (-1 + i)z - 3$

Solution

1. La technique est la même que dans l'exemple précédent. Après les calculs, on déduit l'écriture complexe des applications proposées : (Il faut faire correctement toutes les étapes de transformation)

a. L'écriture complexe de $\begin{cases} x' = x - 2y + 4 \\ y' = 2x + y + 3 \end{cases}$ est : $z' = (1 + 2i)z + 3i + 4$.

c. L'écriture complexe de $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ est : $z' = i\overline{z} + i + 1$

c. L'écriture complexe de $\begin{cases} x' = 5x + y - 3 \\ y' = x - 5y - 2 \end{cases}$ est : $z' = (5 + i)\overline{z} - 3 - 2i$.

2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. En remplaçant puis en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on déduit que :

a. L'expression analytique de $z' = (2 - 3i)z + 4 - i$ est : $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 4 \\ y' = -3x + 2y - 1 \end{cases}$

b. L'expression analytique de $z' = 3i\overline{z} - 7 - i$ est : $\begin{cases} x' = 3y - 7 \\ y' = 3x - 1 \end{cases}$

c. L'expression analytique de $\overline{z'} = (-1 + i)z - 3$ est : $\begin{cases} x' = -x - y - 3 \\ y' = -x + y \end{cases}$

II. Études de quelques applications affines du plan

1. Translation

1-1. Définition

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée : $t_{\vec{u}}$ du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe M' tel que : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1-2. Points invariants par une translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$:
– Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point du plan est invariant par $t_{\vec{u}}$.
– Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant.

Remarque

La translation de vecteur nul est en fait l'application identité du plan. De ce fait, les translations rencontrées sont des translations de vecteurs non nul et donc ces translations n'ont pas de points invariants.

1-3. expression analytique et écriture complexe d'une translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ l'image de M par $t_{\vec{u}}$.

Alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$

En posant $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ on déduit alors que l'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est alors : $z' = z + z_0$ avec z_0 l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Ce qui nous conduit au théorème suivant.

Théorème 1 : Une application du plan dans lui même est une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ si et seulement si elle a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$ ou une écriture complexe de la forme : $z' = z + z_0$ avec $z_0 = a+ib$ avec $(a,b) \neq (0,0)$

1-4. Propriétés fondamentales ou vectorielle et composée de translation

On regroupe quelques propriétés utiles d'une translation dans le théorème suivant :

Théorème 2 :
i. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Si $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$
ii. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $t_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
iii. Une translation $t_{\vec{u}}$ est une transformation du plan dans lui-même de transformation réciproque $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
Ainsi la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$, $t_{-\vec{u}}$, a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x-a \\ y' = y-b \end{cases}$ et écriture complexe : $z' = z - z_0$ avec $z_0 = a+ib$.
iv. Une translation conserve la distance.

Remarque
Les différents points de théorème précédent se démontrent facilement en utilisant l'expression analytique d'une translation.

Conséquences du théorème 2

En utilisant le théorème 2, on a les conséquences suivantes :
• Une translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;
• Une translation conserve les angles orientés de vecteurs ;
• Par une translation, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée ;
• Par une translation , l'image d'un cercle C de centre I et de rayon r est un cercle C' de centre I' (image de I par la translation) et de rayon r ;
• Une translation conserve le barycentre puisque c'est une transformation du plan.

2. Homothétie

2-1. Définition

Définition 2 : Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), Ω un point de $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, l'application notée : $h_{(\Omega,k)}$ définie par :

$$h_{(\Omega,k)} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \qquad \text{tel que : } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Remarque
– Le centre d'une homothétie a pour image lui-même par cette homothétie ;
– Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont alignés ;
– On a : $\Omega M' = |k|\Omega M$;
– L'homothétie de rapport 1 est en fait l'identité du plan.

2-2. expression analytique et écriture complexe d'une homothétie

Soit $h_{(\Omega,k)}$ une homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport k :
Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ l'image de M par $h_{(\Omega,k)}$.
Alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$
En posant $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ on déduit alors que l'écriture complexe d'une homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport k est alors : $z' = kz + (1-k)z_0$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$.
Ce qui nous conduit au théorème suivant.

Théorème 3 : Une application du plan dans lui même est une homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport k si et seulement si elle a pour expression analytique $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$ et écriture complexe : $z' = kz + (1-k)z_0$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$.

2-3. Points invariants par une homothétie

Soit $h_{(\Omega,k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k, en utilisant l'expression analytique trouvée, on a alors :
• Si $k = 1$ alors tout point du plan est invariant par $h_{(\Omega,k)}$.
• Si $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors $h_{(\Omega,k)}$ admet Ω comme seul point invariant.

2-4. Propriétés fondamentales ou vectorielle et composée de translation

On regroupe quelques propriétés utiles d'une homothétie dans le théorème suivant :

Théorème 4 :
i. Soit $h_{(\Omega,k)}$ l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport k et $h_{(\Omega',k')}$ l'homothétie de centre $\Omega(x'_0, y'_0)$ et de rapport k'. Alors $h_{(\Omega,k)} \circ h_{(\Omega',k')}$ est une homothétie de rapport kk'. De plus si $kk' \neq 1$ et :
- Si $\Omega = \Omega'$, alors $h_{(\Omega,k)} \circ h_{(\Omega',k')} = h_{(\Omega,kk')}$.
- Si $\Omega \neq \Omega'$ alors $h_{(\Omega,k)} \circ h_{(\Omega',k')}$ est une homothétie de rapport kk' et de centre $\Omega_0 = bar\{(\Omega, k'(k-1)); (\Omega', k'-1)\}$

ii. Une homothétie $h_{(\Omega,k)}$ est une transformation du plan dans lui-même de transformation réciproque $h^{-1}_{(\Omega,k)} = h_{(\Omega,\frac{1}{k})}$ (*Par définition, $k \neq 0$*)

Ainsi la transformation réciproque de $h_{(\Omega,k)}$,$h_{(\Omega,\frac{1}{k})}$. a pour expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_0 \\ y' = \frac{1}{k}y + \left(1 - \frac{1}{k}\right)y_0 \end{cases}$

et écriture complexe : $z' = \frac{1}{k}z + \left(1 - \frac{1}{k}\right)z_0$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$.

Remarque
A l'aide de l'expression analytique générale d'une homothétie, on peut démontrer les deux points de ce théorème.

Conséquences du théorème 4
En utilisant le théorème 4, on a les conséquences suivantes :
• Une homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;

• Une homothétie conserve les angles orientés de vecteurs ;
• Par une homothétie de rapport k , l'image d'un cercle C de centre I et de rayon r est un cercle C' de centre I' (image de I par l'homothétie) et de rayon $|k|r$;
• Une translation conserve le barycentre puisque c'est une transformation du plan.

3. Rotation

3-1. Définition

Définition 4 : Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), Ω un point de $\mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, l'application notée : $r_{(\Omega,\theta)}$ définie par :

$$r_{(\Omega,\theta)} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \qquad \text{tel que : } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

3-2. expression analytique et écriture complexe d'une rotation

Soit $r_{(\Omega,\theta)}$ une rotation de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et d'angle θ :
Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ l'image de M par $r_{(\Omega,\theta)}$.
A travers des considérations géométriques, on peut démontrer que les coordonnées $M(x, y)$ et celles de $M'(x', y')$ vérifient les relations : $\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos(\theta) - (y - y_0)\sin(\theta) + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin(\theta) + (y - y_0)\cos(\theta) + y_0 \end{cases}$
En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. En notant ω l'affixe de Ω, on peut déduire que $r_{(\Omega,\theta)}$ a pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 5 : Une application du plan dans lui même est une rotation de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et d'angle θ si et seulement si elle a pour expression analytique $\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos(\theta) - (y - y_0)\sin(\theta) + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin(\theta) + (y - y_0)\cos(\theta) + y_0 \end{cases}$ et écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ avec ω l'affixe de Ω.

Remarque
La rotation d'angle nul et de centre Ω est l'identité du plan.

3-3. Points invariants par une rotation

Soit $r_{(\Omega,\theta)}$ une rotation de centre Ω et d'angle Ω, en utilisant l'expression analytique trouvée, on a alors :
• Si $\theta = 2k\pi$ alors tout point du plan est invariant par $r_{(\Omega,\Omega)}$.
• Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors $r_{(\Omega,\theta)}$ admet Ω comme seul point invariant.

3-4 Réciproque et composée de rotation

Le théorème suivant donne la réciproque et la composée de deux rotations ;

Théorème 5 :
i. Soit $r_{(\Omega,\theta)}$ la rotation de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et d'angle θ et $r_{(\Omega',\theta')}$ la rotation de centre $\Omega(x'_0, y'_0)$ et d'angle θ'. Alors $r_{(\Omega,\theta)} \circ r_{(\Omega',\theta')}$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$. De plus si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$ et :
- Si $\Omega = \Omega'$, alors $r_{(\Omega,\theta)} \circ r_{(\Omega',\theta')} = r_{(\Omega,\theta+\theta')}$.
- Si $\Omega \neq \Omega'$ alors $r_{(\Omega,\theta)} \circ r_{(\Omega',\theta')}$ est une rotation d'angle $\theta+\theta'$ et de centre le point invariant de $r_{(\Omega,\theta)} \circ r_{(\Omega',\theta')}$.

ii. Une rotation $h_{(\Omega,\theta)}$ est une transformation du plan dans lui-même de transformation réciproque $r^{-1}_{(\Omega,\theta)} = r_{(\Omega,-\theta)}$
Ainsi la transformation réciproque de $r_{(\Omega,\theta)}$, $r_{(\Omega,-\theta)}$, a pour expression analytique :
$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta) + x_0 \\ y' = -(x - x_0)\sin(\theta) + (y - y_0)\cos(\theta) + y_0 \end{cases}$ et pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{-i\theta}(z - \omega) + \omega$ avec ω l'affixe de Ω.

Remarque
Les différents points de ce théorème se démontre facilement à l'aide de l'expression générale d'une rotation.

Exemple

La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ et

pour écriture complexe $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) z$

4. Symétrie centrale

4-1. Définition

Définition 5 : Soit $\Omega(x_0, y_0)$, un point du plan.
On appelle **Symétrie de centre Ω** , l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe un point $M'(x', y')$ tel que Ω soit le milieu de $[MM']$.

4-2 Expression analytique d'une symétrie centrale

Activité

Soient $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) et $\Omega(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}$.
Soient $M(x, y)$ un point du plan d'image $M'(x', y')$ par la symétrie de centre Ω S_Ω.
a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$
b. Déduire l'expression de x' et y' en fonction de x et y.
c. Déduire l'écriture complexe de S_Ω.

Solution :
a. Comme $S_\Omega(M) = M'$ alors $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$
b. Puisque $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ alors : $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$
c. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$. On déduit que S_Ω a pour écriture complexe : $z' = -z+2z_0$ avec $z_0 = x_0+iy_0$.

Théorème 7 : Soient $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) et $\Omega(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}$.
Une application S est une symétrie centrale de centre Ω si et seulement si S a pour expression analytique :
$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ et une écriture complexe : $z' = -z + 2z_0$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$.

4-3. Points invariants par une symétrie centrale

Soit S_Ω une symétrie centrale de centrale de centre Ω. Le seul point invariant par S_Ω est Ω. Ce résultat se démontre facilement avec l'expression analytique générale de la symétrie centrale trouvée dans le théorème 7.

4-4 réciproque d'une symétrie centrale et notion d'involution

Soit S_Ω une symétrie de centre $\Omega(x_0, y_0)$, alors son écriture complexe est : $z' = -z + 2z_0$ avec $z_0 = x_0 + iy_0$.
Composons S_Ω par elle-même. $S_\Omega \circ S_\Omega$ a pour écriture complexe : $z'' = -(-z + 2z_0) - 2z_0 = z$.
Ainsi $S_\Omega \circ S_\Omega = Id_\mathcal{P}$ et on dit que S_Ω est une involution.

De manière plus générale on a la définition suivante d'une involution :

Définition 6 : Une involution de plan est toute application f du plan dans lui-même telle que pour tout point M du plan, $f \circ f(M) = M$.

Théorème 8 :
i. Pour toute symétrie centrale S_Ω, $S_\Omega \circ S_\Omega = Id_\mathcal{P}$.
ii. Une symétrie centrale est une transformation du plan de transformation réciproque elle-même.

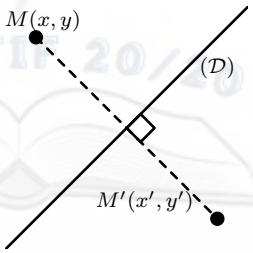
Conséquences du théorème 8
• Une symétrie centrale conserve le barycentre ;
• Une symétrie centrale conserve les distances ;
• Une symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de centre Ω et de rapport -1 ;
• Si deux droites sont parallèles (resp. orthogonales), alors leurs images par une symétrie centrale sont parallèles (resp. orthogonales). On a la conservation du parallélisme et de l'orthogonalité.

5. Symétrie orthogonale ou réflexion

5-1. Définition

Définition 7 : Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.
On appelle On appelle Symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ ou une réflexion d'axe $(\mathcal{D})$, l'application S_D de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $(\mathcal{D})$ soit la médiatrice du segment $[MM']$

Illustration :



5-2 expression analytique et écriture complexe d'une symétrie orthogonale

Soit $S_{\mathcal{D}ma}$ une symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$:
Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ l'image de M par $S_\mathcal{D}$.
On suppose que $S_\mathcal{D}$ a pour équation : $ax + by + c = 0$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ son vecteur directeur.

$$S_\mathcal{D}(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ \text{Le milieu I de } [MM'] \in (\mathcal{D}) \end{cases}$$

En utilisant ces deux conditions, on déduit la relation suivante entre les coordonnées $M(x, y)$ et celles de $M'(x', y')$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}x - \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}y - \dfrac{2cb}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

En posant $\alpha = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$, $\beta = -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, $\gamma = -\dfrac{2ac}{a^2 + b^2}$ et $\lambda = -\dfrac{2cb}{a^2 + b^2}$ alors l'équation analytique dévient : $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \beta x - \alpha y + \lambda \end{cases}$

En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ on transforme cette expression analytique en une écriture complexe : $z' = (\alpha + i\beta)\overline{z} + \gamma + i\lambda$.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 9 : Soit $(\mathcal{D})$ une droite d'équation : $ax+by+c=0$.
Une symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ a pour expression analytique $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \beta x - \alpha y + \lambda \end{cases}$ et écriture complexe : $z' = (\alpha+\beta i)\overline{z} + \gamma + i\lambda$ avec α, β, γ et λ définis ci-dessus.

5-3. Points invariants par une symétrie orthogonale

Soit $S_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$:
La droite $(\mathcal{D})$ est globalement invariant par $S_{\mathcal{D}}$ c'est-à-dire que tout M de $(\mathcal{D})$ a une image M' par $S_{\mathcal{D}}$ qui appartient aussi à $(\mathcal{D})$.

5-4 Composée deux symétries orthogonales de même axe et notions d'involution

Reprenons l'écrire complexe générale d'une symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$: $ax+by+c=0$ qui est :
$z' = (\alpha+\beta i)\overline{z} + \gamma + i\lambda$ alors $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$ a pour écriture complexe : $z'' = (\alpha+\beta i)(\overline{(\alpha+\beta i)\overline{z} + \gamma + i\lambda}) + \gamma + i\lambda$.
Ainsi $z'' = (\alpha^2+\beta^2)z + \alpha\gamma + \gamma + \lambda\beta + i(\gamma\beta + \lambda - \alpha\beta)$. Or $\alpha = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$, $\beta = -\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, $\gamma = -\dfrac{2ac}{a^2+b^2}$ et $\lambda = -\dfrac{2cb}{a^2+b^2}$. On vérifie facilement que $\alpha^2+\beta^2 = 1$, $\alpha\gamma + \gamma + \lambda\beta = 0$ et $\gamma\beta + \lambda - \alpha\beta = 0$.
Ainsi l'écriture complexe de $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$ est alors $z'' = z$. Donc $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$ est l'identité du plan.
Puisque $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = Id_{\mathcal{P}}$, alors une symétrie orthogonale est une involution.

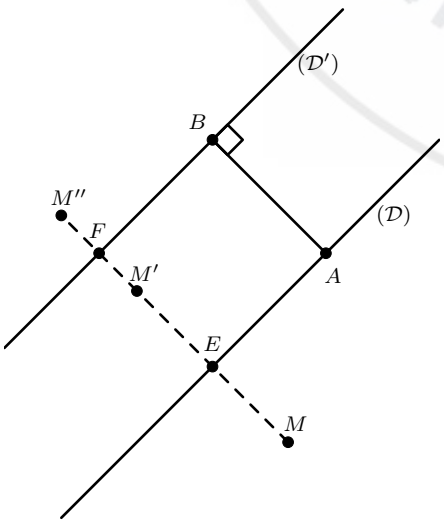
On a alors le théorème :

Théorème 10 :
i. Toute involution est une symétrie. (ça peut être une symétrie axiale ou une symétrie centrale)
ii. Soit $S_{\mathcal{D}}$ une réflexion d'axe $(\mathcal{D})$. $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = Id_{\mathcal{P}}$ et une symétrie orthogonale est dite une involution du plan.
iv. Toute symétrie S orthogonale est bijective de bijection réciproque elle-même.

Remarque
une symétrie axiale n'est pas nécessairement une symétrie orthogonale. On peut avoir une symétrie parallèlement à une direction donnée.

5-5 Composée deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Soient $S_{\mathcal{D}}$ et $S_{\mathcal{D}'}$ deux symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ avec $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites parallèles.
On note $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y')$ image de M par $S_{\mathcal{D}}$ et M'' image de M' par $S_{\mathcal{D}'}$.



$M' = S_{\mathcal{D}}(M)$ et $M'' = S_{\mathcal{D}'}(M')$ alors $M'' = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}(M)$.
On déduit par la définition d'une réflexion que :
$(\mathcal{D})$ est la médiatrice de $[MM']$ et $(\mathcal{D}')$ celle de $[M'M'']$.
Appelons E le milieu de $[MM']$ et F celui de $[M'M'']$. Alors $E \in (\mathcal{D})$ et $F \in (\mathcal{D}')$. On a ainsi :
$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{EM'} + 2\overrightarrow{M'F} = 2\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$
Ainsi $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$ et ceci quelque soit le point M du plan.

Donc $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ est la translation du vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

On peut facilement vérifier de manière analogue que : pour tout point M du plan d'image M'' par $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{BA}$

Donc $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ est la translation du vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

On peut très bien constater que $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} \neq S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$.

Théorème 11 : Soient $S_{\mathcal{D}}$ et $S_{\mathcal{D}'}$ deux symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ avec $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites parallèles. Alors :
- $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.
- $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = t_{2\overrightarrow{BA}}$

5-6. Composée deux symétries orthogonales d'axes sécants

Théorème 12 : Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes en A ; $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$ et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}})$.
La composée de $S_{\mathcal{D}}$ suivie de $S_{\mathcal{D}'}$ est la rotation de centre A, d'angle de mesure 2θ :

$$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r_{(A,2\theta)}$$

6. Projections affines

6-1 Définition

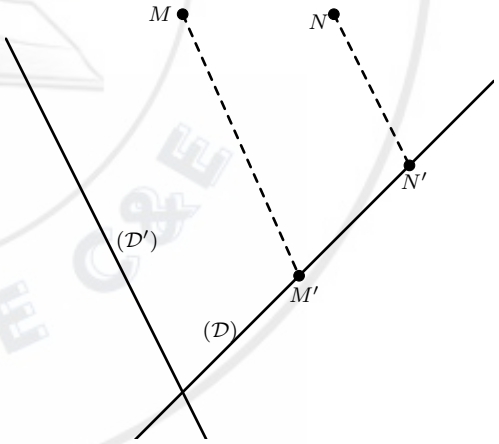
Définition 8 : Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de $\mathcal{P}$.
Le **projeté d'un point M sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $(\mathcal{D}')$** noté N', le point intersection de la droite passant par M et parallèle à $(\mathcal{D}')$ avec la droite $(\mathcal{D}')$

6-2. expression analytique et écriture complexe d'une symétrie orthogonale

Soit p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $(\mathcal{D}')$
Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ l'image de M par p .
On suppose que $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ a pour équation : $ax + by + c = 0$ et $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ a pour équation : $a'x + b'y + c' = 0$

$$p(M) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{u'} \\ M' \in (\mathcal{D}) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} ax' + by' + c = 0 \\ a'(x' - x) + b'(y' - y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Si on a les données a, b, c, a', b' et c', on peut facilement déduire du système $(*)$ et x', y' en fonction de x et y comme on va le voir dans l'activité qui suit.



Activité 2

Soient $(\mathcal{D})$: $x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}')$: $x - 3y = 1$.
Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$, image de M par la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $(\mathcal{D}')$ p.
a. Exprimer x' et y' en fonction x et y et montrer que l'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$.
b. Déterminer $p \circ p$.
c. Montrer que p n'est pas une transformation du plan.

Solution

a. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tel que $M' = p(M)$. $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$

$p(M)=M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{u} \\ M' \in (\mathcal{D}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'+2y'=5 \\ x'-x-3y'+3y=0 \end{cases}$ Par suite : $\begin{cases} x'=\dfrac{2}{5}\left(x-3y+\dfrac{15}{2}\right) \\ y'=\dfrac{1}{5}(-x+3y+5) \end{cases}$

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

M est invariant par $p \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x=2x-6y+15 \\ 5y=-x+3y+5 \end{cases} \Longleftrightarrow x+2y=5$ Ainsi M est invariant par p si et seulement si M appartient à la droite $(\mathcal{D})$. On déduit alors que l'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$.

b. Soit $M''(x'',y'')$ image du point $M(x,y)$ par $p\circ p$.

$M''=p\circ p(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{2}{5}\left[\dfrac{2}{5}\left(x-3y+\dfrac{15}{2}\right)-\dfrac{3}{5}(-x+3y+5)+\dfrac{15}{2}\right] \\ y'=\dfrac{1}{5}\left[-\dfrac{2}{5}\left(x-3y+\dfrac{15}{2}\right)+\dfrac{3}{5}(-x+3y+5)+5\right] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{2}{5}\left(x-3y+\dfrac{15}{2}\right) \\ y'=\dfrac{1}{5}(-x+3y+5) \end{cases}$

On conclut alors que $p\circ p=p$.

c. Il suffit de montrer ici que p n'est pas bijective. La technique pour montrer que p n'est pas bijective est de considérer deux points de la droite $(\mathcal{D}')$ et de montrer que ces deux points ont la même image. (Ou tout simplement calculer le déterminant puisque nous connaissons l'expression analytique de p)

On considère alors $A(1,0)$ et $B(4,1)$. A et B appartient bien à $(\mathcal{D}')$. On note A' et B' les images de A et B par p. On a alors : $A'\left(\dfrac{17}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ et $B'\left(\dfrac{17}{5},\dfrac{4}{5}\right)$. $A\neq B$ mas $A'=B'$. On déduit alors que p n'est pas une application affine bijective.

Avant de généraliser les propriétés trouver ici, traitons le cas particulier d'une projection orthogonale.

Activité 3

Soit $(\mathcal{D})$: $x+2y=5$ et p la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$.

Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$, image de M par p .

a. Exprimer x' et y' en fonction x et y et montrer que l'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$.

b. Déterminer $p\circ p$.

c. Montrer que p n'est pas une transformation du plan.

Solution

a. Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que $M'=p(M)$. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de $(\mathcal{D})$

$p(M)=M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u}=0 \\ M'\in(\mathcal{D}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'+2y'=5 \\ -2(x'-x)+y'-y=0 \end{cases}$

Par suite l'expression analytique de p est alors : $\begin{cases} x'=\dfrac{2}{5}\left(2x-y+\dfrac{5}{2}\right) \\ y'=-\dfrac{1}{5}(2x-y-10) \end{cases}$

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

M est invariant par $p \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x=4x-2y+5 \\ 5y=-2x+y+10 \end{cases} \Longleftrightarrow x+2y=5$ Ainsi M est invariant par p si et seulement si M appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

On déduit alors que l'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$.

b. Soit $M''(x'',y'')$ image du point $M(x,y)$ par $p\circ p$.

$$M'' = p\circ p(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2}{5}\left[\frac{4}{5}\left(2x-y+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{5}(2x-y-10)+\frac{5}{2}\right] \\ y' = -\frac{1}{5}\left[\frac{4}{5}\left(2x-y+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{5}(2x-y-10)-10\right] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2}{5}\left(2x-y+\frac{5}{2}\right) \\ y' = -\frac{1}{5}(2x-y-10) \end{cases}$$

On conclut alors que $p \circ p = p$.

c. On considère $O(0,0)$ et $A(1,2)$. 0 et A appartient bien à $(\mathcal{D}')$ d'équation : $y = 2x$ qui est orthogonale à $(\mathcal{D})$.
On note O' et A' les images de O et A par p. On a alors : $O'(1,2)$ et $A'(1,2)$.
$O \neq A$ mas $O' = A'$. On déduit alors que p n'est pas une application affine.

On généralise les propriétés vues dans les deux activités dans le théorème suivant :

Théorème 13 : Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de $\mathcal{P}$ et p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $(\mathcal{D}')$. Alors :
i. La droite $(\mathcal{D})$ est globalement invariante par p.
ii. $p \circ p = p$.
iii. p est une application affine du plan dans lui-même non bijective.

7. Symétrie glissée

7-1. Définition

Définition 9 .
On appelle symétrie glissée toute application affine de plan composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe (D) dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

Remarque
Si (D) dont $\vec{u}$ est son vecteur directeur. En notant S_D la symétrie orthogonale d'axe (D) alors $S = S_D \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée.

7-2. Propriétés d'une symétrie glissée

Commençons par ce théorème :

Théorème 14 : Toute symétrie glissée S s'écrit de façon unique comme composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).
Dans ce seul cas, la composée de la symétrie orthogonale et de la translation est permutable. On a :
$S = S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_D$

Remarque
- L'écriture $S = S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_D$ d'une symétrie glissée s'appelle la forme canonique.
- (D) est l'axe de la symétrie glissée et $\vec{u}$ le vecteur de la même symétrie glissée.

Propriétés : Soit S une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$. Alors :
i. $S \circ S = t_{2\vec{u}}$.
ii. L'axe d'une symétrie glissée S est la droite passant par les milieux des segments $[MM']$, où $S(M) = M'$

Remarque
Ces propriétés permettent de déterminer les caractéristiques d'une symétrie glissée.
En effet : Si $S = S_D \circ t_{\vec{u}}$ alors $S \circ S = t_{2\vec{u}}$ va permettre de déterminer le vecteur $\vec{u}$. On peut alors déterminer l'expression analytique de S_D en composant par la réciproque de $t_{\vec{u}}$ qui est $t_{-\vec{u}}$: $S_D = S \circ t_{-\vec{u}}$.

Exercice 2

Soit f la symétrie glissée de forme analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

a. Donner la forme analytique de $f \circ f$ puis déterminer le vecteur $\vec{u}$ de f.

b. Déduire alors qu'on peut écrire f sous la forme de $f = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où S_D est une application affine à déterminer.

c. Montrer que l'ensemble des points invariants par S_D est une droite que l'on déterminera son équation.

Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite.

d. Conclure que f est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont on donnera les éléments caractéristiques.

Solution

a. Soient $M(x,y)$ et $M''(x'',y'')$ tels que $M'' = f \circ f(M)$.

Alors $\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 2\right) + 1 \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 2\right) - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'' = x + \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \\ y'' = y + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Comme f est une symétrie glissée alors $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

Ainsi le vecteur de f est : $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3-2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-2+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

b. • Supposons que $f = S_D \circ t_{\vec{u}}$ alors $f \circ t_{\vec{u}}^{-1} = S_D$ or $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}} \Rightarrow S_D = f \circ t_{-\vec{u}}$.

De plus $t_{-\vec{u}}$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = x - \frac{3-2\sqrt{3}}{4} \\ y' = y - \frac{-2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Donc $M' = f \circ t_{-\vec{u}}(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3-2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{-2+\sqrt{3}}{4}\right) + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{3-2\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{-2+\sqrt{3}}{4}\right) - 2 \end{cases}$

Ainsi la forme analytique de $S_D = f \circ t_{-\vec{u}}$ est alors : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{6+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

c. • Ensemble de points invariants par S_D :

$$S_D(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{6+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{4} & \left(\times\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right) \\ \frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{6+\sqrt{3}}{4} & \left(\times\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{3}}{4}x = \frac{3-2\sqrt{3}}{4}y + \frac{4-3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{4}y = \frac{2-\sqrt{3}}{4}x + \frac{4-3\sqrt{3}}{8} \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{-2+\sqrt{3}}{4}x - \frac{3-2\sqrt{3}}{4}y = \frac{4-3\sqrt{3}}{8}.$$

Ainsi $S_D(M) = M$ si et seulement si M appartient à la droite (D) : $\dfrac{-2+\sqrt{3}}{4}x - \dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}y = \dfrac{4-3\sqrt{3}}{8}$.
L'ensemble des points invariants est alors la droite (D).

• Soit (Δ) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

On déduit alors que $\vec{u}\begin{pmatrix}\dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{-2+\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

d. Des questions précédentes, on peut conclure qu'on peut écrire $f = S_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

De plus $M'' = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_D \iff \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(y + \dfrac{-2+\sqrt{3}}{4}\right) + \dfrac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{-2+\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{6+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - 2 \end{cases}.$$

On a alors $t_{\overrightarrow{u}} \circ S_D = f$. Ainsi $f = S_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$. Donc f est la composée de la symétrie orthogonale S_D et de la translation $t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercices

Exercice 1

On donne deux points distincts A et B du plan affine et un réel k non nul. Soit M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k ; soit $M' = bar\{(B,\alpha);(M_1,1)\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$. Soit f l'application qui à tout point M du plan affine associe M'.

1. Montrer que pour tout point M du plan affine on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.
2. Montrer que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur.
3. Montrer que si $k \neq \alpha + 1$ il existe un unique point invariant G par f.
4. Montrer alors que f est une homothétie de centre G dont on définira le rapport.

Exercice 2

Dans cet exercice $\mathcal{P}$ désigne le plan affine rapporté à un repère.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'application affine $f_a : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui au point $M(x,y) \longmapsto M'(x',y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = ax + a - 1 \\ y' = (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{cases}$$

1- **a.** Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie. On note a_0 cette valeur.
b. Déterminer alors les éléments caractéristiques de f_{a_0}
2- **a.** Déterminer une valeur de a pour laquelle f_a est une involution. On note a_1 cette valeur.
b. Montrer que f_{a_1} est une symétrie que l'on précisera.
3. déterminer avec précision $f_a(\mathcal{P})$ en fonction de a.
On suppose $a = 0$. Soit t la translation de vecteur $3\vec{j}$.
4- **a.** Déterminer la forme analytique de t et son écriture complexe. En déduire que t est une transformation du plan dont on déterminera la transformation réciproque.
b. Montrer qu'il existe une application affine g du plan dans lui-même telle que $f_0 = t \circ g = g \circ t$.
c. En déduire que g est une projection que l'on précisera.

Exercice 3

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient f et g deux applications affines du plan de formes analytiques : $f : \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = -(x+y-2)/2 \\ y' = -(x-y-4)/2 \end{cases}$

1. Montrer que f n'est pas une transformation du plan puis déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2- **a.** Donner la forme complexe de g.
Montrer que g admet un seul point invariant que l'on notera Ω ?
b. On note $h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Donner l'écriture complexe et analytique de $h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$
Justifier que $h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
c. Montrer qu'il existe une application affine S_Δ telle que $g = h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta$
Déterminer l'expression analytique et l'écriture complexe de S_Δ. Montrer que S_Δ est une symétrie d'axe Δ et justifier que $\Omega \in \Delta$
3. Justifier que : $g = S_\Delta \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$. En déduire alors la nature exacte de $g \circ g$.
4. Montrer que l'image du plan P par f est une droite D dont l'on déterminera l'équation.
On note p la projection orthogonale sur la droite D
5. Donner l'expression analytique de p et vérifier D est globalement invariant par p. p est elle bijective ?
6. Montrer qu'on peut écrire $f = h \circ p$ où h est une homothétie que l'on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 4

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On donne $A(1,1)$, $B(2,1)$, $A'(-1,-1)$, $B'(1,0)$ et $O'(2,0)$.
On désigne par g l'application affine de (P) vers (P) telle que : $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(O) = O'$.

1. Déterminer l'expression analytique de g.

2. Démontrer que g est bijective.

3. Soit h l'application affine de (P) vers (P) d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 4 \\ y' = -x + 2y + 2 \end{cases}$

Déterminer $h(A')$, $h(B')$ et $h(O')$. En déduire alors que $h = g^{-1}$ où g^{-1} est la bijection réciproque de g.

4. (D) est une droite du plan d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec α, β et γ des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

a. Déterminer en fonction de α, β et γ une équation cartésienne de (D') image de (D) par g.

b. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles.

5. Pour tout point M du plan, on pose : $M_1 = g(M)$; $M_2 = g(M_1)$ et $M_3 = g(M_2)$.

a. Déduire de la question **4.** que si les point M, M_1 et M_2 sont deux à deux distincts alors ils ne sont pas alignés.

b. Démontrer que l'écriture complexe de $g \circ g$ est : $z' = -z + 6 + 2i$.

c. Déterminer alors l'ensemble des points invariants par $g \circ g$.

d. Vérifier que $g \circ g$ est la symétrie centrale de centre $I(3, 1)$ puis déterminer $g \circ g \circ g \circ g$.
(**On rappelle que** $g \circ g \circ g \circ g = (g \circ g) \circ (g \circ g)$)

6- **a.** En remarquant que pour tout point M du plan : $M_2 = g \circ g(M)$ et $M_3 = g \circ g(M_1)$.
démontrer que I est isobarycentre de M, M_1, M_2 et M_3 .

b. Démontrer alors que $\overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{g(I)M_1} + \overrightarrow{g(I)M_2} + \overrightarrow{g(I)M_3} = \vec{0}$

c. Démontrer que $g(I) = I$.

d. Démontrer que I est l'unique point invariant par g.

Exercice 5

Partie A

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre I avec $A(4, 2)$, $B(4, 5)$ et $C(1, 5)$.
Soient r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et S la symétrie centrale C.

1. Déterminer les coordonnées de D et I. Représenter le carré $ABCD$ et placé le point I.

2. Déterminer les formes analytique de r, de t et de la symétrie orthogonale d'axe (AD) notée $S_{(AD)}$.

3. Déterminer la droite (Δ) telle que $r = S_\Delta \circ S_{AD}$.

4- **a.** Donner la forme analytique de $t \circ r$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$.

5. Sans faire de calcul, déterminer les images des points A et D par $S \circ t \circ r$.

6- **a.** Donner l'expression analytique de $S \circ t \circ r$. Vérifier que B est invariant par $S \circ t \circ r$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ t \circ r$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
On suppose que l'ensemble des points invariants est une droite qu'on notera (D) et $\vec{u}$ son vecteur directeur.

2. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (D).

3. Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (D).

4. Montrer que f est une involution. f est-elle bijective ? Justifier.

5. Reconnaître f.

CHAPITRE 15

SIMILITUDES ET ISOMÉTRIES DU PLAN

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, $\mathcal{P}$ désigne le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I. Notion de similitudes

Activité 1

Soit h une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui a tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$

a. Déterminer les point invariant par f. f est-elle une transformation du plan ? Justifier.

b. Donner une écriture complexe de f. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c. Soit M, N, P et Q quatre points distincts du plan. Montrer $\dfrac{M'N'}{P'Q'} = \dfrac{MN}{PQ}$.

Solution

a. • Soit $M(x, y)$. $f(M) = M \iff \begin{cases} x = -2x + 3 \\ y = -2y + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ Le point invariant par f est : $\Omega(1, 2)$.

• Le déterminant est : $-2 \times (-2) = -4 \neq 0$. Donc f est une transformation du plan.

b. • Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors on déduit que l'écriture complexe de f est : $z' = -2z + 3 + 6i$ ou encore $z' = kz + (1 - k)(1 + 2i)$ avec $k = -2$.

• Puisque f s'écrit sous la forme de $z' = kz + (1-k)(1+2i)$ avec $k = -2$, on déduit alors que f est l'homothétie de centre $\Omega(1, 2)$ et de rapport $k = -2$.

c. Soit $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ alors $\begin{cases} x'_N = -2x_N + 3 \\ y'_N = -2y_N + 6 \end{cases}$, $\begin{cases} x'_M = -2x_M + 3 \\ y'_M = -2y_M + 6 \end{cases}$, $\begin{cases} x'_P = -2x_P + 3 \\ y'_P = -2y_P + 6 \end{cases}$

et $\begin{cases} x'_Q = -2x_Q + 3 \\ y'_Q = -2y_Q + 6 \end{cases}$ On alors : $\begin{cases} x'_M - x'_N = -2(x_M - x_N) \\ y'_M - y'_N = -2(y_M - y_N) \end{cases}$ et $\begin{cases} x'_P - x'_Q = -2(x_P - x_Q) \\ y'_P - y'_Q = -2(y_p - y_Q) \end{cases}$

$\Longrightarrow M'N' = 2MN$ et $P'Q' = 2PQ$. Par suite $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{M'N'}{P'Q'}$

L'application f multiplie les distances par un facteur $|k|$. On dit de cette application qu'elle est **une similitude**.

1. Définition d'une similitude

Définition 1 : Une similitude plane est une transformation bijective du plan S qui conserve les rapports de distances.
Autrement dit si S est une similitude du plan et si M, N, P et Q sont quatre points du plan avec $M \neq N$ et $P \neq Q$ et d'images respectives M', N', P' et Q' par S alors : $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{M'N'}{P'Q'}$

Remarque

– Une similitude du plan est toujours une transformation c'est-à-dire qu'elle est toujours bijective.

– Si S est une similitude, on a $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{M'N'}{P'Q'}$. On peut traduire cette égalité par $\dfrac{S(M)S(N)}{MN} = \dfrac{M'N'}{MN} = k$ avec k un réel strictement positif. On dit que la similitude multiplie les longueurs par k et k est appelé rapport de la similitude S ($k > 0$).

Exemple

Les translations, les homothéties, une réflexion d'axe l'axe des abscisses sont des similitudes.

Théorème 1 : Soit S une similitude du plan.
Il existe un réel strictement positif k, tel que pour tous points M et N du plan d'image M', N' on ait : $M'N' = kMN$
k est appelé **rapport** de la similitude S et k est toujours strictement positif.

Attention : Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$. Il faut toujours se rappelé que le rapport d'une similitude est toujours supérieur ou égal à 0.

2. Composée de similitudes et réciproque d'une similitude

Théorème 2 : Soient S et S' deux similitudes planes de rapport k et k'.
i. La composée de S et S' est aussi une similitude de rapport kk'.
ii. La transformation réciproque de la similitude S de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. ($k > 0$)

Remarque
Puisqu'une similitude est par définition une transformation du plan, alors sa transformation réciproque existe bien et de rapport $\frac{1}{k}$ bien défini car $k > 0$ et donc $\frac{1}{k} > 0$.

3. Écriture complexe d'une similitude

Dans le chapitre précédent, nous avons retrouvé l'écriture complexe de différentes applications affines qui sont des similitudes. Par exemple :
• La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0 a pour écriture complexe : $z' = z + z_0$.
• L'homothétie de rapport k et de centre Ω d'affixe ω a pour écriture complexe : $z' = kz + \omega(1-k)$.
• La réflexion d'axe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées ont respectivement pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$ et $z' = -\overline{z}$.

Toutes les similitudes que nous connaissons ont une écriture complexe qui peut se présenter sous l'une des deux formes suivantes : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$.
Nous généralisons cette constatation dans le théorème suivant :

Théorème 3 : Une application du plan est une similitude plane si et seulement si elle admet une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque
− Le théorème 3 donne une définition plus ou moins simple d'une similitude. Si on connait l'expression complexe d'une application affine du plan, nous pouvons immédiatement dire si c'est une similitude ou pas.
− Ce théorème est démontrable mais la démonstration reste fastidieuse .

Conséquences de l'écriture d'une similitude sous la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$

Soit S une similitude dont l'écriture complexe est sous la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$. Alors :
− le rapport de S est $|a|$ (module de a).
− le nombre complexe a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'I'}$ avec $O' = S(O)$ et $I' = S(I)$ et le point $I(1,0)$.
− le nombre complexe b est l'affixe de O'.

– Si on peut écrire a sous la forme de $a = k'\,\mathrm{e}^{i\theta}$ alors θ est dit angle de la similitude S.

Exemple

La similitude S d'écriture complexe $z' = -3\left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{z}+3$ a pour rapport $k = \left|-3\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|$.
De plus $a = 6\exp\left(i\dfrac{4\pi}{3}\right)$.
Alors S est la similitude de rapport $k = 6$ et d'angle $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

II. Similitude directe et similitude indirecte

Toute similitude est soit une similitude directe soit une similitude indirecte.
Nous allons étudier ces deux grandes catégorie dans la suite de ce cours.

A-Similitude directe

1. Définition d'une similitude directe

Définition 2 : Soit S une similitude du plan.
S est une similitude directe si S a pour écriture complexe de la forme : $z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

Exemple

Connaissant les écritures complexe de l'identité du plan, des translations , des rotations , des homothéties, on peut alors dire que toutes ces applications sont des similitudes directes.

Cette définition d'une similitude directe a pour conséquence le théorème suivant qu'on admet :

Théorème 4 : S une similitude du plan.
S est une similitude directe si S conserve les angles orientés.
Autrement dit, si $A \neq B$ et $C \neq D$ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ avec $A' = S(A)$, $B' = S(B)$, $C' = S(C)$ et $D' = S(D)$.

2. Existence et unicité d'une similitude directe

Théorème 5 :
Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe S telle que $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.

Démonstration
Si une telle similitude S existe alors il existe a et b des nombres complexes tels que $z' = az+b$.
Puisque $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$ alors $Z_{A'} = aZ_A + b$ et $Z_{B'} = aZ_B + b$. Et par suite on peut déduire que :
$a = \dfrac{Z_{B'} - Z_{A'}}{Z_B - Z_A}$ et $b = Z_{A'} - aZ_A$.
Ainsi si S existe, le couple (a, b) existe et est aussi unique et donc S est unique.
Réciproquement, soit S une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az+b$ avec $a = \dfrac{Z_{B'} - Z_{A'}}{Z_B - Z_A}$ et $b = Z_{A'} - aZ_A$. Comme $A \neq B$ alors S est bien définie et on vérifie facilement que $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.
Conclusion : Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude directe unique transformant A en A' et B en B'

Remarque à propos du théorème 5

– Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$ avec $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$ alors S est une similitude de rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et d'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

– On peut de même démontrer que si A, B et C sont trois points distincts du plan, alors il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C. Dans ce cas, $\dfrac{AC}{AB}$ est son rapport et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ son angle.

3. Forme d'une similitude directe

Théorème 6 : Soit S une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) k le rapport de S et θ un argument de a.
i. Si $a = 1$ alors S est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
ii. Si $a \neq 1$ alors S a un unique point invariant qu'on note Ω, et en désignant par h l'homothétie de centre Ω et de rapport k et par r la rotation d'angle θ et de centre Ω ; on a : $S = h \circ r = r \circ h$.

Démonstration

i. Si $a = 1$, alors S a pour écriture complexe : $z' = z + b$; on reconnaît l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

ii. Supposons $a \neq 1$.

• $z = az + b \iff z = \dfrac{b}{1-a}$ et par suite S admet un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

• h et r ont respectivement pour écriture complexes : $z' - \omega = k(z - \omega)$ et $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$. On déduit facilement que $h \circ r$ et $r \circ h$ ont tous deux pour écriture complexe : $z' - \omega = k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$ $\quad (*)$

On a donc : $z' - \omega = k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) \iff z' = a\left(z - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a} \iff z' = az + b$.

Comme $h \circ r$ et $r \circ h$ ont la même écriture complexe que S alors on conclut que : $S = h \circ r = r \circ h$.

Notations et vocabulaire

1. Lorsque $a \neq 1$, Ω est appelé centre de la similitude directe S.

2. Une similitude directe qui n'est pas une translation est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés **éléments caractéristiques** de S.

3. La décomposition : $S = h \circ r = r \circ h$ est appelée forme réduite de S.

Conseils pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe :

Pour déterminer les éléments d'une similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, on peut :

– Déterminer le module et un argument de a et on obtient ainsi le rapport et l'angle de S.

– Résoudre l'équation d'inconnue z : $z = az + b$, la solution obtenue est l'affixe du centre de Ω.

Exercice 1

a. Soit S l'application du plan dans lui-même, d'écriture complexe : $z' = (1 - i)z - 2 + i$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristique de S.

b. Déterminer h et r deux applications du plan de sorte que $S = h \circ r = r \circ h$.

Soit f une application du plan dans lui même et soient les point $A(0, 1)$, $B(-2, 2)$ et $\Omega(0, 2)$.

c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f du plan dans lui-même qui transforme A en B et laissant invariant Ω. on déterminera l'écriture complexe de f.

d. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

e. Montrer qu'on peut écrire $f = r_0 \circ h_0 = h_0 \circ r_0$ où h_0 est une homothétie et r_0 une rotation que l'on précisera.

Solution

a. • $1-i=\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$

• De plus $z=(1-i)z-2+i \iff z=1+2i$.

Par suite, S est une similitude directe de centre $\Omega(1+2i)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b. On utilise le théorème 6, on prend r la rotation de centre Ω et d'angle $\theta=-\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $k=\sqrt{2}$.

• r a pour écriture complexe : $z'-1-2i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-1-2i)$.

• h a pour écriture complexe $z'-1-2i=\sqrt{2}(z-1-2i)$.

Alors on déduit que l'écriture complexe de $h\circ r$ est : $z'-1-2i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-1-2i)$ par suite $z'=(1-i)z-2+i$. On démontre de même que $r\circ h$ a pour écriture complexe $z'=(1-i)z-2+i$.

Ainsi $h\circ r=r\circ h=S$.

c. Supposons qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A)=B$ et $f(\Omega)=\Omega$.

Puisque f est une similitude directe, on déduit, par définition, que f a pour écriture complexe $z'=az+b$.

De plus $\begin{cases} f(A)=B \\ f(\Omega)=\Omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_B=az_A+b \\ z_\Omega=az_\Omega+b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-2i \\ b=-4+2i \end{cases}$

Ainsi on déduit que f a pour expression complexe : $z'=-2iz-4+2i$.

Réciproquement si f a pour écriture complexe $z'=-2iz-4+2i$, on peut déduire facilement que $f(A)=B$ et $f(\Omega)=\Omega$.

En conclusion : f existe et est unique d'expression complexe : $z'=-2iz-4+2i$.

d. En utilisant la question précédent, on conclut que f est une similitude directe de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(0,2)$.

e. On utilise toujours le théorème 6 relatif à la forme réduite d'une similitude directe :

On considère r_0 la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et h_0 l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

• r_0 a pour expression complexe : $z'-2i=-i(z-2i)$

• h_0 a pour expression complexe : $z'-2i=2(z-2i)$.

Ainsi $r_0\circ h_0$ a pour expression complexe $z'=-2iz-4+2i$. De manière analogue, $h_0\circ r_0$ a aussi pour expression analytique : $z'=-2iz-4+2i$.

Donc f peut s'écrire sous la forme de $f=r_0\circ h_0=h_0\circ r_0$.

4. Propriétés d'une similitude directe

Théorème 7 : Soit S une similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle θ.

i. S a pour écriture complexe : $z'-\omega=k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$.

ii. La réciproque de S est aussi une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

Remarque

– Ce théorème donne l'expression complexe de toute similitude directe dont on connait les éléments caractéristiques.

– Le point **ii.** affirme que la réciproque de toute similitude directe est aussi une similitude directe.

– On peut également démontrer que la composée d'une similitude directe de rapport k et d'angle θ par une similitude directe de rapport k' et d'angle θ' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta+\theta'$.

Exemple

Considérons la similitude directe S de centre $\Omega(1+2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
En utilisant le théorème 7, on déduit que S a pour écriture complexe :
$z'-1-2i=\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)(z-1-2i)$.
Donc S a pour expressions analytique : $z'=(1-i)z-2+i$.

B-Similitude indirecte

1. Définition d'une similitude indirecte

Définition 3 : Soit S une similitude du plan.
S est une similitude indirecte si S a pour écriture complexe de la forme : $z'=a\overline{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$

Exemple

Les symétries orthogonales sont des similitudes indirectes du plan.

Cette définition d'une similitude indirecte a pour conséquence le théorème suivant qu'on admet :

Théorème 8 : S une similitude du plan.
S est une similitude indirecte si S change un angle orienté en son opposé .
Autrement dit, si $A\neq B$ et $C\neq D$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=-(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'})$ avec $A'=S(A)$, $B'=S(B)$, $C'=S(C)$ et $D'=S(D)$.

On a vu plus loin que la composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k' est une similitude de rapport : $k\times k'$ et aussi que la réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
Par conséquent on a :
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

2. Décomposition d'une similitude indirecte

Théorème 9 :
Toute similitude indirecte est la composée d'une similitude directe et d'une réflexion.

Démonstration
Soit S similitude indirecte et soit (D) une droite quelconque du plan.
Notons S_D la réflexion d'axe (D). S et S_D sont des similitudes indirectes donc leur composée est une similitude directe qu'on note S'.
Nous avons donc $S'=S\circ S_D$ d'où $S=S'\circ S_D$ car $S_D\circ S_D=Id$ (toute réflexion est sa propre réciproque)
Par conséquent, S s'écrit sous la forme de : $S=S'\circ S_D$ avec S' une similitude directe.

Remarque
Cette décomposition n'est pas unique. En effet, le choix d'une autre droite comme axe de la réflexion donne une autre décomposition.

Exercice 2

Soit (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application affine S de (P) dans (P) qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2y - 3 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$ et soit f l'application affine de forme analytique : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
a. Déterminer l'écriture complexe de f et de S.
b. En déduire que S est une similitude indirecte dont on donnera le rapport. Quel est la nature de f ?
c. Montrer qu'il existe une application affine g du plan dans lui-même telle que $S = g \circ f$. On donnera l'expression analytique de g et sa forme complexe.
d. En déduire que g est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Solution
a. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors on déduit que :
• S a pour expression complexe : $z' = 2i\overline{z} - 3 + 3i$.
• f a pour écriture complexe $z' = i\overline{z}$
b. $-$ S a pour écriture complexe $z' = 2i\overline{z} - 3 + 3i$ et par définition S est une similitude indirecte de rapport $k = 2$.
$-$ f est aussi une similitude indirecte de rapport $k = 1$. (On peut remarquer que f est la réflexion d'axe $y = x$)
c. $-$ Supposons $S = g \circ f$ alors $S \circ f = g$ car f est une réflexion.
Ainsi g a pour écriture complexe $z' = 2i(\overline{i\overline{z}}) - 3 + 3i \Rightarrow z' = 2z - 3 + 3i$.
$-$ Réciproquement, supposons g une application affine de forme complexe : $z' = 2z - 3 + 3i$. $g \circ f$ a pour écriture complexe : $z' = 2(i\overline{z}) - 3 + 3i \Rightarrow z' = 2i\overline{z} - 3 + 3i$ et donc $S = g \circ f$.
Conclusion : On peut écrire S sous la forme de $S = g \circ f$ avec g d'écriture complexe : $z' = 2z - 3 + 3i$.
$-$ l'écriture complexe de g est $z' = 2z - 3 + 3i$ et on déduit sa forme analytique : $\begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$
d. g a pour écriture complexe $z' = 2z - 3 + 3i$ donc par définition g est une similitude directe.
De plus, $z = 2z - 3 + 3i \iff z = 3 - 3i$
Alors g est une similitude directe, de centre $\Omega(3, -3)$ de rapport 2 et d'angle 0.

III. Notion d'isométries

1. Définition

Définition 4 : On appelle isométrie du plan toute transformation du plan dans lui-même qui conserve les distances ; c'est-à-dire que si $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une isométrie plane alors pour tous points A et B du plan tels que $f(A) = A'$ et $f'(B) = B'$ on a : $AB = A'B'$.

Exemple

Les symétries orthogonales, les translations, les rotations sont des isométries du plan.

Remarque
Une isométrie est donc toute similitude de rapport $k = 1$ et par conséquent toute isométrie conserve :
• le barycentre, l'alignement des points, l'orthogonalité et le parallélisme des droites ;
• le contact d'une droite et d'un cercle , de deux droites ou de deux cercles, les aires des surfaces planes ;
• La nature des figures géométriques (droites, triangles, quadrilatères, cercles, coniques.....)

Comme dans le cas d'une similitude, il existe des isométries qui conserve les angles orientés qu'on nomme **déplacement** et d'autres qui transforme les angles orientés en leurs opposés qu'on nomme **antidéplacement**

On rappelle qu'une isométrie est une similitude de rapport $k = 1$. On a alors la définition suivante :

Définition 5 :
– On appelle déplacement du plan toute isométrie qui conserve les angles orientés de vecteurs du plan.
– On appelle antidéplacement du plan toute isométrie qui transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé.

Commentaire
Un déplacement est en fait une similitude directe de rapport $k = 1$ et un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport $k = 1$.

Exemple

On utilisant les expressions complexes des applications affines usuelles étudiées dans le chapitre précédent, on a :
• Les rotations et les translations sont des déplacements.
• Les symétries orthogonales et glissées sont des antidéplacements.

Puisqu'une similitude de rapport $k = 1$ est une isométrie, on a alors les propriétés suivantes :

Propriétés :
i. La composée de deux déplacements est un déplacement ;
ii. La composée de deux antidéplacements est un déplacement ;
iii. La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement ;
iv. La réciproque d'un déplacement est un déplacement ;
v. La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque
On peut déduire de ces propriétés que :
• La composée de deux isométries est une isométrie.
• La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

2. Classification d'isométries

On admet le théorème suivant :

Théorème 10 :
i. Toute isométrie laissant invariant **trois points distincts** non alignés du plan, est **l'identité du plan**.
ii. Toute isométrie différente de l'identité et laissant invariant **deux points distincts** du plan, est une **symétrie orthogonale**.
iii. Toute isométrie laissant invariant **un seul point** du plan, est une **rotation** du plan.
iv. Toute isométrie du plan qui n'admet **aucun point invariant** est soit une **translation** soit une **symétrie glissée**.

Remarque
Une homothétie de rapport 1 ou -1 est une isométrie et une homothétie laisse invariant un seul point du plan si le rapport $k \neq 1$. Cependant les homothéties de rapport -1 sont des rotation. En effet :
Si $k = -1$, l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(z_0)$ est : $z' = -z + 2z_0$ qu'on peut écrire encore $z' - z_0 = -[z - z_0]$. On pose $\omega = z_0$, on a alors $z' - \omega = -(z - \omega)$. On reconnait l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle π.
C'est pour cette raison, que le théorème 10 ne fait pas mention du nom homothétie car dans les cas où une homothéties est une isométrie, on peut se ramener soit à une rotation ou soit à l'identité du plan.

Exercice 3

Soit (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère une application affine f de (P) dans (P) de forme analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y) \end{cases}$

a. Vérifier que f est une transformation du plan.
b. Donner une écriture complexe de f. f est-elle une similitude ? Si oui, est-elle une similitude directe ou indirecte ? Justifier votre réponse.
c. Montrer que f est une isométrie. Est-elle un déplacement, un antidéplacement ?
d. Déterminer les points invariants par f et déduire la nature de f.

Solution

a. Le déterminant de f, $det(f) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}\right) = 1 \neq 0$. Par suite f est une transformation du plan.

b. On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ alors, $x' + iy' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4) + \frac{1}{5}i(-4x + 3y)$.

Ainsi l'écriture complexe de f est alors : $z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) z + \frac{4}{5}$.

Puisque f a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) z + \frac{4}{5}$, alors f est une similitude directe.

c. $\left|\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = 1$ donc f est une similitude directe de rapport $k = 1$. f est alors un déplacement.

d. Soit M un point fixe de f. Alors $z = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) z + \frac{4}{5} \iff z = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$.

f est une isométrie ayant un seul point invariant alors f est une rotation.

IV. Quelques compléments

1. Détermination d'isométrie

Soient quatre points A , B, A' et B' d'affixes respectives Z_A, Z_B, $Z_{A'}$ et $Z_{B'}$. On a vu dans le théorème 5, que si $A \neq B$ et $A' \neq B'$, qu'il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' à savoir la similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$. avec $a = \frac{Z_{B'} - Z_{A'}}{Z_B - Z_A}$ et $b = Z_{A'} - aZ_A$. Si S est un déplacement, alors S est par conséquent une similitude de rapport $k = 1$ et d'un certain angle θ. On a alors de manière analogue les propriétés suivantes :

• Soient A , B, A' et B' quatre points du plan. Si $AB = A'B'$ et $AB \neq 0$ il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.
• Soient A , B, A' et B' quatre points du plan. Si $AB = A'B'$ et $AB \neq 0$ il existe un antidéplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.

2. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale

Soit R une rotation de centre Ω et S une symétrie orthogonale d'axe (Δ).
• Si $\Omega \in (\Delta)$, alors $S \circ R$ ou $R \circ S$ est une symétrie orthogonale.
• Si $\Omega \notin (\Delta)$, alors $S \circ R$ ou $R \circ S$ est une symétrie glissée.

Exercices

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.

1- **a.** Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z. En déduire que f est une involution. Que-dire de f ?

b. Montrer que f est une isométrie indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.

On considère r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la symétrie orthogonale S d'axe $(O, \vec{u})$.

2. Donner les écritures complexes de r et S. En déduire que $f = r \circ S$.

3. Donner l'ensemble des points invariants par f. En déduire la nature de f.

Soit S' la symétrie orthogonale d'axe $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

4- **a.** Déterminer l'écriture complexe et analytique de S'. En déduire que $f = S'$.

b. Montrer que $r = S' \circ S$.

5. On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants par g.

b. Montrer que $g = t \circ f$ où t est une translation dont on précisera l'affixe du vecteur.

c. On considère s_0 la symétrie orthogonale d'axe $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

i. Sans calcul, dire pourquoi $s_0 \circ f$ est une translation.

ii. Déterminer l'expression complexe de s_0.

iii. En déduire que $t = s_0 \circ f$.

d. En déduire que g est une réflexion d'axe noté (D'). On donnera l'équation de (D').

e. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f. En déduire une construction de la droite (D'), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.on considère les points A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6.

1- **a.** Montrer qu'il existe une unique similitude directe qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte qui transforme A en O et O en B.

2. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout pointM d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -2i\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note Ω ce point.

3. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose $g = f \circ h$.

a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point Ω.

b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g. Montrer que l'écriture complexe de g est : $z'' = -i\overline{z} + 2 + 2i$ où z'' est l'affixe de M''.

c. Montrer qu'il existe sur l'axe $(O, \vec{v})$ un unique point invariant par g. On le note L.
Reconnaître alors la transformation g.

d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie d'une réflexion d'axe (ΩL).

Préciser les éléments caractéristiques de h'.

4. Déterminer les droites (D) telles que $f((D))$ et (D) soient parallèles.

Exercice 3

On considère T la transformation du plan qui au point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $z' = -3i\overline{z} + 2 + 6i$

1. Écrire les coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.
2. Démontrer qu'il existe un point unique A invariant par T.
3. Démontrer que T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe (xx') suivie d'une similitude directe à préciser.
4. Démontrer que T est aussi la composée de l'homothétie de centre A et de rapport -3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur 1.
5. Quelles sont les droites du plan qui se transforment par T en une droite parallèle.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

1- **a.** Déterminer l'écriture complexe de f.

b. f est -il un déplacement ou un antidéplacement ?

c. Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

d. En déduire la nature exacte de f.

2. Déterminer l'expression analytique de $f \circ f$ .Quelle est alors la nature exacte de $f \circ f$?
3. On admet que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{w}$ et t la translation de vecteur $\vec{w}$.

a. Démontrer que $f \circ f = t \circ t$.

b. Déterminer les coordonnés de K le milieu de $[OO']$ où O' est l'image de O par f.

c. En déduire les éléments caractéristiques de f (On donnera les coordonnées de $\vec{w}$ et l'équation de (Δ))

4. On considère maintenant l'ensemble (E) défini par son équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 2 \\ y(\theta) = 3\sin(2\theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

a. Déterminer une équation cartésienne de (E), puis préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

b. Écrire une équation cartésienne de l'image de (E) par f .

c. Reconnaître l'ensemble obtenu et le construire dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Soit g_α une application du plan dans lui-même qui transforme $O(0,0)$ en $O'\left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $A(0,-2)$ en $A'(1+\alpha, \alpha)$ et $B(-2,1)$ en $B'\left(\frac{23}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

1- **a.** Montrer g_α est une application affine du plan.

b. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles g_α est bijective.

On note par φ l'application linéaire associée à g_α.

2- **a.** Exprimer $\varphi(\overrightarrow{OI})$ et $\varphi(\overrightarrow{OJ})$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

b. On considère $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ image de M par g_α. En déduire alors une expression de x' et y' en fonction de x et y.

Retrouver les valeurs de α pour lesquelles g_α est une transformation du plan.

3. On suppose $\alpha = \dfrac{4}{3}$. Déterminer l'expression analytique de $g_{\frac{4}{3}}$. Prouver que cette application n'est pas bijective.
Dans la suite, on considère l'application f qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :
$\begin{cases} x' = (-3x + 4y + 13)/5 \\ y' = (4x + 3y + 6)/5 \end{cases}$

4. Montrer que $f = g_0$.

5- **a.** Donner l'écriture complexe de f. Montrer que f est bijective et que f est une isométrie .

b. f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Justifier votre réponse.

c. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. Que peut-on dire de f ?

6- **a.** Donner l'expression analytique et l'écriture complexe de $f \circ f$.

b. Montrer que $f \circ f$ est une translation de vecteur $2\vec{u}$ dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.

7. Montrer que f peut s'écrire sous la forme de $f = S \circ t_{\vec{u}}$ où S est une réflexion dont on donnera l'écriture complexe et analytique.

9. En déduire alors les éléments caractéristiques de f.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

On considère les points A_0 et A_1 d'affixes respectives 4 et $2 + 2i$.

1. Montrer que A_1 est l'image de A_0 dans une similitude directe s de centre O dont on précisera les éléments caractéristiques. Donner l'écriture complexe de s.

2. Soit $A_2 = s(A_1)$. Déterminer l'affixe de A_2.

3. Pour tout entier naturel n, on note $A_{n+1} = s(A_n)$

a. Pour tout n, déterminer z_n en fonction de n. Montrer que si $n \equiv 2[4]$, alors A_n est sur l'axe des ordonnées.

b. Calculer la longueur l_n de la ligne polygonale $A_0A_1 \dots A_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$

Partie B

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[JC]$.

1. Faire une figure.

2. Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K.

a. Déterminer l'angle et le rapport de f.

b. Soit H le milieu du segment $[AJ]$. Justifier que $f(I) = H$.

3. On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \dfrac{1+i}{2}$

a. Montrer que φ est similitude indirecte de centre C.

b. Donner les affixes des points I, K, J et H.

c. Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$

d. Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans **2.** et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4. Soit Δ l'axe de la similitude φ

a. Tracer Δ.

b. La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.
On admet que $f(K) = L$

Deuxième partie

Épreuves proposées
&
Épreuves du BAC

Proposition 1 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Une urne contient 9 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. Il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leurs couleurs. Soit G l'événement : « Obtenir deux boules de même couleur. »
On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note g (n,b, r) la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.
Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$.

2. Le but de cette question est de trouver les valeurs de n,b et r pour lesquelles la probabilité g(n,b,r) est minimale.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (9,0,0), (0,9,0) et (0,0,9). Soit M le point de coordonnées (n,b,r).

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est : $x+y+z-9=0$.

b. En déduire que M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}(OM^2-9)$.

d. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).

e. En déduire les valeurs de n,b et r pour lesquelles la probabilité g(n,b,r) est minimale.
Justifier alors que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{1}{4}$.

3. On suppose que le nombre de boules de chaque couleur a été choisi par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\dfrac{1}{4}$.
Un joueur mise 1000 francs puis tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k francs. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de k.

b. Déterminer la valeur de k pour que le jeu soit équitable c'est à dire pour que $E(X)=0$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

1. On note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) tels que :
$14z\overline{z}+16i(z-\overline{z}) = z^2+\overline{z}^2$.
Démontrer que M appartient a $(\mathcal{C})$ si et seulement si : $3x^2+4y^2-8y=0$.

2. Justifier que $(\mathcal{C})$ est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques. On notera Ω le centre de $(\mathcal{C})$, A, A', A_1 et A_2 ses sommets tels que l'abscisse de A' soit strictement positive et celle de A strictement négative, F et F' ses foyers tels que l'abscisse de F' est positive.

3. Justifier que A a pour affixe : $z = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2}+i$. Donner la forme algébrique et complexe de F et F'.

4. Construire $(\mathcal{C})$. On fera figurer tous ses éléments caractéristiques.

5. On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

a. Donner une equation cartésienne de (H) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que les droites Δ et Δ' d'équation respective $\Delta : y=\sqrt{3}x+1$ et $\Delta' : y=-\sqrt{3}x+1$ sont les asymptotes de (H). Donner les autres éléments caractéristiques de (H).

c. Construire les droites Δ et Δ' puis construire (H).

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$? Interpréter ces différentes limites.

2. Dresser le tableau des variations de f.

3. Monter que (C_f) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

4. Tracer la courbe (C_f).

Partie B

On considère T_α l'application affine du plan dans lui-même de forme analytique :

$$\begin{cases} x' = 4\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\alpha\right)x - \left(\dfrac{2}{5} + \alpha\right)y + 1 + \dfrac{5}{7}\alpha \\ y' = -\left(\dfrac{2}{5} + \alpha\right)x + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\alpha\right)y + 2 + \dfrac{10}{7}\alpha \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α est une transformation du plan.

2. On suppose $\alpha = 0$

- **a.** T_0 est-elle bijective ? Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par T_0.
- **b.** Montrer que $T_0 \circ T_0 = T_0$.
- **c.** Montrer que pour tout point M du plan n'appartenant pas à (D), d'image M' par T_0, $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe dont on précisera. Montrer que (MM') est perpendiculaire à (D).
- **d.** En déduire la nature de T_0.

3. On suppose $\alpha = -7/5$.

- **a.** Donner l'ensemble (D_0) des points invariants par $T_{-7/5}$. Montrer que $T_{-7/5}$ est une involution.
- **b.** Montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (D_0) d'image M' par $T_{-7/5}$; (MM') est perpendiculaire à (D_0). En déduire la nature de $T_{-7/5}$.
- **c.** En déduire que la fonction réciproque de f est l'image de la fonction f par $T_{-7/5}$.
- **d.** Construire la courbe réciproque de f dans le même repère que (C_f).

Partie C

1. Calculer $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ et déterminer la primitive F de f sur $]-1, +\infty[$ qui s'annule en 0.

2. En déduire, en fonction de n, l'aire $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$ du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{n}$.

3. Dans la suite on prendra $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- **a.** Montrer que pour tout n : $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$.
- **b.** En déduire que : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$
- **c.** Montrer alors que : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(1)^{n+2} x^{n+2}}{x+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$
- **d.** Montrer que : $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$.
- **e.** En déduire que : $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k$.

Proposition 2 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par : $F(0)=1$ et $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ pour $x\in\,]0,1]$.

1. Soit x un élément de l'intervalle $[0,1]$, montrer que : $\forall t\in[0,x]$, $\dfrac{1}{1+2x}\leq\dfrac{1}{1+2t}\leq 1$.

2. Soit x un élément de l'intervalle $]0,1]$.

a. Montrer que : $F(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que : $\dfrac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$. En déduire que F est continue à droite au point 0.

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

4. Soit x un élément de l'intervalle $]0,1]$.

a. Montrer que : $F'(x)=-\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

b. Montrer que : $-\dfrac{4}{3}\leq F'(x)\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$.

c. Montrer que : $-\dfrac{4}{3}\leq\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$.

d. En déduire que F est dérivable à droite au point 0 et déterminer le nombre dérivé à droite de 0

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1. Construire le cube ABCDEFGH
Vérifier que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$.

2. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BG}$.

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGD).

c. Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD).

3. A tout α appartenant à l'intervalle $[0,1]$ on associe le point M de coordonnées $(\alpha,\alpha,1-\alpha)$.

a. Montrer que M est un point du segment $[EC]$.

b. Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+\dfrac{3}{2}}$

c. Déterminer la valeur de α pour que la distance de M à (BD) soit minimale.
Soit L le point associé à cette valeur de α.

d. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD.

4. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $k\in[0,1]$.

a. Donner une expression analytique de h.

b. Vérifier que $h(C)=M$.

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ de ABCDEFGH est donné par l'expression : $\mathcal{V}=\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right|$. Déterminer $\mathcal{V}$. On vérifiera que cette valeur est égale 1.

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :
$P(z) = z^3 - \left[2 + (3+\sqrt{2})i\right] z^2 + \left[-5 - 3\sqrt{2} + (2\sqrt{2}+1)i\right] z + \sqrt{2} + 5i\sqrt{2}$.

1- **a.** Démontrer que $P(z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(z) = (z+1-i)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme de degré deux (2) que l'on précisera.

b. Écrire, sous forme algébrique, le nombre complexe : $d = \left[3 + (2-\sqrt{2})i\right]^2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = O$.

2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

a. f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

b. Calculer les affixes respectives des points A' et C', images respectives de A et C par f .

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Partie B

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$; on pose $g = f \circ h$.

3- **a**. Déterminer l'écriture complexe de h.

b. Démontrer que g a pour écriture complexe : $z' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

4- **a**. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$, avec x et y entiers. On note $N = g(M)$.
Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $5x + 3y = 15$.

b. Montrer que l'équation $5x + 3y = 15$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$ puis la résoudre.

c. En déduire les points M du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5, 5]$ et tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux.

5. Soit φ la transformation plane d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

a. Démontrer que φ est une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques.

b. Démontrer que $r = g \circ \varphi$ a pour écriture complexe : $z' = (1-i)z$.

c. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$. On note $(\Gamma') = r(\Gamma)$. Démontrer que (Γ') est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques.

d. En déduire les éléments caractéristiques de (Γ)

Partie C

6. **a.** On considère la fonction $\gamma(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$. Étudier γ puis construire (C_γ).

b. Soit $C_{\gamma'} = r(C_\gamma)$. Sans faire aucun calcul, construire $(C_{\gamma'}$ dans le même repère que (C_γ).

7. On considère la fonction G définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $G(0) = \ln(2)$.

a. Montrer que : $\forall x > 0$ et $\forall t \in [x, 2x]$, $\mathrm{e}^{-2x} \leq \mathrm{e}^{-t} < \mathrm{e}^{-x}$ et déduire que $\mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leq G(x) < \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$.
En déduire que G est continue à droite au point 0.

b. Montrer que la fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.

c. Démontrer que : $\forall t > 0\,;\ -1 \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} \leq -\mathrm{e}^{-t}$ puis que $\forall x > 0\,;\ -1 \leq \dfrac{G(x) - \ln(2)}{x} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}$.

d. En déduire que G est dérivable à droite au point 0.

Proposition 3 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

1. On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x)}{2+\sin(x)}$.

a. Donner l'ensemble solution de l'équation différentielle (E_h) : $y' + y = 0$.

b. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ on pose : $g(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}$.

c. Déterminer la solution générale de (E).

En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \ln(2+\sin(t)) \\ y(t) = \ln(2+\cos(t)) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

a. Comparer $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M(-t+\pi/2)$.

b. En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}+\pi\right]$.

c. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

d. Tracer la courbe (Γ).

Exercice 2

Le but de l'exercice est de trouver un couple (p, q) d'entiers naturels non nuls où p et q sont des nombres premiers inférieurs 10 et solution de l'équation : (E) : $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$ (a et b sont des entiers strictement positifs).

1- a. Démontre que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. Déduis-en que si $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2- a. Vérifie que les couples $(1,1)$, $(2,3)$, $(5,8)$ sont trois solutions particulières de (E).

b. Démontre que si (a,b) est solution de (E) et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3- a. Démontre que si (x,y) est une solution différente de $(1,1)$ alors $(y-x,x)$ et $(y,y+x)$ sont aussi solution de (E).

b. Déduis trois nouvelles solutions de (E).

c. En déduire alors le couple (p,q), solution de (E).

4. Résous dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système suivant : $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

5. Pour trouver le couple (p,q) de la question **3.**, on soumet à un candidat un test comportant 10 questions. On attribue pour chaque question : -2 par réponse fausse ou non donnée et par 2 réponse juste.

a. Démontre que si n est le nombre de réponses justes données par le candidat alors sa note globale est $4n - 20$.

b. Le candidat donne une réponse exacte aux cinq premières questions et pour les cinq autres, il répond au hasard. On admet qu'alors sa réponse est juste avec une probabilité de $1/2$. Soit X la note obtenue.

i. Détermine les valeurs prises par X.

ii. Détermine la probabilité de l'événement « $X = 12$»

iii. Détermine la probabilité d'obtenir « $X \geq 12$»

Problème

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n,+\infty[$ par : $\psi = \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$. Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite (t_n) définies par : $t_n = n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + \ln(n!)$.

Partie I : Minoration de la suite t_n

1- a. Justifier que ψ est dérivable sur $]-n,+\infty[$ et déterminer sa dérivée ψ'.

b. Calculer $\psi(0)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction ψ.

c. Déduire de ce qui précède que : $\forall t \in]-n,+\infty[$, $\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$.

2- a. Déduire de la question **1-d.** que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$.

b. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right)\,\mathrm{d}x = 0$. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right)\,\mathrm{d}x \leq 0$.

c. Justifier alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln(k)$.

d. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln(n!)$

3- a. Par une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2})$.

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

Partie II : Étude de la convergence de la suite t_n.

On considère la fonction f définies par : $f(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

4- a. Donner le domaine de définition de f puis montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Donner $f(0)$.

b. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ puis donner sa dérivée. Dresser le tableau des variations de f.

c. Vérifier que $f(x) \geq 1$ sur $]0,1[$. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

6- a. Quel est le signe de $1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? En déduire les variations de la suite (t_n).

b. En déduire, en utilisant **3-b.**, que la suite (t_n) est convergente.

Partie III : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par : $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

7- a. Démontrer que (w_n) est décroissante et positive. (On admettra que la suite (w_n) est à termes non nuls)

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$. Justifier alors que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{x_{n+1}}{w_n} \leq 1$.

c. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)w_{n+1} \times w_n$ est constant et vaut $\frac{\pi}{2}$.

9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n^2$ puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

10. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{t_n} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis que $\mathrm{e}^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{nw_{2n}^2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Proposition 4 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit la similitude g plane directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui transforme le point $O(0)$ en $O'(2i\sqrt{2} - 2)$, $A(2i)$ en $A'(2\sqrt{2} - 2 + 2i\sqrt{2})$ et $B(2)$ en $B'(4i\sqrt{2} - 2)$. Soit φ l'application linéaire associé à f.

1. Justifier que f est une application affine et bijective du plan dans lui-même.
2. **a.** Exprimer $\varphi(\vec{u})$ et $\varphi(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. En déduire l'expression analytique de f puis son écriture complexe.

c. f est-elle une similitude directe ou indirecte ? Peut-on dire que f est une isométrie ?

d. Démontrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Détermine l'affixe ω de Ω.

3. Précise les éléments caractéristiques de g. (Centre, rapport, angle)
4. Déterminer une réflexion S telle que $f = g \circ S$.
5. Soit (D) la droite d'équation : $y = x + 2$. Démontre que pour tout point N appartenant à (D) , le point $f(N)$ appartient aussi à (D).
6. Soit σ la réflexion d'axe (D) et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ.

b. Déduis-en que l'écriture complexe de k est :$z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. Donner la nature de la transformation k et précise ses éléments caractéristiques.

7. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.
8. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les affixes satisfont à : $|z + 2\overline{z} + 1| = \sqrt{3}|z + \overline{z}|$.

a. Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

b. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). Construire (Γ).

Exercice 2

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers relatifs impairs.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{4n + 1, 4n + 3 \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$
2. Soit N un entier relatif impair. Montrer que $N^2 \equiv 1[8]$.
3. Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1[8]$, alors M est impair.
4. Soit k un entier relatif fixé. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8k + 1$.
5. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{8}(x^2 - 1)$.
Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ à coordonnées entières se trouvant à l'intérieur du quadrilatère OABC avec $A(5, 0)$, $B(5, 5)$ et $C(0, 5)$
6. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) : $195x - 232y = 1$

a. Justifier que (E) admet au moins une solution puis résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

b. Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant les relations : $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1[232]$.

c. Montrer que le nombre 233 est premier .

d. Soit A l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 233 . On considère l'application f de A vers A définit par : quel que soit a de A , $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233 .
On admet que $\forall a \in A \setminus \{0\}$; $a^{232} \equiv 1[232]$.

i. Montrer que quels que soient a et b de A , si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.

ii. En déduire que l'application f est une bijection, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter.

2. Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation.

3. Donner l'équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point O puis étudier la position relative de de (T_0) par rapport à (C_f).

4. Démontrer que l'origine de repère O est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

5. Tracer la courbe représentative (C_f).

6. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln(3)$.

7- a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on précisera.

b. Soit g la bijection réciproque de f. Déterminer g.

8. On considère la fonction $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

a. Sans étudier la fonction h, dire comment on peut obtenir la courbe (C_h) à partir de (C_f).

b. Construire (C_h) dans le même repère que (C_f).

9. On Considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x))\ \mathrm{d}x$.

a. En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\dfrac{2n-1}{n}\right) - \dfrac{\ln(n)}{n}\right]$.

b. Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B

Soit $a > 1$ On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^{\ln(a)} (f(t/2))^n\ \mathrm{d}t$ pour tout n.

10. Vérifier que $U_1 = 2\ln\left(\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$.

11- a. Vérifier que pour tout réel x : $1 - f'(x/2) = (f(x/2))^2$. En déduire la valeur de U_2.

b. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq \left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^n \ln(a)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_n - U_{n+2} = \dfrac{2}{n+1}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$.

12. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$.

a. Écrire $S_n(a)$ en fonction de certains des termes de la suite (U_n).

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a)$.

13. Applications : Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$T_n = \dfrac{9}{11} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{11}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{9}{11}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k$ et $W_n = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Proposition 5 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$)d'unité graphique 1 cm.

Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

Pour tout nombre entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

1- a. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.

b. Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\exp(i\pi/6)$.

c. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 . En déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

d. Placer les points A_0 ,A_1 , A_3 et A_7 images respectives des nombres complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

2- Pour tout entier naturel n, on pose $|z_n| = r_n$.

a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$ et en déduire la nature de la suite (r_n).

b. Déterminer la limite de la suite (r_n) en $+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donner une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$.

Exercice 2

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8+n$ boules noires et 20 boules blanches.

Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.

S'il tire une boule rouge, il perd.

S'il tire une boule noire, il gagne.

S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

1- a. Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est $f(n)$ où f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.

b. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité.

c. Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 16$.

Pour jouer, le joueur a mise 8 unités monétaires.

p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique.

b. On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est à dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle

i. Montrer alors que $3p + q = 60$.

ii. Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.

c. Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart type X.

Problème

On considère la fonction g définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+\ln(x)$.

Partie A

Soient (E_0) et (E) deux équations différentielle définies par : (E_0) : $v(x)+xv'(x)=0$;
(E) : $v(x)+xv'(x)=3x^2+\ln(x)+1$ où v est une fonction définie et dérivable dans $]0,+\infty[$ et v' sa dérivée.

1. Vérifier que g est solution de (E) et justifier que la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{1}{x}$ est une solution de (E_0).

2. Soit w une autre solution de (E_0) et k la fonction définie dans $]0,+\infty[$ par : $k(x)=\dfrac{w(x)}{u(x)}$.
Montrer que k est une fonction constante et en déduire toutes les solutions de (E_0).

3. Soit h une fonction définie et dérivable dans $]0,+\infty[$.

a. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h-g$ est solution de (E_0).

b. Déduire la forme générale des solutions de (E).

Partie B

4. Étudier les variations de la fonction g.

5- **a.** En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution α. Donner une valeur de α à 10^{-2} près par défaut.

b. Étudier le signe de g sur $]0,+\infty[$.

c. Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J dont on précisera.

6. Sans faire aucun calcul supplémentaire, dire comment on peut construire de la fonction réciproque g^{-1} de g $(C_{g^{-1}})$ à partir de la courbe représentative de g (C_g) dans un repère orthonormé.

7. Construire (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

8. Pour tout entier naturel n non nul tel que $\dfrac{1}{n}<\alpha$, on pose $u_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Exprimer u_n en fonction de n et α.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie C

Pour toute la suite, f désigne la fonction définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+\ln^2(x)}$ et on désigne par (C_f), sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

9- **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis exprimer sa dérivé f' en fonction des fonctions f et g.

c. Dresser le tableau des variations de f.

10- **a.** Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

b. Tracer avec soin (C_f) dans un autre repère orthonormé. (On prendra $\alpha=0.6$).

11. Soit M un point de la courbe représentative de la fonction : $x\longmapsto\ln(x)$.
Justifier que $OM=f(x)$. Justifier que $OM=f(x)$. En déduire l'abscisse du point M pour lequel la distance OM est minimale.

12. Soit x un réel strictement positif.
Justifier que $x\leq f(x)$ puis montrer que $\sqrt{x^2+\ln^2(x)}-x\leq\dfrac{\ln^2(x)}{2x}$.

13- **a.** En déduire que : $\dfrac{3}{2}\leq\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{6}(\ln 2)^3+\frac{3}{2}$.

b. En déduire en unité d'aire, une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de l'aire de la portion du plan constitué des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$

Proposition 6 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère la suite de fonction f_n définie pour tout entier naturel n sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n\ln(x)$.

On considère le domaine (D) définie par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3/2 \\ f_n(x) \leq y \leq f_{n+1}(x) \end{cases}$

1. Exprimer l'aire du domaine (D) à l'aide d'intégrales.

2. Justifier que pour tout réel u, $\mathrm{e}^u \geq u + 1$. Déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + (x-1)\,\mathrm{e}^x \geq 0$.

3- a. Montrer que f_0 est prolongeable par continuité en 0 puis étudier ses variations.

b. Démontre que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0, 1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leq \mathrm{e} - 1$.

c. Tracer la courbe représentative de f_0, (C_0) dans le repère (O, I, J).

On suppose que $n \geq 1$ et on appelle (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère précédent.

4- a. Étudier les banches infinies de (C_n).

b. Étudier le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe (C_n) par rapport à (C_{n+1}).

5. Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

6- a. Pour tout entier naturel non nul n , démontrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$. La suite (α_n) converge t-elle ?

c. Déduis-en que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1 - \mathrm{e}}{n}$. Détermine la limite de la suite (α_n).

7. Construire sur le graphique précèdent, les courbes (C_1) et (C_2).

8. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$

a. Donne une interprétation graphique de cette intégrale.

b. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).

c. Déduire que l'aire du domaine (D) est constante puis déterminer sa valeur.

Exercice 2

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$, puis à tout réel $t \in [0, 1]$, on associe le point $M(t)$ barycentre du système $\left\{\left(B, (1-t)^2\right), \left(A, 2t(1-t)\right), \left(C, t^2\right)\right\}$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ et (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0, 1]$.

1- a. Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.

b. Dresser le tableau de variations conjointes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

c. Tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M(1/2)$.

2. Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3. Trouver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t.

4. Exprimer y en fonction de x. On pose $y = f(x)$. La fonction f est-elle dérivable à gauche au point 1 ?

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'ensemble (E) des points $M(x,y)$ tels que $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$.

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x)=\left(1-\sqrt{|x|}\right)^2$ pour tout x appartenant à $[-1,1]$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On prendra $3cm$ comme unité sur les axes.

1- Déterminer la parité de f. Quelle conséquence géométrique peut-on déduire ?

2. Soit g la restriction de f à $[0,1]$ et t la fonction définie sur $[0,1]$ par $t(x)=g(x^2)$.

- **a.** Vérifier que $g(x)=(1-\sqrt{x})^2$ pour tout $x\in[0,1]$.
- **b.** Étudier la dérivabilité de g à droite en 0. Que peut-on conclure pour la courbe (C) de f.
- **c.** Pour tout $x\in\,]0,1]$, déterminer la dérivé $g'(x)$ de g puis dresser le tableau de variation de g.
- **d.** Montrer que t est solution de l'équation différentielle $y''-2=0$ sur $[0,1]$.

3- **a.** Représenter soigneusement la courbe (C) de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- **b.** Déterminer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe (C) de f.

4. Soit h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=-h(x)$. Déduire de (C) la courbe (C') de h. Construire (C') dans le même repère que (C).

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1/2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

- **a.** Vérifier que u_n est bien définie.
- **b.** Montrer que u_n n'est ni croissante ni décroissante.

Partie B

On note (Γ) l'ensemble des isométries du plan qui laissent invariants (E) globalement.

6. Montrer que pour tout point $M(x,y)$ appartenant à (E), on a : $-1\leq x\leq 1$.

7. Montrer que (E) est la réunion des courbes (C) et (C').

8. On considère dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points $I(1,0)$, $J(0,1)$, $K(-1,0)$ et $L(0,-1)$.

- **a.** Déterminer l'ensemble des couples (A,B) de points de (E) tels que $d(A,B)=2$.
- **b.** Soit S une isométrie du plan laissant invariant (E) globalement.
  - **i.** Montrer l'image du carré $IJKL$ est le carré $IJKL$. (On pourra utiliser le fait que l'aire de l'image de $IJKL$ par S reste égale à celle de $IJKL$).
  - **ii.** Montrer que O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.
  - **iii.** En déduire que $S(O)=O$. (On pourra utiliser la définition d'une application affine)
- **c.** En déduire toutes les natures possibles de l'isométrie S.

9. Soit r un déplacement laissant globalement invariant (E).

- **a.** Vérifier que r est soit une rotation de centre O et d'angle non nul, soit l'application identique du plan.
- **b.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ et on suppose $R_{(O,\lambda)}$ la rotation de centre O et d'angle λ laissant globalement invariant (E).
  - **i.** Donner l'écriture complexe et analytique de $R_{(O,\lambda)}$ et montrer que seul O est invariant par $R_{(O,\lambda)}$.
  - **ii.** En déduire que $R_{(O,\lambda)}$ n'est pas dans (Γ) puis déterminer les valeurs de α pour lesquels $R_{(O,\alpha)}$ est dans (Γ). (On pourra montrer par absurde que $I'=R_{(O,\lambda)}(I)$ n'est pas dans (E))
- **b.** En déduire par leurs éléments caractéristiques, tous les déplacements laissant (E) globalement invariant.

10. Soit S_Δ la réflexion du plan d'axe Δ qui laissent (E) globalement invariant. Montrer que $O\in\Delta$. En déduire par leurs éléments caractéristiques, toutes les réflexions laissant (E) globalement invariant.

11. Donner alors l'ensemble (Γ).

Proposition 7 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

On considère l'espace (E) rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient les points $A(3,-2,2)$; $B(6,1,5)$; $C(6,-2,-1)$; $D(0,4,-1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont trois points non alignés.

2- a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC), passant par A.

c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x+y+z-3=0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

3. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace (E) et on note par $M'(x',y',z')$ le projeté orthogonal de M sur (P_2).
Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celle de M.

4- a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$.
En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).

b. On rappelle que le volume du tétraèdre ABCD est $V=\dfrac{1}{3}aire(ABC)\times AD$.
Déterminer alors la valeur de V .

Exercice 2

O et A sont deux points distincts du plan euclidien orienté. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon OA. M est un point de $(\mathcal{C})$. On pose $\theta=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.

On note B et C les points de $(\mathcal{C})$ tels que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\theta+\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=2\theta+\pi[2\pi]$.

1. On note A' le symétrique de A par rapport à la droite (OM). Montrer que A' et C sont symétriques par rapport à O. En déduire une construction de C.
Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

On prend OA comme unité et on pose $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$. Soit $\vec{v}$ le vecteur tel que $(O,\vec{u},\vec{v})$ soit un repère orthonormé direct. Dans la suite le plan est supposé rapporté à ce repère.
On note z, b et c les affixes respectives des points M, B et C.

2- a. Écrire z, b et c sous forme exponentielle puis vérifier que $b=iz$ et $c=-z^2$.
Soit H le point d'affixe $h=1+b+c$.

b. Soit N le point d'affixe 1 + b. Construire N puis déduire une construction de H.

3. Désormais on suppose que $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

a. Justifier que les points A, B et C sont distincts deux à deux.

b. Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\dfrac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}=\dfrac{1+iz}{1-iz}$. Vérifier $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est un imaginaire pur.

c. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-iz-1=0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

e. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC en fonction de b et c.
En déduire les valeurs de θ pour que H soit le centre de gravité du triangle ABC. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

4. Vérifier que lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points d'affixes i et $-i$, le point H appartient à la courbe (H) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t)=1-\sin(t)-\cos(2t)\\ y(t)=\cos(t)-\sin(2t)\end{cases}$

Problème

Partie A

On considère pour tout entier strictement positif n la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ln|x-1|$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (C_n) est la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1- a. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition. (on pourra discuter les cas où n est pair et les cas où n est impair)

b. Étudier les branches infinies de (C_n). (On distinguera les cas où n est pair et les cas où n est impair)

2- a. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \neq 1$, $f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}$.

b. Étudier le sens de variation de f_n et dresser le tableau de variation de f_n.

3- a. Calculer la dérivée seconde de f_n.

b. Étudier l'ensemble des points d'inflexion de (C_n). (On distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$).

c. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note T_n la tangente à (C_n) au point d'abscisse $\frac{n}{n-1}$.

Déterminer les équations cartésiennes de T_2 et T_3.

d. Tracer (C_2) et (C_3) ainsi que T_2 et T_3

4- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un réel unique $\alpha_n > 1$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

b. Vérifier que pour tout entier $n > 1$ on a : $f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n^n$ et $-\frac{1}{n}\alpha_n^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$.

En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone et convergente.

c. Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

Vérifier alors que pour $n > 0$, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) > 0$.

d. En déduire que : $\alpha_n < 1 + \frac{1}{n}$. Calculer alors la limite de la suite (α_n).

Partie B

5. En utilisant une récurrence sur n, prouver que : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$.

6. Déduire que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$.

7. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$. En déduire que $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Partie C

n est un entier naturel non nul puis on considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$.

8. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un réel unique β_n de $]0,1[$ tel que : $g_n(\beta_n) = 0$.

9. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
(On pose : $L = \lim_{n\to+\infty} \beta_n$)

10- a. Vérifier que pour tout réel $t \neq 1$: $1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.

b. En déduire que : $\beta_n + \frac{\beta_n^2}{2} + \ldots. + \frac{\beta_n^n}{n} = -\ln(1-\beta_n) - \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} \, dt$

11- a. Montrer que $1 + \ln(1-\beta_n) = -\int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} \, dt$ puis montrer que : $0 \leq \int_0^{\beta_n} \frac{t^n}{1-t} \, dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\beta_n)}$.

b. En déduire que : $L = 1 - e^{-1}$.

12. En utilisant la **Partie B**, construire une suite (U_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} U_n = L$.

Proposition 8 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

On désigne par Y une variable vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilité e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.

1- a. Justifier que le couple (b, r) est solution du système (S) : $\begin{cases} \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \\ \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \end{cases}$

b. Résoudre le système (S).

c. Déduire de ce qui précède que : $a = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ et $c = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2. Justifier que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1, -1 et 2.
On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 4)$.
On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose $h(M) = \frac{1}{7}\left(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2\right)$.

a. Calculer l'abscisse du point G.

b. Démontrer que : $h(G) = V(Y)$.

c. Déterminer l'ensemble (Γ).

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. On considère l'application R définie par son expression analytique : $\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$

1- a. Montrer que R est une transformation affine du plan.

b. Donner l'écriture complexe de R. Montrer alors que R est un déplacement dont on déterminera les éléments caractéristiques.

c. En déduire la nature exacte et les éléments géométriques de R.

2. On note par $R^n = R \circ R^{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'écriture complexe de R^n. En déduire la forme analytique de R^n.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles R^n est l'identité du plan.

3. Soit h l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -2z + 3i$.

a. Montrer que h est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques.

b. Pour tout entier naturel n, donner l'écriture complexe de h^n.

4. On considère $s = h \circ R$.

a. Déterminer la nature et les éléments géométriques de s.

b. Donner l'expression exponentielle de s.

Problème

Le problème se comporte en trois parties **A**, **B** et **C**.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer la limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire que $\forall n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

3. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est paire. Donner un domaine d'étude réduit de f.

2- a. Étudier et dresser sur $\mathbb{R}$ le tableau de variation de la fonction $g : x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$.

b. Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$.

c. En déduire que si x est un réel non nul de $\mathbb{R}$, alors $\ln 3 - 2x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$.
(On distinguera les cas $x < 0$ et $x > 0$)

3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Peut-on prolonger par continuité f en 0 ? justifier la réponse.

4. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.

5- a. Montrer que $\forall x > 0$: $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $\varphi(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

b. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a : $|\varphi(x)| \leq \frac{2}{x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Partie C

Étude de la convergence de deux suites définies pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = \int_0^n \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^n \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$.

1- a. Justifier pourquoi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

b. Pour $n > 4$ monter que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\cos n}{n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c. Montrer que la suite $\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 1}$ est convergente. (On ne demande pas de calculer sa limite).

d. Sans chercher la limite, déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2- a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x$ puis que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$.

En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\,\mathrm{d}x$.

c. Vérifier que $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ fixé , $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$

4. En utilisant la **Partie A** et les résultats de la **Partie C question 2-c.**, déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Proposition 9 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Dans l'espèce muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A(0,0,3\sqrt{2})$, $B(4,0,-\sqrt{2})$, $C(-2,-2\sqrt{3},-\sqrt{2})$ et $D(-2,2\sqrt{3},-\sqrt{2})$

1- **a.** Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires puis démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier.

c. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2. Soient P, Q, R et S les milieux respectifs des arrêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$.

a. Déterminer la nature exacte du quadrilatère PQRS.

b. Calculer l'aire du quadrilatère PQRS.

3. Le tétraèdre qui est équilibré, a une face numéroté 0, une face numérotée 1 et deux faces numérotées 2. On lance deux fois de suites et on lit à chaque fois les chiffres apparus sur les trois faces visibles.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
E : « Le produit des six chiffres apparus est non nul»
F : « la somme des chiffres apparus est supérieure ou égale à 8»

4. On note X la variable aléatoire qui à chaque série de deux lancers associe la somme des chiffres apparus sur les faces visibles.

a. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

b. On effectue n fois de suite de manière indépendante l'expérience qui consiste à lancer deux fois de suite le tétraèdre.
Calculer la probabilité p_n que l'évènement F soit réalisé au moins une fois.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $z^2-(1-2i)z+1+5i=0$

2. On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A=2-3i$ et $Z_B=-1+i$.

a. Soient $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 7 et $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre B et de rayon 1.

i. Montrer que tout point de $(\mathcal{C}')$ est intérieur au cercle $(\mathcal{C})$.

ii. Soit $(\mathcal{C}'')$ un cercle de centre Ω, extérieurement tangent à $(\mathcal{C}')$ et intérieurement tangent à $(\mathcal{C})$. Justifier que $\Omega A+\Omega B=8$

b. Soit O' le milieu de $[AB]$; on pose $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{BA}}{BA}$ et on désigne par $\vec{j}$ le vecteur unitaire tel que $(O',\vec{i},\vec{j})$ soit un repère orthonormé direct auquel le plan est maintenant rapporté. On pose $\overrightarrow{O'\Omega}=x\vec{i}+y\vec{j}$ où $x\in[-4,4]$ et on désigne par (D), la droite d'équation : $x=\dfrac{32}{5}$.

i. Justifier que $\Omega A=\sqrt{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2}$. Calculer ΩB.

ii. Montrer que : $\Omega A+\Omega B=8\Longrightarrow \Omega A=-\dfrac{5}{8}x+4$.

iii. En déduire que si $\Omega A+\Omega B=8$ alors $\dfrac{\Omega A}{d(\Omega,(D))}=\dfrac{5}{8}$ et donner la nature et les éléments caractéristiques de la conique à laquelle Ω appartient.

Problème

Partie A : Étude d'une équation différentielle

Soient les équations différentielles suivantes : (E_0) : $y' + y = 0$ et (E) : $y' + y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$.

1. Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

2. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln(x)$ est une solution de (E).

3. Soit g une solution de quelconque de (E).

a. Montrer que $g - f$ est solution de (E_0).

b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie B : Etude de la fonction f.

4. Donner le domaine de définition de f. Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ces résultats.

6- **a.** Déterminer en justifiant, le domaine de dérivabilité de f puis déterminer $f'(x)$.

b. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c. Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

7. Donner l'ensemble des primitives de la fonction f.

Partie C : Limite d'une suite T_n.

On considère la suite $T_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ pour tout n non nul.

8. Soit $A_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$ (On pourra utiliser la question **7.**)

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

9- **a.** Soit $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n-1$. Démontrer que $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b. En déduire que $\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

10. On pose $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

a. Démontrer que : $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

11. Démontrer par récurrence que : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

12- **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $S_n = \frac{1}{12n^4}(n(n+1))^2 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}$.

c. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$.

13. Justifier que $\ln(T_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. En déduire la limite de la suite (T_n)

Proposition 10 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : " Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$."

1- **a.** Démontrer que 193 est un nombre premier.

b. Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$.

2. On considère l'équation (E) : $83x - 192y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(155, 67)$ est solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :

- à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193 ;
- à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a. Démontrer que $g(f(a)) \equiv a^{83\times 155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g(f(a)) = a$.

b. Déterminer $f \circ g$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. On désigne par K le point d'affixe $f\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer les coordonnées de K.

2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \dfrac{2}{3}\cos(\alpha)$.

3- **a.** En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') : $z^4 - 2\cos(\alpha)z^2 + 1 = 0$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)

b. Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées.

c. Décomposer le polynôme à variable réelle x défini par : $P(x) = x^4 - 2\cos(\alpha)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $2\left(z - \dfrac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \dfrac{1}{3}\right)$.

a. Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b. Démontrer que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Problème

Partie I

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On note u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$

a. Etudier les variations de u sur $]0, +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

b. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$. Justifier que $1.89 \leq \alpha \leq 1.9$

c. Etudier le signe de u sur $]0,+\infty[$

2. **a.** Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$

b. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

c. Etudier les variations de f puis tracer son tableau de variations.

d. Etudier le signe de f suivant les valeurs de $x\in]0,+\infty[$. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ (On précisera les coordonnées de l'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe (OI) par calcul).

Partie B : Recherche d'une suite de limite $f(x)$ sur $]1,2[$

3. On pose $U_n=\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k$ et $V_n=\sum_{k=1}^{n+1}-\dfrac{(1-x)^k}{k}$ avec $x\in]1,2[$.

a. Montrer que $U_n=\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{x}$

b. Montrer que $\ln(x)-\displaystyle\int_1^x\frac{(1-t)^{n+1}}{t}\,\mathrm{d}t=V_n$ pour tout $x\in]1,2[$. (On pourra utiliser la question **3-a.**)

c. Montrer que pour tout $x\in]1,2[$ et pour $t\in]1,x[$, $\left|\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\leq|1-t|^{n+1}$

Puis déduire que $\displaystyle\int_1^x\left|\frac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\,\mathrm{d}t\leq\frac{(x-1)^{n+2}}{n+2}$.

d. Montrer alors que $|\ln(x)-V_n|\leq\dfrac{(x-1)^{n+2}}{n+2}$. En déduire que pour tous $x\in]1,2[$, $\ln(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(1-x)^k}{k}$.

4. En déduire alors une suite (W_n) telle que $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}W_n$ pour tout $x\in]1,2[$

Partie C : Etude d'une primitive de f

On note F une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et définie par : $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

5- **a.** Etudier le signe de F sur $]0,+\infty[$.

b. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, déterminer $F'(x)$

6. On considère φ la réciproque de la fonction tangente sur $]0,+\infty[$.

a. Démontrer que φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

b. On définie h par : $\begin{cases}h(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}\forall x\in]0,+\infty[\\ h(0)=1\end{cases}$ Montrer que h est continue en 0.

7- **a.** Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall x\in]0,+\infty[\ F(x)=\varphi(x)\ln(x)-\displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

b. En utilisant la question **6-b.** de la partie C, démontrer que : $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)\ln(x)=0$.

8. Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $G(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

a. Calculer pour tout $x>0$, la dérivée $G'(x)$ de $G(x)$.

b. Déterminer $G(1)$. En déduire que G est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$.

c. Montrer que ; pour tout $x>0$: $F(x)=[\varphi(x)+\varphi(1/x)]\ln(x)-\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

d. Montrer que : $\forall x>0\ Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-Arctan(x)$.

e. Conclure que : $\forall x>0$, $\ln(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Proposition 1 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan est orienté.

Soit PQR un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont des milieux respectifs de $[QR]$ et $[RP]$. Q_1 est la symétrie de Q par rapport à J.

1. Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose $f = t \circ r$.

a. Faire une figure.
Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q.

b. Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R.

c. Donner la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. En déduire la nature du triangle IPP'.

2. Soit s la similitude directe telle $s(J) = P$ et $s(R) = I$

a. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(I) = P'$.

b. Soit Ω le centre de s. Montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et les points Ω, P, J et Q_1 d'autre part sont cocycliques.
En déduire la position de Ω puis construire ce point.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x, définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(x \ln\left(\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|\right)\right) \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad ; g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de g.

2- **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3- **a.** Étudier la continuité de f en 1.

b. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$

c. Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis donner une interprétation géométrique de chacun des résultats.

4- **a.** Étudier les variations de f.

b. Prouver que $f(\alpha) = \exp\left(-\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$.

5. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et les demi-tangentes éventuelles à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 1.

On considère la fonction F définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\, dt$.

6- **a.** Étudier le signe de $F(x)$, pour tout x de I.

b. Montrer que F est dérivable sur l'intervalle I et déterminer $F'(x)$ pour tout x de I.

c. Montrer que F est strictement croissante sur l'intervalle I.

7- **a.** En utilisant la nouvelle variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour tout x de I : $F(x) = 2\arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \dfrac{\pi}{2}$

b. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

8. Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle qu'on déterminera. Déterminer la bijection réciproque F^{-1} de la bijection F

Problème

Partie A

Soit (U_n) la suite réelle définie par son premier terme U_0 non nul et différent de $-\frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n^2 + U_n$.

1. Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

2. Montrer que si (U_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

3. Montrer que si $U_0 + 2U_0^2 > 0$ alors :

a. $U_0 > 0$ ou $U_0 < -\frac{1}{2}$.

b. La suite (U_n) diverge.

4- **a.** Montrer que si $U_0 + 2U_0^2 < 0$ alors $-\frac{1}{2} < U_0 < 0$.

b. Montrer par récurrence que si $U_0 + 2U_0^2 < 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-\frac{1}{2} < U_n < 0$.

c. En déduire la convergence de la suite (U_n) si $-\frac{1}{2} < U_n < 0$.

Partie B

Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2z^2 + z$.

1- **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f \circ f$.

2. Soient A, B et I les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{4}$.

a. Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. On donnera leurs coordonnées.

b. Soit M_0 un point du plan.
Montrer que $f(M) = f(M_0)$ si et seulement si $M = M_0$ ou $M = s(M_0)$ où s est une similitude du plan que l'on précisera.

Partie C

1. Soient $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient : $2x^2 - 2y^2 + x + \frac{1}{2} = 0$ et (P) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont x et y vérifient $2y^2 + x = 0$.

a. Donner la nature de (P). Préciser son sommet, son foyer et sa directrice.

b. Donner la nature de $(\mathcal{H})$. Préciser ses sommets et ses asymptotes.

2. Soient $(\mathcal{H}_1)$ et (P_1) les ensembles de points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$(\mathcal{H}_1) = \begin{cases} -1/2 < x < 0 \\ 2x^2 - 2y^2 + x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{et } (P_1) = \begin{cases} -1/2 < x < 0 \\ 2y^2 + x < 0 \end{cases}$$

a. Montrer que (P_1) est inclus dans $(\mathcal{H}_1)$

b. Montrer que (P_1) est inclus dans (E), avec (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\left|\left|\overrightarrow{MK}\right|\right| < \frac{1}{2}$, K étant le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

c. Montrer que si M appartient à $(\mathcal{H}_1)$ alors $f(M)$ est tel que son abscisse appartient à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$.

Nous admettons que si M appartient à $(\mathcal{H}_1)$ alors $f(M)$ appartient à (P_1).

3. Soit M_0 un point de $(\mathcal{H}_1)$. On définit la suite de points (M_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe de M_n et $a_n = |z_n|$.
En utilisant **2.** montrer que la suite (a_n) converge.

Proposition 12 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan oriente $(\mathcal{P})$ est rapporte a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note Σ l'ensemble des points de $(\mathcal{P})$ dont l'affixe z vérifie : $jz^2 + \overline{jz^2} - \frac{10}{3}z\overline{z} + 192 = 0$ et f l'application de $(\mathcal{P})$ dans lui-même associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}j^2 z$ avec $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

On rappelle que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$

1. Déterminer $|j|$ et exprimer j^3 en fonction de $|j|$ puis en fonction de j.

2. Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques.

3- **a.** Vérifier qu'un point M' d'affixe z' appartient à $f(\Sigma)$ si et seulement si : $3z'^2 + 3\overline{z'^2} - 10z' \cdot \overline{z'} + 64 = 0$
Montrer alors que l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est une equation cartésienne de $f(\Sigma)$.

b. Montrer que Σ est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

4. Représenter graphiquement $f(\Sigma)$, Σ, leurs foyers, leurs directrices et leurs axes.

Exercice 2

Partie A

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif. Montrer par récurrence que :
$(1 + nx) \leq (1 + x)^n$

2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boites numérotées de 1 à n, chaque boite pouvant contenir de zéro à n boules.
Calculer la probabilité P_n pour que chaque boite contienne exactement une boule.

3. On pose $P_n = \frac{n!}{n^n}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{P_n}{P_{n-1}} \geq 2$.

b. En déduire l'inégalité : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

c. Calculer la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Une urne contient 7 boules noires et 7 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement avec remise, n boules de cette urne avec $n > 1$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir des boules de même couleur.

2. Justifier que la probabilité p d'obtenir exactement une boule noire est : $\frac{n}{2^n}$.

3. On désigne par (u_n) la suite numérique définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$ avec $n > 1$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

b. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Problème

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par : $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$

On note par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On notera f'_n la dérivée de f_n.

1. Soit g_n la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $g_n(x) = n\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2x-1}{2x+1}$

a. Étudier les variations de la fonction g_n.

b. Calculer $g_n(1/2)$ et déterminer le signe de g_n sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2- **a.** Pour tout $x \in]-1/2,+\infty[$, montrer que : $f_1'(x) = g_1(x)$ et que $f_n'(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1} g_n(x)$

b. Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (On distinguera le cas où n est pair et le cas où n est impair)

3. On note par T la translation du plan de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}$. On note (E_n) l'image de (C_n) par la translation T.

a. Donner l'écriture complexe et analytique de T.

b. Donner une équation cartésienne de (E_n).

4- **a.** Étudier les positions relatives de (C_1) et (C_2).

b. Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sur une même figure.

Partie II : Etude de deux suites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

5. Soit $t \in [0,1[$

a. Justifier que $\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$. En déduire que $u_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

b. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$. Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Montrer que la dérivée de la fonction arctan(x) sur $\mathbb{R}$ est : $\frac{1}{1+x^2}$.

7. Soit $t \in [0,1[$.

a. Justifier que $\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1+(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$. En déduire que $v_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$

Partie III

Soit la suite (w_n) définie par : $w_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$. On rappelle que : $f_n(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$

8. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq w_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

9. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10. On pose pour tout $n \geq 1$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, $s_n(x) = 1 - \left(x-\frac{1}{2}\right) + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (-1)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$.

a. Montrer que : $s_n(x) = \frac{2}{2x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$.

b. Déduire que : $w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]$

Exprimer alors w_n en fonction de u_{n+1} avec (u_n) la suite définie dans la **Partie II**.

c. Calculer alors la limite de w_n.

Proposition 1 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

1. Soit l'équation : $20x - 5y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs. Expliquer pourquoi cette équation n'a pas de solution.

2. On considère l'équation (E) : $20x - 9y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que si (x_0, y_0) est solution de (E), alors y_0 est un multiple de 2.

b. Déterminer une solution particulière de (E) avec l'algorithme d'Euclide.
Résoudre l'équation (E).

3. Déterminer l'ensemble des solutions (x, y) de (E) telles que $pgcd(x, y) = 2$.

4. Soit p un entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^6$ en base 6 et $\overline{bbaa}^4$ en base 4.

a. Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire la valeur de a.

b. Déterminer les valeurs de b et c.

c. Déterminer l'écriture de p en base 10.

Dans un système de numération de base a, on considère les nombres : $A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$

5. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3

6- **a.** Sachant que $C = A \times B$, montrer que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.

b. En déduire que a divise 8.

c. Déterminer alors a

7. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4.

8. Dans cette question on suppose que $a = 4$.

a. Écrire A, B et C dans le système décimal.

b. Montrer alors que $C = A \times B = ppcm(A, B)$.
En déduire que l'équation : $Ax + By = 1$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

9. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $37x + 54y = 1$.

a. Vérifier que $(19, -13)$ est une solution de cette équation.

b. Résoudre cette équation.

Exercice 2

Le plan $(\mathcal{P})$ étant orienté ; on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et de B ; on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = s_2^{-1}(M)$

1- **a.** Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$.

b. On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M.
Montrer que $s \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s'. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.

c. Proposer une construction géométrique de N, lorsque le point M est donné.

2- **a.** Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer $r(P)$ et en déduire une construction géométrique de P à partir de N.

c. Lorsque $M = O$, montrer que le point N appartient 'à la demi-droite $[AC)$ et le point P à la demi-droite $[CA)$.

3. Faire une figure comportant les points A, B, C, O, P et N avec $M = O$.

Problème

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique $2cm$.

Partie A

1- **a.** Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

b. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c. Vérifier que pour tout réel $x>\dfrac{1}{2}$, $f'(x)<1$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]1/2,+\infty[$ une unique solution α et que $0.7<\alpha<0.8$.

d. Tracer (C_f).

2- **a.** Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un ensemble J que l'on précisera.

Expliciter $g(x)$ pour $x\in J$

b. Démontrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans J une solution unique égale à α.

c. Montrer que la courbe (C_g) peut être obtenue à partir de la courbe (C_f) par une similitude s que l'on précisera. On donnera l'écriture complexe et l'expression analytique de s.

Tracer (C_g) dans le même repère que que (C_f).

3. On pose pour tout $x\in[\alpha,1[$, $h(x)=x-\dfrac{\Psi(x)}{\Psi'(x)}$ avec $\Psi(x)=g(x)-x$

a. Étudier les variations de h dans l'intervalle $[\alpha,1[$. Montrer que h réalise une bijection de $[\alpha,17/20[$ sur un intervalle J contenu dans $[\alpha,17/20[$.

En déduire que l'on définit bien une suite (c_n) d'éléments de $[\alpha,17/20[$ en posant $c_0\in[\alpha,17/20[$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1}=h(c_n)$.

b. On admet que $\forall x\in[\alpha,17/20[$, $0\leq h'(x)\leq\dfrac{3}{4}$. Vérifier que pour tout entier n, $|c_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{3}{4}|c_n-\alpha|$.

c. Déduire par récurrence que pour tout entier n, $|c_{n+1}-\alpha|\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}|c_0-\alpha|$

Conclure que la suite (c_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $\forall x\in J$, $F_n(x)=\displaystyle\int_0^{g(x)}[f(t)]^n\ \mathrm{d}t$ et $I_n=F_n(\alpha)$.

4. Montrer que pour tout $x\in J$, $F_2(x)=g(x)-x^2$. Exprimer alors I_2 en fonction de α.

5- **a.** Montrer que F_n est dérivable sur J de dérivée $F_n'(x)=\dfrac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.

b. Déterminer les réels a, b et c tels $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{2x^2}{1-x^2}=a+\dfrac{b}{1-x}+\dfrac{c}{1+x}$

c. Pour tout $x\in J$, expliciter $F_1(x)$. Exprimer alors I_1 en fonction de α

d. Déterminer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

6- **a.** Montrer que $F_{n+2}(x)-F_n(x)=-\dfrac{2}{n+2}x^{n+2}$.

b. En déduire que $I_{n+2}-I_n=-\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$

7. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{2n}=\alpha-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$

3- **a.** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq I_n\leq\alpha^{n+1}$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$

Proposition 14 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

On considère les équations différentielles $(E_h) : y'' + 4y' + 4y = 0$ et $(E) : y'' + 4y' + 4y = 4x - 5\ln 2 + 4$.
Soient les fonctions f et g , de la variable réelle définie respectivement par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x} + x - \frac{5}{4}\ln 2 \text{ et } g(x) = 1 + (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur sur les axes : 2cm).

1- **a.** Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer la dérivée $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3- **a.** Calculer $f(\ln 2)$.

b. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - \frac{5}{4}\ln 2$ est asymptote à (C_f). Étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite $(\mathcal{D})$. Tracer (C_f) et $(\mathcal{D})$.

4- **a.** Déterminer la forme générale des solutions de (E_h).

b. Déterminer la solution de (E_h) dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$.

c. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

d. Donner alors l'ensemble des solutions de (E).

5. Soit λ un réel strictement positif et (D_λ) la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$, $y = x - \frac{5}{4}\ln 2$ et la courbe (C_f).

a. En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2, l'aire de (D_λ) en fonction de λ.

b. Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a. On note I et J les centres de gravités respectifs des triangles CFH et AFH et O le centre de la face EFGH.

1- **a.** Quelle est la nature du triangle CFH ?

b. Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$.

c. En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2. Montrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (AFH) et passe par J

3. Montrer que les points A, J, I et C sont cocycliques et que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{JI}$.
Démontrer que $\widehat{IOJ}$ est indépendant de a. [On pourra calculer $tan(\widehat{AOO'})$ avec O' milieu de [AC]]

4. Soit s_1 la réflexion de plan (CFH) et s_2 la réflexion de plan (AFH). On pose $R = s_2 \circ s_1$. P est le plan (ACG).

a. Montrer que $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à P.

b. On oriente P par $\overrightarrow{OH}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de R.

5. Soit r la restriction de R au plan P et h l'homothétie de P qui transforme I en C et J en A. Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r \circ h$.

Problème

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par : $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{Arctan(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I .

2- **a.** Soit x un élément de l'intervalle I , montrer que : $\forall x \in [0,1]\,;\ \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

b. Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[\,;\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq arctan(x) \leq x.$

c. Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0.

3- **a.** Étudier la parité de f.
Sachant que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis dresser son tableau de variation.

c. Construire (C_f) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Montrer que l'application φ du plan dans lui-même définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -x+1 \end{cases}$

4. Déterminer l'ensemble des points invariants par φ.

5. On considère la fonction $\phi_a = \dfrac{x}{ax-a+1}$ où a est un réel différent de 0 et de 1. On note C_a la courbe représentative de ϕ_a dans le repère orthonormé.
montrer que la courbe C_a est globalement invariante par φ.

6. Déterminer l'écriture complexe de φ. En déduire que φ est un antidéplacement dont on déterminera les éléments caractéristiques.

7. Montrer que l'application φ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera.

8. Construire dans (C_φ), l'image de (C_f) par φ .

Partie C

Soit la fonction g définie sur $I = [0,+\infty[$ par : $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$

9- **a.** Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ f(x) \leq g(x) \leq 1.$

b. En déduire que g est dérivable à droite en 0.

10. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ g'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x)-g(x))$

11. Montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$.

12- **a.** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ (On rappelle que $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ 0 < arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$)

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

13. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0,1[$.

14- **a.** Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ 0 \leq 1-f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x}.$

b. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}.$

15. Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ U_{n+1} = g(U_n)$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ |U_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|.$

b. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Partie D

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $V_n = \left[\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right]^{n^2}$ et $W_n = \ln(V_n)$

16. Vérifier que : $\forall n \geq 1\,;\ W_n = n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right]$

17. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \exists c \in]n, n+1[$ tel que $W_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$

18. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} \leq W_n \leq \dfrac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arcant(n+1)}$

19. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Proposition 15 d'épreuve type BAC	**Coef : 5**
Série : C4	**Durée : 4h**

Exercice 1

Le plan euclidien $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f_a(x) = \dfrac{x}{ax - a + 1}$ où a est un réel différent de 0 et de 1. On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$.

Soit Ω_a le point de coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère les vecteurs :

$\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

1- **a.** Montrer que $\mathcal{R}_a = (\Omega_a, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan.

b. Soit M un point du plan de couple de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. Appelons (X, Y) son couple de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a$. En utilisant la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$, montrer que : $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$

c. Vérifier que la courbe (C_a) a pour équation $Y^2 - X^2 = \dfrac{2(a-1)}{a^2}$ dans $\mathcal{R}_a$

d. Déterminer la nature de C_a ; préciser ses sommets S_a et S'_a suivant les valeurs de a.

e. Construire (C_{-1}) dans $\mathcal{R}_{-1}$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Montrer que (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $a < 1$.

3. On suppose que $a > 1$.

a. Calculer en fonction de a les distances $\Omega_a S_a$ et $\Omega_2\Omega_a$ (**Indication** : Pour calculer $\Omega_a S_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}_a$ et pour calculer $\Omega_2\Omega_a$, on peut se placer dans le repère $\mathcal{R}$)

b. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle $\Omega_2\Omega_a S_a$, calculer $\Omega_2 S_a$

c. En déduire que les sommets de (C_a) sont sur un cercle de centre Ω_2 dont on précisera le rayon.

Exercice 2

1- **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 3z + 4 = 0$.

b. Déterminer le module de chaque racine de cette équation.

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. z désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et z^2 et on note S le système de points pondérés $\{(A, 4), (B, -3), (C, 1)\}$. Ce système est tel que O est son barycentre.

a. Démontrer que z est solution de l'équation (E).

b. En déduire les coordonnées de B et C.

3- **a.** k désignant un nombre réel, on pose : $z = \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}$. Préciser suivant les valeurs de k l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$.

b. On pose $k = 89$. Donner alors une équation cartésienne de (Γ).

Problème

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + (\ln(x))^2)}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = 2cm$

1- **a.** Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, f est dérivable de dérivée : $f'(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{x^2(1+\ln^2(x))^2}$

b. Dresser le tableau de variation de f

c. Calculer la dérivée seconde de f. En déduire que les points $x = \mathrm{e}^{-1}$ et $x = 1$ sont des points d'inflexion.

d. Construire la courbe (C_f)

2. Soit g la fonction définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\tan(x)}$

a. Montrer que g réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $]0,+\infty[$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

b. Calculer $g^{-1}(1)$, $g^{-1}(e)$ et $g^{-1}(\exp(1/\sqrt{3}))$

c. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a : $\left(g^{-1}\right)'(x) = f(x)$.

3. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a : $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

5- **a.** Montrer que pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x} \leq \dfrac{(\ln x)^{2n}}{x(1+\ln^2(x))} \leq \dfrac{(\ln x)^{2n}}{x}$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

6- **a.** Vérifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f(x)(\ln x)^2 + f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n I_n$

a. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $u_{k+1} - u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = u_n - u_0$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$t_n = 1 - \dfrac{1}{3\times 3} + \dfrac{1}{3^2\times 5} - \dfrac{1}{3^2\times 7} \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}\times(2n-1)}$ et $J_n = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 1 - x + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{I_n}{\sqrt{3}} + (-1)^n J_n = \dfrac{\pi}{6}$.

c. Montrer que pour tout $x \in [0; 1/\sqrt{3}]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{3}{4}x^{2n} \leq \dfrac{x^{2n}}{x^2+1} \leq x^{2n}$

d. En déduire que pur tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{3}{4(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}$

e. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2000	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

Soit $\mathcal{P}$ le plan orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit f l'application ponctuelle qui, au point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel $z' = \dfrac{z}{1+|z|}$

1- **a.** Étudier les variations de la fonction g définies $\mathbb{R}$, par $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ **0.5 pt**

b. En déduire l'image de l'axe des abscisses par l'application f. **0.25 pt**

2. Démontrer que pour tout point M le point M' appartient au disque de centre O et de rayon 1. **0.5 pt**

3. Le point M ayant pour coordonnées (x, y) déterminer en fonction de x et y les coordonnées x' et y' du point $M' = f(M)$ **0.25 pt**

4- **a.** Démontrer, que si M' appartient à la droite Δ parallèle à l'axe $(O, \vec{e}_2)$ passant par le point $A(1/2, 0)$ alors $3x^2 - 4x - y^2 + 1 = 0$ **0.5 pt**

b. En déduire que l'ensemble de points M tel que M' à Δ est inclus dans une conique (Γ) dont on déterminera les éléments géométriques.

Tracer (Γ) **1.5 pt**

5. Soit r une rotation de centre O.

Démontrer que pour tout point M du plan on $f(r(M)) = r(f(M))$ **0.5 pt**

Exercice 2 (**4 pts**)

1. Soit ABC un triangle direct quelconque du plan orienté et (C) le cercle de centre O inscrit dans ABC . On désigne par R_1, la rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et de centre A , R_2 la rotation d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et de centre B_1, transformé de B par R_1 et R_3 la rotation d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et de centre C_2, transformé de C par $R_2 \circ R_1$.

a. On note $S_{(AC)}$, la symétrie orthogonale d'axe (AC) et$S_{(OA)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA). Montrer que $R_1 = S_{(AC)} \circ S_{(OA)}$. **0.5 pt**

b. Quel est le transformé (C') du cercle (C) par la composée $R_3 \circ R_2 \circ R_1$. On note O' le centre de (C')

A quelle transformation simple $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ est-elle égale ? **1.75 pt**

2. Dans cette question, ABC est rectangle en A. Soit M un point de (C) et M' son image par R_1. On note A' le symétrique de A par rapport à (OO') où O' est le centre de (C')

a. Comparer les angles orientés $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'})$ **0.75 pt**

b. Démontrer que l'aire du triangle $A'M'M$ garde une valeur constante. (On pourra utiliser le produit vectoriel) **1 pt**

Problème (**12 pts**)

A/ Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \ln\left(-1 + \frac{2}{1-x}\right)$$

1. Quelle est la parité de f ?

Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2cm) **1.5 pts**

2. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ **0.5 pt**

3. Démontrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'application réciproque f^{-1} de f et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent. **1.25 pt**

4. Démontrer que pour tous nombres réels a et b, on a :

$$f^{-1}(a+b) = \frac{f^{-1}(a) + f^{-1}(b)}{1 + f^{-1}(a)f^{-1}(b)}$$ **0.5 pt**

B/ On considère une fonction h définie pour tout réel et vérifiant la propriété :

Pour tous réels a et b, $h(a+b) = \dfrac{h(a)+h(b)}{1+h(a)h(b)}$

1. Montrer que s'il existe un réel c tel que $h(c) = 1$ ou $h(c) = -1$ alors h est constante sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

On suppose dans toute la suite que h est non constante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que h prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$. (On pourra utiliser $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$) **0.5 pt**

3. Établir que $h(0) = 0$ et étudier la parité de h **0.75 pt**

4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $\dfrac{1+h(nx)}{1-h(nx)} = \left[\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\right]^n$ **0.5 pt**

5. On pose $\dfrac{1+h(1)}{1-h(1)} = a$.

Calculer, en fonction de a, $h(n)$ pour n entier naturel puis pour n entier relatif. **1 pt**

C/ Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x (g(t))^n \, dt$ où x est un réel positif et n un entier naturel.

1- **a.** Justifier l'existence de $I_n(x)$ **0.25 pt**

b. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$. **0.5 pt**

2- **a.** Vérifier que pour tout réel t, $(g(t))^2 = 1 - g'(t)$ **0.25 pt**

b. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1}(g(x))^{n-1}$$ **0.5 pt**

3- **a.** Déduire de ce qui précède que, pour tout p de $\mathbb{N}^*$

$$I_{2p}(x) = x - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}(g(x))^{2k-1}$$ **0.5 pt**

$$I_{2p+1}(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}(g(x))^{2k}$$ **0.5 pt**

b. Démontrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x positif,

$0 \leq I_{2p}(x) \leq x(g(x))^{2p}$ **0.5 pt**

En déduire, réel x positif étant fixé, que la suite de terme général $I_{2p}(x)$ est convergente.

Préciser sa limite. **0.5 pt**

4. En utilisant la première relation de **3-a.** et en posant $x = f(u)$, démontrer que, pour tout u fixé de $[0, 1]$ la suite $(\varphi_0(u))_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $\varphi_p(u) = f(u) - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{u^{2k-1}}{2k-1}$ a pour limite 0. **0.5 pt**

En déduire que la limite de $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\times 3^3} + \dfrac{1}{5\times 3^5} + \cdots + \dfrac{1}{(2p-1)3^{2p-1}}$ est $\ln(\sqrt{2})$ **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2001	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3.5 pts**)

Un sac contient n boules ($n \geq 4$) indiscernables au toucher et numérotés de 1 à n.
On tire simultanément 4 boules de ce sac.

1. Combien y-a-t-il de tirage possibles ? **0.5 pt**

2. On considère la variable aléatoire X égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage ci-dessus.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. **1 pt**

b. Déduire, en fonction de n, une expression de $\sum_{k=4}^{n} C_{k-1}^{3}$ à l'aide d'un unique coefficient binomial. **0.5 pt**

3. Déterminer n afin que la probabilité de l'événement $X = n - 1$ soit égale à 0.2 **0.5 pt**

4. Déterminer, à 0.1 près, l'espérance mathématique de X pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente. **1 pt**

Exercice 2 (**5.5 pts**)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (on tracera les courbes demandées sur un seul dessin en prenant 2 centimètres pour unité graphique). On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = 4x$

1- **a.** Déterminer les coordonnées du foyer F et l'équation de la directrice (Δ) de la parabole (P). **0.5 pt**

b. Tracer (Δ) ; (P) et placer F. **0.75 pt**

Dans toute la suite de l'exercice M désigné un point de (P) autre que O.
On désigne par t l'ordonnée du point M.

2. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite $(O, \vec{j})$. Les droites (FH) et (OM) se coupent en E.

a. Après avoir déterminé, en fonction de t une équation cartésienne de chacune des droites (FH) et (OM), déterminer les coordonnées (x, y) du point E. **0.75 pt**

b. Vérifier que les coordonnées (x, y) du point E sont telles que $y^2 + (2x - 1)^2 = 1$ **0.25 pt**

c. En déduire que, quelque soit le réel t, le point E appartient à une conique fixe (Γ_A) dont on précisera la nature, le centre et les sommets. Tracer (Γ_A). **0.75 pt**

3. Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice (Δ) de la parabole (P). On suppose que les droites (KH) et (OM) se coupent en L. En s'inspirant de la méthode utilisée dans la **question 2.**, prouver que L, appartient à une hyperbole fixe (Γ_2) dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes. Tracer (Γ_2). **1.5 pts**

4. Soit (D) la droite perpendiculaire à la droite (OM) et passant par H.

a. Démontrer que, quelque soit le réel t, la droite (D) passe par un point fixe I dont on précisera les coordonnées. **0.25 pt**

b. Soit J le point d'intersection des droites (D) et (OM). Démonter que, quel que soit le réel t, le point J appartient à un cercle dont on déterminera une équation cartésienne. Tracer ce cercle. **0.75 pt**

Problème (**11 pts**)

Soit la fonction numérique fa de la variable réelle x définie par $f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$ où a est un nombre réel non nul.
On désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A

1. Étudier la parité de f_a **0.75 pt**

2. Démontrer que la courbe (C_a) possède deux asymptotes dont on donnera les équations. **0.5 pt**

3. Étudier, selon les valeurs du réel non nul a, le sens de variation de f_a . **0.5 pt**

4- **a.** Démontrer que f_a est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble.
Préciser cet ensemble. **0.5 pt**

b. Expliciter $f^{-1}(x)$.
On désigne par (Γ_a) la courbe représentative de f_a^{-1} relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ **0.25 pt**

5- **a.** Démontrer que l'affinité orthogonale d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a transforme (C_1) en (C_a) **0.5 pt**

b. Soit a et a' deux réels non nuls et distincts. Déterminer une application affine transformant (C_a) en $(C_{a'})$. **0.5 pt**

6. Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, S la symétrie orthogonale d'axe $(O,\vec{i})$

a. Déterminer une expression analytique de $R\circ S$ puis donner une équation cartésienne de la transformée, $R\circ S(\Gamma_a)$ de (Γ_a) par $R\circ S$. **0.75 pt**

b. Comparer les équations cartésiennes de (C_a) et de $R\circ S(\Gamma_a)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Dans la suite du problème, on suppose $a=1$. **0.5 pt**

7. Tracer la tangente à la courbe (C_1) au point d'abscisse 0 ainsi que (C_1) et (Γ_1). **1 pt**

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f_1(\sin x)$.

Démontrer que $g'(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ **0.5 pt**

2. Déterminer le réel c tel que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\ln(c)$ **0.25 pt**

3. On considère l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin(x))^{2n}}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ où n est un entier naturel non nul.
On définit ainsi une suite numérique (I_n)

a. Démontrer que la suite (I_n) est à termes positifs. **0.25 pt**

b. Étudier le sens de variation de la suite (I_n). **0.5 pt**

c. Démontrer que $I_n\leq\dfrac{\ln c}{4^n}$ **1 pt**

d. En déduire la limite de la suite (I_n).

Partie C

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

par : $\quad h_n(x)=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$

1. Donner une expression simplifiée de la somme $S_n(x)=1+\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(\sin x)^{2p}$ en remarquant que $S_n(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique (x est un réel). **1 pt**

2. Démontrer que $h_n'(x)=\dfrac{1-(\sin x)^{2n}}{\cos x}$ **0.5 pt**

3. Montrer que $h_n(\frac{\pi}{6})=\ln(\sqrt{3})-I_n$ **0.5 pt**

4. En déduire que la suite (U_n) définie par $U_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p-1)2^{2p-1}}$ a une limite que l'on précisera. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2002	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (5 pts)

Soit les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = \mathrm{e}^x - x - 1 \text{ et } g_2(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

1. Étudier le sens de variation de g_1 et g_2.
En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $1 + x < \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{1-x}$ **1.75 pts**

2. Déduire de ce qui précède que pour tout réel y supérieur à 1, on a :
$\ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{1}{y} < \ln\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$ **0.75 pt**

3. Soit la suite U définie pour tout entier n supérieur à 1 par :
$U_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

a. Démontrer que la suite U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente. **1 pt**

b. Démontrer que pour tout entier n supérieur à 1, $\ln\left(\dfrac{1+2n}{n}\right) < U_n < \ln\left(\dfrac{2n}{n-1}\right)$

En déduire la limite de la suite U. **1.5 pts**

Exercice 2 (4 pts)

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $8x \equiv 7[5]$ **1 pt**

2. Résoudre l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $336x + 210y = 294$ **1.5 pts**

3. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :
$PGCD(a, b) = 42$ et $PPCM(a, b) = 1680$ **1.5 pts**

Problème (10.5 pts)

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ et $K(0, -1)$.
A tout point M de P de coordonnées (x, y), on associe le complexe $Z = x + iy$, affixe de M

A/

1. Démontrer qu'il existe une rotation T qui laisse le point K invariant et qui transforme A en B
Préciser l'angle de T, puis déterminer la transformation complexe associé à T.

2. Soit M_1 le point de P image de M par T ; M_2 et M_3 sont respectivement les images de M_1 et M_2 par T. Que peut-on dire, en justifiant, des droites (MM_1) et (M_2M_1) lorsque le point M est distinct du point K ?

3. Quel est l'ensemble des points M_1 de P lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$?

B/ Le nombre réel α étant fixé mais quelconque, on considère l'application T_α de P dans P qui, à tout point M, associe le point M' barycentre des points pondérés (M, α), $(M_1, -\alpha)$ et $(A, 1)$; M_1 étant défini **A-2.**

1. Exprimer l'affixe Z' du point M' en fonction de α et de l'affixe Z de M

2. Déterminer suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de T_α.

3. Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction de α et des coordonnées (x, y) de M.

4. Soit E, un point du plan de coordonnées $(-\mathrm{e}^{\alpha}, \mathrm{e}^{\alpha})$ et E' image de E par T_{α}.

a. Exprimer les coordonnées de E' en fonction de α.

b. Démontrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation :
$y = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1} + x - 1$

C/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x} + x$

1. Étudier le sens de variation de la fonction dérivée première f' de f.

2. Dresser le tableau de variation de f

3- **a.** Représenter graphiquement f dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

b. Par quelle transformation affine simple l'ensemble (C) des points E' de **B**/ **4-b.** est l'image de la courbe représentative de f ?

c. Tracer (C) dans le repère précédent.

d. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C), et les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$
On note g', g'', $g^{(3)}$, $\cdots$, $g^{(n)}$ les dérivées successives de g.

a. Démontrer que pour tout entier n non nul :
$g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$, où x est un nombre réel.

b. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x)$

LES CRACKS OBJECTIF 20/20 TERMINALE C&E

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2003	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4.5 pts**)

On considère dans le plan P trois points non alignés A, B, C et C' un point quelconque de P.

1. Justifier l'existence d'une affinité f de P dans P telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C'$. **0.5 pt**

2. On suppose $C = C'$, que peut-on dire de f ? **0.25 pt**

Dans la suite de l'exercice, on suppose $C \neq C'$.

3. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? **0.25 pt**

4. On suppose les droites (AB) et (CC') sécantes en un point O. Soit α le nombre réel tel que $\overrightarrow{OC'} = \alpha\overrightarrow{OC}$, (x, y) les coordonnées d'un point M de P dans le repère $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$.

a. Calculer les coordonnées (x', y') de $M' = f(M)$. **0.5 pt**

b. Déterminer suivant les valeurs du réel α la nature et les éléments caractéristiques de f **1 pt**

5. On suppose que les droites (AB) et (CC') sont parallèles. Soit le nombre réel k tel que $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{AB}$.

a. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \frac{1}{k}\overrightarrow{AC}\right)$ exprimer les coordonnées (x', y') de M' image par f d'un point M de coordonnées (x, y). **0.5 pt**

b. Démontrer que, pour tout point M de P, $\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB}$ où y est l'ordonnée de M **0.25 pt**

En déduire une construction géométrique de $f(M)$ (On envisagera les cas : (CM) est parallèle à (AB) et (CM) n'est pas parallèle à (AB)). **1.25 pts**

Exercice 2 (**5 pts**)

Soit φ_a l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe k associe le nombre complexe k' défini par $k' = aik + 1$ où a est un nombre réel non nul.

1. On considère l'application f_a du plan complexe P dans P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ qui point M d'affixe k, associe le point M' d'affixe $k' = aik + 1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a. **1 pt**

b. Soit la conique (C) du plan P d'équation $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$. Soit (C'_a) l'image de (C) par f_a.

Donner l'équation de (C'_a). **0.5 pt**

Préciser la nature de (C) et de (C'_a) ainsi que leurs foyers. **1.25 pt**

Tracer (C) et (C'_2) **0.5 pt**

2. Soit l'espace E muni du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le plan P de la **question 1** est le plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et l'application g_a de E dans E qui, à tout point M de E de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par $\varphi_a(x + iy) = x' + iy'$ et $z' = az$.

a. Donner l'expression analytique de g_a **0.25 pt**

b. Déterminer l'image par g_a de l'hyperbole (H) du plan de repère $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui a pour équation $y^2 - z^2 = 1$

Tracer l'hyperbole (H) et son image $g_2(H)$ chacune dans un repère convenable à préciser. **1.5 pt**

Problème (**10.5 pts**)

A/ On se propose de déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = \ln(x)$ où y est une fonction de variable x.

1. Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction P définie sur$]0, +\infty[$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie $xP'(x) - 2P(x) = 0$ **0.75 pt**

2. f étant une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, on pose $g=\dfrac{f}{P}$, P étant la fonction déterminée dans la première question, avec $a\neq 0$.

a. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive de la fonction $x\longmapsto \dfrac{\ln x}{ax^3}$ **1 pt**

b. Déterminer l'ensemble des primitives définies sur $]0,+\infty[$ $x\longmapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$.
(on pourra faire une intégration par parties) **0.5 pt**

c. En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x\longmapsto \dfrac{1+\ln(x^2)}{-4}+\alpha x^2$ où α est un nombre réel. **0.5 pt**

3- **a.** Trouver la fonction φ, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, vérifiant (E) tel que $\varphi(1)=0$. **0.25 pt**

b. Étudier les variations de φ et construire la courbe (C) représentative de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. **1.75 pts**

B/

1. Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de λ l'intégrale : $I(\lambda)=\displaystyle\int_{\lambda}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$

2. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda)=\dfrac{1}{3}$

3. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

a. Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1\leq k\leq n-1$ et pour tout $x\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$ on a :
$\varphi\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leq\varphi(x)\leq\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$ **1 pt**

b. Montrer que : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leq I\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ **0.75 pt**

En déduire $I\left(\dfrac{1}{n}\right)\leq\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right)$ **0.75 pt**

4. Déduire des questions **2.** et **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

5- **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{4}$ **0.5 pt**

b. Établir pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ les égalités : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)=\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ **0.5 pt**

c. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites $n\longmapsto V_n=\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)$ et $n\longmapsto U_n=\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ($n\in\mathbb{N}^*$)) ont des limites finies lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on calculera. **1 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2004	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer U_0 et U_1. **0.25+0.5 pt**

2. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ? **0.75 pt**

3- **a.** A l'aide d'une brève étude de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$ **1 pt**

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ **0.25 pt**

4- **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{n-1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ **0.5 pt**

b. En déduire un nouveau majorant de (U_n) pour tout n non nul, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$ **0.75 pt**

Exercice 2 (**4 pts**)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: (unité graphique 9 cm), on considère les points A, M, N, P et Q d'affixes respectives -1, Z, Z^2, $\frac{1}{Z}$ et $Z^2 + Z + \frac{1}{Z}$ où Z est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

1. Montrer que les points A, M et Q sont alignés. **0.75 pt**

2. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G_0 de M, N et P. **0.5 pt**

3. On considère la fonction :

$F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto \begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\left(\cos(2t) + 2\cos(t)\right) \\ y(t) = \frac{1}{3}\sin(2t) \end{cases}$$

a. Étudier les variations de F **1.5 pts**

b. Tracer la courbe représentative Γ de F dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ **1 pt**

4. En déduire le lieu géométrique de G_0 lorsque M décrit le cercle trigonométrique. **0.25 pt**

Problème (**12 pts**)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère les points $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,2)$ et $E(2,1)$.

Soit f l'application affine du plan telle que $f(O) = A$, et dont l'application linéaire associée est notée φ.

A/ On suppose que pour tout point M de (BC), on a : $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{j}$

1- **a.** Déterminer $f(B)$ et $f(C)$? **0.5 pt**

b. Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ **0.5 pt**

2. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Démontrer que $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$ **0.5 pt**
3. Démontrer que $f \circ f = f$ **0.5 pt**
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f **0.75 pt**

B/ On suppose que pour tout point M de (BC), on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{i}$

1- **a.** Déterminer $f(B)$ et $f(C)$? **0.5 pt**
b. Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ **0.5 pt**
2. Démontrer que l'expression analytique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$ **0.5 pt**
3- **a.** Quel est l'ensemble des points invariants par f ? **0.25 pt**
b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ f$ **0.5 pt**
4. Soit t la translation de vecteur $-\vec{i}$. Démontrer que $t \circ f$ est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques. **0.75 pt**
5. On considère la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = O$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$
a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{M_n M_{n+2}} = 2\vec{i}$ **0.5 pt**
b. En déduire que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites que l'on précisera **1 pt**
c. Soit (x_n, y_n) les coordonnées de M_n. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. **0.25 pt**
On pose $z_n = y_n - 1$. Montrer que la suite (z_n) est géométrique. En déduire l'expression de y_n en fonction de n. **0.75 pt**
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = n - \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$ **0.5 pt**

C/ Soit k un réel non nul Γ_k la courbe d'équation : $x(y-1) = k$

1. Montrer que Γ_k est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes. **0.75 pt**
2. On considère l'application affine f définie au dans la partie **B** et on désigne par Γ'_k l'image de Γ_k par f.
a. Écrire les équations de Γ'_k respectivement dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(C, \vec{i}, \vec{i} - \vec{j})$ **0.75 pt**
b. En déduire que Γ'_k est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes **0.75 pt**
3. Construire Γ_2 et Γ'_2 **1 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2005	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (3.5 pts)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :

a. Démontrer que 2005 et 1967 sont premiers entre eux. **1 pt**

b. Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que : $2005a + 1967b = 1$. **1 pt**

2. En déduire que, dans $\mathbb{Z}/2005\mathbb{Z}$ $\overbrace{1967}$ (classe de 1967) admet un inverse que l'on déterminera. **0.5 pt**

3. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/2005\mathbb{Z}$ l'équation $\overbrace{1967}\dot{x} + \overbrace{1515} = \overbrace{38}$ **1 pt**

Exercice 2 (4 pts)

Pour tout entier strictement positif n, on note $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$

1. Étudier la variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge. **1 pt**

2. Démontrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1,
$\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$
En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **1.25 pt**

3. Déterminer la fonction dérivée f'_n de la fonction $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}$ et donner son expression en fonction de f_n et f_{n+1} pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$ **0.5 pt**
Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}. **0.5 pt**
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_{n+1}) = 1$ **0.25 pt**
En déduire que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. **0.5 pt**

Problème (12.5 pts)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$, symétrie S d'axe (D) et de direction celle de l'axe (oy).

A/ Soit g l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\dfrac{3}{4}x + y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Montrer que g est bijective et vérifie $g \circ S = S \circ g$. **1 pt**

2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants pour g. **0.25 pt**

3. Montrer que, si M n'est pas invariant pour g, la droite (MM) garde une direction indépendante de M que l'on précisera. **0.5 pt**

4. Calculer les coordonnées du point M, intersection de (MM) et de (Δ). **0.5 pt**

5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques. **0.5 pt**

B/ On note ψ l'application linéaire associée à S et $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f(O)$ appartient à (D) et dont l'application linéaire associée φ vérifie :
$\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ et $\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$ où a et b sont deux nombres réels non nuls

1- **a.** Préciser le couple (a,b) pour que f soit une homothétie. **0.25 pt**

b. Préciser le couple (a,b) pour que f soit une translation. **0.25 pt**

2. Soit A un point de P tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et B un point de (D) distinct de O.
Déterminer $\psi(\overrightarrow{OA})$ et $\psi(\overrightarrow{OB})$. **0.75 pt**
En déduire $\psi(\vec{j})$ et $\psi(2\vec{i}+\vec{j})$. **0.5 pt**

3. Démontrer que S et g appartiennent à $\mathcal{F}$

4. On appelle $\mathcal{F}_1$ le sous ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ dont l'application linéaire associée φ vérifie $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$

a. Soit f_1 un élément de $\mathcal{F}_1$; Démontrer que le point $M(x,y)$ a pour image par f, le point M' de coordonnées (x',y') telles que :

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad ; \text{avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$ **0.75 pt**

b. Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? **0.75 pt**

c. Dans cette question on prend $\alpha = 0$; Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point du plan P. On pose :
$M_1 = f_1(M)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $M_{n+1} = f_1(M_n)$.
On appelle (x_n,y_n) les coordonnées du point M_n. Calculer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et a. **1 pt**
Étudier la convergence des suites (x_n) et (y_n). **0.75 pt**

C/

1. Soit F la fonction numérique définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}x + \ln(x)$. Étudier les variations de F et représenter graphiquement F dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ On désigne par (C) la courbe représentative de P. **1 pt**

2- **a.** Soit f_1 un élément quelconque de $\mathcal{F}_1$. Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1. **0.5 pt**

b. Soient $(p,q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{p,q})$ la courbe d'équation : $y = \ln(px+q) + \dfrac{1}{2}x$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Démontrer que $(C_{p,q})$ est l'image de (C) par une application appartenant à $\mathcal{F}_1$. **0.5 pt**

3. Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2-2x) + \dfrac{1}{2}x$. Reconnaître l'application élément de $\mathcal{F}_1$ qui transforme (C) en (Γ). **0.25 pt**

4. Construire l'image (C') de (C) par $g \circ S$. **1.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2006	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3.5 pts**)

On lance deux fois de suite un dé non pipé à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. On désigne respectivement par a et b, les numéros apparus sur la face supérieure au premier et au second lancer.
On définit une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $aU_{n+1} + (b-a)U_n = 0$

1. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle arithmétique ou géométrique ? **0.5 pt**
2. Déterminer la probabilité p_1 pour que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite constante. **0.5 pt**
3. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- **a.** A : "La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente". **0.75 pt**
- **b.** B : "La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite alternée (les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs)". **0.75 pt**
- **c.** C : "La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite alternée et convergente". **0.5 pt**

4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. **0.5 pt**

Exercice 2 (**4.5 pts**)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la rotation R de centre Ω d'affixe 1, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et l'application H_k qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ telles :

$\begin{cases} x' = kx - k - 1 \\ y' = ky \end{cases}$ où k est un nombre réel.

1- **a.** H_k est-elle bijective ? (on discutera suivant les valeurs du réel k). **0.5 pt**
- **b.** Déterminer, si possible, l'ensemble des points invariants par H_k. **0.5 pt**
- **c.** Déterminer la nature de H_k et préciser ses éléments caractéristiques. **0.75 pt**
- **d.** Donner les conditions sur les nombre réels a , b et c pour qu'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ soit globalement invariante par H_k. **1 pt**

2. **a.** Écrire la transformation complexe associée à R. **0.25 pt**
- **b.** Soit $I(-1, 0)$ un point de P ; à tout point M de P d'affixe z on associe par R le point M_1 d'affixe z_1. Soit G le barycentre des points pondérés $(I, -1)$, $(M, 1)$ et $(M_1, 2)$.
  - **i.** Calculer l'affixe de G en fonction de z **0.25 pt**
  - **ii.** Trouver l'ensemble des points G lorsque M décrit la droite (Δ) d'équation $x = 2$. **0.5 pt**

3. Déterminer la nature de $R \circ H_k$. **0.75 pt**

Problème (**12 pts**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
Pour tout nombre réel non nul α , on considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f_\alpha(x) = -x\ln(\alpha^2) - 2|x|\ln(|x|)$
On note C_α , C_α^+, C_α^- les courbes représentatives de f_α et des restrictions de f_α à $]0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0[$ respectivement.
Soit g_α la restriction de f_α à $]0, +\infty[$

A/ Soit E l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur $]0,+\infty[$ et telles que :
$\forall x_1 \in]0,+\infty[, \forall\ x_2 \in]0,+\infty[,\ f(x_1x_2) = x_1f(x_2) + x_2f(x_1)$

1. Démontrer que la fonction kg_1 où k est un nombre réel fixe, appartient à E. **0.5 pt**

2- **a.** Démontrer que si f appartient à E alors $f(1) = 0$ **0.25 pt**

b. Démontrer que si f appartient à E alors :
$\forall x \in]0,+\infty[,\ xf'(x) - f(x) = xf'(1)$. (1) **0.75 pt**

c. En remarquant que la propriété (1) est équivalente à : $\forall\ x \in]0,+\infty[$,
$\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{f'(1)}{x}$, Calculer $\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ **0.75 pt**

d. En déduire l'ensemble des fonctions appartenant à E. **0.5 pt**

B/

1. Pour quelles valeurs de α , g_α appartient à E ? **0.5 pt**

2- **a.** Étudier le sens de variation de g_1. **0.75 pt**

b. Établir le tableau de variation de f_1 (on pourra utiliser la parité de f_1). **0.75 pt**

c. Tracer C_1. **0.75 pt**

d. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équation
$x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ **0.5 pt**

Dans la suite du problème, on suppose α strictement supérieur à zéro.

3- **a.** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g_\alpha\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha}g_1(x)$ **0.25 pt**

b. En déduire que C_α^+ est l'image de C_1^+ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. **0.5 pt**

c. En déduire le maximum de g_α **0.25 pt**

4. Soit S_α l'application du plan dans lui- même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\alpha^2\overline{z}$

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S_α **0.75 pt**

b. Montrer que C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α. **0.5 pt**

5. Construire point par point C_2 à partir de C_1. **0.5 pt**

C/ Soit (U_n) une suite numérique définie par :
$U_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$.

1. Résoudre l'inéquation $g_\alpha(x) > 0$ et l'inéquation $g_\alpha(x) - 2x > 0$. **1 pt**

2. Déterminer U_0 pour que la suite (U_n) soit constante. **0.5 pt**

3. On choisit $U_0 \in \left]0, \dfrac{1}{\alpha}\right[$ et $U_0 \neq \dfrac{1}{\alpha e}$.

a. Démontrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < U_n < \dfrac{1}{\alpha e}$. **0.75 pt**

b. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. **0.5 pt**

c. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2007	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (3.5 pts)

Soit (D) une droite affine munie d'un repère normé $(0, \vec{i})$ et soit A et B deux points de (D) d'abscisses respectives a et b. On désigne par α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta = 1$, par G le barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, par φ, l'application de (D) dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de (D) associe le nombre réel $\varphi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$

1- **a.** Exprimer $\varphi(G)$ à l'aide de $\varphi(O)$ et de OG^2. **0.5 pt**

b. Calculer $\varphi(O)$, l'abscisse g de G et $\varphi(G)$ en fonction de a, b, α et β . **0.75 pt**

c. Vérifier que $\varphi(G)$ ne dépend que de $a - b$, α et β . **0.5 pt**

2. On suppose maintenant α et β strictement positifs. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs a et b avec les probabilités respectives α et β .

a. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X, ainsi que l'espérance mathématique $E(X^2)$ de X^2 **0.5 pt**

b. Montrer que la variance de X est égale à $\varphi(G)$. **0.5 pt**

3. **Application numérique**

Un joueur lance un dé non pipé dont les faces sont marquées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Si le chiffre obtenu est pair ou divisible par 3, il gagne 40 F. Dans les autres cas, il gagne 100 F. Soit X le gain de ce joueur.
Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart-type. **0.75 pt**

Exercice 2 (4.5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre complexe a, on considère l'application f, du plan dans lui-même, qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = (a + 2i)z + (1 - ai)\overline{z}$

1. Pour quelles valeurs de a, f_a est elle une similitude ? **0.5 pt**

2. Préciser dans chaque cas la nature et les éléments caractéristiques de f_a ; **1 pt**
On suppose dans la suite de l'exercice que a est un nombre réel.

3- **a.** Écrire l'expression analytique de f_a **0.5 pt**

b. En déduire que f_a est une transformation affine. **0.75 pt**

4. Donner suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par f_a. **1 pt**

5. On pose $a = 2$ et on désigne par D_k la droite d'équation $3x - 4y = k$ où k est un nombre réel.
Montrer que $f_2(D_k)$ est une droite dont on déterminera une équation. **0.75 pt**

Problème (12 pts)

Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$.
On considère l'ensemble C des fonctions numériques continues de $[0, +\infty[$ dans $[a, b]$

Partie A

1. Soit r la fonction définie par $r(x) = \dfrac{\alpha}{x^2 + 1} + \beta$ où α et β sont deux réels tels que $\alpha > 0$
Déterminer α et β en fonction de $r([0, +\infty[) =]a, b]$. En déduire que C n'est pas vide. **1 pt**

2. Soient f un élément de C et la fonction $u : x \longmapsto f(x) - x$

a. Montrer $u(a) \cdot u(b) \leq 0$. En déduire que l'équation (E) (ci-dessous) admet une solution sur $[a, b]$ **1 pt**

$$u(x) = 0 \qquad (\text{ E })$$

b. Démonter que si f est dérivable sur $[a, b]$ et que $|f'| < 1$ sur $[a, b]$ alors l'équation (E) admet une unique solution sur $[a, b]$ **0.75 pt**

3. Soit q une fonction continue et strictement négative sur $[0, +\infty[$.

Démontrer que la fonction k définie sur $]0, +\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\displaystyle\int_0^x q(t)f(t)\ \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x q(t)\ \mathrm{d}t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ **0.5 pt**

4. On suppose dans cette question que l'intervalle $[a, b]$ est d'amplitude π et que f est une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que f'' y est continue. Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par :

$$h(x) = (f''(x) + f(x)) \sin(x - a)\ .$$

a. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x$ **0.5 pt**

b. Par une double intégration par parties, démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = f(a) + f(b)$ **0.75 pt**

c. Démontrer alors, par l'absurde, que si f est strictement positive sur $[a, b]$ l'inéquation $f''(x) + f(x) > 0$ admet au moins une solution sur $[a, b]$. **0.75 pt**

Partie B

Dans cette partie, on suppose $a = 0$, $b = 1$. f désigne toujours un élément de C.

Soit g la fonction définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x > 0$

1- **a.** Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer g'. **0.5 pt**

b. Exprimer g en fonction d'une primitive, F, de f. **0.25 pt**

c. Étudier la continuité en zero de la fonction g ; g appartient-elle à C ? **0.75 pt**

2. On suppose f croissante sur $[0, +\infty[$

a. Calculer $xg'(x) + g(x) - f(x)$ pour $x > 0$. **0.25 pt**

b. Montrer que $\forall\ x > 0$, $f(0) \leq g(x) \leq f(x)$ **0.5 pt**

c. En déduire que g est croissante sur $[0, +\infty[$ **0.5 pt**

3. Soit φ et γ les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = |\sin x|$, $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x |\sin t|\ \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a. Montrer que φ et γ appartiennent à C et calculer $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \in [0, 2\pi]$ **1 pt**

b. Étudier la dérivabilité de γ au point 0 et calculer γ' sur $[0, 2\pi]$ **0.5 pt**

c. Montrer que l'équation $\gamma'(x) = 0$ admet exactement 3 solutions sur $[0, 2\pi]$, puis donner pour chacune d'elles un encadrement. **1.5 pts**

d. Donner le tableau de variation de γ et, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'allure de sa courbe (Γ) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. **1 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2008	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**5 pts**)

La fonction tangente étant une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, on note φ sa bijection réciproque. On admettra que la fonction numérique g définie par : $g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. '

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit f).

1. Démontrer que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

2. Démontrer que $0 \leq x - \varphi(x) \leq \dfrac{1}{3}x^3$ pour tout $x \geq 0$. (on pourra introduire des fonctions bien définie) **1 pt**

3- **a.** Démontrer que : $0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{1}{9}x^2$ si $x > 0$. **1 pt**

b. En déduire que f est continue et dérivable à droite en 0. **1 pt**

4- **a.** Démontrer que : $0 \leq \displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ **0.75 pt**

b. En écrivant $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t$, démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **0.75 pt**

Exercice 2 (**4 pts**)

Soit (P) le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, t un élément de $]-\pi, \pi[$. On note (C) l'ensemble des points M de (P) d'affixe $Z = X(t) + iY(t)$ où $X(t) = 2\cos(t) - \cos(2t)$ et $Y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.

1. Exprimer Z en fonction de e^{it}. **0.25 pt**
En déduire que (C) est l'image du cercle trigonométrique par une application f de (P) dans (P) que l'on déterminera. **0.25 pt**

2. Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ et M un point de (C) image de m, d'affixe e^{it} ($t \in \mathbb{R}$), par f

a. Démontrer que A et M sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente (T) en m au cercle trigonométrique. **0.75 pt**

b. En déduire une construction du point M à partir de m. **0.25 pt**

3. Étudier les variations de X et Y sur $[0, \pi]$ **1.5 pts**

4. Tracer la courbe (C) (unité graphique 2 cm) **1 pt**

Problème (**11 pts**)

A/

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout réel h, on définit l'application f_h, du plan dans lui-même qui à chaque point M, distinct de O, de coordonnées $(x; y)$ associe le point M_1, de coordonnées (x_1, y_1) telles que : $x_1 = hx$ et $y_1 = x + hy$. On convient que $f_h(O) = O$.

a. Déterminer l'ensemble I des points invariants par f_h. **0.5 pt**

b. f_h est-elle bijective ? Justifier. **0.5 pt**

2. Δ désigne la droite d'équation : $y = x$, S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. Montrer qu'il existe une application g du plan dans lui-même telle que $f_0 = g \circ S_\Delta$. Identifier g. **0.5 pt**

3. Dans toute la suite , on suppose $h \neq 0$

a. Identifier $f_{-h} \circ f_h$ **0.5 pt**

b. D_1 et D_2 sont les droites d'équation respective $x+y = 0$ et $y = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$, S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axe respectif D_1 et D_2. Déterminer la nature de l'application $t = S_2 \circ S_1 \circ f_{-h} \circ f_h$, puis préciser ses éléments caractéristiques. **1 pt**

4. S désigne la symétrie orthogonale d'axe d'équation $x = 0$. On pose : $u = f_h \circ S \circ f_h \circ S_\Delta$ et on appelle z l'affixe de $M(x, y)$ et Z celle de $u(M)$. Calculer Z en fonction de z. En déduire la nature de u et ses éléments caractéristiques. **1 pt**

B/

Soit M un point n'appartenant pas à l'axe des ordonnées, H son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées et $M_1 = f_1(M)$.

1. Déterminer les directions des droites (HM_1) et (MM_1). En déduire une construction simple de M_1 à partir de M. **0.75 pt**

2. (H) est la courbe d'équation : $x^2 - y^2 - 9 = 0$. Préciser la nature de (H) puis tracer (H). **0.75 pt**

3. On note (H_1) l'image de (H) par f_1 .

a. Donner une equation de (H_1) sous la forme $x = F(y)$ où F est une fonction à préciser. **0.5 pt**

b. En déduire les asymptotes de (H_1). Vérifier qu'elles ont pour vecteur directeur $\vec{i}$ et $\vec{i} + 2\vec{j}$. **1 pt**

c. Déterminer la nature de (H_1).(On pourra écrire une equation de (H_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ où $\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j}$) **0.75 pt**

C/

M_0 est un point donne. On pose : $M_1 = f_h(M_0)$,$M_2 = f_h(M_1)$, ... , $M_n = f_h(M_{n-1})$ pour tout entier naturel non nul n. Et on note (x_0, y_0) les coordonnées de M_0, (x_1, y_1) celles de M_1, ... , (x_n, y_n) celles de M_n.

1. Montrer que pour tout naturel non nul n, $x_n = h^n x_0$ et $y_n = nh^n x_0 + h^n y_0$. **0.75 pt**

2. Pour tout $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$, montrer que : $y_n = x_n \left(\beta + \alpha \ln \dfrac{x_n}{x_0}\right)$ où α et β sont des constantes indépendantes de n que l'on précisera. En déduire que les points M_n sont situes sur une courbe fixe. **1 pt**

3. Pour $h = \mathrm{e}$ et $(x_0, y_0) = (1, 1)$, on note (C_g) la courbe fixe correspondante. Donner l'expression de la fonction g dont la courbe est (C_g). Étudier les variations de g. **1 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2009	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3.5 pts**)

a et b sont deux entiers tels que $a > b > 0$; δ est leur PGCD et μ leur PPCM.

1. Déterminer δ et μ pour $a = n(2n-1)$ et $b = (n-1)(2n-1)$, n étant un entier supérieur à 1. **0.5 pt**

2. On pose : $a' = \dfrac{a}{\delta}$ et $b' = \dfrac{b}{\delta}$

Déterminer en fonction de a' et b' les nombres a et b tels que $\mu(a+b) = ab\delta$ (1) **0.75 pt**

3. Parmi les nombres a et b qui satisfont à la relation (1), démontrer que ceux qui satisfont à $\delta = a - b$ (2) sont telles que $a = a'(2a'-1)$ et $b = (a'-1)(2a'-1)$. **0.5 pt**

4. Démontrer que les nombres entiers a et b qui vérifient les relations (1) et (2) sont tels que $(a-b)^2 = a+b$ (3). **0.5 pt**

5. Les nombres entiers a et b qui satisfont à la relation (3) satisfont-ils aux relations (1) et (2) ? **0.75 pt**

6. On suppose que a et b satisfont à la relation (3). Déterminer alors a et b pour $\delta = 11$. **0.5 pt**

Exercice 2 (**6 pts**)

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$

On note $g(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormée (unité graphique 6 cm).

1- **a.** Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$. **0.5 pt**

b. Étudier le sens de variation de f. **0.5 pt**

2- **a.** Montrer que, pour tout $x > 1$, $(x^2-x)g(x^2) \leq f(x) \leq (x^2-x)g(x)$. **0.75 pt**

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **0.5 pt**

3- **a.** Trouver les nombres réels a, b et c tels que : $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ **0.75 pt**

b. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ est croissante sur $[0;+\infty[$. **0.5 pt**

c. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $(x^2-x)h(x) \leq \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\,\mathrm{d}t \leq (x^2-x)h(x^2)$ **0.5 pt**

d. Puis en déduire la limite à droite en 1 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\,\mathrm{d}t$ **0.5 pt**

4. Calculer la limite à droite en 1 de f. **0.5 pt**

5. Préciser le comportement de C au voisinage du point de coordonnées $(1, \dfrac{1}{3}\ln 2)$ puis tracer la courbe C. **1 pt**

Problème (**10.5 pts**)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique étant égale à 2 cm. A tout point M de P de coordonnées $(x;y)$, on associe son affixe $z = x + iy$.

I/ Soient a et b deux nombres réels, on désigne par $f_{a,b}$ l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x;y)$ fait correspondre le point M' dont les coordonnées $(x';y')$ sont définies par :

$$x' = ax \text{ et } y' = -ay + b$$

1- **a.** Déterminer suivant les valeurs de a et b l'ensemble des points invariants par $f_{a,b}$. **0.75 pt**

b. Si $|a| = 1$, reconnaitre $f_{a,b}$ et donner ses éléments caractéristiques. **0.75 pt**

2. On suppose a non nul et $|a| \neq 1$

a. Démontrer que $f_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $\dfrac{b}{1+a}$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. **0.75 pt**

b. Soit M_1 le point de coordonnées $(a;b)$; on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = f_{a,b}(M_n)$

***b*$_1$.** Établir que M_n a pour coordonnées $\left(a^n; b\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}\right)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ **0.75 pt**

***b*$_2$.** Montrer que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites dont l'une (D_1) passe par le point A de coordonnées $\left(0, \dfrac{b}{1+a}\right)$ et le point M_1, alors que l'autre, (D_2) est le transformée de (D_1) par $f_{a,b}$. **0.5 pt**

II/ Soient α et β deux nombres réels. On considère l'application $g_{\alpha,\beta}$ de P dans P qui au point N d'affixe z fait correspondre le point N' dont l'affixe z' est définie par : $z' = \alpha z + i\beta$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de α et β la nature et les éléments caractéristiques de $g_{\alpha,\beta}$ **0.5 pt**

2. On considère α non nul et différent de 1 et le point N_1 d'affixe $z_1 = \alpha + i\beta$. On pose pour tout entier n strictement positif, $N_{n+1} = g_{\alpha,\beta}(N_n)$

a. Montrer que N_n a pour affixe $z_n = \alpha^n + i\beta\dfrac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$ **0.75 pt**

b. Montrer que les points N_n appartiennent à une même droite (Δ) passant par le point N_1 et le point B de coordonnées $\left(0, \dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)$ **0.5 pt**

3. On considère les cas $\alpha = -a$ et $\beta = b$ avec a non nul et $|a| \neq 1$. Montrer que $(\Delta) = (D_2)$. **0.75 pt**

III/ Dans cette partie, on suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Soit φ_1 la fonction numérique définie par :

$\varphi_1 = x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$

1. Étudier les variations de φ_1, et construire sa courbe représentative (C_1) dans le plan P. **2.5 pts**

2. Pour tout n entier naturel strictement positif, on note φ_{n+1}, la fonction numérique dont la courbe représentative (C_{n+1}) est l'image de la courbe (C_n) par $g_{2,1}$, (C_n) est la représentation graphique de la fonction φ_n.

Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = x\exp\left(\dfrac{2^{n-1}}{x}\right) - 2^{n-1} - 1$ **0.75 pt**

3- **a.** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les courbes (C_n) ont les mêmes asymptotes. **0.5 pt**

b. Soit E_n le point de (C_n) en lequel la tangente à la direction définie par $\vec{i}$; montrer que l'ensemble de ces points, lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ est inclus dans une droite passant par B de coordonnées $(0;-1)$. **0.75 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2010	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$\begin{cases} f(x) = (x^2+x)\ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} h(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

I/

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f, g et h au point $x_0 = 0$

2. Montrer que $\forall x \leq 0$, $\ln(x^2+1) \leq x^2$. En déduire que : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) \leq x$

II/ Lors d'un examen oral de mathématique, chaque candidat devra tirer une des trois enveloppes identiques dans une urne. Les trois enveloppes contiennent, l'une la fonction f, l'autre la fonction g et la troisième la fonction h. Le candidat étudiera la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 0$ de la fonction qu'il aura choisie. On suppose les tirages équiprobables.

1. Calculer la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en $x_0 = 0$.

2. Au tour d'un candidat Lambda, connu déjà de son examinateur qu'il ne peut répondre qu'à la question concernant la fonction f, il lui est accordé de procéder par tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la fonction f. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le fameux candidat.

- **a.** Déterminer la loi de probabilité de X
- **b.** Calculer l'espérance mathématiques et la variance de X
- **c.** Construire la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose : $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t$

1- **a.** Montrer que $I_1 = -1$

b. Démontrer que pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}$

c. Prouver alors que, pour tout n, on a : $I_n = \left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right)\mathrm{e} - 1$

2- **a.** Démontrer que $0 \leq \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e} - 1$

b. En déduire que $|I_n| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{n!}$

c. Que peut-on dire pour la suite (I_n)

3. Pour tout n, on pose : $S_n = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$

En déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

Problème

Soit P un plan orienté et soit $R = (O, \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$ un repère orthogonal direct de P. On considère l'application f_a de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' avec :

$z' = a^2\overline{z} + ai$ où a est un nombre complexe non nul et $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z

On appelle A le point d'affixe a et on note $|z|$ le module du nombre complexe z.

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier f_a dans le cas où $|a| = 1$.
On pourra poser $a = \cos\theta + i\sin\theta$ où θ appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$

1. A partir du point A, construire le point O' tel que $O' = f_a(O)$ et montrer que le milieu I du bipoint (O, O') est invariant par f_a

2. Montrer que f_a est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OU) et d'un déplacement. Quelle est alors la nature de f_a ?

3. Lorsque θ varie dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, déterminer :

- **a.** L'ensemble des points I (milieu de $[OO']$)
- **b.** L'ensemble des points $A' = f_a(A)$.
- **c.** L'ensemble des valeurs prises par la norme de $\overrightarrow{IU}$

Partie B

On étudie le cas où $|a|$ est différent de 1.

1. On appelle g_a l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 avec $z_1 = a^2\overline{z}$. Soit S_a, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OA)

- **a.** Montrer que l'affixe z_2 du point $M_2 = S_a(M)$ est défini en fonction de l'affixe z de M par : $z_2 = \dfrac{a}{\overline{a}}\overline{z}$
- **b.** Déterminer la nature de l'application $g_a \circ S_a$. En déduire une décomposition de g_a sous forme d'une composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie.

2. Soit M_0 un point de P distinct de O . On définit dans P, une suite de points M_n par :
Pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = g_a(M_n)$. Montrer que l'ensemble des points M_n est contenu dans la réunion de deux demi-droites.
Trouver une relation entre $\left|\left|\overrightarrow{OM_{n+1}}\right|\right|$ et $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ puis exprimer $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ en fonction de $\left|\left|\overrightarrow{OM_0}\right|\right|$.
Étudier suivant la position de A dans le plan P, la limite éventuelle de $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ quand n tend vers $+\infty$.

3- **a.** Montrer que f_a admet un unique point invariant Ω_a dont on déterminera l'affixe.

- **b.** Montrer que Ω_a est un point du segment $[OO']$, (en notant $O' = f(O)$).
  Montrer que f_a est la composée de l'homothétie de centre Ω_a et de rapport $|a^2|$ et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.

4. Étant donné un nombre réel positif L, peut-on déterminer $|a|$ pour que l'on ait $\left|\left|\overrightarrow{O\Omega_a}\right|\right| = L$?

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2011	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3 pts**)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère les deux entiers M et N tels que :

$$M = 11n + 3 \text{ et } N = 13n - 1$$

1. Démontrer que tout diviseur de M et de N est un diviseur de 50. **1 pt**

2. Soit l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $50x - 11y = 3$.

a. Montrer que si un couple (x_0, y_0) d'entiers naturels est solution de (E) alors l'entier $11y_0 + 3$ est un multiple de 50. **0.25 pt**

b. Résoudre l'équation (E). **1 pt**

c. Déduire de ce qui précède les valeurs de n pour lesquelles M et N ont 50 pour plus grand commun diviseur. **0.75 pt**

Exercice 2 (**5 pts**)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, λ est un réel quelconque et k est un réel strictement positif quelconque. $C_{\lambda,k}$ désigne la courbe dont une equation dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 = k$

1. Étudier les courbes $C_{0,k}$; $C_{1,k}$ et $C_{-1,k}$ **0.75 pt**

2- **a.** Montrer que les deux coniques d'équations $3x^2 + y^2 = 12$ et $3x^2 - y^2 = 6$ sont des courbes $C_{\lambda,k}$ **0.5 pt**

b. Identifier ces deux coniques et représenter les sur deux figures distinctes. **1.5 pts**

3. On suppose λ différent de -1, 0 et 1. Le réel k étant fixe, montrez que $C_{\lambda,k}$ est une conique. Précisez alors, selon les valeurs de λ , son axe focal et son excentricité. **2.25 pts**

Problème (**12 pts**)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un nombre réel et T_a, l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point $M'(x', y')$ tel que : $x' = ax$ et $y' = 2ax + y$.

A/

1. Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble E, des points invariants par T_a. **0.75 pt**

2. Montrer que pour tout point M n'appartenant pas à E, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. **0.25 pt**

3. On pose $a = 0$, caractériser T_0. **0.5 pt**

4. Montrer que T_{-1} est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques. **0.5 pt**

5. Si $a \in \mathbb{R}^*\{-1, 1\}$, montrer que T_a, est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques. **1 pt**

B/

Dans cette partie on pose $a = 1$; $M_0(x_0, y_0)$ et $M_n = T_1(M_{n-1})$ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avec $M_n(x_n, y_n)$

1. Exprimer x_n et y_n, en fonction de x_{n-1} et de y_{n-1} **0.5 pt**

2. En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n. **0.5 pt**

3. Montrer que les points M_n appartiennent à une droite fixe dont on précisera l'équation. **0.25 pt**
4. Montrer que la droite d'équation $x = k$ est globalement invariante par T_1. **0.25 pt**

C/
On pose $a = -1$.
Soit la fonction :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + 1 - \ln|x + \sin(x)|$

1. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$ la fonction f est définie. **0.5 pt**
2. Trouver les limites de f aux homes de l'ensemble de définition. **0.75 pt**
3. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par $g(x) = x - 1 + \sin x - \cos x$ **0.5 pt**
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ **0.25 pt**
5. En utilisant les questions précédentes, dresser le tableau de variation de la fonction f. **0.75 pt**
6. Que représente la droite d'équation $y = x$ pour la courbe (C_f) de f ? **0.25 pt**
7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{6}\right[$ **0.5 pt**
8. Comment peut-on construire l' image d'un point de (C_f) par T_{-1} ? **0.25 pt**
9. Construire (C_f) puis l'image de (C_f) par T_{-1} **1 pt**

D/
Dans cette partie, a appartient à un sous ensemble de $\mathbb{Z}$.

1. Trouver les entiers relatifs a tels que $4a$ soit un multiple de 8. **0.5 pt**
2. Montrer que l'ensemble des solutions appartenant à $[-10, 10[$ est :
$B = \{-10; -8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$ **0.25 pt**
3. Sur des jetons indiscernables au toucher on inscrit chaque élément de l'ensemble B, qu'on place dans une urne.
On tire simultanément quatre jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de transformations (T_a) obtenues lors du tirage de quatre jetons. $(a \in B)$

a. Déterminer la loi de probabilité de X. **0.75 pt**
b. Calculer l'espérance mathématique de X. **0.25 pt**

4. Dans cette question, on tire successivement dix jetons de l'urne en remettant chaque fois le jeton tire.

a. Calculer la probabilité qu'on ait exactement trois fois une transformation lors des dix tirages. **0.5 pt**
b. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de transformations obtenues lors des dix tirages.
Calculer l'espérance mathématique puis la variance de Y. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2012	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires,
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 et on les met dans U_2 , puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et on les met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A peut s'écrire : $p(A) = \dfrac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$ **0.75 pt**

2. On considère l'événement B « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Calculer la probabilité $p(B)$ de l'événement B. **0.75 pt**

3. Un joueur mise 200 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on désigne par α le nombre de boules blanches contenues dans U_2.
Le joueur reçoit $10n(3-\alpha)$ francs.

a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 6.
Dans la suite, on considère $n > 6$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur. **0.5 pt**

b. Déterminer la loi de probabilité de X. **1.5 pts**

c. Calculer l'espérance mathématique de X **0.5 pt**

Exercice 2 (**5 pts**)

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :
$U_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et pour tout $n > 0$, $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

1- **a.** Soit f la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0.

b. Calculer U_1.

2- **a.** Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n > 1$, on a :
$\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ (1)
Déterminer alors la limite de (U_n).

3. Pour tout $n \geq 3$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

a. Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$
Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :
$nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, on a :
$(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2)

c. A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nU_n) est convergente et calculer sa limite.

Problème (11 pts)

Soit dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $Z_B = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ et $Z_C = 1$.

A/

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine f de P dans P qui laisse invariant les points A et B et transforme O en C. **1 pt**

2. Pour tout point M du plan, exprimer les coordonnées (x', y') de $f(M)$ en fonction des coordonnées (x, y) de M puis l'affixe Z' de $f(M)$ en fonction de l'affixe Z de M. **1 pt**

3. Déterminer l'image par f du cercle γ de centre C et de rayon 1. Soit γ' cette image. **0.5 pt**

B/

On appelle F l'application de P dans P qui à tout Point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = z^2 + 1$.

1- **a.** Déterminer les images par F des points A , B et O. **0.5 pt**

b. Déterminer les points invariants par F. **0.5 pt**

2- **a.** Démonter que tout point M de P, à l'exception d'un seul que l'on précisera, admet par F deux antécédents distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à O. **0.5 pt**

b. Soit M un point de P distinct de C et z_1 et z_2 les affixes respectives de m_1 et m_2.

Démontrer que :

***b*$_1$.** $Om_1^2 = Om_2^2 = CM$ où m_1 et m_2 sont les antécédents de M par F. **0.25 pt**

***b*$_2$.** $angz_1 = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $angz_2 = \frac{\alpha}{2} + \pi + 2k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$

où α est une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{CM})$. **0.5 pt**

c. On se propose de construire géométriquement m_1 et m_2.

Soit (D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\frac{\alpha}{2}$ soit une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \vec{u})$.

Soit (D') la perpendiculaire à (D) en O. Sur (D') de part et d'autre de O, on place les points N et Q tel que $OQ = 1$ et $ON = CM$.

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[QN]$. Démontrer que (Γ) coupe (D) en m_1 et m_2. **1 pt**

3. Déterminer $F(\gamma')$ **1 pt**

4- **a.** Pour tout point m de coordonnées (x, y), on note (X, Y) les coordonnées du point $M = F(m)$.

Exprimer X et Y en fonction de x et y. **0.25 pt**

b. Déterminer l'image par F de l'axe des abscisses puis de l'axe des ordonnées. **1 pt**

c. Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'image par F appartient à l'axe des abscisses. **0.75 pt**

5. (Δ) désigne la droite d'équation $y = 2$.

a. Démontrer que l'image de (Δ) par F est la courbe (C) d' equation $y^2 = 16(x + 3)$. **0.5 pt**

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe, sommet, foyer, directrice. **1 pt**

c. Construire (C) **0.75 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2013	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$. Montrer que les solutions sont conjugués deux à deux.

2. Écrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme forme d'un produit de deux trinômes de second degré à coefficients réels.

3. En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égal à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b)
On prend b égal à neuf ; écrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$

Exercice 2

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit u un nombre réel et f_u l'application de (P) dans (P) qui à tout point M de (P) de coordonnées (x, y) associé le point M' dont les coordonnées (x', y') sont :

$$\begin{cases} x' = x + 2u \\ y' = ux + y + u^2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f_u est bijective ; déterminer f_u^{-1}

2. Démontrer que la parabole Γ, d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ est globalement invariante par f_u.

3. On définit une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de point P de la façon suivante :
$M_1 = f_{\frac{1}{2}}(O)$, $M_2 = f_{\frac{1}{2^2}}(M_1)$, $\cdots$, $M_n = f_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1})$

- **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $M_n \in \Gamma$.
- **b.** Exprimer les coordonées (x_n, y_n) de M_n en fonction de n.
- **c.** Le point M_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position.
- **d.** Soit G_n l'isobarycentre des points M_1, M_2, $\cdots$, M_n. Exprimer en fonction de n les coordonnées (x_n, y_n) de G_n.
- **e.** Le point G_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position.

4. Soit I_n le point d'intersection des tangentes à Γ aux points M_n et M_{n+1}.

- **a.** Exprimer, en fonction de n, les coordonnées (X'_n, Y'_n) de I_n.
- **b.** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^{2n+1}} = \dfrac{2}{9}(X'_n - 2)^2$.
- **c.** Montrer que, pour tout entier non nul n, le point I_n appartient à une parabole Γ'
- **d.** Déterminer les éléments caractéristiques de Γ'

Problème

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x}) \ln x \ \forall x \in]0, 1] \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Partie I

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$

2. Démontrer que g est continue sur $[0, 1]$

3. Étudier la dérivabilité de g sur $[0, 1]$ et montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}(x \ln x + \mathrm{e}^x - 1)$

4. Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x\ln x + \mathrm{e}^x - 1$

- **a.** Étudier le sens de variation de f' et démontrer que f' s'annule une seule fois sur $]0,1]$ en un point x_0 (on ne calculera pas x_0)
- **b.** En déduire le signe de $f'(x)$ puis démontrer que f s'annule une seule fois sur $]x_0,1]$ pour une valeur x_1 (on ne calculera pas x_1)

5. Dresser le tableau de variation de g

6. Construire la courbe de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $10cm$) ; on prendra $x_1 = 0.31$

Partie II

Soit n un entier naturel, on définit sur $[0,1]$, les fonctions φ_i $i \in \mathbb{N}$ par :

$$\varphi_0(x) = 1\,;\ \varphi_1(x) = 1 - x\,;\ \varphi_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} \text{ et pour tout entier } n \text{ strictement supérieur à } 2$$

$$\varphi_n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $[0,1]$ on a : $\varphi_n'(x) = -\varphi_{n-1}(x)$

2. On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout x de $[0,1]$;
$\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$

- **a.** Soit Φ et Ψ deux fonctions continues sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1]$ telles que $\Phi(0) = \Psi(0)$
  Démontrer que si pour tout réel x de $]0;1]$, $\Phi'(x) \leq \Psi'(x)$ alors pour tout x de $[0;1]$, $\Phi(x) \leq \Psi(x)$
- **b.** Démontrer par récurrence et en utilisant deux fois la question **2-a.** que pour tout x de $[0;1]$ et pour tout entier naturel, $\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$
- **c.** Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0,1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1}

Partie III

On considère Δ l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ vérifiant $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) \leq y \leq 0$. On se propose de déterminer l'aire de Δ

1. Soit n un entier naturel et α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$. Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties.

2. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha)$

3. En utilisant la question **II/ 2-c.** donner un encadrement de $\displaystyle\int_\alpha^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ au moyen des intégrales de type $I_n(\alpha)$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

4. Donner un encadrement de l'aire de Δ en cm^2 d'amplitude 10^{-1} près.

Indication : Soit $\epsilon \in]\alpha, b]$ si $\lim\limits_{\epsilon \to \alpha} \displaystyle\int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{\epsilon \to \alpha} \displaystyle\int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2014	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3 , et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4.

On lance simultanément les deux dés, on désigne par « a » le numéro apparu sur la face supérieure du dé cubique et «b » celui sur la face cachée du dé tétraédrique.

On considère l'équation différentielle (E) :$y'' + ay' + by = 0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur $a^2 - 4b$.

1- **a.** Déterminer la loi de probabilité de X. **1 pt**

b. En déduire la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale. **0.5 pt**

2. On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E) admet une solution générale, une fonction non sinusoïdale.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de l'événement $\{(Y \geq 1)\}$ soit supérieure ou égale à $0,999$. **0.5 pt**

3. On pose $(a, b) = (3; 2)$ et on considère l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Vérifier que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$ est solution de (E). **0.5 pt**

b. Résoudre l'équation $(E_{(3;2)})$: $y'' + 3y' + 2y = 0$. **0.5 pt**

c. Soit g une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_{(3;2)})$. **0.5 pt**

d. En déduire toutes les solutions de l'équation (E'). **0.5 pt**

Exercice 2 (**4.5 pts**)

Le plan complexe (P) est rapporte à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

Soit les points A, A' et F d'affixes respectives : $Z_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$; $Z_{A'} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$ et $Z_F = 1$. On désigne par (E) l'ensemble des points M de (P) dont l'affixe Z vérifie la relation :$|Z - i\overline{Z} + 2 - 2i| = 4|Z - 1|$ où $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

1. On considère l' application g du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe $Z = x + iy$ associe le point H d'affixe $Z' = x' + iy'$ telle que $Z' = \dfrac{1}{2}(Z + i\overline{Z}) + i - 1$ avec x, y, x', y' des réels.

a. Exprimer les coordonnées (x', y') du point H en fonction des coordonnées (x, y) du point M. **0.25 pt**

b. Soit (D) l'ensemble des points invariants par g. Déterminer une equation cartésienne de (D). **0.25 pt**

c. Démontrer que pour tout point M de (P) d'image H par g on a : $H \in (D)$ et que (MH) est perpendiculaire à (D). **0.5 pt**

d. Déduire de ce qui précède, la nature et les éléments caractéristiques de l'application g. **0.25 pt**

2- **a.** Démontrer que pour tout complexe Z on a : $Z - Z' = \dfrac{1}{2}(Z - i\overline{Z} + 2 - 2i)$. **0.25 pt**

b. Soit M un point de (E) et H son image par g.
Déterminer une relation entre MF et MH. **0.25 pt**

En déduire que (E) est une ellipse de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. **0.25 pt**

3- **a.** Préciser l'axe focal (Δ) de (E) et vérifier que les points A et A' sont les sommets situes sur (Δ). **1 pt**

b. Construire (D), (Δ) , A, A' et F. **0.5 pt**

c. Après avoir détermine géométriquement les autres sommets B et B', construire (E). **1 pt**

Problème (**11.5 pts**)

Le plan est rapport au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie A

A tout réel α strictement positif, on associe la fonction numérique f_α, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$f_\alpha(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha} + 1 - x$

On désigne par C_α sa courbe représentative.

1- **a.** Montrer que f_α est dérivable sur son ensemble de définition et que, sa dérivée, f'_α, est telle que $f'_\alpha(x) = \dfrac{N(x)}{x^{\alpha+1}}$ où N est une fonction que l'on déterminera. **0.5 pt**

b. Étudier le sens de variation de N, puis calculer $N(1)$ **0.75 pt**

c. En déduire le sens de variation de f_α, et les coordonnées du point de C_α, d'ordonnée maximale. **0.5 pt**

2. On note A_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $C_{1/2}$, les droites d'équation : $x = \lambda$ et $x = 1$, $\lambda \in]0, 1[$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_λ **0.5 pt**

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A_\lambda$ **0.25 pt**

Partie B

Soit g, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1. Étudier les variations de g puis représenter sa courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **1.75 pts**

2. On pose : $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$

a. Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan. **0.25 pt**

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application R du plan (P) dans lui- même qui transforme le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **0.75 pt**

c. Déterminer les images (D'_1) et (D'_2) respectives des droites d'équation : $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$ par R. **1 pt**

3. Soit S la symétrie orthogonale d'axe la droite Δ passant par O et dirigée par $\vec{u}$ et on pose $H = S \circ R$.

a. Montrer que l'écriture complexe associée à H est : $z' = \mathrm{e}^{i\pi/4}\,\overline{z}$ **0.75 pt**

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $C_1 = R(C)$ puis $C_2 = H(C)$. **1 pt**

c. Vérifier que (D'_1) et (D'_2) sont orthogonales à (Δ) puis justifier que l'aire du domaine (Γ) limite par les courbes C_1 , C_2 , (D') et (D'_2) est en unité d'aire : $2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Que vaut cette aire ? **1 pt**

Partie C

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 10, on pose :

$U_n = g(10) + g(11) + \cdots + g(n)$ et $V_n = U_n - \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 10.

a. Démontrer que $g(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq g(k)$ **0.5 pt**

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 10, $U_{n+1} - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq U_n$ **0.5 pt**

c. En utilisant le sens de variation de (U_n), montrer que $U_n - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq U_n$ **0.5 pt**

2- **a.** Montrer que (V_n) est bornée. **0.25 pt**

b. En utilisant **1-a**, démontrer que (V_n) est croissante. En déduire que (V_n) converge. **0.75 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2015	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**5 pts**)

On place dans un sac six jetons indiscernables au toucher, marqués : -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3

On tire un jeton du sac, on note «a» son numéro. On le remet dans le sac, puis on tire un deuxième jeton et on note «b» son numéro.

Au couple (a,b) obtenu, on associe l'ensemble $(E_{a,b})$ des points M dont les coordonnées (x,y) dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ vérifient l'équation : $bx^2+ay^2-bx+ay+\dfrac{a+b-4ab^2}{4}=0$

1. Démontrer que pour tout couple (a,b), l'ensemble $(E_{a,b})$ est une conique à centre.
Préciser les coordonnées du centre. **0.5 pt**

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
C : « $(E_{a,b})$ est un cercle »
E : « $(E_{a,b})$ est une ellipse non réduite à un cercle »
H : « $(E_{a,b})$ est une hyperbole »
H' « $(E_{a,b})$ est une hyperbole équilatère » **1.75 pts**

3. On donne $a=3$ et $b=2$.
Déterminer les éléments géométriques de $(E_{3,2})$: axe focal, foyers, sommets. **0.75 pt**

4. On donne $a=-3$ et $b=2$.
Déterminer les éléments géométriques de $(E_{-3,2})$: axe focal, foyers, sommets. **0.75 pt**

5. Construire $(E_{3,2})$; $(E_{-3,2})$ et $(E_{2,2})$ dans un même repère. **1.25 pts**

Exercice 2 (**3 pts**)

dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $z_1=i\overline{z}+a+ib$; où a et b sont deux réels quelconques donnés. On appelle A le point de coordonnées (a,b).

1. Monter que f est une isométrie. **0.25 pt**

2. Comment faut-il choisir le point A pour que f soit une symétrie orthogonale. Donner la caractéristique de cette symétrie. **1 pt**

3. On choisit A de telle sorte que f ne soit pas une symétrie orthogonale.

a. Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments qui définissent f. **1 pt**

b. On pose $f^1=f$ et pour tout entier naturel $n\geq 2$, $f^n=f^{n-1}\circ f$
Montrer que pour tout entier naturel p non nul, f^{2p} est une translation dont on donnera le vecteur.
Quelle est la nature de f^{2p+1} ? **0.75 pt**

Problème (**12 pts**)

I/ Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x+\sin(x)}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Déterminer les nombres réels x de $[0,+\infty[$ tels que $f(x)=-1$. **0.25 pt**

2- **a.** Prouver que pour tout réel x positif non nul, $\dfrac{-x-1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{1-x}{x}$
En déduire la limite de f en $+\infty$ **0.5 pt**

b. Déterminer les nombres réels x tels que $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ et ceux tels que $f(x)=\dfrac{-1-x}{x}$. **0.5 pt**

c. En déduire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la position relative de la courbe représentative (C) de f et des courbes (γ_1) et (γ_2) représentatives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{-x-1}{x}$ et $\dfrac{1-x}{x}$ respectivement. **0.25 pt**

3. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle. **0.5 pt**

4- **a.** Étudier le signe de $\tan(x)-x$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire le signe de f' sur cet intervalle. **0.5 pt**

b. Prouver que pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe un élément et un seul x_k de $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $\tan(x_k)=x_k$; montrer que $x_k > k\pi$ **0.5 pt**

c. En déduire le signe de f' sur $]0,x_1[$ puis sur chaque intervalle $]x_k;x_{k+1}[$, où $k=1,2\ldots$
(On distinguera k pair et k impair). **1.25 pts**

5- **a.** Prouver que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $0 \leq x-\sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\sin(x)-x+\dfrac{x^3}{6}$. On calculera les dérivées φ' ,φ'' et φ''' et on déduira le signe de φ) **1 pt**

b. Prouver que f est dérivable en 0. **0.5 pt**

6- **a.** Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,3\pi]$. **0.5 pt**

b. Tracer sur une même figure les courbes (γ_1), (γ_2) et (C) en se limitant à l'intervalle $[0,3\pi]$
On utilisera les valeurs approchées $x_1 \simeq 4.49$ et $x_2 \simeq 7.73$ **1.75 pts**
(Unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 6 cm sur l'axe des ordonnées).

II/ On considère l'intégrale $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)+1)\,\mathrm{d}x$

1. Pour tout u de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, on pose : $F(u)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et pour tout x de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on pose :

$G(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$

Prouver que pour tout élément x de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$; $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$.

En déduire que $J=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ **1 pt**

2. Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $U_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ si $n\geq 1$

a. Prouver que, pour tout $n\geq 1$, $J=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}+r_n$, où $r_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$. **0.75 pt**

b. Établir que, pour tout élément t de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$; $\dfrac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\leq 2t^n$

En déduire une majoration de r_n. **0.75 pt**

c. Montrer que $J=\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0+U_1+\cdots+U_{n-1})$. **0.25 pt**

3- **a.** Calculer U_0 et U_1. **0.5 pt**

b. Établir que, pour tout entier $n\geq 2$, $U_n=\dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)U_{n-2}\right]$ **0.5 pt**

4. A partir des résultats obtenus au **II/ 2.** et **II/ 3.**, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul). **0.25 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2016	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

1. En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que :

$p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A) - p(A/B).p(B)}{1 - p(B)}$ **1.25 pts**

2. Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes : 30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragés.

a. En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé. (Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage). **1.25 pts**

b. Quelle est la plus petite valeur b pour que p soit inférieure ou égale à 0.1 ? **0.25 pt**

c. A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $\dfrac{1}{3}$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.

Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ? **1.25 pts**

Exercice 2 (**5.5 pts**)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1- a. Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ **0.5 pt**

b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul. **0.5 pt**

c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ est nul. **0.5 pt**

d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE). **0.5 pt**

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1- a.** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment $[AG]$. **0.75 pt**

3. Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Écrire une équation du plan (BDE). **0.5 pt**

b. Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE). **0.5 pt**

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite (Δ) avec le plan (BDE). **0.5 pt**

d. Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$ **0.5 pt**

e. En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre $HBDE$. **0.75 pt**

Rappel : Volume du tétraèdre : $\dfrac{1}{3}bh$ où b est la surface de base et h la hauteur.

Problème (**10.5 pts**)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2 cm.

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \mathrm{e}^x \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{-x^2 \ln(x)}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A/

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **0.75 pt**

2. Soit k la fonction numérique définie par : $k(x) = (x+2)\ln x + x + 1$.

a. Étudier le sens de variation de la dérivée k' de k. **0.75 pt**

b. $\boldsymbol{b_1}$. Montrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α **0.5 pt**

$\boldsymbol{b_2}$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

En déduire le signe de $k(x)$ suivant les valeurs de x. **0.5 pt**

3. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

(On pourra utiliser les questions **1.** et **2.**). **0.75 pt**

4- **a.** Étudier les branches infinies de (C). **0.5 pt**

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$. **0.25 pt**

c. Tracer (C) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1.5 pts**

5. Soit F l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

a. Montrer que F est une bijection de P et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe à préciser. **0.5 pt**

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par F. **0.25 pt**

c. Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$ quand M décrit P. **0.25 pt**

d. Montrer que F est une affinité que l'on caractérisera. **0.5 pt**

e. Soit M un point de (C), déterminer les équations de l'ensemble (C') décrit par son image M' par l'application F. **0.5 pt**

B/ On pose sur $[0,1]$, $\begin{cases} g_n(t) = -t^n \ln t,\ t \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^* \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

$J_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$

1- **a.** Montrer que J_n existe. **0.5 pt**

b. En admettant que $J_n = \lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_x^1 g_n(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in]0,1[$, calculer J_n. **0.5 pt**

2. Soit t un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$

a. Calculer le produit : $P_n(t) = (1+t)(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1})$ **0.25 pt**

b. Montrer que $\forall\ t \in [0,1]$, $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) + \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) + (-1)^n \dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} = f(t)$

Puis que : $J = J_2 - J_3 + J_4 - \cdots + (-1)^{n-1}J_{n+1} + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$ **0.75 pt**

c. En s'aidant d'une majoration de $\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+3)^2}$ **0.5 pt**

3. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose : $S_n = \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+2)^2}$.

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = J$. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2017	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

Le plan P est muni du repère orthonormé (O, I, J), α étant un nombre réel. Soit f_α l'application de P dans P transformant I en $A\begin{pmatrix}\alpha+1\\ \alpha+2\end{pmatrix}$, J en $B\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$ et laissant invariant O.

1- **a.** Montrer que f_α est une application affine. **0.25 pt**

b. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective. **0.25 pt**

On note l_α son application linéaire associée et on pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

c. Déterminer $l_\alpha(\vec{i})$ et $l_\alpha(\vec{j})$. En déduire l'expression analytique de f_α dans le repère (O, I, J). **1 pt**

2. Déterminer α pour que l'on ait $f_\alpha \circ f_\alpha = Id_P$ où Id_P est l'application identique du plan. **0.5 pt**

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_α. (On discutera suivant les valeurs de α). **0.5 pt**

4. Quelle est la nature géométrique de f_1 ? ($\alpha = 1$). Quels sont ses éléments caractéristiques ? **0.5 pt**

5. Étude de f_0 ($\alpha = 0$)

a. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P. **0.25 pt**

b. Soit s la symétrie de centre O. Montrer que $f_0 = p \circ s$ où p est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques. **0.75 pt**

Exercice 2 (**4 pts**)

Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont α noires, β blanches et γ rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».

1. Calculer en fonction de α, β et γ la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'événement E. **0.5 pt**

2. On se propose de déterminer α, β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A(30; 0; 0)$; $B(0; 30; 0)$ et $C(0; 0; 30)$. Soit le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathcal{E}$.

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$. **0.5 pt**

b. En déduire que M appartient au plan (ABC). **0.25 pt**

c. Démontrer que $870P(\alpha, \beta, \gamma) + 30 = OM^2$. **0.25 pt**

d. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Déterminer les coordonnées du point H. **0.5 pt**

e. En déduire les valeurs de α, β et γ qui rendent minimale $P(\alpha, \beta, \gamma)$, puis calculer la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondante. **0.5 pt**

3. Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit n et k deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.

Un joueur mise n francs et tire simultanément deux boules du sac.

– S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.

– S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.

– S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit $(k-1)$ fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{9}{29}$. **0.25 pt**

b. Déterminer la loi de probabilité de X. **0.75 pt**

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de k et n. **0.5 pt**

Problème (**12 pts**)

A/ Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

1. Préciser l'ensemble de définition de f. **0.25 pt**

2. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. **1 pt**

3. Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **0.5 pt**

B/ On considère l'application T_k du plan dans lui-même d'expression analytique :

$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases}$ où k est un réel.

1. T_k est-elle une transformation du plan ? **0.25 pt**

2. En discutant suivant les valeurs de k, déterminer l'ensemble des points invariants par T_k. **0.5 pt**

3. Déterminer l'écriture complexe associée à T_k. **0.5 pt**

4. Caractériser $T_k \circ T_k$ suivant les valeurs de k. **1 pt**

5- **a.** Caractériser T_0 puis déterminer l'équation de la courbe (Γ) image de (C) par T_0. **0.75 pt**

b. Tracer (Γ) dans le même repère que (C). **0.5 pt**

C/ Pour tout réel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$, on pose : $g(x) = f(\cos x)$

1. Montrer que g est une primitive sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ de $x \longmapsto \dfrac{C}{\sin(x)}$ où C est un réel à déterminer. **0.5 pt**

2. $\forall\, a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-\cos^{2n} t}{\sin t}\, \mathrm{d}t$

Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \dfrac{\cos^{2n} a}{-\sin a}\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ **1 pt**

3. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ par :

$F_n(t) = \cos t + \dfrac{\cos^3 t}{3} + \dfrac{\cos^5 t}{5} + \cdots + \dfrac{\cos^{2n-1} t}{2n-1}$.

a. Montrer que F_n est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$ et que $\forall\, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $F_n'(t) = \dfrac{-1 + \cos^{2n} t}{\sin t}$.

Calculer $F_n\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ **1 pt**

b. En intégrant la relation précédente entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et a montrer que $F_n(a) = \dfrac{-g(a)}{C} - I_n(a)$, où C est le réel déterminé dans la question **C. 1**. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a)$ **0.75 pt**

D/ Dans cette partie $x \in]0; 1[\,; t \in]0, x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1 - x^{2n}}{1 - x}$ (1)

et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^{2n-1} x^{2n}}{1 + x}$ (2) **0.5 pt**

2- **a.** Démontrer que : $1 \leq \dfrac{1}{1-t^2} \leq \dfrac{1}{1-x^2}$.

En déduire que : $0 < \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} < \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1-t^2}\, \mathrm{d}t < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$ **1 pt**

b. Utiliser les relations (1) et (2) pour montrer que : $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2n} + \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}\, \mathrm{d}t$

et $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ **1 pt**

c. En déduire que : $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ **0.5 pt**

3. Des questions **D.1** et **2.**, trouver deux fonctions U et V sans intégrale telles que : $U(x) < f(x) < V(x)$. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2018	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

I- Une urne contient quatre jetons numérotés 1 ; 2 ; 3 et 4.
On tire au hasard un premier jeton de l'urne. On note a le numéro porté par ce jeton puis on le remet dans l'urne. On tire un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro qu'il porte.
Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On y considère les vecteurs $\vec{u}(a,-1,1-a)$ et $\vec{v}(b-5,1,4-b)$.

1- **a.** Montrer que $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ est égal à $(a+b-5)\vec{w}$ où $\vec{w}$ est un vecteur à déterminer. **0.5 pt**

b. Trouver une relation entre a et b pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. **0.25 pt**

2- **a.** Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, déterminer l'équation cartésienne du plan Q passant par $A(-2,1,3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. **0.5 pt**

b. Montrer que la probabilité pour que ces vecteurs soient colinéaires est 1/4. **0.5 pt**

II- Deux joueurs A et B jouent à un jeu constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : Au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage décrit en **I-**. Si A obtient des vecteurs colinéaires et B non, alors A gagne la partie et le jeu s'arrête. Si non, si B obtient des vecteurs colinéaires et A non, B gagne la partie et le jeu s'arrête. Dans tous les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie, le jeu continue.
Soit A_n l'événement : « A gagne la nième partie »
B_n l'événement : « B gagne la nième partie »
C_n l'événement : « le jeu continue ».

1. Calculer les probabilités $p(A_1)$; $p(B_1)$; $p(C_1)$. **0.75 pt**

2. Exprimer $p(C_n)$ en fonction de $p(C_{n-1})$ puis en fonction de n. **0.5 pt**

3- **a.** Exprimer $p(A_n)$ en fonction de $p(C_{n-1})$ puis en fonction de n. **0.5 pt**

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)$ **0.25 pt**

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p(n_0) \leq 10^{-2}$ **0.25 pt**

Exercice 2 (**6 pts**)

I- Soit la fonction numérique f définie $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- **a.** Démontrer que : $\forall\, x\in[0,+\infty[,\ \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x+1}\leq f(x)\leq \mathrm{e}^x-1$ **0.5 pt**

b. En déduire la limite de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de (C) ? **0.5 pt**

2- **a.** Démontrer que : $\forall\, x\in\,]-1,0]$, $\ln(1+x)\leq f(x)\leq \mathrm{e}^x\ln(1+x)$ **0.5 pt**

b. En déduire la limite de f en -1. **0.25 pt**

3. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation. **0.75 pt**

4- **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0. **0.25 pt**

b. Démontrer que : $\forall\, t>-1$, $\mathrm{e}^t-t-1\geq 0$ **0.5 pt**

c. En déduire la position de (C) par rapport à (T) puis tracer (C) dans le repère **1.25 pts**

II- Soit la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

1- **a.** Étudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$. **0.5 pt**

b. Puis en déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n+1}\leq\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+2}$ **0.5 pt**

2- **a.** Montrer que l'équation $g(x) = \int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ admet dans $[n; n+1]$ une unique solution α_n. **0.25 pt**

b. Montrer que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)_{n>0}$ est une suite convergente dont on précisera la limite. **0.25 pt**

Problème (**10 pts**)

A/ Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $A(1-\lambda; -\lambda)$ et $B(\lambda; 1+\lambda)$ où λ est un réel non nul. Soit f_λ l'application affine du plan telle que : $f_\lambda(O) = O$; $f_\lambda(I) = A$ et $f_\lambda(J) = B$

1- **a.** Montrer que f_λ est une transformation affine. **0.5 pt**

b. Soit $g_\lambda : M(x; y) \longmapsto M'(x'; y')$ l'application affine d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = (1-\lambda)x + \lambda y \\ y' = -\lambda x + (1+\lambda)y \end{cases}$$

Montrer que les applications g_λ et f_λ sont égales. **0.5 pt**

c. Comparer $f_{-\lambda}$ et l'application réciproque de f_λ notée f_λ^{-1} **0.75 pt**

2. On considère l'application θ_λ de P dans $\mathbb{R}$ qui, au point $M(x, y)$ associe le réel $(1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2$.

a. Démontrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\theta_{-\lambda} \circ f_\lambda = \theta_\lambda$. **0.5 pt**

b. En déduire l'application $\theta_\lambda \circ f_{-\lambda}$ **0.25 pt**

3- **a.** On note $C_{(\lambda,k)}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\theta_\lambda(M) = k$, $k \in \mathbb{R}$
Démontrer que $f_\lambda(C_{(\lambda,k)}) = C_{(-\lambda,k)}$ **0.5 pt**

b. Représenter sur le même graphique $C_{\left(-\frac{5}{13}, \frac{72}{13}\right)}$ et sa transformée par $f_{-\frac{5}{13}}$. **1 pt**

c. a étant un réel strictement positif, déterminer suivant les valeurs de a, la nature de $C_{(\lambda,a)}$ **0.5 pt**

4. A chaque réel λ, on associe la droite (D_λ) d'équation $(1-\lambda)x + (1+\lambda)y = 0$.
Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la droite (D_λ) n'a jamais la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. **0.25 pt**

5. Soit S_λ la symétrie d'axe (D_λ) et de direction $\vec{u}$ qui, à tout point $M(x; y)$ on associe le point $M'(x'; y')$

a. Montrer que l'expression analytique de S_λ est : $\begin{cases} x' = \lambda x - (1+\lambda)y \\ y' = (-1+\lambda)x - \lambda y \end{cases}$ **0.5 pt**

b. Montrer que $C_{(\lambda,k)}$ est globalement invariant par S_λ. **0.5 pt**

c. Donner les éléments caractéristiques de $f_\lambda \circ S_\lambda$ **0.5 pt**

d. On note $S = f_\lambda \circ S_\lambda$ montrer que l'écriture complexe associée à S est : $z \longmapsto -i\overline{z}$. **0.25 pt**

B/ Soit f l'application du plan dont l'écriture complexe est :

$z \longmapsto \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.

1- **a.** Montrer que f est involutive **0.5 pt**

b. Montrer que $f \circ S$ est une rotation dont on donnera les éléments caractéristiques où S est l'application définie en **A**/ **5-c.** **0.5 pt**

2. On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' tel que :

$$z'' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \sqrt{3} - 3i$$

a. Montrer que $g = T \circ f$ où T est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{v}$ **0.5 pt**

b. Déterminer l'écriture complexe associée à $f \circ T$; que peut-on dire de $T \circ f$ et $f \circ T$. **0.5 pt**

3. $\forall\ n\ \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on note $g \circ g \circ \cdots \circ g = g^n$ composée de g n fois

a. Donner la nature des applications g^{2n} et g^{2n+1} puis caractériser g^{2n} **1 pt**

b. Mettre sous forme trigonométrique l'affixe z_0 de $g^{2n}(O)$ **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2019	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**4 pts**)

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}+^*$. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur $\mathbb{R}+^*$ par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ puis calculer sa fonction dérivée F'.

2- **a.** Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas.

b. Définir la fonction F pour $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \longmapsto \cos t$

3- **a.** Déterminer les signes de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b. Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée.

c. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}+^*$, $\sin x \leq x$.

d. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}+^*$, $F(x) + \ln 3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t$

et que $0 \leq F(x) + 3 \leq 2x^2$. En déduire la limite de F à droite en 0.

4- **a.** Établir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que

$\forall\, x \in \mathbb{R}+^*, \left|F(x) - \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$

b. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}+^*, F'(x) = \frac{4\cos(x)\sin^2(x)}{x}$

5. Soit F_1 la restriction de F à $[0, 2\pi]$

a. Dresser le tableau de variation de F_1.

b. Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 2 (**4 pts**)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1. Déterminer les affixes des points A_1 ; A'_1 ; A_2 en A'_2.

2- **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b. Établir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

d. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}.

3- **a.** Établir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1}A_n$.

b. Déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots A_{n-1}A_n$

c. Calculer la limite de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème (**12 pts**)

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et (D') non coplanaires et orthogonales.

A/

1- **a.** Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{E}$ laisse invariante une droite donnée.

b. Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D').

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2- **a.** Déterminer l'intersection des plans (P) et (P').

b. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.
Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

3. Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite (AB) comme axe de symétrie.

4. Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

B/

La droite (D) passe par le point A de coordonnées $(0, 0, 1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
La droite (D') passant par B de coordonnées $(0, 0, -1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$

1- **a.** Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point O appartient à (Γ).

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ y = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) et Q un point de (D).
Exprimer MQ^2. Soit la fonction : $t \longmapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D)

c. Calculer de même la distance du point M à la droite (D').

d. En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a :$xy + 2z = 0$.

2. Déduire de cette relation :

a. Que les intersections de (Γ) avec le plan orthogonal à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Précise le cas d'exception.

b. La nature des intersections de (Γ) avec les plan orthogonaux à l'axe $(O, \vec{i})$ ou à l'axe $(O, \vec{j})$

C/

Soit $M(t)$ le point de (Γ) d'abscisses $x(t)$ et d'ordonnées $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
avec $x(t) = 4\cos t$ et $y(t) = \sin(2t)$
Lorsque t varie sur $\mathbb{R}$, le point M décrit une courbe (C) incluse dans (Γ).

1- **a.** Montrer que la courbe (C_z) projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $z = 0$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b. Étudier les positions des points $M(t)$ et $M(\pi - t)$

c. Construire (C_z). On prendra 2 cm comme unité.

2. On désigne par (C_x) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $x = 0$ et par (C_y) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $y = 0$
Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.
Une étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2020	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3 pts**)

Soit m un entier relatif. On considère x et y les entiers relatifs et l'équation (E_m) :

$$24x + 9y = m$$

1. Préciser la condition nécessaire et suffisante sur m pour que l'équation (E_m) ait des solutions. **0.5 pt**

2. On suppose $m = 3$. Résoudre l'équation (E_m). **0.75 pt**

3. On suppose $m = 3q$ $(q \in \mathbb{Z})$
Trouver en fonction de q toutes les solutions de l'équation (E_m). **0.75 pt**

4. En utilisant la question **3.**, déterminer tous les entiers relatifs n solutions du système de congruence.
$(S) : \begin{cases} n \equiv 20[24] \\ n \equiv 5[9] \end{cases}$ **1 pt**

Exercice 2 (**4 pts**)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit I et J les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On note K le point du plan tel que OIKJ soit un carré , M un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre I qui transforme O en M. On note m, l'affixe du point M, J' et M' les images respectives de J et de M par s.

1. Montrer $|m-1| = |m-i|$ et que les complexes $(1+im)(1+m)$ et $m(1-i)$ sont des réels non nuls. (On pourra utiliser $m = t + it$ où t est un réel non nul) **1 pt**

2- **a.** Déterminer le rapport de s. **0.25 pt**

b. Exprimer $M'J'$ en fonction de m. Montrer que $M'I = |m-1|^2$ **0.5 pt**

c. En déduire que $M'I = M'J'$. **0.25 pt**

3- **a.** Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1-m)z + m$.
En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{JJ'}$ et $\overrightarrow{M'J'}$ ont pour affixes respectives
$m(1-i)$ et $i(1+im)(1-m)$. **0.75 pt**

b. Prouver alors que J' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (JK) **0.25 pt**

c. Montrer que dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le point M' appartient à la courbe (P) d'équation $y = x - \dfrac{x^2}{2}$ lorsque le point M décrit la droite (OK) privée du point O. **0.25 pt**

4. Placer toute les données précédentes sur la figure et tracer la courbe (P). **0.75 pt**

Problème (**13 pts**)

A/

n désigne un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n-2\}$ par :

$f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n+2} - \mathrm{e}^{-x-1}$

1. Déterminer le sens de variations de f_n puis dresser son tableau de variation. **1.25 pt**

2- **a.** Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$.
En déduire le signe de $f_n(n+1)$ **0.7 pt**

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dont une solution positive notée u_n appartient à $[n; n+1]$ **0.75 pt**

3. Calculer les limites u_n et $\dfrac{u_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$. **0.5 pt**

B/ Dans cette partie, on prend $n = 0$ et on note $f_0 = f$ et $u_0 = u$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse -1. **0.5 pt**

2- **a.** Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u. **0.25 pt**

b. En déduire la solution de l'équation $x \in [0, +\infty[$, $f(x-1) = 0$ en fonction de u. **0.25 pt**

3. Tracer (T) et (C) sur la même figure. **0.75 pt**

4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (T), (C) et la droite d'équation $x = 0$. **0.75 pt**

C/ On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et (γ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \ln x$

1. Dessiner (Γ) et (γ) sur la figure précédente. **0.5 pt**

2. Démontrer qu'il existe un unique point M_0 appartenant à (γ) tel que la tangente à (γ) en ce point passe par O. Donner les coordonnées de M_0.
En déduire le nombre de tangente de (Γ) passant par O. **0.5 pt**

3. Soit (T_a) la tangente à (Γ) au point A d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$) ; (D_λ) la tangente à (γ) au point K d'abscisse λ ($\lambda > 0$)

a. Déterminer une équation de (T_a) et une équation de (D_λ) **0.5 pt**

b. Déterminer λ en fonction de a pour que les droites (T_a) et (D_λ) soient parallèles. **0.25 pt**
On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B est le point de (γ) d'abscisse b et (D_b) la tangente correspondante.

c. (T_{-1}) et (D_b) peuvent-elles être confondues ?
Monter que (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1}$ **1 pt**

4. Montrer que $f(x-1) = 0$ si et seulement si $\dfrac{x-1}{x+1}\,\mathrm{e}^x = 1$ **0.25 pt**

5. On pose $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\,\mathrm{e}^x$

a. Démontrer que l'équation, $x \in [0;+\infty[$, $g(x) = 1$ admet une unique solution μ dans $[1.5; 1.6]$
Exprimer μ en fonction de u. **1 pt**

b. **i.** Pour tout réel x, différent de 1 et de -1, calculer le produit $g(x) \times g(-x)$ **0.25 pt**

ii. Déduire des questions précédentes que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$ admet deux solutions opposées. **0.25 pt**

iii. Déterminer les tangentes communes aux courbes (Γ) et (γ). **0.5 pt**

iv. Tracer ces tangentes dans le repère précédent. On prendra $\mu = 1.55$. **0.5 pt**

6. Soit A le point d'abscisse μ de la courbe (Γ), (T_μ) est donc la tangente à la courbe (Γ) au point A et tangente à la courbe (γ) au point B d'abscisse $\dfrac{\mu-1}{\mu+1}$

a. Donner les ordonnées des points A et B. **0.5 pt**

b. En utilisant la **C/ 3-c.**, montrer que (T_μ) et $(T_{-\mu})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. **0.5 pt**

c. En déduire les coordonnées des points de contact de (Γ) et (γ) avec $(T_{-\mu})$. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2021	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (**3 pts**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe $z = x + iy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}$), on associe le point P d'affixe $z - 1$ et le point Q d'affixe z^2.

1. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels P et Q sont confondus. **0.5 pt**

2. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que les trois points distincts M, P et Q soient alignés. **0.5 pt**

3. Prouver que l'ensemble (F) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient orthogonaux est d'équation $x^2 - y^2 - x + 1 = 0$ **0.5 pt**

4. Après avoir donné les éléments caractéristiques de (F), représenter (F) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : $2cm$) **1.5 pts**

Exercice 2 (**4 pts**)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-x} - \ln x$

1- **a.** Étudier le sens de variation de f . **0.5 pt**

b. Calculer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0. **0.25 pt**

c. Pour $x \in]0; 1[$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \mathrm{e}$ **0.75 pt**

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$

a. Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$ **0.5 pt**

b. En déduire que :

$S_n - \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq S_n - \dfrac{1}{n}$ puis $F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **0.5 pt**

3- **a.** Déduire des questions précédentes que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite. **0.25 pt**

b. Établir les égalités : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{(1-\frac{1}{n})} = \dfrac{e-1}{n\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right]}$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ **0.5 pt**

c. Utiliser ces résultats pour montrer que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) = -1$ et en déduire la limite de $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ **0.75 pt**

Problème (**13 pts**)

A- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. a et b sont deux nombres réels donnés, T est l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ avec : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ax + by + a \end{cases}$

1. Déterminer l'expression analytique de $T \circ T$ **0.25 pt**

2- **a.** Donner la nature et les éléments caractéristiques de T dans les cas particuliers suivants : **0.5 pt**

i. $(a; b) = (0; -1)$.

ii. $b = 0$ et $a \neq 0$.

b. Montrer que si $a = 0$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ alors T est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques. **0.5 pt**

3- **a.** A quelle condition doivent satisfaire les réels a et b pour que T soit involutive ? **0.5 pt**

b. Déterminer l'ensemble (J) des points $\mathcal{P}$ invariants par T . Déterminer la nature de (J) suivants les valeurs de a et b. **0.75 pt**

c. Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T lorsque $b = -1$? **0.5 pt**

4. On suppose que les réels a et b sont tels que T est bijective et que l'ensemble (J) des points invariants est une droite. Soit M_0 un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (J) et M un point de $\mathcal{P}$ distinct de M_0.

a. Montrer que les droites (J), (M_0M) et $(M_0'M')$ sont concourantes ou parallèles (On distinguera les cas où (M_0M) et (J) se coupent ; (M_0M) et (J) sont parallèles, (M_0M) est parallèle à l'axe (Oy)). **1 pt**

b. Pour tout point M du plan, en déduire une construction géométrique simple de M' connaissant (J), M_0 et M_0'. (On suppose d'abord (M_0M) n'est pas parallèle à (Oy)). **0.5 pt**

5- **a.** Déterminer l'expression analytique de T sachant que $M_0(3,-2)$, $M_0'(3,1)$ et (J) est la droite d'équation $y = x + 1$. **0.5 pt**

b. Vérifier que dans ce cas T est bijective et construire géométriquement l'image M_1' du point $M_1(-1,2)$ puis l'antécédent de M_1 par T. **0.75 pt**

c. M étant un point quelconque de $\mathcal{P}$, H son projeté sur (J) parallèlement à (Oy). Vérifier que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de T. **0.5 pt**

B- On suppose les réels a et b donnés ; b étant différent de 0, et t la translation de vecteur $-\vec{i}$. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, (C) est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$

1. Montrer que si f est telle que $T(C) = t(C)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = ax + bf(x) + a$.
En déduire que si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée seconde f'' satisfait à la condition : $\forall n \in \mathbb{R}$, $f''(n) = b^n f''(0)$. **0.75 pt**

2. β désignant un réel positif non nul. Déterminer les fonctions de g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = g''(0)\,\mathrm{e}^{\beta x}$ puis $g(x+1)$. **0.5 pt**

3. Dans cette question, on suppose $b > 0$ et on se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable et satisfaisant à la condition :
(I) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = ax + bf(x) + a$ et $f''(x) = f''(0)\,\mathrm{e}^{x\ln b}$
En utilisant les résultats de la question **B-2.**, montrer que les fonctions f solutions sont telles que :

a. Si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{2}x^2 + \dfrac{a}{2}x + f(0)$ **0.5 pt**

b. Si $b \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{f''(0)}{(\ln b)^2}b^2 + \dfrac{a}{1-b}x - \dfrac{ab}{(1-b)^2}$ puis $f(x) = \dfrac{a}{1-b}x - \dfrac{ab}{(1-b)^2}(1-b^2) + f(0)b^2$. **0.75 pt**

4. Soit la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + 2\,\mathrm{e}^{x\ln(\frac{1}{2})}$

a. Montrer que f_1 satisfait à la condition (I) et préciser les valeurs de a et b. **0.5 pt**

b. Étudier les variations de f_1 puis tracer dans le repère $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ la courbe $\mathcal{T}_1$ de f_1 **1.5 pts**

C- a, b admet deux réels données, on définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme U_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = an + bU_n + a$.

1. Dans cette question on suppose $b \neq 0$. Montrer que :

a. Si $= 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}a$ **0.5 pt**

b. Si $b \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = b^n U_0 + a\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)b^k$ **0.5 pt**

2. Existe-t-il des valeurs de a et b (que l'on précisera s'il en existe) pour que la suite (U_n) soit :

a. constante ? **0.25 pt**

b. une suite arithmétique non constante ? **0.25 pt**

c. une suite géométrique non constante ? **0.25 pt**

3. Comment faut-il choisir a, b et U_0 pour que la suite (U_n) soit convergente ?
Calculer alors sa limite. **0.5 pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT	BACCALAUREAT 2022	DUREE : 4H
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (5 pts)

On considère dans le plan orienté un rectangle $ABCD$, tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{\pi}{2}$, $AB = 1$, $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ puis $FCDE$ et $BFGH$ deux carrés de même sens que celui du rectangle $ABCD$.

1- **a.** Faire la figure avec précision en prenant 4 cm pour unité graphique. **0.5 pt**

b. On pose $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, montrer que $q^2 = 1 - q$ et vérifier que $FG = q$ et $AH = q^2$. **0.75 pt**

2. Soit S_1 la similitude directe de centre F d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport q.

a. Montrer que l'antécédent de G par S_1 est C. **0.5 pt**

b. Déterminer l'image du carré $FCDE$ par S_1. **0.5 pt**

3. Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.
Donner les autres éléments caractéristiques de S_2. **0.5 pts**

4. Soit $g = S_2 \circ S_1$

a. Montrer que $g(D) = E$ et $g(C) = G$. **0.5 pts**

b. Déteriner le réel $\frac{AE}{AD}$ en fonction de q puis donner les éléments caractéristiques de g. **1 pts**

c. Soit $I = g(E)$ et $J = g(F)$, donner la nature du quadrilatère EGJI puis construire les points I et J. **0,75 pts**

Exercice 2 (3.5 pts)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1 et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$. Dans l'espace muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère le point M élément du segment $[EC]$.

1- **a.** Montrer que M est le barycentre des points pondérés (C, t) et $(E, 1-t)$ où t appartient à $[0, 1]$ puis déterminer les coordonnées du point M en fonction de t. **0,75 pt**

b. Montrer que les points C et E appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$, puis en déduire la nature du triangle IMJ. **1 pt**

c. Exprimer IM^2 en fonction de t. **0,25 pt**

2. On désigne par θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a. Montrer que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4IM}$. **0.5 pt**

b. Supposant que $\theta \in [0, \pi]$, démontrer que θ est maximal lorsque IM est minimale. **0.5 pt**

c. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = 3t^2 - 5t + \frac{9}{4}$ puis déterminer le point M_0 position de M sur le segment $[EC]$ tel que la mesure $\widehat{IMJ}$ soit maximale . **0.5 pt**

Problème (11.5 pts)

A- Soit S l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle dérivables sur $]-2; +\infty[$ et vérifiant la rélation : $\forall x \in]-2; +\infty[$, $(2+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(2+x)$.

1. Soit f un élément de S, g la fonction dérivable sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ et définie par $g(x) = (2+x)f(x)$.

a. Démontrer que g est une primitive sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ de la fonction h définie par : $h(x) = 1 + \ln(2+x)$. **0.75 pt**

b. Réciproquement, g_1 est une primitive de la fonction h, démontrer que la fonction t définie par : $\forall x \in]-2; +\infty[$, $t(x) = \frac{g_1(x)}{2+x}$ est élément de S. **0.5 pt**

2. A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de h sur $]-2;+\infty[$. **0.5 pt**

3. En déduire l'ensemble S. **0.25 pt**

B-

1. On considère l'ensemble des fonctions $f_k : x \mapsto \ln(2+x) + \dfrac{k}{2+x}$ dérivables sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ où k est un paramètre réel.

a. Calculer suivant les valeurs de k les limites de f_k aux bornes de l'ensemble de définition. **1 pt**

b. Étudier le sens de variations de f_k et dresser son tableau de variation suivant les valeurs de k. **1.5 pt**

c. Dans un même repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = 1cm$ et $||\vec{j}|| = 2cm$ tracer avec soin les courbes respectives C_{-2}, C_0, C_1 des fonctions f_{-2}, f_0, f_1. **1.5 pt**

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ on pose :
$Q_{n-2}(t) = -t + (1+t)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}$.

a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$ puis en déduire que

$\dfrac{1}{2+t} = -t + (1+t)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}(1+t)^{n-2} + (-1)^{n-1}\dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}$. **1 pt**

b. Démontrer que : $\forall x \in]-1;0[$, $f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t$ où $P_{n-1}(x)$ est un polynôme que l'on précisera. **0,75 pt**

3. On considère la fonction ϕ définie par : $\begin{cases} \phi(x) = \dfrac{f_0(x)}{x+1} \forall x \in]-1;0[\\ \phi(-1) = 1 \end{cases}$

a. Démontrer que $\forall x \in [-1;0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$. **0,5 pt**

b. Utiliser la question **2-b.** pour démontrer que :
$\forall x \in]-1;0]$ $\left|\phi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$. **0,5 pt**

c. Démontrer que :
$\displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \phi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \phi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)$
Avec $S_n(x) = x - \dfrac{1}{2^2}(1+x)^2 + \dfrac{1}{3^2}(1+x)^3 + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{(1+x)^{n-1}}{(n-1)^2}$, $n \geq 2$. **0,75 pt**

C- Soit $\psi_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i (1+x)^i$

1. Démontrer par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-2;+\infty[$, $f_0'(x) = \psi_n(x) + \dfrac{(1+x)^{2n}}{2+x}$. **0,5 pt**

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n+1}$. **0,5 pt**

3. On considère la suite (U_n) définie par : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{1+i}}{i}$.

a. Démontrer que $\forall n$ $\mathbb{N}^*$, $f_0(0) = U_n + \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x$. **0,5 pt**

b. En déduire la limite de la suite (U_n). **0,5 pt**

Troisième partie

Correction

Correction des exercices

Exercice 1

1-a. • $z^2+z+1=0$; $\Delta = 1-4 = (i\sqrt{3})^2$ et les solutions de l'équation sont : $z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

• $4z^2-2z+1=0$: On pose $Z=-2z$ alors $Z^2+Z+1=0$ et d'après ce qui précède déduit que les solutions sont : $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$

b. • $2z^2+2z+1=0$; $\Delta = -4 = (2i)^2$

Les solutions sont $z_1 = \dfrac{-1+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-i}{2}$

• $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$; $\Delta = [8(2+i)]^2$.

Les solutions de l'équation sont alors :

$z_1 = \dfrac{6i+2-8(2+i)}{2(1+3i)} = -1+2i$ et $z_2 = \dfrac{5i+9}{1+3i} = 3-2i$

c. • On pose $Z=z^3$. alors on a $\dfrac{1}{2}Z^2+(1+3i)Z+8+8i=0$;

$\Delta = -24-10i = (1-5i)^2 \Rightarrow Z_1 = -2+2i$ et $Z_2 = -8i$

– $z^3 = -8i \Rightarrow z_1 = 2i$; $z_2 = -\sqrt{3}-i$ et $z_3 = \sqrt{3}-i$

– $z^3 = -2+2i \Rightarrow z_4 = 1+i$; $z_5 = \sqrt{2}e^{11i\pi/12}$; $z_6 = \sqrt{2}e^{19i\pi/12}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{1+i, \sqrt{2}e^{11i\pi/12}, \sqrt{2}e^{19i\pi/12}, 2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i\}$

• $z^4+(3-6i)z^2-8-6i=0$. On pose $Z=z^2$ alors $Z^2+(3-6i)Z-8-6i=0$; $\Delta = 5-12i = (3-2i)^2$ et donc $Z_1 = \dfrac{-3+6i-3+2i}{2} = -3+4i$ et $Z_1 = 2i$

– $z^2 = 2i \Rightarrow z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1-i$

– $z^2 = -3+4i \Rightarrow z_3 = -1-2i$ et $z_4 = 1+2i$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$S = \{1+2i, -1-2i, -1-i, 1+i\}$

2-a. On pose $z_0 = \dfrac{1+i}{1-i}$. Alors : $|z_0|=1$ et $\arg(z_0) = \dfrac{\pi}{2}$

b. On a $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \Rightarrow \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2022} = -1$

3. On pose $z_0 = 1+i\sqrt{3}$ alors $|z_0|=2$ et $\arg(z_0) = \dfrac{\pi}{3}$

$1+i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/3} \Rightarrow \left(1+i\sqrt{3}\right)^{2022} = 2^{2022}\,\mathrm{e}^{674\pi i} = 2^{2022}$

4. D'après ce qui précède, on déduit que :

$z_0 = \dfrac{1+i}{(1-i)(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/6}$

Les racines n-ièmes de z_0 sont : $z_k = \sqrt[n]{1/2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 2

1-a. $h(z) = z \Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$ (vérification facile)

b. Les solutions de (E) sont : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1+i$

2-a. En remplaçant $h(z)$ on retrouve $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\dfrac{z-a}{z-b}$

b. De la question **2-a.** ; $arg\left(\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = \pi + arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

Alors $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$

3-a. Si M, A et B sont alignés alors $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv 0[\pi]$

Ainsi $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv 0[\pi]$. Donc M', A, B et M sont alignés.

b. Si M, A et B ne sont pas alignés, d'après **2-a.**, $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[\pi]$ et A, B, M et M' sont cocycliques.

Exercice 3

1. L'unique solution de l'équation est $2+2i$

2. $z^2-2z+4=0$; $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$ et donc les solutions sont : $z_1 = 1-i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$

3. On a : $\dfrac{OD}{BD} = \left|\dfrac{d}{d-b}\right| = 1$ donc OBD est isocèle.

De plus $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}) = \arg\left(\dfrac{d}{d-b}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ le triangle OBD est rectangle en D.

En conclusion, le triangle OBD est rectangle isocèle en D

4. $z_{\overrightarrow{OE}} = 1-i\sqrt{3} = z_{\overrightarrow{FA}}$ donc le quadrilatère OEAF est un parallélogramme. De plus $OE=OF=2$. donc le parallélogramme OEAF a deux côtés consécutifs de même longueur, donc c'est un losange.

5-a. r a pour écriture complexe : $z' = iz$. Alors $e' = ie$

D'où $e' = i+\sqrt{3}$

b. $A'E' = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ donc E' appartient bien au cercle $(\mathcal{C}')$.

c. $e-d = -1-i(\sqrt{3}+2)$ et $e'-d = -i+\sqrt{3}-2$

et par suite $(\sqrt{3}+2)(e'-d) = -1-i(\sqrt{3}+2) = e-d$.

D'où $\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3}+2)\overrightarrow{DE'}$ et on déduit alors que les points E, D et E' sont alignés.

6. E' et D' sont les images de E et D par r donc $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$. Or, E, D et E' sont alignés donc $(EE') \perp (D'E')$ donc le triangle $EE'D'$ est rectangle en E

Exercice 4

1. $2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$; $\Delta = (2im)^2$

Par suite les solutions de (E_m) sont :

$z_1 = \dfrac{2(m+1+i)+2im}{4} = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)(m+1)$ et

$z_2 = \dfrac{2(m+1+i)-2im}{4} = \left(\dfrac{1-i}{2}\right)(m+i)$

2-a. On a facilement $z_1 = iz_2+1$

b. $z_1-\omega = iz_2+1-\omega = \mathrm{e}^{i\pi/2}(z_2-\omega)$ on déduit que : $\Omega M_1 = \Omega M_2$ et $(\overrightarrow{\Omega M_2}; \overrightarrow{\Omega M_1}) = \dfrac{\pi}{2}$ alors M_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

3. $\dfrac{z_2-m}{z_1-m} = \dfrac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m} = \dfrac{-(m-1)}{(im+1)} = i\dfrac{m-1}{m-i}$

4. • Si M ; M_1 et M_2 sont alignés alors ; $\dfrac{z_2-m}{z_1-m} \in \mathbb{R}$

Donc $\dfrac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R}$ (d'après **3.**) et on déduit que : $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ puis que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

Ceci prouve que M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

• Si M ; M_1 ; M_2 et Ω sont cocycliques alors :

$\dfrac{z_2-m}{z_1-m} \times \dfrac{z_2-\omega}{z_1-\omega} \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$ (Indication et **3.**)

L'ensemble des points cherchés est les points $M \neq A$; $M \neq B$ et $M \in (AB)$

Correction des Problèmes

Problème 1

1. Soit $z_0 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ avec $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

$z_0 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$ et $|z_0| = 1$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = z_0$ alors $z^n = e^{2i\theta}$.

Ainsi, les racines nièmes dez_0 deux à deux distincts sont de la forme : $z_k = e^{i(\frac{2\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

En particulier pour $n = 3$ on a :

$S_3 = \{e^{i(\frac{2\theta}{3})}, e^{i(\frac{2\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})}, e^{i(\frac{2\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})}\}$

3-a. Supposons $w_k = -1$ alors $e^{i(\frac{2\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3})} = -1 = e^{i\pi}$

donc $\dfrac{2\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} = \pi + 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \{0, 1, 2\}$

Ainsi $\dfrac{2\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \theta \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z}$

or, puisque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors on aura :

$-k\pi + \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$-\dfrac{\pi}{2} < -k\pi + \dfrac{3\pi}{2} + 3m\pi < \dfrac{\pi}{2}$ avec $m \in \mathbb{Z}$

$-2\pi < -k\pi + 3m\pi < -\pi$ or $k \in \{0, 1, 2\}$

• Si $k = 0$; $-2\pi < 3m\pi < -\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$: impossible

• Si $k = 1$ on aura : $-1 < 3m < 0$ avec $m \in \mathbb{Z}$: impossible

• Si $k = 2$; $0 < 3m < 1$; avec $m \in \mathbb{Z}$: impossible

Dans tous les cas on a : $w_k \neq -1$. D'où le résultat

b-i. $s_k = \dfrac{e^{(\frac{2\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3})} - 1}{e^{(\frac{2\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3})} + 1} = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}\left(e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}\right)}{e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}\left(e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}\right)}$

Ainsi $s_k = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})}}$

ii. Comme $\theta \in \mathbb{R}$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$ et $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ par suite :

$s_k = \dfrac{2i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})}{2\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})} = i\tan(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})$

c. (E) : Soit z tel que $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

$\Rightarrow \exists k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\dfrac{1+iz_k}{1-iz_k} = e^{(\frac{\theta}{3}+\frac{k\pi}{3})} = w_k$

De plus $w_k \neq -1$ d'après **3-a.** ainsi $z_k = \dfrac{w_k - 1}{i(w_k + 1)}$

or $\dfrac{w_k - 1}{w_k + 1} = s_k = i\tan(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3})$

Par suite les solutions de (E) sont sous la forme :

$z_k = \tan(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3}); k \in \{0, 1, 2\}$

3-a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = 1$ et $z \neq 1$. Les complexes qui vérifient $z^5 = 1$ et $z \neq 1$ sont $z_k = e^{2ik\pi/5}$; $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

b. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $z^5 = 1$

Comme $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$ et $z^5 = 1$ alors :

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

c. Pour $x \neq 1$; $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \dfrac{1 - x^6}{1 - x}$

(somme des 6 premiers termes d'une suite géométrique)

d. Pour $x \neq 1$; $f'(x) = \dfrac{5x^6 - 6x^5 + 1}{(1-x)^2}$

De même : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ et

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

ainsi $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \dfrac{5x^6 - 6x^5 + 1}{(1-x)^2}$

Pour $z^5 = 1$ et $z \neq 1$;

$1+2z+3z^2+4z^3+5z^4 = \dfrac{5z^6 - 6z^5 + 1}{(1-z)^2}$. Or $z^5 = 1$ et $z^6 = z$

$1+2z+3z^2+4z^3+5z^4 = -\dfrac{5}{1-z} = \dfrac{5}{e^{ik\pi/5}(e^{-ik\pi/5} - e^{ik\pi/5})}$

Ainsi $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}icotan(\frac{k\pi}{5})$

e. Les racines n-ième de l'unité deux à deux distinctes sont de la forme : $z_k = e^{2k\pi/n}$

f. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$ et $z \neq 1$.

alors $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = 0$ car $z^n = 1$

g. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est dérivable et $f'(x) = \dfrac{-(1+n)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

or $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

d'où $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{-(1+n)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

ainsi pour $z^n = 1$ et $z \neq 1$ on a alors :

$1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} = \dfrac{-(n+1)z^n + nz^{n+1} - 1}{(1-z)^2}$

or $z^n = 1$ et $z^{n+1} = z$

alors $1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} = -\dfrac{n}{1-z}$

or z est l'un des z_k ; $z_k = e^{2ik\pi/n}$ alors :

$\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n})} = -\dfrac{i\,e^{-ki\pi/n}}{2\sin(\frac{k\pi}{n})}$; ainsi :

$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} = -\dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{2}icotan(\frac{k\pi}{n})$

Problème 2

1. • On pose $z = x + iy$; $\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| = 2$ alors $|1+z|^2 = 4|1-z|^2$

Ainsi $(1+x)^2 + y^2 = 4(1-x)^2 + 4y^2$

$\Rightarrow (x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \dfrac{16}{9}$

Par suite, l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $r = \dfrac{4}{3}$

• Ensemble des points $Z \in \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$

$\Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

par suite, l'ensemble des points M tels que $\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$ est la droite (ox) privée du point $(1, 0)$

2-a. $|Z| = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| = 1$. On pose $z = x + iy$

$\Rightarrow (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \Rightarrow 4x = 0$

L'ensemble cherché est donc la droite (oy)

b. $(E) : (z-1)^n - (z+1)^n = 0$

$z \in \mathbb{C}$ / $(z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Rightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^n = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$

Et d'après la question précédente, on conclut que $M \in (oy)$ et donc z est imaginaire pure.

Ainsi, toutes les solutions de (E) sont des imaginaires pures.
c. On a : $(-z-1)^n-(-z+1)^n=(-1)^{n+1}((z-1)^n-(z+1)^n)$
Soit z une solution de (E), alors $(z-1)^n-(z+1)^n=0$
d'après **a.**, $-z$ est aussi solution de (E)
D'où les solutions de (E) sont 2 à 2 distinctes.
d. Résolution de (E)
$(z-1)^n-(z+1)^n=0 \Rightarrow (z-1)^n=(z+1)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \text{ (car } z\neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1}=e^{2ik\pi/n}\,;\, k\in\{1,2,3,...,n-1\}$$

$$\Rightarrow z=\frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1}=\frac{e^{ki\pi/n}(e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n})}$$

$$\Rightarrow z=\frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}}\,;\, k\in\{1,\dots,n-1\}$$ et par suite
$z=-i\text{cotan}\frac{k\pi}{n}$ car $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$
Ainsi les solutions de l'équation de (E) sont de la forme de $z_k=-i\text{cotan}\frac{k\pi}{n}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Le cas $k=0$ est à exclure car si $k=0$; $\frac{z+1}{z-1}=1$ ce qui est impossible.

3-a. $z_0=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$: $|z_0|=1$; $arg(z_0)=\frac{\pi}{4}$ et $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}$
b. Les racines nièmes de z_0 deux à deux distincts sont de la forme $z_k=e^{i(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}$ avec $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$
c. Pour $n=2$; on a : $z_0=\mathrm{e}^{i\pi/8}$ et $z_1=\mathrm{e}^{i9\pi/8}$
d. En exploitant la méthode de la **page 7** du cours, on déduit que : les racines carrées de z_0 sont :

$$z_1=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \text{ et } z_2=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

e. De **3-c.** et **3-d.** et comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos(\frac{\pi}{8})>0$ et $\sin(\frac{\pi}{8})>0$ on déduit l'égalité :

$$\mathrm{e}^{i\pi/8}=\cos(\tfrac{\pi}{8})+i\sin(\tfrac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \text{ et } \sin(\tfrac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

4-a. $Z^2=2\sqrt{3}+2i$; $|Z^2|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4}=4$; $arg(Z^2)=\dfrac{\pi}{6}$ et $Z^2=4e^{i\pi/6}$
b. $Z^2=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors $|Z|=2$ et $arg(Z^2)=2arg(Z)+2k\pi$.
Ainsi $arg(Z)=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\{0,1\}$
Les expressions possibles de Z sont alors : $z_1=2e^{i\pi/12}$ ou $z_2=2e^{13i\pi/12}$ or $Z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ donc le cos et le sin sont positif $\Rightarrow Z=2e^{i\pi/12}$
c. De **4-b.** $2\cos(\frac{\pi}{12})+2i\sin(\frac{\pi}{12})=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Ainsi : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin(\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Problème 3

1-a.
• Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $z=|z|e^{i\theta}$ tel que $z^{2n}=1$ alors $|z|^{2n}=1$ et $2n\theta=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
Ainsi les solutions deux à deux distinctes sont sous la forme $e^{ik\pi/n}$, $k\in\{0,1,\dots,2n-1\}$
• Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $z=|z|e^{i\theta}$ tel que $z^n=-1$ alors $|z|^n=1$ et $n\theta=\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi les solutions deux à deux distinctes sont sous la forme : $e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,\dots,n-1\}$

b.
$$\sum_{k=0}^{n-1}z_k=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=\mathrm{e}^{i\pi/n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$$
$$=\mathrm{e}^{i\pi/n}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2i\pi}}{1-e^{2i\pi/n}}=0$$

2. • $1^n=1\neq -1$ ainsi $z\neq 1$
• $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^{2k}=\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}=0$ car $z^{2n}=(z^n)^2=(-1)^2=1$

3-a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z_k=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{z^n-1}{z-1}$ (Somme suite géométrique)
b. $\mathrm{e}^{ix}-1=\mathrm{e}^{ix/2}\left(\mathrm{e}^{ix/2}-\mathrm{e}^{-ix/2}\right)=2i\sin(\frac{x}{2})e^{ix/2}$
c. $Z_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k=\frac{1-\mathrm{e}^{inx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{inx}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{inx}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{inx}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)}$

Ainsi $Z_n=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{\frac{i(n-1)x}{2}}$ (a)
On peut écrire Z_n sous la forme :
$Z_n=(1+\cdots+\cos(n-1)x)+i\,(\sin(x)+\cdots+\sin(n-1)x)$
donc $Z_n=X_n+iY_n$
D'après (a) ; $Z_n=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right)$
Par identification on a alors :
$X_n=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right)$ et
$Y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right)$

4-a. $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}=\cos x$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}=\sin x$
b. Linéarisation :
i. • $(\cos x)^3=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$ or :

$$\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8}+\frac{3}{8}(e^{ix}+e^{-ix})$$

$$A(x)=\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

• $B(x)=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^3=\dfrac{(-e^{3ix}+e^{-3ix})+3(e^{ix}-e^{-ix})}{8i}$

$$B(x)=(\sin x)^3=-\frac{1}{4}\left[\sin(3x)-3\sin x\right]$$

ii. • $C(x)=\cos^2 x\sin^2 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$$=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-2}{16}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

• $D(x)=\cos^3 x\sin x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$

$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}+2(e^{2ix}-e^{-2ix})}{16i}=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

• $E(x)=\cos x\sin^3 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}-2(e^{2ix}-e^{-2ix})}{-16i}=-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

iii. • $G(x)=\cos^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\dfrac{2\cos 4x+8\cos 2x+6}{16}$

• $F(x)=\sin^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\dfrac{2\cos 4x-8\cos 2x+6}{16}$

• $H(x) = \cos x \sin^4 x = \dfrac{1}{16}\cos 5x - \dfrac{3}{16}\cos 3x + \dfrac{1}{8}\cos x$

5-a. Écrivons $z = re^{i\theta}$ $z^k + \bar{z}^k = r^k\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) = 2r^k\cos(k\theta)$

b. $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^k)...(z^n+\bar{z}^n) = \prod_{k=1}^{n}(z^k+\bar{z}^k) = \prod_{k=1}^{n} 2r^k\cos(k\theta)$

Ainsi : $\prod_{k=1}^{n}(z^k+\bar{z}^k) = 2^n r^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$

Problème 4

1. Placer des points.

2. $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}\right) = arg\left(\dfrac{b'}{b}\right) = arg(b') - arg(b) = -\pi$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires. D'où O est sur la droite (BB')

3. • $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = arg\left(\dfrac{a'}{a}\right) = arg(a') - arg(a) = 0$; $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires. D'où O est sur la droite (AA').

• De même : $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}\right) = arg\left(\dfrac{c'}{c}\right) = arg(c') - arg(c)$ or $arg(c') = \dfrac{\pi}{3}$. Ainsi $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}\right) = -\pi \Rightarrow \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires. D'où O est sur la droite (CC')

Conclusion : O appartient à (AA'),(BB') et (CC'). On conclut que (AA'),(BB') et (CC') sont concourantes en O.

4-a. $|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(\bar{z}z')$

Or $Re(\bar{z}z') \leq |zz'|$ donc $|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

D'où $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

b. Par récurrence : $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$

• Pour $n = 1$ trivial.

• Pour $n = 2$, la propriété est vraie d'après le **4-a.**

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 2$ donné. Soient $z_1, z_2, \cdots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &= |(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + z_{n+1}| \\ &\leq |z_1 + z_2 + ... + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n| + |z_{n+1}|\end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

Par suite le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où le résultat.

c. Soit $z \in \mathbb{Z}$; et $n \in \mathbb{N}^*$; et $|z| > 1$

$$\begin{aligned}|1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}| &\leq |1| + |z| + ... + |z|^{n-1} \text{ (d'après \textbf{b.})} \\ &\leq 1 + |z| + ... + |z|^{n-1} \\ &< |z|^n + |z|^n + ... + |z|^n = n|z|^n \\ &\text{car } \forall\, k \in [0, n-1]\,;\, |z|^k < |z|^n\end{aligned}$$

Alors $|1 + z^1 + z^2 + ... + z^n + z^{n+1}| < n|z|^n$

d. Supposons que $z \in \mathbb{Z}$ et $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0$

D'après la question **4-c.**, si $|z| > 1$, alors

$|1 + z^1 + z^2 + ... + z^n + z^{n+1}| < n|z|^n$ et donc

$1 + z^1 + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1} \neq nz^n$ d'où

$1 + z^1 + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1} - nz^n \neq 0$.

d'où si $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0$, forcement $|z| \leq 1$

5-a. $OA + B + OC = 22$

b. On démontre facilement que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

$(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj = 22$

Ainsi $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22$

c. $MA + MB + MC = |z-a| + |z-b| + |z-c|$

$$\begin{aligned}&= |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| \\ &\geq |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = 22\end{aligned}$$

En utilisant **5-a.**, on conclut que le minimum est atteint en $M = O$.

Problème 5

Partie A

1-a. $z_1 = 1 + i$; $z_2 = i$ et $z_3 = \dfrac{-1+i}{2}$

b. $\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\pi/4}$

c. $\dfrac{z_1 - z_0}{z_1} = i$ alors $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_0A_1}) = \dfrac{\pi}{2}$. D'où OA_0A_1 est rectangle en A_1

2-a. $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| |z_n|$. D'où $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n$ et par suite $r_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. (r_n) est donc convergente de limite 0.

b. Les A_n converge vers le point O.

3-a. On a $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$ alors $(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2}$. D'où OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}

L'application du théorème de Pythagore sur OA_nA_{n+1} donne : $A_nA_{n+1} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = r_{n+1}$

b. $L_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}\left[1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$ (Somme d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\sqrt{2}/2$)

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$

Partie B

1-a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = \dfrac{z}{i-z} \Rightarrow z = 0$ ou $z = \dfrac{i}{2}$

b. On calcul et par identification, on obtient le résultat.

c. z' est imaginaire si $x' = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 - 2y = 0$

L'ensemble des points M est donc l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ (sauf A) ainsi que les points du cercle de centre A de rayon 1 .

d. $OM = |z|$; $AM = |z - i|$ et $OM' = |z'| = \dfrac{|z|^2}{|i-z|}$

Ainsi $OM^2 = OM' \times AM$.

Si les points M et M' sont sur le même cercle de centre O, alors les longueurs OM et OM' sont égales. Soit à résoudre l'équation : $OM^2 = OM' \times AM \Leftrightarrow OM^2 = OM \times AM \Leftrightarrow OM = 0$ ou $OM = AM$ c'est-à-dire $M = O$ ou M est sur la médiatrice de $[OA]$.

2-a. $z'_E = 0$.

$M = M' \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

b. Évident : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ et on a : $\dfrac{M'B}{M'A} = \left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$

$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right) = 2arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

c. M est un point de Δ : $MA = MB \Rightarrow \dfrac{M'B}{M'A} = 1 \Leftrightarrow M'B = M'A$; M' est un point de Δ .

d. M appartient à Γ : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ et par suite $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \pm\pi$ donc M' appartient à (AB).

e. soit z' l'affixe de M' ; $M' = g(M) \Leftrightarrow z^2 - 2z'z + 1 = 0$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par g, qu'ils soient sur [AB] ou non

Correction des exercices

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times (n+1) - 1 \times n = 1$. D'où $n+1$ et n sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.
2. Il suffit de montrer que le reste de la division euclidienne de $n(n^4-1)$ par 5 est 0. Pour ce cela, on se sert du tableau de congruence suivant :

n	0	1	2	3	4
$n(n^4-1)$	0	0	0	0	0

D'où tous les reste de la division euclidienne de $n(n^4-1)$ par 5 sont nuls. Ainsi $n(n^4-1)$ est un multiple de 5
3-a. Même idée qu'en **2.**

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Ainsi les reste possible de la division euclidienne de n^2 par 8 sont 0, 1 ou 4.
b. Soient m, n et p trois entiers naturels et r_1, r_2 et r_3 les restes des divisions euclidiennes de m, n et p par 8. Alors : $m^2+n^2+p^2 \equiv r_1^2+r_2^2+r_3^2[8]$. Ainsi, $m^2+n^2+p^2 \in 7+8\mathbb{Z}$ si et seulement si $r_1^2+r_2^2+r_3^2 \in 7+8\mathbb{Z}$
Comme r_1, r_2 et r_3 sont des entiers entre 0 et 7, il suffit de vérifier que les sommes de trois carrés d'entiers compris au sens large entre 0 et 7 ne sont pas dans $7+8\mathbb{Z}$.
D'après **3-a.**, le reste de la division euclidienne de r_1^2 ou r_2^2 ou r_3^2 ne peut être égal à 0, 1 et 4. Donc :

$0+0+0=0 \in 8\mathbb{Z}$ $\quad$ $0+4+4=8 \in 8\mathbb{Z}$
$0+1+4=5 \in 5+8\mathbb{Z}$ $\quad$ $4+4+4=12 \in 4+8\mathbb{Z}$
$1+4+4=9 \in 1+8\mathbb{Z}$ $\quad$ $0+0+4=4 \in 4+8\mathbb{Z}$
$0+0+1=1 \in 1+8\mathbb{Z}$ $\quad$ $1+1+1=3 \in 3+8\mathbb{Z}$
$0+1+1=2 \in 2+8\mathbb{Z}$ $\quad$ $1+1+4=6 \in 6+8\mathbb{Z}$

Les restes possible de la division euclidienne de $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ par 8 sont alors : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6
En conclusion : $r_1^2+r_2^2+r_3^2 \notin 7+8\mathbb{Z}$. D'où les nombres de la forme : $8k+7$, $k \in \mathbb{N}$ ne sont pas la somme de trois carrés parfaits.
4. • Supposons $n+2/3n+1$. Comme $n+2/n+2$ alors $n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$. Donc $n+2$ divise $(3n+6)-(3n+1)$ Ainsi si $n+2/3n+1$ alors $n+2/5$. Les diviseurs de 5 sont : 1 ; -1 ; 5 ; -5 alors $n+2 \in \{-1,-5,1,5\} \Rightarrow n \in \{-3,-7,-1,3\}$
• Réciproquement, on vérifie que si $n \in \{-3,-7,-1,3\}$ alors $n+2/3n+1$ (remplacer les valeurs de n pour vérifier)
D'où si $n \in \{-3,-7,-1,3\}$ alors $n+2/3n+1$
5. Par récurrence :
• Pour $n=0$, $3^1+2^2=7$ qui divise 7
• Supposons que n, $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ est divisible par 7 jusqu'à un ordre $n \geq 1$ donné. $3^2 \equiv 2[7]$ et $2^4 \equiv 2[7]$. Alors :

$$\begin{aligned} 3^{2n+3}+2^{4n+6} &\equiv 3^2 3^{2n+1}+2^4 2^{4n+2}[7] \\ &\equiv 2(3^{2n+1}+2^{4n+2})[7] \end{aligned}$$

or $3^{2n+1}+2^{4n+2} \equiv 0[7]$ par hypothèse de récurrence.
D'où $3^{2n+3}+2^{4n+6} \equiv 0[7]$. Donc vrai à l'ordre $n+1$.
D'où le résultat
6. Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

D'où le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Exercice 2

1-a. On a : $7^0 \equiv 1[10]$; $7^1 \equiv 7[10]$; $7^2 \equiv 9[10]$; $7^3 \equiv 3[7]$; $7^4 \equiv 1[7]$. Donc pour $k \in \mathbb{N}$, $7^{4k} \equiv 1[10]$; $7^{4k+1} \equiv 7[10]$; $7^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $7^{4k+3} \equiv 3[10]$.
b. $2022 = 4 \times 505 + 2$. Le chiffre des unités de 7^{2022} est 9
2-a. On a : $7^0 \equiv 1[4]$; $7^1 \equiv 3[4]$; $7^2 \equiv 1[4]$. Ainsi pour : $k \in \mathbb{N}$; $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$
b. Le reste de la division euclidienne de 7^{2024} par 4 est 1.
3. $n_0 = 7^{7^{7^{7}}} \equiv 1[2]$ (impair). On peut écrire $n_0 = 1+2k$
Ainsi d'après **2-a.** $7^{n_0} \equiv 3[4] \Rightarrow \exists\, k' \in \mathbb{N}$ / $7^{n_0} = 3+4k'$.
Ainsi d'après **1-a.**, $7^{n_0} \equiv 3[10]$.
D'où le chiffre des unités de $n = 7^{7^{7^{7^{7}}}}$ est 3.
4. On a : $4^0 \equiv 1[10]$; $4^1 \equiv 4[10]$; $4^2 \equiv 6[10]$; $4^3 \equiv 4[10]$; $4^4 \equiv 6[10]$; $4^5 \equiv 4[10]$; $4^6 \equiv 6[10]$; $4^7 \equiv 4[10]$; $4^8 \equiv 6[10]$
Ainsi, pour $k \geq 1$, $4^{2k} \equiv 6[10]$ et $4^{2k+1} \equiv 4[10]$
or $n_0 = 4^{4^{4^{4}}} \equiv 0[2]$ (pair). D'où $n = 4^{4^{4^{4^{4}}}} \equiv 6[10]$
D'où le chiffre des unités de n est 6.
5-a. On a : $7^1 \equiv 7[9]$; $7^2 \equiv 4[9]$; $7^3 \equiv 1[9]$
Ainsi $7^{3k} \equiv 1[9]$; $7^{3k+1} \equiv 7[9]$; $7^{3k+2} \equiv 4[9]$
b. $2023 = 3 \times 674 + 1$ ainsi le reste de la division euclidienne de 7^{2023} par 9 est 7.
6. On a : $7^1 \equiv 1[3]$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $7^k \equiv 1[3]$
D'où $7^{7^{7^{7^{7}}}} \equiv 1[3]$ et $n = 7^{7^{7^{7^{7}}}} \equiv 7[9]$
Ainsi la classe d'équivalence de n dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est 7.

Exercice 3

1. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7}\}$ et on dresse une table des opérations comme suit :

$\overline{n}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{3}^n$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{5}n+1$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$
$\overline{3}^n+5n+1$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$

Ainsi $3^n+5n+1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow \overline{n} = \overline{6} \Leftrightarrow n = 6+8k$, $k \in \mathbb{N}$
2. On a : $4^n = (3+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k = C_n^0 + 3C_n^1 + \cdots + 3^n C_n^n$
Et donc $4^n = 1+3n+3^2[C_n^2+\cdots+3^{n-2}C_n^n] = 1+3n+9k$
Donc 4^n est congru à $1+3n$ modulo 9
$2^{2n}+15n-1 = 4^n+15n-1 \equiv 1+13n+15n-1[9] \equiv 18n[9]$
Comme 18 divise 9 alors $2^{2n}+15n-1$ divise 9
3-a. L'algorithme d'Euclide donne $pgcd(567;2854) = 1$
b. L'algorithme d'Euclide donne $(u,v) = (4505;-895)$
c. Les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(x,y) = (4505+2854k;-895-567k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
4. $pgcd(143;195) = 13$. Donc (E_0) admet au moins une solution. De plus $143 \times (-1) - 195 \times (-1) = 52$. Ainsi $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E_0). Alors en suivant les étapes de résolution exposées dans le cours, on déduit que les solutions de (E_0) sont de la forme : $(x,y) = (-1+15k;-1+11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4

1-a. $pgcd(49;18) = 1$. puisque $ppcm(a,b) \times pgcd(a,b) = |ab|$,

on conclut alors que $ppcm(49;18) = 882$.
L'algorithme d'Euclide donne $(u, v) = (-19; 7)$
b. De **1-a.** ; on déduit que $18u \equiv 1[49]$. D'où $\overline{18}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ d'inverse $\overline{30}$.
2-a. $pgcd(37;7) = 1$. En utilisant la remontée de l'algorithme d'Euclide, on déduit que : $16 \times 7 + (-3) \times 37 = 1$
D'où l'inverse de $\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ est $\overline{16}$
b. $\overline{7}y = \overline{2} \Rightarrow \overline{16} \times \overline{7}y = \overline{16} \times \overline{2} \Rightarrow y = \overline{32}$.
Ainsi la solution de $\overline{7}y = \overline{2}$ dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ est $y = \overline{32}$
3-a. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$
b. On a : $\overline{2} \times \overline{0} = \overline{0}$; $\overline{2} \times \overline{1} = \overline{2}$; $\overline{2} \times \overline{2} = \overline{0}$; $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{2}$. Alors l'équation : $\overline{2}x = \overline{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
c.

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3x} + \overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Les solutions de (E_1) dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont : $x = \overline{0}$ et $x = \overline{1}$
Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\overline{2013} = \overline{1}$ car $2013 = 504 \times 4 + 1$

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{x}^3$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{3}x + x^2$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

- Si $\overline{k} = \overline{0}$ alors $S = \{\overline{0}, \overline{2}\}$
- Si $\overline{k} = \overline{1}$ alors $S = \{\overline{3}\}$
- Si $\overline{k} = \overline{2}$ alors $S = \varnothing$
- Si $\overline{k} = \overline{3}$ alors $S = \{\overline{1}\}$

5-a. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

y \ x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

Les solutions sont : $S_1 = \{(\overline{0}, \overline{3}); (\overline{2}, \overline{0}); (\overline{4}, \overline{2}); (\overline{1}, \overline{4}); (\overline{3}, \overline{1})\}$
b. On déduit de même que les solutions sont :
$S_2 = \{(\overline{0}, \overline{2}); (\overline{3}, \overline{3}); (\overline{1}, \overline{4}); (\overline{4}, \overline{0}); (\overline{2}, \overline{1})\}$
c. $S = S_1 \cap S_2$. D'où $S = \{(\overline{1}, \overline{4})\}$
6. En additionnant la première et la deuxième ligne, on trouve : $\overline{9}x = \overline{3}$. Dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, $\overline{9}x = \overline{3} \Leftrightarrow x = \overline{25}$
En reportant dans la première équation, on obtient $y = \overline{32}$
La solution unique est donc le couple $(\overline{25}; \overline{32})$

Exercice 5

1. $pgcd(35;96) = 1$. Donc (E) admet au moins une solution.
Le couple $(11;4)$ est une solution particulière de (E)
2. Les solutions de (E) sont les couples :
$(x, y) = \{(11 + 96k; 4 + 35k)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3-a. Facile de démontrer que 97 est premier (cours)
Soit $d = 97 \wedge x$ alors $d/97$ et d/x. Puisque 97 est premier alors $d = 97$ ou $d = 1$.
Supposons $d = 97$ alors $x \equiv 0[97] \Rightarrow x^{35} \equiv 0[97]$. Or x est solution de $(F) \Rightarrow x \equiv 2[97]$ ce qui est absurde. Alors d ne peut être qu'égale à 1.
Ainsi $97 \wedge x = 1$. D'où x et 97 sont premiers entre eux.
b. 97 est premier et $97 \wedge x = 1$ alors $x^{96} \equiv 1[97]$ d'après le petit théorème de Fermat.
c. $x^{35} \equiv 2[97] \Rightarrow \left(x^{35}\right)^{11} \equiv 2^{11}[97] \Rightarrow x^{384} \times x \equiv 2^{11}[97]$
Or $384 = 4 \times 96$ et $x^{96} \equiv 1[97]$ d'après **b.** $\Rightarrow x^{384} \equiv 1[97]$
D'où $x \equiv 2^{11}[97]$
4. Supposons que $x \equiv 2^{11}[97]$ alors $x^{35} \equiv 2^{385}[97]$.
Or $2^{385} = \left(2^{96}\right)^4 \times 2$ et $2^{96} \equiv 1[97]$. D'où $x^{35} \equiv 2[97]$ et x est solution de (F).
5. $2^{11} = 2048 = 21 \times 97 + 11$. Ainsi x est solution de (F) si et seulement $x \equiv 2^{11}[97] \Leftrightarrow x \equiv 11[97]$.
D'où les solutions de (F) sont de la forme : $11 + 97k$; $k \in \mathbb{N}$

Correction des problèmes

Problème 1

A/ 1-a. $3x(x+2) \equiv 2[7] \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \equiv 2[7]$ et par suite $3x(x+2) \equiv 2[7] \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 2 \equiv 0[7]$
b.

x	0	1	2	3	4	5	6
$3x$	0	3	6	2	5	1	4
$x+2$	2	3	4	5	6	0	1
$3x(x+2)$	0	2	3	3	2	0	4

c. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$.
D'où les solutions de (E) sont sous la forme :
$x = 1 + 7k$ ou $x = 4 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. En suivant la démarche de **1.**, on conclut que les solutions de (E_2) sont sous la forme : $x = 9 + 12k$ ou $x = 1 + 12k$ ou $x = 3 + 12k$ ou $x = 7 + 12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3-a. $A = \overline{361}^{\beta}$ alors $A = 3\beta^2 + 6\beta + 1$. De plus $A \equiv 3[7]$
Alors $3\beta^2 + 6\beta + 5 \equiv 0[7]$ or $5 \equiv -2[7]$
D'où $3\beta^2 + 6\beta - 2 \equiv 0[7]$
b. D'après **1.**, les valeurs possibles de β sont des entiers de la forme : $1 + 7k$ ou $4 + 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$
c. En prenant $k = 1$, on trouve $\beta = 8$
B/ 1-a& b. Évident et facile à démontrer
c. $(x+5)^2 - y^2 = (x+y+5)(x-y+5) = 71$ donc $x+y+5$ et $x-y+5$ sont des diviseurs de 71. Alors on a :

$x+y+5$	-71	-1	1	71
$x-y+5$	-1	-71	71	1
x	-41	-41	31	31
y	-35	35	-35	35

Ainsi $S = \{(-41, -35); (-41, 35); (31, -35); (31, 35)\}$
2-a. $pgcd(13,7) = 1$ et $ppcm(13,7) = 91$. Le $pgcd(13,7)$ divise 16 donc (G) a au moins une solution.
b. vérification facile.
c. $S = \{(5 + 7k; -7 - 13k);\ k \in \mathbb{Z}\}$

Problème 2

I/
1-a. Si a et 13 sont premier entre eux alors $a^{12} \equiv 1[13]$ d'après le petit théorème de Fermat (13 est premier).
Or $2016 = 12 \times 168$ alors $\left(a^{12}\right)^{168} \equiv 1^{168}[13]$
D'où $a^{2016} \equiv 1[13]$
b. Soit $d = x \wedge 13$ alors d/x et $d/13 \Rightarrow d = 13$ ou $d = 1$ car 13 premier. Supposons $d = 13$ alors $x/13 \Rightarrow x \equiv 0[13]$; ainsi $x^{2015} \equiv 0[13]$ ce qui est absurde car $x^{2015} \equiv 2[13]$
D'où $d = 1$ et par suite x et 13 sont premiers entre eux.

c. D'après **1-a.** et **1-b.**, $x^{2016} \equiv 1[13]$ et $x^{2015} \equiv 2[13]$
Ainsi $x \cdot x^{2015} \equiv 2x[13]$ par suite $2x \equiv 1[13]$. De plus
$14 \equiv 1[13] \Rightarrow 2x - 14 \equiv 0[13] \Rightarrow 2(x-7) \equiv 0[13]$. Par suite $x - 7 \equiv 0[13]$ d'après Gauss. D'où $x \equiv 7[13]$
d. D'après les questions précédentes si x est solution (E_1) alors $x \equiv 7[13] \Rightarrow x = 7 + 13k \in \mathbb{Z}$
Réciproquement si $x = 7 + 13k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \equiv 7[13]$
$x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv (7^3)^{671}7^2[13] \Rightarrow$
$x^{2015} \equiv 5^{671} \times 10[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 25^{335} \times 50[13]$. Puisque :
$25 \equiv -1[13]$ et $50 \equiv 11[13]$ alors $x^{2015} \equiv (-1)^{335} \times 11[13]$
D'où $x^{2015} \equiv -11[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$ car $-11 \equiv 2[13]$
D'où les solutions de (E_1) sont : $7 + 13k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. On vérifie facilement que 2017 est un nombre premier
$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
II/
1.
• Soit (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $px + y^{p-1} = 2017$
$px + y^{p-1} - p = p(x-1) + y^{p-1}$. Puisque (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ alors $(x-1) \geq 0$ et $y > 0$. Ainsi $p(x-1) + y^{p-1} > 0$
D'où $2017 = px + y^{p-1} > p$. D'où le résultat.
• Par absurde, supposons que p divise y. Alors $\exists\ k \in \mathbb{N}^*$; $y = kp \Rightarrow px + (kp)^{p-1} = 2017$. Ainsi
$p(x + k^{p-1}p^{p-2}) = 2017$. On déduit alors que p est un nombre premier qui divise 2017 $\Rightarrow p < 2017$ et $p/2017$. Ce qui est absurde car 2017 est premier, $p < 2017$ et $p/2017$
2.
• p est premier et p ne divise pas y alors $y^{p-1} \equiv 1[p]$ d'après le petit théorème de Fermat.
• $px + y^{p-1} = 2017 \Rightarrow px + (y^{p-1} - 1) = 2016$. Or p/px et $p/(y^{p-1} - 1)$ donc $p/2016$ avec $p \geq 5$
3. p est premier et $p/2016$ alors $p = 7$ (en utilisant **I-2.**)
4.
• D'après ce qui précède, si $p \neq 7$, l'équation (E_0) n'a pas de solution.
• Pour $p = 7$, (E_0) dévient : $7x + y^6 = 2017$; $x > 0$ et $y > 0$
Alors $0 < 2017 - 7x < 2017 \Rightarrow 0 < y^6 < 2017$. D'où
$0 < y < 3.55 \Rightarrow y \in \{1; 2; 3\}$. Ainsi :
Si $y = 1$, $7x + 1 = 2017 \Rightarrow x = 288$
Si $y = 2$ alors $x = 279$
Si $y = 3$ alors $x = 184$
Réciproquement on vérifie aisément les couples $(288; 1)$, $(279; 2)$ et $(184; 3)$ sont solutions de $7x + y^6 = 2017$
Conclusion : L'ensemble solution de (E_0) est :
$S = \{(288; 1), (279; 2); (184; 3)\}$

Problème 3

A/
1-a. En effectuant les divisions successives de l'algorithme d'Euclide, on trouve $pgcd(49; 25) = 1$
On déduit que $ppcm(49; 25) = 1225$
b. $pgcd(49; 25)$ divise 5 donc (E) admet au moins une solution.
Pour la solution particulière, on peut la retrouver en remontant l'algorithme d'Euclide ou on peut remarquer que $(10; 5)$ est une solution particulière.
c. Les solutions de (E) : $S = \{(10 + 49k; 5 + 25k)\ k \in \mathbb{Z}\}$
d. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $25p \equiv 5[49] \Rightarrow \exists\ q \in \mathbb{Z} : 25p = 5 + 49q$
Ainsi $25p - 49q = 5$ et donc $(p; q)$ est solution de (E).
D'après **1-c.**, $p = 10 + 49k$ et $q = 5 + 25k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Cherchons les valeurs de p comprises entre 1960 et 2018 :
$1960 \leq p \leq 2018 \Rightarrow 1950 \leq 49k \leq 2008$. La seule valeur possible de k est alors 40. D'où le résultat.
2-a. Soit (x, y) solution de (E) alors $5(5x-1) = 7 \times 7y$. Donc 7 divise $5(5x-1)$. Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5x - 1$. D'où $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $5x - 1 = 7k$
Ainsi $5x = 7k + 1$ ce qui prouve que $5x \equiv 1[7]$
De même si (x, y) solution de (E) alors $49y = 5(5x-1)$. 49 et 5 premiers entre eux et $5/49y$ alors $5/y$. D'où $y \equiv 0[5]$
b. Si $x \equiv 3[7]$, alors $5x \equiv 15[7]$. Donc $5x \equiv 1[7]$ car $15 \equiv 1[7]$
Réciproquement supposons $5x \equiv 1[7]$. $5 \times 3 = 15 \equiv 1[3]$. Donc l'inverse de 5 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est 3. Ainsi si :
$5x \equiv 1[7]$ alors $5 \times 3x \equiv 3[7] \Rightarrow x \equiv 3[7]$
3-a. En se servant du tableau de congruence modulo 7 pour x et x^2, on déduit que les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 est l'ensemble $\{0; 1; 2; 4\}$
b. D'après **2-a.**, $(x^2; y^2)$ est solution de (E) alors $5x^2 \equiv 1[7]$. Ainsi $x^2 \equiv 3[7] \Rightarrow 3$ est un reste de la division euclidienne de x^2 par 7. Ce qui n'est pas le cas d'après **3-a.**. Donc il n'existe aucun $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ / $(x^2; y^2)$ soit solution de (E).
B/
1. Par récurrence (**Exercice 1 sur la suite numérique**)
2-a. $S_{2k} = k^2(2k+1)^2$ et $S_{2k+1} = (k+1)^2(2k+1)^2$ donc $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2 PGCD(k^2, (k+1)^2)$
b. k et $k+1$ sont premiers entre eux alors $pgcd(k, k+1) = 1$
c. $pgcd(k, k+1) = 1 \Rightarrow pgcd(k^2, (k+1)^2) = 1$.
D'où $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2$
3-a. Si $k = 0$ alors $PGCD(2k+1, 2k+3) = PGCD(1, 3) = 1$
Si $k > 0$, en utilisant les divisions successives de l'algorithme d'Euclide on déduit que $PGCD(2k+1, 2k+3) = 1$
b. $pgcd(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = (k+1)^2 pgcd((2k+1)^2, (2k+3)^2)$
$PGCD(2k+1, 2k+3) = 1 \Rightarrow pgcd((2k+1)^2, (2k+3)^2) = 1$
D'où $pgcd(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = (k+1)^2$
4. Des questions précédentes, on peut déduire que :
$pgcd(S_{2k}; S_{2k+1}) = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 0$ impossible.
$pgcd(S_{2k+1}; S_{2k+2}) = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 1$.
Ainsi, il existe une unique valeur de n pour laquelle $pgcd(S_n; S_{n+1}) = 1$ à savoir $n = 1$.
C/
1-a. $p \wedge q = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, $\exists\ (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant : $pu_0 + qv_0 = 1$
b. $x_0 = bpu_0 + aqv_0 \Rightarrow x_0 - aqv_0 = bpu_0 \Rightarrow x_0 - aqv_0 \equiv 0[p]$
De plus $pu_0 + qv_0 = 1 \Rightarrow qv_0 \equiv 1[p]$. D'où $x_0 \equiv a[p]$
De même : $x_0 = bpu_0 + aqv_0 \Rightarrow x_0 - bpu_0 = aqv_0 \Rightarrow$
$x_0 - bpu_0 \equiv 0[q]$ or d'après **1-a.** $pu_0 \equiv 1[q]$. D'où $x_0 \equiv b[q]$
D'où x_0 est une solution du système (S) .
2. Soient x et x_0 solution de $(S) \Leftrightarrow \exists\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ / $\begin{cases} x - x_0 = mp \\ x - x_0 = nq \end{cases}$
Alors $q|x - x_0$ et $p|x - x_0$. Puisque $p \wedge q = 1$ alors $pq|x - x_0$
3. Si $pq|x - x_0$; $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = kpq = p(kq) = q(kp)$
Alors $p|x - x_0$ et $q|x - x_0 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv x_0[p] \\ x \equiv x_0[q] \end{cases}$ or $\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$
D'où $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ et x est solution de (S)
4. Soit x une solution de (S) ; $pq|x - x_0 \Leftrightarrow x \equiv x_0[pq]$
5. 8 et 13 sont premier entre eux et $x_0 = 81$. D'après **4.**, les solutions de $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$ sont sous la forme $x \equiv 81[104]$

Problème 4

1. $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $10^p \equiv 0[5] \Rightarrow 10^{p-1} \times 10 \equiv 0[5]$. Or $10 \equiv 0[5]$
Ainsi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $10^p \equiv 0[5]$ (a).
$x = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_0$ et d'après (a) on conclut que $x \equiv a_0[5]$.
2. $\forall\, p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ alors $p \geq 2$ et $10^{p-2} \times 10^2 \equiv 0[4]$ or $10^2 \equiv 0[4]$. D'où $10^p \equiv 0[4]$ (b).
$x = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_0$ et d'après (b) on conclut que $x \equiv \overline{a_1 a_0}[4]$.
3. Par récurrence : Pour $p = 0$; $10^0 = 1 \equiv 1[9]$
Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $p \geq 0$. $10^p \equiv 1[9]$ donc $10^p \times 10 \equiv 1[9]$ car $10 \equiv 1[9]$. D'où le résultat.
Puisque $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $10^p \equiv 1[9]$ alors on peut conclure que $x \equiv \sum_{p=0}^{n} a_p[9]$
4-a. $10^{x+1} = 10^x \times 10$ et comme $10^x \equiv 2[19]$; $10 \equiv 10[19]$ donc $10^{x+1} \equiv 20[19] \Rightarrow 10^{x+1} \equiv 1[19]$ car $20 \equiv 1[19]$
Comme $10^{x+1} \equiv 1[19]$ alors $pgcd(10^{x+1}; 19) = 1$ et 10^{x+1} et 19 sont premiers entre eux.
b. 19 est premier, 19 et 10 sont premiers entre eux et d'après le petit théorème de Fermat $10^{18} \equiv 1[19]$
$10^{18} \equiv 1[19]$ lors $pgcd(10^{18}; 19) = 1$ et 10^{18} et 19 sont premiers entre eux.
5-a. Soit $d/18$ et $d/(x+1)$ alors $\exists\, u$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = 18u + (x+1)v$. Puisque $10^{18} \equiv 1[19]$ et $10^{x+1} \equiv 1[19]$ alors $10^{18u} \equiv 1[19]$ et $10^{(x+1)v} \equiv 1[19]$. D'où $10^{18u+(x+1)v} \equiv 1[19]$ c'est-à-dire $10^d \equiv 1[19]$
10^d et 19 sont premiers entre eux.
b. De **5-a.**, on conclut que $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. De plus :
$10^1 \equiv 10[19]$; $10^2 \equiv 5[19]$; $10^3 \equiv 12[19]$; $10^6 \equiv 11[19]$
$10^9 \equiv 11[19]$ et $10^{18} \equiv 1[19]$ alors $d = 18$
c. $d = 18$ divise $x+1 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 1 = 18k$. Donc $x \equiv -1[18] \Rightarrow x \equiv 17[18]$ car $-1 \equiv 17[18]$

II/

1. N_2 est premier ; N_3 n'est pas premier car divisible par 3 ; N_4 n'est pas premier car $1111 = 11 \times 101$.
2. $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0 = \dfrac{10^p - 1}{9}$ (somme des termes d'une suite géométrique)
$10^p - 1 = 9N_p$ donc $10^p - 1$ est divisible par 9.
3-a. $N_p = N_{2q} = \dfrac{10^{2q} - 1}{9}$ or $10^{2q} - 1 = (100 - 1)\sum_{k=0}^{q-1} 10^k$
D'où $N_{2q} = 11 \times \sum_{k=0}^{q-1} 10^k$ donc $11 | N_p$
b. $N_p = N_{3q} = \dfrac{10^{3q} - 1}{9}$ or $10^{3q} - 1 = (1000 - 1)\sum_{k=0}^{q-1} 10^k$
D'où $N_{2q} = 111 \times \sum_{k=0}^{q-1} 10^k$ donc $111 | N_p$
c. $N_p = N_{kq} = \dfrac{10^{kq} - 1}{9}$ or $10^{kq} - 1 = (10^k - 1)\sum_{m=0}^{q-1} 10^m$
D'où $N_{2q} = N_k \times \sum_{m=0}^{q-1} 10^k$ donc $N_k | N_p$
4. Si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier .
Pour que N_p soit premier, il faut que p soit premier.
Cette condition n'est pas suffisante, car 3 est premier, mais N_3 ne l'est pas.

Problème 5

A/

1-a. Utiliser la démarche exposée dans le cours.
b. 503 est premier, 7 et 503 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Fermat, on conclut $7^{502} \equiv 1[503]$
2-a. $pgcd(49; 6) = 1$ et on déduit que $ppcm(49; 6) = 294$
$pgcd(49; 6) = 1$ divise 1 donc (E) admet une solution.
b. Les solutions est : $S = \{(1 + 6k; 8 + 49k)\ k \in \mathbb{Z}\}$
3-a. $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007} = \dfrac{7^{2008} - 1}{6}$ Car N est la somme des 2008 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 7.
Alors $7^{2008} - 1 = 6N \Rightarrow 7^2 \times 7^{2006} - 6N = 1$ D'où $49 \times 7^{2006} - 6N = 1$ et $(7^{2006}; N)$ est solution de (E)
b. $7^0 \equiv 1[4]$; $7^1 \equiv -1[4]$; $7^2 \equiv 1[4]$; $7^3 \equiv -1[4]$
Par suite $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv -1[4]$
Ainsi $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0[4]$
D'où $N \equiv 0[4]$
D'après **1.** $7^{2008} \equiv 1[503] \Rightarrow 503$ divise $7^{2008} - 1 = 6N$
Par suite 503 divise $6N$ et 503 est premier avec 6 on conclut d'après le théorème de Gauss que 503 divise N
D'où $N \equiv 0[503]$
c. D'après **b.**, 4 et 503 divise N. Or 4 et 503 sont premiers entre eux donc $4 \times 503 = 2012$ divise N
D'où N est divisible par 2012.

B/

1-a. $pgcd(143; 195) = 13$. Comme $52 = 13 \times 4$ alors $pgcd(143; 195)$ divise 52. D'où (E) admet au moins une solution.
b. On peut trouver une solution particulière en remontant l'algorithme d'Euclide comme exposé dans le cours.
On peut aussi remarquer que $(-1, -1)$ est une solution particulière.
Les solution de (E) sont alors les couples d'entiers relatifs de la forme : $(-1 + 15k; -1 + 11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. Puisque $n \wedge 5 = 1$ et 5 est un nombre premier, on conclut d'après le théorème de Fermat que $n^4 \equiv 1[5]$
Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$, $n^{4k} \equiv 1^k[5]$. D'où $n^{4k} \equiv 1[5]$
3-a. $x \equiv y[4] \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 4k$
Alors $n^x = n^{y+4k} = n^y \times n^{4k}$. Ainsi $n^x \equiv n^y \times n^{4k}[5]$
Puisque $n^{4k} \equiv 1^k[5]$ alors $n^y \times n^{4k} \equiv n^y[5]$
D'où $n^x \equiv n^y[5]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
b. Comme n, x et $y \in \mathbb{N}$ alors n^x et n^y sont de même parité.
Par suite $n^x - n^y$ est divisible par 2 car $|n^x - n^y|$ est pair.
Ainsi $n^x - n^y \equiv 0[2] \Rightarrow n^x \equiv n^y[2]$
Comme $n^x \equiv n^y[2]$ et $n^x \equiv n^y[5]$ alors 5 et 2 divisent $n^x - n^y$.
De plus 5 et 2 sont premiers entre eux ; par suite $5 \times 2 = 10$ divise $n^x - n^y \Rightarrow n^x - n^y \equiv 0[10] \Rightarrow n^x \equiv n^y[10]$
4. Si $(x; y)$ est une solution de (E) alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = -1 + 15k$ et $y = -1 + 11k$ alors $x - y = 4k \Rightarrow x \equiv y[4]$
D'où $n^x \equiv n^y[10]$ d'après **3-b.** Ainsi n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal.

Correction des exercices

Exercice 1

1-a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

b. On a $\forall n \in \mathbb{N}\ f(u_n) = \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}\ f(v_n) = \sin(-\frac{\pi}{2}+2n\pi) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = -1$

c. • Supposons par absurde que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. D'après **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

ainsi $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$

c'est-à-dire $-1 = 1$ ce qui est absurde.

On conclut donc que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ bien qu'elle soit bornée sur $\mathbb{R}$.

• Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$. Alors

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(-x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas alors la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $-\infty$.

• En utilisant la formule $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sin(x)$. Puisque la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'admet pas de limite en $-\infty$ alors la fonction $\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

• Par parité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ on conclut de même que la fonction cos n'a pas de limite en $-\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to0^+} \sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$. De même

$\lim\limits_{x\to0^-} \sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sin(x)$

Or on vient de voir que la fonction $\sin(x)$ n'a pas de limite à l'infini. Par suite, la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0

2. • $\forall x \in \mathbb{R}, -x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$. D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

• La fonction g qui prolonge f en 0 est définie par :

$g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$

3. • $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \le |x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \le |x^2|$. Alors

$\lim\limits_{x\to0} |x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)| = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

• $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = x \times x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

d'après **2.** alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Exercice 2

1. On note $I = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$. φ est continue, dérivable et $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = -\cos(x) - 1 < 0$ sur I. Donc φ est bijective sur I et strictement décroissante.

De plus $\varphi(\pi/2) = -1 < 0$ et $\varphi(\pi/6) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2} > 0$. On déduit alors qu'il existe une unique réel $\alpha \in I$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. D'où l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$

2. f est clairement décroissante sur I donc

$f(I) =]f(\pi/2), f(\pi/6)[= \left]\dfrac{\pi-2}{2}, \dfrac{\pi-1}{2}\right[$ par suite, on conclut que $f(I) \subset I$.

Récurrence, montrons le résultat demandé :

• Pour $n = 0$, par hypothèse, $\dfrac{\pi}{6} < U_0 < \dfrac{\pi}{2}$. Donc le résultat vrai à l'ordre 0

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \ge 0$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

Par hypothèse de récurrence $\dfrac{\pi}{6} < U_n < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow U_n \in I$ et comme $U_{n+1} = f(U_n)$ alors $U_{n+1} \in I \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} < U_{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{\pi}{6} < U_n < \dfrac{\pi}{2}$

3-a. Pour $x \in I$; $f'(x) = -\cos(x) \Rightarrow \forall x \in I$,

$|f'(x)| = |\cos(x)|$. Or pour tout $x \in I$, $|\cos(x)| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\forall x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[, |f'(x)| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. D'après **3-a.** et le théorème d'inégalité des accroissements finis, on déduit que $|f(U_n) - f(\alpha)| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}|U_n - \alpha|\ \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}|U_n - \alpha|$

c. Par récurrence, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|U_n - \alpha| \le \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Ou encore $0 \le |U_n - \alpha| \le \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$ d'où d'après le théorèmes des gendarmes on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - \alpha| = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

Exercice 3

1-a. Les courbes $(\mathcal{C}_{f_m})$ et $(\mathcal{C}_{f_{m+1}})$ passent toutes les deux en un point $A \Rightarrow f_m(x_A) = f_{m+1}(x_A)$. Cherchons alors les réels x vérifiant $f_m(x) = f_{m+1}(x)$. On note (E) cette équation

$x \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x+4m}{x^2+(5m+1)x+3} = \dfrac{x^2+3x+4(m+1)}{x^2+(5m+6)x+3}$

En faisant le produit croix puis en développant et factorisant, on déduit que :

$x \in (E) \Leftrightarrow 5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0$. On note (E') cette dernière équation.

Les racines de (E') sont : -2; $-\dfrac{6}{5}$ et 1. On déduit alors que toutes les courbes $(\mathcal{C}_{f_m})$ passent par trois points fixes à savoir $A = (-2; -2/5)$; $B = (1; 4/5)$ et $C = (-6/5; -2/3)$

b. • Ensemble de dérivabilité de f_m

L'équation $(\mathcal{E})$ $x^2 + (5m+1)x + 3 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = 25m^2 + 10m - 11$. Δ a pour racine $m_1 = -\dfrac{1+2\sqrt{3}}{5}$ et

$m_2 = \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{5}$. Ainsi :

– Si $m \in]m_1; m_2[$, $\Delta < 0$ donc dans ce cas, f_m est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$

– Si $m \in \{m_1; m_2\}$ alors $\Delta = 0 \Rightarrow (\mathcal{E})$ a une seule solution $x_0 = -\dfrac{5m+1}{2}$. Par conséquent, f_m est dérivable sur $]-\infty; x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$

– Si $m \in]-\infty; m_1[\cup]m_2; +\infty[$, $(\mathcal{E})$ admet deux solutions distinctes à savoir $x_1 = -\dfrac{5m+1-\sqrt{\Delta}}{2}$

$x_2 = -\dfrac{5m+1+\sqrt{\Delta}}{2}$

Dans ce cas, f_m est dérivable sut $\mathbb{R} \setminus \{x_1; x_2\}$

• Sur l'ensemble sur lequel f_m est dérivable, on a :

$f'_m(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+(5m+1)x+3} - \dfrac{(5m+2x+1)(4m+x^2+3x)}{[x^2+(5m+1)x+3]^2}$

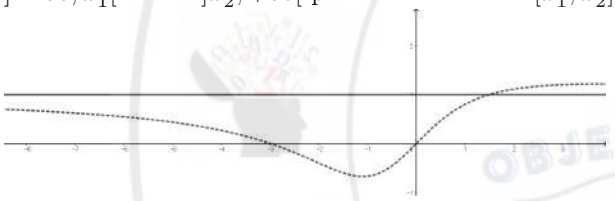
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = 1$ donc l'asymptote horizontale de $(\mathcal{C}_{f_m})$ a pour équation $y = 1$.

Il faut alors que $f_m(3/2) = 1 \Rightarrow m = 0$

d. Pour $m = 0$, $f'_0(x) = \dfrac{-2x^2+6x+9}{(x^2+x+3)^2}$

$f'_0(x)$ s'annule en $x'_1 = \dfrac{3(1-\sqrt{3})}{2}$ et $x'_2 = \dfrac{3(1+\sqrt{3})}{2}$

On déduit alors que f_0 est strictement décroissante sur $]-\infty; x'_1[$ et sur $]x'_2; +\infty[$ puis croissante sur $[x'_1; x'_2]$



Représentative graphique de $(\mathcal{C}_{f_0})$

2-a. En suivant la démarche de la question **1-a.**, on déduit que tout les courbes $(\mathcal{C}_{g_m})$ passent par trois points fixes $A = (0,1)$, $B = (-2,1)$ et $C = (1,-1/2)$

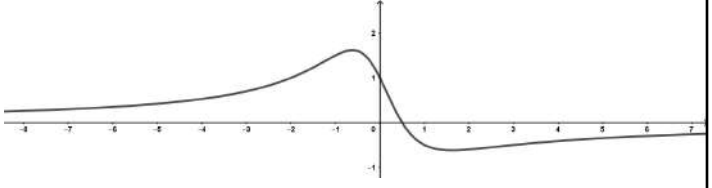
b. $[g_m(x)]^2 = \dfrac{m^2x^4 - 4mx^3 + (2m+4)x^2 - 4x + 1}{x^4 - 4mx^3 + (4m^2+2)x^2 - 4mx + 1}$

Ainsi $[g_m(x)]^2 = 1 \Rightarrow m = 1$

c. Pour $m = 0$, $g_0(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1} \Rightarrow D_{g_0} = \mathbb{R}$ et

$g'_0(x) = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}$ qui s'annule en $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On déduit que g_0 est alors strictement croissante sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ puis décroissante sur $[x_1; x_2]$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g_0(x) = 0$ donc $(\mathcal{C}_{g_0})$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.



courbe représentative de $(\mathcal{C}_{g_0})$

Exercice 4

1. $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$ puis par identification, on déduit que $a = 1$; $b = c = 2$

On déduit alors que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique de (C)

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$f'(x)$ s'annule en $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$. Par suite f est strictement croissante sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ et est décroissante sur $[x_1, 1[$ et sur $]1, x_2]$.

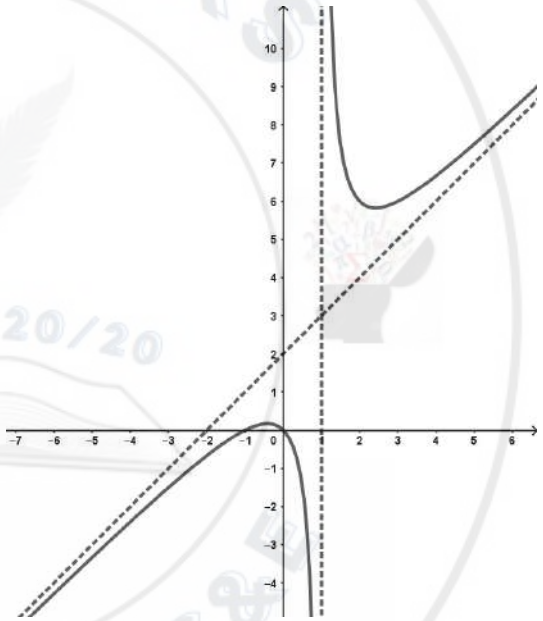
(C) coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et $x = -1$

(C) coupe l'axe des ordonnées en $x = 0$

3-a. La droite (D') : $x = 1$ est une asymptote verticale de (C). Notons $I(x_0; y_0) = (D) \cap (D') \Rightarrow y_0 - 2 = 1$. D'où I a pour coordonnées $(1; 3)$

b. Facilement on a : $f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 6 = 2y_0$ donc I est un centre de symétrie de (C)

4.



Représentative graphique de (C)

5. $f(x_1) = 3 - 2\sqrt{2}$ et $f(x_2) = 3 + 2\sqrt{2}$. On déduit alors que :

– Si $m \in]-\infty; 0[$, $f(x) = m$ admet deux solutions de signes opposés

– Si $m = 0$, $f(x) = 0$ admet deux solutions dont une est nulle et l'autre est de signe négatif.

– Si $m \in]0, 3-2\sqrt{2}[$, $f(x) = m$ admet deux solutions de signe négatif.

– Si $m = 3-2\sqrt{2}$, $f(x) = m$ admet une seule solution de signe négatif

– Si $m \in]3-2\sqrt{2}; 3+2\sqrt{2}[$; $f(x) = m$ n'admet pas de solution

– Si $m = 3+2\sqrt{2}$, $f(x) = m$ admet une seule solution de signe positif

– Si $m \in]3+2\sqrt{2}; +\infty[$; $f(x) = m$ admet deux solutions de signe positif.

Correction des problèmes

Problème 1

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$.
• f n'a pas d'asymptote horizontale mais a une asymptote verticale d'équation $x = 2$

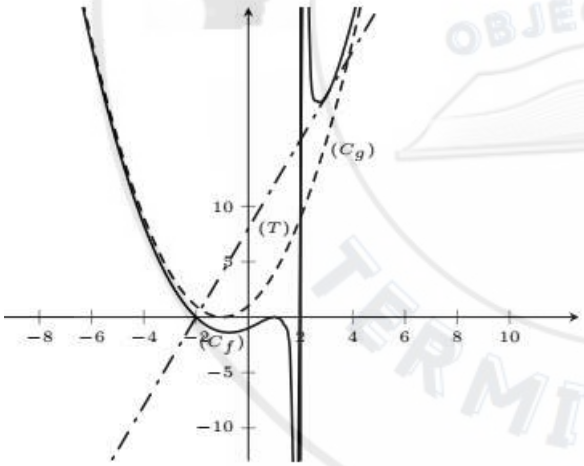
2-a. En développant, on retrouve ce qui est demandé
b) Posons $R(x) = x^2 - 2x - 2$. $R(x)$ a pour racines $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Donc $P(x) \geq 0$ pour $x \in [x_1, 1] \cup [x_2, +\infty[$ et $P(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty, x_1] \cup [1, x_2]$

3-a. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$

b. $f'(x)$ a le même signe que $P(x)$ donc :
– f est croissante sur $[x_1, 1]$ et sur $[x_2, +\infty[$.
– f est décroissante sur $]-\infty, x_1]$, sur $[1, 2[$ et sur $]2, x_2]$.

Tableau des variations de f

x	$-\infty$	x_1		1		2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1.39	↗	0	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	19.39	↗ $+\infty$



Représentative graphique de (C_f) ; (T) et (C_g)

4-a. La tangente est horizontale si la dérivée est nulle. Donc aux points $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

b. Équation de la tangente (T) à (C_f) en $x = 3$ est :
$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Rightarrow y = 4x + 8$.

5. $f(x) = \dfrac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c + d}{x-2}$. Par identification : $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 4$

6-a. $f(x) - g(x) = \dfrac{4}{x-2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)] = 0$. On peut conclure que les deux courbes sont asymptotiques à l'infini.

b. • Si $x > 2$; (C_f) est au dessus de la courbe (C_g).
• Pour $x < 2$, (C_f) est en dessous de la courbe (C_g).

Problème 2

1-a. • $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $f'(x) = \dfrac{-ax^2 + (6-2b)x + a}{(x^2+1)^2}$

b. Pour un point $\Omega = (x_0, y_0)$, l'équation de la tangente en ce point est donnée par : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Ainsi il faut que : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$ et $a = 4$.

2. Par identification, on trouve $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.

3. • $f'(x) = \dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
• f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$; et f est croissante sur $[-1, 1]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

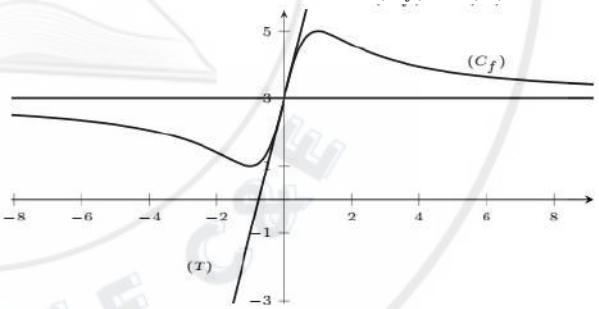
Tableau des variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

4. La tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 4x + 3$.
$f(x) - (4x+3) = \dfrac{-4x^3}{x^2+1}$. Ainsi si $x \geq 0$ (T) est au dessus de (C_f) et si $x \leq 0$, (T) est en dessous de (C_f).

5. $f(x) + f(-x) = 6 = 2 \times 3$, d'où I est un centre de symétrie.

6. Représentation graphique de (C_f) et (T).



Représentative graphique de (C_f) et (T)

Problème 3

1. On pose $h(x) = \sin(x)$. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = h'(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = f(0)$ alors f est prolongeable par continuité en 0.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$. Donc f est paire.
On obtient alors la totalité de la courbe (C_f) sur $\mathbb{R}$ en faisant la symétrie de la courbe (C_f) sur $[0, +\infty[$ par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Pour tout $x \in [0, \pi]$, g est dérivable et $g'(x) = -x\sin(x)$.
g est alors décroissante sur $[0, \pi]$
g étant décroissante, $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) \leq g(0) = 0$. Donc g est négative sur $[0, \pi]$

4. $\forall x \in]0,\pi[$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

$f'(\pi) = -1/\pi$ donc f en dérivable en π.

5-a. Posons que $u(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - [x - \sin(x)]$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $u'(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 1 + \cos(x)$.

• $u''(x) = x - \sin(x)$ et $u'''(x) = 1 - \cos(x)$.

Ainsi $u'''(x) \geq 0$ donc $u''(x)$ est croissante sur $[0,+\infty[$. D'où $\forall x \in [0,+\infty[$ $u''(x) \geq u''(0) = 0$.

Par suite $x - \sin(x) \geq 0 \quad (a)$.

• $u''(x) \geq 0 \Rightarrow u'$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite $\forall x \in [0,+\infty[$, $u'(x) \geq u'(0) = 0$. Donc u est croissante sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $u(x) \geq u(0) = 0$.

On en déduit que $u(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - [x - \sin(x)] \geq 0$

D'où $x - \sin(x) \leq \dfrac{1}{6}x^3 \qquad (b)$.

De (a) et (b) on conclut que $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin(x) \leq \dfrac{1}{6}x^3$

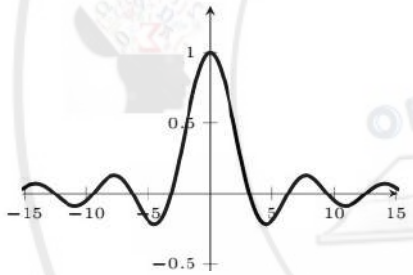
b. D'après la question précédente, on tire : $x > 0$,

$-\dfrac{1}{6}x \leq \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leq 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6}x = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$.

Or par définition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = f'(0)$

D'où f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$

Représentation graphique de (C_f).



Représentative graphique de (C_f)

Problème 4

I/

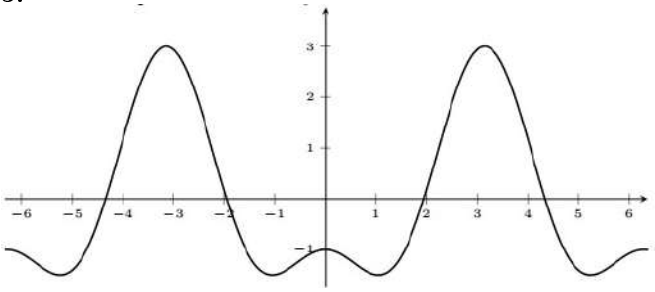
1-a. $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x + 2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = f(x)$. f est alors paire et $2\pi-$périodique.

b. f est paire et $2\pi-$périodique donc son domaine d'étude peut être réduit à $[0,\pi]$

2-a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 2[1 - 2\cos(x)]\sin(x)$

b. $\forall x \in [0,\frac{\pi}{3}]$ f est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{3}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{3},\pi]$ $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

3.



Représentative graphique de (C_f)

II/

1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $x + 2\pi$ est dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

3. $\lim\limits_{x\to -\frac{3\pi}{2}^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{3\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)}{1 - \sin(x)} = +\infty$ et

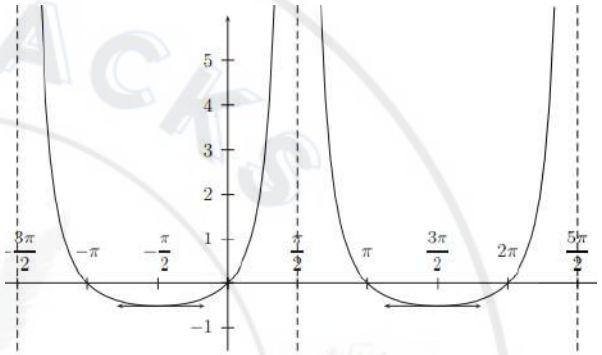
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sin(x)}{1 - \sin(x)} = +\infty$

4. • Pour $x \in]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g(x)$ est dérivables sur $]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{\cos(x)}{[1 - \sin(x)]^2}$

• $\forall x \in]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[$, g est décroissante.

• Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, g est croissante

5.



Représentation graphique de (C_g)

Problème 5

Partie A

1-a. • $D_f = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire et par conséquent (C_f) est symétrique par rapport à l'axe (oy).

• f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$

b. Tangente (T) à la courbe (C_f) en 1 : $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

c. $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}$ et par conséquent $\forall x \geq 0$, (C_f) est au dessus de (T) et $\forall x \leq 0$, (C_f) est en dessous de (T).

d. Tangente (T') à la courbe (C_f) en $x = -1$ a pour équation $(T') : y = \dfrac{1}{2}x + 1$. f étant paire on déduit que : $\forall x \geq 0$, (C_f) est en dessous de (T') et $\forall x \leq 0$, (C_f) est au dessus de (T').

2. Pour tout $x \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ on a $g(x) = \tan(x)$.

g est bien définie, continue et dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ de dérivée $g'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$\forall\, x \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.

De plus $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$.

g réalise alors une bijection de $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ vers $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

3-a. Soit $y \in \mathbb{R}$;

$\exists!\ x \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ tel que $\begin{cases} \tan(x) = y \text{ ou} \\ \tan(-x) = -\tan(x) = -y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = arctan(y) \text{ ou} \\ -x = arctan(-y) \end{cases} \Leftrightarrow arctan(-y) = -arctan(y)$.

Par conséquent la fonction $x \mapsto arctan(x)$ est impaire.

b. g est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ et g' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors la réciproque de g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

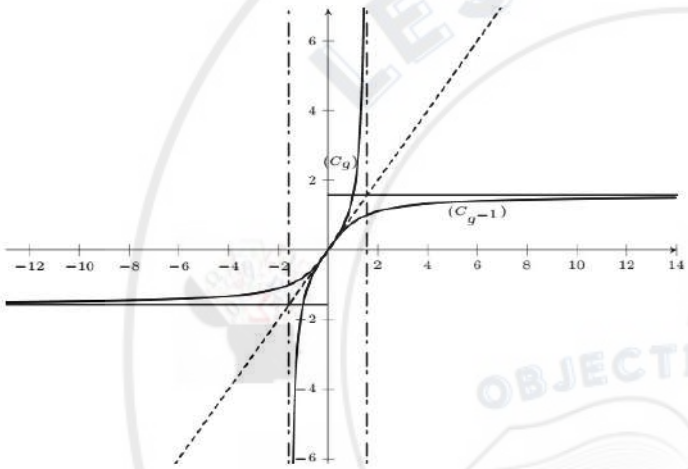
De plus : $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g' \circ g^{-1}(x)} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$ (voir cours)

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Tableau des variations de h

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

d.



Représentation graphique de (C_h)

e. La tangente (T) à γ au point d'abscisse 1 est

$(T) : y = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{\pi}{4}$

Partie B :

1-a. Domaine de définition de v : La fonction $artan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par suite :

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \geq 0, 1+\cos(x) \neq 0 \right\}$

• $1+\cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $1-\cos(x) \geq 0$ et

$1+\cos(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \geq 0$

D'où $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b. v est dérivable sur $\{x \in D, u_2 > 0\}$. Or $1-\cos(x) = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D'où v est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c. • Puisque $\cos(x)$ est $2\pi-$périodique et paire sur $\mathbb{R}$ donc v est aussi 2π-périodique et paire sur D. On peut restreindre le domaine d'étude de v sur $[0, \pi[$.

• $\lim\limits_{x \to \pi^-} v(x) = \dfrac{\pi}{2}$

• Puisque $\lim\limits_{x \to \pi^-} v(x)$ est finie alors on conclut que f est prolongeable par continuité en π et donc sur $[0, \pi]$.

• f étant 2π-périodique et paire et que f est prolongeable par continuité sur $[0, \pi]$ alors on conclut que f est aussi prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

d. Pour $x \in]0, \pi[$, $v(x) = arctan(u(x))$;

$v'(x) = u'(x) \times h'(u(x))$ (dérivée de la composée)

Or $u'(x) = \dfrac{\sin(x)}{[1+\cos(x)]^2 \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}}$

et $h'(u(x)) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$ alors

$v'(x) = \dfrac{\sin(x)}{2[1+\cos(x)]\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}}$.

Or $1-\cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ et $1+\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$

Donc $\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \tan^2(\frac{x}{2}) \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \tan(\frac{x}{2})$ car $x \in]0, \pi[\Rightarrow 2[1+\cos(x)]\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = 4\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})$

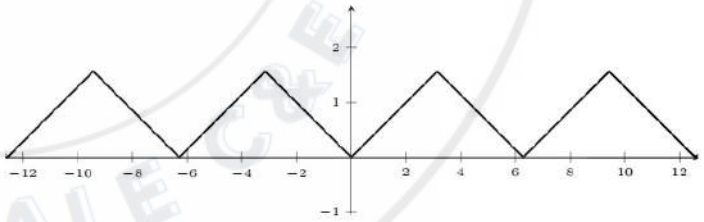
Donc $2[1+\cos(x)]\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = 2\sin(x)$ car

$2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = \sin(x)$. D'où $v'(x) = \dfrac{1}{2}$

e. Comme $v'(x) = \dfrac{1}{2}$ alors en déduit que $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in [0, \pi]$, $v(x) = \dfrac{1}{2}x + b$ or $v(0) = 0$ alors on déduit que $\forall\, x \in [0, \pi]$, $v(x) = \dfrac{1}{2}x$. Comme v est paire, alors $\forall\, x \in [0, \pi]$, $-x \in [-\pi, 0]$ et $v(-x) = v(x) \Longrightarrow v(x) = \dfrac{1}{2}|x|$.

D'où $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$ $v(x) = \dfrac{1}{2}|x|$

f.



Représentation graphique de (C_v)

2-a. $\forall\, x \in]0, \pi[$, $1 + \mathrm{e}^{ix} = 2\cos(\dfrac{x}{2})\,\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$ et

$1 - \mathrm{e}^{ix} = 2\sin(\dfrac{x}{2})\,\mathrm{e}^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})}$

b. On déduit alors que $1+\cos(x) = 2\cos^2(\dfrac{x}{2})$ et

$1-\cos(x) = 2\sin^2(\dfrac{x}{2}) \Rightarrow \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \tan^2(\dfrac{x}{2})$

Donc $arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) = arctan\left(\sqrt{\tan^2(\dfrac{x}{2})}\right)$

$= arctan(|\tan(\dfrac{x}{2})|)$

Or $arctan(|\tan(\dfrac{x}{2})|) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ si } x \geq 0 \\ -\dfrac{x}{2} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

D'où $v(x) = \frac{1}{2}|x|$ Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ Puisque v est paire et 2π-périodique.

Problème 6

I/

1. $D_f =]-1, 1[$

2. • Continuité en 1 :

$R(x) = 2x^2 - x - 1$. Racines de R : $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2\sqrt{(1-x)}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+x}} = 0.$

f est donc continue en 1

• Continuité en -1 :

$\lim\limits_{x\to -1^+} |2x^2 - x - 1| = 2$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0^+$. D'où $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. f n'est donc pas continue en -1

3. • f n'étant pas continue en -1 alors f n'est pas dérivable en -1.

• $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty.$

D'où f n'est pas dérivable en 1

4. • Si $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}.$

Alors : $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{-6}{\sqrt{3}}$

• Si $x > -\frac{1}{2}$, $f(x) = \dfrac{-2x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}.$

Alors : $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

Comme $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \dfrac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} \neq \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}$ par suite f n'est pas dérivable en $-\frac{1}{2}$

5. • f est dérivable sur $]-1, -1/2[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]-1, -1/2[$.

• f est aussi dérivable sur $]-1/2, 1[$.

• $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3+3x-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in]-1, -\frac{1}{2}[\\ \dfrac{-2x^3+3x-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in]-\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$

6. Étude de signe de f' et variations de f :

• Pour $x \in]-1, -1/2[$; $f'(x) < 0$ et par suite f est décroissante sur $]-1, -1/2[$.

• Pour $x \in]-1/2, 1[$ et pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

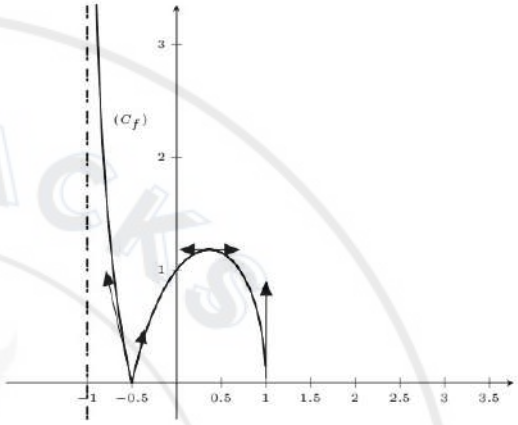
Pour tout $x \in \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right[$, $f'(x) \leq 0$ et par suite f est décroissante sur $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right[$.

7.

Tableau des variations de f

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	0.98	↘	0

f.



Représentation graphique de (C_f)

II/

1. • g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$, par suite la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ de même que la fonction $x \mapsto x$. Par suite g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $x^2+1 > 0$ alors $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On déduit que g est dérivable alors sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ par suite g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -g(x)$. Par suite g est impaire $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

De plus $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ pour $x > 0$. D'où $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -1$

3-a. f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 2 = g(x) - 2$

b. On a $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $g(x) < 1$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$ et par suite $f'(x) = g(x) - 2 < 0$. Et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus pour x>0, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x = x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2)$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

4. f est bijective ; $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -2+\sqrt{2} < 0$, on déduit qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Par dichotomie, on déduit que $\alpha \approx 0.58$ à 10^{-2} près.

Problème 7

Partie A

1. Étude de f et g

• $\forall\ x \in [0,+\infty[,\ x^2+1>0$. Alors on déduit que f et g sont bien définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+1$ et $g'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-1$

• f est croissante sur $[0,+\infty[$

• $g'(x)=\dfrac{2x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ alors $g'(x)=0$ en $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi : g est décroissante pour $x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et pour $x\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$, g est croissante

2. Variations de $h(x)$: $h(x)=\begin{cases} g(x) \text{ Si } x\in[0,2] \\ f(x) \text{ Si } x\in[2,+\infty[\end{cases}$

h est décroissante sur $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right]$

3. Soit M appartenant à $\Delta \Rightarrow M(x,0)$. Alors :
$\phi(M)=MA+MB+MC=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}$
D'où $\phi(M)=2\sqrt{x^2+1}+|x-2|=h(x)$
Quand M décrit Δ, x décrit $[0,+\infty[$ et d'après la question précédente, ϕ atteint son minimum au point $M(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$.
Ce minimum est $h(\frac{\sqrt{3}}{3})=2+\sqrt{3}$.

Partie B :

1-a. $|a-1|+|a+1|=\begin{cases} -a-1-a+1=-2a \text{ Si } a\le -1 \\ a-1+a+1=2a \text{ Si } a\ge 1 \\ -a+1+a+1=2 \text{ Si } -1\le a\le 1 \end{cases}$
$\forall\ a\in\mathbb{R}\ |a-1|+|a+1|\ge 2$ avec égalité si $a\in[-1,1]$

b. Pour $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, la fonction
$\varphi(x)=\sqrt{x^2+(a-1)^2}+\sqrt{x^2+(a+1)^2}$ est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$\varphi'(x)=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(a-1)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(a+1)^2}}\right)$
Ainsi φ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.
Tableau des variations de φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	$\vdots$	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|a-1\|+\|a+1\|$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau des variations de φ on déduit $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\ge\varphi(0)=|a-1|+|a+1|$ et d'après la question précédente on déduit que $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\ge 2$.
D'après la question **1-a.**, on ne peut avoir $\varphi(x)=2$ que si $x\in\ ]-1,1[$. Et pour $x\in\ ]-1,1[$, $\varphi(x)=2\Rightarrow x=0$.

d. $MB+MC=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}$.
• Pour $y\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $MB+MC\ge 2$ d'après la question **1-c.** de la **Partie B**.
• Si $y=-1$ ou $y=1$; $MB+MC=|x|+\sqrt{x^2+4}\ge 2$.
Conclusion : Pour $M(x,y)$: $MB+MC\ge 2$

2-a. $MB+MC=2$. D'après la question **1-c.** de la **partie B**, $M(x,y)\in\Gamma_1$ si son abscisse $x=0$.

b. $M(x,y)\in\Gamma_1\Rightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$.
On déduit que $x=0$ d'après la question précédente
Γ_1 : $|y+1|+|y-1|=2$ et d'après la question**1-a.** de la **Partie B**, on déduit que $y\in[-1,1]$. Ainsi $\Gamma_1=[BC]$

3. On suppose $r>1$.
• Supposons $y<-r$: alors pour $M(x,y)\in\Gamma_r$ on a :
$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2r\ge|y-1|+|y+1|$ et puisque par hypothèse $y<-r<-1$ alors
$|y-1|+|y+1|=-2y>2r\Rightarrow 2r=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\ge|y-1|+|y+1|>2r$ absurde et donc on conclut que $y\ge -r$.
• Supposons $y>r>1$ de même on a :
$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\ge|y-1|+|y+1|$ et puisque par hypothèse $y>r>1$ alors :
$|y-1|+|y+1|=2y>2r\Rightarrow 2r=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\ge|y-1|+|y+1|>2r$ absurde et donc on conclut que $y\le r$.
D'où $M(x,y)\in\Gamma_r$ alors son ordonnée vérifie : $-1\le\dfrac{y}{r}\le 1$

4. Γ_r rencontre Δ en un point $M(x,y)$ alors :
$\begin{cases} y=0 \\ 2\sqrt{x^2+1}=2r \text{ avec } x\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=\sqrt{r^2-1} \end{cases}$
D'où pour tout $r\ge 1$,Γ_r rencontre Δ en un unique point T_r de coordonnées $(\sqrt{r^2-1},0)$]

5-a. Soit $M(x,y)$ tel que : $\begin{cases} x=\sqrt{r^2-1}\cos(t) \\ y=r\sin(t) \end{cases}$
$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}$
$=\sqrt{(r^2-1)\cos^2(t)+(r\sin(t)-1)^2}$
$+\sqrt{(r^2-1)\cos^2(t)+(r\sin(t)+1)^2}$
En développant et en utilisant les formules trigonométriques usuelles avec la condition : $r\ge 1$, on trouve que :
$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2r$
Puisqu'on peut écrire $\sin(t)=\dfrac{y}{r}$ alors on conclut que : tout point de Γ_r a pour coordonnées (x,y) : $\begin{cases} x=\sqrt{r^2-1}\cos(t) \\ y=r\sin(t) \end{cases}$

b. Soit M appartenant à Γ_r alors :
$MA^2-T_rA^2=(2-x)^2+y^2-\left(2-\sqrt{r^2-1}\right)^2$
$=\left(2-\sqrt{r^2-1}\cos(t)\right)^2+r^2\sin^2(t)-\left(2-\sqrt{r^2-1}\right)^2$
$=(1-\cos(t))\left(1+\cos(t)+4\sqrt{r^2-1}\right)$.
D'où $MA^2-T_rA^2=(1-\cos(t))\left(1+\cos(t)+4\sqrt{r^2-1}\right)$

c. Soit $M(x,y)\neq T_r$ et $M\in\Gamma_r$.Alors :
$MA^2-T_rA^2=(1-\cos(t))\left(1+\cos(t)+4\sqrt{r^2-1}\right)$. Puisque $M\neq T_r$ alors $t\neq 0$. D'où $1-\cos(t)>0$ et on conclut que $MA^2-T_rA^2>0$. Pour tout $M\in\Gamma_r$, on a :
$\phi(M)=MA+MB+MC=MA+2r$ et
$\phi(T_r)=T_rA+T_rB+T_rC=T_rA+2r$
$\Rightarrow\phi(M)-\phi(T_r)=MA-T_rA$ or
$MA^2-T_rA^2>0\Rightarrow MA-T_rA>0$.
D'où Pour tout $M\in\Gamma_r$, $\phi(M)>\phi(T_r)$

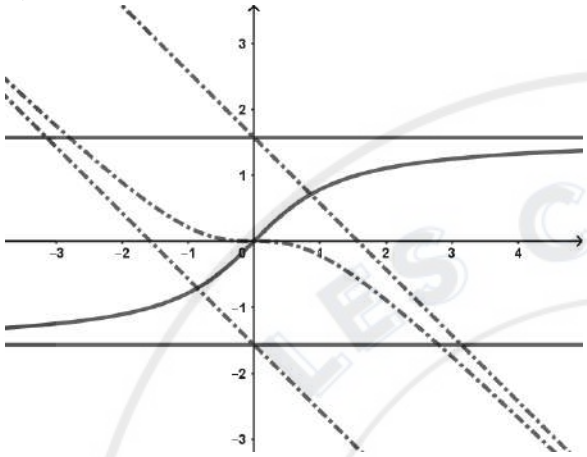
6. Lorsque r varie, T_r se déplace sur le demi-axe Δ. D'après **la partie A**, la position de T_r pour laquelle $\phi(M)$ est minimale est précisément au point M_0 de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)$
Ainsi pour tout M du plan différent de M_0,
$\phi(M)>\phi(T_r)>\phi(M_0)$

Problème 8

A/ 1. Voir problème 5, question **A/ 3-b.**

2. $\forall x \in [a,b]$, $\dfrac{1}{1+b^2} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{1+a^2}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[a,b]$, on déduit que : $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leq arctan(b) - arctan(a) \leq \dfrac{b-a}{1+a^2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$



B/ 1-a. D'après **A/ 1.**, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant somme de deux fonctions dérivables de dérivée $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = -\dfrac{x^2}{1+x^2}$

b. u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$ (Dresser le tableau des variations)

c.• $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u(x)}{x} = -1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} [u(x)+x] = \dfrac{\pi}{2}$. D'où la droite d'équation $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de v en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{u(x)}{x} = -1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} [u(x)+x] = -\dfrac{\pi}{2}$. D'où la droite d'équation $y = -x - \dfrac{\pi}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de u en $-\infty$.

2-a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est en particulier dérivable sur $[a,b]$. $\forall t \in [a,b]$, $g'(t) = u(x)v'(t) - v(x)u'(t)$

b. $g(0) = 0$ et $g(x) = 0$. Donc $g(0) = g(x) = 0$.

g continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $g(a) = g(b) = 0$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $g'(c) = 0$ d'après le théorème d'égalité des accroissements finis.

On rappelle que $a = min(x,0)$ et $b = max(x,0)$

c. D'après la question précédente, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow u(x)v'(c) - v(x)u'(c) = 0$. Or comme $x \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $u(x) \neq 0$ et $u(c) \neq 0$

Par suite $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(c)}{v'(c)}$

3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{arctan(x) - x}{x^2} = \lim\limits_{c\to0} \dfrac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c}$ car quand $x \to 0$, $c \to 0$ or $\dfrac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c} = \dfrac{-c}{2(1+c^2)}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{arctan(x) - x}{x^2} = 0$

Correction des exercices

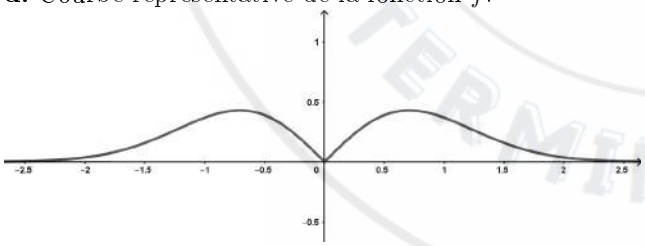
Exercice 1

1- a. La fonction g est le produit de deux fonctions : $h : x \mapsto x$ et $p : x \mapsto e^{-x^2}$. Et comme la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction p est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x^2$ alors, on déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle a pour dérivée : $g'(x) = (-2x^2+1)e^{-x^2}$
b. $g(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -g(x)$
On en déduit que la fonction g est impaire.

2- a. On a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x^2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2e^{-2x^2}}$
Pour $x \geqslant 0$, l'expression de f se simplifie en :
$f(x) = x\sqrt{(e^{-x^2})^2} = xe^{-x^2}$. D'où pour : $x \geqslant 0$; $f(x) = g(x)$
b. Étant donné que pour $x \geqslant 0$ $f(x) = g(x)$ alors,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
Pour $x \leqslant 0$, $-x \geq 0$ et donc $f(-x) = g(-x)$
Or g est impaire, alors $f(-x) = g(-x) = -g(x) = -xe^{-x^2}$
Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -g(x) = 0$
c. • On a montrer en **2-a** que pour $x \geqslant 0$; $f(x) = g(x)$.
Par conséquent, la fonction f est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ on en déduit que la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Tableau des variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$					
$f(x)$	0	↗	0.43	↘	0	↗	0.43	↘	0

d. Courbe représentative de la fonction f.



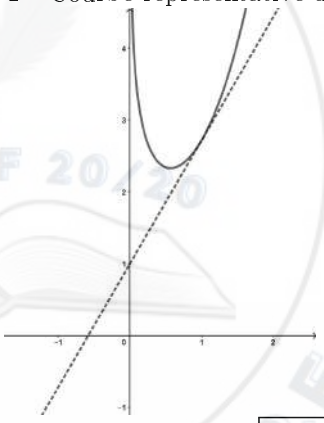
Exercice 2

1-a. La fonction g est bien définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée : $g'(x) = (1+x)e^x$ donc $g(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
b. g est strictement monotone (croissante ici) sur $[0, +\infty[$.
De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que g est bijective, il existe une unique valeur α sur $]0, +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha e^{\alpha} = 1$.
Par dichotomie, on trouve $0.567 < \alpha < 0.568$
c. g est croissante et $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $[0, \alpha[$ et $g(x) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

2- a. La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$. D'après la question précédente, on conclut que la fonction f est décroissante sur $]0, \alpha]$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$
De plus $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

b. $f(\alpha) = e^{\alpha} - \ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} - \ln\left(\dfrac{1}{e^{\alpha}}\right)$ car $\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} = 1$
Donc $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} - \ln(1) + \ln(e^{\alpha}) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. D'où $m = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$
Avec $\alpha \approx 0,567$, on a $m \approx 2,33$. D'où $2.33 \leqslant m \leq 2.34$
3. Une équation de la tangente est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
D'où (T) a pour équation : $y = (\mathrm{e}-1)x + 1$
Notons $A(x;0)$ le point d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses. Alors, $(e-1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-e}$
4- Courbe représentative de la fonction f.



Exercice 3

1-a Soit $x > 0$
On a : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{x(\ln(1+x)-\ln(x))}$
D'où le résultat
b. • $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to0} e^{x(\ln(1+x)-\ln(x))}$
Et comme : $\lim\limits_{x\to0^+} x\,(\ln(1+x) - \ln(x)) = 0$,
alors, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{x(\ln(1+x)-\ln(x))} = 1$
• Pour $x > 0$; $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x}$
Et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$
Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$
c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; n est non nulle, donc $\dfrac{1}{n}$ existe, puis $1+\dfrac{1}{n} > 0$ et donc $(u_n)_{(n>0)}$ existe. Et d'après ce qui précède, on peut déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.

2- a Soit $x \geqslant 0$
• On pose : $g(x) = \ln(x+1) - x$
La fonction g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivé
De plus, $g'(x) = -\dfrac{x}{1+x}$, on en déduit que g est décroissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $g(x) \leq g(0) = 0$ soit donc, $\ln(x+1) - x \leqslant 0$ ou encore $\ln(1+x) \leq x$
• On pose $h(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$
h est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée
$h'(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, on en déduit que h est croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, on conclu que $\forall x \in [0, +\infty[\,;\, h(x) \geq g(0) = 0$ soit donc, $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$ ou encore $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$
En conclusion, on déduit que : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

b. En se basant sur **2-a** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3- a Soit $x \in]0,1[$ on pose $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$
f est continue et dérivable sur $x \in]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$
On a : $f'(x) = \ln(x) - \ln(1-x)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$
Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]\dfrac{1}{2}, 1[$ et négative sur $]0, \dfrac{1}{2}]$. La fonction f admet donc un minimum en $\dfrac{1}{2}$ et ce minimum est égal à : $f(1/2) = -\ln(2)$
b. En se basant sur **3-a**, on déduit que : $\forall x \in]0,1[$,
$x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2) \Rightarrow$ pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \geq -\ln(2)$
c. Pour $\forall x \in]0,1[\,;$
$\ln\left(x^x (1-x)^{1-x}\right) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) = f(x)$
Donc : $\ln\left(x^x (1-x)^{1-x}\right) \geqslant -\ln(2)$
Sur $]0,1[$ la fonction ln est croissante et négative. On en déduit que : $\forall x \in]0,1[$, $x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

1- a
• $\lim\limits_{x\to 0} (e\ln(x) - x) = -\infty$
• On peut écrire : $f(x) = e^x \left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$ or
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1$. Ainsi
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b. $f'(x) = \dfrac{e}{x} - 1$. Ainsi sur $]0, e]$, $f'(x) > 0$ et sur $]e, +\infty[$, $f'(x) < 0$. D'où f est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $]e, +\infty[$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

c. On remarque sur le tableau précédent que pour tout réel x strictement positif et différent de e, $f(x) < 0$
Ainsi : $f(\pi) < 0$, c'est à dire $e\ln(\pi) < \pi$, soit $\ln(\pi^e) < \pi$
En composant par la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on a alors : $e^{\ln(\pi^e)} < e^\pi$. D'où $\pi^e < e^\pi$
2- a. • Soit $x \in]0, +\infty[$. h et g sont continues et dérivables et on a : $h'(x) = \dfrac{x}{x+1} > 0$, et $g'(x) = \ln(x+1) > 0$
h et g sont donc strictement croissantes sur $]0, +\infty[$
• Pour $x > 0$, $h(x) > f(0) = 0$ et de même, $g(x) > g(0) = 0$
Finalement h et g sont strictement positives sur $]0, +\infty[$. Ce qui revient à écrire : $\forall x > 0$, $\ln(x+1) < x < (1+x)\ln(x+1)$
b. On a :

$$\bullet \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^k} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k \times \prod\limits_{k=1}^{n} k^k}$$

Ainsi $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$

$$\bullet \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+k}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod\limits_{k=1}^{n} k \times \prod\limits_{k=1}^{n} k^k}$$

Ainsi $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{k+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$
• D'après **2- a.**, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k} < \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$
Ce qui fournit : $k\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, puis par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 < \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$
En faisant le produit membre à membre de cet encadrement, on obtient pour tout naturel non nul n :
$\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k < \prod\limits_{k=1}^{n} e < \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$.
Ainsi : $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$.
Et d'après **2-b.**, on conclut $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < \mathrm{e}^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$
d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \geq 0$, la fonction qui à $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante. Ainsi, d'après le résultat de **c.**, on trouve : $\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^n}{n!}} < \sqrt[n]{\mathrm{e}^n} < \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}}$ et par suite
$\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e < \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)^{n+1}}}{\sqrt[n]{n!}} \Rightarrow \dfrac{1}{e}\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \dfrac{1}{e}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)^{n+1}}}{n}$
Or $\dfrac{1}{e}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)^{n+1}}}{n} = \dfrac{1}{e}\dfrac{(n+1)\sqrt[n]{(n+1)}}{n}$. D'où le résultat
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ alors on conclue par le théorème des gendarmes que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

Correction des problèmes

Problème 1

Partie I

1. Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0,+\infty[$ comme somme et composées de fonctions qui le sont.

On a $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{x+1}<0$ sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$

$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{x+1}>0$ sur $[0,+\infty[$

Donc g est croissante sur $[0,+\infty[$

2. • La fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$ donc $\forall\, x\in[0,+\infty[,\ f(x)\leq f(0)=0$ ou encore $\ln(x+1)\leqslant x$

• g est croissante sur $[0,+\infty[$ donc $\forall x\in[0,+\infty[$;

$g(x)\geqslant g(0)=0$ ou encore $\ln(x+1)\geqslant x-\dfrac{x^2}{2}$

Donc, pour tout réel $x\geqslant 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x$

3-a. Par récurrence, montrons que $u_n>0$ pour tout $n\geqslant 1$

• Pour $n=1$, $u_1=\dfrac{3}{2}\geqslant 1$, donc vraie pour $n=1$

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $k\geqslant 1$, $u_k>0$, et montrons que $u_{k+1}>0$:

$u_{k+1}=u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)>0$, puisque $u_k>0$, et $\dfrac{1}{2^{k+1}}>0$,

donc $u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)>0$, ce qu'il fallait démontrer

b. Montrons par récurrence que le résultat demandé

• Pour $n=1$, $\ln(u_1)=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$, donc la propriété est vraie pour $n=1$

• Supposons que le résultat reste vrai jusqu'à un ordre $k\geqslant 1$ et montrons que le résultat reste vrai à l'ordre $k+1$

Par définition,$u_{k+1}=u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$ et par suite

$\ln(u_{k+1})=\ln\left(u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)\right)=\ln(u_k)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$

Or par hypothèse de récurrence

$\ln(u_k)=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$

Donc $\ln(u_{k+1})=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$

Ce qu'il fallait montrer

c. D'après les question **1.** et **2.**, en prenant $x=\dfrac{1}{2^k}$, pour k entier supérieur ou égal à 1

$\dfrac{1}{2^k}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2^k)^2}\leqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)\leqslant\dfrac{1}{2^k}$;

Soit $\dfrac{1}{2^k}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4^k}\leqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)\leqslant\dfrac{1}{2^k}$;

en faisant la somme des termes dans la double inégalité, pour k variant de 1 à n, on trouve $S_n-\dfrac{1}{2}T_n\leqslant\ln(u_n)\leqslant S_n$.

d. • S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\dfrac{1}{2}$, donc

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right)=1-\dfrac{1}{2^n}$

• T_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1/4$ et de premier terme $1/4$, donc

$T_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-(1/4)^n}{1-1/4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$

e. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4^n}=0$.Ainsi

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}T_n=\dfrac{1}{3}$

4. Sachant que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n>0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)>1$ puisque $\dfrac{1}{2^{n+1}}>0$, donc $u_{n+1}>u_n$, et la suite (u_n) est strictement croissante

5. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $S_n=1-\dfrac{1}{2^n}$, donc $0<S_n<1$; comme $S_n-\dfrac{1}{2}T_n\leqslant\ln(u_n)\leqslant S_n$, alors $\ln(u_n)\leqslant S_n<1$, donc $\ln(u_n)<1$, soit $u_n<$ e. Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par e, donc elle converge vers un réel qu'on note l

6. Comme $S_n-\dfrac{1}{2}T_n\leqslant\ln(u_n)\leqslant S_n$, alors par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\dfrac{1}{2}T_n\right)\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(S_n-\dfrac{1}{2}T_n\right)=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$,

donc $\dfrac{5}{6}\leqslant\ln(l)\leqslant 1$ donc $e^{\frac{5}{6}}\leqslant l\leqslant e$. Soit $2.3\leqslant l\leqslant 2.72$

Partie II

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

En posant $x=\dfrac{1}{n}$, on déduit de la première partie **I-2.** que :

$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\leqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}$

2-a. On a : $v_{n+1}-v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)$

ou encore $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)$ or

$\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et

$\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\right)=\dfrac{1-n}{2n^2(n+1)}$

Or $\dfrac{1-n}{2n^2(n+1)}\leqslant 0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

Donc, $v_{n+1}-v_n\leqslant 0\Rightarrow v_{n+1}\leq v_n$ et (v_n) est décroissante.

De même $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)$ et donc

$w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$

Or $\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\geqslant\dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Donc, $w_{n+1}\geqslant w_n$, et (w_n) est croissante

b. La suite (v_n) est décroissante et la suite (w_n) est croissante. De plus $w_n-v_n=-\ln(n+1)+\ln(n)=-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n-v_n)=0$

Donc, les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite l

c. Pour trouver la plus petite valeur de n pour laquelle l'écart entre v_n et w_n est égale à 10^{-3}, on pose $|v_n-w_n|\leqslant 10^{-3}$

Donc, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 10^{-3}$, soit, $n \geqslant \frac{1}{(-1+e^{10^{-3}})}$
Donc $n \geqslant 999.50$. Ainsi, $n = 1000$

Problème 2

Partie A

1-a. g est une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant la somme de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$ de dérivée $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x}$
g est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $g(1) = 3$
b. g étant décroissante sur $]0,1]$, $\forall x \in]0,1]$, $g(x) \geqslant g(1)$, donc $g(x) > 0$. De même, g étant croissante sur $[1,+\infty[$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $g(x) \geqslant g(1)$, donc $g(x) > 0$
Ainsi, $g(x) > 0$, $\forall\, x \in]0,+\infty[$
2-a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
b. La fonction f est une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant la somme de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$

$$\forall x \in]0,+\infty[\,;\ f'(x) = 1 + \frac{x\times\frac{2}{x} - 2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{2-2\ln(x)}{x^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $\forall\, x \in]0,+\infty[$
D'après **1.**, $g(x) > 0$, $\forall\, x \in]0,+\infty[$. Comme f' est de même signe que g, on en déduit que $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in]0,+\infty[$
Tableau des variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

c. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) - x = \frac{2\ln(x)}{x}$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$. On peut déduire que : la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) lorsque x tend vers $+\infty$
Le signe de $\frac{2\ln(x)}{x}$ est celui de $\ln(x)$ puisque $x > 0$. Donc
• Pour $x \in]0,1[$, (C_f) est en dessous de Δ
• Pour $x \in]1,+\infty[$, (C_f) est au dessus de Δ
d. La tangente à (C_f) est parallèle à Δ lorsque cette tangente a pour coefficient directeur 1
Le coefficient directeur de la tangente étant égal au nombre dérivé, on cherche x tel que $f'(x) = 1$
$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+2-2\ln(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow 2 - 2\ln(x) = 0$ soit $x = \mathrm{e}$. D'où la tangente à (C_f) est donc parallèle à Δ au point A d'abscisse e et d'ordonnée $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + \frac{2}{\mathrm{e}}$
e. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue sur $]0,+\infty[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$. Or on sait que la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc f est bijective. Donc déduit alors que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique.
De plus $f(1/2) = 1/2 - 4\ln(2) < 0$ et $f(1) = 1 > 0$
On déduit alors que cette solution est entre 1/2 et 1
D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 telle que $x_0 \in [\frac{1}{2};1]$

Partie B

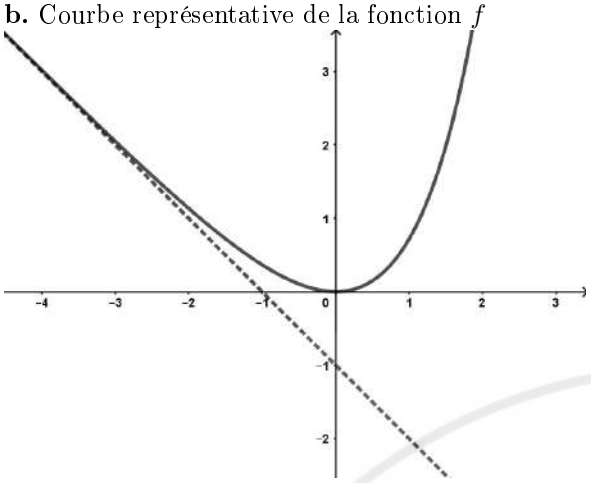
1. x solution de $(E) \Leftrightarrow x = -\ln(x) \Leftrightarrow -x = \ln(x)$ ou encore $x = e^{-x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
2-a. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$. Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$
b. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
De plus, $f(1) = 0.63 > 0$ et $f(1/2) = -0.55 < 0$
donc $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$. D'après **1.**, on conclut que (E) admet une unique solution $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$
c. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$, on en déduit que, pour $x \in [0,\alpha]$, $f(x) \leq 0$
3. Soit $x \in [0,1]$
$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$
4. D'après **2-b.**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, donc $f(\alpha) = 0$.
Et d'après **3.**, on déduit que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$
5. $g'(x) = \frac{1-xe^x}{1+2e^x+e^{2x}}$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \alpha$ d'après **B/ 2-a.**
Donc g est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et strictement décroissante $[\alpha,1]$
6. D'après ce qui précède, la fonction g est strictement croissante sur $[0,\alpha]$, avec un extremum en $x = \alpha$.
$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.
• $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$ et comme $\alpha \in [\frac{1}{2},1]$, donc $\alpha \geqslant u_1 \geqslant 0$
• Supposons que le résultat reste vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
Montrons que ces inégalités sont également vrai pour $n+1$
α étant l'extremum sur $[0,1]$ de g, alors $u_{n+2} \leqslant \alpha$ et par croissance et positivité de la suite (u_n), on en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.
7. La suite (u_n) est croissante et majorée par α d'après ce qui précède, on en déduit qu'elle converge vers une limite qu'on notera l.
8. D'après **7.** et par continuité de la fonction g, on déduit que $g(l) = l$. De plus, d'après **4.**, α représente l'unique réel qui vérifie $g(\alpha) = \alpha$, on en déduit que $l = \alpha$.

Problème 3

Partie I

1-a. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = e^x - 1$.
On en déduit que la fonction f est décroissante sur $]-\infty,0]$, croissante sur $]0,+\infty[$
(Dresser le tableau de variation de f)

b. Courbe représentative de la fonction f



c. D'après ce qui précède la fonction f est positive quelque soit $x \in \mathbb{R}$, donc : $e^x - x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow e^x \geqslant x + 1$

2.

• D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$. En particulier, pour $x > -1$, $e^x \geqslant x+1$. La fonction ln est croissante et pour $x > -1$, $1+x > 0$ donc $\ln(\mathrm{e}^x) \geq \ln(x+1)$
D'où $x \geq \ln(x+1)$ pour $x > -1$

• Pour $x > -1$, on pose $X = x+1$ alors $X > 0$. Par suite $X - 1 \geq \ln(X)$ d'après le premier point.
D'où pour $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$

3. Pour $x < 1$, $-x > -1$ et d'après la question précédente on déduit que $-x \geq \ln(-x+1)$

4. Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ et d'après **2.** $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x} - 1$ et par conséquent $-\ln(x) \leq \dfrac{1}{x} - 1$ ou encore $\ln(x) \geq 1 - \dfrac{1}{x}$

Partie II

1-a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et d'après **I/ 2.**, on déduit que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k} \Rightarrow \ln(1+k) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\ln(1+k) - \ln(k)] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = u_n$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\ln(1+k) - \ln(k)] = \ln(1+n) - \ln(1) = \ln(1+n)$
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ln(1+n)$

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

2-a. $\forall n \geqslant 1$, on a $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
Or pour $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$ et par suite, pour $k > 1$, $\dfrac{1}{k} < 1$ et donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \leq -\dfrac{1}{k}$ ce qui revient à dire que $\dfrac{1}{k} + \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \leq 0$ et en posant $k = n+1$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que $\dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leq 0$
Par conséquent la suite (S_n) est décroissante.

b. Comme $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \leq -\dfrac{1}{k}$ alors $\ln(k) - \ln(k-1) \geq \dfrac{1}{k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}[\ln(k) - \ln(k-1)] \geq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ or $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}[\ln(k) - \ln(k-1)] = \ln(n) \Rightarrow \ln(n) \geq u_n - 1$ et d'après **II/ 1-a.** on déduit que : $\ln(1+n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$ puis que $\ln(1+n) - \ln(n) \leq S_n \leq 1$ ou encore $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq S_n \leq 1$
Donc $0 \leq S_n \leq 1$ car $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) > 0$ $\forall n > 1$
On déduit que la suite (S_n) est minorée par 0
(S_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente
D'après l'encadrement et par passage à la limite, on conclut que : $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq 1$ ou encore $0 \leq \gamma \leq 1$

3. Moyennant **II/ 2-b.**, $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \leq -\dfrac{1}{k}$ et par suite $\ln\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right) \leq -\dfrac{1}{k+1} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \geq \dfrac{1}{k+1}$ (*)
De même d'après **II/ 1-a.**, pour $k \geq 1$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$ ou encore $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$ (**).
On a alors le résultat voulu d'après (*) et (**)

4-a. $v_1 = \dfrac{1}{2}$; $v_2 = \dfrac{7}{12}$; $v_3 = \dfrac{37}{60}$

b. $v_n + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k}$ et on obtient bien le résultat demandé

c. D'après **3.**, on a : $\dfrac{1}{n+k} \leq \ln\left(\dfrac{n+k}{n+k-1}\right) \leq \dfrac{1}{n+k-1}$
et conséquent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{k+n-1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n-1}$
Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = v_n$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n} = v_n + \frac{1}{2n}$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{k+n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k) - \ln(n+k-1)]$
Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k) - \ln(n+k-1)] = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$
On en déduit alors que : $v_n \leqslant \ln(2) \leqslant v_n + \dfrac{1}{2n}$.

d. D'après **3-c.** peut écrire : $\ln(2) - \dfrac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \ln(2)$
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$.

Problème 4

Partie I

1.

• Étude de la continuité et de la dérivabilité de f en 0
$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln(x)}{1+x} = 0 = f(0)$
On déduit que la fonction f est continue en 0

• Étude de la dérivabilité de f en 0
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{1+x} = -\infty$
On déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0

2-a. La fonction φ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$ sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction φ

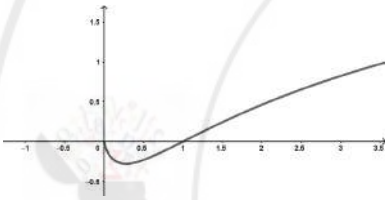
b. On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ et comme φ est continue sur $]0,+\infty[$ on peut déduire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $\varphi(x)=0$ admet au moins une solution sur $]0,+\infty[$
De plus φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors cette solution est unique qu'on note β
Comme $\varphi(0.27)=-0.04<0$ et $\varphi(0.28)=0.01>0$ alors on déduit $0.27\leqslant\beta\leqslant 0.28$

3-a. On a : $f'(x)=\dfrac{\ln(x)+x+1}{x^2+2x+1}$ donc $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$
Et d'après **2-b.**, on conclut que la fonction f est décroissante sur $]0,\beta]$ et croissante sur $[\beta,+\infty[$

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

b. On a : $\varphi(\beta)=0\Rightarrow\ln(\beta)=-1-\beta$ et par suite
$f(\beta)=\dfrac{\beta\ln(\beta)}{\beta+1}=-\dfrac{\beta(\beta+1)}{\beta+1}=-\beta$

4. Courbe de représentative de la fonction f.

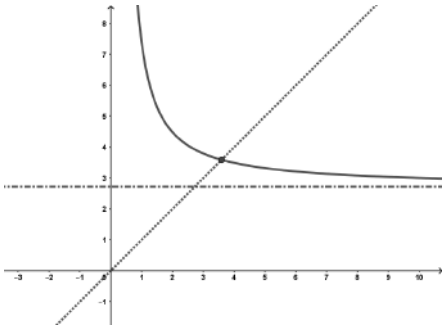


5-a. On pose $h(x)=f(x)-1$ sur $]0,+\infty[$. La fonction h est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $h'(x)=f'(x)$. Par conséquent h est décroissante sur $]0,\beta]$ et croissante sur $[\beta,+\infty[$
• Pour $x\in]0,\beta]$, $h(x)\leq h(0)=-1$ donc h est négative sur $]0,\beta]$ et par conséquent ne s'annule pas sur cet intervalle.
• $h(\beta)<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. De plus h est continue et croissante sur $[\beta,+\infty[$ alors on déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $[\beta,+\infty[$
Or $h(3)=-0.18<0$ et $h(4)=0.11>0$ donc $\alpha\in[3,4]$
D'où l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur sur $[3,4]$

b. Pour $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=1\Leftrightarrow x\ln(x)=x+1$ ce qui est équivalent à $\ln(x)=\dfrac{x+1}{x}\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}=\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}$
Ainsi : $f(x)=1$ est équivalent à $x=\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}$

6-a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $g'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{1+1/x}}{x^2}<0$ sur $]0,+\infty[$. La fonction g est alors strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\mathrm{e}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	e



Graphiquement, on déduit que l'équation $g(x)=x$, admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$

b. La fonction g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Et $g(3)=3.79$ et $g(4)=3.49$
Donc $g([3,4])=[g(4),g(3)]=[3.49,3.79]\subset[3,4]$

c. $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{1+1/x}}{x^2}=-\dfrac{g(x)}{x^2}$ et par conséquent $|g'(x)|=\dfrac{g(x)}{x^2}$. Or la fonction $\dfrac{g(x)}{x^2}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $-\dfrac{(1+2x)}{x^4}\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}<0$ sur $]0,+\infty[$. Donc $\dfrac{g(x)}{x^2}$ est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$ et par conséquent $\forall\ x\in[3,4]$, $|g'(x)|=\dfrac{g(x)}{x^2}\leqslant\dfrac{g(3)}{9}\leqslant\dfrac{1}{2}$

7-a. D'après ce qui précède et $\forall x\in[3,4]$ comme $\alpha\in[3,4]$ alors d'après l'inégalité des accroissements finis
$|g(x)-g(\alpha)|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|\Rightarrow|g(x)-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$
Or comme u_0 et $g([3,4])\subset[3,4]$ alors par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[3,4]$ et par conséquent, en prenant $x=u_n$ on tire que : $|g(u_n)-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|\Rightarrow|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$
Montrons par récurrence que $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$

• Pour $n=0$, on a : $|u_0-\alpha|=|3-\alpha|\leqslant 1$ (car $\alpha\in[3,4]$)
• Supposons que l'inégalité est vrai jusqu'à un ordre $n\geq 0$
On $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ car $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$
On démontre ainsi par récurrence que $\forall\ n\geqslant 0$, $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=0$ alors on déduit que la suite (u_n) est convergente et qu'elle converge vers α

c. On a $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow 2^n\geq 100\Rightarrow n\geqslant\dfrac{\ln(100)}{\ln(2)}\approx 6.64$
Ainsi il faut que $n\geq 7$.

Partie II

1. On pose $h_n(x)=f(x)-n$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ et $n\geqslant 1$
Les fonctions h_n sont continues et dérivables sur $]0,+\infty[$ de dérivé $h_n'(x)=f'(x)$. Par suite, h_n est décroissante sur $]0,\beta]$ et croissante sur $[\beta,+\infty[$
• $\lim\limits_{x\to0^+}h_n(x)=-n$ et $h_n(\beta)<0$ (car h_n est décroissante sur $]0,\beta]$) Par suite h_n ne s'annule pas sur $]0,\beta]$
• Comme $h_n(\beta)<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ en plus h_n est strictement croissante sur $[\beta,+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que l'équation $h_n(x)=0$ admet une unique solution sur $[\beta,+\infty[$

En conclusion, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n sur $]0, +\infty[$
$\alpha_1 \approx 3.59$ et $\alpha_1 \approx 9.19$

2-a. α_n est solution de l'équation $f(x) = n$, donc $f(\alpha_n) = n$

$f(\alpha_n) = n \Rightarrow \dfrac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{1+\alpha_n} = n \Rightarrow \ln(\alpha_n) = n\left(1 + \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$

Par suite $\alpha_n = e^{n\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)} \geqslant e^n$. D'où $\forall\, n \geqslant 1$, $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n$

NB : Les α_n sont tous non nuls d'où l'existence de $\dfrac{1}{\alpha_n}$

b. $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n = \mathrm{e}^{n\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)} \Leftrightarrow \alpha_n = \mathrm{e}^n \cdot \mathrm{e}^{\frac{n}{\alpha_n}}$

Ainsi $\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\frac{n}{\alpha_n}} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$

Ainsi, $\forall\, n \geqslant 1$ $f(x) = n \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$

c. D'après les questions **II/ 2-a.** et **II/ 2-b.**, on a :

$\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n \Rightarrow \dfrac{n}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$. Par conséquent

$\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} \Rightarrow \left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\left(\frac{n}{\mathrm{e}^n}\right)}$ or $\alpha_n \geq \mathrm{e}^n$ et par suite $1 \leq \left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right)$. Par conséquent $1 \leq \left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\left(\frac{n}{\mathrm{e}^n}\right)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ (croissance comparée) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{n}{\mathrm{e}^n}} = 1$

On peut déduire ainsi que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right)$ est convergente et qu'elle converge vers 1 d'après le théorème des gendarmes.

Problème 5

Partie A

1-a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$

Donc la fonction f admet une asymptote en $+\infty$, la droite $y = 1$ et en $-\infty$, la droite $y = -1$

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}} = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

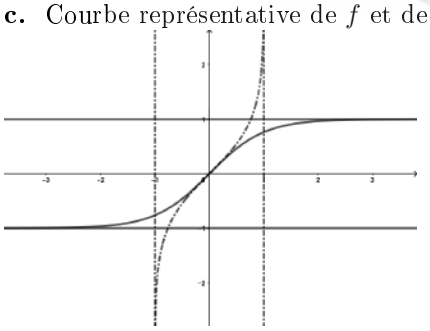
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1

c. Courbe représentative de f et de sa réciproque g



2-a.

• Supposons que n est paire. On pose $n = 2p$ avec $p \geqslant 0$

Alors $u_{n+2} - u_n = u_{2p+2} - u_{2p} = \dfrac{-1}{2(p+1)-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2(p+1)-1}$

$u_{n+2} - u_n = \dfrac{-1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$ car $n = 2p$

• Si n est impaire. On pose $n = 2p+1$ avec $p \geqslant 0$

Alors $u_{n+2} - u_n = u_{2(p+1)+1} - u_{2p+1} = \dfrac{-1}{2(p+1)}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2(p+1)}$

$u_{n+2} - u_n = \dfrac{-1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$ car $n = 2p+1$

D'où $\forall\, n \geqslant 0$, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{-1}{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$

b. Étant donné que : $\forall\, n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \ln(3)$, alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \ln(3) = 0$ car $0 < \dfrac{4}{5} < 1$

c. On remarque que : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2k}$

Donc $S_n = \ln(3) - u_{2n+1} + \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) - u_{2n}$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(5)$

3. La fonction f est continue, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(]-\infty, +\infty[) =]-1, 1[$. Donc, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in]-1, 1[$ tel que $f(x) = y$

$f(x) = y \Rightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Rightarrow (y+1) = e^{2x}(1-y)$ et par conséquent $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$

On en déduit que la fonction réciproque de f est la fonction h définie sur $]-1, 1[$ par : $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Partie B

1. D'après **A/ 3.**, $D_g =]-1, 1[$

De plus $\forall x \in]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$ et on a :

$g(-x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -g(x)$ donc g est impaire

g étant la réciproque de f alors se courbe représentative est la symétrique (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$

2. La fonction g est continue et dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2-1} > 0$. Donc la fonction g est croissante sur $]-1, 1[$ De plus, $\lim\limits_{x\to1} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -\infty$

Ainsi le tableau de variation de la fonction g est le suivant :

x	-1		1
$g'(x)$	‖	$+$	‖
$g(x)$	‖ -∞	↗	‖ $+\infty$

3. Voir le graphe

4-a. $\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ Or la fonction f est strictement croissante alors $u_{n+1} - u_n = f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$
Donc la suite u_n est décroissante.
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{N\to 0} f(N) = 0$ (Avec N $= \dfrac{1}{n}$)
On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
5. g étant continue sur $]-1,1[$ alors elle admet une primitive sur $]-1,1[$. De plus $h(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$
On sait que la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est la fonction $x \to x\ln(x) - x$ alors une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est $(1+x)\ln(1+x) - (x+1)$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est $(1-x)\ln(1-x) - (x-1)$
Par conséquent une primitive de g sur $]-1,1[$ est :
$G(x) = \dfrac{1}{2}\left[(1+x)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x)\right]$
$G(x) = \dfrac{1}{2}\left[x\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1+x) + \ln(1-x)\right]$
NB : On choisit une primitive dont la constante est nulle.

Problème 6
Partie A
1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = -\infty$
2-a. $\forall x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$; g_n est dérivable de dérivée $g_n'(x) = \dfrac{nx+n+1}{x} = \dfrac{n+1}{x} + n$
b. D'après ce qui précède on a : $\forall\ x \in]0,+\infty[,\ g_n'(x) > 0$. Donc la fonction g_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
3. Pour $x > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = -\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que l'équation $g_n(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0,+\infty[$. De plus comme g_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors on conclut que cette solution est unique qu'on note α_n.
De plus $g_n(1) = x > 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x) = -\infty$ on en déduit que cette solution α_n est dans $]0,1[$
4. g_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ par suite :
• $\forall x \in]0,\alpha_n[,\ g_n(x) < g_n(\alpha_n) = 0$
• $\forall x \in [\alpha_n,+\infty[,\ g_n(x) \geq g_n(\alpha_n) = 0$
D'où $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [\alpha_n,+\infty[$

Partie B
1. h est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $h'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$ et par conséquent, h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc h est bijective sur cet intervalle.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que h est bijective,on déduit que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ qu'on notera α.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in]0,+\infty[$,
$g_{n+1}(x) = (n+1)x + (n+2)\ln(x) = g_n(x) + x + \ln(x)$
3. $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -g_{n+1}(\alpha_n)$ par suite
$g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -[g_n(\alpha_n) + \alpha_n + \ln(\alpha_n)]$
De plus $g_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha_n) = \dfrac{-n\alpha_n}{n+1}$
Ainsi : $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\left[\alpha_n + \dfrac{-n\alpha_n}{n+1}\right]$
D'où $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n+1}$
4-a. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n+1} < 0$.
Et comme la fonction g_{n+1} est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) < g_{n+1}(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n$
On en déduit que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
b. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.
5. On a : $g_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \alpha_n = -\dfrac{n+1}{n}\ln(\alpha_n)$. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ étant convergente, on note l sa limite
Ainsi par passage à la limite, on déduit que $l = -\ln(l)$, donc $l + \ln(l) = 0$, soit $h(l) = 0$. D'après **B/ 1.** on déduit que $l = \alpha$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n) = \alpha$

Partie C
1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ peu importe la parité de n
• La limite en 0
− Si n est paire, on pose $n = 2p$ avec $p \geq 1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{2p}\left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$
− Si n est impaire, on pose $n = 2p+1$ avec $p \geq 1$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{2p+1}\left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
On déduit que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale de f_n et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de f_n
2-a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $x > 0$, f_n est dérivable avec
$f_n'(x) = n\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right]\left[\dfrac{\ln(x)}{x} + 1\right]\left[\dfrac{\ln(x)}{x}\right]^{n-1} + \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right]\left[\dfrac{\ln(x)}{x}\right]^n$
$f_n'(x) = \left[\dfrac{1-\ln(x)}{x^3}\right]\left[\dfrac{\ln(x)}{x}\right]^{n-1}[n\ln(x) + nx + \ln(x)]$
D'où $f_n'(x) = \left[\dfrac{1-\ln(x)}{x^3}\right]\left[\dfrac{\ln(x)}{x}\right]^{n-1} g_n(x)$
b.
• Si n est pair, on pose $n = 2p$ avec $p \geq 1$. Et on sait que la fonction g_n est positive pour $x \in [\alpha_n,+\infty[$ et négative sur $]0,\alpha_n[$, avec $0 < \alpha_n < 1$.
Donc $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = $ e ou $x = 1$ ou $x = \alpha_n$.
Si n est paire, alors $n-1$ est impaire.
Donc pour $x \in]0,\alpha_n[$, $f_n'(x) > 0$, pour $x \in]\alpha_n,1[$, $f_n'(x) < 0$, pour $x \in]1,e[$, $f_n'(x) > 0$, pour $x \in]e,+\infty[$, $f_n'(x) < 0$
Par suite, pour n pair, f_n est strictement croissante sur $]0,\alpha_n]$ et sur $]1,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $]\alpha_n,1]$ et $]\,\mathrm{e},+\infty[$
Le tableau des variations est le suivant

x	0		α_n		1		e		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	+	0	−	0	+	0	−	
$f_n(x)$	‖	$-\infty$	↗	$f_n(\alpha_n)$	↘	$f_n(1)$	↗	$f_n(e)$	↘ 0

• Si n est impair, alors $n-1$ est pair alors pour x dans $]0,\alpha_n[$, $f_n'(x) < 0$, pour $x \in]\alpha_n,1[$, $f_n'(x) > 0$, pour $x \in]1,e[$,$f_n'(x) > 0$, pour $x \in]e,+\infty[$, $f_n'(x) < 0$

Par conséquent, pour n impair, f_n est strictement décroissante sur $]0,\alpha_n]$ et sur $]\,\mathrm{e},+\infty[$ et strictement croissante sur $]\alpha_n,1]$ et sur $]1,\mathrm{e}]$

Le tableau des variations est le suivant :

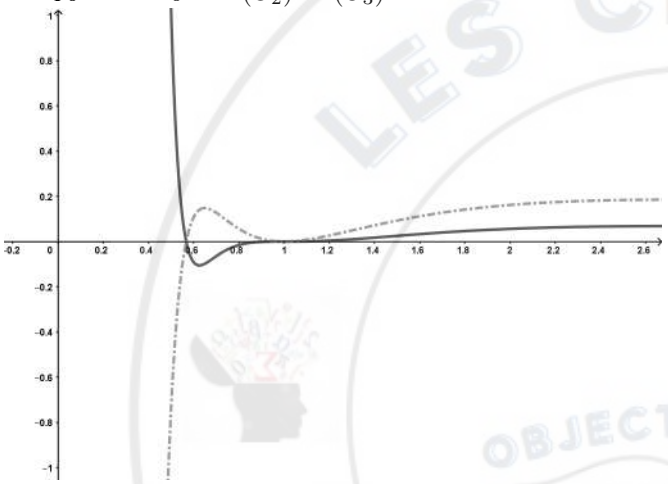
x	0		α_n		1		e		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f_n(\alpha_n)$	↗	$f_n(1)$	↗	$f_n(\mathrm{e})$	↘	0

3. Soit $n>1$, $f_n(\alpha_n)=\left(1+\dfrac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}\right)\left(\dfrac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}\right)^n$

Or $g_n(\alpha_n)=0\Rightarrow \dfrac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}=-\dfrac{n}{n+1}$ et par suite

$f_n(\alpha_n)=\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n=(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

4. Construction de (C_2) et (C_3)



Problème 7

Partie A

1. La fonction h est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $h'(x)=\dfrac{xe^x+1}{x}>0$. Donc, h est croissante sur $]0,+\infty[$.

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que h est bijective, on conclut que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$

De plus $h(1)=\mathrm{e}+1>0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty$ et par conséquent $\alpha\in]0,1[$. Comme h est strictement croissante, on déduit que : $h(\alpha)=0$; $\forall x\in]0,\alpha[$, $h(x)<h(\alpha)=0$ et $\forall x\in]\alpha,+\infty[$, $h(x)>h(\alpha)=0$

2. $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

3. $\forall\, x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=x\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x)+e^x=\ln(x)+e^x+1$

Donc, $\forall\, x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=h(x)$

4-a. D'après **1.** et **3.**, on déduit g est strictement décroissante sur $]0,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$.

b. (Faire le tableau des variations)

5-a. • g est strictement décroissante sur $]0,\alpha[$ alors $\forall x\in]0,\alpha[$, $g(x)\leq g(0)=0$. Par suite g ne s'annule pas sur $]0,\alpha[$

• g est strictement décroissante sur $]\alpha,+\infty[$ avec $g(\alpha)<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que g est bijective, on conclut que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution β dans $]\alpha,+\infty[$

b. $g(0.3)=-0.01<0$ et $g(0.4)=0.13>0\Rightarrow\beta\in]0.3,0.4[$

c. Comme $g(\alpha)<0$ et $g(\beta)=0$ alors $\beta\in]\alpha,+\infty[\Rightarrow\beta>\alpha$.

Donc $\forall\, x\in]\beta,+\infty[$, $g(x)>0$ et $\forall\, x\in]0,\beta[$, $g(x)<0$

Partie B

1-a. On définit t sur $\mathbb{R}$ par $t(x)=e^x-x-1$. t est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t'(x)=\mathrm{e}^x-1$ et par suite t est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R}$, $t(x)\geq t(0)=0\Rightarrow e^x\geqslant x+1$

b. D'après **B/ 1-a.**, pour $x>0$, $-x\in\mathbb{R}$ et $e^{-x}\geqslant 1-x$, soit $-e^{-x}\leqslant -1+x$ De plus, $x>0$, donc $e^{-x}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant -e^{-x}$

On en déduit que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $-1\leqslant -e^{-x}\leqslant -1+x$

c. • D'après **B/ 1-b.**, on a : $\forall x\in]0,+\infty[$, $e^{-x}\geqslant 1-x$ (*)

• On pose : $\phi(x)=e^{-x}-\dfrac{x^2}{2}+x-1$. $\phi'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-x+1$ et par suite d'après (*) on déduit que la fonction ϕ est décroissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $\forall x\in]0,+\infty[$, $\phi(x)\leq\phi(0)=0$

Par suite, $\forall x\in]0,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x}\leq 1-x+\dfrac{x^2}{2}$ (**)

De (*) et (**) on le résultat demandé.

2. On a : $f(x)=-\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}x^2\ln(x)$ or $\lim\limits_{x\to0}x^2\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}=1$. Donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$

On conclut que la fonction f est continue en 0.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{e^{-x^2}-1}{-x^2}x\ln(x)$. Comme à la question **B/ 2.** on déduit que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

Donc f est dérivable en 0.

4-a & b. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

c. On en déduit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction (ox)

5-a. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall\, x\in]0;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}-2x^2\ln(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\left[x^2\ln(x^2)+\mathrm{e}^{x^2}-1\right]$

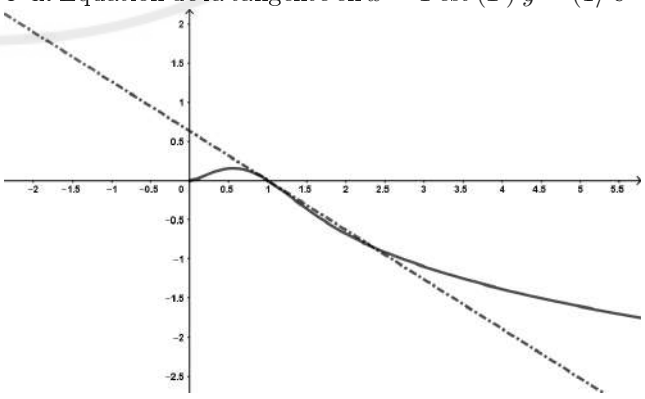
On en déduit que : $\forall\, x\in]0;+\infty[, f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}g(x^2)$

b. Le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x^2)$ car $x>0$.

On a : $f'(x)=0\Rightarrow g(x^2)=0$. On en déduit d'après **A/ 5-a.** que : $x^2=\beta\Rightarrow x=\sqrt{\beta}$ car $x>0$. Par conséquent, f est croissante sur $[0,\sqrt{\beta}]$ et décroissante sur $]\sqrt{\beta},+\infty[$

c. (Faire le tableau des variations)

6-a. Équation de la tangente en $x=1$ est (T) $y=(1/\mathrm{e}-1)(x-1)$



Correction des exercices

Exercice 1

1. Calcul d'intégrale :

- $I = \left[-4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = 4\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{1/2}\right)$ et $J = [6\sqrt{x}]_0^{\pi} = 6\sqrt{\pi}$
- $K = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $L = [\ln(\mathrm{e}^x + 5)]_{-1}^0 = 1 + \ln(6) - \ln(1 + 5\,\mathrm{e})$

2. • $\dfrac{1}{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(x+1)^2+1} \Rightarrow I = arctan(2) - \dfrac{\pi}{4}$

• $\dfrac{3}{4x^2-4x+1} = \dfrac{3}{(2x-1)^2}$; $J = \left[\dfrac{-3}{2(2x-1)}\right]_1^4 = \dfrac{9}{7}$

• $\dfrac{2}{x^3-7x+6} = \dfrac{1}{10(x+3)} - \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{2}{5(x-2)}$ Ainsi

$K = \left[\dfrac{1}{10}\ln|x+3| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{2}{5}\ln|x-2|\right]_3^4$ Ainsi

$K = \dfrac{1}{10}\ln\dfrac{7}{6} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5}\ln 2 = \dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{1792}{729}\right)$

• $\dfrac{x^2}{x^4-1} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right]$ Ainsi

$L = \dfrac{1}{4}\left[2arctan(x) + \ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$L = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

3. Le calcul des intégrales de cette question se fait par parties

$I = 2(\mathrm{e}-1)$; $J = 16 - 26\,\mathrm{e}^{-1/2}$; $K = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}$; $L = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$

4. On fait la linéarisation comme dans **l'exercice** page **22** du chapitre **2.**. Retrouve facilement :

$I = 3\pi/8$; $J = \pi/2$; $K = 1/4$

5-a. On pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ alors $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. D'où

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln|t|\right]_{\sqrt{3}/3}^1 = \frac{1}{2}\ln 3$$

b. $\sin^4(x) + \cos^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2\sin^2(x)\cos^2(x)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{2-\sin^2(2x)}\,\mathrm{d}x$

En faisant le changement de variable $u = 2x$ et en utilisant le fait que $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$, on déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = \tan(x)$ alors $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+u^2}$ et $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}Actan\left(\sqrt{3/2}\right)$

Exercice 2

1. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et h est continue sur $\mathbb{R}$ alors H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (voir cours) de dérivée

$H'(x) = v'(x)h(v(x)) - u'(x)h(u(x))$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 1 > 0$. D'où F est bien définie.

3. On pose $u(x) = 0$, $v(x) = x$ et $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses de **1.** sont vérifiées et on déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $H(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$

F est donc croissante sur sur $\mathbb{R}$

4. $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow y = x$

5. $\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi'(x) = F'(x) - F'(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{(-x)^4+1}}$

Par conséquent $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(0) = 0$ et par suite $F(-x) = -F(x)$. D'où F est impaire

6-a. Soit $x \geq 1$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq 1$ pour $t \in [0;1] \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t \leq 1$

$\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour $t \in [1;x] \Rightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t \leq 1 - \frac{1}{x} < 1$

D'où pour $x \geq 1$; $F(x) < 2$

b. Pour $x \geq 1$, $F(x) > 0$ et F est croissante et majorée par 2 donc F admet une limite réelle finie en $+\infty$

Exercice 3

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

2. $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$ car

$x \mapsto \sin^n(x)(1-\sin(x))$ est positive sur $[0;\pi/2]$ donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque $x \mapsto \sin^n(x)$ est positive sur $[0;\pi/2]$ alors $I_n \geq 0$

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée dont elle converge.

3. Les deux fonctions $x \mapsto \sin^{n+1} x$ et $x \mapsto -\cos x$ sont dérivable sur $[0;\pi/2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

D'où $(n+1)I_n = (n+2)I_{n+2}$ ou encore $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour $n \geq 2$

4. D'après **3.**, pour tout $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ donc

$I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ et $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ ce qui donne

$(n+1)I_nI_{n+1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} \Rightarrow (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante.

$(n+1)I_nI_{n+1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} = \ldots = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

5. D'après **4.**, $I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'après **2.**, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note l sa limite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_nI_{n+1} = l^2$

Donc $l^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2(n+1)} = 0 \Rightarrow l = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

6-a. $I_{n+1} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est bien définie.

$u_nu_{n+1} = \dfrac{I_n}{I_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1}$ d'après **4.**

b. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r$ alors $r^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_nu_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1}$

Donc $r^2 = 1$ et comme $u_n > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

7. D'après **4.** $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $(n+1)I_{n+1}^2 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_{n+1}^2 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

8-a. D'après **3.** $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$ et $I_{2n-2} = \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}$

Ainsi $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}$ et on remplace aussi I_{2n-4} en fonction de I_{2n-6} et ainsi de suite on obtient :

$I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}I_0 = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots5\times3}{(2n)(2n-2)\cdots4\times2}\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $I_{2n} = \dfrac{\frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)\cdots4\times2}}{(2n)(2n-2)\cdots4\times2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

On a : $(2n+1)I_{2n}I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ d'après **4.**

Ainsi $I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2n+1)I_{2n}} \Rightarrow I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

b. $2(2n+1)\left[\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^2 = 2(2n+1)I_{2n+1}^2$ or :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)I_{2n+1}^2 = \dfrac{\pi}{2}$ d'après **7.**

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left[\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^2 = \pi$

Exercice 4

1. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables $]1,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$ est continue sur $]1,+\infty[$ donc F est dérivable sur $]1,+\infty[$ de dérivée

$F'(x) = \dfrac{2x}{(\ln(x^2))^2} - \dfrac{1}{(\ln(x))^2} = \dfrac{x-2}{2(\ln x)^2}$

Donc F est décroissante sur $]1;2]$ puis croissante sur $]2;+\infty[$.

2. Pour $x > 1$ et $\forall\, t \in [x;x^2]$, $\dfrac{1}{(\ln(x^2))^2} \le \dfrac{1}{(\ln t)^2} \le \dfrac{1}{(\ln x)^2}$

puis par intégration sur $[x;x^2]$, $\dfrac{x^2-x}{(\ln(x^2))^2} \le F(x) \le \dfrac{x^2-x}{(\ln x)^2}$

D'où pour $x > 1$, $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{(\ln(x^2))^2} \le F(x) \le \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{(\ln(x))^2}$

Par croissance comparée, on conclut que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

3. On pose $\varphi(t) = t - 1 - \ln t$. φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ de dérivée $\varphi'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} \ge 0$ sur $[1;+\infty[$. φ est donc croissante sur $[1;+\infty[$ et $\forall t \in [1;+\infty[$ $\varphi(t) \ge \varphi(1) = 0$. De plus si $t \in [1;+\infty[$, $\ln t \ge 0$. D'où $0 \le \ln(t) \le t-1$ pour $t \in]1;+\infty[$

Pour $t \in]1;+\infty[$, $0 \le \ln(t) \le t-1 \Rightarrow \dfrac{1}{(t-1)^2} \le \dfrac{1}{(\ln t)^2}$

D'où $\dfrac{x}{x^2-1} \le F(x)$ pour $x > 1$. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = +\infty$

4. $\forall\, x \in]0,1[$ et $\forall\, t \in]x^2,1]$ on pose $\phi(t) = \ln t - \dfrac{2\ln x}{x^2-1}(t-1)$

En étudiant cette fonction comme dans **3.** et en utilisant les résultats de **3.** on déduit que : $\forall\, x \in]0,1[$ et $\forall\, t \in]x^2,1]$

$\dfrac{2\ln x}{x^2-1}(t-1) \le \ln t \le t-1$ et en passant à l'inverse, on déduit l'inégalité demandée.

Pour $0 < x < 1$, $[x^2;x] \subset [x^2;1]$ et l'inégalité de la question **4.** est toujours vérifiée sur $[x^2;x]$. En intégrant sur $[x^2;x]$ l'inégalité de **4.**, on retrouve l'inégalité demandée.

NB : En intégrant, l'ordre des inégalités est changée car $x^2 \le x$

$\lim\limits_{x\to1}\ln(1+x) = \ln 2$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2\ln(x)} = \ln 2$

D'où $\lim\limits_{x\to1} G(x) = \ln 2$ et G se prolonge par continuité en 1

6. Justification est la même qu'en **1.**

Pour $x \in]0,1[$; $G'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln x} = 1$ donc G est dérivable en 1 et $G'(1) = 1$

7. $I = \displaystyle\int_0^1 G'(t)\ \mathrm{d}t = G(1) - G(0) = \ln 2$

Exercice 5

1-a. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx/2}\sin(x)\ \mathrm{d}x$. On pose $u(x) = \mathrm{e}^{-nx/2}$ et $v'(x) = \sin(x) \Rightarrow u'(x) = -\dfrac{n}{2}\mathrm{e}^{-nx/2}$ et $v(x) = -\cos(x)$.

L'intégration par partie entraine $I_n = 1 - \dfrac{n}{2}J_n$. D'où $2I_n + nJ_n = 2$

En posant $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx/2}$, l'intégration par parties donne le deuxième résultat

b. $\begin{cases} 2I_n + nJ_n = 2 \\ nI_n - 2J_n = -2\,\mathrm{e}^{-n\pi/4} \end{cases} \Rightarrow I_n = \dfrac{4 - 2n\,\mathrm{e}^{-n\pi/4}}{4+n^2}$ et $J_n = \dfrac{2n + 4\,\mathrm{e}^{-n\pi/4}}{n^2+4}$

c. (I_n) et (J_n) convergent vers 0

2-a. $I_1 = \mathrm{e} - 1$

b. Pour $x \in [0,1]$, $x^n \le x^n\exp(1-x) \le \mathrm{e}\,x^n$ et en intégrant cette inégalité sur 0 et 1 on a l'inégalité demandée.

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c. $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\exp(1-x)\ \mathrm{d}x$. On pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \Rightarrow u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ donc

$u_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n\exp(1-x)\ \mathrm{d}x$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$

d. $\displaystyle\int_0^1 nx^n\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{n}{\mathrm{e}}u_n$. D'après la question précédente, on déduite que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\mathrm{e}}u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 nx^n\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}$

3-a. $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$. On fait le changement de variable $u = -t \Rightarrow F(-x) = -\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = -F(x)$

F est alors impaire. De la même façon, on montre que G est impaire. F et G sont dérivables sur $[0,+\infty[$ de dérivées :

$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $G'(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$

b. F' et G' sont strictement positives sur $[0,+\infty[$ donc F et G sont strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$G(x) = \displaystyle\int_0^x t\times t\,\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{t\,\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\ \mathrm{d}t$

Ainsi $2G(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2} + F(x)$

Correction des problèmes

Problème 1

A/

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \Rightarrow f$ est continue en 1. Donc f est continue sur $]-1,+\infty[$.

2-a.

• $\forall\ x \in]0,+\infty[$ et $\forall\ u \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{u^2}{1+u} \leq \dfrac{x^2}{1+u}$. En intégrant de 0 à x et en divisant par $x > 0$, on déduit que : $0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$

• $\forall\ x \in\ ]-1,0]$ et $\forall\ u \in [x,0]$, $0 \leq \dfrac{u^2}{1+u} \leq \dfrac{x^2}{1+u}$ Alors : $0 \leq \displaystyle\int_x^0 \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \leq x^2\int_x^0 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$ et on divise par $x < 0$

$0 \geq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^0 \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \geq x\int_x^0 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$ et par suite on déduit que $0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$

b. On réduit au même dénominateur le membre de droite

En intégrant l'égalité demandée de 0 à x pour $x \in\ ]-1,+\infty[$, on déduit que : $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u$, ainsi $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u$ pour $x \in\ ]-1,0[\cup]0,+\infty[$

Cette égalité reste vraie pour $x = 0$ car $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = F'(0) = 0$ avec $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u$

D'où le résultat pour $x \in\ ]-1;+\infty[$

c.

• $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u$ pour $x \in\ ]-1;+\infty[$

On déduit d'après **2-a.** que : $\forall\ x \in\ ]-1;\infty[\backslash\{0\}$

$0 \leq \left|\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u\right| \leq \left|\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u\right|$ or

$\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow f$ dérivable en 0

• La tangente en 0 est alors T_0 : $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

• $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u > 0$ Donc la courbe (C_f) est au dessus de sa tangente T_0

d. f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables. Et d'après **2-c.**, f est aussi dérivable en 0. Donc f est dérivable sur $]-1,+\infty[$

3-a. g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$

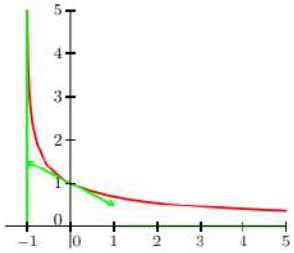
Ainsi $g(x) \geq 0$ sur $]-1,+\infty[$

b. $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^2}$ sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$ donc f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

5. La droite $x = -1$ est une asymptote verticale de $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisse est une asymptote horizontale de $(\mathcal{C})$. De plus $f(x) > 0$ donc $(\mathcal{C})$ est au dessus de l'axe des abscisses

6. Courbe $(\mathcal{C})$



B/

1. f est décroissante donc pour $x \in [a,b] \subset\ ]-1,+\infty[$

$f(b) \leq f(x) \leq f(a) \Rightarrow (b-a)f(b) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)f(a)$

On applique cette relation aux $a_k = \dfrac{k}{5}$ avec $k \in \{0;1;\ldots;5\}$

$(a_{k+1}-a_k)f(a_{k+1}) \leq \displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (a_{k+1}-a_k)f(a_k)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5}f(a_{k+1}) \leq \displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{5}f(a_k)$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f(a_{k+1}) \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f(a_k)$ (Chasles)

Finalement $0.79 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0.85$

L'aire demandée est donc comprise entre 0.79 u.a et 0.85 u.a (u.a= unité d'aire)

2-a. Pour $x > 0$; $f(x) - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{g(x)}{x} \geq 0$ d'après **A/3-a.**

b. $\dfrac{1}{1+x} \leq f(x) \Rightarrow \ln(1+t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(1+t) = +\infty$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

3-a. h est dérivable sur $]-1,0]$ entant que somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,0]$ et $h'(x) = -\ln(1+x) > 0$ sur $]-1,0] \Rightarrow \forall\ x \in\ ]-1,0]$; $h(x) \in\ ]a;h(0)]$ avec $a = \lim\limits_{x\to -1} h(x) = 0$ et $h(0) = 1$

b. Pour $x \in\ ]-1;-1/2]$, $-2 \leq \dfrac{1}{x} < -1$ alors

$-\ln(x+1) \leq f(x) \leq -2\ln(x+1) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq -2\ln(x+1)$

Ainsi : $0 \leq \displaystyle\int_t^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2(h(-1/2) - h(t)) \leq 2$

La fonction F est donc bien majorée.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Donc la suite (v_n) est croissante.

$v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{-1/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1/2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ainsi $v_n = F(-1+1/n) + M \leq 2 + M$ avec $M = \displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

La suite (v_n) est donc croissante et majorée alors elle converge.

Problème 2

I/

1-a. $D_f =]0;+\infty[$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$. f est croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et f est décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$ (faire le tableau des variations)

b. La restriction de f sur $I=[1,\sqrt{e}]$ est continue et strictement croissante et $f(I)=J=[0;1/2e]$. Pour $n\geq 6$;

$0<\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{2e}\Rightarrow$ pour $n\geq 6$, $\dfrac{1}{n}\in J=[0,1/2e]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour $n\geq 6$, $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans $[1,\sqrt{e}]$ une seule racine a_n

c. $f(a_n)=\dfrac{1}{n}$ et $f(a_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow f(a_n)>f(a_{n+1})$. f est strictement croissante sur $[1,\sqrt{e}]\Rightarrow a_n>a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n\geq 6}$ est strictement décroissante.

$a_n\in[1,\sqrt{e}]\Rightarrow$ la suite $(a_n)_{n\geq 6}$ est minorée par 1.

$(a_n)_{n\geq 6}$ est décroissante et minorée par 1 , d'où elle converge.

2-a. Pour $k>1$, et $x\in[k,k+1]$, $f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$ car f est décroissante sur $[2;+\infty[\Rightarrow\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}<\dfrac{\ln x}{x^2}<\dfrac{\ln k}{k^2}$

D'où $\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\leq\frac{\ln(k)}{k^2}$ par intégration

b. $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=-\dfrac{1}{x}$

Intégration par partie : $\displaystyle\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{1+\ln n}{n}$

3-a. On somme l'inégalité **2-a.** pour k allant de 2 à $n-1$ et on a le résultat. (Détailler la démonstration)

b. Ce découle de **3-a.** en remplaçant la valeur de l'intégrale trouvée en **2-b.** (Détailler la démonstration)

4-a. Pour $1\leq x\leq 2$, $0\leq\ln x\leq\ln 2\Rightarrow 0\leq(\ln x)^n\leq(\ln 2)^n$

Or pour $x\in[1,2]$; $\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{x^2}\leq 1$ et par produit des membres des deux inégalités : $0\leq\dfrac{(\ln x)^n}{x^2}\leq(\ln 2)^n$ et par intégration de 1 à 2 on a le résultat. (Détailler la démonstration)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

b. $I_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_1^2\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Par intégration par parties en posant $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ on a aisément le résultat demandé.(Détailler la démonstration)

c. Le résultat s'obtient facilement par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ en utilisant l relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n de **4-b.**

d. $I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\right]=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}u_n$

Alors $u_n=\dfrac{1-2I_n}{\ln 2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{\ln 2}$

II/

1. $D_f=]-1;+\infty[$. f est continue et dérivable sur D_f et $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$. Donc f est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (Dresser le tableau de variations)

2. Courbe représentative

3-a. En réduisant au même dénominateur le membre de droite, on a l'égalité.

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\ln 2$

b. On pose $u(x)=\ln(1+x)$ et $v'(x)=x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

Donc $A=0.25$ u.a

4-a. Pour $n>0$, la fonction $t\mapsto t^n\ln(1+t)$ est définie et continue sur $[0;1]$ donc les I_n sont bien définis.

$u_1=\dfrac{1}{4}$ d'après **3-b.**

b. Pour $0\leq x\leq 1$, $0\leq x^n\ln(1+x)\leq\ln 2\times x^n$ et par intégration de 0 à 1, on a le résultat

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

5-a. s_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x$ et de premier terme 1. Donc

$s_n(x)=\dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}-(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

b. On intègre entre 0 et 1 l'égalité **5-a.** et on a le résultat

c. En utilisant une intégration par parties, on a :

$u_n=\dfrac{\ln 2}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\left[\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$ d'après **5-b.**

D'où $u_n=\dfrac{\ln(2)}{n+1}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln(2)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$.

6-a. Pour $0\leq x\leq 1$, $\dfrac{x^{n+1}}{2}\leq\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\leq x^{n+1}$ puis par intégration entre 0 et 1, on a le résultat

b. $v_n=\ln(2)-(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'après **5-b.**

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=0$ d'après **6-a.**

c. $u_n=\dfrac{\ln(2)}{n+1}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln(2)-v_n\right]$ d'après **5-c.**

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n=\ln 2$

Problème 3

I/

1-a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=f'(1)=1$ avec $f(x)=\ln x$ d'où

$\lim\limits_{x\to 1}h(x)=h(1)\Rightarrow h$ est continue à droite en 1.

b. On pose $\varphi(x)=\ln x-x+1$ pour $x>1$. φ est dérivable de dérivée $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}\leq 0\Rightarrow\forall\, x\in]1,+\infty[$,

$\varphi(x)<\varphi(1)=0$. D'où $\forall\, x>1\,;\,\ln(x)<x-1$

Pour $x>1$; h est dérivable de dérivée $h'(x)=\dfrac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}$

Ainsi $h'(x)<0$ et h est strictement décroissante $]1,+\infty[$

2-a. $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ (Dresser le tableau des variations)

b. En utilisant le tableau des variations de h, on déduit que $\forall\, x\geq 1\,;\,0<h(x)\leq 1$.

II/ 1-a. $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\ln(|\ln t|)\right]_x^{x^2}=\ln 2$

b. Pour $x>1$, $g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

D'où $g(x)-\ln(2)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

c. Pour $x>1$, en faisant le changement de variable $u=\sqrt{t}$ et on directement le résultat demandé.

2-a. Pour $x>1$ donc $\sqrt{x}<x$ et h est décroissante alors $t\in[\sqrt{x};x]$, $h(x)\leq h(t)\leq h(\sqrt{x})$ et par intégration entre $\sqrt{x}$ et x on déduit le résultat. (Détailler la démonstration)

b. $\dfrac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}\leq\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\leq\dfrac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1}$ (**2-a.**)

Comme $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

Alors $g'_d(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

c. Pour $x>1$, $g(x)>\ln 2+(x-\sqrt{x})h(x)$ d'après **2-a.** or $(x-\sqrt{x})h(x)=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x}{\ln x}$ (a) $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Pour $x>1$, $(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln(2)\leq(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

Ainsi $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}h(x)\leq\dfrac{g(x)-\ln(2)}{x}\leq\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}h(\sqrt{x})$

En transformant comme (a), déduit :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}h(\sqrt{x})=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

3-a. $h(x)$ est continue sur $]1,+\infty[$ et les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]1,+\infty[$ donc g est dérivable de dérivée : $g'(x)=h(x)-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}h(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$.

b. d'après **I/ 2-b.** $\forall\,x\geq1\,;\,0<h(x)\leq1$ et $g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$

Donc $\forall\,x>1\,;\,0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$ (Tableau des variations)

c. Courbe

III/

1. k est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$ de dérivée $k'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})-1<0$. Donc k est décroissante et bijective sur $[1,+\infty[\Rightarrow k([1,+\infty[)=]a,b]$ avec $b=k(1)=\ln 2$ et $b=\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$

k est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]-\infty,\ln(2)]$

2. $k(1)=\ln 2>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$; d'après le théorème de valeurs intermédiaires, $\exists!\;\alpha\in]1,+\infty[\;/\;k(\alpha)=0$. D'où il existe un unique $\alpha\in]1,+\infty[/\;1+g(\alpha)=\alpha$

3-a. La récurrence simple donne le résultat

b. $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[1,+\infty[$ et $u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n$ donc $u_{n+1}-u_n=k(u_n)$. Puisque $1\leq u_n\leq\alpha$ alors $k(u_n)>k(\alpha)=0\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0$ et $(u_n)_{n\geq0}$ est strictement croissante

c. $(u_n)_{n\geq0}$ est strictement croissante et majoré par α donc converge. Notons $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ Comme $u_{n+1}=1+g(u_n)$ et g est continue sur $[1,+\infty[$ alors $l=1+g(l)\Rightarrow k(l)=0$

Donc $l=\alpha$ d'après **2.** d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

5-a. Soit $H(x)=1+g(x)\Rightarrow H([1;\alpha[)\subset[1;\alpha[$ et $|H'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$

Ainsi $\forall\,(x,y)\in[1;\alpha]^2$, en intégrant entre x et y et en supposant $x<y$: $\left|\displaystyle\int_x^y H'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_x^y|H'(t)|\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}(y-x)$

Si $y<x$: $\left|\displaystyle\int_x^y H'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\left|\int_x^y|H'(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{2}(x-y)$

Donc $|H(x)-H(y)|\leq\dfrac{1}{2}|x-y|$ en particulier pour $x=u_n$ et $y=\alpha$, on a : $|H(u_n)-H(\alpha)|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$;

Donc $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b. Se démontrer facilement par récurrence simple sur n.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

Problème 4

A/ 1-a. $\forall\;x>0$, $\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t=x-\ln x$

b. Le changement de variable $u=t^2$ donne le résultat demandé (Détailler la démonstration)

c. $\forall\;x>0$ et pour $u\in[0,x^2]$, $1\leq1+\sqrt{u}\leq1+x$ donc $\dfrac{1}{2(1+x)}\leq\dfrac{1}{2(1+\sqrt{u})}\leq\dfrac{1}{2}$ et en intégrant entre 0 et x^2 puis en divisant les 3 membres par x^2 on a le résultat voulu

2. D'après **2-c.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

B/ 1-a. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=h'(0)$ avec $h(x)=\ln(1+x)$

Donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$ alors f est continue à droite en 0

b. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\dfrac{x-\ln(1-x)}{x^2}$

pour tout $x>0$ alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Donc : f est dérivable à droite en 0 et on $f'_d(0)=\dfrac{1}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2-a. Les fonctions $x\mapsto\dfrac{x+1}{x}$ et $x\mapsto\ln(1+x)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on démontre facilement que $f'(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ (Détailler)

b. D'après **A/ 1-c.**, pour $x>0$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

c. f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc $f([0,+\infty[)=[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[1;+\infty[$

3. Tracer la courbe

C/ 1-a. D'après **A/ 1-c.**, $\forall\;x>0\,;\;\dfrac{1}{2(1+x)}\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{2}$

Comme $0<\dfrac{1}{2(1+x)}$ pour $x>0$ alors $0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{2}$

b. g est dérivable pour $x>0$ et $g'(x)=f'(x)-1<0$ et par suite g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

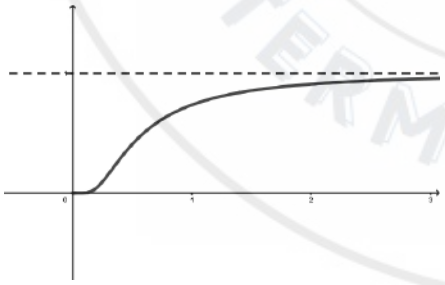
Donc $g(]0,+\infty[=]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);\lim\limits_{x\to0}g(x)[=]-\infty;1[$

c. g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ avec

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc $\exists!\ \alpha\ /\ g(\alpha) = 0$
D'où $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$
2-a. Par récurrence simple sur n on a le résultat (Faire la récurrence)
b. La démonstration est la même manière qu'en **III/ 5-a.** du **problème 3**
c. Se démontrer facilement par récurrence simple sur n.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Problème 5

A/ 1-a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-t)\,\mathrm{e}^t = 0 = f(0)$
Ainsi : f est continue à droite au point 0
b. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to-\infty} -t(1-t)\,\mathrm{e}^t = 0$
Donc f est dérivable à droite au point 0 et $f'_d(0) = 0$
c. Les fonctions $x\mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x}$
2-a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} = 1$
La droite $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b. D'après **1-c.**, $f'(x) > 0\ \forall\ x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (Dresser le tableau des variations)
3-a. f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = \left(\dfrac{-3}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$
Pour $x > 0$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{-3}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right) \Leftrightarrow x^4(1-3x) = 0$
Ainsi $x = \dfrac{1}{3}$ car $x > 0$
Donc le point $(1/3; 0.2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f)
b.



B/ 1. f est continue sur $[0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donc continue sur $[0;+\infty[$
2-a. On prend $u(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ et $v'(t) = 1 \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-1/t}$ et $v(t) = t$ alors l'intégration par parties donne le résultat demandé (Détailler les calculs)
b. $\displaystyle\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t = \int_x^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t$
Donc $\displaystyle\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1} - x\,\mathrm{e}^{-1/x}\,;\ \forall\ x > 0$
c. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \mathrm{e}^{-1}$ d'après **B/ 2-b.**
3. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 |f(x)|\ \mathrm{d}x = [F(0)-F(2)]||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$
$= (2\,\mathrm{e}^{-1/2})(2cm)(2cm)$
$\mathcal{A} = 8\,\mathrm{e}^{-1/2}\,cm^2$
4-a. $\exists\ v_n \in]n, n+2[$ tel que $u_n = 2f(v_n)$.
Pour $n < v_n < n+2$, $2f(n) < 2f(v_n) < 2f(n+2)$ car la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
D'où $\forall\ n\ \mathbb{N}^*;\ 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \le u_n \le 2\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{n+2}}$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{n+2}} = 0$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
C/ 1-a. Soit $\psi(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$. ψ est clairement définie et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc ψ est une bijection de $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\psi(]0;+\infty[) =]0;1[$ par suite, on conclut que $\forall\ y \in]0,1[\,;\ \exists!\ x \in]0;+\infty[/\ y = \psi(x)$
Par suite, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!\ \beta_n \in]0,1[/\ \mathrm{e}^{-1/n} = \beta_n$ (*)
D'autre part, la fonction f est aussi une bijection de $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;1[$ car elle est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[\Rightarrow \forall\ y \in]0,1[\,;\ \exists!\ x \in]0;+\infty[/\ y = f(x)$
Comme $\beta_n \in]0,1[,\ \exists!\ \alpha_n \in]0,+\infty[/\ \beta_n = f(\alpha_n)$ (**)
De (*) et (**) : $n \in \mathbb{N}^*\,;\ \exists!\ a_n \in \mathbb{R}^*/\ f(a_n) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$
b. $f(a_{n+1}) = \mathrm{e}^{-1/(n+1)}$ et $f(a_n) = \mathrm{e}^{-1/n} \Rightarrow f(a_{n+1} > f(a_n)$ or f est bijective et strictement croissante alors $a_{n+1} > a_n$.
D'où $(a_n)_{n\ge 1}$ est croissante.
c. $f(a_n) = \mathrm{e}^{-1/n} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-1/a_n} = \mathrm{e}^{-1/n}$
$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-1/a_n}\right) = \ln \mathrm{e}^{-1/n}$
$\Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) - \dfrac{1}{a_n} = -\dfrac{1}{n}$
2-a. Pour $t \ge 0$;
• $\dfrac{1}{1+t} - (1-t) = \dfrac{t^2}{1+t} \ge 0 \Rightarrow 1-t \le \dfrac{1}{1+t}$ (1)
• $(1-t+t^2) - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t^3}{1+t} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t} \le 1-t+t^2$ (2)
De (1) et (2) : $\forall\ t \in [0,+\infty[\,;\ 1-t \le \dfrac{1}{1+t} \le 1-t+t^2$
b. $\forall\ x \ge 0\,;\ -x \le \dfrac{1}{1+x} - 1 \le -x+x^2$ d'après **2-a.** En intégrant entre 0 et $x \ge 0$; on a le résultat demandé
3-a. $f(a_4) = \mathrm{e}^{-1/4}$ et $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^{-1/4} \Rightarrow f(a_4) > f(1)$
f est croissante et bijective $\Rightarrow a_4 > 1$
On démontre $a_n \ge 1$ par récurrence simple sur $n \ge 4$
b. D'après **C/ 1-c.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{n}$ (1)
D'autre part : $a_n \ge 1 \Leftrightarrow 1 \ge \dfrac{1}{a_n} > 0$ et d'après **2-b.**
$-\dfrac{1}{2a_n^2} \le -\dfrac{1}{a_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) \le -\dfrac{1}{2a_n^2} + \dfrac{1}{3a_n^3}$ et d'après (1)
$-\dfrac{1}{2a_n^2} \le -\dfrac{1}{n} \le -\dfrac{1}{2a_n^2} + \dfrac{1}{3a_n^3}$. Ainsi en multipliant par $-2a_n^2$
On déduit alors que : $1 - \dfrac{2}{3a_n} \le \dfrac{2a_n^2}{n} \le 1$
c. $a_n \ge 1 \Rightarrow -\dfrac{2}{3a_n} \ge -\dfrac{2}{3} \Rightarrow 1 - \dfrac{2}{3a_n} \ge \dfrac{1}{3}$ ainsi d'après **3-b.**
$\dfrac{1}{3} \le 1 - \dfrac{2}{3a_n} \le \dfrac{2a_n^2}{n} \le 1 \Rightarrow \dfrac{n}{6} \le a_n^2 \le \dfrac{n}{2}$ car $n \ge 4 > 0$

D'où $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq a_n$ et conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

d. $1 - \dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2a_n^2}{n} = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}} = 1$

Problème 6

1-a. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - 1$
Donc g croissante sur $[0, \ln 2]$ et décroissante sur $[\ln 2; +\infty[$
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; $g(0) = 0$ et $g(\ln 2) = 1 - \ln 2$
(Dresser le tableau des variations de g)
2-a. g est bijective sur $\mathbb{R}_+$ et est strictement décroissante $]\ln(4), \ln(6)[$
De plus $g(\ln 4) = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2 \simeq 0.1 > 0$ et $g(\ln 6) \simeq -0.14 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit $\exists!\ \alpha\ ]\ln 4; \ln 6[\ /\ g(\alpha) = 0$
b. $\forall\ x \in [0, \alpha]$; $g(x) \geq 0$ et $\forall\ x \in [\alpha; +\infty[$; $g(x) \leq 0$
3-a. Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ (Détailler)
b. $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = 2(1 - \mathrm{e}^{-u_n}) - u_n = g(u_n)$
c. $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [1; \alpha[\Rightarrow g(u_n) > 0$. D'où $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.
d. $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante et majorée par α donc elle converge.
Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puisque $h : x \mapsto 2(1-\mathrm{e}^{-x})$ est continue et $h(u_n) = u_{n+1}$ alors $l = h(l) \Rightarrow g(l) = 0 \Rightarrow l = \alpha$
II/ 1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

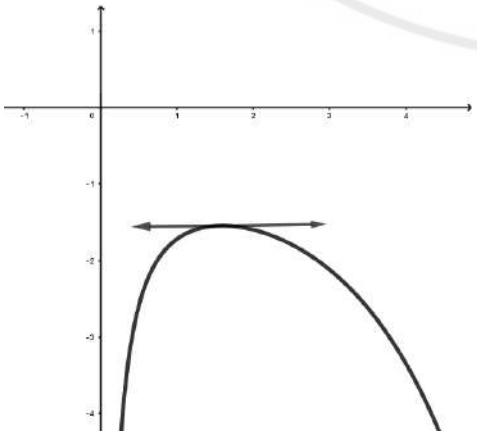
2-a. $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(1-\mathrm{e}^{-\alpha}) = \alpha \Rightarrow \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{2}{2-\alpha}$ et on vérifier aisément que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

b. Se démontre facilement $f'(x) = \dfrac{g(x)\,\mathrm{e}^x}{x^3}\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$
Donc f est croissante sur $]0; \alpha]$ et décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	↘	$-\infty$

3. Graphe

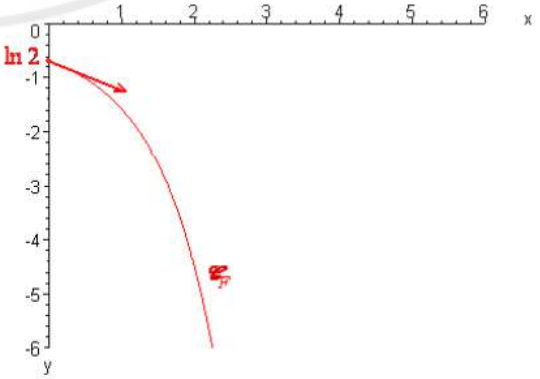


III/ 1-a. On pose $u(t) = 1 - \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow u'(t) = -\mathrm{e}^t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$ alors $F(x) = \left[\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\right]_x^{2x} - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$
D'où $\forall\ x > 0$; $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$
b. Pour $x > 0$; et $\forall\ t \in [x; 2x]$; $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}^{2x}$ Ainsi $\dfrac{\mathrm{e}^x}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{t}$ et en intégrant entre x et $2x$, on a le résultat demandé. (Détailler les étapes de calcul)
c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$ (Théorème de gendarme et **1-b.**)
Ainsi d'après $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -\ln 2$ car
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 - 1 = 0$
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -\ln 2 = F(0)$ alors F est continue à droite en 0
2-a. Pour $x > 0$ et $\forall\ t \in [x, 2x]$; $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}^{2x}$ et par suite $\dfrac{1-\mathrm{e}^t}{t^2} \leq \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq (1-\mathrm{e}^x)\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
D'où $\forall\ x > 0$; $F(x) \leq \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{2x}$
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{2x} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$
3. $f(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$. Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{-1 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}{2x^2}$
D'où $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)^2$

4-a. $c \in\ ]0, x[\Rightarrow 1 < \mathrm{e}^{2c} < \mathrm{e}^{2x} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} < -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2c} < -\dfrac{1}{2}$
Ainsi $x \in\ ]0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \leq \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\dfrac{1}{2}$
b.D'après **4-a.** ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$. D'où F est dérivable à droite 0 et que $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$

complément
Tableau de variations de F :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	
$F(x)$	$-\ln 2$ ↘	$-\infty$



Problème 7

A/ 1-a. f est dérivable sur $[a,b]$ alors f' est continue sur $[a,b]$. Comme f' est continue sur $[a,b]$ qui est un intervalle fermé alors f' admet borné sur cet intervalle. Donc il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a,b]\,;\ |f'(x)| \leq M$

b. D'après **1-a.** et en appliquant l'inégalité des accroissements finis en considérant l'intervalle $[a,t]$, $\forall t \in [a,b]$; on conclut que , $|f(t)-f(a)| \leq M|t-a|$.

Autre méthode : $\forall t \in [a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$;

$|f'(x)| \leq M \Rightarrow \displaystyle\int_a^t |f'(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^t M\ \mathrm{d}x$ et par suite

$\displaystyle\int_a^t |f'(x)|\ \mathrm{d}x \leq M(t-a)$ or $(t-a) = |t-a|$ car $t \in [a,b]$ et

$\left|\displaystyle\int_a^t f'(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^t |f'(x)|\ \mathrm{d}x \Rightarrow |f(t)-f(a)| \leq \int_a^t |f'(x)|\ \mathrm{d}x$

Par suite $|f(t)-f(a)| \leq \displaystyle\int_a^t |f'(x)|\ \mathrm{d}x \leq M|t-a|$

D'où $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)-f(a)| \leq M|t-a|$ (*)

En intégrant les deux membres de l'inégalité (*) entre a et b, on a : $\displaystyle\int_a^b |f(t)-f(a)|\ \mathrm{d}t \leq M\int_a^b |t-a|\ \mathrm{d}t$

Or $\displaystyle\int_a^b |t-a|\ \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}$

D'où $\displaystyle\int_a^b |f(t)-f(a)|\ \mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$

2-a. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} J_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t$ et en utilisant la relation de Chasles, on déduit facilement que :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} J_k = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b R_n(f)\ \mathrm{d}t$

• $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t$ (*)

• En utilisant le remarque, on déduit aussi que

$R_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\ \mathrm{d}t$ (**)

De (*) et (**) en utilisant la linéarité de l'intégrale, on déduit que le résultat demandé.

c. • On prend l'intervalle $[a',b']$ avec $a' = a+\frac{k(b-a)}{n}$ et $b' = a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}$. D'après **1-b.**, on déduit que :

$\displaystyle\int_{a'}^{b'} |f(t)-f(a')|\ \mathrm{d}t \leq M\frac{(b'-a')^2}{2}$. En remplaçant a' et b' par leurs valeurs, on déduit ce qui est demandé.

• En utilisant le résultat trouvé puis en faisant la sommation pour k allant de 0 à $n-1$ on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t)-f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|\ \mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$

Car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M\frac{(b-a)^2}{2n^2} = M\frac{(b-a)^2}{n}$

Or $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a'}^{b'} f(t)-f(a')\ \mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a'}^{b'} |f(t)-f(a')|\ \mathrm{d}t$ et

$\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a'}^{b'} f(t)-f(a')\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t\right|$ (**2-b.**)

D'où $\left|\displaystyle\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$

d. D'après **2-c.**, $0 \leq \left|\displaystyle\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\frac{(b-a)^2}{2n} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b [f(t)-R_n(f)]\ \mathrm{d}t\right) = 0$ ou encore

$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} R_n(f)$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et donc $\forall x \in [0,1]\,;\ |f'(x)| \leq 2$. On peut prendre un majorant de M égale à 2.

$2\dfrac{(1-0)^2}{2n} \leq 10^{-1} \Rightarrow n \geq 10$. Donc une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-1} près est $R_{10}(f) = 0.77$

B/ 1. Puisque f est croissante, alors pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$, $f(x_k) \leq f(t) \leq f(x_{k+1})$ puis en intégrant on a :

$\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ \mathrm{d}t \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})\ \mathrm{d}t$ et par suite $(x_{k+1}-x_k)f(x_k) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq (x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1})$

D'où $h_n f(x_k) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq h_n f(x_{k+1})$ car $x_{k+1}-x_k = h_n$

Géométriquement, ceci signifie que l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f (en supposant $f \geq 0$), l'axe des abscisses, les droites $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$, est encadrée par l'aire du rectangle gauche (celui de hauteur $f(x_k)$) et l'aire du rectangle droit (celui de hauteur $f(x_{k+1})$).

2. Sommons ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$. Il vient

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h_n f(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} h_n f(x_{k+1})$

Dans le terme de gauche, on reconnait G_n et dans celui de droite, on reconnait D_n. Dans le terme du milieu, on peut utiliser la relation de Chasles pour remplacer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$ par $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. On obtient alors bien le résultat voulu.

3. $G_n = h_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = h_n f(x_0) + h_n \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$

$D_n = h_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = h_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = h_n f(x_n) + h_n \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$

Par suite $D_n - G_n = h_n[f(x_n)-f(x_0)] = h_n[f(b)-f(a)]$

4. Puisque $G_n \leq I \leq D_n$, on a :

$|D_n - I| = D_n - I \leq D_n - G_n = h_n[f(b)-f(a)]$

$|G_n - I| = I - G_n \leq D_n - G_n = h_n[f(b)-f(a)]$

5. Si f est décroissante, on a des résultats complètement similaires, si ce n'est que l'on doit changer le signe des inégalités.

6. $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ \mathrm{d}t = \ln 2$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[1,2]$. D'après ce que précède, on a une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-1} près dès que $h_n[f(1)-f(2)] \leq 10^{-1} \Rightarrow \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{2}\right) \leq 10^{-1}$ ou encore dès que $n \geq 5$.
Par conséquent $D_5 = 0.65$ et $G_5 = 0.75$ sont les approximations par défaut et par excès de $\ln 2$ à 10^{-1} près.

Problème 8

1-a. f est continue sur $[a,b]$ et les fonctions $u(x) = c - x$ et $v(x) = c + x$ sont dérivables donc φ est dérivable et $\varphi'(x) = -2f(c) + f(c+x) + f(c-x)$. Comme f est dérivable sur $[a,b]$ alors φ' est aussi dérivable $\Rightarrow \varphi$ est deux fois dérivables et $\varphi''(x) = f'(c+x) - f'(c-x)$
Pour $x \in [a,b]$; $|f''(x)| \leq M$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre $c-x$ et $c+x$ on a alors
$|f'(c+x) - f'(c-x)| \leq 2xM$ pour $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$
D'où $|\varphi''(x)| \leq 2xM$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$

c. $\varphi'(0) = \varphi(0) = 0$. Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$ et $t \in [0,x]$;
$|\varphi''(t)| \leq 2tM \Rightarrow \displaystyle\int_0^x |\varphi''(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x 2tM\ \mathrm{d}t$

- $\displaystyle\int_0^x 2tM\ \mathrm{d}t = Mx^2$
- $|\varphi'(x) - \varphi'(0)| = \left|\displaystyle\int_0^x \varphi''(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |\varphi''(t)|\ \mathrm{d}t$

D'où $|\varphi'(x)| \leq Mx^2$ car $\varphi'(0) = 0$
De manière analogue, on a :
$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \left|\displaystyle\int_0^x \varphi'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t \leq M\dfrac{x^3}{3}$
D'où $|\varphi(x)| \leq M\dfrac{x^3}{3}$ (*)
Et en remplaçant x par $\dfrac{b-a}{2}$ dans l'inégalité (*), on déduit le résultat demandé.

d. $I - I_m = \displaystyle\int_a^b \left[f(t) - f(\frac{a+b}{2})\right]\ \mathrm{d}t = \varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)$
D'où $|I - I_m| = \left|\varphi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{24}$

2-a. En utilisant le résultat de la première question, et en prenant l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on a :
$\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(t) - f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right]\ \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{M(x_{k+1}-x_k)^3}{24}$
Or $\dfrac{M(x_{k+1}-x_k)^3}{24} = \dfrac{M(b-a)^3}{24n^3}$. D'où le résultat

b. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 0 à $n-1$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(t) - f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right]\ \mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^3}{24n^3}$
Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^3}{24n^3} = \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$ et
$\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(c_k)]\ \mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(c_k)]\ \mathrm{d}t\right|$
avec $c_k = \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(c_k)\ \mathrm{d}t = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = I_{m,n}$
D'où $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - I_{m,n}\right| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}M$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^3}{24n^2}M = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - I_{m,n}\right] = 0$ ou encore
$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_{m,n}$

3. f est deux fois dérivables et $f''(x) = 2(2x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Pour $x \in [0,1]$, $|f''(x)| \leq 2$
Donc un majorant de M peut être pris égale à 2.
On a une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-1} près dès que $2\dfrac{(1-0)^3}{24n^2} \leq 10^{-1} \Rightarrow n > 0,9$. Par conséquent $I_{m,1} = 0.77$ est la valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-1} près.
la méthode du point médian est beaucoup plus efficace que la méthode des rectangles, puisqu'elle garantit une convergence en $\dfrac{1}{n^2}$ et non en $\dfrac{1}{n}$

B/ 1. Une double intégration par parties donne le résultat demandé.

2. $(t-a)(b-t) = -t^2 + (a+b)t - ab$
Donc $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{-t^2 + (a+b)t - ab}{2}\ \mathrm{d}t$
$= \left[-\dfrac{t^3}{6} + (a+b)\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{ab}{2}t\right]_a^b$
D'où $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{12}$

3-a. $I_k = (a_{k+1} - a_k)\dfrac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$ et $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} I_k$

b. $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$ (relation de Chasles)
$\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t = (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$
$+\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k - t)(a_{k+1} - t)}{2} f''(t)\ \mathrm{d}t$ (**B/ 1.**)

c. $|I - I_n| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|\frac{(a_k - t)(a_{k+1} - t)}{2} f''(t)\right|\ \mathrm{d}t$
$\leq M\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k - t)(t - a_{k+1})}{2}\ \mathrm{d}t$
$\leq M\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{12}$
D'où $|I - I_n| \leq M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$
On déduit alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I - I_n) = 0$ ou encore
$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_n$

Correction des exercices

Exercice 1

1-a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)+3\cos(n^2)}{\sqrt{n}} = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+(-1)^{n+1}}{7n+(-1)^n} = \dfrac{3}{7}$

c. $\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1} = \dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right] = 0$

d. $\sqrt{n^2+n+1}-n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n^2+n+1}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n^2+n+1}-n\right] = \dfrac{1}{2}$

2. Récurrence sur n :

• Pour $n=1$, $1^2 = 1 = S_1$. La propriété est vraie.

• Supposons que la propriété est vraie jusqu'à un ordre $n \geq 1$ donné. On a : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

Alors $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ (par hypothèse)

$S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Donc la propriété est vraie à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3. Récurrence sur n :

• Pour $n=1$, $1^3 = 1 = R_1$. Donc le résultat est vrai à l'ordre 1.

• Supposons que le résultat reste vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ donné. On a : $R_{n+1} = R_n + (n+1)^3$

Alors $R_{n+1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$ (par hypothèse)

$R_{n+1} = (n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4}+n+1\right) = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)$

Et par suite $R_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2

1. $\forall n \geq 2$, $\dfrac{\pi}{2^n} \in]0, \pi/2[$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) > 0$

2. On pose $f(x) = \sin x$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

3. • L'égalité proposée est vraie pour $n=2$ car

$\cos\dfrac{\pi}{2^2} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Supposons le résultat jusqu'à un ordre $n \geq 2$, alors par hypothèse de récurrence $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux). Or on sait que :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}$

car $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) > 0$ d'après **1.**

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux)

D'où l'égalité proposée est aussi vraie à l'ordre $n+1$.

D'où le résultat.

4. Comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{2}}$ alors, on déduit, en utilisant **3.** que :

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

5. $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2^n \times 2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\pi$

D'après **2.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \pi$

Exercice 3

1. Soit (P_n) la propriété : u_n et v_n sont strictement positifs :

• (P_0) est vraie car $a>0$ et $b>0$

• supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie :

Par hypothèse, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et donc $u_{n+1} > 0$; $v_{n+1} > 0$ par définition même de $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.

2. $0 < a < b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{(v_{n-1}-u_{n-1})^2}{2(u_{n-1}+v_{n-1})} > 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < v_n$

3. $0 < x < y \Rightarrow 0 < y-x < y+x \Rightarrow \dfrac{y-x}{y+x} < 1$ car $x+y > 0$

D'où $\dfrac{y-x}{2(y+x)} < \dfrac{1}{2}$ (a)

$v_{n+1}-u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)(v_n-u_n)}{2(u_n+v_n)}$ or d'après (a) et d'après **2.** & **1.**, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_n-u_n}{2(u_n+v_n)} < \dfrac{1}{2}$

D'où $v_{n+1}-u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$

4. Par récurrence :

• Pour $n=1$, on a d'après la question précédente que $v_1-u_1 < \dfrac{1}{2}(v_0-u_0)$. Donc le résultat est vrai à l'ordre 1.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ donné alors $v_n-u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$

Or $v_{n+1}-u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n-u_n) \Rightarrow v_n-u_n < \dfrac{1}{2^{n+1}}(v_0-u_0)$

Le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n-u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$

5. $0 < v_n-u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$

6. • $u_{n+1}-u_n = \dfrac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n} > 0$; (u_n) est croissante.

• $v_{n+1}-v_n = \dfrac{u_n-v_n}{2} < 0$; (v_n) est décroissante.

• $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$. Donc ces deux suites sont adjacentes.

7. $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n = u_0v_0 = ab \Rightarrow u_nv_n$ est constant.

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_nu_n = l^2 = ab$ et donc $l = \sqrt{ab}$

8. Posons $a=2$ et $b=3$; (u_n) et (v_n) convergent vers $\sqrt{6}$ On calcule donc les premiers termes de la suite et dès que la différence (v_n-u_n) est inférieure à 10^{-5} on a l'encadrement demandé. On a : $u_1=\dfrac{12}{5}$ et $v_1=\dfrac{5}{2}$; $u_2=\dfrac{120}{49}$ et $v_2=\dfrac{49}{20}$; $u_3=\dfrac{11760}{4801}$ et $v_3=\dfrac{4801}{1960}$

$v_3-u_3<10^{-5}$; donc $\dfrac{11760}{4801}<\sqrt{6}<\dfrac{4801}{1960}$

Exercice 4

1. La fonction f est continue et dérivable sur $[2,+\infty[$ avec $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2x-3}$. Par suite :

• Pour $x\in[2,5/2[$; $f'(x)>0\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[2,5/2]$

• Pour $x\in]5/2,+\infty[$; $f'(x)<0\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[5/2;+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	2		$5/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$-\frac{1}{2}+\ln(2)$	↘	$-\infty$

f est strictement décroissante sur $\in[3,4]$ et $f(3)\approx 0.1>0$ et $f(4)\approx -0.39<0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que f est bijective sur I, on conclut que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur I

2-a. • $f(\alpha)=0\Rightarrow \ln(2\alpha-3)=\alpha-2$ et par suite $g(\alpha)=2+\ln(2\alpha-3)=2+\alpha-2$. D'où $g(\alpha)=\alpha$

• La fonction g est continue et dérivable sur I avec $g'(x)=\dfrac{2}{2x-3}\Rightarrow$ la fonction g est croissante sur I. Par suite $g([3,4])=[g(3),g(4)]=[3.1;3.61]\subset[3,4]$

D'où $\forall x\in I$, $g(x)\in I$

b. Pour $x\in[3,4]$, $3\leq x\leq 4\Rightarrow 3\leq 2x-3\leq 5$ et par conséquent $\dfrac{2}{5}\leq\dfrac{2}{2x-3}\leq\dfrac{2}{3}$. or $|g'(x)|=g'(x)$ pour $x\in I$

D'où $\forall x\in I$; $|g'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$

c. Soit $x\in I$. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis entre x et α, on déduit alors que

$\forall x\in I$: $|g(x)-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|x-\alpha|$ car $g(\alpha)=\alpha$

3-a. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n\in[3,4]$

• Pour $n=0$, $U_0=3\Rightarrow U_0\in[3,4]$. Donc le résultat est vrai pour $n=0$.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n\geq 0$ donné. Alors $U_n\in I$. Comme $U_{n+1}=g(U_n)$ alors $U_{n+1}\in I$ d'après **2-a.** Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où pour tout entier naturel n, $U_n\in[3,4]$

b. • En remplaçant x par $U_n\in I$ dans l'inégalité de la question **2-c.** on déduit que $|g(U_n)-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ et comme $U_{n+1}=g(U_n)$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

• Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Pour $n=0$, $U_0=3$. Or comme $\alpha\in I$ alors $|U_0-\alpha|\leq 1$

D'où $|U_0-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ donc vrai à l'ordre $n=0$

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n\geq 0$ alors $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Or $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ donc $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$; $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\alpha|=0$. D'où (U_n) est convergente de limite $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$

d. $|U_n-\alpha|\leq 10^{-3}$ dès que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leq 10^{-3}\Rightarrow n\geq 8$.

D'où $n_0=8$

Exercice 5

1. $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\dfrac{1}{2}$

2. $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$ et $1+\dfrac{1}{n}>1$ alors $v_n>\dfrac{1}{2}$

3. $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{n(n+1)}\right)\left(\dfrac{2n^2+4n+1}{n(n+1)}\right)<0$ donc (v_n) est décroissante. En plus $v_4=0.78$ et $v_5=0.72$.

Donc $n_0=5$. D'où $n\geq 5$; $v_n<\dfrac{3}{4}$

4. Pour $n\in\mathbb{N}$, si $n\geq 5$ alors $v_n<\dfrac{3}{4}\Rightarrow u_{n+1}<\dfrac{3}{4}u_n$

5-a. Par récurrence sur $n\geq 5$: $u_n\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}u_5$

• Pour $n=5$, $u_5\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^0 u_5$ donc vrai à l'ordre 5

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n\geq 5$ alors $u_n\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}u_5$. Or $u_{n+1}<\dfrac{3}{4}u_n$ et donc par conséquent $u_{n+1}\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}u_5$. Donc vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où pour $n\geq 5$, $u_n\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}u_5$

b. D'après **5-a.**, en faisant la somme pour $k=5$ à n, on a : $\sum\limits_{k=5}^{n}u_k\leq\sum\limits_{k=5}^{n}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-5}u_5$ et par suite :

$S_n\leq\left[1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right]u_5$

c. $1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}=4\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$ car il s'agit d'une somme de $n-4$ termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3/4

Et d'après **5-b.**, on déduit que $S_n\leq 4u_5$ car $\forall n\geq 5$, $4\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right]u_5\leq 4u_5$

6. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$, donc la suite $(S_n)_{n\geq 5}$ est croissante.
Cette suite $(S_n)_{n\geq 5}$ est croissante et majorée par $4u_5$, donc elle converge.

Exercice 6

1. Pour $x > -2$, on pose $\varphi(x) = f(x) - x = \ln(x+2) - x$. La fonction φ est continue et dérivable sur $]-2, +\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = -\dfrac{x+1}{x+2}$ et par suite on conclut que φ est strictement croissante sur $]-2, -1]$ et strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$. On a alors le tableau des variations de φ suivant :

x	-2		-1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

• Comme $\lim\limits_{x\to -2^+} \varphi(x) = -\infty$ et $\varphi(-1) = 1 > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que $\varphi(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]-2, -1[$. De plus, f est strictement croissante sur $]-2, -1[$ alors on conclut que cette solution est unique. D'où $\exists! x_1 \in]-2, -1[$ tel que $\varphi(x_1) = 0$ ou encore $f(x_1) = x_1$
• De même comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi = -\infty$ et $\varphi(-1) = 1 > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que $\varphi(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]-1, +\infty[$. De plus, $\varphi(1) \approx 0.1 > 0$, $\varphi(2) \approx -0.661 < 0$ et φ est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$ alors on conclut que cette solution est unique et appartient à $]1, 2[$. D'où $\exists! x_2 \in]1, 2[$ tel que $\varphi(x_2) = 0$ ou encore $f(x_2) = x_2$
D'où (C_f) coupe (D) en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses x_1 et x_2 vérifient : $-2 < x_1 < -1$ et $1 < x_2 < 2$
2. Soient α et β deux réels tels que $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$
f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ alors comme $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, $f(x_1) < f(\alpha) < f(x_2) < f(\beta)$.
D'où $x_1 < f(\alpha) < x_2 < f(\beta)$ car $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$
3-a. Montrons par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$
• Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et d'après la question **1.**, on déduit que $1 \leq u_0 < x_2 < v_0 \leq 2$. Donc vrai pour $n = 0$
• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$ alors $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$. Comme la fonction est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ alors
$f(1) \leq f(u_n) < f(x_2) \leq f(2)$. Or $f(1) \approx 1.1$ et $f(2) \approx 1.39$ et par suite $1 \leq f(1) \leq f(u_n) < f(x_2) < f(v_n) \leq f(2) \leq 2$
D'où $1 \leq u_{n+1} < x_2 < v_{n+1} \leq 2$ car $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x_2) = x_2$
On conclut alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2 < v_n \leq 2$
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 2) - u_n = \varphi(u_n)$
Or d'après la question **1.**, on sait que $\forall x \in [1, x_2]$, $\varphi(x) \geq 0$
D'après la question **3-a.**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < x_2$ alors on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow$ la suite (u_n) est croissante.
c. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \ln(v_n + 2) - v_n = \varphi(v_n)$
Or d'après la question **1.**, on sait que $\forall x \in [x_2, 2]$, $\varphi(x) \leq 0$
D'après la question **3-a.**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_2 < v_n \leq 2$ alors on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq 0 \Rightarrow$ la suite (v_n) est décroissante.
3-a. Pour $x \in]-2, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Par suite, pour $x \in I$, $3 \leq x + 2 \leq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{3}$.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < v_n < 2$ et comme f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ alors $f(v_n) - f(u_n) > 0$
De plus, d'après **3-a.** et le théorème des inégalités des accroissements finis entre u_n et v_n on déduit que
$\dfrac{1}{4}(v_n - u_n) \leq f(v_n) - f(u_n) \leq \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$
4-a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$
• Pour $n = 0$, $v_0 - u_0 = 1 \Rightarrow 0 < v_0 - u_0 \leq \dfrac{1}{3^0}$ donc le résultat est vrai à l'ordre $n = 0$.
• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$ alors $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$. Or $0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$
$0 < f(v_n) - f(u_n) \leq \dfrac{1}{3^{n+1}}$. Donc $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3^{n+1}}$
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < v_n - u_n \leq \dfrac{1}{3^n}$
b.
• La suite (u_n) est croissante et majorée par x_2 alors elle est convergente.
• La suite (v_n) est décroissante et minorée par x_2 alors elle est convergente.
Donc les suite (u_n) et (v_n) sont convergentes.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ d'après l'encadrement de **4-a.** et le théorème des gendarmes. Or comme les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
NB : On peut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_2$ et les suites (u_n) et (v_n) sont dites suites adjacentes.

Exercice 7

A/
1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$
2. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente.
B/
1-a. Pour $x \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$ puis en intégrant entre n et $n+1$ on a : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n}$
D'où $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$
b. $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Or $\frac{1}{n} - f(n) = -\ln\left(\frac{n}{1+n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

D'où $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$

c. En remplaçant l'expression trouvée en **B/ 1-b.** dans l'inégalité **B/ 1-a.** on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n}$ et par suite $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

2-a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$ puis en sommant pour k allant de n à $2n$ on a le résultat demandé.

b. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$ et par identification, on déduit que $a = 1$ et $b = -1$

c. D'après la question précédente, on déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow S_n = \sum_{k=n}^{2n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$ qui est une somme télescopique donc $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

d. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ d'après **B/ 2-b.** et le théorème des gendarmes.

e. Pour $n > 1$, $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = \sum_{k=n}^{2n}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$ et par suite $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ or

- $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = u_n$
- $\sum_{k=n}^{2n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=n}^{2n}[\ln(k) - \ln(k+1)] = \ln(n) - \ln(2n+1)$

et par suite $\sum_{k=n}^{2n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = -\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

D'où $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

f. On déduit de **B/ 2-e.** que :

$u_n = \ln\left(2+\frac{1}{n}\right) + f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n} u_n = \ln 2$

Exercice 8

1-a. $I_0 = 1$, $I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$ et par suite $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\left(x^2+1-1\right)\,\mathrm{d}x$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

c. Intégration par parties sur l'intégrale I_n

On pose $u(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ et $v'(x) = 1$ alors on a :

$u'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$ et $v(x) = x$ et par suite

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

Or $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ alors on déduit que :

$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n[I_n - I_{n+1}] \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$

d. En utilisant la relation de la question précédente, on déduit que :

- $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$
- $I_3 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

D'où $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

2-a. f est dérivable avec $f'(t) = (at+a+b)\,\mathrm{e}^t$. Ainsi $f'(t) = g(t)$ donne, par identification que $a = -1$ et $b = 2$.

On déduit alors que $J_1 = [(-2+t)\,\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e} - 2$

b. On a : $J_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}x$

On pose $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$ alors on déduit que : $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$

$J_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et par suite $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$

c. $\forall t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t)^n\,\mathrm{e}^t$ est positif donc $J_n \geq 0$ entant qu'intégrale d'une fonction positive

d. $\forall t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1-t)^n \geq 0$. De plus $\mathrm{e}^t \leq \mathrm{e} \Rightarrow (1-t)^n\,\mathrm{e}^t \leq \mathrm{e} \times (1-t)^n$

e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1-t)^n\,\mathrm{e}^t \leq \mathrm{e} \times (1-t)^n$ alors en intégrant entre 0 et 1 on a : $\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$ et par suite $J_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$

f. On déduit de **B/ 2-c.** et **B/ 2-e.** que $0 \leq J_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Correction des exercices

Exercice 1

Les solutions sont données directement. Détailler les démarches pour obtenir les solutions

1-a. $(E_1) : x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x/7} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$
$(E_2) : x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
$(E_3) : x \mapsto \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x}\left(4C\,\mathrm{e}^{2x/3} - 2x - 3\right)$ avec $C \in \mathbb{R}$

2-a. $(E_1) : x \mapsto c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$
$(E_2) : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(c_2 x + c_1)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$
$(E_3) : x \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^{x}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$
$(E_4) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(c_1 \sin(\sqrt{3}x) + c_2 \cos(\sqrt{3}x)\right)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 2

1. $u'(x) = (ax + a + b)\,\mathrm{e}^{x} \Rightarrow u'(x) - 2u(x) = (-ax + a - b)\,\mathrm{e}^{x}$
u solution de $(E_1) \Rightarrow (-ax + a - b)\,\mathrm{e}^{x} = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$
D'où $a = -1$ et $b = 0$

2. v solution de $(E_1) \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$ or
$u'(x) - 2u(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x)$
d'où $(u-v)'(x) - 2(u-v)(x) = 0 \Leftrightarrow u - v$ est solution de $(E') : y' - 2y = 0$

3. $(E') : x \mapsto C\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_1) sont les fonctions v telles que
$u(x) - v(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow v(x) = -x\,\mathrm{e}^{x} - C\,\mathrm{e}^{2x}$. D'où les solutions de (E_1) sont des fonctions f_k définies par :
$f_k(x) = -x\,\mathrm{e}^{x} + k\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

4. La solution f de (E_1) vérifiant $f(0) = 1 \Rightarrow k = 1$
Donc $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - x\,\mathrm{e}^{x}$

5. $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\ln(3)} t\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = 6 - 3\ln 3$
(Utiliser une intégration par parties pour la 2ème intégrale)

6-a. $h'(x) = \dfrac{3}{5}\sin(x) - \dfrac{1}{5}\cos(x) \Rightarrow$
$h'(x) - 2h(x) = \cos x + 2\sin x$ et h solution de (E_2)

b. Si g est une solution de (E_2) alors $g - h$ est solution de l'équation : $y' - 2y = 0$. D'où les solutions de (E_1) sont des fonctions g_k définies par :
$g_k(x) = k\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$

c. La solution f de (E_2) vérifiant $g(0) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow k = 1$
Donc $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$

7. Notons $\varphi(x) = g(x) - f(x)$
Alors $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{x} - \dfrac{3}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$
φ est continue et dérivable sur $]0;1[$ de dérivée :
$\varphi'(x) = \dfrac{1}{5}[5(x+1)\,\mathrm{e}^{x} + 3\sin x - \cos x] > 0$ sur $]0;1[$
• Pour $x \in]0;1[$, $3\sin(x) - \cos(x) \geq -1$
• Pour $x \in]0;1[$, $5(x+1)\,\mathrm{e}^{x} \geq 5$
Donc pour $x \in]0,1[$, $5(x+1)\,\mathrm{e}^{x} + 3\sin(x) - \cos(x) \geq 4$
D'où $\varphi' > 0$. φ est alors continue et strictement croissante sur $]0;1[$ donc bijective.
Or $\varphi(0) = -\dfrac{3}{5}$ et $\varphi(1) \approx 2.23$ alors on déduit l'existence et l'unicité de $x_0 \in]0,1[/\ \varphi(x_0) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'où $\exists!\ x_0 \in]0,1[/ f(x_0) = g(x_0)$

8.
• Pour $x \geq 1$, $3\sin(x) - \cos(x) \geq -4$
• $5(x+1)\,\mathrm{e}^{x} \geq 5$ d'où $\varphi'(x) > 0$ pour $x > 1$
Par conséquent, φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc en conclusion, φ est strictement croissante $[0,+\infty[$.
Par suite pour $x \geq x_0$; $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = 0$
D'où $x \geq x_0$, $g(x) - f(x) \geq 0$.

Exercice 3

1-a. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\theta) > 0$ et les solutions de (e_0) sont alors : $z_1 = -\sin\theta - i\cos\theta$ et $z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta$

b. $|z_1| = |z_2| = 1$; $arg(z_1) = -\theta - \dfrac{\pi}{2}$ et $arg(z_2) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$

2. $(E_h) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sin(\theta)}(K_1\cos(x\cos\theta) + K_2\sin(x\cos\theta))$ avec K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$

3. $f_0''(x) = 0$; $f_0'(x) = a$. $f_0(x)$ solution de (E) entraine
$2a\sin\theta + ax + b = x\cos\theta + 2\sin\theta \Rightarrow a = \cos\theta$ et
$b = 2\sin\theta - \sin(2\theta)$
D'où $f_0(x) = x\cos(\theta) + 2\sin(\theta) - \sin(2\theta)$ est une solution particulière de (E)

4. f solution de $(E) \Leftrightarrow f'' + 2\sin(\theta)f' + f = f_0'' + 2\sin(\theta)f_0' + f$
$\Leftrightarrow (f - f_0)'' + 2\sin(\theta)(f - f_0)' + (f - f_0) = 0$
$\Leftrightarrow f(x) - f_0(x)$ est solution (E_h).
D'où une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f(x) - f_0(x)$ est solution (E_h)

5. D'après la question précédente, si f est solution de (E) alors $f(x) - f_0(x)$ est solution de de (E_h). Donc $f(x) - f_0(x)$ est sous la forme des fonctions de la question **2.**
D'où les solutions de (E) sont les fonctions f_k de la forme :
$x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sin(\theta)}(K_1\cos(x\cos\theta) + K_2\sin(x\cos\theta)) + f_0(x)$

Exercice 4

1. f solution de $(E) \Leftrightarrow af'' + bf' + cf = u(x)$
Or $af_0'' + bf_0' + cf_0 = u(x)$ car f_0 solution de (E). Ainsi :
f solution de $(E) \Leftrightarrow af'' + bf' + cf = af_0'' + bf_0' + cf_0$
$\Leftrightarrow a(f - f_0)'' + b(f - f_0)' + c(f - f_0) = 0$
$\Leftrightarrow f - f_0$ solution de (E_h)

2-a. i. $v'(x) = \dfrac{(2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}}{2} \Rightarrow v'(x) + v(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$
D'où $v(x) = \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E_1)

ii. Les solutions de (E_1) sont alors les fonctions de la forme :
$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

b-i. $f_0'(x) = [ax^2 + (b + 2a)x + b - 1]\,\mathrm{e}^{x}$ et
$f_0''(x) = [ax^2 + (4a + b)x + 2b + 2a - 1]\,\mathrm{e}^{x}$
$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 3f_0(x) = (-4ax - 2b + 2a)\,\mathrm{e}^{x}$. Si f_0 est solution de (E_2) alors $(-4ax - 2b + 2a)\,\mathrm{e}^{x} = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$ et par identification, on déduit que $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -1$
D'où $f_0(x) = -\dfrac{(x+1)^2}{2}\,\mathrm{e}^{x}$ est une solution de (E)

ii. (E_h) $x \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{x}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

iii. $(E_2) : x \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{3x} + c_2\,\mathrm{e}^{x} - \dfrac{(x+1)^2}{2}\,\mathrm{e}^{x}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

Correction des problèmes

Problème 1

1-a. $g'(x) = -a\sin x + b\cos x$; $g''(x) = -a\cos x - b\sin x$
$g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) = (3a-4b)\cos x + (4a+3b)\sin x$
g est solution de (E) si et seulement si
$(3a-4b)\cos x + (4a+3b)\sin x = 2\cos x + \sin x$ et par identification : $3a-4b=2$ et $4a+3b=1$ et par suite on déduit que $a = \dfrac{2}{5}$ et $b = -\dfrac{1}{5}$

b. f solution de $(E) \Leftrightarrow f'' - 4f' + 4f = 2\cos x + \sin x$
Or $g'' - 4g' + 4g = 2\cos x + \sin x$ car g solution de (E).
f solution de $(E) \Leftrightarrow f'' - 4f' + 4f = g'' - 4g' + 4g$
$\Leftrightarrow (f-g)'' - 4(f-g)' + 4(f-g) = 0$
$\Leftrightarrow f - g$ solution de (E_0)

c.
• L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 - 4r + 4 = 0$ et la solution double est $r_1 = 2$. D'où les solutions de (E_0) sont sous la forme : $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(c_2x + c_1)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$
• D'après **1-b.**, on déduit que si f est solution de (E) si $f-g$ est sous la forme : $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(c_2x + c_1)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$
D'où les solutions de (E) sont les fonctions :
$x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(c_2x + c_1) + \dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

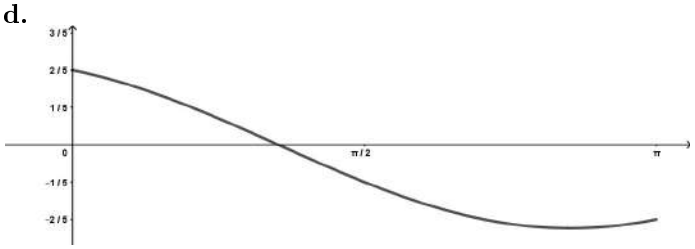
2-a. h est deux fois dérivable sur $[0;\pi[$ et on a :
$h'(x) = -\dfrac{2}{5}\sin(x) - \dfrac{1}{5}\cos(x)$; $h''(x) = -\dfrac{2}{5}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(x)$

b. Pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$; $-\dfrac{2}{5}\cos(x) \geq 0$ et $\dfrac{1}{5}\sin(x) > 0$ et par suite $h''(x) = -\dfrac{2}{5}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(x) > 0$. Par conséquent h' est strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
h' étant continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ avec $h'(\pi/2) = -\dfrac{2}{5} < 0$ et $h'(\pi) = \dfrac{1}{5} > 0$ alors $h'(x) = 0$ admet dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ une unique solution α
Comme $h'(2.6) = -0.03 < 0$ et $h'(2.7) = 0.01 > 0$ alors $2.6 < \alpha < 2.7$

c. Pour $x \in [0;\pi/2[$; $h'(x) < 0$. Comme h' est croissante sur $[\pi/2;\pi[$, alors pour $x \in [\pi/2;\alpha]$, $h'(x) \leq h'(\alpha) = 0$ et pour $x \in]\alpha;\pi[$; $h'(x) > h'(\alpha) = 0$.
Ainsi, pour $x \in [0;\alpha]$, $h'(x) \leq 0$ et pour $x \in]\alpha;\pi[$; $h'(x) > 0$
Donc h est décroissante sur $[0;\alpha]$ et croissante sur $]\alpha;\pi[$

x	0		α		π
$h'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$h(x)$	$\frac{2}{5}$	↘	$h(\alpha)$	↗	$-\frac{2}{5}$

d.



Courbe représentative (C)

Problème 2

A/ 1. L'équation caractéristique de (E_h) est $r^2 - 2 = 0$ qui a deux solutions $r_1 = \sqrt{2}$ et $r_2 = -\sqrt{2}$. D'où les solutions de (E_h) sont : $x \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

2-a. $f_0'(x) = (2ax^2 + 2bx + a)\,\mathrm{e}^{x^2}$ et par suite
$f_0''(x) = [4ax^3 + 4bx^2 + 6ax + 2b]\,\mathrm{e}^{x^2}$
$f_0''(x) - 2f_0(x) = (4ax^3 + 4bx^2 + 4ax)\,\mathrm{e}^{x^2}$
Si f_0 solution de (E) alors $(4ax^3 + 4bx^2 + 4ax)\,\mathrm{e}^{x^2} = 4x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$ et par identification, on déduit que : $a = 0$ et $b = 1$

b. f solution de $(E) \Leftrightarrow f'' - 2f = 4x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$
Or $f_0'' - 2f_0 = 4x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$ car f_0 solution de (E).
f solution de $(E) \Leftrightarrow f'' - 2f = f_0'' - 2f_0$
$\Leftrightarrow (f - f_0)'' - 2(f - f_0) = 0$
$\Leftrightarrow f - f_0$ solution de (E_h)

3. D'après leq questions **1.** et **2.**, on déduit que les solutions de (E) sont : $x \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} + \mathrm{e}^{x^2}$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

B/
1. Pour $x < 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptotique à (C) en $-\infty$

2. Pour $x > 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est une branche infinie de (C) en $+\infty$

3-a. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-1}{x} = F'(0) = 0$ avec $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = G'(0) = 0$ avec $G(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0 \Rightarrow (C)$ a une tangente horizontale en 0.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2|x|\,\mathrm{e}^{x|x|} \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

4. $f'(-\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$ et $f(-\sqrt{2}/2) = \mathrm{e}^{-1/2}$
(T) a pour équation : $y = f'(-\sqrt{2}/2)(x+\sqrt{2}/2) + f(-\sqrt{2}/2)$
D'où (T) : $y = (x\sqrt{2} + 2)\,\mathrm{e}^{-1/2}$

5-a. g est deux fois dérivable sur $]-\infty,-1/2]$ et
$g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$; $g''(x) = 4x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2\,\mathrm{e}^{-x^2}$
D'où $g''(x) = 2(2x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x^2}$ pour $x \leq -1/2$

b. g'' a le même signe que $2x^2 - 1$. Donc g' est croissante de $]-\infty;-\sqrt{2}/2]$ et décroissante de $]-\sqrt{2}/2;-1/2]$

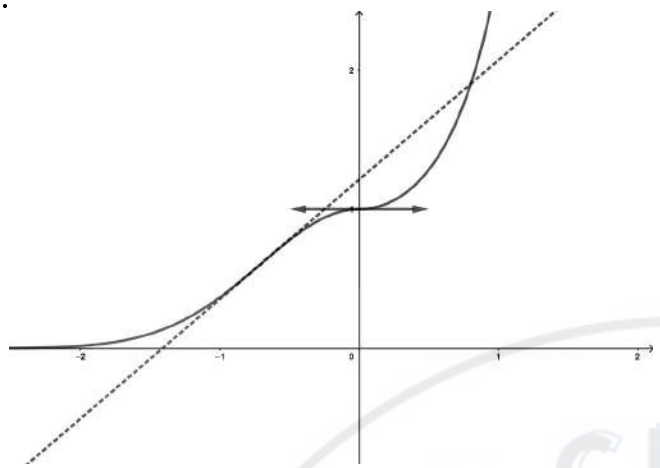
c. D'après $\forall\, x \in \left]-\infty,-\sqrt{2}/2\right] \cup \left]-\sqrt{2}/2,-1/2\right[$, $g'(x) \leq g'(-\sqrt{2}/2) = 0$. D'où $g'(x) \leq 0$

d. g décroissante sur $]-\infty,-1/2]$

e. $g(-\sqrt{2}/2) = 0$ et comme g est décroissante sur $]-\infty,-1/2]$ alors $\forall\, x \in \left]-\infty,-\sqrt{2}/2\right]$, $g(x) \geq 0$ et $\forall\, x \in \left]-\sqrt{2}/2,-1/2\right[$, $g(x) \leq 0$.
On conclut que pour $x \in]-\infty,-1/2]$; (C) est au dessus de

(T) et pour $x \in \left]-\sqrt{2}/2, -1/2\right[$, (C) est en dessous de (T).

6.



Courbe représentative (C) et (T)

Problème 3

A/

1. $v'(x) = a(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ et par suite :
$\frac{1}{2}v' + v = \frac{1}{2}a\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$. Ainsi, v est solution de (E) si
$\frac{1}{2}a\,\mathrm{e}^{-2x} + 2 = 3\,\mathrm{e}^{-2x} + 2 \Rightarrow a = 6$
D'où $v(x) = 6x\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$ est solution de (E)

2. Les solutions de (E') sont les fonctions :
$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3-a. u solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = 3\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$

Or $\frac{1}{2}v' + v = 3\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$ car v solution de (E).

u solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = \frac{1}{2}v' + v$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(v-u)' + (v-u) = 0$
$\Leftrightarrow v - u$ solution de (E')

b. On déduit alors que les solutions de (E) sont :
$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x} + 6x\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$

B/

I) 1-a. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $g'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. D'après la question précédente, on déduit que g est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors on déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que g est bijective, que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$
Comme $g(0.2) \approx -0.41$ et $g(0.3) \approx 0.1 \Rightarrow \alpha \in]0.2; 0.3[$

3. On déduit alors que : $g(x) \leq 0$ pour $x \in]0,\alpha]$ et $g(x) \geq 0$ pour $x \in [\alpha,+\infty[$

II) 1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} [2(3x-1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2] = 0$ et
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{1+x} = 0$. D'où f est continue en 0

2.

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[6\,\mathrm{e}^{-2x} - 2\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x}\right]$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} 6\,\mathrm{e}^{-2x} = 6$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x} = \varphi'(0)$; $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-2x}$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x} = -2$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 10$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1+x} = -\infty$
Donc f n'est pas dérivable en 0.
Graphiquement : La courbe représentative de f a une tangente verticale à droite en 0 et une tangent oblique de pente 10 à gauche en 0

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ donc la branche infinie en $+\infty$ est une branche parabolique horizontale

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 2(-6x+5)\,\mathrm{e}^{-2x} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1+\ln x}{(1+x)^2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

• Pour $x \leq 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

• D'après **A/ 3.**, on déduit que f est décroissante sur $]0,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha,+\infty[$

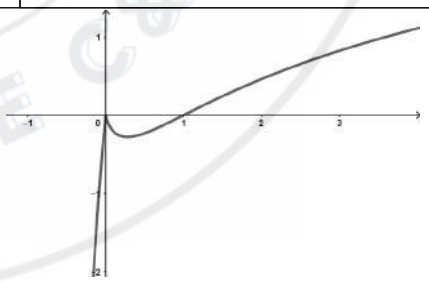
6. $\alpha > 0$ et $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha) = -1-\alpha$ alors on a :
$f(\alpha) = \dfrac{\alpha\ln(\alpha)}{1+\alpha} = -\alpha$. D'où $f(\alpha) = -\alpha$

(C_f) coupe l'axe (Ox) si $\dfrac{x\ln x}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 1$

NB : Pour $x \leq 0$, $f(x) < 0$ donc f ne s'annule pas

7.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\alpha$	↗	$+\infty$



Courbe représentative (C_f)

C/ 1. $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-2x} \Rightarrow F'(x) = (-2ax-2b+a)\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $a = -3/2$ et $b = -1/4$

2. L'aire demandée est égale, en unité d'aire : $\mathcal{A}(\lambda) = -\displaystyle\int_\lambda^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[-\dfrac{1}{2}(6x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_\lambda^0 = \dfrac{1}{2}\left[1-(6\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-2\lambda}\right]$ *u.a*

D'où $\mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left[1-(6\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-2\lambda}\right] 4cm \times 4cm$

$\mathcal{A}(\lambda) = 8\left[1-(6\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-2\lambda}\right] cm^2$

3. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$

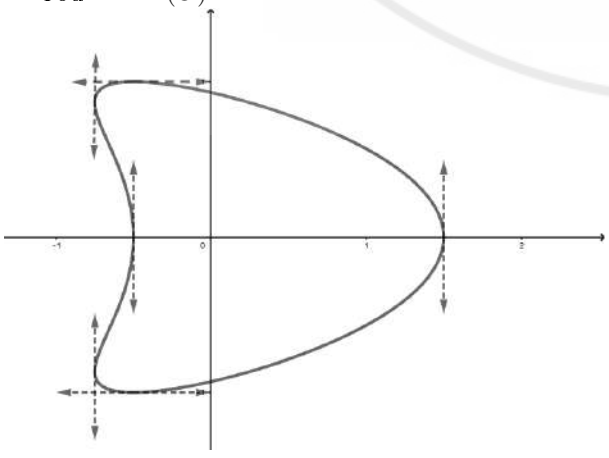
Correction des exercices

Problème 1

1-a. Pour $t \in \mathbb{R}$ $x(2\pi + t) = x(t)$ et $y(2\pi + t) = y(t)$ donc $x(t)$ et $y(t)$ sont $2\pi-$ périodique.
b. $x(2\pi+t) = x(t)$ et $y(2\pi+t) = y(t)$ alors $M(t) = M(t+2\pi)$
c. Pour $t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ et on déduit que $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques orthogonalement par rapport à l'axe des abscisses $(0x)$
d. $x(t)$ et $y(t)$ sont $2\pi-$ périodique $\Rightarrow$ qu'on peut le domaine d'étude sur $[-\pi;\pi]$. De plus $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques orthogonalement par rapport à l'axe des abscisses $(0x)$ donc on peut réduire le domaine d'étude sur $[0;\pi]$
2-a. D'après **1-c.**, on déduit que (C) est l'image de (C') par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe (ox)
b. Pour $t \in [0;\pi]$;
• $x'(t) = -\sin(2t) + \sin(t)$ et $y'(t) = \cos(t)$
• $x'(t) = -2\sin t\cos t + \sin t = \sin t(1 - 2\cos t)$. Ainsi $x'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$ ou $t = \pi$ ou $t = 0$. D'où pour $t \in [0;\pi/3[$, $x'(t) < 0$ et $x(t)$ est décroissante sur $[0;\pi/3[$ et pour $t \in [\pi/3;\pi]$, $x'(t) > 0$ et $x(t)$ est croissante sur $[\pi/3;\pi]$
• $y'(t) = \cos t$ donc $y(t)$ est croissante sur $[0;\pi/2]$ et décroissante de $[\pi/2;\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$			0
$x(t)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	

c. Tangente verticale $\Rightarrow x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$ ou $t = \pi$ ou $t = 0$. Donc (C') a une tangente verticale en $(-1/2;0)$, $(-3/4;\sqrt{3}/2)$ et en $(3/2;0)$
d. Tangente horizontale $\Rightarrow y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$
Donc (C') a une tangente horizontale en $(-1/2;1)$
3. Courbe de (C)

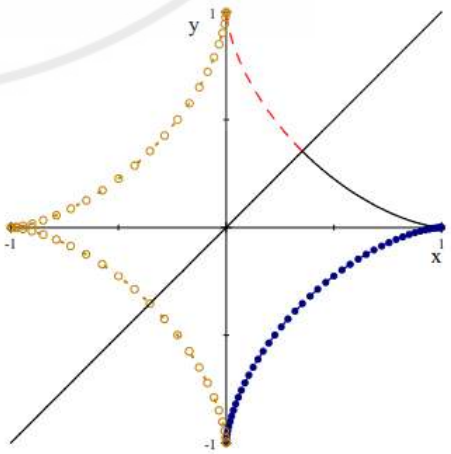


Problème 2

1-a. Pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ donc $x(t)$ et $y(t)$ sont $2\pi-$périodique.
b. $x(\pi + t) = -x(t)$ et $y(\pi + t) = -y(t)$ donc $M(\pi + t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine du repère O.
c. $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc $M(-t)$ est le symétrique orthogonale de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
d. $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$ donc $M(\frac{\pi}{2} - t)$ est le symétrique orthogonale de $M(t)$ par rapport à la droite $y = x$
e. Justification :
• De **1-a.**, on déduit qu'on peut réduire le domaine d'étude sur $[-\pi;\pi]$
• De **1-b.** et **1-c.**, on déduit qu'on peut réduire le domaine d'étude sur $[0;\pi/2]$
• De **1-d.** , on déduit qu'on peut réduire finalement le domaine d'étude sur $[0;\pi/4]$
2-a. Pour $t \in [0;\pi/4]$, $x'(t) = -3\sin t\cos^2 t \leq 0$ et $y'(t) = 3\cos t\sin^2 t \geq 0$

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	1	↘	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$y(t)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$y'(t)$	0	$+$	

b. $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ donc $M(0)$ est un point stationnaire.
$\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3\cos t\sin^2 t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\tan t \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$. La tangente au point $M(0) = O$ a donc une pente nulle, c'est donc l'axe (Ox).
c. Confère question **1.** (détailler)
d. Il faut que $y(t) = 0 \Rightarrow t = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
e. Il faut que $x(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
f.



Problème 3

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $x(t)$ et $y(t)$ ne sont ni paire ni impaire.
2-a. g est continue et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et $g'(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$ donc g est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$
(Dresser le tableau de variation)
b. On Pose $J =]-1,1]\setminus\{0\}$ alors $g(J) =]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$
Ainsi $J \cup g(J) = \mathbb{R}$
3-a. Un calcul facile prouve que, pour $t \in D\setminus\{0\}$;
$x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$ les points $M(1/t)$ et $M(t)$ sont donc images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère.
b. En utilisant **2-b.**, on déduit qu'on peut restreindre le domaine d'étude de la courbe à $]-1,1]$
4. Pour $t \in]-1,1]$;
• $x'(t) = \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$
• $x(t)$ est croissante sur $]-1;1/\sqrt[3]{2}]$ et décroissante sur $]1/\sqrt[3]{2};1]$
• $y(t)$ est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $]0;1]$

t	-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		1
$x'(t)$	‖		$+$		0	$-$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2^{2/3}}{3}$	↘	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	‖	$-$	0	$+$			

5. On obtient donc une tangente horizontale en $(0;0)$ et une tangente verticale en $(\frac{2^{2/3}}{3};\frac{\sqrt[3]{2}}{3})$. (Détailler la solution)
6. Sur $]-1;1]$, la courbe passe par le point $(0,0)$ qui appartient à la droite $y = x$. De plus 0 n'est pas une extrémité de $]-1;1]$. Or le reste de la courbe est obtenu par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$ d'après **3-a.**, on conclut que la portion de la courbe sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ passe aussi par 0. Le point $(0;0)$ est un point double.
7. • $\lim\limits_{t\to -1^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $\lim\limits_{t\to -1^+}[y(t)+x(t)] = -1/3$
$y(t)+x(t) = \dfrac{t(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)} = \dfrac{t}{t^2-t+1}$ car $t \neq -1$
La droite $y = -x - \dfrac{1}{3}$ est alors une asymptote à la courbe
• $y(t) - (-x(t) - 1/3) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} > 0$ pour $t \in]-1;1]$
Donc la courbe est située au-dessus de son asymptote
8. La totalité de la courbe s'obtient par symétrie orthogonale par rapport à l'axe $y = x$ d'après **3-a.**
9. Voir *fig1*

Problème 4

1. $x(t)$ et $y(t)$ sont $2\pi-$périodique et $x(-t) = x(t)$,

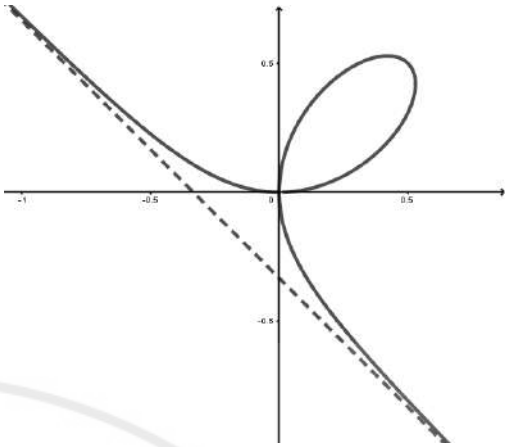
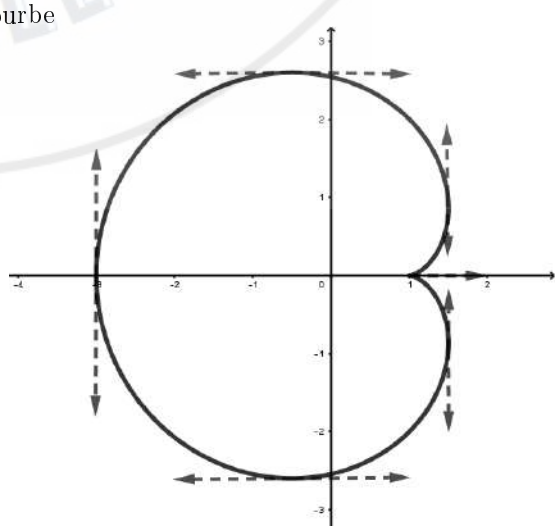


fig1.

$y(-t) = -y(t)$ on peut alors restreindre l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$
2. $x'(t) = -2(\sin(t) - \sin(2t)) = 4\sin(t/2)\cos(3t/2)$ et
$y'(t) = 2(\cos(t) - \cos(2t)) = 4\sin(3t/2)\sin(t/2)$

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$			0
$x(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-3
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$y'(t)$	0	$+$		0		$-$	

3. Sur le domaine d'étude, on a une tangente verticale en $((3/2;\sqrt{3}/2)$ et en $(-3,0)$. On a une tangente horizontale en $(-1/2;3\sqrt{3}/2)$.
4. Le point $(1;0)$ est un point stationnaire (pour $t = 0$). De plus : $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin(3t/2)}{\cos(3t/2)} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$
Il y a donc une tangente horizontale en ce point.
5. une symétrie par rapport à l'axe (ox).
6. Il faut que $y(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = \pi$
Donc ces points sont $(1;0)$ et en $(-3,0)$
7. Courbe



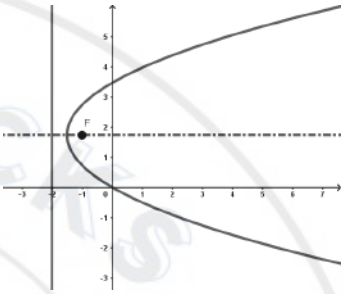
Correction des exercices

Exercice 1

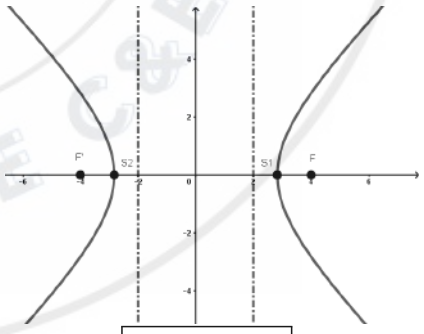
1-a. On a : $\begin{cases} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{cases}$ En remplaçant x et y par leurs expressions dans l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$, on tire que le terme en XY est donc égal à : $2\alpha(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
Donc le terme XY est nul pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Les formules de changement de repère devienne alors $\begin{cases} x = (X-Y)/\sqrt{2} \\ y = (X+Y)/\sqrt{2} \end{cases}$
En remplaçant ces expressions de x et y dans l'équation initiale de (C_α), l'équation de (C_α) dévient alors :
$(1+\alpha)X^2 + (1-\alpha)Y^2 = 1$
b. D'après **1-a.**, on conclut que pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, (C_α) est du genre parabole ; pour $|\alpha| > 1$, elle est du genre hyperbole et pour $|\alpha| < 1$, du genre ellipse.
c. • C_0 est le cercle unité
• Pour $\alpha = 1$, l'équation dévient $(x+y)^2 = 1$ ce qui donne deux droites $y = 1-x$ et $y = -1-x$
• Pour $\alpha = -1$, l'équation dévient $(x-y)^2 = 1$ ce qui donne deux droites $y = 1+x$ et $y = -1+x$
d. • Pour $\alpha \in]0;1[$; $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ et $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}}$
• Pour $\alpha \in]-1;0[$; $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}}$ et $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$
• Pour $\alpha > 1$; $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}}$ et $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$
• Pour $\alpha < -1$; $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{-\alpha-1}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ et $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}}$
2-a. • Si $a-t<0$ et $b-t<0 \Rightarrow t>b$ alors C_t est vide
• Si $t \in]a,b[$ alors $a-t<0$ et $b-t>0$; C_t est une hyperbole d'axe focal (Oy) de centre O, de foyers $F = (0;\sqrt{b-a})$ et $F' = (0;-\sqrt{b-a})$
• Si $t<a$ alors $a-t>0$ et $b-t>0$; C_t est une ellipse de foyers $F = (0;\sqrt{b-a})$ et $F' = (0;-\sqrt{b-a})$
b. Si M_0 a pour coordonnées (x_0,y_0), un vecteur normal à C_t en M_0 a pour coordonnées $\vec{u} = \left(\dfrac{x_0}{a-t};\dfrac{y_0}{b-t}\right)$ (Découle de l'équation de la tangente à C_t en M_0 à C_t)
De même, un vecteur normal à C_u est $\vec{v} = \left(\dfrac{x_0}{a-u};\dfrac{y_0}{b-u}\right)$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{x_0^2}{(a-t)(a-u)} + \dfrac{y_0^2}{(b-t)(b-u)}$
Or on sait que M_0 est sur C_t et C_u, donc $\dfrac{x_0^2}{a-t} + \dfrac{y_0^2}{b-t} = 1$ et $\dfrac{x_0^2}{a-u} + \dfrac{y_0^2}{b-u} = 1$. Par différence des deux égalités, il vient $\dfrac{x_0^2}{a-t} + \dfrac{y_0^2}{b-t} - \dfrac{x_0^2}{a-u} - \dfrac{y_0^2}{b-u} = 0$ soit $(t-u)\left(\dfrac{x_0^2}{(a-t)(a-u)} + \dfrac{y_0^2}{(b-t)(b-u)}\right) = 0$. Or $u \neq t$ donc $\dfrac{x_0^2}{(a-t)(a-u)} + \dfrac{y_0^2}{(b-t)(b-u)} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. D'où le résultat.

Exercice 2

1. $(C_1) : (y-\sqrt{3})^2 = 2(x+3/2)$ donc (C_1) est une parabole d'axe focal l'axe $y = \sqrt{3}$, de paramètre $p = 1$, de sommeil $S = (-3/2;\sqrt{3})$, de foyer $F = (-1;\sqrt{3})$ et de directrice $x = -2$.



2. Soit O' le projeté orthogonal de O sur la directrice Δ alors $OO' = 2$. Comme $F \in \mathcal{C}$ alors $OF = 2 \Rightarrow OO' = OF$
En utilisant la définition géométrique d'une parabole, on conclut que la parabole de foyer F et de directrice Δ passe par O.
3-a. $MA \times MB = MI^2 \Leftrightarrow MA^2 \times MB^2 = MI^4$
Or $MI^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ et
$MA^2 \times MB^2 = x^4 + y^4 - 2ax^2 + 2a^2y^2 + y^4$. Ainsi
$MA \times MB = MI^2 \Leftrightarrow -2ax^2 + a^4 + 2a^2y^2 = 0$
Donc $\dfrac{x^2}{2a^2} - \dfrac{y^2}{2a^2} = 1$
b. $\mathcal{C}_a$ est une hyperbole d'axe focal (ox), d'excentricité $e = \sqrt{2}$, de foyers $F(2a;0)$ et $F'(-2a;0)$, de directrices $x = a$ et $x = -a$ et de sommets $S_1(a\sqrt{2};0)$ et $S_1(-a\sqrt{2};0)$
c.



Exercice 3

A/ 1-a. $2x + 3y^2 + 4y - 1 = 3(y+4/6)^2 - \dfrac{7}{3} + 2x$
$(\mathcal{P}) : \left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2 = -\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{7}{6}\right)$. Donc $(\mathcal{P})$ est une parabole de sommet $S(7/6;-2/3)$, de foyer $F(1;-2/3)$, de directrice $x = \dfrac{4}{3}$ et d'axe focal $y = -\dfrac{2}{3}$
b. Voir figure
2-a. $x_0 = -3$ donc $y_0 = 1$ car $(y_0 \geq 0)$. Soit f la transformation suivante : $\begin{cases} X = x - 7/6 \\ Y = y + 2/3 \end{cases}$ Alors l'image de $(\mathcal{P})$

par f notée $(\mathcal{P}')$ a pour équation : $Y^2 = -\frac{2}{3}X$ et l'image de $M_0(-3,1)$ par f est : $M_0'(-25/6;5/3)$. Et la tangente (T') de $(\mathcal{P}')$ en M_0' est : $5Y = -X + 25/6$ et en remplaçant X et Y, on déduit que la tangente (T) à $(\mathcal{P})$ en M_0 a pour équation : $x + 5y = 2$

b. Le vecteur $\vec{w}(1;5)$ est un vecteur normal à (T) donc un vecteur directeur de (N). Donc $(N) : 5x - y + c = 0$. (N) passe par $M_0 \Rightarrow (N) : y = 5x + 16$

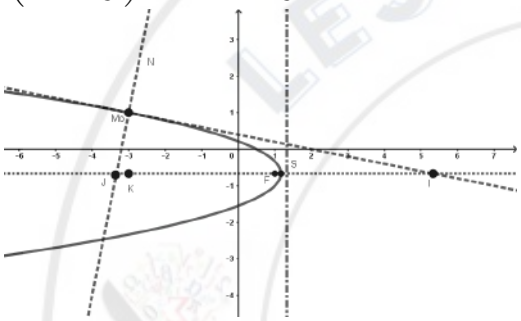
3-a. (T) et Δ se coupent en $I \Rightarrow \begin{cases} y_I = -2/3 \\ (2 - x_I)/5 = -2/3 \end{cases}$

Ainsi les coordonnées de I sont alors $(16/3, -2/3)$

On déduit de même que $J(-10/3, -2/3)$. Par suite le milieu de $[IJ]$ a pour coordonnées $\frac{x_I + x_J}{2} = 1$ et $\frac{y_I + y_J}{2} = -\frac{2}{3}$ et ce milieu est bien F. D'où le résultat.

b. K a pour coordonnées $(-3; -2/3)$. Alors :

$JK^2 = \left(-3 + \frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow JK = \frac{1}{3}$



B/ 1. $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$ (définition bifocale)

Puisque tous les nombres sont positifs, on a :

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (MF + MF')^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow MF \times MF' + \frac{1}{2}(MF^2 + MF'^2) = 2a^2$

$\Leftrightarrow MF \times MF' + \frac{1}{2}((x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2) = 2a^2$

$\Leftrightarrow MF \times MF' + x^2 + y^2 + c^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$

2. Dans un repère orthonormée, l'équation réduite de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Les axes de l'hyperbole sont $(D) : bx + ay = 0$ et $(D') : -bx + ay = 0$. Soit $M(x,y) \in \mathcal{H}$ alors $MH \times MH' = dist(M,(D)) \times dist(M,(D'))$

Or $dist(M,(D)) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $dist(M,(D')) = \frac{|-bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Donc $MH \times MH' = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2 + b^2}$. Or M est un point de l'hyperbole donc $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Ainsi $MH \times MH' = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$. D'où $MH \times MH'$ est constant.

3-a. $CD = CM = CM = |x|$(se servir d'un dessin pour mieux voir ces distances)

MIC est un triangle rectangle en I

b. Le théorème de Pythagore dans MIC donne :

$y^2 + (a/2)^2 = x^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = -\frac{a^2}{4}$. Ainsi si le cercle est tangent à (oy) et coupe l'axe (ox) en deux points M et M' tels que $MM' = a$ alors son centre C appartient à l'hyperbole $(\mathcal{H}) : x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Réciproquement si $C \in (\mathcal{H})$ alors ses coordonnées sont de la forme : $(x; \pm\sqrt{x^2 - a^2/4})$. Alors les points $M(x - a/2; 0)$ et $M'(x + a/2; 0)$ appartiennent au cercle de centre C et de rayon $|x|$. Ce cercle est tangent à (oy) et $MM' = a$

Ainsi l'ensemble recherché est $(\mathcal{H}) : x^2 - y^2 = a^2/4$

Correction des Problèmes

Problème 1

1-a. Pour $x \in]0;2[$, $2x - x^2 > 0$ donc f est dérivable sur $]0;2[$ et $f'(x) = \frac{-2x + 2}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$

b. f est donc croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;2[$. $f(0) = 0$ et $f(2) = 0$ (Voir figure)

2-a. $M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = f(x)$ ou $y = -f(x)$

$\Leftrightarrow y^2 = f^2(x)$

$\Leftrightarrow y^2 = 4(-x^2 + 2x) \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b. Γ est donc une ellipse de centre $\Omega(1;0)$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers $F(1;\sqrt{3})$ et $F'(1;-\sqrt{3})$ et de directrices $(\mathcal{D}) : y = 4/\sqrt{3}$ et $(\mathcal{D}') : y = -4/\sqrt{3}$

c. La définition bifocale d'une ellipse : Pour M de Γ, $MF + MF' = 2a$ or $a = 1 \Rightarrow MF + MF' = 2$

d. Puisque Γ est une ellipse, par définition on a :

$MF = e \cdot MH \Rightarrow \frac{MF}{MH} = \sqrt{3}/2$

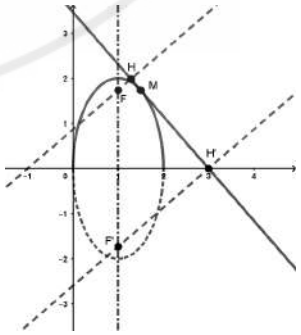
3-a. $y_0 = \sqrt{3}$. On pose $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$ alors la tangente (T) à Γ a pour équation $2X + \sqrt{3}Y = 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$

b. L'équation (N_1) de la droite passant par F et perpendiculaire à (T) est : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$. Donc H_1 est l'intersection entre (T) et (N_1). Alors :

$\begin{cases} \sqrt{3}(x_{H_1} + 1)/2 = -2x_{H_1}/\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y_{H_1} = \sqrt{3}(x_{H_1} + 1)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{H_1} = 9/7 \\ y_{H_1} = 8\sqrt{3}/7 \end{cases}$

De même l'équation (N_2) de la droite passant par F' et perpendiculaire à (T) est : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-3)$ et on déduit de même que $x_{H_2} = 3$ et $y_{H_2} = 0$

Ainsi $FH_1 = 1/\sqrt{7}$ et $F'H_2 = \sqrt{7} \Rightarrow FH_1 \times F'H_2 = 1$



3-a. Pour $x \in [0,\pi]$, f est continue en x et $x \mapsto 1 + \cos x$ est dérivable donc F est dérivable sur $[0,\pi]$ et $F'(x) = -\sin(x) f(1 + \cos(x))$. Ainsi $F'(x) = -2\sin(x)\sqrt{-(1+\cos x)^2 + 2(1+\cos x)} = -2\sin^2 x$

b. $F(\pi) = 0$ comme $F'(x) = -2\sin^2(x) = -1 + \cos(2x)$ alors $F(x) = -x + \dfrac{\sin(2x)}{2} + \pi$ pour $x \in [0;\pi]$

c. $\mathcal{A} = 2\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(0) = \pi \Rightarrow \mathcal{A} = \pi$ u.a

4-a.. $u_0 - u_1 = 2\displaystyle\int_0^2 (1-x)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$. On pose $t = 1-x$ alors $u_0 - u_1 = 2\displaystyle\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. Comme $t \mapsto t\sqrt{1-t^2}$ est impaire donc son intégrale de -1 à 1 est nulle.
D'où $u_1 = u_0 = \pi$ (d'après **3-b.** et **3-c.**)

b. $\forall\ n\ \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = 2\displaystyle\int_0^2 x^n(1-x)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ on a de même :
$u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^2 x^n(2x-x^2)\frac{2(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$. On pose alors $u(x) = x^n(2x-x^2)$ et $v'(x) = \dfrac{2(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$ alors
$u'(x) = 2(n+1)x^n - (2+n)x^{n+1}$ et $v(x) = 2\sqrt{2x-x^2}$
Alors $u_n - u_{n+1} = -2\displaystyle\int_0^2 (2(n+1)x^n - (2+n)x^{n+1})\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$
Ainsi $u_n - u_{n+1} = -2(n+1)u_n + (2+n)u_{n+1}$
D'où $u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)u_n$

c. $I = \dfrac{1}{2}(u_2 - 2u_1 + 3u_0) = \dfrac{9}{8}u_0$. Ainsi $I = \dfrac{9}{8}\pi$

d. D'après **4-b.** ; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+3}{n+3} \geq 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante. Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$, on conclut que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \pi$ (détailler la récurrence)

e. Supposons que (u_n) converge et notons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)u_n \Rightarrow l = 2l$ (unicité de la limite) $\Rightarrow l = 0$. Puisque $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \pi$ et (u_n) est croissante alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. On conclut alors que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Problème 2

I/ 1. Soit $m,\ n \in \mathbb{R}$ tels que $n \neq m$ Si (C_m) et (C_n) passe au niveau d'un même point alors :
$mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1) = nx^2 - (n-1)x - 3(2n+1)$
donc $(m-n)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$ car $n \neq m$
Donc $x = 3$ ou $x = -2$ et $\begin{cases} y^2 = 0 \text{ pour } x = 0 \\ y^2 = -5 \text{ pour } x = -2 \text{ impossible} \end{cases}$
D'où toutes les courbes (C_m) passe par le point $(3,0)$

2-a. $(C_m) : m\left(x - \dfrac{m-1}{2m}\right)^2 - y^2 = \dfrac{25m^2+10m+1}{4m}$ après transformation (détailler les étapes de transformation)
Donc (C_m) est une conique à centre de centre $\left(\dfrac{m-1}{2m}, 0\right)$

b. Pour $m \in \mathbb{R}$, $25m^2 + 10m + 1 = 25(m+1/5)^2 \geq 0$
• Pour $m \in\ ]-\infty; -1/5[\cup]-1/5, 0[$, (C_m) est une ellipse
• Pour $m \in\ ]0; +\infty[$, (C_m) est une hyperbole

c. • $(C_{-1}) : y^2 = -x^2 + 2x + 3$ donc (C_0) le cercle de centre $(1;0)$ et de rayon $r = 2$
• $(C_1) : y^2 = x^2 - 9$ donc (C_0) est une hyperbole de foyers $F(3\sqrt{2}, 0)$ et $F'(-3\sqrt{2}, 0)$, avec $e = \sqrt{2}$, de sommets $S_1(3,0)$ et $S_2(-3,0)$ et de directrices $x = 3/\sqrt{2}$ et $x = -3/\sqrt{2}$

3-a. $\begin{cases} z_{A'} = \alpha z_A + \beta \\ z_{B'} = \alpha z_B + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - i \\ \beta = 0 \end{cases}$

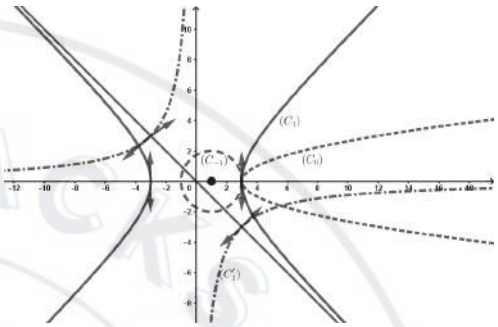
b. f est alors une similitude directe de centre $O(0,0)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

4. $(C_{-1}) : y^2 + (x-1)^2 = 4$ est le cercle de centre $(1;0)$ et de rayon $r = 2$. Donc (C'_{-1}) est un cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$

5-a. $z' = (1-i)z \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ et $\begin{cases} x = (x' - y')/2 \\ y = (x' + y')/2 \end{cases}$

b. $(C'_1) : x'y' = -9$

c.



II/ 1. $(D') : 2x' - 3y' - 21 = 0$

2. E et F intersection de (C_1) et (D) $\begin{cases} (5x-21)^2 = x^2 - 9 \text{ ou} \\ y = 5x - 21 \end{cases}$
Ainsi $\begin{cases} x_1 = 15/4 \text{ et } y_1 = -9/4 \\ x_2 = 5 \text{ et } y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow E(15/4; -9/4)$ et $F(5;4)$
Et on déduit : $E'(3/2, -6)$ et $F'(9, -1)$

3. On pose $f(x) = -\dfrac{9}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{3}x - 7$ alors $f(x) \leq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $[3/2, 9]$. De plus $f(x) - g(x) = \dfrac{-2(x-3/2)(x-9)}{3x}$ donc $f(x) - g(x) \geq 0$ pour $x \in [3/2, 9] \Rightarrow (C'_1)$ est au dessus de (D') sur $[3/2, 9]$.
Ainsi $A(S') = \left|\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^9 g(x)\,\mathrm{d}x\right| - \left|\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^9 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{315}{12} - 9\ln 6$
On déduit que $A(S) = \dfrac{A(S')}{(\sqrt{2})^2}$ car S' est image de S par f
D'où $A(S) = \dfrac{315}{24} - \dfrac{9\ln 6}{2}$

III/ 1. $(C_0) : y^2 = x - 3$ donc (C_0) est une parabole de sommet $\Omega(3,0)$, de foyer $F(13/4, 0)$ et de directrice $x = 11/4$

2. Voir figure **I/ 5-c.**

3-a. Soit $M(x_0, y_0)$ alors l'équation de la tangente (T_0) au point M de (C_0) est : $y_0 y = \dfrac{1}{2}(x + x_0 - 6)$
H a pour coordonnées $(11/4, y_0)$. La médiatrice de $[FH]$ est l'ensemble des points équidistants de F et H. Soit $A(x,y)$
$AF^2 = AH^2 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{13}{4}\right)^2 + y^2 = \left(x - \dfrac{11}{4}\right)^2 + (y - y_0)^2$
Ainsi $-x + 3 + 2yy_0 - y_0^2 = 0$ or $y_0^2 = x_0 - 3$
D'où $AF^2 = AH^2 \Leftrightarrow y_0 y = \dfrac{1}{2}(x + x_0 - 6)$ qui est l'équation de (T_0). D'où la tangente à la parabole (C_0) en $M(x_0, y_0)$ est la médiatrice de $[FH]$.

b. D'après **3-a.**, on déduit que le triangle FMH est isocèle en M donc $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HF})$

4. $G = bar\{(A,2);(B,1);(M,1)\} \Rightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$
Ainsi $x_G = \dfrac{3+x}{4}$ et $y_G = \dfrac{y}{4}$

M appartient à $(C_0) \Rightarrow y^2 = x-3 \Rightarrow 16y_G^2 = (4x_G-3)-3$
Ainsi $y_G^2 = \frac{1}{4}x_G - \frac{3}{8}$ et G appartient à la courbe (Γ_0) d'équation : $y^2 = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$. Soit h l'homothétie de centre $K(1,0)$ et de rapport $k = \frac{1}{4}$, l'expression analytique de h est :
$\begin{cases} x' = (x+3)/4 \\ y' = y/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4x'-3 \\ y = 4y' \end{cases}$ donc l'image de (C_0) par h est : $16y'^2 = (4x'-3)-3 \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{4}x' - \frac{3}{8}$
Donc (Γ_0) est l'image de (C_0) par h.

Problème 3

1-a. Soit M'' de $\mathcal{P}$, $\psi\circ\psi(M) = M''$ alors $\overrightarrow{OM''} = \frac{4}{OM'^2}\overrightarrow{OM'}$ or $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow OM' = \frac{4}{OM}$
$\overrightarrow{OM''} = \frac{4OM^2}{16}\frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$. D'où $\psi\circ\psi(M) = M$
b. Soit $M(x,y)$; $\psi(M) = M \Leftrightarrow OM^2 = 4 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$
2. $\vec{u} = ||\vec{u}||\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{u}(0, ||\vec{u}||)$ dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
Dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\mathcal{D})$ a pour équation : $x = a$ $(A \in (\mathcal{D}))$
Ainsi $\forall\ t \in \mathbb{R}$; $M(a,t) \in (\mathcal{D})$ donc $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = a+it$ où $t \in \mathbb{R}$
3-a. $\psi(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{4\overrightarrow{OM}}{OM^2} \Leftrightarrow z' = \frac{4}{z\bar{z}}z \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\bar{z}}$
b. $\psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4z}{|z|^2}$ et on a le résultat par identification des parties réelles et imaginaires des 2 membres.
c. En développement on a le résultat (détailler)
d. • D'après **2.** $M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$ et d'après **3-b.** et **3-c.** on déduit si $M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow$ alors $\psi(M)$ appartient au cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre $\Omega(2/3, 0)$ et de rayon $r = 2/|a|$
• H le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{D}) \Rightarrow H(a,0)$
$H' = \psi(H) \Rightarrow H'(4/a, 0)$ et donc H' et $O \in (\mathcal{C}_1)$. Or $OH = 4/|a| = 2r \Rightarrow [OH']$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_1)$.
4. $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 2y/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = 3y_1/2 \end{cases}$
$(\mathcal{C}_1') = h(\mathcal{C}_1) : \left(x_1 - \frac{2}{a}\right)^2 + \frac{9}{4}y_1^2 = \frac{4}{a^2} \Rightarrow (\mathcal{C}_1')$ est une ellipse d'excentricité $e = \sqrt{5}/3$
5-a. Soit $y = mx+c$ une telle droite. On cherche les points d'intersection de cette droite avec l'ellipse (C). Pour cela, on introduit cette relation dans l'équation de l'ellipse, et on trouve : $(x-1)^2 + \frac{9(m^2x^2+2mcx+c^2)}{4} = 1$
Ainsi $(4+9m)x^2 + 2(9mc-4)x + 9c^2 = 0$. Pour que la droite soit tangente, cette équation doit avoir une unique solution, et donc son discriminant doit être nul. On trouve :
$\Delta' = (9mc-4)^2 - 9c^2(4+9m^2) = -72mc + 16 - 36c^2$
$\Delta' = 0 \Leftrightarrow c = -m + \frac{\sqrt{9m^2+4}}{3}$ ou $c = -m - \frac{\sqrt{9m^2+4}}{3}$
b. $m \times m' = -1$ (écrire un vecteur directeur de chaque droite et traduire le fait qu'ils doivent être orthogonaux)
c. Soient $y = mx - m \pm \frac{\sqrt{9m^2+4}}{3}$ et sa perpendiculaire $y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m} \pm \frac{\sqrt{9/m^2+4}}{3}$. Ces deux droites sont tangentes à l'ellipse et on cherche leur point d'intersection :
$9(y-mx+m)^2 = 9m^2+4$ et $9(my+x-1)^2 = 9+4m^2$ et En sommant ces égalités, on trouve :
$9(m^2+1)\left(y^2+x^2-2x+1\right) = 13(m^2+1)$ et donc le point d'intersection est nécessairement sur le cercle d'équation : $(x-1)^2+y^2 = \frac{13}{9}$. Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Problème 4

1-a. $(3\cos\theta)^2 + 9\sin^2\theta = 9 \Rightarrow M \in \mathcal{C}$
b. (T) : $x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$
2. $H(x,y) \in T \cap (O,\vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases}$
D'où $H\left(\frac{3}{\cos\theta}, 0\right)$
$K(x,y) \in T \cap (O,\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases}$
D'où $K\left(0, \frac{1}{\sin\theta}\right)$ puis que : $HK^2 = \frac{9}{\cos^2(\theta)} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}$
3-a. f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ entant que somme de deux fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et
$f'(\theta) = 2(4\sin^2\theta - 1)\frac{3\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$
$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2\theta - 1 = (2\sin\theta-1)(2\sin\theta+1) = 0$
$\Leftrightarrow \theta = \pi/6$
Donc f décroit de $+\infty$ à 16 sur $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ et croit de 16 à $+\infty$ sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \forall\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\theta) \geq 16$. Donc KH est minimale pour $\theta = \frac{\pi}{6}$
b. La tangente en D est alors : $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$
4. Faire la représentation graphique
5. Dans notre cas, $a = 3$ donc d'après la définition bifocale d'une ellipse, $MF + MF' = 6$ pour $M \in \mathcal{C}$ (voir démonstration dans le cours)
6. • Soit Δ : $y = mx+c$ et on suppose que Δ n'est pas verticale. Δ passe par $F \Rightarrow c = -2\sqrt{2}m$
$M(x,y)$ est intersection de Δ et $\mathcal{C} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x-2\sqrt{2}) \\ x^2 + 9m^2(x-2\sqrt{2})^2 = 9 \end{cases}$
Donc les solutions sont alors :
$x_1 = \frac{18\sqrt{2}m^2 - 3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2} \Rightarrow y_1 = -m\left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2}\right)$
$x_2 = \frac{18\sqrt{2}m^2 + 3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2} \Rightarrow y_1 = m\left(\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2}\right)$
Ainsi $MF = \sqrt{m^2+1}\left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2}\right)$
et $FM' = \sqrt{m^2+1}\left(\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{m^2+1}}{1+9m^2}\right)$ puis un calcul simple donne $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = 6$
• Si Δ a pour équation $x = 2\sqrt{2}$ (Cas où la droite est verticale), on déduit de même que les points d'intersection entre Δ et $\mathcal{C}$ sont : $M(2\sqrt{2}, -1/3)$ et $M'(2\sqrt{2}, 1/3)$
$MF = 1/3$ et $FM' = -1/3 \Rightarrow \frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = 6$

Correction des exercices

Dénombrement

Exercice 1

1. On a un tirage sans remise, l'ordre ne compte pas et les p éléments sont distincts. Donc il y : $C_{49}^6 = 13\ 983\ 816$ tirages possible.
2. On choisit un numéro parmi les six bons numéros et les cinq autres parmi les $49-6 = 43$ mauvais numéros. Au total, il y a : $C_6^1 \times C_{43}^5 = 5\ 775\ 588$ tirages.
3. • Deux bons numéros : $C_6^2 \times C_{43}^4 = 1\ 851\ 150$ tirages.
• Trois bons numéros : $C_6^3 \times C_{43}^3 = 246\ 820$ tirages.
• Quatre bons numéros : $C_6^4 \times C_{43}^2 = 13\ 545$ tirages.
• Cinq bons numéros : $C_6^5 \times C_{43}^1 = 258$ tirages.
• Six bons numéros : $C_6^6 \times C_{43}^0 = 1$ tirages.

Exercice 2

1. L'ordre dans lequel on choisit les 3 élèves n'a, ici, pas d'importance. La désignation de ces trois élèves correspond donc à un choix simultané (sans ordre, sans répétition possible) de 3 élèves parmi 24. Il y a donc $C_{24}^3 = 2\ 024$ choix
2. Pour la 1ère lettre, il y a 26 choix, pour la 2ème 26 choix aussi, etc... Cela fait $26^5 = 11\ 881\ 376$ mots possibles.
3. Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8. Il n'y a qu'un match entre deux équipes , le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc $C_8^2 = 28$ rencontres possibles.
4. Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :
• L'ensemble des choix simultanés de 3 femmes parmi 10, de cardinal $C_{10}^3 = 120$
• L'ensemble des choix simultanés de 2 hommes parmi 5, de cardinal $C_5^2 = 10$
Donc il y a : $C_{10}^3 \times C_5^2 = 1200$ choix possibles.

Exercice 3

1. Soit A l'ensemble des étudiants qui maîtrisent le $C++$, B l'ensemble de ceux qui maîtrisent le C et C l'ensemble de ceux qui maîtrisent le Java. Or les hypothèses signifient que $\text{card}(A \cup B \cup C) = 36$, $\text{card}(A) = 22$, $\text{card}(B) = 22$, $\text{card}(C) = 18$, $\text{card}(A \cap B) = 10$, $\text{card}(B \cap C) = 9$, $\text{card}(A \cap C) = 11$. Or on sait que :
$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$
Donc $\text{card}(A \cap B \cap C) = 4$. (On pouvait suivre aussi le raisonnement exposé dans le cours)
2. Soit E l'ensemble de tous les élèves, F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basketball. Or les hypothèses donne $\text{card}(E) = 100$, $\text{card}(F) = 53$, $\text{card}(F \cap B) = 13$ et $\text{card}(B \cap \overline{F}) = 20$.
a. $\text{card}(B) = \text{card}(F \cap B) + \text{card}(B \cap \overline{F}) = 33$
b. $\text{card}(F \cup B) = \text{card}(F) + \text{card}(B) - \text{card}(F \cap B) = 73$
c. $\text{card}(\overline{F \cup B}) = \text{card}(E) - \text{card}(F \cup B) = 37$

Exercice 4

1-a. Il y a $9^3 = 729$ codes possibles.
b. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4 = 324$ codes possibles
c. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8 = 512$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9^3 - 8^3 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
d. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8 = 192$ possibilités.
2-a. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7 = 504$ choix possibles.
b. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5 = 280$ choix possibles
c. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3 = 168$ choix possibles.

Exercice 5

1. $C_{18}^5 = 8\ 568$ groupes.
2. Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit $C_{17}^4 = 2\ 380$ groupes.
3. Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut :
• constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude. Le nombre de groupes dans lequel figure Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas faire figurer Claude), soit $C_{16}^4 = 1\ 820$
• OU constituer un groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian.De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a $C_{16}^4 = 1\ 820$
Finalement il y a : $C_{16}^4 + C_{16}^4 = 3\ 640$ possibilités.

Exercice 6

1. On a : $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 45$
2. $\text{card}(C) = \text{card}(A \cap C) + \text{card}((B \cap C) \setminus A) + \text{card}(C \setminus (A \cup B))$
Ainsi $\text{card}(C) = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre :
$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(C \setminus (A \cup B))$
Ainsi $\text{card}(A \cup B \cup C) = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $\text{card}(A \setminus (B \cup C)) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$

Exercice 7

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).
1. On passe par le complémentaire : Il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$

tirages avec au moins une boule blanche.
2. On sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times C_4^1$ cas) donc il y a : $5^4 + 5^3 \times 8 \times C_4^1 = 4\ 625$ tirages au total.
3. $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici)
4. $8^2 \times 5^2 \times C_4^2 = 9\ 600$ tirages possibles.

Exercice 8

On note les couleurs par : R ; V ; N.
1. Tirage de 3 boules simultanément :
• Pour A : Le nombre de possibilités est : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1$
Donc $\text{card}(A) = 24$
• Pour B : Il faut obtenir 3 boules qui portent 1 ou 3 boules qui portent 2 (Car le numéro 3 n'apparait que sur une seule boule). Donc le nombre de possibilités est : $C_4^3 + C_3^3 = 5$
Donc $\text{card}(B) = 5$
• Pour C : Les possibilités sont : $\{0;1;3\}$ ou $\{0;2;2\}$ ou $\{1;1;2\}$ donc le nombre de possibilités est :
$\text{card}(C) = C_1^1 C_4^1 C_1^1 + C_1^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 = 25$
• Pour D : Le nombre de possibilités pour ne pas obtenir une boule rouge est : $C_5^3 = 10$
Donc $\text{card}(D) = C_9^3 - C_5^3 = 74$
2. Tirage de 3 boules successivement avec remise :
• Pour A : Le nombre de possibilités est
$\text{card}(A) = 6 \times (4 \times 3 \times 2) = 144$
• Pour B : Le nombre de possibilités est :
$\text{card}(B) = 1^3 + 4^3 + 3^3 + 1^3 = 93$
• Pour C : Le nombre de possibilités est :
$\text{card}(C) = 3!1 \times 4 \times 1 + C_3^2 \times 1 \times 3^2 + C_3^2 \times 4^2 \times 3 = 195$
• Pour D : les 3 boules tirées sont non rouges. Le nombre de toutes les possibilités est : $\text{card}(E) = 9^3$
Donc $\text{card}(D) = 9^3 - 5^3 = 604$
3. Tirage de 3 boules successivement sans remise.
• Pour A : C'est un arrangement de type : $(R;V;N)$ (avec l'ordre)et le nombre de possibilités est :
$\text{card}(A) = 3!A_4^1 A_3^1 A_2^1 = 144$
• Pour B : le nombre de possibilités est :
$\text{card}(B) = A_4^3 + A_3^3 = 30$
• Pour C : Le nombre de possibilités est :
$\text{card}(C) = 3!A_1^1 A_4^1 A_1^1 + C_3^2 \times 1 \times A_3^2 + C_3^2 \times A_4^2 \times A_3^1 = 150$
• Pour D : Le nombre de toutes les possibilités est :
$\text{card}(E) = A_9^3$ donc $\text{card}(D) = A_9^3 - A_5^3 = 564$

Exercice 9

1.
$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} + \frac{p(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_n^p \end{aligned}$$

2. $\Delta = \left(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}\right)^2$. Donc les solutions sont alors : $x_1 = -C_{n-1}^p$ et $x_2 = -C_{n-1}^{p-1}$ (Détailler les calculs)

Probabilité

Exercice 1

Notons C « l'événement la personne porte une cravate »
Notons V « l'événement la personne a des yeux bleus »
1. $p(C) = \dfrac{120}{250} = \dfrac{12}{25}$
2. $p(C \cap B) = \dfrac{50}{250} = \dfrac{1}{5}$
3. $p(C \cup B) = p(C) + p(B) - p(B \cap C) = \dfrac{31}{50}$
4. $p(\overline{B} \cap \overline{C}) = p(\overline{C \cup B}) = 1 - p(C \cup B) = \dfrac{19}{50}$

Exercice 2

1. Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a : $A_9^3 = 504$ possibilités.
a. Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a : $p(A) = \dfrac{A_5^3}{A_9^3} = \dfrac{5}{42}$
b. Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a : $p(B) = \dfrac{A_4^3}{A_9^3} = \dfrac{1}{21}$
c. Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »
$p(C) = 1 - p(A) = \dfrac{37}{42}$
d. Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert »
$p(D) = \dfrac{3A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \dfrac{5}{14}$
2. Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a : $C_9^3 = 84$
a. $p(A) = C_5^3/C_9^3 = 5/42$
b. $p(B) = \dfrac{C_4^3}{C_9^3} = \dfrac{1}{21}$
c. $p(C) = 1 - p(A) = \dfrac{37}{42}$
d. $p(D) = \dfrac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \dfrac{5}{14}$

Exercice 3

1. On n'a pas d'équiprobabilité pour les faces de ce dés.
a. $p_6 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = 0.15$
b. L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A = \{2;4;6\}$, on a : $p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0.45$
2-a. Soit p la probabilité d'apparition de 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p$,$3p$,$4p$,$5p$,$6p$. La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, on a : $21p = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{21}$ et on déduit les probabilités demandées.
b. Soit A : « obtenir un nombre pair » ; $A = \{2;4;6\}$
Alors $p(A) = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

Exercice 4

Notons A l'événement «la pièce provient de l'atelier 1», B l'événement «la pièce provient de l'atelier 2» et D l'événement «la pièce est défectueuse».
1. D'après l'énoncé, les 2/3 des pièces produites proviennent de l'atelier 1 $\Rightarrow p(A) = 2/3$
2. $p(A \cap D) = p(D/A)p(A) = 0.03 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{50}$

3. $p(B\cap D)=p(D/B)p(B)=0.04\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{75}$

Ainsi $p(D)=p(A\cap D)+p(B\cap D)=\dfrac{1}{30}$

4. $p(A/D)=\dfrac{p(A\cap D)}{p(D)}=\dfrac{3}{5}$

Exercice 5

1. Notons A_i l'événement «l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur». Alors on a : $p(A_i)=\dfrac{2}{3}$ et les événements A_i sont indépendants. On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A_1\cap\cdots\cap A_n$ qui vaut donc :

$p(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{3}=\frac{2^n}{3^n}$

2. Notons B_j l'événement «l'erreur numéro j n'est pas corrigé à l'issue de la n-ième relecture». D'après **1.**, $p(B_j)=\dfrac{2^n}{3^n}$ pour $j\in\{1,2,3,4\}$. Le livre est entièrement corrigé après la n-ième relecture si l'événement $\overline{B}_1\cap\overline{B}_2\cap\overline{B}_3\cap\overline{B}_4$ est réalisé. Les événements B_j étant indépendants, le livre est entièrement corrigé après n relectures avec une probabilité valant

$\displaystyle\prod_{i=j}^{4}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)=\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4$

3. Cette probabilité est supérieure à 0.9 si et seulement si

$\left(1-\dfrac{2^n}{3^n}\right)^4\geq 0.9\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leq 1-(0.9)^{1/4}$

$\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(1-0.9^{1/4})}{\ln(2/3)}$

et donc ceci fonctionne dès que $n\geq 10$

Exercice 6

L'énoncé fournit : $p(C)=0.6$; $p(V)=0.45$ et $p(C\cap V)=0.1$

1-a. $p(C\cup V)=p(C)+p(V)-p(C\cap V)=\dfrac{19}{20}$

b. Cet évènement équivaut à : « cet élève pratique un instrument à cordes **ET** ne pratique pas d'instrument à vent» **OU** «cet élève pratique un instrument à vent **ET** ne pratique pas d'instrument à cordes» ce qui se traduit par l'expression logique qu'on note D : $D=(C\cap\overline{V})\cup(\overline{C}\cap V)$. On a alors :

$p(D)=p(C\cap\overline{V})+p(\overline{C}\cap V)-p(C\cap\overline{V})\cap(\overline{C}\cap V)$

• Les événements $(C\cap\overline{V})$ et $(C\cap V)$ forment une partition de C (car un élève qui pratique un instrument à cordes peut soit pratiquer un instrument à cordes uniquement, soit pratiquer un instrument à cordes et un instrument à vent), donc :

$p(C\cap V)+p(C\cap\overline{V})=p(C)\Rightarrow p(C\cap\overline{V})=\dfrac{1}{2}$

• De même $(V\cap\overline{C})$ et $(C\cap V)$ forment une partition de V donc $p(C\cap V)+p(V\cap\overline{C})=p(V)\Rightarrow p(V\cap\overline{C})=\dfrac{7}{20}$

• les ensembles logiques $(C\cap\overline{V})$ et $(V\cap\overline{C})$ sont disjoints car si un élève pratique uniquement un instrument à cordes, il ne peut pas pratiquer uniquement un instrument à vent. Donc $p(C\cap\overline{V})\cap(\overline{C}\cap V)=0$.

Donc la probabilité demandée est : $p(D)=\dfrac{17}{20}$

2. $p(V/C)=\dfrac{p(C\cap V)}{p(C)}=\dfrac{1}{6}$

3-a. «Au moins un élève pratique un instrument à cordes» est l'événement contraire de l'événement « aucun élève ne pratique un instrument à cordes». La probabilité de choisir n élèves ne pratiquant pas un instrument à cordes est :

$\big(p(\overline{C})\big)^n=0.4^n\Rightarrow P_n=1-0.4^n$

b. $P_n\geq 0.999\Rightarrow n\geq\ln(0.001)/\ln(2/5)\Rightarrow n=8$

Exercice 7

1. $p(R_U)=\dfrac{C_4^1}{C_8^1}=\dfrac{1}{2}$ et $p(B_U)=\dfrac{C_4^1}{C_8^1}=\dfrac{1}{2}$

2-a & b. $p(B_V/R_U)=\dfrac{C_4^1}{C_7^1}=\dfrac{4}{7}$ et $p(B_V/B_U)=\dfrac{C_4^1}{C_6^1}=\dfrac{2}{3}$

c. $p(B_V)=p(R_U\cap R_V)+p(B_U\cap B_V)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{21}$

d. $p(R_V)=1-p(B_V)=\dfrac{8}{21}$

Exercice 8

1. Ω_1 est un évènement impossible car la puce se trouvait en Ω au départ et l'a donc quitté à la fin du 1er saut $p_1=0$

Après le 1er saut, la puce se trouve en A, B, C, ou D et donc rejoint Ω avec une probabilité de $p_2=p(\Omega_2)=\dfrac{1}{3}$

2. Après chaque saut, la puce pouvant se trouver sur l'un des quelconques des 5 points, la somme des probabilités des 5 évènements A_n, B_n, C_n, D_n et Ω_n vaut 1. Ainsi : $p(A_n)+p(B_n)+p(C_n)+p(D_n)+p(\Omega_n)=1$. Et comme au départ, les 4 sommets A, B, C et D pouvaient être atteints avec la probabilité lors du premier saut de puce, on aura donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p(A_n)=p(B_n)=p(C_n)=p(D_n)$ (alors que ces nombres sont différents de p_n puisque le sommet Ω était «favorisé» dès le départ. L'égalité $4p(A_n)+p_n=1$

Ainsi $p(A_n)=p(B_n)=p(C_n)=p(D_n)=\dfrac{1}{4}(1-p_n)$

3. Si après un saut, la puce se trouve en A, B, C ou D, on a vu qu'elle pouvait revenir en Ω avec une probabilité égale $1/3$ et se rendre vers un autre sommet avec une probabilité égale à $2/3$. Si, en revanche, après un saut, la puce se trouve en Ω, elle ne peut pas s'y trouver au saut suivant. On a ainsi établi les probabilités conditionnelles : $p(\Omega_{n+1}/\Omega_n)=0$

$p(\overline{\Omega}_{n+1}/\Omega_n)=1$, $p(\Omega_{n+1}/\overline{\Omega}_n)=1/3$ et $p(\overline{\Omega}_{n+1}/\overline{\Omega}_n)=2/3$

$$\begin{aligned}p_{n+1}=p(\Omega_{n+1})&=p(\Omega_n\cap\Omega_{n+1})+p(\overline{\Omega}_n\cap\Omega_{n+1})\\&=p(\Omega_n)\times p(\Omega_{n+1}/\Omega_n)+p(\overline{\Omega}_n)\times p(\Omega_{n+1}/\overline{\Omega}_n)\\&=p_n\times 0+(1-p_n)\times\frac{1}{3}\end{aligned}$$

D'où $p_{n+1}=\dfrac{1}{3}(1-p_n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

4. $q_{n+1}=p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{3}q_n$

Donc $(q_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $q_0=p_0-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

5. D'après **4.**, on conclut que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $q_n=\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

On déduit que $p_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

Et on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\dfrac{1}{4}$

Correction des problèmes

Problème 1

1-a. Pour avoir 10 boules de même couleur dans chaque urne il faut avoir 10 noires dans A et 10 Blanches dans B ou le contraire. La probabilité est donc : $2 \times \dfrac{C_{10}^{10} \times C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}} \approx 10^{-5}$

b. $p = \dfrac{C_{10}^{5} \times C_{10}^{5}}{C_{20}^{10}} = \dfrac{63504}{184765} \approx 0.34$

2-a. Il faut tirer une blanche de A et la mettre dans B puis tirer une blanche de B et la mettre dans A, soit $\dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{11}$ **OU** tirer une noire de A et la mettre dans B puis tirer une noire de B et la mettre dans A, soit $\dfrac{4}{10} \times \dfrac{7}{11}$. Ainsi la probabilité totale est : $\dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{11} + \dfrac{4}{10} \times \dfrac{7}{11} = \dfrac{58}{110} = \dfrac{29}{55}$

b. Même raisonnement :

$p(M) = \dfrac{n}{10} \times \dfrac{10-n+1}{11} + \dfrac{10-n}{10} \times \dfrac{n+1}{11} = \dfrac{-n^2+10n+5}{55}$

c. $p(M) \geq p(\overline{M}) \Leftrightarrow p(M) \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -n^2+10n-45/2 \geq 0$

D'où après résolution : Il faut donc qu'il y ait 4, 5 ou 6 boules blanches dans l'urne A.

Problème 2

1. $p_2 = p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G}_1 \cap G_2)$
$= p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G}_1) \times p_{\overline{G}_1}(G_2)$

$p(G_1) = 0.1$, $p_{G_1}(G_2) = 0.8$, $p(\overline{G}_1) = 0.9$ et $p_{\overline{G}_1}(G_2) = 0.6$

D'où $p_2 = 0.62$

2. La probabilité demandée est $p_{G_2}(\overline{G}_1)$

$p_{G_2}(\overline{G}_1) = \dfrac{p(\overline{G}_1 \cap G_2)}{p(G_2)} = \dfrac{p(\overline{G}_1) \times p_{\overline{G}_1}(G_2)}{p(G_2)} = \dfrac{27}{31}$

3. L'événement contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune des trois premières parties » : $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 \cap \overline{G}_3$

$p(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 \cap \overline{G}_3) = 0.9 \times 0.4 \times 0.4 = 0.144$. Donc La probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est : $1 - 0.144 = 0.856$

4. $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G}_n \cap G_{n+1})$
$= p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G}_n) \times p_{\overline{G}_n}(G_{n+1})$
$= p_n \times 0.8 + (1-p_n) \times 0.6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$

5. $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.62$, … $p_{10} = 0.74999$, $p_{11} = 0.7499999$

On peut donc conjecturer que la limite est : $\dfrac{3}{4}$

6. Le résultat se démontre facilement par récurrence sur n

7. D'après **5.**, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{4}$

8. $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(3.25 \times 10^7)}{\ln(5)} \Leftrightarrow n > 10.7$

Donc le plus petit $n \in \mathbb{N}$ / $3/4 - p_n < 10^{-7}$ est : $n = 11$

Problème 3

1. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0 \Leftrightarrow a + b = 5$

Notons Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire :

On déduit que $\text{card}(\Omega) = 4^2 = 16$

Soit O l'événement : «Obtenir une somme égale à 5»

O est composé de 4 éléments : $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$

Ainsi $p(O) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. D'où le résultat.

2-a. $p(A_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$; $p(B_1) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$ et $p(C_1) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$

(C_1 : les deux perdent ou les deux gagnent à la 1ère partie)

b. $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1) = \dfrac{5}{8}p_n$

$(p(C_n))$ est une suite géométrique de premier terme $p(C_1)$ et de raison 5/8. On en déduit le terme de rang n :

$p(C_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$

$p(A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_1) = \dfrac{3}{16}p(C_n)$. Donc $p(A_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$

3-a. $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = 0$

b. $p(A_n) \leq 0.01 \Leftrightarrow n \geq 1 + \dfrac{\ln(4/75)}{\ln(5/8)} \approx 7.24$

Donc le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égale à 0.01 est 8

Problème 4

1. $p(C) = 0.37$; $p(A) = 0.25$;, $p(C \cap R) = 0.21$; $p(D \cap R) = 0.325$; $p(R/A) = 0.725$

2-a. $p(D) = 1 - (p(C) + p(A)) = 0.38$

b. $p(A \cap R) = p(A) \times p(R/A) \approx 0.181$

3. $p(A \cap \overline{R}) = p(A) \times p(\overline{R}/A) = p(A)(1 - p(R/A) \approx 0.069$

4. $p(C/\overline{R}) = 1 - p(C/R) = 1 - \dfrac{p(C \cap R)}{p(C)} = \dfrac{16}{37} \approx 0.432$

5. $p(R) = p(R \cap C) + p(R \cap A) + p(R \cap D) \approx 0.716$

6-a. La probabilité qu'aucun des trois candidat n'ait obtenu son BAC est de $(1 - 0.716)^3 = 0.0229$. Donc la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit admis est : $1 - 0.0229 \approx 0.977$

b. On compte trois situation possibles : $\overline{R}RR$; $R\overline{R}R$ et $RR\overline{R}$ et chacune des tris possibilités a une probabilité égale à : $0.716^2 \times (1-0.716)^1 \approx 0.1456$. Donc la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient admis est égale à la somme des probabilités de ces 3 situations. Soit : $3 \times 0.1456 \approx 0.437$

Problème 5

1-a. $p(M) = 0.3$; $p(T/M) = 0.98$ et $p(\overline{T}/\overline{M}) = 0.99$

Alors $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0.294$

$p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) = 0.7 \times 0.01 = 0.007$

Ainsi $p(T) = p(\overline{M} \cap T) + p(M \cap T) = 0.301$

b. La valeur prédictive positive est $p(M/T)$

$p(M/T) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} \approx 0.977$

La valeur prédictive négative est $p(\overline{M}/\overline{T})$

$p(\overline{M}/\overline{T}) = \dfrac{p(\overline{M} \cap \overline{T})}{1 - p(T)} = \dfrac{p(\overline{T}/\overline{M}) \times p(\overline{M})}{1 - p(T)} \approx 0.991$

c. Cette probabilité est : $p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap \overline{T})$

$p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0.294 + 0.7 \times 0.99 = 0.987$

2-a. $p(M) = f$ alors : $p(M \cap T) = 0.98f$ et $p(\overline{M} \cap T) = 0.01(1-f)$

$p(T) = p(\overline{M} \cap T) + p(M \cap T) = 0.97f + 0.01$

Ainsi :

• La valeur prédictive positive est $p(M/T)$

$p(M/T) = \dfrac{0.98f}{0.97f + 0.01} = G(f)$

• La valeur prédictive négative est $p(\overline{M}/\overline{T})$

$p(\overline{M}/\overline{T}) = \dfrac{0.99(1-f)}{0.99 - 0.97f} = H(f)$

b. Faire l'étude de H et G et tracer (C_H) et (C_G)

c. Pour une maladie rare, un test de dépistage systématique de toute une population aura l'inconvénient majeur de fournir beaucoup de faux positifs (individus non malades dont le test est positif).

Problème 6

I/ 1. On a : $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ et $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

Donc $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A)$

2-a. $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \subset A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}$ donc $p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}) \geq p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) > 0$ donc $P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k)$ est bien définie

b. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k) = \prod_{k=2}^{n}\frac{p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k)}{p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1})} = \dfrac{p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)}{p(A_1)}$

Ainsi $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)}{p(A_1)}$

c. D'après **2-b.**, on déduit que :

$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)\displaystyle\prod_{k=2}^{n} P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k)$

II/ Application 1

1. Au 1er tirage, on est en situation d'équiprobabilité et il y a C_{2n}^2 tirages possibles donc :

$P(E_1) = \dfrac{card(E_1)}{C_{2n}^2} = \dfrac{n^2}{C_{2n}^2} = \dfrac{2n^2\times(2n-2)!}{(2n)!} = \dfrac{n}{2n-1}$

2. Si à chaque tirage on a deux boules de couleurs différentes, alors avant d'effectuer le $(k+1)$-ième tirage, on aura $(n-k)$ boules rouges et $(n-k)$ boules blanches donc comme à la question **1.**, on a : $P_{E_1\cap E_2\cap....\cap E_k}(E_{k+1}) = \dfrac{(n-k)^2}{C_{2(n-k)}^2}$

3. D'après **I/ 2-c.**,

$$P(E_1\cap E_2\cap....\cap E_n) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)^2}{C_{2(n-k)}^2} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{2n-2k-1} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2(n-k)^2}{(2n-2k)(2n-2k-1)} = \frac{2^n\left[n(n-1)\cdots 2\times 1\right]^2}{2n(2n-1)\cdots 2\times 1} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$$

D'où $P(E_1\cap E_2\cap....\cap E_n) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$

4. Cette probabilité est : $\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$

Application 2

1. $P_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n\cap A_{n+1}) + P(A_{n+1}\cap\overline{A}_n)$

$= P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A}_n)\times P_{\overline{A}_n(A_{n+1})}$

$= P_n\times(1-1/2) + (1-P_n)\times 1/4 = \dfrac{1}{4}P_n + \dfrac{1}{4}$

D'où $P_{n+1} = \dfrac{1}{4}P_n + \dfrac{1}{4}$

Facilement on démontre que : $P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

D'où $P_n - \dfrac{1}{3}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme P_0. Ainsi $P_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4^n}\left(P_0 - \dfrac{1}{3}\right)$ et on déduit que : $\forall\, n\in\mathbb{N}\,;\, P_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4^n}$

2. $P(T_0) = P(A_0) = 1/2\,;$

$P(T_1) = P(\overline{A}_0\cap A_1) = P(\overline{A}_0)P_{\overline{A}_0}(A_1) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

3. $P(T_n) = P(\overline{A}_0\cap\overline{A}_1\cap\ldots\overline{A}_{n-1}\cap A_n)$ et d'après **I/**, on déduit que : $P(T_n) = P(\overline{A}_0)\times\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} P_{\overline{A}_{k-1}}(\overline{A}_k)\right)\times P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)$

Ainsi $P(T_n) = \dfrac{1}{2}\times\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ pour $n\geq 2$

Problème 7

A/ 1. On a : $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A)$ (voir **problème 6**) puis on tire le résultat demandé.

2. $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)}$

$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap\overline{A}) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

D'où le résultat.

3-a. Les évènements $A_k\cap B$ sont deux à deux incompatibles

$P(B) = P(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B\cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B\cap A_k)$ (car les $A_k\cap B$ sont 2 à 2 incompatibles) et de plus $P(B\cap A_k) = P(A_k)\times P_{A_k}(B)$

D'où $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\times P_{A_k}(B)$

b. $P_B(A_k) = \dfrac{B\cap A_k}{P(B)} = \dfrac{P(A_k)\times P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\times P_{A_k}(B)}$

B/ 1-a. $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et $P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$ (si le dé n'est pas pipé, chaque face a la même probabilité d'apparaitre)

Ainsi $P(B) = P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$ (**A/ 3-a.**)

Ainsi $P(B) = \dfrac{1}{4}$

b. $P_B(A) = \dfrac{1}{2}$ (en utilisant **A/ 2.**)

2-a. $P(A) = \dfrac{1}{4}\,;\, P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$. Donc

$P(B) = P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$ or $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}$

Donc $P(B) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{6^n}$

b. $P_B(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(A)\times P_A(B) + P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)} = \dfrac{3^{n-1}}{1+3^{n-1}}$

c. Ainsi. La probabilité que ce dé soit pipé $P_n = \dfrac{3^{n-1}}{1+3^{n-1}}$

$P_n = \dfrac{3^{n-1}}{1+3^{n-1}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$

Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé

Correction des exercices

Exercice 1

1. D'après l'énoncé, $p(X=6)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$p(X=1)=p(X=2)=p(X=3)=p(X=4)=p(X=5)$

On note $p(X=1)=a$. La somme des probabilités doit être égale à $1 \Rightarrow 5a+\dfrac{1}{3}=1 \Rightarrow a=\dfrac{2}{15}$

Ainsi la loi de probabilité de X est :

X	1	2	3	4	5	6
$P[X=x_i]$	2/15	2/15	2/15	2/15	2/15	1/3

2. La sortie du chiffre 6 est la plus probable.

3. $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X=x_i) \Rightarrow E(X)=4$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$. De même :

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X=x_i)=\dfrac{58}{3}$

$V(X)=\dfrac{10}{3}$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

4. Dans ce cas, $P[X=x_i]=\dfrac{1}{6}$ pour tous les x_i ;

$E(X)=\dfrac{7}{2}$; $V(X)=\dfrac{35}{12}$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{35}{12}}$

Exercice 2

1. X peut prendre quatre valeurs distinctes : -300 ; -240 ; 480 et 600 donc $X(\Omega)=\{-300;-200;480;600\}$

On détermine les probabilités :

$p(X=-300)=\dfrac{2}{7}$; $p(X=-240)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{10}{21}$

$p(X=480)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{21}$ et $p(X=600)=\dfrac{1}{7}$

Donc la loi de probabilité :

X	-300	-240	480	600
$P[X=x_i]$	2/7	10/21	2/21	1/7

2. $E(X)=-\dfrac{480}{7}$

3. $V(X)=\dfrac{885600}{7}-\dfrac{230400}{49}=\dfrac{5968800}{49}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=349.02$

4. Fonction de répartition :

- Pour $x<-300$, $F(x)=0$
- Pour $-300\le x<-240$, $F(x)=2/7$
- Pour $-240\le x<480$, $F(x)=16/21$
- Pour $480\le x<600$, $F(x)=18/21$
- Pour $x\ge 600$, $F(x)=21/21=1$

5. Notons a ce nouveau gain ; alors :

$E(X)=2a/21-800/7$. $E(X)=0 \Rightarrow a=1200$ F

Exercice 3

1-a. X peut prendre quatre valeurs distinctes : 0 ; 1 ; 2 et 3 donc $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

$p(X=0)=\dfrac{C_{2n}^3}{C_{3n}^3}=\dfrac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$

$p(X=1)=\dfrac{C_n^1\times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}=\dfrac{2n(2n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$

$p(X=2)=\dfrac{C_n^2\times C_{2n}^1}{C_{3n}^3}=\dfrac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$

$p(X=3)=\dfrac{C_n^3\times C_{2n}^0}{C_{3n}^3}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$

Donc $E(X)=\dfrac{2n(n-1)+4n(n-1)+(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)}$

Après développement et réduction : $E(X)=1$ (indépendant de n)

b. $V(X)=\dfrac{2n(2n-1)+8n(n-1)+3(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)}-1^2$

Ainsi $V(X)=\dfrac{6n^2-10n+4}{9n^2-9n+2}$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

2-a. D'après **1-a.** :

$p(A_0)=p(X=0)=\dfrac{14}{55}$; $p(A_1)=p(X=1)=\dfrac{28}{55}$

$p(A_2)=p(X=2)=\dfrac{12}{55}$ et $p(A_3)=p(X=3)=\dfrac{1}{55}$

b. $p(B/A_0)=\dfrac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\dfrac{10}{21}$; $p(B/A_1)=\dfrac{C_3^1\times C_6^2}{C_9^3}=\dfrac{15}{28}$

$p(B/A_2)=\dfrac{C_2^1\times C_7^2}{C_9^3}=\dfrac{1}{2}$; $p(B/A_3)=\dfrac{C_1^1\times C_8^2}{C_9^3}=\dfrac{1}{3}$

c. $p(B\cap A_0)=p(A_0)\times P(B/A_0)=\dfrac{14}{55}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{28}{231}$. De même on a : $p(B\cap A_1)=\dfrac{3}{11}$; $p(B\cap A_2)=\dfrac{6}{55}$; $p(B\cap A_3)=\dfrac{1}{165}$

d. $p(B)=p(B\cap A_0)+p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+p(B\cap A_3)$

Ainsi $p(B)=\dfrac{28}{55}$

Exercice 4

1-a. $P(A)=\dfrac{1\times C_5^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$ (Quand on choisit le lundi, on doit choisir le deuxième jour du congé parmi les 5 autres jour restants soit $C_5^1=5$ choix possibles)

De même on déduit que $P(B)=\dfrac{1}{3}$

b. • La probabilité d'avoir lundi et un autre jour libre sauf le samedi est $\dfrac{4}{15}$

• La probabilité d'avoir samedi et un autre jour libre sauf le lundi est $\dfrac{4}{15}$

• La probabilité d'avoir lundi et le samedi libre est $\dfrac{1}{15}$

Donc $P(C)=\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{3}{5}$

• La seule possibilité est d'avoir trois jours de congés consécutifs est de choisir le samedi et le vendredi (Pour avoir vendredi, samedi et dimanche)

Donc $P(D)=\dfrac{1}{15}$

c. La probabilité est de 1/15

2-a. $X(\Omega)=\{0;1;2;3;4;5;6\}$

On remarque facilement que pour $x_k\in X(\Omega)$

$P[X=x_k]=C_6^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{6-k}$. Ainsi :

X	0	1	2	3	4	5	6
$P[X=x_i]$	$\frac{64}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{1}{729}$

b. $E(X)=2$; $V(X)=\dfrac{16}{3}-2^2=\dfrac{4}{3}$. $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

c. La probabilité demandée est : $\dfrac{64+192+240+160+60}{729}$

D'où $p = \dfrac{716}{729}$

d. $p = \dfrac{240+160+60+12+1}{729} = \dfrac{473}{729}$

Exercice 5

1. $N = 1+2+2^2+\cdots+2^{2n-1} = \dfrac{1-2^{2n}}{1-2} = 2^{2n}-1 = 4^n-1$

Tableau de congruence modulo 3 :

n	0	1	2
4^n-1	0	0	0

Donc $N = 4^n - 1$ divise 3

2-a. $I = 1+2^2+2^4+\cdots+2^{2n-2} = \dfrac{1-\left(2^2\right)^n}{1-2^2} = \dfrac{4^n-1}{3}$

b. $I = \dfrac{N}{3}$ et $P = 2+2^3+\cdots+2^{2n-1} = 2\dfrac{1-\left(2^2\right)^n}{2-2^3}$

D'où $P = 2\dfrac{4^n-1}{3} = \dfrac{2N}{3}$

3. $X(\Omega) = \{0;1;2\}$.

Ainsi $p(X=0) = \dfrac{C_I^2}{C_N^2} = \dfrac{I(I-1)}{N(N-1)} = \dfrac{N-3}{9(N-1)}$

$p(X=1) = \dfrac{C_P^1 \times C_I^1}{C_N^2} = \dfrac{2I \times P}{N(N-1)} = \dfrac{4N}{9(N-1)}$

$p(X=2) = \dfrac{C_P^2}{C_N^2} = \dfrac{P(P-1)}{N(N-1)} = \dfrac{2(2N-3)}{9(N-1)}$

4. $E(X) = \dfrac{4N+2\times 2(2N-3)}{9(N-1)} = \dfrac{4}{3}$ (indépendant de N)

5. $100 \leq I \leq 1000 \Rightarrow 300 \leq N \leq 3000 \Rightarrow 301 \leq 4^n \leq 3001$

Ainsi $4.12 \leq n \leq 5.77$ donc $n = 5$ et le plus grand numéro porté par les boules est : $2n = 10$

6. $N = 1023$ et on a $N_0 = 2^9+2^8+2^7 = 896$ boules portant un numéro supérieur ou égal à 8. Donc la probabilité demandée est : 896/1023

Exercice 6

1. $p = 6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{36}$

2. Pour avoir une somme de 6 On peut avoir :

- $(2,2,2)$ trois fois avec une probabilité de : 1/216
- $(1,2,3)$; $(1,3,2)$; $(2,1,3)$; $(2,3,1)$; $(3,1,2)$; $(3,2,1)$ avec une probabilités de $6 \times \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{6}{216}$.
- $(1,1,4)$; $(1,4,1)$; $(4,1,1)$: $3 \times \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{3}{216}$

Donc la probabilité demandée est : $\dfrac{10}{216} = \dfrac{5}{108}$

3. Prenons par exemple : avoir 1 deux fois et 4 une fois. La probabilité est de $\dfrac{3}{216}$ (d'après le dernier point de **2.**)

Donc la probabilité d'obtenir deux fois 1 est : $5 \times \dfrac{3}{216}$

Il en est de même pour les chiffres 2, 3, 4, 5 et 6.

D'où la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est : $6 \times 5 \times \dfrac{3}{216} = \dfrac{5}{12}$

4-a. $X(\Omega) = \{-3000; 0; 2000\}$

b. D'après les questions précédentes : $p(X=2000) = 1/36$ et $p(X=-3000) = 5/12$. Le nombre de cas favorable pour avoir 3 chiffres distincts est : $6\times5\times4 = 120$. Donc $p(X=0) = 120/216$:

X	-3000	0	2000
$P[X=x_i]$	5/12	15/27	1/36

c. $E(X) = -\dfrac{10750}{9} \approx -1194.444$

$E(X) < 0$ cela signifie que le joueur perdra en moyenne de l'argent à chaque partie. Donc le jeu n'est pas équitable.

Exercice 7

1-a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1+x+\cdots x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ puis en dérivant cette égalité on a :

$\dfrac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \in]0,1[$

b. On prend $x = 1-p$ dans l'égalité **1-a.** on a :

$\dfrac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n}{p^2} = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$ puis en multipliant par p, on a le résultat demandé

Pour $p \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)(1-p)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n(1-p)^{n-1} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{p}$

c. On fait le changement d'indice $i = k-m-1 \Rightarrow$ $k-1 = i+m$ et on a $v_n = \sum_{i=0}^{n-m} p(1-p)^{m+i}$

$v_n = \sum_{i=0}^{n-m} p(1-p)^{m+i} \Rightarrow v_n = p(1-p)^m \sum_{i=0}^{n-m}(1-p)^i$

or $\sum_{i=0}^{n-m}(1-p)^i = \dfrac{1-(1-p)^{n-m+1}}{p}$

D'où $v_n = (1-p)^m\left[1-(1-p)^{n-m+1}\right]$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = (1-p)^m$

2-a. Comme indiqué dans l'énoncé, on déduit que :

$E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{p}$

b. L'évènement $X > m$ correspond à la réunion de tous les évènements $X = k$ avec $k > m$ qui sont deux à deux disjoints. Donc $p(X>m)$ est la somme des probabilités $p(X=k)$ avec $k > m$ soit la somme des $p(1-p)^{k-1}$ pour k allant de $m+1$ à $+\infty$. Ce qui est bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

D'où $p(X>m) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = (1-p)^m$

c. Soient n et $m \in \mathbb{N}^*$. Si $X > n+m$ alors forcément $X > n$.

D'où $\{X > n+m\} \cap \{X > n\} = \{X > n+m\}$ et $p(\{X>n+m\} \cap \{X>n\}) = p(X > n+m)$

d. $p_{X>n}(X > n+m) = \dfrac{p(\{X>n+m\} \cap \{X>n\})}{p(X>n)}$ et par suite $p_{X>n}(X>n+m) = \dfrac{p(\{X>n+m\})}{p(X>n)}$ or d'après **2-c.** $p(X>n+m) = (1-p)^{n+m}$ et $p(X>n) = (1-p)^n$

Donc $p_{X>n}(X>n+m) = (1-p)^m$ or $p(X>m) = (1-p)^m$

D'où pour n et $m \in \mathbb{N}^*$, $p_{X>n}(X>n+m) = p(X>m)$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $p(X=n)$ est la probabilité d'obtenir le premier 6 au n-ième lancers soit c'est la probabilité de ne pas obtenir 6 lors des $n-1$ précédents lancers et avoir 6 au n-ième lancers. D'où $p(X=n) = p(1-p)^{n-1}$ avec $p = 0,1$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p(X=n) = p(1-p)^n$ avec $p = 0,1$.

D'après **2.**

D'après ce qui précède ;

- $E(X) = \dfrac{1}{p} = 10$;
- $p(X>5) = (1-p)^5 \approx 0.59$ et
- $p_{X>8}(X>12) = (1-p)^4 = 0.6561$

Correction des exercices

Exercice 1

1. Équation du plan : $ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$
2-a. On a : $\overrightarrow{AB}=(-4,-1,7)$ et $\overrightarrow{AC}=(1,4,2)$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-30,15,-15)\neq\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan.
b. Pour vérifier qu'une équation cartésienne (ABC) est $2x-y+z+3=0$, il suffit de vérifier que les coordonnées des trois points A, B et C vérifient $2x-y+z+3=0$
Faire la vérification
c. La droite (D) perpendiculaire au plan (ABC) admet le vecteur $\vec{n}(2,-1,1)$ comme vecteur directeur d'après **2-a.** D'où un système d'équations paramétriques de la droite (D) est : $\begin{cases}x=-5+2t\\y=9-t\\z=4+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
d. Pour déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite (D) et du plan (ABC), on remplace les expressions de x, y et z en fonction de t dans l'équation du plan (ABC) : On trouve $6t-12=0$, soit $t=2$. Ainsi, $x=-1$, $y=7$, $z=6$. D'où $J(-1;7;6)$.
e. $d(I,(ABC))=IJ=\sqrt{(x_I-x_J)^2+(y_I-y_J)^2+(z_I-z_J)^2}$
Ainsi $IJ=2\sqrt{6}$
f. Un vecteur normal à P est $\vec{n}'(1,2,-2)$. $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans P et (ABC) sont sécants. Ils ne sont pas perpendiculaires, puisque ces vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. En utilisant le cours, on déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}$ sont : $[(y-2z+2);(-x-z+3);(2x+y-4)]$
2. $x=3$, $y=5$ et $z=3$ (on peut procéder par élimination)
3. Soit $N(x,y,z)$.

$$\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN}\Rightarrow\begin{cases}y-2z+2=x-2\\-x-z+3=y-8\\2x+y-4=z+4\end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-2z=-4\\-x-y-z=-11\\2x+y-z=8\end{cases}$
Ce système admet pour unique triplet solution $(3,5,3)$
Donc N existe et est unique de coordonnées $(3,5,3)$
4-a. $\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN}$ et donc $\overrightarrow{CN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN}$. En considérant le plan (ANB), (CN) est orthogonal au plan (ANB) et par suite, CN est la distance du point C au plan (ANB)
Par conséquent : $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{NA}\wedge\overrightarrow{NB})\cdot\overrightarrow{CN}\right|$
Donc $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{NC}\right|=\frac{1}{6}CN^2$
b. Aire(ABC)$=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{413}$
c. $\mathcal{V}=\frac{1}{3}Aire(ABC)\times d\Rightarrow d=\frac{3\mathcal{V}}{Aire(ABC)}=\frac{\sqrt{413}}{7}$

Exercice 3

1. Notons $G_1=bar\{(B,1);(C,1)\}\Rightarrow\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$
Donc $2\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{BC}$. D'où G_1 est le milieu de $[BC]$ $(G_1=E)$
$G=bar\{(A,2),(B,1)(C,1)\}\Rightarrow 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GE}=\vec{0}$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}$
Donc G est le milieu du segment $[KA]$
2. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GE}=-2\overrightarrow{AE}$. Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ implique que : $4MG=2AE$ soit $MG^2=\frac{1}{4}AE^2$. Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}AE$
3. $2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ alors $\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0\Rightarrow 4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=0$
Soit I le milieu de $[AG]$:
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$
Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=MI^2-IA^2$
D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=0\Rightarrow MI^2=IA^2$. Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon IA soit le cercle de diamètre $[GA]$

Exercice 4

1-a. Il faut que $1+\beta+1\neq 0\Rightarrow\beta\neq -2$
b. Soit K le milieu de $[AC]$ alors $K=bar\{(A,1);(C,1)\}$
$G_\beta=bar\{(A,1);(B,\beta);(C,1)\}\Rightarrow\overrightarrow{G_\beta A}+\beta\overrightarrow{G_\beta B}+\overrightarrow{G_\beta C}=\vec{0}$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{G_\beta K}+\beta\overrightarrow{G_\beta B}=\vec{0}$
$\Rightarrow(2+\beta)\overrightarrow{G_\beta K}+\beta\overrightarrow{KB}=\vec{0}$
$\Rightarrow(2+\beta)\overrightarrow{KG_\beta}=\beta\overrightarrow{KB}$
Donc quand β parcours $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, G_β parcours la droite (KB) avec K milieu de $[AC]$ ou encore la médiatrice de $[AC]$
2-a. D'après **1-b.**, $3\overrightarrow{KG_1}=\overrightarrow{KB}$ avec K milieu de $[AC]$
b. $f_1(M)=MA^2+MB^2+MC^2$. On introduit G_1
$f_1(M)=(\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A})^2+(\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1B})^2+(\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1C})^2$
$=3MG_1^2+G_1A^2+G_1B^2+G_1C^2$
Car $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$
ABC est un triangle équilatéral de côté $2d$ et par définition, G_1 est le centre de gravité de ce triangle. On déduit que :
$AG_1^2=BG_1^2=CG_1^2=\frac{4}{9}(4d^2-d^2)=\frac{4}{3}d^2$
Donc $f_1(M)=3MG_1^2+4d^2$
$f_1(M)=8d^2\Leftrightarrow 3MG_1^2+4d^2=8d^2\Leftrightarrow MG_1^2=\frac{4}{3}d^2$
D'où (C) est le cercle de centre G_1 et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}d$.

Autrement dit, (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC

3-a. Soit K le milieu de $[AC]$

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{BK}$ car $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. D'où $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{BK}$ est indépendant de M

b. On pose $f_{-2}(M) = MA^2 - 2MB^2 + MC^2$ alors :

$f_{-2}(M) = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 - 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC})^2$

$f_{-2}(M) = KA^2 - 2KB^2 + KC^2 - 2\overrightarrow{KM}(\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC})$

Ainsi $f_{-2}(M) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BK} = KA^2 - 2KB^2 + KC^2$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (BK), alors

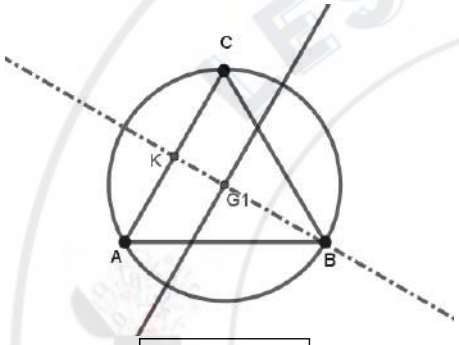
$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \overrightarrow{KH}$ est constante

Or $KA^2 + KB^2 = 2d^2$ et $KB^2 = 3d^2 \Rightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BK} = -4d^2$

Ainsi $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{BK} = -d^2$. Ainsi $\overrightarrow{KH} = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$

Car $BK = \sqrt{3}d$. D'où $\overrightarrow{KH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{KB} \Rightarrow K = G_1$

D'où l'ensemble (E) est la droite perpendiculaire à (BK) et passant par G_1



Exercice 5

1-a. $P(-2i) = 0$. $a = -4$ et $b = 4 + 2i$ (Par identification)

b. $P(z) = 0$ pour $z_1 = -2i$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = 3 - i$

2-a. $A(1+i)$, $B(-2i)$ et $C(3-i)$ (Faire la figure)

b. $z_G = \dfrac{3z_0 - 4z_A + z_B + 2z_C}{2} = 1 - 4i$ et on vérifie de même que A est le barycentre du système donné en démontrant que l'affixe z du système est : $1 + i$

c. $\dfrac{z-1-i}{z+2i} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 1 + i$ ou $arg\left(\dfrac{z_{MA}}{z_{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow M \in$ au cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

3-a. $\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G) = 2MG^2 - 18$

$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{18+k}{2}$. Ainsi :

- Si $k < -18$; $\Gamma_k = \varnothing$
- Si $k = -18$; $\Gamma_k = \{G\}$
- Si $k > -18$; Γ_k est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{18+k}{2}}$

b. Γ_{16} est alors le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{17}$

Exercice 6

1. $I(1,1,-1)$; $K(3,-3,3)$; $J(5/2, 1/2, -5/2)$

2. $\overrightarrow{IJ} = (3/2, -1/2, -3/2)$ et $\overrightarrow{IK} = (2,-4,4)$ n'ont pas leur coordonnées proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et par suite I, J et K ne sont pas alignés. Ils déterminent alors un plan.

3. Comme I, J et K définissent un plan, il suffit de vérifier que les coordonnées de ces points vérifient l'équation donnée.

4. (AD) a pour vecteur directeur $\vec{u}(6,-2,2)$ et passe par le point A ; d'où une représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

L a pour coordonnées : $(1/2, -1/2, 5/2)$ (Voir Exercice **1.**)

5. $\overrightarrow{AL} = (3/2, -1/2, 1/2)$ et on obtient bien $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

6. $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $G_1 = L$. De même $\overrightarrow{AG_2} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $G_2 = J$.

7. D'après **6.**, G est barycentre du système $\{(L,4);(J,4)\}$, donc G est sur la droite (JL). Le point I barycentre du système $\{(A,3);(B,3)\}$ et le point K est barycentre du système $\{(C,1);(D,1)\}$ donc G est barycentre du système $\{(I,6);(K,2)\}$. Donc G est sur la droite (IK). G appartient bien aux droites (IK) et (JL). Ces droites sont donc sécantes en G, elles sont donc coplanaires, et par suite, les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 7

1-a. $\overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,1)$ et $\overrightarrow{DE} = (1,-5,-2)$

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DE}$ est normal à (ABC)

b. $\overrightarrow{DE} = (1,-5,-2)$ est normal à (ABC) et $A(2,1,3) \in (ABC)$ donc l'équation cartésienne du plan (ABC) est :

$x - 5y - 2z + 9 = 0$

c. $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur directeur de (DE) et $D \in (DE)$

Donc $M(x,y,z) \in (DE) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

d. $F \in (DE)$ et $F \in (ABC)$ donc $F(49/10, 7/2, -9/5)$ (Voir exercice **1.**)

$\overrightarrow{EF} = (-11/10, 11/2, 11/5)$ et $\overrightarrow{DF} = (-1/10, 1/2, 1/5)$. Donc $\overrightarrow{EF} = 11\overrightarrow{DF}$

2-a. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \times DF$ avec $S_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2}$ car ABC est un triangle rectangle en A. D'où $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$

b. $\overrightarrow{EF} = 11\overrightarrow{DF}$; $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 10MF^2 + 11FD^2 - FE^2 = -30$

Or $FD^2 = \dfrac{3}{10}$ et $FE^2 = 11^2 FD^2 = \dfrac{363}{10}$

Ainsi $MF^2 = \dfrac{3}{10}$ donc Γ_1 est la sphère de centre F et de rayon $FD = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$ (C'est une sphère pas un cercle car nous sommes dans un espace pas dans un plan)

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}) = -36$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{MI} = -36$ avec I milieu de $[ED]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{IM} = 18$

Soit J un point de l'espace tel que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{18}{ED^2}\overrightarrow{ED}$, $J \in \Gamma_2$

Soit $M \in \Gamma_2$: $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

Donc Γ_2 est le plan parallèle à (ABC) et passant par J.

Or $AD^2 - AE^2 = -36 \Rightarrow A \in \Gamma_2$ et par suite (ABC) et Γ_2 sont confondus.

On conclut alors que $\Gamma_2 = (ABC)$

Correction des exercices

Exercice 1

1-a. $f(M)=M \Rightarrow \begin{cases} 4x=3x+\sqrt{3}y-2 \\ 4y=\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3} \end{cases}$ donc la droite (D) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ est l'ensemble des points invariants.

b.
$$\begin{cases} x'=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y-\dfrac{1}{2} \\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-x=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y-\dfrac{1}{2} \\ y'-y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{3}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
Or $\overrightarrow{MM'}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}$. On déduit que :
$$\overrightarrow{MM'}=\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)+\left(-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$
D'où $\overrightarrow{MM'}=\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}+1\right)\left(-\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

Ainsi pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

f n'est pas une transformation affine du plan car le déterminant du système est : $\dfrac{3}{16}-\dfrac{3}{16}=0$

c. Il suffit de montrer que $y'-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x'-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=0$ (ce qui est facile à démontrer)

d. En calculant l'expression analytique de $f\circ f$, on déduit que $f\circ f=f$ (détailler les calculs)

2-a. $g(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{8}}{3} \end{cases}$ et on conclut que g n'a pas de points invariants.

b Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M''(X,Y)$ tel que $M''=g(M)=h\circ f(M)$. Alors on peut remarquer facilement que h a pour expression analytique $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases}$

Le determinant de ce système est : $1\times 1=1\neq 0$ donc h est bijective et comme $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y'-2 \end{cases}$ alors la bijection réciproque de h a pour expression analytique : $\begin{cases} x'=x \\ y'=y-2 \end{cases}$

c. $h\circ f=g$ et $f\circ h$: $\begin{cases} X=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{1}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'où $h\circ f\neq f\circ h$

Exercice 2

1. Le determinant du système est : $\dfrac{9}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}\neq 0$ donc f est une application affine bijective.
$$\begin{cases} x'=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{4} \\ y'=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow f^{-1}: \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}x'+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}x'+\dfrac{3}{2}y'-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
2-a. $f(M)=M \Leftrightarrow y=-x+1$. Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D_0) d'équation : $y=-x+1$

b. • En utilisant la même démarche que dans **exercice 1**, question **1-b.**, on déduit que $\overrightarrow{MM'}$ a la même direction que le vecteur $\vec{v}=(1,1)$

• Soit I le symétrique de M par rapport à M'. Alors :
$$\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MM'} \Rightarrow \begin{cases} x_I=2x'-x \\ y_I=2y'-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=(x-y+1)/2 \\ y_I=(-x+y+1)/2 \end{cases}$$
Alors $x_I+y_I=1 \Leftrightarrow y_I=-x_I+1 \Leftrightarrow I\in(D_0)$

c. On peut remarquer que $\overrightarrow{MM'}$ est normal à (D_0) d'après **1-b**. Dans un repère orthonormé, on trace la droite (D_0). Le point M' est alors milieu de $[MH]$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D_0)

d. Soit $M''(x'';y'')$ tel que $f\circ f(M)=M''$. Ainsi :
$$\begin{cases} x''=\dfrac{5}{8}x-\dfrac{3}{8}y+\dfrac{3}{8} \\ y''=-\dfrac{3}{8}x+\dfrac{5}{8}y+\dfrac{3}{8} \end{cases}$$
2-a. On remplace dans (E) x et y par les expressions qui sont en fonction de x' et y' trouvées en **1.**. En développant et en réduisant la nouvelle expression, on trouve :
$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$$
b. On déduit que (E) est alors une ellipse.

Exercice 3

1. f n'a pas de point invariant.

2-a. Facilement $d(M,N)=d(M',N')$

b. f conserve les distances.

Correction des problèmes

Problème 1

A/ 1. $\overrightarrow{OA'}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OB'}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. Donc O, A' et B' ne sont pas alignés $\Rightarrow$ f bijective.

2. Facile à démontrer. (cours)

3. $\Phi(\overrightarrow{OJ})=-\Phi(\overrightarrow{OA})=-\overrightarrow{OA'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OI}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ}$

4. De la même façon : $\Phi(\overrightarrow{OI})=-\overrightarrow{OB'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OI}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$

$\phi(\overrightarrow{OM})=x\phi(\overrightarrow{OI})+y\phi(\overrightarrow{OJ})$ et $\phi(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OM'}$

On déduit : $\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

5. Facile à démontrer en utilisant **4.**

6-a. Le seul point invariant est $A(3;-2)$ (détailler)

b. Le déterminant du système est $1\neq 0$ donc g est bijective
$$\begin{cases} x'-3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2} \\ y'+2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
En exprimant x et y en fonction de x et y' on déduit que :

g^{-1} : $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' + \dfrac{8-3\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' + \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

B/ 1. $r = g$ donc $\Omega(3;-2)$

2. Voir question **6.** partie **A/**

3. Pour $M(x,y)$, on considère $z = x+iy$ l'affixe de M et $z' = x'+iy'$ l'affixe de M'. Alors on a :

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{-4+3\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{-7+2\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(x+iy-3+2i) + 3 - 2i$$
$$= e^{i\pi/6}(z-\omega) + \omega \text{ en posant } \omega = 3-2i$$

On remarque que ω est l'affixe de $A(3,-2)$.

Ainsi $\Omega M = |z-\omega|$ et $\Omega M' = |z'-\omega|$

Or $|z'-\omega| = |e^{i\pi/3}(z-\omega)| = |z-\omega|$. D'où $\Omega M = \Omega M'$

$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = arg\left(\dfrac{z_{M'}-\omega}{z_M-\omega}\right)[2\pi]$

Or $\dfrac{z_{M'}-\omega}{z_M-\omega} = \dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\pi/6}$. D'où $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

4. On a : $z' = e^{i\pi/6}(z-\omega)+\omega$ avec $\omega = 3-2i$

Ainsi pour z'' affixe du point $M'' = r\circ r(M)$;

$z'' = e^{i\pi/6}((e^{i\pi/6}(z-\omega)+\omega)-\omega)+\omega = e^{i\pi/3}(z-\omega)+\omega$

Ainsi $x''+iy'' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy-3+2i)+3-2i$

Ainsi $\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3-2\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{2+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

5. On démontre de même à l'aide de l'expression analytique de $r\circ r$ que $\Omega(3,-2)$ est le seul point invariant par $r\circ r$

On a $z'' = e^{i\pi/3}(z-\omega)+\omega$ donc on déduit comme dans la question **3.** que : $\Omega M = \Omega M''$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}) = \dfrac{\pi}{3}$

Problème 2

A/ 1. O, A et B ne sont pas alignés et on a : $\overrightarrow{O'A'} = (-1;7)$ et $\overrightarrow{O'B'} = (-7;-1)$ donc les points O', A' et B' ne sont pas alignés. On conclut que S est une application affine bijective.

2. On a : $\begin{cases} \phi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'} = -\overrightarrow{OI} + 7\overrightarrow{OJ} \\ \phi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{O'B'} = -7\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} \end{cases}$

Or $\begin{cases} \Phi(\overrightarrow{OA}) = -5\Phi(\overrightarrow{OI}) + 5\phi(\overrightarrow{OJ}) \\ \Phi(\overrightarrow{OB}) = 5\Phi(\overrightarrow{OI}) + 5\phi(\overrightarrow{OJ}) \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} -5\Phi(\overrightarrow{OI}) + 5\phi(\overrightarrow{OJ}) = -\overrightarrow{OA} + 7\overrightarrow{OJ} \\ 5\Phi(\overrightarrow{OI}) + 5\phi(\overrightarrow{OJ}) = -7\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OJ} \end{cases}$

D'où $\Phi(\overrightarrow{OI}) = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OI} - \dfrac{4}{5}\overrightarrow{OJ}$ et $\phi(\overrightarrow{OJ}) = -\dfrac{4}{5}\overrightarrow{OI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{OJ}$

3. $\phi(\overrightarrow{OM}) = x\phi(\overrightarrow{OI}) + y\phi(\overrightarrow{OJ})$

4. $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} = \left(x' - \dfrac{2}{5}\right)\overrightarrow{OI} + \left(y' - \dfrac{1}{5}\right)\overrightarrow{OJ}$

D'après **3.**, on déduit que : $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{2}{5} \\ y' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

5. Soit $M(x,y)$: $S(M) = M \Rightarrow 4x+2y-1 = 0$. D'où l'ensemble des points invariants par S est la droite

$(D) : 4x+2y-1 = 0$

6. S : $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{2}{5} \\ y' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

La composée $S\circ S$ aura pour expression analytique

$\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{2}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' + \dfrac{1}{5} \end{cases}$ et après un calcul simple, on trouve : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$

$S\circ S$ est bien l'identité du plan.

B/ 1. Le déterminant du système est : $-1 \neq 0$ donc S' est une transformation affine.

Soit $M(x,y)$ tel que : $M = S'(M) \Rightarrow 4x-2y+1 = 0$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D') d'équation : $4x-2y+1 = 0$

2. Comme dans **A/ 6.**, on déduit que $S'\circ S'$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$ $S'\circ S'$ est l'identité du plan.

3. S' : $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{2}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$ et S : $\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{2}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Alors $S\circ S'$ a pour expression analytique :

$\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{2}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' + \dfrac{1}{5} \end{cases}$ et après un simple calcul, on trouve que : $\begin{cases} x'' = -\dfrac{7}{25}x - \dfrac{24}{25}y + \dfrac{12}{25} \\ y'' = \dfrac{24}{25}x - \dfrac{7}{25}y + \dfrac{16}{25} \end{cases}$

On justifier facilement que $R(0,1/2)$ est le seul point invariant de $S\circ S'$ (détailler les calculs)

4. $t_{\vec{u}}$: $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+4 \end{cases}$ et S : $\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{2}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Donc $S\circ t_{\vec{u}}$: et S : $\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{2}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' + \dfrac{1}{5} \end{cases}$

D'où et $S\circ t_{\vec{u}}$: $\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{8}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{9}{5} \end{cases}$

5. De la même façon on a : $t_{\vec{u}}\circ S$: $\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{8}{5} \\ y'' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{9}{5} \end{cases}$

Donc $S\circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}\circ S$

6. $g\circ g = t_{\vec{u}}\circ S\circ t_{\vec{u}}\circ S = t_{\vec{u}}\circ S\circ S\circ t_{\vec{u}}$ car $S\circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}\circ S$

Ainsi $g\circ g = t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{u}}$ d'après **A/ 6.**. Puis on démontre facilement que : $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{u}}$: $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = -4 \\ y'-y = 8 \end{cases}$ Ainsi : $\overrightarrow{MM''} = (x'-x; y'-y) = (-4;8)$. Donc $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $(-4,8)$. Soit $N'' = g\circ g(N)$, facilement on a : $d(M,N) = d(M'',N'')$

Correction des exercices

Exercice 1

1. $M' = bar\{(B,\alpha);(M_1,1)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'M_1} = \vec{0}$. Ainsi $(1+\alpha)\overrightarrow{MM'} + \alpha\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{M_1M} = \vec{0}$. Or $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$ car $M_1 = h_{(A,k)}(M) \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = (k-1)\overrightarrow{AM}$

D'où $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$

2. $k = \alpha+1 \Rightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = \alpha(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \alpha\overrightarrow{AB}$

Donc f est la translation de vecteur $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{AB}$

3. Si $k \neq 1+\alpha$ et $M = f(M)$ alors $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Donc $M = bar\{(A,1-k);(B,\alpha)\}$ est le seul point invariant par f. Donc $G = bar\{(A,1-k);(B,\alpha)\}$

4. On a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$. Donc $(\alpha+1)(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}) = (1-k)(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}) + \alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$.

D'où $(\alpha+1)\overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{GM} + (1-k)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB}$

Or $(1-k)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ car $G = bar\{(A,1-k);(B,\alpha)\}$

D'où $(\alpha+1)\overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{GM}$. Donc f est l'homothétie de centre G et de rapport $\dfrac{k}{\alpha+1}$

Exercice 2

1-a. L'expression analytique générale d'une homothétie est : $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

Donc f_a est une homothétie si $a = \dfrac{1}{3}$

b. Pour $a = \dfrac{1}{3}$ alors $f_a : \begin{cases} x' = x/3 - 2/3 \\ y' = y/3 + 2 \end{cases}$. Le seul point invariant par $f_{1/3}$ est $\Omega(-1,3)$. Donc $f_{1/3}$ est une homothétie de centre $\Omega(-1,3)$ et de rapport $k = \dfrac{1}{3}$

2-a. f est une involution si et seulement si $f\circ f$ est l'identité du plan.

$f\circ f : \begin{cases} x' = a^2x + a^2 - 1 \\ y' = (-3a^2+4a-1)x + (1-2a)^2y + 3a^2 - 8a + 5 \end{cases}$

Donc f est une involution si $a = 1$

b. $f_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y + 2 \end{cases}$ $f_1 \circ f_1 = Id_{\mathcal{P}} \Rightarrow f_1$ est une symétrie. De plus l'ensemble des points invariants par f_1 est la droite (D) d'équation : $y = x+1$.

De plus, pour $M' = f(M)$, $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle de $\vec{u} = (0,2)$. On conclut alors que f_1 est la symétrie d'axe (D) d'équation $y = x+1$ parallèlement à la direction $\vec{u} = (0,2)$ (l'axe des ordonnées)

3. Le déterminant de f_a est : $a(1-2a)$. Donc f_a est bijective pour $a \neq 0$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

• Pour $a \neq 0$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$, $f_a(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ car f_a est bijective.

• Pour $a = 0$, $f_0 : \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$ Donc pour $M(x,y)$ de $\mathcal{P}$, $f_a(M) \in$ à la droite d'équation $x = -1$.

D'où $f_a(\mathcal{P}) = (D_0)$ avec $(D_0) : x = -1$

• Pour $a = \dfrac{1}{2}$, $f_{1/2} : \begin{cases} x' = x/2 - 1/2 \\ y' = x/2 + 2 \end{cases} \Rightarrow y' = x' + 5/2$

Alors pour $M(x,y)$, $M' = f(M) \in (D_{1/2})$ avec $(D_{1/2})$ la droite d'équation $y = x + 5/2$

Ainsi $f_{1/2}(\mathcal{P})$ est la droite d'équation $y = x + \dfrac{5}{2}$

4-a. $t : \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 3 \end{cases}$ Écriture complexe : $z' = z + 3i$

t est bien bijective car son déterminant est : $1 \neq 0$ et sa bijection réciproque à pour expression analytique :

$t^{-1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$

b. Supposons $f_0 = g \circ t \Rightarrow g = f_0 \circ t^{-1}$.

$t^{-1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3 \end{cases}$ et $f_0 : \begin{cases} x'' = -1 \\ y'' = -x + y + 2 \end{cases}$

Ainsi $g = f_0 \circ t^{-1} : \begin{cases} x'' = -1 \\ y'' = -x' + y' - 1 \end{cases}$

D'où $g = f_0 \circ t^{-1} : \begin{cases} x'' = -1 \\ y'' = -x + y - 1 \end{cases}$

On vérifie qu'on a bien $t \circ g = f_0$

c. Pour $M(x,y)$, $g(M)$ appartient à la droite d'équation $x = -1$. De plus pour $M(x,y)$ et $M' = g(M)$, $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle de $\vec{u} = (-1,-1)$

Or $g\circ g$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = -1 \\ y'' = -x + y - 1 \end{cases}$

Donc $g \circ g = g$. Par suite g est la projection sur la droite $x = -1$ parallèlement au vecteurs $\vec{u} = (-1,-1)$

Exercice 3

1. Le déterminant de f est nul donc f n'est pas bijective

$M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - 2y + 2 \\ y = -2x + 4y - 1 \end{cases}$ et le seul point invariant est $(1,1)$

2-a. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors :

$z' = -\dfrac{1}{2}\left[(x+y-2) + i(x-y-4)\right]$

Ainsi $z' = -\dfrac{1}{2}(1+i)(x-iy) + 1 + 2i \Rightarrow z' = -\dfrac{1}{2}(1+i)\overline{z} + 1 + 2i$

$M = g(M) \Rightarrow x = -1$ et $y = 5$ donc $\Omega(-1,5)$ (détailler)

b. En utilisant les résultats du cours :

$h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} : \begin{cases} x' = (x - \sqrt{2} + 1)/\sqrt{2} \\ y' = (y + 5(\sqrt{2}-1))/\sqrt{2} \end{cases}$

$h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} : z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}z + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)z_0$ avec $z_0 = -1 + 5i$

Le déterminant de $h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$ est $\dfrac{1}{2} \neq 0$ donc $h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$ est bijective de bijection réciproque $h_{(\Omega,\sqrt{2})} : \begin{cases} x' = \sqrt{2}x + (\sqrt{2}-1) \\ y' = \sqrt{2}y - 5(\sqrt{2}-1) \end{cases}$

c. $g = h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta \Rightarrow S_\Delta = h^{-1}_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ g$ Ainsi :

$$S_\Delta : \begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) - 1 + 2\sqrt{2} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) - (3\sqrt{2} - 5) \end{cases}$$

Donc S_Δ a pour expression complexe :

$z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\overline{z} + 2\sqrt{2} - 1 - i(3\sqrt{2} - 5)$

Ensemble des points invariants par Δ : Soit $M(x,y)$. Un calcul facile montre que si $g(M) = M$ alors $y = -x(1+\sqrt{2}) + 4 - \sqrt{2}$ (détailler)

Donc l'ensemble des points invariants par g est la droite Δ

d'équation $y = -x(1+\sqrt{2}) + 4 - \sqrt{2}$.
On remarque que $\Omega \in \Delta$
On déduit de même facilement que $S_\Delta \circ S_\Delta$ a pour écriture complexe : $z' = z$. Donc $S_\Delta \circ S_\Delta$ est une involution. Donc S_Δ est une symétrie axiale et pour tout point M, $\overrightarrow{MM'}$ a alors la même direction que $\overrightarrow{OO'} = (-1+2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}+5)$.
Le vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = (-1, 1+\sqrt{2})$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OO'} = 0$
D'où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe Δ
3. On a facilement : $S_\Delta \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} = g$ (détailler)
$g \circ g = h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta$ or
$h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$. Ainsi
$g \circ g = h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})}$ or $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_{\mathcal{P}}$
D'où $g \circ g = h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} \circ h_{(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}})} = h_{(\Omega,\frac{1}{2})}$

$g \circ g$ est alors l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = \dfrac{1}{2}$

4. $f : \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x' = -2x + 4y - 4 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases}$
Ainsi $y' = -2x' + 3$. Par suite, pour tout point $M(x,y)$ du plan, $M' = f(M)$ appartient à la droite $D : y = -2x + 3$
5. Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que $M' = p(M)$ alors :
$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ M' \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' + 2y' = -x + 2y \\ y' = -2x' + 3 \end{cases}$
Ainsi p a pour expression analytique :
$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}[x - 2y + 6] \\ y' = \dfrac{1}{5}[-2x + 4y + 3] \end{cases}$ puis on démontre facilement que (D) est globalement invariant par p. Le déterminant de p est 0 donc p n'est pas bijective.
6. L'expression analytique générale d'une homothétie est :
$h : \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$ alors :
$h \circ p : \begin{cases} x' = \dfrac{k}{5}[x - 2y + 6] + (1-k)x_0 \\ y' = \dfrac{k}{5}[-2x + 4y + 3] + (1-k)y_0 \end{cases}$
Comme $h \circ p = f$ alors on déduit que : $k = 5$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$. Ainsi h est l'homothétie de centre $A(1,1)$ et de rapport $k = 5$

Exercice 4

1. $\overrightarrow{O'A'} = (-3,-1)$ et $\overrightarrow{O'B'} = (-1,0)$. On note Φ l'application linéaire associée à g. $\phi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'}$ et $\phi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{O'B'}$
$\begin{cases} \phi(\overrightarrow{OI}) + \phi(\overrightarrow{OJ}) = -3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} \\ 2\phi(\overrightarrow{OI}) + \phi(\overrightarrow{OJ}) = -\overrightarrow{OI} \end{cases}$ Par suite
$\begin{cases} \phi(\overrightarrow{OI}) = 2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} \\ \phi(\overrightarrow{OJ}) = -5\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ} \end{cases}$ $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$
Ainsi $x\phi(\overrightarrow{OI}) + y\phi(\overrightarrow{OJ}) = (x'-2)\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ}$
Ainsi $g : \begin{cases} x' = 2x - 5y + 2 \\ y' = x - 2y \end{cases}$
2. Le déterminant de g est : $1 \neq 0$ donc g est bijective.
3. $h(A') = (1,1) = A$; $h(B') = (2,1) = B$ et $h(O') = (0,0)$
Donc $g^{-1}(A') = h(A)$, $g^{-1}(B') = h(B')$ et $g^{-1}(O) = h(O)$
Comme A', B' et O' ne sont pas alignés, on conclut que h et g^{-1} définissent la même application affine. D'où $h = g^{-1}$
(On pouvait aussi à travers l'expression analytique de g déterminer celle de g^{-1} puis constater que $g^{-1} = h$)

4-a. $(D') : -(2\alpha+\beta)x + (5\alpha+2\beta)y + 2(2\alpha+\beta) + \gamma = 0$
b. Le vecteur directeur de (D) : $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ et le vecteur directeur de (D') : $\overrightarrow{u'} = (-5\alpha - 2\beta, -2\alpha - 2\beta)$ ne sont pas colinéaire. D'où (D) et (D') ne sont pas parallèles.
5-a. La droite (M_1M_2) est l'image de la droite (MM_1) par g. Donc (M_1M_2) et (MM_1) ne sont pas parallèles. De plus ces 2 se coupent en M_1. On conclut que M, M_1 et M_2 ne sont pas alors alignés.
b. $g \circ g : \begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \Rightarrow g \circ g : z' = -z + 6 + 2i$
c. $I(3,1)$ est le seul point invariant de $g \circ g$.
d. $M' = g \circ g(M)$ alors $\overrightarrow{MM'} = (-2x+6, -2y+2)$ et $\overrightarrow{MI} = (3-x, 1-y) \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$ d'où $g \circ g$ est la symétrie centrale de centre $I(3,1)$.
Facilement $g \circ g \circ g \circ g = Id_{\mathcal{P}}$
6-a. $M_2 = g \circ g(M) \Rightarrow \overrightarrow{IM_2} = -\overrightarrow{IM}$. Aussi $\overrightarrow{IM_3} = -\overrightarrow{IM_1}$
Ainsi $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} + \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$. D'où le résultat.
b. g est une application affine donc converge le barycentre.
Ainsi $g(I) = bar\{(g(M),1); (g(M_1),1); (g(M_2),1); (g(M_3),1)\}$
Or $g(M_3) = g \circ g \circ g \circ g(M) = M$ d'après **5-b.**
D'où $g(I) = bar\{(M_1,1); (M_2,1); (M_3,1); (M,1)\}$ et par suite : $\overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{g(I)M_1} + \overrightarrow{g(I)M_2} + \overrightarrow{g(I)M_3} = \vec{0}$
c. D'après **6-a.** et **6-b.**, on déduit que : $g(I) = I$
d. Supposons J tel que : $g(J) = J$ alors $g \circ g(J) = J \Rightarrow J$ est un point invariant de $g \circ g$ et d'après **5-c.**, on conclut que $I = J$. D'où l'unicité de I

Exercice 5

A/ 1. $D = (1,2)$ et $I = (5/2, 7/2)$
2. $r : \begin{cases} x' = -y + 6 \\ y' = x - 2 \end{cases}$ $t : \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$
$(AD) : y = 2 \Rightarrow S_{(AD)} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 4 \end{cases}$
3. $r = S_\Delta \circ S_{(AD)} \Rightarrow S_\Delta = r \circ S_{(AD)}$ car $S_{(AD)}^{-1} = S_{(AD)}$
donc $S_\Delta : \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$ donc $(\Delta) : y = x - 2$
4-a. $t \circ r : \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases} \Rightarrow t \circ r : \begin{cases} x' = -(y-2) + 1 \\ y' = (x-1) + 2 \end{cases}$
b. Donc $t \circ r$ est la rotation de centre $D(1;2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
5. $r(A) = A \Rightarrow t \circ r(A) = C \Rightarrow S \circ t \circ r(A) = C$ car $S(C) = C$
$t \circ r(D) = D \Rightarrow S \circ t \circ r(D) = D'$ avec $D'(1,8)$
6-a. $S : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 10 \end{cases} \Rightarrow S \circ t \circ r : \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 9 \end{cases}$
b. $S \circ t \circ r$ est la rotation de centre B et de d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$
B/ 1. $(D) : x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ et $\vec{u}(\sqrt{3}; 1)$
2. On démontre facilement que $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle de $\vec{n} = (1; -\sqrt{3})$. Or $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (D)
3. Soit I le milieu de $[MM']$: $\begin{cases} x_I = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y + \dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
$x_I - \sqrt{3}y_I = 2 \Rightarrow I \in (D)$
4. $f \circ f = Id_{\mathcal{P}}$ donc c'est une involution. Le déterminant de f est : $-1 \neq 0$ donc f est une bijection.
5. f est la symétrie orthogonale d'axe (D)

Correction des exercices

Exercice 1

1-a. Pour tout point M du plan d'affixe z, $f\circ f(z)=f(z')$ et un calcul simple donne $f\circ f(z)=z$ soit $f\circ f=Id_{\mathcal{P}}$. f est alors une involution . D'où f est soit une symétrie axiale ou une symétrie centrale.

b. On a : $\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ et $arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc f est une similitude indirecte de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$

2. $r:z'=\mathrm{e}^{i\pi/3}z$ et $S:z'=\overline{z}$ et par suite $f=r\circ S$

3. Soit M tel que : $M=f(M)\Rightarrow x+iy=\mathrm{e}^{i\pi/3}(x-iy)$

Et par suite $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. L'ensemble des points invariants est alors la droite d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

4-a. L'écriture complexe de S' est : $z'=a\overline{z}+b$ car c'est une similitude indirecte. Les points $O(0,0)$ et $A(\sqrt{3}/2,1/2)$ sont invariant par S' car appartiennent à la droite : $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

On déduit que $b=0$ et $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $S':z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$ et par suite $f=S'$

b. $S'\circ S:z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ d'où $r=S'\circ S$

5-a. Soit M tel que $M=g(M)$ alors en posant $z=x+iy$, on a : $x+iy=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis on déduit que $x-\sqrt{3}y+1=0$. Donc L'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

b. On peut remarquer facilement que t est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $t:z'=z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c-i. Les droites $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ et $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ sont parallèles d'où $s_0\circ f=s_0\circ S'$ est une translation.

ii. En utilisant même démarche qu'en **4-a.**, on déduit que l'écriture complexe de s_0 est : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

iii. On déduit alors facilement que $t=s_0\circ f$

d. $g=t\circ f=s_0\circ f\circ f=s_0$. Ainsi g est la réflexion d'axe (D') d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

e. Facilement on trouve : $g(A)=A$ (Car $A\in(D')$)

f. Pour construire la droite (D'), il suffit de construire le point A comme point du cercle trigonométrique et d'abscisse $\frac{1}{2}$, puis de construire la parallèle à $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ passant par A.

Exercice 2

1-a. Les points A, O et B étant distincts alors par définition, il existe une unique similitude directe qui transforme A en O et O en B. Soit S cette similitude d'écriture complexe $z'=az+b$. On a alors : puisque $S(A)=O$ et $S(O)=B\Rightarrow b=6$ et $a=2i$. Ainsi l'écriture complexe de S est $z'=2iz+6$

S est la similitude directe de centre K d'affixe $\omega=\frac{6+12i}{5}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Remarque : $S(K)=K$)

b. Les points A, O et B étant distincts, il existe une unique similitude indirecte qui transforme A en O et O en B. Soit S' cette similitude d'écriture complexe $z'=a\overline{z}+b$. On a alors : puisque $S'(A)=O$ et $S(O)=B$ donc $a=-2i$ et $b=6$. Ainsi l'écriture complexe de S' est $z'=-2i\overline{z}+6$.

2. Soit M tel que : $M=g(M)\Rightarrow z=-2i\overline{z}+6$. On pose $z=x+iy$. Alors $x+iy=-2i(x-iy)+6\Rightarrow x=-2$ et $y=4$. D'où l'unique point invariant par f est Ω d'affixe $-2+4i$.

3-a. $g(\Omega)=f\circ h(\Omega)=f(\Omega)=\Omega$. De plus, le rapport de f est $|-2i|=2$, celui de h est $1/2$, donc celui de g est le produit de ces deux rapport, soit 1. Donc g est une isométrie laissant invariant le point Ω.

b. L'écriture complexe de h est : $z'=\frac{1}{2}z-1+2i$ puis on déduit facilement que $g:z''=-i\overline{z}+2+2i$

c. Un point invariant par g vérifie $z=-i\overline{z}+2+2i$. On pose $z=x+iy$ alors $x+iy=-i(x-iy)+2+2i$ soit $y=-x+2$ qui est l'équation d'une droite. Donc $L(0,2)$ est l'unique point de $(O,\vec{v})$ invariant par g. La transformation g est la réflexion d'axe la droite d'équation $y=-x+2$ passant par les points Ω et L, donc g est la réflexion d'axe (ΩL).

d. Comme $g=f\circ h$, alors $f=g\circ h^{-1}$ où h^{-1} désigne l'homothétie réciproque de h. Ainsi, f est la composée d'une homothétie $h'=h^{-1}$ suivie d'une réflexion d'axe (ΩL). Le centre de h' est Ω, et le rapport de h' est l'inverse de celui de h, soit 2.

4. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. L'image d'une droite par une réflexion est une droite, et ces deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont parallèles à l'axe de la réflexion. Donc les droites (D) telles que $f((D))$ et (D) soient parallèles, sont les droites parallèles à (ΩL).

Exercice 3

1. $T:\begin{cases}x'=-3y+2\\y'=-3x+6\end{cases}$

2. Le seul point invariant de T est le pont $A=(2;0)$

3. L'écriture complexe de la symétrie orthogonale S autour de l'axe (xx') est : $z'=\overline{z}$

Soit f telle que : $T=f\circ S\Rightarrow f=T\circ S$ puis on déduit que f a pour écriture complexe : $z'=-3iz+2+6i$. Donc f est donc une similitude directe de centre $A(2;0)$, de rapport $k=3$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

4. Soit h l'homothétie de rapport -3 de centre $A(2;0)$, h^{-1} est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{3}$ et de centre $A(2,0)$. Donc l'écriture complexe de h^{-1} est : $z'=-\frac{1}{3}z+\frac{8}{3}$

Soit S' telle que $T=h\circ S'\Rightarrow S'=h^{-1}\circ T$ puis on déduit facilement que : $S':z'=i\overline{z}+2-2i$.

Les points invariants par S' sont les points de la droite (D) d'équation $y=x-2$, droite passant par A et de coefficient

directeur 1. Pour tous points M et M' avec $M' = S'(M)$, $\overrightarrow{MM'}$ à la même direction que $\vec{u} = (1,-1)$ qui est orthogonal à (D). De plus, on a facilement $S' \circ S' = Id_{\mathcal{P}}$. On conclut alors que S' est la symétrie orthogonale d'axe (D) : $y = x - 2$ et que $T = h \circ S'$

5. Soit Δ une droite, h^{-1} transforme Δ en une droite parallèle. Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement si $h^{-1} \circ T$ transforme Δ en une droite parallèle. or $h^{-1} \circ T = S'$ donc Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement S' transforme Δ en une droite parallèle. S' est une symétrie orthogonale d'axe $(D) : y = x - 2$ donc S' transforme Δ en une droite parallèle si et seulement si Δ est parallèle à $(D) : y = x - 2$

Exercice 4

1-a & b. $f : z' = i\overline{z} + 4 - 2i \Rightarrow f$ antidéplacement

c. f n'admet pas de points invariants.

d. f est une isométrie qui n'admet pas de points invariants, donc f est une symétrie glissée.

2. $f \circ f : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ Donc $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u} = (2,2)$

3-a. $f \circ f = s \circ t \circ s \circ t = t \circ s \circ s \circ t = t \circ t$ car $s \circ s = Id_{\mathcal{P}}$

b. $O' = (4,-2) \Rightarrow K = (2,-1)$

c. D'après **3-a.** et **2.**, on déduit que t est la translation de vecteur $\vec{w} = (1,1) \Rightarrow t : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

$f = s \circ t \Rightarrow s = f \circ t^{-1}$ or $t^{-1} : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

D'où $s : \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 3 \end{cases}$ L'ensemble des points invariants par f est la droite $(\Delta) : y = x - 3$

f est alors la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{w} = (1,1)$ et d'une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x - 3$

4-a. $\begin{cases} x(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 2 \\ y(\theta) = 3\sin(2\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\theta) = 2\cos(2\theta) \\ y(\theta) = 3\sin(2\theta) \end{cases}$

Ainsi $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. (E) est alors une ellipse d'axe focal (oy), d'excentricité $e = \sqrt{5}/3$, de foyers $F(0,\sqrt{5})$ et $F'(0,-\sqrt{5})$, de directrices $(D) : y = 9/\sqrt{5}$ et $(D') : y = -9/\sqrt{5}$, de sommets $S_1(2,0)$; $S_2(-2,0)$; $S_3(0,3)$ et $S_4(0,-3)$

b. $(E') : \dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

c. Faire la construction.

Exercice 5

1-a. Les points O, A et B ne sont pas alignés et admettent une image par g_α. Donc g_α est donc une application affine du plan par définition car une application affine du plan est complètement déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

b. g_α bijective $\Leftrightarrow \overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ non colinéaires.

$\overrightarrow{O'A'} \wedge \overrightarrow{O'B'} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha \neq 4/3$

2-a. $\varphi(\overrightarrow{OI}) = -(3/5 + \alpha/4)\overrightarrow{OI} + (4/5 - \alpha/4)\overrightarrow{OJ}$ et $\varphi(\overrightarrow{OJ}) = (4/5 - \alpha/2)\overrightarrow{OI} + (3/5 - \alpha/2)\overrightarrow{OJ}$

b. $\begin{cases} x' = -(3/5 + \alpha/4)x + (4/5 - \alpha/2)y + 13/5 \\ y' = (4/5 - \alpha/4)x - (-3/5 + \alpha/2)y + 6/5 \end{cases}$

Le déterminant non nul $\Rightarrow \alpha \neq 4/3$

3. On remplace α par $4/3$ dans **2-b.**.

4. Immédiat d'après **2-b.**

5-a. $z' = (-3/5 + 4i/5)\overline{z} + 13/5 + 6i/5$. f est bijective d'après **2-b.** et $|-3/5 + 4i/5| = 1$ donc f est une isométrie.

b. f est un antidéplacement car sous la forme : $z' = a\overline{z} + b$

c. f n'a pas de points invariants donc c'est une symétrie glissée car c'est un antidéplacement sans point invariant.

6-a. $f \circ f : z' = z + 2 + 4i$ par suite $f \circ f : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 4 \end{cases}$

b. $f \circ f$ est donc la translation de vecteur $2\vec{u}$ avec $\vec{u} = (1,2)$

7. $S : z' = (-3/5 + 4i/5)\overline{z} + 8/5 - 4i/5$ et par suite on a : $S : \begin{cases} x' = (-3x + 4y + 8)/5 \\ y' = (4x + 3y - 4)/5 \end{cases}$ et on démontre que S est la réflexion d'axe $y = 2x - 2$ (voir question **4.** exercice **3.**)

8. f est alors la symétrie glissée d'axe $y = 2x - 2$ et de vecteur $\vec{u} = (1,2)$.

Exercice 6

A/ 1-a. s similitude directe $\Leftrightarrow$ écriture complexe de s sous la forme $z' = az + b$. $s(O) = O$ et $s(A_0) = A_1 \Rightarrow b = 0$ et $a = 1/2 + i/2$. Le rapport de s est $|a| = \sqrt{2}/2$ et son angle $arg(a) = \pi/4$. D'où $s : z' = (1/2 + i/2)z$

b. A_2 a pour affixe $z_2 = 2i$

2-a. Par récurrence : $z_n = 4\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = \dfrac{4}{2^{n/2}}\,\mathrm{e}^{in\pi/4}$

Soit $n \equiv 2[4]$ alors $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 2$ et

$z_n = z_{4k+2} = \dfrac{4}{2^{2k+1}}\,\mathrm{e}^{i(2k+1)\pi/2} \in i\mathbb{R}$

D'où pour $n \equiv 2[4]$, A_n est sur l'axe des ordonnées.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Ainsi $l_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right]$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 4\sqrt{2} + 4$

B/ 1. Figure

2-a. L'angle $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}) = -\pi/4$ et $k = JK/JA = \sqrt{2}/2$

b. HIJ est rectangle et isocèle en $H \Rightarrow JH/JI = \sqrt{2}/2$ et $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JH}) = -\pi/4$ d'où $f(I) = H$

3-a. Expression de φ sous forme : $z' = a\overline{z} + b$ donc φ est une similitude indirecte de rapport $|a| = \sqrt{2}/2$ et de centre Ω d'affixe $\dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2} = i = z_C \Rightarrow \Omega = C$

b. $z_I = 1/2$; $z_K = i/2$; $z_J = 1/2 + i/2$ et $z_H = 1/4 + i/4$

c. Soit $\varphi(I) = I' \Rightarrow z_{I'} = 1/4 + i/4 = z_H$ D'où $\varphi(I) = H$

Soit $\varphi(J) = J' \Rightarrow z_{J'} = i/2 = z_K$ D'où $\varphi(J) = K$

d. On a : $f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H = \varphi(I)$ et $f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K = \varphi(J)$ ainsi $f \circ S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident sur deux points distincts I et J donc elles sont identiques.

4-a. $\varphi(C) = C$ et $\varphi(J) = K \Rightarrow \Delta$ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CK})$ (tracer Δ)

b. $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$

$P \in \Delta \Rightarrow \varphi(P) \in \varphi(\Delta) \Rightarrow \varphi(P) \in \Delta$

$P \in (IK) \Rightarrow \varphi(P) = f(P) \in f((IK)) = (HL)$

$\Rightarrow \varphi(P) \in \Delta \cap (IK) \Rightarrow \varphi(P) = Q$

Épreuve 1

Exercice 1

1. L'évènement G est réalisé si et seulement si on a soit 2 boules rouges, soit 2 boules blanches soit 2 boules noires. Donc : $p(G) = g(n,b,r) = \dfrac{C_r^2}{C_9^2} + \dfrac{C_b^2}{C_9^2} + \dfrac{C_n^2}{C_9^2} \Rightarrow g(n,b,r) = \dfrac{C_n^2 + C_r^2 + C_b^2}{C_9^2}$ soit $g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}\left[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)\right]$

2-a. Les points N, B et R ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{RN}$; $\vec{u}$ est non nul et est donc un vecteur normal au plan (NBR).Or $\vec{u} = \overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{RN} = 81\vec{i} + 81\vec{j} + 81\vec{k}$; On déduit que le plan (NBR) a pour équation : $81x + 81y + 81z + d = 0$. (NBR) passe par $N \Rightarrow d = -9 \times 81$.
D'où $(NBR) : x + y + z - 9 = 0$

b. La somme de toutes les boules est $9 \Rightarrow n + b + r - 9 = 0$ donc $M \in (NBR)$

c. Soit $M(n,b,r)$ alors : $OM^2 = n^2 + b^2 + r^2$. On a :
$g(n,b,r) = \dfrac{1}{72}\left[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)\right] = \dfrac{n^2 + b^2 + r^2 - n - b - r}{72} = \dfrac{OM^2 - 9}{72}$

d. Notons (D) la droite passant par $O(0,0,0)$ et normal au plan (NBR). Alors (D) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u} = (1,1,1)$. Donc (D) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. H est alors l'intersection de (D) avec le plan $(NBR) \Rightarrow t + t + t - 9 = 0 \Rightarrow t = 3$ puis on conclut que : $H(3,3,3)$

e. $g(n,b,r)$ est minimale si OM^2 est minimale. OM^2 est minimale si $M = H$ soit $n = b = r = 3$
Dans ce cas, on déduit que $p(G) = g(3,3,3) = \dfrac{1}{4}$ (d'après **1.**)

3-a. $g(n,b,r) = \dfrac{1}{4}$. La variable aléatoire X prend les valeurs -1000 et $k - 1000$. On a : $p(X = -1000) = 3/4$ et $p(X = k - 1000) = 1/4$ donc $E(X) = -1000 \times \dfrac{3}{4} + (k - 1000) \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{k}{4} - 1000$

b. $E(X) = 0 \Rightarrow k = 4000$

Exercice 2

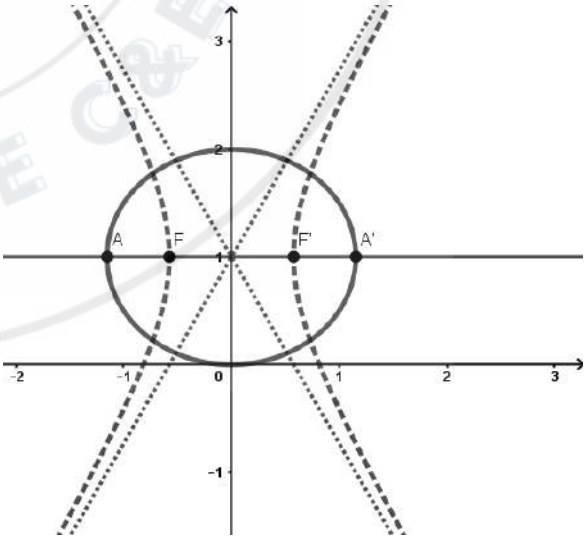
1. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$.
$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 14(x^2 + y^2) + 16i(2iy) = x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy$. D'où $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$

2. $3x^2 + 4y^2 - 8y = 3x^2 + 4(y-1)^2 - 4 \Rightarrow (\mathcal{C}) : \dfrac{3}{4}x^2 + (y-1)^2 = 1$ donc $(\mathcal{C})$ est une ellipse de centre $\Omega(0,1)$, d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$, d'axe focal $y = 1$, de foyers $F'(\sqrt{3}/3, 1)$ et $F(-\sqrt{3}/3, 1)$, de sommets $A(-2\sqrt{3}/3, 1)$; $A'(2\sqrt{3}/3, 1)$; $A_1(0,0)$ et $A_2(0,2)$, de directrices $(D_1) : x = 4\sqrt{3}/3$ et $(D_2) : x = -4\sqrt{3}/3$.

3. Facile à démontrer d'après **2.**

5-a. (H) a pour foyer A et A' ; de sommets F et F' donc l'axe focal de (H) est la droite d'équation $y = 1$.

On déduit que (H) a pour équation de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$. Les sommets de (H) ont pour coordonnées $(a,1)$ et $(-a,1) \Rightarrow a = \sqrt{3}/3$. Les foyers de (H) ont pour coordonnées : $(c,1)$ et $(-c,1)$ avec $c^2 = a^2 + b^2$ on déduit que $c = 2\sqrt{3}/3 \Rightarrow b = 1$. On déduit alors que (H) a pour équation : $3x^2 - (y-1)^2 = 1$



b. Les asymptotes de (H) sont : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y-1}{b} = 0$ et $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y-1}{b} = 0$. Puis on déduit que : $\Delta : y = \sqrt{3}x + 1$ et $\Delta' : y = -\sqrt{3}x + 1$ sont les asymptotes de (H)

L'excentricité de (H) est : $e = \dfrac{c}{a} = 2$ et ses directrices sont : $(D) : x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ et $(D') : x = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Problème

A/ 1. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$. Or $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\ln(1+x) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

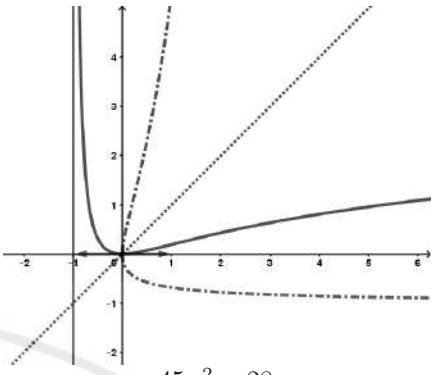
De même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ la droite $x = -1$ est une asymptote verticale de (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow (C_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (Ox).

2. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ de dérivée : $f'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$. Donc f est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



3. Pour $x \in]-1,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ donc f admet un point d'inflexion au point $(1; \ln(2) - 1/2)$

4. Voir la figure

B/ 1. T_α est une transformation affine si son déterminant est non nul c'est-à-dire $\dfrac{-45\alpha^2 - 28\alpha}{49} \neq 0$. Donc T_α est une transformation du plan si $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \neq -28/45$

2-a. T_0 n'est pas bijective d'après **B/ 1.** Soit M tel que $T_0(M) = M \Rightarrow \begin{cases} 5x = 4x - 2y + 5 \\ 5y = -2x + y + 10 \end{cases}$

Donc l'ensemble des points invariants par T_0 est la droite (D) d'équation : $x + 2y - 5 = 0$

b. Un simple calcul montre que $T_0 \circ T_0 = T_0$ (Faire les détails de calculs comme exposés dans le cours)

c. $T_0 : \begin{cases} x' = (4x - 2y + 5)/5 \\ y' = (-2x + y + 10)/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = (-x - 2y + 5)/5 \\ y' - y = (-2x - 4y + 10)/5 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \dfrac{-x - 2y + 5}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})$

Donc $\overrightarrow{MM'}$ a la direction de $\vec{u} = (1,2)$ qui est un vecteur normal à $(D) \Rightarrow (MM')$ est perpendiculaire à (D)

d. On déduit que T_0 a projection orthogonale sur la droite $(D) : x + 2y - 5 = 0$

3-a. $T_{-7/5} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ Donc l'ensemble des points invariants par $T_{-7/5}$ est la droite $(D_0) : y = x$

Facilement on déduit que $T_{-7/5} \circ T_{-7/5} = Id_{\mathcal{P}}$. Donc $T_{-7/5}$ est une involution.

b. Pour $M' = T_{-7/5}(M) \Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ garde la même direction que $(1,-1)$ donc (MM') est perpendiculaire à (D_0)

Donc $T_{-7/5}$ est donc la symétrie orthogonale d'axe $y = x$

c. On déduit d'après **A/ 2.**, f admet une bijection réciproque sur $]-1,0]$ et sur $[0,+\infty[$ car strictement monotone sur ces intervalles. Donc les graphique des réciproque de f sur $]-1,0]$ et sur $[0,+\infty[$ s'obtient en faisant subir à (C_f) une réflexion par rapport à l'axe $y = x$. D'où le résultat.

C/ 1. Une primitive de $g(t) = \ln(1+t)$ est $(1+t)\ln(1+t) - t$.

Donc $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\ \mathrm{d}t = [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^x = (1+x)\ln(1+x) - x$ (on pouvait aussi utiliser intégration par parties)

$f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \ln(1+x) - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ Alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \ln(1+t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t$

D'où $F(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x$

2. $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t = F(1/n) - F(0) = \frac{(2n+1)[\ln(1+n) - \ln(n)] - 2}{n}$

3-a. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x$ et de premier terme $1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

b. En intégrant l'égalité de **C/ 3-a.** entre 0 et x, on déduit que : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$

c. En utilisant **C/ 3-a.** on a : $-\dfrac{x}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{1+x}$ et $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$

D'où $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$

d. Pour $t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1} \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{n+1}\ \mathrm{d}t$. D'où $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$

e. D'après **C/ 3-d.**, on conclut que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = 0$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+2}}{x+1} = 0$ car $x \in]0,1[$

D'après **C/ 3-c.**, on conclut que : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k$

Épreuve 2

Exercice 1

1. Pour $x \in [0,1]$ et $t \in [0,x]$, $0 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x$ puis que : $\dfrac{1}{1+2x} \leq \dfrac{1}{1+2t} \leq 1$

2-a. $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+2t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\ln(1+2x)}{2}\right)$. D'où $\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} = F(x)$

b. D'après **1.** on déduit : $\dfrac{t}{1+2x} \leq \dfrac{t}{1+2t} \leq t$ puis en intégrant entre 0 et x on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2x}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x t\,\mathrm{d}t$

Et par suite $\dfrac{x^2}{2(1+2x)} \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t \leq 1$. D'où $\dfrac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2x+1} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 1 = F(0)$ d'après le théorème des gendarmes. Donc F est continue en 0

3. Par intégration par parties on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t^2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

4-a. $\forall\, x \in]0,1]$, d'après **3.**, $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

Donc $F(x) = \dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$ d'après **2-a.** F étant dérivable sur $]0,1]$, on a :

$F'(x) = \dfrac{-2}{(1+2x)^2} - \dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2 \Rightarrow F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$

b. $\forall\, x \in]0,1]$ et $\forall\, t \in [0,x]$; $\dfrac{t^2}{(1+2x)^2} \leq \dfrac{t^2}{(1+2t)^2} \leq t^2$ puis on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+2x)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t^2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ et par suite $\dfrac{x^3}{3(1+2x)^2} \leq \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^3}{3}$. D'où $-\dfrac{4}{3} \leq F'(x) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

c. Pour $x \in]0,1]$, F est continue sur $[0,x]$ donc dérivable sur $]0,x[$ et d'après le théorème d'accroissement fini,

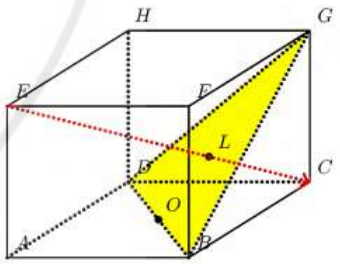
$\exists\, c_x \in]0,x[$ tel que $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c_x)$. Or $-\dfrac{4}{3} \leq F'(c_x) \leq \dfrac{-4}{3(1+2c_x)^2}$ d'après **4-b.** et $\dfrac{-4}{3(1+2c_x)^2} \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

Donc $-\dfrac{4}{3} \leq \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = -\dfrac{4}{3}$ d'après **4-c.** et le théorème des gendarmes. Donc F est dérivable à droite en 0 de dérivée $-\dfrac{4}{3}$

Exercice 2

1. Voir figure ci-contre



2. $A(0,0,0)$; $B(1,0,0)$; $C(1,1,0)$; $D(0,1,0)$; $E(0,0,1)$, $F(1,1,0)$; $G(1,1,1)$ et $H(1,0,1)$

a. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = (1,1,0)$

Donc $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$ a pour coordonnée $(1,1,-1)$

b. Le plan (BGD) est le plan passant par B et perpendiculaire à $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$

Ainsi (BGD) a pour équation de la forme : $x+y-z+d=0$. Or $B \in (BGD)$ alors $d=-1$

D'où (BGD) a pour équation : $x+y-z-1=0$

c. $\overrightarrow{EC} = (1,1,-1) = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$ donc la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD)

3-a. $\overrightarrow{AM} = (\alpha,\alpha,1-\alpha) = (1-\alpha)\overrightarrow{AE} + \alpha\overrightarrow{AC} \Rightarrow (1-\alpha)\overrightarrow{ME} + \alpha\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M = bar\{(E,1-\alpha);(C,\alpha)\}$ donc M, E et C sont alignés et $\overrightarrow{EM} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{MC}$ or pour $0<\alpha<1$, $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow M \in [EC]$. Pour $\alpha = 0$, $M = E$ et pour $\alpha = 1$, $M = C$. D'où pour tout $\alpha \in [0,1]$, M est un point du segment $[EC]$.

b. Les points E et C appartiennent au plan médiateur du segment $[BD]$ donc ce plan contient la droite (EC) et donc contient $M \Rightarrow MBD$ est un triangle isocèle $M \Rightarrow d(\alpha) = MO$ où O est le milieu de $[BD]$ avec $O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$

Donc $d(\alpha) = OM = \sqrt{(\alpha-\frac{1}{2})^2 + (\alpha-\frac{1}{2})^2 + (1-\alpha)^2} = \sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$

c. On pose $f(x) = 3x^2 - 4x + \dfrac{3}{2}$ sur $[0,1]$. f est dérivable de dérivée $f'(x) = 6x-4$. Donc f est décroissante sur $[0,2/3]$ et croissante sur $[2/3,1]$. On déduit que f est minimale pour $x = \dfrac{2}{3}$. Donc $d(\alpha)$ est minimale pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$ et $d(2/3) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c. $\alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow O\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Le centre de gravité de BGD a pour coordonnées

$\frac{1}{3}(x_B+x_G+x_D; y_B+y_G+y_D; z_B+z_G+z_D)=\frac{1}{3}(2,2,1)$ qui sont les coordonnées de L

4-a. Soient $P(x,y,z)$ et $P'(x',y',z')$ tels que $P'=h(P)\Rightarrow \overrightarrow{EP'}=\alpha\overrightarrow{EP}\Rightarrow \begin{cases} x'=\alpha x \\ y'=\alpha y \\ z'=\alpha z+1-\alpha \end{cases}$

b. Posons $C'=h(C)$ alors $C'(\alpha,\alpha,1-\alpha)\Rightarrow C'=M$

5. $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$; $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$ et $\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=(0,0,1)\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}=1$. D'où $\mathcal{V}=1$

Problème

A/ 1-a. Un simple calcul donne $P(i-1)=0$ donc il existe a, b et $c\in\mathbb{Z}$ tels que $P(z)=(z+1-i)(az^2+bz+c)$ et par identification, on déduit que $a=1$; $b=-3-i(2+\sqrt{2})$ et $c=3i\sqrt{2}-2\sqrt{2}\Rightarrow Q(z)=z^2+\left[-3-i(2+\sqrt{2})\right]z+3i\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

b. $d=3+4\sqrt{2}+(12-6\sqrt{2})i$

c.Les racines de Q : $\Delta=3+4\sqrt{2}+(12-6\sqrt{2})i=\left[3+(2-\sqrt{2})i\right]^2\Rightarrow$ les racines de Q sont : $z_1=3+2i$ et $z_2=i\sqrt{2}$

Donc les racines de P sont : $z_1=3+2i$; $z_2=i\sqrt{2}$ et $z_3=-1+i$

2-a. f est sous la forme : $z'=a\overline{z}+b$ avec $|a|=1$ donc f est un antidéplacement.

b. $Z_{A'}=-1+i\Rightarrow A'=A$; $Z_{C'}=i\sqrt{2}\Rightarrow C'=C$

c. f est une isométrie différente de l'identité laissant invariant deux points distincts du plan A et C donc elle est une réflexion d'axe (AC)

B/ 3-a. L'écriture complexe générale d'une homothétie est : $z'=kz+(1-k)z_0$ avec k le rapport et z_0 l'affixe du centre

On déduit alors que h a pour écriture complexe : $z'=\sqrt{2}z+(1-\sqrt{2})(-1+i)$

b. Directement on a $f\circ h$: $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{\sqrt{2}z+(1-\sqrt{2})(-1+i)}-1+i(1+\sqrt{2})=(1+i)\overline{z}+3i-1$

4-a. D'après **3-a.**, on déduit que l'écriture analytique de g est $\begin{cases} x'=x+y-1 \\ y'=x-y+3 \end{cases}$ et par conséquent :

$N=g(M)\Rightarrow N(x+y-1;x-y+3)$. Dans ce $\overrightarrow{AB}=(4;1)$ et $\overrightarrow{BN}=(x+y-4;x-y+1)$ alors

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN}=4(x+y-4)+x-y+1=5x+3y-15$ or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN}=0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $5x+3y=15$

b. Notons (E) : $5x+3y=15$. $pgcd(5;3)=1$ divise 15 donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

$-5+3\times2=1\Rightarrow5\times(-15)+3\times(30)=15$ donc $(x_0,y_0)=(-15;30)$ est une solution particulière de l'équation (E).

Soit (x,y) une solution de (E). (x,y) solution de $(E)\Leftrightarrow 5x+3y=15$ or $5x_0+3y_0=15$. On conclut alors que

(x,y) solution de $(E)\Leftrightarrow 5x+3y=5x_0+3y_0$ ou encore $5(x-x_0)=3(y_0-y)\Rightarrow 3$ divise $5(x-x_0)$ or 3 et 5 sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x-x_0\Leftrightarrow$ qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-x_0=3k$ ou encore $x=x_0+3k$

Comme $5x+3y=15$ alors $5(x_0+3k)+3y=15\Rightarrow y=30-5k=y_0-5k$

Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le couple $(x;y)=(-15+3k;30-5k)$ est bien une solution de (E)

Donc les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(x;y)=(-15+3k;30-5k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

c. $-5\le x\le5\Rightarrow-5\le-15+3k\le5\Rightarrow3\le k\le6$. De même $-5\le y\le5\Rightarrow-5\le30-5k\le5\Rightarrow5\le k\le7$

Donc $x\in[-5;5]$ et $y\in[-5;5]\Rightarrow5\le k\le6$ soit $k\in\{5;6\}$. Donc les points cherchés sont $(0,5)$ et $(3;0)$

5-a. En posant $z'=x'+iy'$ et $z=x+iy$, on déduit facilement que l'écriture complexe de φ est : $z'=i\overline{z}-1+2i$ donc φ un antidéplacement donc une isométrie du plan. On remarque que φ n'a pas de points invariants $\Rightarrow\varphi$ est une isométrie n'ayant pas de points invariants donc c'est une symétrie glissée.

$\varphi\circ\varphi:\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+1 \end{cases}\Rightarrow\varphi\circ\varphi=t_{2\vec{u}}$ avec $\vec{u}=(1/2;1/2)$. $t_{\vec{u}}:\begin{cases} x'=x+1/2 \\ y'=y+1/2 \end{cases}$ et $t_{\vec{u}}^{-1}=t_{-\vec{u}}:\begin{cases} x'=x-1/2 \\ y'=y-1/2 \end{cases}$

Puis $\varphi\circ t_{\vec{u}}^{-1}:\begin{cases} x'=y-3/2 \\ y'=x+3/2 \end{cases}$ qui a pour ensemble des points invariants la droite $(D_0):y=x+3/2$

Donc φ est une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}=(1/2;1/2)$ et d'axe la droite $y=x+3/2$ (on vérifie que le vecteur $\vec{u}$ est bien un vecteur directeur de (D_0))

b. Facilement on a : $r=g\circ\varphi$: $z'=(1+i)(\overline{iz-1+2i})+3i-1=(1-i)z$

c. $z'=(1-i)z\Rightarrow x'+iy'=(1-i)(x+iy)=x+y+i(-x+y)\Rightarrow r$ a pour expressions analytique : $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-x+y \end{cases}$

et par conséquent on tire $\begin{cases} x=(x'-y')/2 \\ y=(x'+y')/2 \end{cases}$ (*) puis en remplaçant dans l'équation de (Γ) x et y par leurs expressions

en fonction de x' et y' et en développant puis en réduisant, on déduit que (Γ') a pour équation $x^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$.

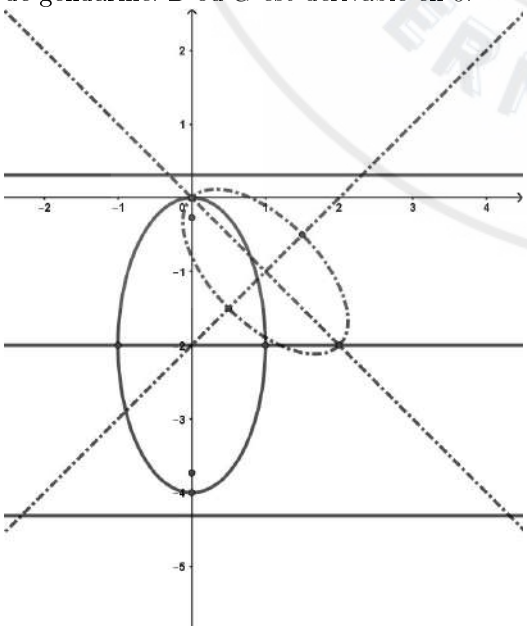
Donc (Γ') est une ellipse de centre $\Omega(0,-2)$, d'axe focal $x=0$, d'excentricité $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers $F(0,-2-\sqrt{3})$ et

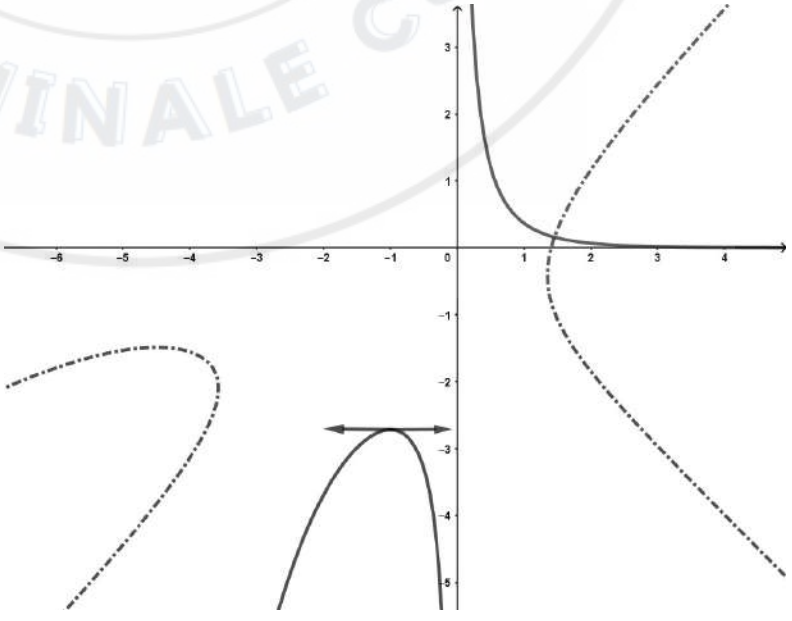
$F'(0,-2+\sqrt{3})$; de directrices $(D):y=-\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$ et $(D'):y=-\frac{6-4\sqrt{3}}{3}$; de sommets $S_1(-1,-2)$; $S_2(1,-2)$; $S_3(0,-4)$

et $S_4(0,0)$.
d. On note r^{-1} la réciproque de r. Son écriture analytique est donnée par le système (*) de la question précédente.
r est une transformation du plan alors on déduit que (Γ) est une ellipse d'axe $y=-x$ (c'est l'image de la droite $x=0$ par r^{-1}), d'excentricité $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers $F_0=r^{-1}(F)=((2+\sqrt{3})/2;-(2+\sqrt{3})/2)$ et $F_0'=r^{-1}(F')=((2-\sqrt{3})/2;-(2-\sqrt{3})/2)$; de centre $\Omega_0=r^{-1}(\Omega)=(1,-1)$ et de sommets $S_1'=r^{-1}(S_1)=(1/2,-3/2)$; $S_2'=r^{-1}(S_2)=(3/2,-1/2)$; $S_3'=r^{-1}(S_3)=(2,2)$ et $S_4'=r^{-1}(S_4)=(0,0)$
Voir la figure 1 pour la représentation graphique

C/ 6-a. γ est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ de dérivée $\gamma'(x)=-\dfrac{x+1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$ donc γ est croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$
b. r a pour écriture complexe $z'=(1-i)z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}\,z$. On pose r_1 la rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et h_1 l'homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $\sqrt{2}$. On a bien $r=r_1\circ h_1=h_1\circ r_1$ (forme réduite d'une similitude directe). On déduit que $(C_{\gamma'})$ est obtenue en faisant subir à (C_γ) une rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ puis une homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $\sqrt{2}$

7-a. Pour $x>0$ et $\forall t\in[x,2x]$; $-2x\leq -t\leq -x\Rightarrow \mathrm{e}^{-2x}\leq \mathrm{e}^{-t}<\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{t}\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{t}$ puis en intégrant on a : $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{e}^{-2x}\ln(2)\leq G(x)<\mathrm{e}^{-x}\ln(2)$ car $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=[\ln(t)]_x^{2x}=\ln(2x)-\ln(x)=\ln 2$
Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-2x}\ln 2=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}\ln 2=\ln 2$ alors d'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{x\to0^+}G(x)=\ln(2)=G(0)$
D'où G est continue 0
b. $\gamma(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc elle a une primitive sur cet intervalle qu'on note $\Gamma(t)$ alors $G(x)=\Gamma(2x)-\Gamma(x)$
Comme Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors G est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $G'(x)=2\Gamma'(2x)-\Gamma'(x)$ or $\Gamma'(x)=\gamma(x)$ alors $G'(x)=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{2x}-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}$
c. Soit $h(x)=\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;t]$ avec $t>0$. h est continue sur $[0,t]$ et dérivable sur $]0,t[$ donc d'après le théorème d'accroissement fini, $\exists\, c\in]0;t[\,;\ \dfrac{h(t)-h(0)}{t-0}=h'(c)\Rightarrow\exists\, c\in]0;t[\,;\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}=-\mathrm{e}^{-c}$. Puisque $0<c<t$ alors $-1\leq-\mathrm{e}^{-c}\leq-\mathrm{e}^{-t}$
D'où $\forall t>0\,;\ -1\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\leq-\mathrm{e}^{-t}$. Puis en intégrant on a : $\displaystyle\int_x^{2x}-1\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{2x}-\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
Or $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=G(x)-\ln 2$ et par suite $-x\leq G(x)-\ln(2)\leq\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$. Ensuite on divise par $x>0$ on a : $-1\leq\dfrac{G(x)-\ln(2)}{x}\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}$
d. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-1$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{G(x)-G(0)}{x-0}=-1$ d'après **7-c.** et en utilisant le théorème de gendarme. D'où G est dérivable en 0.





Épreuve 3

Exercice 1

1-a. (E_h) est une équation de premier ordre sans second membre $\Rightarrow$ les solutions de (E_h) : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

b. f solution de $(E) \Leftrightarrow f' + f = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x)}{2+\sin(x)} \Leftrightarrow (-\mathrm{e}^{-x}\,g(x) + g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}) + g(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x)}{2+\sin(x)} \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}$

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $2+\sin(x) > 0$ d'où $\ln(2+\sin x)$ existe. $g'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)} \Rightarrow g(x) = \ln(2+\sin x) + C_1$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$

Comme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,g(x)$ alors les solutions de (E) sont sous la forme : $x \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(2+\sin x)$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$

La solution de (E) qui s'annule en 0 est la fonction : $x \mapsto -\ln(2)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln(2+\sin x)$

2-a. Pour $t \in \mathbb{R}$; $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$ donc $M(t) = M(t+2\pi)$ (les deux points sont confondus)

Pour $t \in \mathbb{R}$; $x(-t+\pi/2) = \ln(2+\sin(-t+\pi/2)) = \ln(2+\cos(t)) = y(t)$. De même $y(-t+\pi/2) = x(t)$

$M(-t+\pi/2)$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$ (première bissectrice)

b. • La symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice (S) a pour expression analytique S : $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

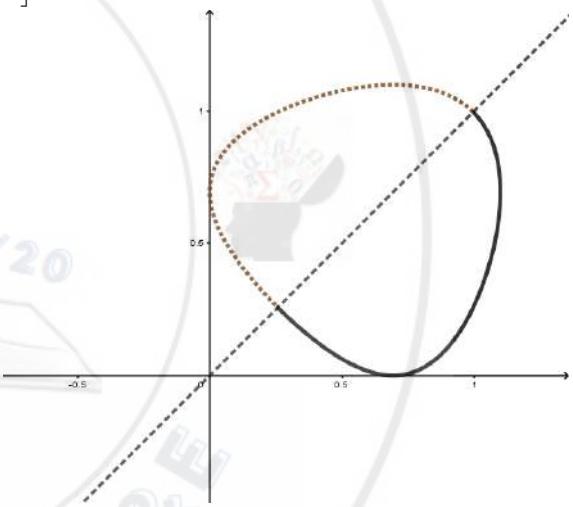
Soit $M(x,y)$ un point de (Γ) et $M'(X,Y) = S(M)$ alors $\begin{cases} X(t) = y(t) \\ Y(t) = x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t) = \ln(2+\cos(t)) = x(-t+\pi/2) \\ Y(t) = \ln(2+\sin(t)) = y(-t+\pi/2) \end{cases}$

Donc $M'(X,Y)$ appartient à $(\Gamma) \Rightarrow (S)$ conserve (Γ).

• D'après **2-a.**, on déduit que (Γ) est $2\pi-$ périodique $\Rightarrow (\Gamma)$ peut être étudiée sur un intervalle de longueur 2π. De plus $M(-t+\pi/2)$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$ donc on réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur π. Par suite il suffit d'étudier x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}+\pi\right]$

c. Pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$, $x'(t) = \dfrac{\cos(t)}{2+\sin(t)} \Rightarrow x(t)$ est croisant sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissant de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.De même $y'(t) = -\dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)} \Rightarrow y(t)$ est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$ et croissante sur $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right]$

t	$\pi/4$		$\pi/2$		π		$4\pi/5$
$x'(t)$		$+$	0		$-$		
$x(t)$	0.996	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0.257
$y(t)$	0.996	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.257
$y'(t)$			$-$		0	$+$	



Exercice 2

1-a. • Supposons qu'il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $au+bv = 1$. Le $pgcd(a,b)$ divise a et divise b donc divise $au+bv \Rightarrow pgcd(a,b)$ divise $1 \Rightarrow pgcd(a,b) = 1$ donc a et b sont premiers entre eux.

• Si a et b sont premiers entre eux alors $pgcd(a,b) = 1$ et d'après l'égalité de Bézout, il $\exists\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au+bv = 1$.

b. $(a^2+ab-b^2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2 = 1 \text{ ou} \\ -a^2-ab+b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a+b)+(-b)b = 1 \text{ ou} \\ a(-a-b)+b(b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} au+bv = 1 \text{ avec } u = a+b \text{ et } v = -b \\ au+bv = 1 \text{ avec } u = -(a+b) \text{ et } v = b \end{cases}$

Ainsi $\exists\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv = 1 \Rightarrow a$ et b sont premiers entre eux.

2-a. Vérifications simples à faire

b. Si a et b sont solution de (E) alors a et $b \in \mathbb{N}^*$. De plus si $a < b$ alors $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0$

3-a. Soit $(x,y) \neq (1,1)$ solution de (E) alors $\left(x^2+xy-y^2\right)^2 = 1$ et $\exists\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $ux+vy = 1$ (d'après **1-b.**)

• $v(y-x)+(u+v)x = ux+vy = 1$ donc $y-x$ et x sont premiers entre eux et on a :

$\left((y-x)^2+x(y-x)-x^2\right)^2 = \left(y^2-xy-x^2\right)^2 = \left(x^2+xy-y^2\right)^2 = 1 \Rightarrow (y-x,x)$ solution de (E)

• $(v-u)y+u(y+x) = ux+vy = 1$ donc $y+x$ et y sont premiers entre eux et on a :

$\left(y^2+y(y+x)-(y+x)^2\right)^2 = \left(y^2-xy-x^2\right)^2 = \left(x^2+xy-y^2\right)^2 = 1 \Rightarrow (y,y+x)$ solution de (E)

b. En utilisant **2-a.** et **3-a.** on conclut que : $(1,2)$; $(3,5)$ et $(8,13)$ sont solutions de (E)

c. Le couple $(p,q) = (3,5)$ est solution de (E) (couple pour lequel $p < q$)

4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$ et en utilisant le tableau de congruence (voir exercices cours **chapitre 3**) on déduit que :

Les solutions de $\dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2}$ sont : $S_1 = \{(\overline{0},\overline{1});(\overline{1},\overline{0});(\overline{0},\overline{4});(\overline{4},\overline{0});(\overline{3},\overline{1});(\overline{1},\overline{3});(\overline{2},\overline{2});(\overline{2},\overline{5});(\overline{5},\overline{2});(\overline{3},\overline{4}),(\overline{4},\overline{3});(\overline{5},\overline{5})\}$

Les solutions de $x + \dot{5}y = \dot{2}$ sont : $S_2 = \{(\overline{0},\overline{4});(\overline{1},\overline{5});(\overline{2},\overline{0});(\overline{3},\overline{1});(\overline{4},\overline{2}),(\overline{5},\overline{3})\}$

Ainsi les solutions du système proposé est : $S = \{(\overline{0},\overline{4});(\overline{3},\overline{1})\}$

5-a. Si l'élève réponds avec n réponses juste alors sa note pour les réponses justes est de : $2n$ et dans ce cas $10-n$ est le nombre des réponses fausses ou non répondues donc la note globale est alors $2n-2(10-n)=4n-20$.

b-i. $X(\Omega)=\{0,4,8,12,16,20\}$

ii. $p(X=12)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

iii. $p(X\geq 12)=p(X=12)+p(X=16)+p(X=20)=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(C_5^3+C_5^4+C_5^5\right)=\frac{1}{2}$

Problème

I/ 1-a. Pour $t\in\,]-n,+\infty[$, $1+t/n>0$ donc ψ est bien définie sur $]-n,+\infty[$ puis ψ est dérivable sur $]-n,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivable sur cet intervalle de dérivée : $\psi'(t)=-\dfrac{t}{n(n+t)}$

b. $\psi(0)=0$. ψ est croissante sur $]-n,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{t\to-n}\psi(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=-\infty$

(Faire le tableau des variations)

c. D'après **1-b.**, $\forall\, t\in\,]-n;+\infty[$, $\psi(t)\leq\psi(0)\Rightarrow\ln\left(1+\dfrac{t}{n}\right)\leq\dfrac{t}{n}$

2-a. Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists\, n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]-n,+\infty[$ tel que : $x=1+t/n\Rightarrow t/n=x-1$ et d'après **1-c.**, $\ln(x)\leq x-1$

b. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{k}-1\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2k}-x\right]_{k-1/2}^{k+1/2}=1-1=0$. En utilisant **2-a.**, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$\ln\left(\dfrac{x}{k}\right)\leq\dfrac{x}{k}-1\Rightarrow\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{x}{k}\right)\,\mathrm{d}x\leq\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{k}-1\right)\,\mathrm{d}x=0$. D'où $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{x}{k}\right)\,\mathrm{d}x\leq 0$

c. D'après **2-b.**, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{x}{k}\right)\,\mathrm{d}x\leq 0\Rightarrow\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left[\ln(x)-\ln(k)\right]\,\mathrm{d}x\leq 0\Rightarrow\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(k)\,\mathrm{d}x=\ln(k)$

d. La relation de Chasles donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leq\ln(k)\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leq\ln\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)$. D'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x\leq\ln(n!)$

3-a. En utilisant une intégration par parties, on déduit que : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-n+\frac{1}{2}\ln 2$

D'après **2-d.**, $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)-n+\dfrac{1}{2}\ln 2\leq\ln(n!)\Rightarrow n-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)+\ln(n!)\geq\ln(\sqrt{2})\quad\left(\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln(\sqrt{2})\right)$

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $t_n\geq n-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(n+\dfrac{1}{2}\right)+\ln(n!)\geq\ln(\sqrt{2})$. D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $t_n\geq\ln(\sqrt{2})$

II/ 4-a. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0,1-x\neq 0,\dfrac{1+x}{1-x}>0\right\}\Rightarrow D_f=\,]-1,1[\backslash\{0\}$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right]$

D'où $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ et par suite f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0)=1$.

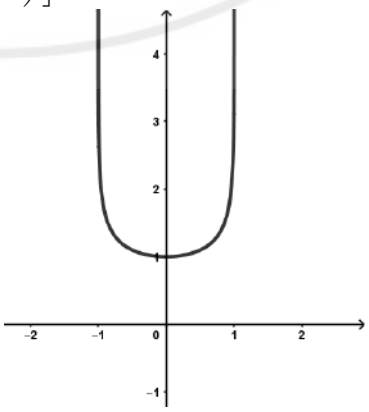
b. f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur ces intervalles.

- **Dérivabilité en 0** : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x^2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\dfrac{1}{x}=0$ donc f est dérivable sur $]-1,1[$
- **Dérivée :** $\forall\, x\in\,]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2x}\left[\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]$. Ainsi $f'(x)\leq 0$ sur $]-1,0]$ et $f'(x)\geq 0$ sur $]0,1[$

- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c. D'après **4-b.**, pour $x\in\,]0,1[$, $f(x)\geq 1$



5. $t_{n+1}-t_n = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. D'où $t_{n+1}-t_n = 1-f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

6-a. D'après **4-c.** on déduit que $1-f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\leq 0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Donc la suite (t_n) est décroissante.

b. La suite (t_n) étant décroissante et minorée alors elle est convergente.

III/ 7-a. • $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin t-1)\,\mathrm{d}t \leq 0$ car pour $t\in[0;\pi/2]$, $\sin t\geq 0$ et $\sin t-1\leq 0 \Rightarrow t\mapsto \sin(t)(\sin t-1)\leq 0$. D'où (w_n) est décroissante.

• Pour $t\in[0;\pi/2]$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto \sin^n(t)$ est positive. Ainsi w_n est positive pour tout n.

• (w_n) est à termes non nuls. En effet soit $n\in\mathbb{N}$ et par absurde, supposons que $w_n=0$. Comme la fonction $t\mapsto \sin^n(t)$ est continue et positive sur $[0,\pi/2]$, on en déduit que la fonction $t\mapsto \sin^n(t)$ est nulle sur $[0,\pi/2]$ ce qui est absurde. Ainsi $w_n\neq 0$

b. Soit $n\in\mathbb{N}$ par intégration par parties on a :

$w_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times\sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\cos t\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\times(-\cos(t)\sin^n(t))\,\mathrm{d}t$

Ainsi $w_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\times(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t = (n+1)w_n-(n+1)w_{n+2}$. D'où $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$

Pour $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$ d'après **7-a.**. De plus $\frac{w_{n+2}}{w_n}\leq\frac{w_{n+1}}{w_n}\leq 1$ car (w_n) est décroissante. Ainsi $\frac{n+1}{n+2} = \frac{w_{n+2}}{w_n}\leq\frac{w_{n+1}}{w_n}\leq 1$

D'où $\frac{n+1}{n+2}\leq\frac{w_{n+1}}{w_n}\leq 1$

c. D'après **7-b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n}=1$ (Théorème des gendarmes)

8. Cette question peut être démontrée de deux manières :

Première méthode : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, notons $J_n = (n+1)w_{n+1}\times w_n$ alors on :

$J_{n+1}-J_n = (n+2)w_{n+2}\times w_{n+1}-(n+1)w_{n+1}\times w_n = (n+1)w_{n+1}\times w_n-(n+1)w_{n+1}\times w_n = 0$ (en utilisant **7-b.**)

Donc $((n+1)w_{n+1}\times w_n)$ est constante. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $J_n = J_0 = w_1w_0 = \frac{\pi}{2}$

Deuxième méthode : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n \\ w_{n+3} = \frac{n+2}{n+3}w_{n+1}\end{cases}$ en multipliant membre à membre, on a :

$w_{n+2}w_{n+3} = \frac{n+1}{n+2}\frac{n+2}{n+3}w_nw_{n+1} \Rightarrow (n+3)w_{n+2}w_{n+3} = (n+1)w_nw_{n+1}$ puis on a :

$\begin{cases} (2n+1)w_{2n}w_{2n+1} = (2n-1)w_{2n-2}w_{2n-1} = \cdots = w_0w_1 = \frac{\pi}{2} \\ (2n)w_{2n}w_{2n-1} = (2n-2)w_{2n-2}w_{2n-3} = \cdots = 2w_1w_2 = \frac{\pi}{2}\end{cases}$ D'où $\forall\, n\geq 0$, $(n+1)w_nw_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)w_{n+1}w_n = \frac{\pi}{2}$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

10. • Relation de récurrence w_{2p} pour $p\in\mathbb{N}$. D'après **7-b.** on a :

$w_{2p} = \frac{2p-1}{2p}w_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}w_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\frac{2p-5}{2p-4}\cdots\frac{1}{2}w_0$

Ainsi $w_{2p} = \dfrac{[(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]}{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}$

et de même :

$w_{2p+1} = \dfrac{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2}{[(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 3]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]}\times w_1 = \frac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}$

• $\mathrm{e}^{t_n} = \exp\left[n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+\ln(n!)\right] = \exp(\ln(n!))\times\mathrm{e}^n\times\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)\right] = n!\times e^n\times\left(\frac{1}{n}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{t_n} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{n}}$

• $\mathrm{e}^{t_{2n}-2t_n} = (2n)!\left(\frac{e}{2n}\right)^{2n}\times\frac{1}{\sqrt{2n}}\times\left[\frac{1}{n!}\times\left(\frac{n}{e}\right)^n\times\sqrt{n}\right]^2 = \sqrt{\frac{n}{2}}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}\times\frac{1}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}\right]^2}$

Or $w_{2n}^2 = \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}\right]^2$ ainsi $\mathrm{e}^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{nw_{2n}^2}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_{2n}^2 = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(2nw_{2n}^2) = \frac{\pi}{4}$ d'après **9.** $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{t_{2n}-2t_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n}$

Ainsi $\mathrm{e}^{-l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (car la fonction exponentielle est continue) d'où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$

Épreuve 4

Exercice 1

1. O, A et B ne sont pas alignés et on a : $\overrightarrow{O'A'} = (2\sqrt{2};0)$ et $\overrightarrow{O'B'} = (0;2\sqrt{2})$ donc O', A' et B' ne sont pas alignés par suite f est une application affine et bijective du plan dans lui-même.

2-a. On a : $\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'} \\ \varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{O'B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\varphi(\vec{v}) = 2\sqrt{2}\vec{u} \\ 2\varphi(\vec{u}) = 2\sqrt{2}\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(\vec{u}) = \sqrt{2}\vec{v} \\ \varphi(\vec{v}) = \sqrt{2}\vec{u} \end{cases}$

b. Pour $M'(x',y') = f(M)$. $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} \Rightarrow x\varphi(\vec{u}) + y\varphi(\vec{v}) = (x'+2)\vec{u} + (y'-2\sqrt{2})\vec{v}$

Par suite : $\begin{cases} x' = \sqrt{2}y - 2 \\ y' = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \end{cases}$

Notons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors $z' = i\sqrt{2}(x - iy) - 2 + 2i\sqrt{2} \Rightarrow z' = i\sqrt{2}\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2$

c. L'expression complexe de f est sous la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = \sqrt{2}$ donc f est une similitude indirecte et comme $|a| \neq 1$ alors f n'est pas une isométrie.

d. $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 2 \\ y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ le seul point Ω invariant par f est le point d'affixe $\omega = -2$

3. $g(M) = M \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2 \Rightarrow z = -2$. Donc g a pour centre le point $\Omega(-2,0)$ de rapport $|i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = arg(i\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{2}$

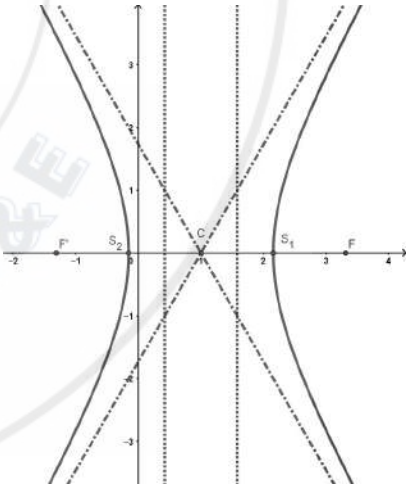
4. g est une similitude directe donc c'est une transformation du plan ; $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2 \Rightarrow z = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}z' - 2 - i\sqrt{2}$ donc la bijection réciproque de g a pour expression complexe $z' = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}z - 2 - i\sqrt{2}$. Comme $f = g \circ S$ alors $S = g^{-1} \circ f$ puis on déduit que S a pour expression complexe : $z' = \overline{z}$. S est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

5. Soit $N(x,y) \in (D)$ et $N'(x',y') = f(N)$. D'après **2-b.** $y' - x' = \sqrt{2}(x-y) + 2\sqrt{2} + 2 = 2$ car $x - y = -2$ ($N \in (D)$) D'où $y' = x' + 2 \Rightarrow f(N) \in (D)$

6-a. σ est un antidéplacement donc a pour écriture complexe : $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$. Soient $A(0,2)$ et $B(-2,0)$.

A et $B \in (D)$ et donc $\sigma(A) = A$; $\sigma(B) = B \Rightarrow \begin{cases} 2i = -2ai + b \\ -2 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = i \\ b = -2 + 2i \end{cases}$ D'où $\sigma : z' = i\overline{z} - 2 + 2i$

En notant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ on a $x' + iy' = y - 2 + i(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$



b. $k = f \circ \sigma$: $z' = i\sqrt{2}(\overline{iz - 2 + 2i}) - 2 + 2i\sqrt{2} = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$

c. k : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}z - 2(1 - \sqrt{2})$. Or une homothétie h de rapport a et de centre d'affixe z_0 a pour écriture complexe $z' = az + (1-a)z_0$ donc k est d'une homothétie de centre $\Omega(-2,0)$ et de rapport $k = \sqrt{2}$

7. σ est une réflexion donc $\sigma^{-1} = \sigma$ puisque $k = f \circ \sigma$ alors $f = k \circ \sigma^{-1} = k \circ \sigma$ donc f est la composée de la réflexion σ et de l'homothétie k.

8-a. Soit $z = x+iy$, $|z+2\overline{z}+1|^2 = |3x-iy+1|^2 = (3x+1)^2+y^2$. De même $|z+\overline{z}|^2 = 4x^2$. Ainsi $|z+2\overline{z}+1| = \sqrt{3}|z+\overline{z}| \Leftrightarrow |z+2\overline{z}+1|^2 = 3|z+\overline{z}|^2 \Leftrightarrow 9x^2+6x+1+y^2 = 12x^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}(x-1)^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$

b. (Γ) alors une hyperbole de centre $C(1,0)$, d'excentricité 2, de foyers $F(1+4/\sqrt{3},0)$ et $F'(1-4/\sqrt{3},0)$, de directrices $x = (1+\sqrt{3})/\sqrt{3}$ et $x = (-1+\sqrt{3})/\sqrt{3}$, de sommets $S_1(1+2/\sqrt{3},0)$ et $S_2(1-2/\sqrt{3},0)$, d'asymptotes $y = -\sqrt{3}(x-1)$ et $y = \sqrt{3}(x-1)$.

Exercice 2

1. Si $p \in \mathcal{A}$ alors forcement p est impair. Réciproquement, si $p \in \mathbb{N}$ est impair alors $\exists\ q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2q+1$. Si q est impair alors $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2n+1$ et si q est pair, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2n$. Ainsi dans tous les cas $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $p = 4n+1$ ou $p = 4n+3 \Rightarrow p \in \mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A} = \{4n+1, 4n+3 \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$.

2. D'après **1.**, si N est impair alors N^2 est de la forme : $16n^2+8n+1$ ou $16n^2+24n+9$. Or $16n^2+8n+1 \equiv 1[8]$ et $16n^2+24n+9 \equiv 1[8]$ donc dans tous les cas $N^2 \equiv 1[8]$. D'où le résultat

3. Si $M^2 \equiv 1[8]$ alors $\exists\ m\ \mathbb{N}$ tel que $M^2 = 8m+1$. Comme M^2 est impair alors M est aussi impair.

4. Soit k un entier relatif fixé.

• Si $k < 0$, $8k+1 < 0$ et l'équation n'a pas de solution.

• Si $k \geq 0$, x est solution si x est impair d'après **3.** ainsi $\exists\ p \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2p+1$. Ainsi $x^2 = 8k+1 \Leftrightarrow p^2+p = 2k$ donc il faut que k soit sous la forme de : $\dfrac{1}{2}p(p+1)$ avec $p \in \mathbb{N}$. Réciproquement si k est sous cette forme, $(2p+1)^2 = 8k+1$. En

résumé pour que l'équation $x^2 = 8k+1$ ait une solution dans $\mathbb{Z}$, il faut et il suffit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = \frac{1}{2}p(p+1)$ et dans ce cas l'ensemble solution est alors $\{2p+1, -2p-1\}$

5. $M(x,y) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow x^2 = 8y+1$ et d'après **4.** x est de la forme $2p+1$ et y de la forme $\frac{1}{2}p(p+1)$. M est à l'intérieur du carré $OABC$ se traduit par $2p+1$ et $\frac{1}{2}p(p+1) \in [0,5]$ alors :

• $0 \leq 2p+1 \leq 5 \Rightarrow -0.5 \leq p \leq 2 \Rightarrow p \in \{0,1,2\}$

• $0 \leq \frac{1}{2}p(p+1) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq p(p+1) \leq 10 \Rightarrow p \in \{0,1,2\}$

Donc il faut que $p \in \{0,1,2\}$ et les points sont $M_0 = (1,0)$; $M_1(3,1)$ et $M_2(5,3)$

6-a. On a : $232 = 2^3 \times 29$ et $195 = 3 \times 5 \times 13$ ainsi $pgcd(232,195) = 1$ donc (E) admet au moins une solution.

Une solution particulière de (E) est $(x_0, y_0) = (163, 137)$ (qui peut être obtenue à l'aide de l'algorithme d'Euclide)

(x,y) est une solution de $(E) \Leftrightarrow 195x - 232y = 1$. Or (x_0,y_0) est une solution de $(E) \Leftrightarrow 195x_0 - 232y_0 = 1$

Ainsi (x,y) est une solution de $(E) \Leftrightarrow 195x - 232y = 195x_0 - 232y_0$ et par suite $195(x-x_0) = 232(y-y_0)$. Ainsi 232 divise $195(x-x_0)$ or 232 et 195 sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Gauss on déduit que 232 divise $x-x_0$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 232k \Rightarrow x = x_0 + 232k$

Comme $195x - 232y = 1$ alors $195(x_0 + 232k) - 232y = 1 \Rightarrow y = y_0 + 195k$

Réciproquement si $(x,y) = (163 + 232k; 137 + 195k)$, on vérifie bien que $195x - 232y = 1$

D'où l'ensemble solution de (E) est : $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k)/k \in \mathbb{Z}\}$

b. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1[232]$ alors $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tel que $195d - 232m = 1$ donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ / $d = 163 + 232k$

$0 \leq d \leq 232 \Rightarrow -0.7 \leq k \leq 0.3$ donc $k = 0$. D'où $d = 163$.

c. $\sqrt{233} \simeq 15.26$. Les nombres premiers $\leq \sqrt{233}$ sont : $\{2,3,5,7,11,13\}$ et aucun d'eux ne divise 233. Donc 233 est premier

d-i. Par définition, $a^{195} \equiv f(a)[233] \Rightarrow a^{195} \equiv f(b)[233]$. Ainsi $a^{195\times 163} \equiv f(b)^{163}[233]$ or $195 \times 163 \equiv 1[232]$ donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $195 \times 163 = 1 + 232k$ et par suite $a^{1+232k} \equiv f(b)^{163}[233]$. Comme $a^{232} \equiv 1[233]$ alors $a^{232k} \equiv 1[233] \Rightarrow$

$a^{1+232k} \equiv a[233]$ ainsi $a \equiv f(b)^{163}[233]$ avec $0 \leq a < 233$ donc a est le reste de la division euclidienne de $f(b)^{163}$ par 233.

De même $b^{195} \equiv f(b)[233]$ et $b \equiv f(b)^{163}[233]$ donc b est le reste de la division euclidienne de $f(b)^{163}$ par 233. D'où $a = b$

ii. Soit $(a,b) \in A^2$ tel que $f(a) = b$. Alors $a^{195} \equiv f(b)[233] \Rightarrow a^{195} \equiv b[233]$ puis $a \equiv b^{163}[233]$ avec $0 \leq a < 233$ et donc a est le reste de la division euclidienne de b^{163} par 233. f est alors bijective de bijection réciproque : $f^{-1} : A \to A$ quel que soit b de A , $f^{-1}(b)$ est le reste de la division euclidienne du nombre b^{163} par 233

Problème

A/ 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. f admet deux asymptotes horizontales : l'une d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$ et l'autre d'équation d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

2. $D_f = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$; $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.

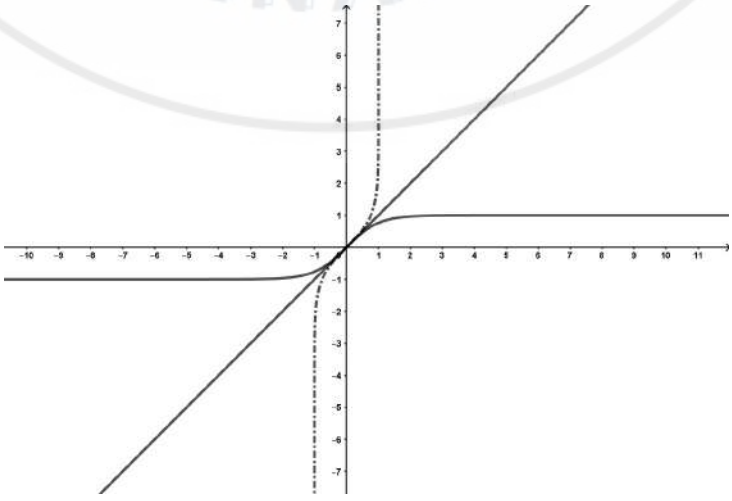
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $f'(x) = \dfrac{4}{(e^{x} + e^{-x})^2} > 0$ donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	1

3. (T_0) : $y = x$. On étudie la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$ et on conclut que (T_0) est au dessus de (C_f) sur $]0, +\infty[$ et en dessous de (C_f) sur $]-\infty, 0[$

4. $f''(x) = \dfrac{8(e^{-x} - e^{x})}{(e^{x} + e^{-x})^3} \Rightarrow f''(0) = 0$ donc O est un point d'inflexion.

5. Voir la figure (en trait plein)



6. Comme (C_f) est au-dessus de l'axe (ox) sur $[0;\ln 3]$ alors $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 3} f(x)\ \mathrm{d}x = [\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})]_0^{\ln 3} = \ln 5 - \ln 3$ u.a

7-a. f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I =]-1,1[$ (d'après **2.**)

b. Soit $y \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)$. Ainsi la bijection réciproque de f est définie par $g : \forall\ x \in]-1,1[,\ g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$

8-a. $h(x) = g(x) = f^{-1} \Rightarrow (C_h)$ est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

b. Voir la figure (en pointillés)

9-a. On peut résoudre avec une intégration par parties ou remarquer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ et une une primitive de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est $x \mapsto (1-x)\ln(1-x) + x$. Ainsi $v_n = \dfrac{1}{2}\left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_0^{1-1/n} + \dfrac{1}{2}\left[(1-x)\ln(1-x) + x\right]_0^{1-1/n} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\dfrac{2n-1}{n}\right) - \dfrac{\ln(n)}{n}\right]$

b. On peut écrire $v_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\ln\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{\ln(n)}{n}\right]$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\ln\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2\ln(2)$. On déduit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$

B/ 10. $U_1 = \int_0^{\ln(a)} f(t/2)\ \mathrm{d}t = 2\left[\ln(\mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2})\right]_0^{\ln a} = 2\ln(\sqrt{a} + 1/\sqrt{a}) - 2\ln 2 = 2\ln\left(\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$

11-a. $1 - f'(x/2) = 1 - \dfrac{4}{(\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2} - 2}{(\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2})^2} = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x/2}}\right]^2 = f^2(x/2)$. D'où $1 - f'(x/2) = (f(x/2))^2$

$U_2 = \int_0^{\ln(a)} [f(t/2)]^2\ \mathrm{d}t = \int_0^{\ln(a)} [1 - f'(t/2)]\ \mathrm{d}t = \ln a - [2f(t/2)]_0^{\ln a} = \ln(a) - 2f(\ln a/2) - 2f(0)$

or $f((\ln a)/2) = \dfrac{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Alors $U_2 = \ln a - 2\dfrac{a-1}{a+1}$

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, et pour $0 \leq \dfrac{t}{2} \leq \ln a$, $f(0) \leq f(t/2) \leq f(\ln a)$ (f est strictement croissante) $\Rightarrow 0 \leq f(t/2) \leq \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$ car $f(\ln a) = \dfrac{a - \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}} = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$ et par suite $0 \leq f^n(t/2) \leq \left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^n$ puis $0 \leq \int_0^{\ln(a)} (f(t/2))^n\ \mathrm{d}t \leq \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^n \int_0^{\ln(a)} 1\ \mathrm{d}t$.

D'où $0 \leq U_n \leq \left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^n \ln(a)$

Comme $a > 1$ alors $a - 1 < a + 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^n \ln(a) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes

c. $U_n - U_{n+2} = \int_0^{\ln(a)} \left[f^n(t/2) - f^{n+2}(t/2)\right]\ \mathrm{d}t = \int_0^{\ln(a)} \left[f^n(t/2)(1 - f^2(t/2))\right]\ \mathrm{d}t = \int_0^{\ln(a)} \left[f^n(t/2) \times f'(t/2)\right]\ \mathrm{d}t$

Ainsi $U_n - U_{n+2} = \left[2\dfrac{f^{n+1}(t/2)}{n+1}\right]_0^{\ln a} = \dfrac{2}{n+1}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$

12-a. on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k-1} - U_{k+1} = \dfrac{2}{k}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^k$ et par suite on déduit que :

$S_n(a) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} (U_{k-1} - U_{k+1}) = \dfrac{1}{2}\left[U_0 + U_1 - U_n - U_{n+1}\right]$

b. Par passage à la limite, on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a) = \dfrac{1}{2}\left[U_0 + U_1\right] = \ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$

13. • On remarque que $T_n = S_n(10)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \ln\left(\dfrac{11}{2}\right)$

• On remarque également $W_n = S_n(9)$ car $\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ln(5)$

Épreuve 5

Exercice 1

1-a. Facilement $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ et $a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4}$

b. $z_1 = 6\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 6\exp(i\pi/3)$ et facilement on a : $a^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\exp(i\pi/6)$

c. $z_3 = a^3 z_0 = a^2 z_1 = 3\exp(i\pi/2) = 3i$ et $z_7 = a^7 z_0 = a^6 z_1 = \dfrac{3}{4}\exp(5i\pi/6)$

d. Faire la figure

2-a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} = |z_{2n}| = |a|^{2n}|z_0| = 6\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n+1}$

De même pour $n \in \mathbb{N}$, $r_{2n+1} = |z_{2n+1}| = |a|^{2n}|z_1| = 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n+2}$ ainsi $\forall\ \mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

(r_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $6\sqrt{2}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ ainsi les A_n tendent vers le point O pour $n \to +\infty$

c. $OA_p \leq 10^{-3} \Rightarrow 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow p \geq \dfrac{\ln(10^{-3}/12)}{\ln(\sqrt{2}/2)} \Rightarrow p \geq 27.1$ d'où $p = 28$

Un angle de $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$ est $arg(z_p) = arg(a^{28}z_0) = arg(a^{28}) + arg(z_0) = \dfrac{\pi}{4} + 14 \times \dfrac{\pi}{6}$

Ainsi un angle de $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$ est égal à $\dfrac{7\pi}{12}$

Exercice 2

1-a. Pour gagner, il faut avoir tiré une noire au premier tirage (probabilité p_N) ou avoir tiré une blanche au premier tirage et une noire au second tirage (probabilité $p_B \times p_N$). Donc la probabilité de gagner est :

$p_N + p_B \times p_N = \dfrac{n+8}{2n+28} + \dfrac{20}{2n+28} \times \dfrac{n+8}{2n+28} = \dfrac{(n+8)(n+24)}{2(n+14)^2} = f(n)$

b. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2(-x+16)}{(x+14)^3}$. Voici le tableau des variations :

x	0		16		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{8}{15}$	↘	$\frac{1}{2}$

On y voit nettement que f atteint un maximum égal à $\dfrac{8}{15}$ au point 16. Ainsi pour que cette probabilité soit maximale, il faut donc et il suffit que $n = 16$ et cette probabilité vaut $\dfrac{8}{15}$

c. $f(1) = 1/2$. En basant sur le tableau des variations, cette probabilité est minimale pour $n = 1$ et est égale $\dfrac{1}{2}$

2-a. $X(\Omega) = \{p-8, q-8, -8\}$. $p(X = p-8) = p_N = \dfrac{2}{5}$; $p(X = q-8) = p_B \times p_N = \dfrac{2}{15}$ et $p(X = -8) = p_R + p_B \times p_{\overline{N}} = \dfrac{7}{15}$

car $p_R + p_B \times p_{\overline{N}} = \dfrac{n}{2n+28} + \dfrac{20}{2n+28} \times \left(1 - \dfrac{n+8}{2n+28}\right)$ avec ici $n = 16$

$E(X) = (p-8) \times 2/5 + (q-8) \times 2/15 - 8 \times 7/15 = \dfrac{2}{5}p + \dfrac{2}{15}q - 8$

b-i. D'après **2-a.**, $E(X) = 0 \Rightarrow 3p + q = 60$

ii. On remarque facilement que le couple $(p_0, q_0) = (20, 0)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $3p + q = 60$. La solution générale de cette équation est donc sous la forme : $p = p_0 + k = 20 + k$ et $q = q_0 - 3k = -3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus $p > q > 8 \Rightarrow 20 + k > -3k > 8 \Rightarrow -5 < k < -2.66$ d'où $k = -3$ et $k = -4$. les couples (p, q) possibles sont $(17, 9)$ et $(16, 12)$

c. $p = 16$ et $q = 12$ alors $E(X) = 0$. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) = \dfrac{2}{5} \times 8^2 + \dfrac{2}{15} \times 4^2 + \dfrac{7}{15} \times 8^2 = \dfrac{288}{5}$

Ainsi $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 4\sqrt{\dfrac{18}{5}}$

Problème

A / 1. g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$. Ainsi $g(x) + xg'(x) = x^2 + \ln x + 2x^2 + 1 = 3x^2 + \ln x + 1$ donc g est solution de (E). De même u est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $u(x) + xu'(x) = 0$

d'où u est une solution de (E_0).

2. k est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $k'(x)=\dfrac{w'(x)\times u(x)-u'(x)\times w(x)}{u^2(x)}$ or $w(x)+xw'(x)=0\Rightarrow w(x)=-xw'(x)$

Ainsi $w'(x)\times u(x)-u'(x)\times w(x)=w'(x)(u(x)+xu'(x))=0$ car $u(x)+xu'(x)=0$. D'où $k'(x)=0$ et k est donc une constante. Par suite $w(x)$ est sous la forme : $w(x)=\dfrac{C}{x}$ avec $C\in\mathbb{R}$

Réciproquement soit w une fonction de la forme $w(x)=\dfrac{C}{x}$ alors $w'(x)=-\dfrac{C}{x^2}$ et $w(x)+xw'(x)=0$

D'où les solutions de (E_0) sont les fonction de la forme : $x\mapsto\dfrac{C}{x}$ avec $C\in\mathbb{R}$

3-a. Comme $h(x)+xh'(x)=3x^2+\ln x+1$ et $g(x)+xg'(x)=3x^2+\ln x+1$ alors $h(x)+xh'(x)=g(x)+xg'(x)$ et par conséquent $(h-g)(x)+x(h-g)'(x)=0\Leftrightarrow h-g$ est solution de (E_0).

b. D'après **3-a.** et **2.** on déduit que les solutions de (E) sont de la forme : $x\mapsto\dfrac{C}{x}+x^2+\ln x$ avec $C\in\mathbb{R}$

B/ 4. g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $g'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}>0$; donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

5-a. $g(0.5)\simeq-0.44$ et $g(1)=1$. g est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors elle est bijective sur cet intervalle. On déduit alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que g est bijective sur $]0,+\infty[$, qu'il existe un unique $\alpha\in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$

On a : $0.5<\alpha<1$ et par dichotomie, on déduit que $\alpha_0=0.65$ est la valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

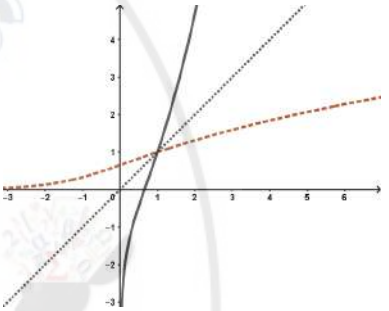
x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b. De la question précédente, on déduit que $g\leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $g>0$ sur $]\alpha,+\infty[$

c. g étant continue et croissante sur $]0,+\infty[$ alors g est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $J=\mathbb{R}$

6. $(C_{g^{-1}})$ est l'image de (C_g) par la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta):y=x$

7. Voir la figure



8-a. Une primitive de la fonction $x\mapsto\ln x$ est la fonction $x\mapsto x\ln x-x$. Ainsi :

$$u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha}g(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{x^3}{3}+x\ln x-x\right]_{1/n}^{\alpha}=\frac{\alpha^3}{3}+\alpha\ln\alpha-\alpha-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{n}\ln n+\frac{1}{n}$$

b. $\displaystyle\int_0^{\alpha}g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\alpha^3}{3}+\alpha\ln\alpha-\alpha$

C/ 9-a. $D_f=]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. Les fonctions $x\mapsto x^2+\ln^2(x)$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $x^2+\ln^2(x)>0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée

$$f'(x)=\frac{x^2+\ln(x)}{x\sqrt{x^2+\ln^2(x)}}=\frac{g(x)}{xf(x)}$$

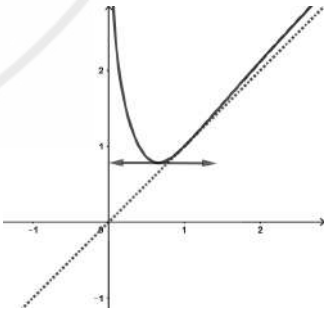
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

c. D'après **5-b.**, on déduit que f est strictement décroissante sur $]0,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$

10-a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\ln^2(x)/x^2}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x+\sqrt{x^2+\ln^2(x)}}=0$ (Croissance comparée)

Ainsi la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

b. Voir figure



11. M a pour coordonnées $(x,\ln(x))\Rightarrow OM=\sqrt{x^2+\ln^2(x)}=f(x)$. D'après **8-c.**, on déduit que OM est minimale pour $x=\alpha\simeq0.6$

12. Pour $x>0$, $f(x)-x=\sqrt{x^2+\ln^2(x)}-x=x\left(\sqrt{1+\ln^2(x)}-1\right)\geq0\Rightarrow x\leq f(x)$

$$\sqrt{x^2+\ln^2(x)}-x-\frac{\ln^2(x)}{2x}=\frac{1}{2x}\left[2x\sqrt{x^2+\ln^2(x)}-2x^2-\ln^2(x)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2x}\left[2\left(\sqrt{x^2+\ln^2(x)}\right)^2-2x^2-\ln^2(x)\right]=0\ (\text{car } x\leq f(x))$$

D'où $\forall\ x>0$, $\sqrt{x^2+\ln^2(x)}-x\leq\dfrac{\ln^2(x)}{2x}$

13-a. D'après **12.**, pour $x>0$, $x\leq f(x)\leq x+\dfrac{\ln^2(x)}{2x}$ puis en intégrant on déduit que : $\dfrac{3}{2}\leq\displaystyle\int_1^2f(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{6}(\ln2)^3+\frac{3}{2}$

$\displaystyle\int_1^2x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$ et $\displaystyle\int_1^2\left(x+\frac{\ln^2(x)}{2x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\ln^3(x)}{6}\right]_1^2=\frac{1}{6}(\ln2)^3+\frac{3}{2}$

b. On déduit alors que $\mathcal{A}=1.5$ $u.a$ avec $u.a=$ unité d'aire

Épreuve 6

Exercice 1

1. Facilement on a : $\mathcal{A}_D = \int_1^{3/2} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{3/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ (en unité d'aire)

2. • Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi(u) = \mathrm{e}^u - u - 1$. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\varphi'(u) = \mathrm{e}^u - 1$. φ est alors décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $]0, +\infty[$. Le minimum global est atteint en $u = 0$ et $\varphi(0) = \varphi(0) = 0$. Ainsi $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\varphi(u) \geq 0$. D'où pour tout réel u, $\mathrm{e}^u \geq u + 1$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{-x} \geq -x + 1 \Rightarrow 1 \geq (1-x)\,\mathrm{e}^x$ d'où pour $x \in \mathbb{R}$, $1 + (x-1)\,\mathrm{e}^x \geq 0$

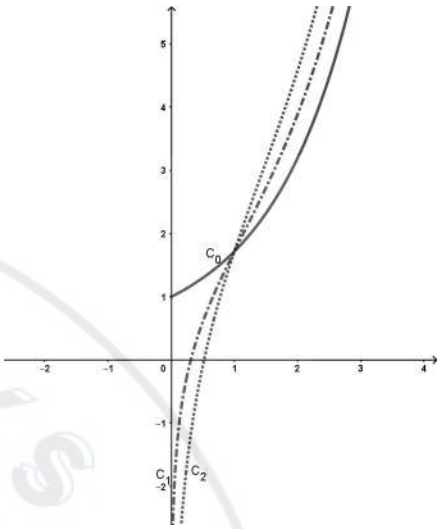
3-a. $f_0 = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(0) = 1$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc f_0 est prolongeable par continuité en 0.

Pour $x > 0$, f_0 est dérivable de dérivée : $f_0'(x) = \dfrac{1 + \mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} \geq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $1 + (x-1)\,\mathrm{e}^x \geq 0$ d'après **2.** donc f_0 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

b. Pour $x \in]0, 1]$, $f_0(x) \leq f_0(1)$ car f_0 est strictement croissante sur $]0, 1]$.

D'où $\forall\, x \in]0, 1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leq \mathrm{e} - 1$

c. Courbe (C_0)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (croissance comparée). Donc (C_0) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Voir la figure pour la représentation de (C_0)

4-a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$ ainsi la branche infinie est une branche parabolique verticale.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$ ainsi la branche infinie est une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. Pour $x > 0$, f_n est dérivable de dérivée $f_n'(x) = \dfrac{1 + nx + (x-1)\,\mathrm{e}^x}{x^2} > 0$ donc f_n' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln x$. Ainsi $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[\Rightarrow (C_{n+1})$ est en dessous de (C_n) sur $]0, 1[$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0 \Rightarrow (C_{n+1})$ est au dessus de (C_n) sur $]1, +\infty[$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = \mathrm{e} - 1$ qui est indépendant de n. Donc toutes les courbes (C_n) passent par $B(1, \mathrm{e}-1)$

6-a. Puisque pour $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$, $f_n(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$ et comme f_n est continue et strictement croissante, on déduit d'après le théorème de valeurs intermédiaires et le fait que les f_n sont sur $]0, +\infty[$, qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

b. Pour $n \geq 1$, $f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + (n+1)\ln(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \ln(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$. D'où $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$

Comme $\alpha_n \in]0, 1[$ alors $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) \leq 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et comme les fonctions f_n sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$, on conclut que la suite (α_n) est croissante. (α_n) étant croissante et majorée par 1 on conclut que cette suite est convergente.

c. Pour $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq f_{n+1}(\alpha_n)$. Par suite $f_{n+1}(\alpha_n) \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\alpha_n}}{\alpha_n} \leq (n+1)\ln(\alpha_n)$ et d'après **3-b.**

$1 - \mathrm{e} \leq \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\alpha_n}}{\alpha_n} \leq (n+1)\ln(\alpha_n) \leq n\ln(\alpha_n)$ car $\alpha_n \in]0, 1]$. D'où $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1 - \mathrm{e}}{n}$

Comme $\alpha_n \in]0, 1]$, alors $0 \geq \ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1 - \mathrm{e}}{n}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 0$ d'après le théorème des gendarmes $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = 1$

7. Voir la figure

8-a. Pour $x \in [1, 3/2]$, $f_n(x) \geq 0$ alors I_n est l'aire, en unité d'aire, du domaine (D_0) : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3/2 \\ 0 \leq y \leq f_n(x) \end{cases}$

b. $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} [f_{n+1}(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$ car $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x) \geq 0$ sur $[1; 3/2]$ d'après **4-c.** D'où (I_n) est une suite croissante.

c. $\mathcal{A}_D = I_{n+1} - I_n = [x\ln x - x]_1^{3/2} = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{A}_D = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$ $u.a$ avec $u.a$ = unité d'aire

Exercice 2

1-a. On a : $x(t) = \dfrac{x_B \times (1-t)^2 + x_A \times 2t(1-t) + x_C \times t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2} = 2t - t^2$. De même $y(t) = 2t^2 - 2t + 1$

b. $x'(t) = 2 - 2t$ alors $x(t)$ est croissante sur $[0; 1]$. $y'(t) = 4t - 2$ alors $y(t)$ est décroissante sur $[0; 1/2]$ et croissante sur

$]1/2;1]$. (Voir le tableau des variations ci-dessous)

c. Déterminons les équations paramétriques de ces tangentes :

• Soit (T_B) la tangente à la courbe au point B.

Comme B est le point de (Γ) repéré à la date $t_0 = 0$ alors, $\vec{u}_0(x'(0);y'(0))$ est un vecteur directeur de (T_B). Soit alors : $\overline{u}_0 = (2,-2)$. Si $N(x(t);y(t)) \in (T_B)$ alors, il existe un paramètre t tel que $\overrightarrow{BN}$ et $\vec{u}_0$ soient colinéaires. Ainsi :

$(T_B) : \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = -2t+1 \end{cases}$ soit une équation cartésienne : $y = -x+1$

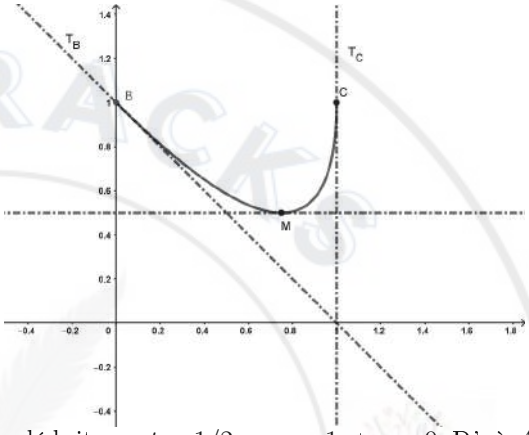
• De la même manière, C est le point de (Γ) repéré à la date $t_1 = 1$ alors, $\vec{u}_1 = (x'(1);y'(1)) = (0;2)$

Ainsi $(T_C) : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 2t+1 \end{cases}$ soit une équation cartésienne : $x = 1$

• Au point $M(1/2)$, on obtient une tangente (T_M) de vecteur directeur $\vec{u}_{1/2} = (x'(1/2);y'(1/2)) = (1;0)$.

Ainsi $(T_M) : \begin{cases} x(t) = t+3/4 \\ y(t) = 1/2 \end{cases}$ soit une équation cartésienne : $y = \dfrac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$x'(t)$		$+$			
$x(t)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↗	1
$y(t)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1
$y'(t)$		$-$	0	$+$	



2. En égalisant les équations paramétrique de (T_B) et (T_C), on déduit que $t = 1/2 \Rightarrow x = 1$ et $y = 0$. D'où $A = (T_B) \cap (T_C)$

3. $x = 2t - t^2 \Rightarrow t^2 - 2t + x = 0$ soit $\Delta = 4 - 4x$. Les solutions de l'équation sont alors : $t_1 = 1 - \sqrt{1-x}$ et $t_2 = 1 + \sqrt{1-x}$

Comme $t \in [0,1]$ alors, on déduit que $t = t_1 = 1 - \sqrt{1-x}$. Puis en remplaçant cette expression de t dans : $y = 2t^2 - 2t + 1$, on trouve (tout calcul fait) : $y = 3 - 2x - 2\sqrt{1-x}$

4. $y = 3 - 2x - 2\sqrt{1-x}$ alors $f(x) = 3 - 2x - 2\sqrt{1-x}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-2 + \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\right) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Problème

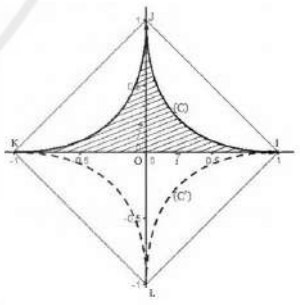
A/ 1. Pour $x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire. Donc l'axe (oy) est un axe de symétrie de (C)

2-a. Pour $x \in [0,1]$, $|x| = x$ et donc $g(x) = (1-\sqrt{x})^2$ pour tout $x \in [0,1]$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\infty$. Ainsi g n'est pas dérivable à droite en 0.

On peut conclure que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

c. Pour $x \in]0,1]$, g est dérivable de dérivée : $g'(x) = \dfrac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leq 0$ pour $x \in]0,1]$ d'où g est décroissante sur $[0,1]$. $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$



d. Pour $x \in [0,1]$, $t(x) = (1-x)^2$. Alors $t'(x) = -2(1-x)$ et $t''(x) = 2$ par suite $t''(x) - 2 = 0$. D'où t est solution de l'équation de l'équation différentielle $y'' - 2 = 0$ sur $[0,1]$.

3-a. Voir la représentation

b. $f(x) \geq 0$ sur $[-1,1]$ alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\left[x - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ u.a$

or $1u.a = 3cm \times 3cm$ alors $\mathcal{A} = 3cm^2$

4. (C') est l'image de (C) par la réflexion d'axe (Ox) (voir la figure pour la représentation graphique)

5-a. Il suffit de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$. Pour cela, prouvons par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$:

• Pour $n = 0$, $u_0 = 1/2 \in [0,1]$. Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.

• Supposons le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$ alors $u_n \in [0,1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0,1]$

f est décroissante sur $[0,1]$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$. D'où $u_{n+1} \in [0,1]$

Donc pour tout entier nature n, $u_n \in [0,1] \subset [-1,1]$. D'où (u_n) est bien définie.

b. • Supposons par absurde que (u_n) est croissante alors $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et en particulier $u_0 \leq u_1$ or $u_0 = 1/2$ et $u_1 = f(u_0) = (3-2\sqrt{2})/2 < u_0$ ce qui est impossible.

• Supposons par absurde que (u_n) est décroissante alors $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$. Comme $u_0 > u_1$ et f est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $f(u_0) < f(u_1) \Rightarrow u_1 < u_2$ ce qui est absurde car (u_n) est supposée décroissante.
En conclusion, (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.
B/ 6. $M(x,y) \in (E) \Rightarrow \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1 \Rightarrow \sqrt{|y|}=1-\sqrt{|x|} \Rightarrow 1-\sqrt{|x|} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x|} \leq 1$ d'où $-1 \leq x \leq 1$
7. $M \in (E) \Leftrightarrow \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1 \Leftrightarrow |y| = \left(1-\sqrt{|x|}\right)^2 \Leftrightarrow y = f(x)$ ou $y = h(x)$. D'où $M \in (C) \cup (C')$
De même si $M \in (C) \cup (C')$, on vérifie facilement que $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$. Par suite $(E) = (C) \cup (C')$
8-a. En utilisant le graphe, cet ensemble est : $\{(I,K);(K,I);(J,L);(L;J)\}$
b-i. Posons $I' = S(I)$; $J' = S(J)$; $K' = S(K)$ et $L' = S(L)$. $I'J'K'L'$ est un carré car image d'un carré par une isométrie. Comme les points I, J, K et L appartiennent à (E) et (E) est globalement invariant par S alors les points I', J', K' et L' appartiennent à (E). Étant donné que (E) est contenu dans le carré $IJKL$, on conclut que les points I', J', K' et L' sont contenus dans le carré $IJKL$, puis que le carré $I'J'K'L'$ est contenu dans le carré $IJKL$. Si on suppose que les carrés $IJKL$ et $I'J'K'L'$ sont distincts, alors l'aire du carré $I'J'K'L'$ est strictement inférieure à l'aire du carré $IJKL$. Ce qui est impossible car les carrés $IJKL$ et $I'J'K'L'$ sont isométriques et par conséquent ont la même aire. Ceci permet de conclure que l'image du carré $IJKL$ par S est le carré $IJKL$.
ii. On a : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}=\vec{0}$ donc $O = bar\{(I,1);(J,1);(K,1);(L,1)\}$
iii. Comme S est une isométrie alors elle conserve les barycentres donc $S(O) = bar\{(I',1);(J',1);(K',1);(L',1)\}$ donc $S(O) = bar\{(I,1);(J,1);(K,1);(L,1)\}$ car $I'J'K'L' = IJKL$. D'où $S(O) = O$
c. S étant une isométrie fixant au moins un point du plan, on conclut que S est soit l'application identique du plan, soit une rotation d'angle non nul, soit une réflexion.
9-a. r est un déplacement fixant au moins un point du plan car $r(O) = O$ d'après **8-b-ii.**. D'où r est soit une rotation de centre O et d'angle non nul, soit l'application identique du plan. (classement des isométries)
b-i. L'écriture complexe de $R_{(O,\lambda)}$ est $z' = \mathrm{e}^{i\lambda}\, z$ et une à l'expression analytique $\begin{cases} x' = x\cos\lambda - y\sin\lambda \\ y' = x\sin\lambda + y\cos\lambda \end{cases}$
O est le seul point invariant par $R_{(O,\lambda)}$ puisque c'est le centre de la rotation.
ii. Supposons par absurde que $R_{(O,\lambda)} \in (\Gamma)$. Notons $I' = R_{(O,\lambda)}(I)$ alors I' a pour coordonnées $(\cos\lambda;\sin\lambda)$.
I appartient à (E), alors $|\sin(\lambda)| = (1-\sqrt{|\cos\lambda|})^2$. Comme $|\sin\lambda|^2 = 1-|\cos\lambda|^2$; on obtient $(1-\sqrt{|\cos\lambda|})^4 = 1-|\cos\lambda|^2$
Pour alléger les calculs, on pose $t = \sqrt{|\cos\lambda|}$ alors :

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{|\cos\lambda|})^4 = 1-|\cos\lambda|^2 &\Rightarrow (1-t)^4 = 1-t^4 \Rightarrow (1-t)^4 = (1+t^2)(1-t)(1+t) \\ &\Rightarrow (1-t)[(1+t)(1+t^2)-(1-t)^3] = 0 \Rightarrow (1-t)(2t^3-2t+4t) = 0 \\ &\Rightarrow 2t(1-t)\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}\right] = 0\ (*)\end{aligned}$$

Comme $t = \sqrt{|\cos\lambda|}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$, alors $t \in]0,1[$. Alors $2t(1-t) > 0$ et $\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4} > 0$ et par conséquent l'égalité (*) est impossible. Par conséquent, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$, $R_{(O,\lambda)}$, la rotation de centre O et d'angle λ. ne laisse pas (E) globalement invariant
b. On déduit d'après tout ce qui précède que : Les déplacements laissant (E) globalement invariant sont : l'application identique du plan $\boldsymbol{Id_{\mathcal{P}}}$ (c'est la rotation d'angle 2π), la symétrie centrale de centre O $\boldsymbol{S_O}$ (c'est la rotation de centre O et d'angle π ou $-\pi$), la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ et la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$
On vérifie facilement, à l'aide des expressions analytiques de ces 4 applications affines que pour tout point $M \in (E)$,son image $M'(x',y')$ par l'une de ces applications affines est un point de (E) c'est-à-dire $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ et $\sqrt{|x'|}+\sqrt{|y'|}=1$
10.
• D'après **8-b.iii.** $S_\Delta(O) = O$ comme S_Δ laisse invariant son axe (Δ) alors $O \in (\Delta)$
• Détermination des réflexions :
Comme $O \in (\Delta)$ alors forcement a une équation de la forme : $y = ax$ ou $x = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$. On remarque que pour $a \in \{-1,0,1\}$ ou si Δ a pour équation $x = 0$, S_Δ laisse (E) globalement invariant (si $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ et $\sqrt{|x'|}+\sqrt{|y'|}=1$)
Supposons $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}$. Notons que si S et S' sont deux isométries laissant (E) globalement invariant, alors $S \circ S'$ laisse aussi (E) globalement invariant. D'après la remarque, $S_{(O,\vec{i})}$ laisse (E) globalement invariant.
Notons $S_{(L)}$ la réflexion d'axe $y = ax$ avec $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}$. Supposons que $S_{(L)}$ laisse (E) globalement invariant alors $S_{(L)} \circ S_{(O,\vec{i})}$ est la rotation de centre O qui laisse (E) globalement invariant. Comme (L) et la droite de repère $(O,\vec{i})$ ne sont pas perpendiculaires, alors d'après les résultats de la question **9-b.**, $S_{(L)} \circ S_{(O,\vec{i})} = R_{(O,\pi/2)}$ ou $S_{(L)} \circ S_{(O,\vec{i})} = R_{(O,-\pi/2)}$.
On note $\vec{u} = (1,a)$ le vecteur directeur de (L) alors $mes(\vec{i},\vec{u}) \in \{-\pi/4, \pi/4\}$ et par conséquent $\cos(\vec{i},\vec{u}) = \sqrt{2}/2$. Or on sait que $\cos(\vec{i},\vec{u}) = \dfrac{\vec{i}\cdot\vec{u}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{i}||} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ et on aboutit à $\sqrt{1+a^2} = \sqrt{2}$. On trouve $a^2 = 1$ ce qui est impossible
Donc les réflexions laissant (E) globalement invariant sont : Les réflexions d'axe $(0,\vec{i})$, $(0,\vec{j})$, $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = -x$
11. $(\Gamma) = \left\{Id_{\mathcal{P}}; S_O; r(O,\pi/2), r(O,-\pi/2), S_{(O,\vec{i})}, S_{(O,\vec{j})}, S_\Delta, S_{\Delta'}\right\}$ avec $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = -x$

Épreuve 7

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AB} = (3,3,3)$ et $\overrightarrow{AC} = (3,0,-3)$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-9,18,-9)$

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaire et par suite les points A, B et C sont non alignés.

2-a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 - 9 = 0$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. (P_1) admet $\overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal ; une équation de (P_1) est donc sous la forme : $3x - 3z + a = 0$ où $a \in \mathbb{R}$

De plus (P_1) contient le point A, on a : $9 - 6 + a = 0$ c'est-à-dire $a = -3$. Par suite $(P_1) : x - z - 1 = 0$

c. Un vecteur normal à (P_2) est $\vec{n} = (1,1,1)$ et de plus $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$. Donc (AB) est orthogonal à (P_2). De plus $A \in (P_2)$.

3. $M' \in (P_2)$ et $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $x' - x = k$; $y' - y = k$ et $z' - z = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $x' + y' + z' - 3 = 0$

ainsi $3k = 3 - x - y - z$. Alors $\begin{cases} x' = (2x - y - z + 3)/3 \\ y' = (-x + 2y - z + 3)/3 \\ z' = (-x - y - 2z + 3)/3 \end{cases}$

4-a. On a : $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ alors $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -9 + 9 = 0$

On en déduit que la droite (AD) est orthogonale à chacune des droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). Donc (AD) est orthogonale au plan (ABC)

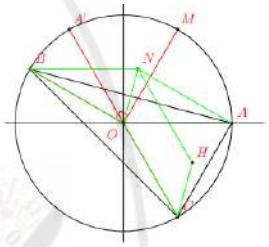
b. La valeur de V en unité de volume est : $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{AB \times AC}{2} \times AD = 27$

Exercice 2

1. A' appartient $(\mathcal{C})$ car la droite (OM) est un axe de symétrie de ce cercle. De plus

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\theta[2\pi]$

$C \in (\mathcal{C})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 2\theta + \pi[2\pi]$. Ainsi $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi[2\pi]$ Donc A' et C sont bien symétriques par rapport à O.



2-a. $z = \mathrm{e}^{i\theta}$; $b = \mathrm{e}^{i(\theta+\pi/2)} = \mathrm{e}^{i\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{i\theta} = iz$ et $c = \mathrm{e}^{i(2\theta+\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi} \cdot (\mathrm{e}^{i\theta})^2 = -z^2$

b. $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc N est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont B, O et A.

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC}$ donc H est le quatrième sommet du parallélogramme dont trois points consécutifs sont C, O et N. (Pour la construction, voir figure)

3-a. $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow z \neq i$ ou $z \neq -i$. Alors $b = iz$ est différent de 1 et de -1 donc A et B sont distincts

De même $c = -z^2$ différent de 1 (et de -1) ; A et C sont donc distincts.

Enfin $b - c$ est différent de 0 (et de -2) ; par conséquent B et C sont distincts.

b. $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{iz - z^2}{iz + z^2} = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ et $\dfrac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{1+b}{1-b} = \dfrac{1-iz}{1+iz}$

$\dfrac{1-iz}{1+iz} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{i\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{i\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{2i\alpha}}{1 - \mathrm{e}^{2i\alpha}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - \mathrm{e}^{i\alpha}} = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i$ (En posant $2\alpha = \theta + \pi/2$). D'où $\dfrac{1-iz}{1+iz}$ est imaginaire pur.

c. D'après **3-a.**, On en déduit que les angles $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{BA})$ sont droits ; H est donc l'intersection des hauteurs c'est à dire l'orthocentre du triangle ABC.

d. $\Delta = i^2 + 4 = 3$ Les racines de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$ et $z_2 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i5\pi/6}$

e. Le centre de gravité G du triangle ABC est $\dfrac{1}{3}(1 + b + c)$

Pour que H coïncide avec G il faut et il suffit que $1 + b + c = \dfrac{1}{3}(1 + b + c) \Rightarrow 1 + b + c = 0$ ou encore $z^2 - iz - 1 = 0$. Donc H coïncide avec G si et seulement si $\theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$

$AB = |b - 1| = |z + i|$ et $BC = |iz - z^2| = |z + i|$ puis d'après le figure, on conclut que ABC est un triangle isocèle en B

4. $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $Z_H = 1 + iz - z^2 = 1 + i(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 1 - \sin\theta - \cos 2\theta + i(\cos\theta - \sin 2\theta)$

Ainsi $\begin{cases} x_H = 1 - \sin(\theta) - \cos(2\theta) \\ y_H = \cos(\theta) - \sin(2\theta) \end{cases}$ Donc H est un point de (H)

Problème

A/ 1-a. $D_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a : $f_n(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n} + \ln|x-1| = x^n \left[\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{1}{2x^{n-2}} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln|x-1|}{x^n}\right]$ ainsi

- Si n est pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f_n(x) = -\infty$
- Si n est impair, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = -\infty$

b. Pour $x \neq 1$, $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{x^n}{x}\left[\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{1}{2x^{n-2}} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln|x-1|}{x^n}\right]$

• Si $n=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_n(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x-1|=+\infty$; De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f_n(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|x-1|=+\infty$. La courbe (C_n) admet donc une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

• Si $n>1$ et n est impair, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=+\infty$. La courbe (C_n) admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

• Si $n>1$ et n pair, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$. La courbe (C_n) admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

2-a. La fonction f_n est dérivable dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ car les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto\ln|x-1|$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f_n'(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^n}{x-1}$

b. • Si n est pair, d'après **2-a.**, $f_n(x)$ est décroissante sur $]-\infty,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$ (n pair)		$-$	0	$-$	‖	$+$	
$f_n(x)$ (n pair)	$+\infty$	↘	0	↘	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

• Si n est impair, d'après **2-a.**, $f_n(x)$ est croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ et décroissante sur $[0,1[$

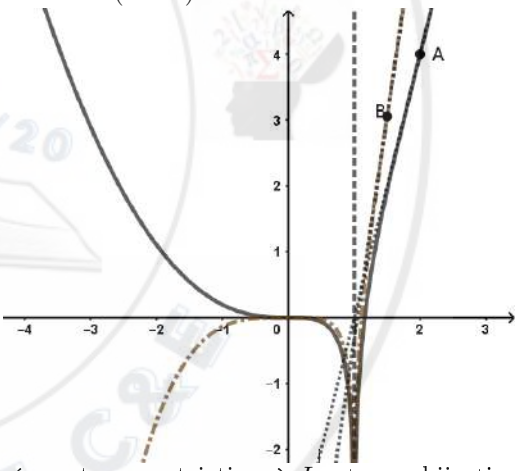
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$ (n impair)		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f_n(x)$ (n pair)	$-\infty$	↗	0	↘	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3-a. La fonction f_n est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $f_n''(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(x-1)^2}\,[(n-1)x-n]$

b. • Pour $n=1$, $f_n''(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ la courbe (C_1) n'a donc pas de point d'inflexion.

• Pour $n>1$ f_n'' s'annule en $x_0=0$ et $x_1=\dfrac{n}{n-1}$

- Si n est impair, en se servant du tableau de signe de f_n'' on déduit qu'il y a un seul point d'inflexion : le point d'abscisse x_1.
- Si n est pair, en se servant du tableau de signe de f_n'' on déduit qu'il y a deux points d'inflexion : l'origine des coordonnées x_0 et le point de (C_n) d'abscisse x_1.



NB : En un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

c. (T_2) : $y=4x-4$ et (T_3) : $y=\dfrac{27}{4}x-\dfrac{153}{24}-\ln 2$

d. Voir la représentation graphique

4-a. f_n est continue et strictement croissante sur $I=]1,+\infty[$; par conséquent, sa restriction à I est une bijection de I sur $f_n(I)=\mathbb{R}$. Comme $f_n(I)$ contient 0, il existe un unique α_n dans I tel que $f_n(\alpha_n)=0$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, et $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a : $f_{n-1}(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+....+\dfrac{x^{n-1}}{n-1}+\ln|x-1|=f_n(x)-\dfrac{x^n}{n}$. D'où $f_{n-1}(\alpha_n)=-\dfrac{1}{n}\alpha_n^n$

Comme $\alpha_n>1$, $f_{n-1}(\alpha_n)=-\dfrac{1}{n}\alpha_n^n<0=f_{n-1}(\alpha_{n-1})\Rightarrow-\dfrac{1}{n}\alpha_n^n<f_{n-1}(\alpha_{n-1})$. Ainsi $f_{n-1}(\alpha_n)<f_{n-1}(\alpha_{n-1})$ et comme f_{n-1} est croissante sur $]1,+\infty[$ alors $\alpha_n\leq\alpha_{n-1}$ et donc (α_n) est donc strictement décroissante ; et puisqu'elle est minorée par 1 alors (α_n) est convergente

c. La fonction $t\mapsto 1/t$ est continue et décroissante sur $[x,x+1]$ avec $x>1$ donc $\forall\, t\in[x,x+1]$, $\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{x}$ et en intégrant ces inégalités on obtient : $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_x^{x+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t$. D'où $\dfrac{1}{1+x}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\dfrac{1}{x}$

Ainsi pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1+p}\leq\ln(p+1)-\ln(p)\leq\dfrac{1}{p}\Rightarrow\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}\leq\sum_{p=1}^{n-1}(\ln(p+1)-\ln p)\leq\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}$

or $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(\ln(p+1)-\ln p)=\ln(n)-\ln 1$. Ainsi pour $n>0$, $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\ln(n)>0$. D'où $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n)>0$

d. Posons $t_n=1+1/n>1$ alors $f(t_n)=t_n+\dfrac{t_n^2}{2}+\cdots+\dfrac{t_n^n}{n}-\ln(n)>1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n)>0=f_n(\alpha_n)$

Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ alors on déduit que $t_n > \alpha_n$. D'où $\alpha_n < 1 + 1/n \ \forall \in \mathbb{N}^*$
D'après **4-a.** $\alpha_n > 1$ alors $1 < \alpha_n < 1 + 1/n$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$ et le théorème des gendarmes permettent de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

B/ 5. • Pour $n = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$ donc vrai pour $n = 0$.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre n donné $n > 0$ donné alors $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ et montrons le résultat à l'ordre $n+1$. Une intégration par parties nous donnent :
$\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \left[-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$
Ainsi $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ d'où le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi

6. Pour $x \in \mathbb{R}$ et t entre 0 et x et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \Rightarrow \left|\mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right| = \left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right|$
Or si $x \geq 0$, $\left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right| = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \leq \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\ \mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!} = \dfrac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$
si $x \leq 0$, $\left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right| = \int_x^0 \dfrac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n\ \mathrm{d}t = \dfrac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \dfrac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$ car $e^{|x|} \geq 1$
D'où $x \in \mathbb{R}$ $\left|\mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} = 0$ donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$

C/ 8. Pour ≥ 2, g_n est bien définie et dérivable sur $[0,1]$ de dérivée $g_n'(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} > 0$ donc g_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection sur $[0,1]$. De plus $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = 1 + \dfrac{1^2}{2} + \cdots + \dfrac{1^n}{n} > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que g_n est bijective, on conclut qu'il existe un unique réel β_n de $]0,1[$ tel que : $g_n(\beta_n) = 0$.

9. Pour $n \geq 2$, $g_n(x) = g_{n+1}(x) - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ainsi $g_n(\beta_{n+1}) = g_{n+1}(\beta_{n+1}) - \dfrac{\beta^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{\beta^{n+1}}{n+1} < 0 = g_n(\beta_n)$.
Ainsi $g_n(\beta_{n+1}) < g_n(\beta_n)$ or la fonction g_n est strictement croissante sur $[0,1]$ alors $\beta_{n+1} < \beta_n$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente.

10-a. Pour $t \neq 1$, $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison t et de premier terme 1 alors $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1-t^n}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

b. On a : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t} \Rightarrow \int_0^{\beta_n} \left(1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\beta_n} \left(\dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}\right)\ \mathrm{d}t$
D'où $\beta_n + \dfrac{\beta_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\beta_n^n}{n} = -\ln(1-\beta_n) - \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t$

11-a. $\beta_n + \dfrac{\beta_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\beta_n^n}{n} = -\ln(1-\beta_n) - \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t = -\ln(1-\beta_n) - \left(\beta_n + \dfrac{\beta_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\beta_n^n}{n}\right)$
Or $\beta_n + \dfrac{\beta_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\beta_n^n}{n} = g_n(\beta_n) + 1$ or $g_n(\beta_n) = 0$ d'où $1 + \ln(1-\beta_n) = -\int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t$
Pour $t \in [0, \beta_n]$, $-1 \leq t - 1 \leq \beta_n - 1 \Rightarrow \Rightarrow 1 - \beta_n \leq 1 - t \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-\beta_n}$ par suite $0 < \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{t^n}{1-\beta_n}$
Ainsi $0 < \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-\beta_n}\ \mathrm{d}t \Rightarrow 0 < \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{1-\beta_n} \times \dfrac{\beta_n^{n+1}}{n+1}$ or $\beta_n^{n+1} < 1$
D'où $0 \leq \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{(n+1)(1-\beta_n)}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)(1-\beta_n)} = 0$ ainsi $\dfrac{1}{(n+1)(1-\beta_n)} \int_0^{\beta_n} \dfrac{t^n}{1-t}\ \mathrm{d}t = 0$ d'après le théorème des gendarmes
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \ln(1-\beta_n)) = 0$ puis on déduit que $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ car la fonction $x \mapsto 1 + \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$ et $L \in [0,1[$

12. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ d'après la **partie B** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$

Épreuve 8

Exercice 1

1-a. On a : $a = b - r$ et $c = b + r$

• $Y(\Omega) = \{1, -1, 2\}$ alors $\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{b-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{b+r} = 1$ ou encore $\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1$ (*)

• De plus $E(Y) = 1 \Rightarrow 1 \times \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^c = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{b-r} - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^{b+r} = 1$ ou encore $\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1$ (**)

De (*) et (**), on déduit que le couple (b, r) est solution du système (S) : $\begin{cases} \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \\ \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \\ \mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^b\,\mathrm{e}^r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^b\,(\mathrm{e}^{-r} + 1 + \mathrm{e}^r) = 1\ (*) \\ \mathrm{e}^b\,(\mathrm{e}^{-r} - 1 + 2\,\mathrm{e}^r) = 1\ (**) \end{cases} \quad \frac{(*)}{(**)} = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-r} + 1 + \mathrm{e}^r = \mathrm{e}^{-r} - 1 + 2\,\mathrm{e}^r$

Ainsi $\mathrm{e}^r = 2 \Rightarrow r = \ln 2$ puis en remplaçant la valeur de r dans (*), on trouve $b = \ln\left(\frac{2}{7}\right)$

c. $a = b - r \Rightarrow a = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ et $c = b + r \Rightarrow c = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + 4\,\mathrm{e}^c - 1 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + 4 \times \frac{4}{7} - 1 = \frac{12}{7}$ d'où $V(X) = \frac{12}{7}$

3-a. $X_G = \frac{1 - 2 + 4 \times 2}{1 + 2 + 4} = 1$

b. $h(G) = \frac{1}{7}\left(GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2\right) = \frac{1}{7}(0 + 2 \times 4 + 4 \times 1) = \frac{12}{7} = V(Y)$

c. $\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 7MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC}) + GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2 \\ &= 7MG^2 + 12 \end{aligned}$

$MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187 \Leftrightarrow 7MG^2 + 12 = 187 \Leftrightarrow MG^2 = 25$. On note M_1 le point d'abscisse -4 et M_2 le point d'abscisse 6 lors $(\Gamma) = \{M_1, M_2\}$

Remarque : Dans cet exercice, nous sommes sur une droite vectorielle. Si on était dans le plan, l'ensemble solution devait être le cercle de centre G et de rayon 5.

Exercice 2

1-a. L'écriture analytique de R montre que R est une application affine du plan. De plus le déterminant du système est : $2 \neq 0$ donc R est une transformation du plan.

b. Notons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors $2z' = x(1 + i\sqrt{3}) + iy(1 + i\sqrt{3}) + \sqrt{3} + i \Rightarrow z' = \mathrm{e}^{i\pi/3}\,z + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'écriture complexe de R est sous la forme : $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ donc R est un déplacement.

$R(M) = M \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{i\pi/3}\,z + \mathrm{e}^{i\pi/6} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = \mathrm{e}^{i\pi/6} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-i\pi/3}\,z = \mathrm{e}^{i\pi/6} \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{i\pi/2} = i$ d'où le point Ω d'affixe $\omega = i$ est le seul point invariant par R. On conclut alors que R est un déplacement de centre Ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$

c. R est une isométrie laissant invariant un seul point du plan alors R est une rotation. Donc R est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = i$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$

2-a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, R^n est la rotation de centre Ω et d'angle $n \times \frac{\pi}{3}$ (Propriété de composée de rotations de même centre)

Ainsi R^n : $z' = \mathrm{e}^{in\pi/3}(z - i) + i$

On pose $\theta_n = \frac{n\pi}{3}$ alors R^n a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = x\cos(\theta_n) - (y-1)\sin(\theta_n) \\ y' = x\sin(\theta_n) + (y-1)\cos(\theta_n) + 1 \end{cases}$

b. $R^n = Id_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{in\pi/3} = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $R^n = Id_{\mathcal{P}}$ si n est de la forme $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

3-a. L'écriture complexe générale d'une homothétie est : $z' = kz + (1-k)z_0$ avec k le rapport de l'homothétie et z_0 l'affixe de son centre.

Comme $z' = -2z + 3i = -2z + (1+2)i$ alors l'écriture complexe de h est sous la forme de $z' = kz + (1-k)z_0$. Donc h est l'homothétie de centre $\Omega(i)$ et de rapport -2.

b. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, h^n est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = (-2)^n$ (Composée d'homothéties de même centre)

Donc h^n a pour écriture complexe $z' = (-2)^n z + [1 - (-2)^n]i$

4-a. $s(\Omega) = \Omega$. On déduit alors que $s = h \circ R$ est l'écriture réduite de la similitude directe de centre Ω, de rapport $|-2| = 2$ et d'angle $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{4}$

b. De **4-a.**, on déduit directement que s a pour écriture complexe : $z' = 2\,\mathrm{e}^{4i\pi/3}\,z + 2i - \sqrt{3}$ (l'écriture complexe d'une similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $k > 0$ et d'angle θ est : $z' - \omega = k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$)

NB : On pouvait directement faire la composition :

En effet $s = h \circ R$ a pour écriture complexe $z' = -2[\mathrm{e}^{i\pi/3}\, z + \dfrac{i}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}] + 3i = -2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\, z - i - \sqrt{3} + 3i = 2\,\mathrm{e}^{4i\pi/3}\, z + 2i - \sqrt{3}$

Problème

A/ 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k} \Rightarrow \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. D'où $\dfrac{1}{k} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

De même pour $k \geq 2$ et $t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{k} \Rightarrow \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. D'où $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

2. D'après **1.**, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)]$. D'où $H_n \geq \ln(n+1)$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ (Somme télescopique)

De même pour $k \geq 2$; $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} [\ln(k) - \ln(k-1)] \Rightarrow H_n - 1 \leq \ln(n)$ car $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 = H_n - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} [\ln(k) - \ln(k-1)] = \ln(n) - \ln 1 = \ln(n)$

Ainsi $H_n \leq 1 + \ln(n)$. D'où pour $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = \lim_{n\to+\infty} [1 + \ln(n)] = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (Théorème des gendarmes)

B/ 1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. On pose $u = -t$ alors $f(-x) = \displaystyle\int_{x}^{3x} -\frac{\cos(-u)}{-u}\,\mathrm{d}u = f(x)$

Donc f est paire. Donc on peut réduire le domaine d'étude de f sur $]0, +\infty[$

2-a. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $g'(x) = -x + \sin(x)$. g' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g''(x) = -1 + \cos(x) \leq 0 \Rightarrow g'$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\forall x \in]-\infty, 0[$, $g'(x) \geq g'(0) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) \leq g'(0) = 0$. Ainsi g est croissante sur $]-\infty, 0]$ et g est décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

b. D'après **B/ 2-a.** pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) \leq g(0) = 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t)$ or $\cos(t) \leq 1$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$

c. Pour $t \neq 0$, $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{2} \leq \dfrac{\cos t}{t} \leq \dfrac{1}{t}$ ainsi :

• $\forall\ x > 0$; $\displaystyle\int_x^{3x} \left[\frac{1}{t} - \frac{t}{2}\right] \mathrm{d}t \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ Or $\displaystyle\int_x^{3x} \left[\frac{1}{t} - \frac{t}{2}\right] \mathrm{d}t = \ln(3x) - \ln(x) - 2x^2 = \ln 3 - 2x^2$ et $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(3x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \ln 3$. D'où pour $x > 0$, $\ln 3 - 2x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$.

• $\forall\ x < 0$; $-x > 0$ et d'après le premier point, $\ln 3 - 2(-x)^2 \leq f(-x) \leq \ln 3$ or f est paire ; d'où $\ln 3 - 2x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$

Par suite pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; $\ln 3 - 2x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$

3. $\displaystyle\lim_{x\to0} [\ln 3 - 2x^2] = \ln 3$ alors $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \ln 3$ d'après **B/ 2-c.** et le théorème de gendarmes

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \ln 3$ alors f est prolongeable par continuité en 0.

4. La fonction : $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et de plus les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 3x$ sont dérivable sur $]0, +\infty[$ alors la fonction f est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème sur les fonctions définies par intégrale

On pouvait encore justifier de la manière suivante :

Comme pour $x > 0$, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est continue sur $[x, 3x]$ alors elle admet une primitive H sur cet intervalle. Alors $H'(t) = h(t)$ ainsi $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{3x} H'(t)\,\mathrm{d}t = H(3x) - H(x)$. Comme h est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ alors sa primitive est aussi continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Par suite les fonctions $H(x)$ et $-H(3x)$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ d'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

$f(x) = H(3x) - H(x)$ alors $f'(x) = 3H'(3x) - H'(x) = 3\dfrac{\cos(3x)}{3x} - \dfrac{\cos(x)}{x}$. D'où pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\cos(3x) - \cos(x)}{x}$

5-a. Par intégration par parties : Pour $x > 0$; $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t} \times \sin t\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} -\frac{1}{t^2} \times \sin t\,\mathrm{d}t$

D'où $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

b. Pour $x \in]0,+\infty[$ et $t \in [x,3x]$, $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ alors $\left|\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{3x} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{x}$

$|f(x)| = \left|\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{\sin(3x)}{3x}\right| + \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| + \left|\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{10}{3x}$. D'où pour $x > 0$, $|f(x)| \leq \dfrac{10}{3x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{3x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

C/ 1-a. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ donc la fonction : $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,\pi/2]$ d'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ existe.

b. Pour $n > 4$, $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ (Relation de Chasles)

Or $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \left[-\cos t \times \frac{1}{t}\right]_{\pi/2}^n - \int_{\frac{\pi}{2}}^n (-\cos t) \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t = -\frac{\cos n}{n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$ (Intégration par parties)

D'où $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \frac{\cos n}{n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$

c. Soit $w_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$, $n > 4$. Pour $t \in [\pi/2, n]$, $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^n \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\ \mathrm{d}t \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{n}$

Alors $|w_n| \leq \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{n}$ pour $n > 4$. Comme la suite $\left(\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{n}\right)$ est convergente alors on déduit que la suite $|w_n|$ est convergente et par suite $\left(\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t\right)_{n>4}$ est convergente.

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^n \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$ existe. Donc d'après **1-b.** on déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2-a. On pose $u = x - n\pi$ alors $du = dx$; pour $x = n\pi$, $u = 0$ et pour $x = (n+1)\pi$, $u = \pi$ ainsi

$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+n\pi)|}{u+n\pi}\ \mathrm{d}u$ d'où $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi}\ \mathrm{d}x$

Pour $x \in \mathbb{R}$ $|\sin(x+n\pi)| = |\sin(x)|$ et si $x \in [0,\pi]$, $|\sin(x)| = \sin(x)$. D'où $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+n\pi}\ \mathrm{d}x$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x$ (relation de Chasles)

D'où $\displaystyle\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x$

Comme $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\ \mathrm{d}x$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\ \mathrm{d}x$.

c. Pour $x \in [0,\pi]$, $\dfrac{1}{x+k\pi} \geq \dfrac{1}{(k+1)\pi}$ ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\ \mathrm{d}x \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(k+1)\pi}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}$

Puis on déduit facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

3. Pour $p \to +\infty$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ fixé, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_0 > (n+1)\pi$. La fonction $x \mapsto \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ est une fonction positive alors la suite $\left(\displaystyle\int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t\right)_{p\geq 1}$ est croissante donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t \geq \int_0^{p_0} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x$

Or $p_0 > (n+1)\pi$ et donc $\displaystyle\int_0^{p_0} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x$. D'où $\lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = +\infty$ d'après **partie A** car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - 1 = H_n + \frac{1}{n+1} - 1$

d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} \displaystyle\int_0^p \left|\frac{\sin t}{t}\right|\ \mathrm{d}t = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Épreuve 9

Exercice 1

1-a. On a $AB = AC = BC = \sqrt{48}$. Donc, le triangle ABC est équilatéral.

b. Pour que les quatre points soient non coplanaires, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \neq 0$. Un calcul simple donne $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 96\sqrt{6} \neq 0$ donc les points A, B, C et D sont non coplanaires.
Le tétraèdre $ABCD$ est régulier car $AB = BC = CD = AD = DB = CA = 4\sqrt{3}$

c. Le volume du tétraèdre est $\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 16\sqrt{6}$ (en unité de volume)

Ou encore : Puisque le tétraèdre est régulier, on peut aussi dire que son volume est $\frac{\sqrt{2}}{12}AB^3 = 16\sqrt{6}$ (en unité de volume)

2-a. $P(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$; $Q(-1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$; $R(1, \sqrt{3}, -\sqrt{2})$ et $S(1, -\sqrt{3}, -\sqrt{2})$. O est bien le milieu du segment $[PR]$ et celui du segment $[QS]$, donc $PQRS$ est un parallélogramme. De plus, les diagonales $[PR]$ et $[QS]$ sont de même longueur et de supports perpendiculaires. Donc, $PQRS$ est un carré.

b. Le carré $PQRS$ a pour côté $\frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$. Ainsi l'aire de $PQRS = 12$ (en unité d'aire)

	5	4	3	3
5	10	9	8	8
4	9	8	7	7
3	8	7	6	6
3	8	7	6	6

3. • La probabilité que le 0 soit caché est $\frac{1}{4}$; donc $p(E) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

• Pour un lancer, les sommes possibles sont 5, 4 et 3. En se servant d'un tableau à double entrée pour ces deux lancers (voir le tableau), on déduit que $p(F) = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2}$

4-a. $X(\Omega) = \{6; 7; 8; 9; 10\}$ et d'après le tableau précédent, $p(X = 6) = \frac{1}{4}$; $p(X = 7) = \frac{1}{4}$; $p(X = 8) = \frac{5}{16}$; $p(X = 9) = \frac{2}{16}$ et $p(X = 10) = \frac{1}{16}$ et $E(X) = \frac{15}{2}$

b. La probabilité que F ne soit pas réaliser sur les n répétitions est : $\frac{1}{2^n}$ donc $p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$

Exercice 2

1. $\Delta = -7 - 24i = (3 - 4i)^2$ ainsi $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 2 - 3i$

2-a-i. On a : $AB = 5$ et $r - r' = 6$ alors $AB < r - r'$ donc tout point de $(\mathcal{C}')$ est intérieur au cercle $(\mathcal{C})$

ii. Soit $(\mathcal{C}'')$ le cercle de centre Ω et de rayon r''

• $(\mathcal{C}'')$ est extérieurement tangent à $(\mathcal{C}')$ alors $\Omega B = r' + r'' = 1 + r''$

• $(\mathcal{C}'')$ est intérieurement tangent à $(\mathcal{C})$ alors $\Omega A = |r - r''| = 7 - r''$ (car $r'' \leq r$)

D'où $\Omega A + \Omega B = 8$

b-i. $\overrightarrow{AO'} = -\overrightarrow{BO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{5}{2}\frac{\overrightarrow{BA}}{BA}$ (car $BA = 5$)

On a : $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'\Omega} = -\frac{5}{2}\vec{i} + x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x - \frac{5}{2}\right)\vec{i} + y\vec{j}$. D'où $\Omega A = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$

De même $\overrightarrow{B\Omega} = \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{O'\Omega} = \frac{5}{2}\vec{i} + x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x + \frac{5}{2}\right)\vec{i} + y\vec{j}$. D'où $\Omega B = \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$

ii. De **2-b-i.** on déduit que $\Omega B = \sqrt{\Omega A^2 + 10x}$. Ainsi $\Omega A + \Omega B = 8 \Longrightarrow \Omega A + \sqrt{\Omega A^2 + 10x} = 8$

Or $\Omega A + \sqrt{\Omega A^2 + 10x} = 8 \Rightarrow \sqrt{\Omega A^2 + 10x} = 8 - \Omega A \Rightarrow \Omega A^2 + 10x = (8 - \Omega A)^2$. D'où $\Omega A = -\frac{5}{8}x + 4$

iii. Si $\Omega A + \Omega B = 8$ alors $\Omega A = -\frac{5}{8}x + 4$ or $d(\Omega, (D)) = \sqrt{\left(x - \frac{32}{5}\right)^2} = \left|x - \frac{32}{5}\right| = -x + \frac{32}{5}$ (**2-b-ii.**)

D'où $\frac{\Omega A}{d(\Omega, (D))} = \frac{5}{8}$. Ω appartient alors à la conique d'excentricité $\frac{5}{8}$, de foyer A et de directrice (D) (cette conique est une ellipse)

Problème

A/ 1. Les solutions de (E_0) sont des fonctions de la forme : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$. $f'(x) + f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$. D'où f est solution de (E)

3-a. g solution de $(E) \Leftrightarrow g'(x) + g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = f'(x) + f(x)$. Ainsi $(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$ d'où $g - f$ est solution de (E_0)

b. g solution de $(E) \Leftrightarrow g - f$ est solution de (E_0) d'où $g(x) - f(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}$ puis les solutions de (E) sont sous la forme de : $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln(x)$

B/ 4. $D_f =]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite (OJ) est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$

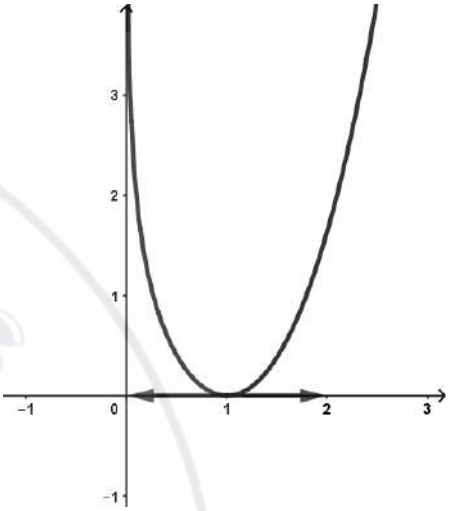
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la branche infinie est une branche parabolique verticale.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

6-a. La fonction $x \mapsto -\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0,+\infty[$. D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x) = x^2 - 1/x$

b. f est alors décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $]1,+\infty[$

c. Voir la figure



7. Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$. Donc les primitives de f sont sous la forme : $x \mapsto \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{2}{3}x - x\ln x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

8-a. $A_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x - x\ln x\right]_{1/n}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$

b. On déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{3}{4}$

9-a. $\forall t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right] \subset]0,1]$, alors $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le f(t) \le f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ car f est décroissante sur $]0,1]$ ainsi $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\,\mathrm{d}t \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t$

Ainsi $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b. $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ par suite :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'où $\dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) + f\left(\dfrac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right] \le A_n \le \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$

10-a. On a : $S_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right] = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right] + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right) \le A_n + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

De même, $A_n \le \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right] \le \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right] = S_n$

Ainsi $A_n \le S_n$. D'où $A_n \le S_n \le A_n + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[A_n + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{3}{4}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$ (Théorème des gendarmes)

11. • Pour $n = 1$, $1^3 = 1^2(1+1)^2/2^2$ donc le résultat est vrai à l'ordre 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \ge 1$, montrons que cela reste vrai à l'ordre $n+1$

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$ (par hypothèse de récurrence)

Or $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

Le résultat reste vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où la récurrence est établie.

12-a. Pour $n \ge 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)$ or $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{n!}{n^n}$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b. $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{1}{3n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 - \frac{1}{3n}\times n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$

D'où $S_n = \dfrac{1}{3n^4} \times \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) = \dfrac{1}{12n^4}(n(n+1))^2 - \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) - \dfrac{1}{3}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{12n^4}(n(n+1))^2 = \dfrac{1}{12}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{12} = -1$

13 $T_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n} \Rightarrow \ln(T_n) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(T_n) = -1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \mathrm{e}^{-1}$

Épreuve 10

Exercice 1

1-a. Pour que 193 soit premier, il faut et il suffit qu'il soit non divisible par tout nombre premier dont le carré est inférieur à 193. Ces nombres sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et aucun d'aux ne divise 193. Donc 193 est un nombre premier.
b. 193 étant premier alors tout entier naturel strictement plus petit que 193 est premier avec 193. Comme $a < 193$ alors a et 193 sont premiers entre eux et d'après le petit théorème de Fermat $a^{192} \equiv 1[193]$
2-a. $83 \times 155 - 192 \times 67 = 1$ donc le couple $(155, 67)$ est solution de (E)
b. L'ensemble solution de (E) est : $\{(155 + 192k; 67 + 83k)\ ,k \in \mathbb{Z}\}$ (Faire le détail de la résolution)
3-a. $A = \{0, 1, \cdots, 191, 192\}$. Rappelons que si $a \equiv b[n]$ alors $a^k \equiv b^k[n]$
On a : $a^{83} \equiv f(a)[193]$ ou encore $f(a) \equiv a^{83}[193]$. De même $a^{155} \equiv g(a)[193]$ ou encore $g(a) \equiv a^{155}[193]$
Ainsi $g(f(a)) \equiv f(a)^{155}[193]$ or $f(a)^{155} \equiv \left(a^{83}\right)^{155}[193]$. D'où $g(f(a)) \equiv a^{83\times155}[193]$
$83\times155 = 12865 = 67\times192+1$. Ainsi $a^{83\times155} = a^{67\times192+1}$. Or $a^{192} \equiv 1[193]$ alors $a^{192\times67} \equiv 1^{67}[193]$ et $a^{67\times192+1} \equiv a[193]$
D'où $g(f(a)) \equiv a[193]$. Comme $a \in A$ et $g(f(a)) \in A$ et que a est le reste de la division euclidienne de $g(f(a))$ par 193 alors on conclut que $g(f(a)) = a$. En effet $a \in A$ et $g(f(a)) \in A \Rightarrow |g(f(a)) - a| \leq 192$ et $g(f(a)) \equiv a[193] \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $g(f(a)) - a = 193k$ on déduit de ces deux propriétés que $193|k| \leq 192 \Rightarrow k = 0$ d'où $g(f(a)) = a$.
b. De la même façon : $a^{83} \equiv f(a)[193]$ ou encore $f(a) \equiv a^{83}[193]$ et $a^{155} \equiv g(a)[193]$ ou encore $g(a) \equiv a^{155}[193]$
Ainsi $f(g(a)) \equiv g(a)^{83}[193]$ or $g(a)^{83} \equiv \left(a^{155}\right)^{83}[193]$. D'où $f(g(a)) \equiv a^{83\times155}[193]$ or $a^{83\times155} \equiv a[193]$
D'où $f(g(a)) \equiv a[193]$ puis $f(g(a)) = a$ (D'après **3-a.**)
Ainsi $f \circ g = g \circ f = Id_A$

Exercice 2

1. $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ alors $f\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{i\pi/3} + \mathrm{e}^{-i\pi/3}) = \dfrac{1}{3}$. D'où $K\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$

2. $f(z) = \dfrac{2}{3}\cos(\alpha) \Leftrightarrow z \neq 0$ et $z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$. $\Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4 = -4\sin^2(\alpha) = (2i\sin\alpha)^2$
(E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \cos\alpha - i|\sin\alpha|$, $z_2 = \cos\alpha + i|\sin\alpha|$. $(S) = \{\mathrm{e}^{i\alpha}; \mathrm{e}^{-i\alpha}\}$

3-a. En posant $Z = z^2$, $(E') \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 2\cos(\alpha)Z + 1 = 0 \\ Z = z^2 \end{cases}$
On déduit d'après **2.** que (E') admet quatre solutions : $(S') = \{\mathrm{e}^{-i\alpha/2}; -\mathrm{e}^{-i\alpha/2}; \mathrm{e}^{i\alpha/2}; -\mathrm{e}^{i\alpha/2}\}$
b. $\mathrm{e}^{-i\alpha/2} = \overline{\mathrm{e}^{i\alpha/2}}$ et $-\mathrm{e}^{-i\alpha/2} = -\overline{\mathrm{e}^{i\alpha/2}}$
c. De la résolution de (E'), il vient que : $z^4 - 2\cos(\alpha)z + 1 = \left(z - \mathrm{e}^{-i\alpha/2}\right)\left(z - \mathrm{e}^{i\alpha/2}\right)\left(z + \mathrm{e}^{-i\alpha/2}\right)\left(z + \mathrm{e}^{i\alpha/2}\right)$
$= (z^2 - 2\cos(\alpha/2)z + 1)(z^2 + 2\cos(\alpha/2)z + 1)$
Ainsi $\forall\ x \in \mathbb{R}\ P(x) = x^4 - 2\cos(\alpha)x^2 + 1 = \left[x^2 - 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)x + 1\right]\left[x^2 + 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)x + 1\right]$

4-a. $2\left(z - \dfrac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow z' - \dfrac{1}{3} = (1-i)\left(z - \dfrac{1}{3}\right)$. h a pour expression complexe sous la forme $z' = az + b$ donc h est une similitude directe. On vérifie facilement que le seul point invariant par h est le point K. D'où h est alors une similitude directe de centre $K\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

b. h est la composée de la rotation r de centre K , d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre K , de rapport $\sqrt{2}$ (forme réduite de h)

Problème

I/ 1-a. u est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $u'(x) = -4x\ln(x)$. Ainsi u est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	‖	+	0	−	
$u(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$
b. Sur $]0, 1]$, $u(x) > 0$ donc u ne s'annule pas sur $]0, 1]$. $u(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ alors puisque u est continue sur $]1 + \infty[$, alors il existe au moins un α sur $]1, +\infty[$ tel que $u(\alpha) = 0$. De plus sur $]1, +\infty[$, u est strictement décroissante donc bijective. Donc on conclut que ce réel α est unique. Donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$
$u(1.89) \simeq 0.024$ et $u(1.9) \simeq -0.024$ alors $u(1.89) \cdot u(1.9) < 0$ d'où $1.89 \leq \alpha \leq 1.9$
c. D'après ce qui précède, $u(x) > 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $u(x) \leq 0$ pour $x \in [\alpha, +\infty[$

2-a. La fonction $\mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0, +\infty[$ ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\ln x = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}$. D'où $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$

b. $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2}$ or $u(\alpha)=0\Rightarrow\dfrac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$. D'où $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2\alpha^2}$	↘	0

c. D'après **2-a.**, on déduit que f est strictement croissante sur $]0,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

b. f s'annule en un seul point $x=1$. Ainsi $f(x)<0$ sur $]0,1[$ et $f(x)\geq0$ sur $[1,+\infty[$

B/ 3-a. U_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q=1-x\neq1$ car $x\in]1,2[$. Ainsi $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)^k=\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}=\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{x}$

b. $\forall\ x\in]1,2[$ et $t\in[1,x]$, $\sum\limits_{k=0}^{n}(1-t)^k=\dfrac{1-(1-t)^{n+1}}{t}\Rightarrow\int_1^x\sum\limits_{k=0}^{n}(1-t)^k\ \mathrm{d}t=\int_1^x\dfrac{1-(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t$ et par linéarité de l'intégrale, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}\int_1^x(1-t)^k\ \mathrm{d}t=\int_1^x\dfrac{1-(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{-(1-x)^{k+1}}{k+1}=\ln(x)-\int_1^x\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t$ puis un changement d'indice dans la somme donne $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{-(1-x)^k}{k}=\ln(x)-\int_1^x\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t$. D'où $V_n=\ln(x)-\int_1^x\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t$

c. Pour $x\in]1,2[$ et $t\in]1,x[$, $\dfrac{1}{t}\leq1\Rightarrow\left|\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\leq|1-t|^{n+1}$ puis $\int_1^x\left|\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\ \mathrm{d}t\leq\int_1^x(t-1)^{n+1}\ \mathrm{d}t=\dfrac{(x-1)^{n+2}}{n+2}$

$|1-t|=t-1$ car $t\in]1,x[$

d. D'après **3-b.**, $V_n-\ln(x)=-\int_1^x\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t\Rightarrow|\ln(x)-V_n|=\left|\int_1^x\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\ \mathrm{d}t\right|\leq\int_1^x\left|\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\ \mathrm{d}t$

Or $\int_1^x\left|\dfrac{(1-t)^{n+1}}{t}\right|\ \mathrm{d}t\leq\dfrac{(x-1)^{n+2}}{n+2}$ d'après **3-c.** d'où $|\ln(x)-V_n|\leq\dfrac{(x-1)^{n+2}}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(x-1)^{n+2}}{n+2}=0$ car $0<x-1<1$ ($x\in]1,2[$) ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}|\ln(x)-V_n|=0\Rightarrow\ln(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(1-x)^k}{k}$

4. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]1,2[$, on pose $W_n=-\dfrac{1}{1+x^2}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{(1-x)^k}{k}$. On a bien $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}W_n$ pour tout $x\in]1,2[$

C/ 5-a. $\forall\ t\in]0,1]$, $f(t)\leq0$ et $\forall\ t\in[1,+\infty[$, $f(t)\geq0$. Ainsi si $0<x<1$ alors $F(x)\geq0$ et si $x\geq1$, $F(x)\geq0$. D'où $F(x)\geq0\ \forall\ x>0$.

b. Pour $t\in]0,+\infty[$, $f(t)$ est continue donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}=f(x)$

6-a. φ étant la bijection réciproque de la fonction réciproque sur $[0,\pi/2[$ donc φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

On a : $\tan(\varphi(x))=x\Rightarrow\varphi'(x)\times\tan'(\varphi(x))=1\Rightarrow\varphi'(x)=\dfrac{1}{\tan'(\varphi(x))}$ or $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$. Ainsi $\tan'(\varphi(x))=1+x^2$

D'où $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=1/(1+x^2)$)

b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(0)=1=h(0)$. h est alors continue en 0

7-a. $\forall x\in]0,+\infty[$, $F(x)=[\varphi(t)\ln(t)]_1^x-\int_1^x\dfrac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t$. D'où $F(x)=\varphi(x)\ln(x)-\int_1^x h(t)\ \mathrm{d}t$

b. Pour $x>0$, $\varphi(x)\ln x=x\ln(x)\times h(x)$ ainsi $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)\ln(x)=0$ car $\lim\limits_{x\to0}x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0}h(x)=1$

8-a Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[\Rightarrow$ il existe une fonction ψ définie sur $]0,+\infty[$ telle que $\psi'(t)=\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$. Ainsi $G(x)=\psi(x)-\psi\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme les fonction $\psi(x)$ et $-\psi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sont dérivable sur $]0,+\infty[$ alors G est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables.

$\forall\ x\in]0,+\infty[$, $G'(x)=\psi'(x)+\dfrac{1}{x^2}\psi'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{-\ln(x)}{1+1/x^2}=0$. D'où $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $G'(x)=0$

b. $G(1)=0$. Comme $G'(x)=0$ alors G est une constante et comme $G(1)=0$ alors G est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$

c. pour tout $x>0$, $G(x)=[\varphi(t)\ln t]_{1/x}^x-\int_{\frac{1}{x}}^x\dfrac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t=\left[\varphi(x)+\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\ln(x)-\int_{\frac{1}{x}}^x h(t)\ \mathrm{d}t$ (Intégration par parties)

d. On pose, pour $x>0$, $\phi(x)=\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)+\varphi(x)$. ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\phi'(x)=\varphi'(x)-\dfrac{1}{x^2}\varphi'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ainsi $\phi'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+1/x^2}=0$ donc ϕ est une constante sur $]0,+\infty[$. Ainsi $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $\phi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)+\varphi(x)\right)$

Ainsi $\phi(x)=\dfrac{\pi}{2}\ \forall\ x>0$. D'où $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\varphi(x)$

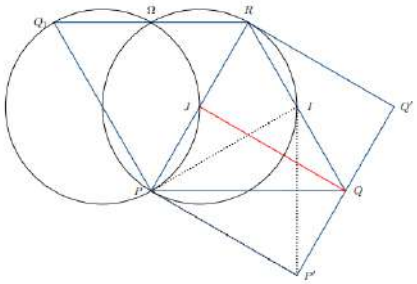
e. $G(x)=0\Rightarrow\left[\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)+\varphi(x)\right]\ln(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x h(t)\ \mathrm{d}t$ et comme $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)+\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}$. D'où $\ln(x)=\dfrac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^x h(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x>0$

Épreuve 11

Exercice 1

1-a. $f(P) = t \circ r(P) = t(P) = P'$ Donc le point P' vérifie $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{JQ}$. P' est tel que $JPP'Q$ soit un parallélogramme

$f(P) = t \circ r(Q) = t(R) = Q'$ Donc le point P' vérifie $\overrightarrow{RQ'} = \overrightarrow{JQ}$. Q' est tel que $JQQ'R$ soit un parallélogramme



b. (IJ) passe par les milieux de $[RP]$ et $[QR]$ alors JIR est de même nature de PQR donc JIR est un triangle équilatéral direct.

Comme PQR est un triangle équilatéral alors (JQ) est la médiatrice du segment $[PR]$. Puisque J est le milieu de $[QQ_1]$, l'image PQ_1R du triangle équilatérale direct PQR par la symétrie orthogonale d'axe (PR) est un triangle équilatérale indirect. r est la rotation de centre P et d'angle $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \dfrac{\pi}{3}$. Donc $r(B) = Q_1$. Ensuite

$f(R) = t \circ r(R) = t(Q_1) = J \Rightarrow f(R) = J$

c. $f = t \circ r$ est une rotation de même angle que r c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{3}$. $f(R) = J$ et JIR est équilatéral direct entraîne que le centre de f est I. On conclut que f est la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

$f(P) = P'$ alors le triangle IPP' est équilatéral direct.

2-a. L'angle de s est $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}) = -\dfrac{\pi}{6}$. Donc l'angle de s est $-\dfrac{\pi}{6}$

Le rapport de $s$est $\dfrac{PI}{JR}$. Or $PI = PR\cos(\pi/6) = 2JR\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc le rapport de s est $\sqrt{3}$

On a : $(\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IP'}) = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$ angle de s. De plus $\dfrac{IP'}{RI} = \dfrac{IP}{RI} = \sqrt{3}$ rapport de s. Ainsi les trois conditions : $s(R) = I$, $(\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{IP'})$ = angle de s et $\dfrac{IP'}{RI}$ = rapport de s suffisent pour dire que $s(I) = P'$

b.

Antécédent	Ω	J	R	I
Image par s	Ω	P	I	P'

Puisque les similitudes planes directes conservent les angles, on peut lire dans le tableau que : angle $s = (\overrightarrow{\Omega R}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI})$. Or $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PI})$ parce que le point J appartient au segment $[PR]$. Donc $(\overrightarrow{\Omega R}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PI})$ et comme les quatre points Ω, R, P et I ne sont pas alignés, ils sont cocycliques. De même $-\dfrac{\pi}{6}$ =angle de $s = (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega P})$. D'un autre côté, la droite (Q_1J) étant la bissectrice du triangle équilatérale indirect PQ_1R, l'angle $(\overrightarrow{Q_1J}, \overrightarrow{Q_1P})$ vaut $-\dfrac{\pi}{6}$. On en déduit que $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega P}) = (\overrightarrow{Q_1J}, \overrightarrow{Q_1P})$ puis que les points Ω, J, P, Q_1 sont cocycliques

En résumé, le point Ω appartient à l'intersection des deux cercles (C_1) et (C_2) où (C_1) est le cercle contenant les points P, I et R et (C_2) le cercle contenant les points P, J et Q_1. De plus le point Ω est différent de P parce que Ω est fixé par s et P non. Ces conditions définissent parfaitement le point Ω.

Exercice 2

1. $D_g =]-\infty; 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$.

g est continue et dérivable sur D_g de dérivée :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x + x(x-1) - (x-1)^2}{x(x-1)^2}$$

D'où $g'(x) = \dfrac{-1}{x(x-1)^2}$. Ainsi g est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖	↘	0

2-a. D'après **1.**, g ne peut s'annuler que sur $]0, 1[$. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ et $g(1/2) = -2$ d'après le théorème de valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe un α tel que $g(\alpha) = 0$. De plus g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ alors on déduit que cette valeur de α est unique. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < 1/2$.

b. On déduit alors que : $g(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, \alpha[$ et sur $]1, +\infty[$ et $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha, 1[$

3-a. $\lim\limits_{x\to1} x\ln\left(\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|\right) = -\infty$. Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \exp\left(\lim\limits_{x\to1} x\ln\left(\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|\right)\right) = 0 = f(1)$. Donc f est continue en 1

b. • Pour $x \to 1^-$, $1 - x = \exp(\ln(1-x))$ ainsi $\dfrac{f(x)}{1-x} = \exp\left(x\ln\left(-1 + \dfrac{1}{x}\right) - \ln(1-x)\right) = \exp\left(x\ln\left(\dfrac{(1-x)^{1-1/x}}{x}\right)\right)$

$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{1-1/x}=1$ alors $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x\ln\left(\dfrac{(1-x)^{1-1/x}}{x}\right)\right)=0$ d'où $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{1-x}=1$ puis $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$

• Pour $x\to1^+$, $x-1=\exp(\ln(x-1))$ ainsi $\dfrac{f(x)}{x-1}=\exp\left(x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-\ln(x-1)\right)=\exp\left(x\ln\left(\dfrac{(x-1)^{1-1/x}}{x}\right)\right)$

$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{1-1/x}=1$ alors $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x\ln\left(\dfrac{(x-1)^{1-1/x}}{x}\right)\right)=0$ d'où $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

c. De **3-b.** on déduit que $f'_g(1)=-1$ et $f'_d(1)=1$ donc f n'est pas dérivable en 1 et admet deux demies tangentes en 1 de pente -1 (pour la tangente à gauche) et 1 (pour la tangente à droite)

4-a. f est clairement dérivable sur $]-\infty,0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. On note : $f(x)=\exp(h(x))$ avec $h(x)=x\ln\left(\left|1-\dfrac{1}{x}\right|\right)$

• Dérivabilité de f en 0 : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ donc f est continue en 0. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc f admet une tangente verticale au point $x=0$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

• $\forall\, x\in\,]-\infty;0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x)=h'(x)\exp(h(x))$ or $h'(x)=\ln\left(\left|1-\dfrac{1}{x}\right|\right)+x\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right]=\ln\left(\left|1-\dfrac{1}{x}\right|\right)+\dfrac{1}{x-1}$

Ainsi $f'(x)=\left(\ln\left|1-\dfrac{1}{x}\right|+\dfrac{1}{x-1}\right)\exp\left(x\ln\left(\left|1-\dfrac{1}{x}\right|\right)\right)$. D'où $f'(x)=g(x)f(x)$

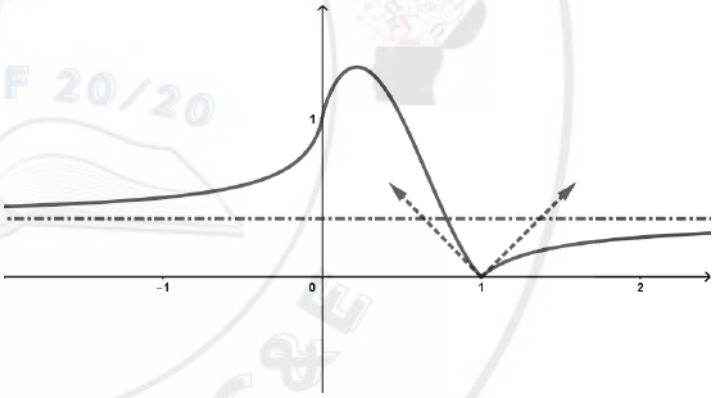
Ainsi d'après **2-b.** on conclut que f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$, sur $]0,\alpha[$ et sur $]1,+\infty[$ puis f est décroissante sur $[\alpha,1[$. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left|1-\dfrac{1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1-1/x)}{1/x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\chi'(0)=-1$ avec $\chi(x)=\ln(1-x)$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^{-1}$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln\left|1-\dfrac{1}{x}\right|=-1$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\mathrm{e}^{-1}$ (Voir tableau de variation ci-dessous)

b. $g(\alpha)=0\Rightarrow\ln\left(\left|\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right|\right)=\dfrac{1}{1-\alpha}$ ainsi $f(\alpha)=\exp\left(-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)$. $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ alors $1<f(\alpha)<\mathrm{e}$ (un encadrement plus fin donne $1.3<f(\alpha)<1.35$)

5.

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	e^{-1}	↗	1	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	e^{-1}



6-a. On pose $\psi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}$. Pour $t>0$, $\psi(t)>0$. Ainsi si $x<\ln2$, $F(x)<0$ et si $x\geq\ln2$, $F(x)\geq0$

b. $\psi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors ψ admet une primitive telle que $\Psi'(x)=\psi(x)$. Ainsi $F(x)=\Psi(x)-\Psi(\ln2)$. Comme Ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors on conclut que F est dérivable sur I de dérivée $F'(x)=\Psi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$

c. Pour $x>0$, $F'(x)>0$ alors F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

7-a. On pose $u(t)=\sqrt{\mathrm{e}^t-1}$. $u(t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. $u'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\dfrac{u^2+1}{2u}$. Pour $t=\ln2$, $u=1$ et pour $t=x$, $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$. On a : $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=2\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=2[Arctanu]_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})-\dfrac{\pi}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})-\dfrac{\pi}{2}\right]=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})-\dfrac{\pi}{2}\right]=\dfrac{\pi}{2}$

8. F est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc F est réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $F(I)=]-\pi/2;\pi/2[$

F est une bijection alors : $\forall\, y\in\,]-\pi/2;\pi/2[$, $\exists!\, x\in I: y=f(x)\Leftrightarrow y=2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\tan^2\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^x-1$

Et par suite $x=\ln\left[1+\tan^2\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$. D'où F^{-1} est la fonction définie sur $]-\pi/2;\pi/2[$ par : $x\mapsto\ln\left[1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

Problème

A/ 1. Pour $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n=2U_n^2$. Or $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $U_n\neq0$. En effet par absurde, supposons que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $U_n=0$ alors comme $U_{n+1}=2U_n^2+U_n\Rightarrow U_{n+1}=0$. Dès lors, la suite (U_n) serait une suite constante nulle. Ce qui est absurde car $U_0\neq0$. Ainsi $U_{n+1}-U_n=2U_n^2>0$ et la suite (U_n) est strictement croissante.

2. Notons $l=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ comme $U_{n+1}=2U_n^2+U_n$ alors $l=2l^2+l\Rightarrow2l^2=0$ d'où $l=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

3-a. $U_0+2U_0^2>0\Leftrightarrow U_0(1+2U_0)>0\Leftrightarrow U_0>0$ ou $U_0<-1/2$ (Dresser et se servir du tableau de signe de $U_0+2U_0^2$)

b. Si $U_0 + 2U_0^2 > 0$ alors $U_1 = 2U_0^2 + U_0 > 0$ donc $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme (U_n) est strictement croissante, si (U_n) était convergente $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ ce qui est impossible. D'où (U_n) diverge.

4-a. $U_0 + 2U_0^2 < 0 \Leftrightarrow U_0(1 + 2U_0) < 0 \Leftrightarrow -1/2 < U_0 < 0$ (Dresser et se servir du tableau de signe de $U_0 + 2U_0^2$)

b. • Si $U_0 + 2U_0^2 < 0$, $-1/2 < U_0 < 0$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$ et montrons que cela reste vrai à l'ordre $n + 1$

$U_{n+1} = U_n + 2U_n^2$ or $-1/2 < U_n < 0$ (*) par hypothèse de récurrence alors $0 \leq 2U_n^2 \leq 1/2$ (**) on conclut de (**) et (*) que $-1/2 < U_{n+1}$. On pose $\varphi(x) = 2x^2 + x$ pour $x \in]-1/2, 0[$. $\varphi'(x) = 4x + 1 \Rightarrow \varphi$ est strictement décroissante sur $]-1/2, -1/4[$ et strictement croissante sur $]-1/4, 0[$. Or $\varphi(-1/2) = \varphi(0) = 0$ on conclut que pour $x \in]-1/2, 0[$, $\varphi(x) < 0$. Comme $U_{n+1} = \varphi(U_n)$ avec $-1/2 < U_n < 0$ alors $U_{n+1} < 0$. D'où $-1/2 < U_{n+1} < 0$. Ordre $n + 1$ vrai aussi.

c. Comme la suite (U_n) est croissante et majorée alors elle converge.

B/1-a. Soit $M(z)$. $f(M) = M \Leftrightarrow z = 2z^2 + z \Leftrightarrow z = 0$. Donc le point O d'affixe $z = 0$ est le seul point invariant par f

b. Soit M'' d'affixe z'' tel que $M'' = f \circ f(M)$ alors $z'' = 2(2z^2 + z)^2 + 2z^2 + z \Rightarrow z'' = 8z^4 + 8z^3 + 4z^2 + z$

$M = f \circ f(M) \Leftrightarrow z = 8z^4 + 8z^3 + 4z^2 + z \Leftrightarrow 4z^2[2z^2 + 2z + 1] = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = (-1 - i)/2$ ou $z = (-1 + i)/2$

Les points invariants par $f \circ f$ sont les points d'affixes $z = 0$; $z = \dfrac{-1-i}{2}$; $z = \dfrac{-1+i}{2}$

2-a. Soit $A' = f(A)$ alors $Z_{A'} = 2 \times \dfrac{-1}{4} + \dfrac{i}{2} = \dfrac{-1+i}{2}$. Soit $B' = f(B)$. De même $Z_{B'} = \dfrac{-1+i}{2}$

b. Soit M_0 d'affixe z_0

$f(M) = f(M_0) \Leftrightarrow 2z^2 + z = 2z_0^2 + z_0 \Leftrightarrow 2(z^2 - z_0^2) + z - z_0 = 0 \Leftrightarrow (z - z_0)(2z + 2z_0 + 1) = 0$

Ainsi $f(M) = f(M_0) \Leftrightarrow z = z_0$ ou $2z = -2z_0 - 1$

• $z = z_0$ traduit le fait que $M_0 = M$

• $2z = -2z_0 - 1$ soit $z = -z_0 - 1/2$ traduit le fait que $M = s(M_0)$ où s est une similitude directe du plan de rapport $k = |-1| = 1$ et d'angle $\theta = arg(-1) = \pi$

Autrement dit s est une rotation d'angle π et de centre Ω dont nous allons déterminer l'affixe ω

$\omega = -\omega - \dfrac{1}{4} \Rightarrow \omega = -\dfrac{1}{4}$. Par conséquent, s est une rotation d'angle π et de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{4}$

C/1-a. (P) : $y^2 = -2 \times \dfrac{1}{4}x$ donc (P) est une parabole de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$, de foyer $F(-1/8, 0)$, de sommet $O(0, 0)$ et de directrice $x = \dfrac{1}{8}$

b. $(\mathcal{H})$: $\dfrac{y^2}{3/16} - \dfrac{(x+1/4)^2}{3/16} = 1$ alors $(\mathcal{H})$ est une hyperbole de sommets $S_1(-1/4, \sqrt{3}/4)$ et $S_2(-1/4, -\sqrt{3}/4)$; des asymptotes $y = -x - 1/4$ et $y = x + 1/4$

2-a. $M(x, y) \in (P_1) \Leftrightarrow 2y^2 + x < 0 \Leftrightarrow -2y^2 - x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + x + 1/2 > 2x^2 + 2x + 1/2$

Or $2x^2 + 2x + 1/2 = 2(x + 1/2)^2 > 0$ car $-1/2 < x < 0$. Ainsi $M(x, y) \in (P_1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 + x + 1/2 > 0 \Rightarrow M \in (\mathcal{H}_1)$

D'où (P_1) est inclus dans $(\mathcal{H}_1)$

b. $\left|\left|\overrightarrow{MK}\right|\right| = \sqrt{(x + 1/2)^2 + y^2}$. Ainsi $\left|\left|\overrightarrow{MK}\right|\right| < 1/2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x < 0$

Soit $M(x, y) \in (P_1)$ alors $-1/2 < x < 0$ et $2y^2 + x < 0 \Leftrightarrow -1/2 < x < 0$ et $y^2 < -x/2 \Leftrightarrow -1/2 < x < 0$ et $x^2 + y^2 + x < x^2 + x/2$ or $x^2 + x/2 = x(x + 1/2) < 0$ car $-1/2 < x < 0$. Ainsi $M \in (P_1)$ $x^2 + y^2 + x < 0 \Rightarrow M \in (E)$

D'où (P_1) est inclus dans (E)

c. Soit $M' = f(M)$ alors $z' = 2z^2 + z \Rightarrow x' = 2x^2 - 2y^2 + x$. Si $M \in (\mathcal{H}_1)$ alors $-1/2 < x < 0$ et $2x^2 - 2y^2 + x + 1/2 > 0$

Ainsi si $M \in (\mathcal{H}_1)$, l'abscisse de $f(M)$ est : $x' = 2x^2 - 2y^2 + x > -1/2$ car $2x^2 - 2y^2 + x + 1/2 > 0$

Comme $-1/2 < x < 0$ alors $(x + 1/4)^2 < 1/16 \Rightarrow 2(x + 1/4)^2 - 1/8 < 0$ or $2x^2 - 2y^2 + x = 2(x + 1/4)^2 - 2y^2 - 1/8$

Ainsi $x' = 2x^2 - 2y^2 + x < 0$. Par suite $-1/2 < 2x^2 - 2y^2 + x < 0$ d'où si M appartient à $(\mathcal{H}_1)$ alors $f(M)$ est tel que son abscisse appartient à l'intervalle $]-1/2; 0]$

3. La suite (M_n) est bien définie et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n \in (\mathcal{H}_1)$. En effet, par récurrence : $M_0 \in (\mathcal{H}_1)$ alors $M_1 = f(M_0) \in (P_1) \subset (\mathcal{H}_1)$ d'après **2.** ; donc vrai à l'ordre 1. Supposons le résultat est vrai jusqu'à un ordre n, alors $M_n \in (\mathcal{H}_1)$ et $M_{n+1} = f(M_n) \in (P_1) \subset (\mathcal{H}_1)$ d'après **2.** donc pour tout n, $M_n \in (\mathcal{H}_1)$. On vient de montrer également que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \in (P_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \in (P_1)$ alors $-1/2 < x_n < 0 \Rightarrow 0 < x_n^2 < 1/4$ et $y_n^2 < -x_n/2 \Rightarrow 0 < y_n^2 < 1/4$ puis on déduit que $0 < x_n^2 + y_n^2 < 1/2 \Rightarrow 0 < a_n < 1/\sqrt{2}$. Donc la suite (a_n) est bornée.

$M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow x_{n+1} + iy_{n+1} = (2x_n^2 - 2y_n + x_n) + i(4x_n y_n + y_n) \Rightarrow x_{n+1} = 2x_n^2 - 2y_n + x_n$ et $y_{n+1} = 4x_n y_n + y_n$

$(x_n^2 + y_n^2) - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) = (x_n^2 - x_{n+1}^2) + (y_n^2 - y_{n+1}^2) = (x_n - x_{n+1})(x_n + x_{n+1}) + (y_n - y_{n+1})(y_n + y_{n+1})$ ainsi :

$(x_n^2 + y_n^2) - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) = [x_n - (2x_n^2 - 2y_n + x_n)][x_n + (2x_n^2 - 2y_n + x_n)] + [y_n - (4x_n y_n + y_n)][y_n + (4x_n y_n + y_n)]$

$(x_n^2 + y_n^2) - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) = 4[-x_n^4 - y_n^4 - 2x_n^2 y_n^2 - x_n y_n^2 - x_n^3] = 4[-(x_n^4 + y_n^4 + 2x_n^2 y_n^2) - x_n(y_n^2 + x_n^2)]$

Or $4[-(x_n^4 + y_n^4 + 2x_n^2 y_n^2) - x_n(y_n^2 + x_n^2)] = 4[-(x_n^2 + y_n^2)^2 - x_n(y_n^2 + x_n^2)] = -4(x_n^2 + y_n^2)(x_n^2 + y_n^2 + x_n)$

Or comme $M_n \in (P_1)$ alors $M_n \in (E)$ d'après **2.** alors $x_n^2 + y_n^2 + x_n < 0 \Rightarrow -4(x_n^2 + y_n^2)(x_n^2 + y_n^2 + x_n) > 0$

Alors $(x_n^2 + y_n^2) - (x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) > 0 \Rightarrow a_n^2 - a_{n+1}^2 > 0$ et comme la suite (a_n) est positive, $a_n^2 - a_{n+1}^2 > 0$ est équivalent à $(a_n - a_{n+1})(a_n + a_{n+1}) > 0 \Rightarrow a_n - a_{n+1} > 0$ (car $a_n + a_{n+1} > 0$) puis on déduit que la suite (a_n) est strictement décroissante. Étant bornée et strictement décroissante, nous en déduisons que la suite (a_n) converge.

Épreuve 12

Exercice 1

1. $|j| = 1$; $j^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1 = |j|$. Ainsi $j^3 = j \cdot \overline{j}$

2. L'écriture complexe de f est sous la forme $z' = az + b$ avec $a = \dfrac{1}{3}j^2$ et $b = 0$. Donc c'est une similitude plane directe d'angle $\theta = arg(a) = 2arg(j) = \dfrac{4\pi}{3}$; de rapport $k = |a| = \dfrac{1}{3}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{b}{1-a} = 0$ c'est-à-dire l'origine.

3-a. Un point M' d'affixe x' appartient à $f(\Sigma)$ si et seulement si il existe un point M d'affixe z de Σ tel que $M' = f(M)$ c'est-à-dire $z' = \dfrac{1}{3}j^2 z$. Ainsi

$$M'(z') \in f(\Sigma) \Leftrightarrow M(z) \in \Sigma \Leftrightarrow jz^2 + \overline{jz^2} - \frac{10}{3}z\overline{z} + 192 = 0 \Leftrightarrow j\left(\frac{3}{j^2}z'\right)^2 + \overline{j\left(\frac{3}{j^2}z'\right)^2} - \frac{10}{3}\left(\frac{3}{j^2}z'\right)\overline{\left(\frac{3}{j^2}z'\right)} + 192 = 0$$

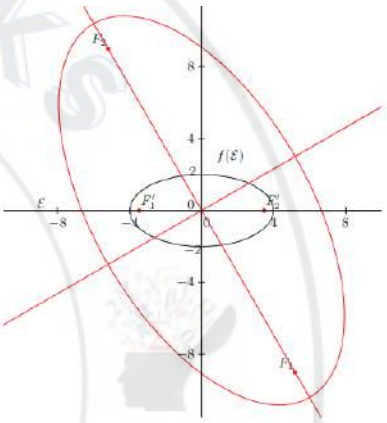
Ainsi $M'(z') \in f(\Sigma) \Leftrightarrow 9z'^2 + \overline{9z'^2} - 30z' \cdot \overline{z'} + 192 = 0 \Leftrightarrow 3z'^2 + \overline{3z'^2} - 10z' \cdot \overline{z'} + 64 = 0$

Notons $z = x' + iy'$ alors $M'(z') \in f(\Sigma) \Leftrightarrow 3(z'^2 + \overline{z'^2}) - 10z' \cdot \overline{z'} + 64 = 0 \Leftrightarrow 6Re(z'^2) - 10(x'^2 + y'^2) + 64 = 0$

Or $6Re(z'^2) - 10(x'^2 + y'^2) + 64 = 6(x'^2 - y'^2) - 10(x'^2 + y'^2) + 64 = -4x'^2 - 16y'^2 + 64$

Ainsi $M'(z') \in f(\Sigma) \Leftrightarrow x'^2 + 4y'^2 = 16$ et on déduit que l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est une equation cartésienne de $f(\Sigma)$

b. Cette dernière équation s'écrit aussi $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$. Ainsi $f(\Sigma)$ est une ellipse de centre l'origine, d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers $F_1(2\sqrt{3}, 0)$ et $F_2(-2\sqrt{3}, 0)$, de sommets $S_1(4,0)$; $S_2(-4,0)$, $S_3(0,2)$; $S_4(0,-2)$, directrices : $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ et $x = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$



f étant une similitude directe du plan, et $f(\Sigma)$ est une ellipse alors Σ est une ellipse de centre $O' = f^{-1}(O) = O(0,0)$, de sommets $S'_i = f^{-1}(S_i)$ soit $S'_1(-6, 6\sqrt{3})$; $S'_2(6, -6\sqrt{3})$; $S'_3(-3\sqrt{3}, -3)$ et $S'_4(3\sqrt{3}, 3)$, de foyers $F'_1(-3\sqrt{3}, 9)$ et $F'_1(3\sqrt{3}, -9)$ et de directrices $-x + \sqrt{3}y = 16\sqrt{3}$ et $-x + \sqrt{3}y = -16\sqrt{3}$. L'axe de Σ est : $\sqrt{3}x + y = 0$ et son excentricité est : $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

A/ 1. Par récurrence :

• Pour $n = 1$, $(1 + 1 \cdot x) \leq (1 + x)^1$. Donc vrai pour $n = 1$.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ c'est-à-dire $(1 + nx) \leq (1 + x)^n$. $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n$

Ainsi $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x)(1 + nx) \Rightarrow (1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x$ car $nx^2 \geq 0$

D'où $1 + (n + 1)x \leq (1 + x)^{n+1}$. Donc vrai à l'ordre $n + 1$ aussi.

Par suite $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, $(1 + nx) \leq (1 + x)^n$

2. Soit Ω l'univers associé à cette épreuve alors $card(\Omega) = n^n$. Soit A l'événement «Chaque boite contient exactement une boule» : $card(A) = n!$. Ainsi $p(A) = P_n = \dfrac{n!}{n^n}$

3-a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \dfrac{n!}{n^n}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \times \dfrac{1}{n} = 2$ d'après **1.** D'où le résultat.

b. Montrons par récurrence :

• Pour $n = 1$, $P_1 = 1 \leq 1/2^{1-1}$. Donc vrai pour $n = 1$

• Supposons le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$. On a : $P_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}P_n \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^n}$. Donc vrai à l'ordre $n + 1$ aussi. D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

c. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$ (Théorème des gendarmes)

B/1. Soit Ω l'univers associé à cette épreuve alors $card(\Omega) = 14^n$. Soit B l'événement «Obtenir les boules de même couleurs» : $card(B) = 2 \times 7^n$. Ainsi $p(B) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

b. Soit C l'événement «Obtenir exactement une boule noire» : $card(C) = n \times 7^n$. Ainsi $p(C) = \dfrac{n7^n}{14^n} = \dfrac{n}{2^n}$

3-a. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} \leq 1$ ainsi (u_n) est décroissante.

b. (u_n) étant décroissante et minorée par 0 alors on conclut qu'elle est convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n = \mathrm{e}^{n\ln 2}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (par croissance comparée)

Problème

I/ 1-a. Les fonctions $x \mapsto n\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et $x \mapsto \frac{2x-1}{2x+1}$ sont dérivables sur $]-1/2,+\infty[$ alors :

g_n est clairement dérivable sur $]-1/2;+\infty[$ de dérivée $g'_n(x) = \frac{4nx+2n+4}{(2x+1)^2}$. $g'_n(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < -\frac{1}{2}$ ainsi $g'_n(x) > 0$ pour $x \in]-1/2,+\infty[$ puis g_n est strictement croissante sur $]-1/2,+\infty[$

b. $g_n(1/2) = 0$. Ainsi $g_n(x) < 0$ sur $]-1/2,1/2[$ et $g_n(x) \geq 0$ sur $[1/2,+\infty[$

2-a. Pour $x \in]-1/2,+\infty[$; $f_1(x) = (x-1/2)\ln(x+1/2) \Rightarrow f'_1(x) = \ln(x+1/2) + \frac{x-1/2}{x+1/2} = \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{2x-1}{2x+1} = g_1(x)$

Pour $x \in]-1/2,+\infty[$, $f'_n(x) = n\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1/2)^n}{x+1/2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[n\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{2x-1}{2x+1}\right]$

D'où $f'_n(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1} g_n(x)$

b. $f'_n(x) = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Ainsi :

• Pour n pair ; $f_n(x)$ est croissante sur $]-1/2,+\infty[$ (En utilisant **1-b.**). De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1/2^+} f_n(x) = -\infty$

• Pour n impair ; $f_n(x)$ est décroissante sur $]-1/2,1/2[$ et croissante sur $[1/2,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1/2^+} f_n(x) = +\infty$

x	$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'_n(x)$ n pair	‖	+	0	+	
$f_n(x)$ n pair	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

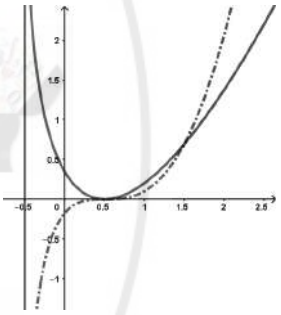
x	$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'_n(x)$ n impair	‖	−	0	+	
$f_n(x)$ n impair	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3-a. Expression analytique de (T) : $\begin{cases} x' = x - 1/2 \\ y' = y \end{cases}$ et d'écriture complexe $z' = z - \frac{1}{2}$

b. Soit $M(x,y) \in (C_n)$ alors $y = (x-1/2)^n \ln(x+1/2) \Rightarrow y' = x'^n \ln(x+1)$ car $x = x' + 1/2$ et $y = y'$. Ainsi l'équation cartésienne de (E_n) est : $y = x^n \ln(x+1)$

4-a. $f_2(x) - f_1(x) = (x-1/2)^2\ln(x+1/2) - (x-1/2)\ln(x+1/2) = (x-1/2)(x-3/2)\ln(x+1/2)$ puis en dressant et en se servant du tableau de signe de $(x-1/2)(x-3/2)\ln(x+1/2)$, on déduit que $f_2(x) - f_1(x) \leq 0$ pour $x \in]-1/2,3/2]$ donc (C_1) est au dessus de (C_2) sur $]-1/2,3/2[$ et pour $x \in]3/2,+\infty[$, $f_2(x) - f_1(x) > 0$ donc (C_1) est en dessous de (C_2) sur $]3/2,+\infty[$

b. Voir figure ci-contre



II/ 5-a. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$ et de premier terme 1 alors $\sum\limits_{k=1}^{n}(-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$. Puis en intégrant entre 0 et x cette égalité pour $x \in [0,1]$, on a :

$\int_0^x \sum\limits_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^x (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et par suite :

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ puis en remplaçant x par 1 on déduit que : $u_n = \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

(On remarquera que $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$)

b. D'après **5-a.**, $\forall\, n \geq 1$; $|u_n - \ln(2)| = \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t$ or pour $t \in [0,1[$, $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$

Ainsi $\int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. D'où pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$

6. La fonction $artan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $h(x) = \tan(x)$ et $\varphi(x) = arctan(x)$. Alors on a :

$h(\varphi(x)) = x \Rightarrow \varphi'(x)h'(\varphi(x)) = 1$ puis que $\varphi'(x) = \frac{1}{h'(\varphi(x))}$ or $h'(x) = 1 + \tan^2(x) \Rightarrow h'(\varphi(x)) = 1 + x^2$

D'où $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

7-a. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-t^2)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t^2 \neq 1$ et de premier 1. Ainsi

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$. Puis en intégrant entre 0 et x cette égalité pour $x \in [0,1]$, on a :

$\int_0^x \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\int_0^x (-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et par suite :

$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = arctan(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ puis en remplaçant x par 1 on déduit que : $v_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

b. D'après **7-a.**, $\forall\, n \geq 1$; $\left|v_n - \frac{\pi}{4}\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ or pour $t \in [0,1[$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

Ainsi $\int_0^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$. D'où pour tout $n \geq 1$, $\left|v_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$

III/ 8. Pour $x \in [1/2;3/2]$ et pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) \geq 0$ d'après **2-b.** car $f_n(1/2) = 0$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Pour $x \in [1/2;3/2]$ et pour tout $n \geq 1$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln(2)$ car la fonction $x \mapsto \ln(x+1/2)$ est croissante sur $[1/2;3/2]$ donc $\ln(x+1/2) \leq \ln(2)$. On déduit alors que :

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \ln(2)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n+1}$. D'où pour tout $n \geq 1$, $0 \leq w_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

9. On pose $u(x) = \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et $v'(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{2x+1}$ et $v(x) = \frac{1}{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ainsi :

$w_n = \left[\frac{1}{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]_{1/2}^{3/2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{2}{2x+1} \times \frac{1}{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\,\mathrm{d}x$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

10-a. $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $(-x+1/2) \neq 1$ et de premier 1. Ainsi $s_n(x) = \frac{1-(-x+1/2)^{n+1}}{1-(-x+1/2)} = \frac{2}{2x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$

b. En intégrant cette dernière égalité entre 1/2 et 3/2 on :

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{2x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\right]\,\mathrm{d}x$ puis en utilisant la relation de Chasles

$\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1)^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x + (-1)^n 2^{-n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ puis on déduit que :

$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n 2^{-n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x \Rightarrow 2^{-n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} - (-1)^n \ln 2$

En injectant cette expression dans la relation de w_n trouvée en **9.** on a :

$w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right] \Rightarrow w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]$

Ainsi $w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right] = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right] = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - u_{n+1}\right]$

Ainsi $w_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - u_{n+1}\right]$

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

Épreuve 13

Exercice 1

1. $pgcd(20,5)=5$ alors $pgcd(20,5)$ ne divise pas 4 donc cette équation n'a pas de solution.
2-a. Soit (x_0,y_0) une solution de (E) alors $20x_0-9y_0=2\Rightarrow 9y_0=2(10x_0-1)$ alors 2 divise $9y_0$ or 2 et 9 sont premiers entre eux alors 2 divise y_0 d'après le théorème de Gauss. D'où y_0 est un multiple de 2.
b. En utilisant l'algorithme d'Euclide on a : $20\times(-4)-9\times(-9)=1\Rightarrow 20\times(-8)-9\times(-18)=2$ puis on déduit alors que le couple $(-8,-18)$ est une solution particulière de (E).
Solution de (E) : $S=\{(-8-9k;-18-20k)\ k\in\mathbb{Z}\}=\{(-8+9k;-18+20k)\ k\in\mathbb{Z}\}$ (Détailler la résolution)
3. Si $pgcd(x,y)=2$ alors 2 divise x et y donc x est alors sous la forme $-8+9(2q)=-8+18q$ et y sous la forme $-18+20(2q)=-18+40q$. Sous ces formes, 2 divise x et y. De plus $20\times(-8+18q)-9\times(-18+40q)=2$. Par suite il existe u et v telles que $(-8+18q)u-(-18+40q)v=2\Rightarrow pgcd(-8+18q;-18+40q)=2$. Ainsi les solutions de (E) telles que $pgcd(x,y)$ sont sous forme : $(x,y)=(-8+18q;-18+40q)$ avec $q\in\mathbb{Z}$
4-a. $p=\overline{ca5}^6=5+6a+6^2c=36c+6a+5$ et $p=\overline{bbaa}^4=a+4a+16b+64b=5a+80b$. Ainsi $0=36c+6a+5-(5a+80b)$
Ce qui donne $a+5=80b-36c\Rightarrow a+5=4(20b-9c)$ d'où $a+5$ est un multiple de 4

Alors a est sous la forme $a=-5+4q$ avec $0\leq a\leq 3$ donc $\frac{5}{4}\leq q\leq\frac{9}{4}\Rightarrow q=2$ puis on déduit que $a=3$
b. Avec $a=3$, $p=23+36c$ et $p=15+80b\Rightarrow 80b-36c=8\Rightarrow 20b-9c=2$ par suite (b,c) est solution de (E). Or $0\leq b\leq 3$ et $0\leq c\leq 5\Rightarrow\frac{8}{9}\leq k\leq\frac{11}{9}$ et $\frac{18}{20}\leq k\leq\frac{23}{20}\Rightarrow k=1$ et $b=-8+9k=1$ et $c=-18+20k=2$. $b=1$ et $c=2$
c. $p=95$
5. Chacun des entiers qui interviennent dans l'écriture d'un nombre en base a doit être strictement inférieur à a. Comme l'entier 3 intervient dans l'écriture de C, on a $a>3$
6-a. $A=1+a+2a^2$, $B=2+a+3a^2$ et $C=2+3a+3a^3+3a^4+a^5$. $C=AB\Rightarrow 2+3a+3a^3+3a^4+a^5=6a^4+5a^3+8a^2+3a+2$
Par suite : $a^5-3a^4-2a^3-8a^2=0$ soit $a^3-3a^2-2a-8=0$ car $a\neq 0$
b. $a^3-3a^2-2a-8=0\Rightarrow a(a^2-3a-2)=8\Rightarrow a$ divise 8.
c. a divise 8 alors $a=4$ ou $a=8$. Pour $a=8$, $a^3-3a^2-2a-8\neq 0$ donc $a\neq 8$. Et pour $a=4$, $a^3-3a^2-2a-8=0$
On déduit alors que $a=4$
7. Avec les divisions euclidiennes successives, on déduit que 214 dans la base 10 à pour écriture 3112 dans la base 4.
On vérifie bien que $2+1\times 4+1\times 4^2+3\times 4^3=214$
8-a. $A=1+a+2a^2=37$, $B=2+a+3a^2=54$ et $C=2+3a+3a^3+3a^4+a^5=1998$
b. $A=37$ est premier, $B=54=2\times 3^3$ donc $ppcm(A,B)=A\times B=C$ (car $ppcm(a,b)\times pgcd(a,b)=|ab|$)
$ppcm(A,B)=AB$ alors $pgcd(A,B)=1$ ce qui garantit l'existence des solutions de l'équation $Ax+By=1$ dans $\mathbb{Z}^2$
9-a. $A\times 19+B\times(-13)=1$. D'où $(19,-13)$ est une solution particulière de l'équation
b. L'ensemble solution de l'équation est : $S=\{(19-54k;-13+37k)\ k\in\mathbb{Z}\}=\{(19+54k;-13-37k)\ k\in\mathbb{Z}\}$ (détailler)

Exercice 2

1-a. On note $s_1=s_{(A,k_1,\theta_1)}$. $s_1(B)=O$ alors $AO=k_1AB$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})\equiv\theta_1[2\pi]$ Or, le triangle ABC est isocèle en B et que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{4}$. De plus, (OA) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{8}$. Ainsi $\theta_1=\frac{\pi}{8}$ et $k_1=\frac{AO}{AB}$
Comme $s_1(M)=N$ alors $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})\equiv\theta_1[2\pi]$ alors la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})$ est $\frac{\pi}{8}$

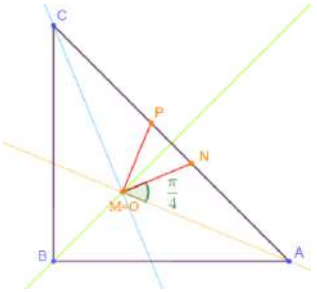
b. • Soient $s_1=s_{(A,k_1,\theta_1)}$ et $s'=s_{(A,k',\theta')}$ avec $k'=\frac{AM}{AB}$ et $\theta'=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})$ alors, on a : $s_1\circ s'=s_{(A,k_1k',\theta_1\theta')}$ et $s'\circ s_1=s_{(A,k_1k',\theta_1\theta')}$. Comme $s_1\circ s'$ et $s'\circ s_1$ ont les mêmes éléments caractéristiques alors $s\circ s_1=s_1\circ s'$
• On a : $s'\circ s_1(B)=s'(O)$ et $s_1\circ s'(B)=s_1(M)=N$ or $s\circ s_1=s_1\circ s'\Rightarrow s'(O)=N$
• Les similitudes directes conservant les angles orientés alors : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO})$ or $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{4}$
Donc, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN})$ est $\frac{\pi}{4}$

c. Pour construire le point N connaissant M, on trace deux demi-droite $[Mx)$ et $[Ay)$ telles que : $(\overrightarrow{MA},[Mx))=\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{AM},[Ay))=\frac{\pi}{8}$. Le point de rencontre de ces deux demi-droite donne le point N.

2-a. On note $s_1=s_{(A,k_1,\theta_1)}$ et $s_2=s_{(C,k_2,\theta_2)}$ or $s_2(O)=B$ alors $CB=k_2CO$ et $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})\equiv\theta_2[2\pi]$ or $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{8}$ donc $\theta_2=\frac{\pi}{8}$ et $k_2=\frac{CB}{CO}$. Ainsi $r=s_1\circ s_2$ est une similitude plane directe de rapport $k=k_1\cdot k_2$ et d'angle $\theta=\theta_1+\theta_2$.
$k=k_1\cdot k_2=\frac{AO}{AB}\frac{CB}{CO}$ Or $AB=CB$ et $CO=AO$ donc $k=1$ et $\theta=\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$
Par ailleurs, $r(O)=s_1\circ s_2(O)=s_1(B)=O$ Ce qui montre que le point O est invariant par r donc, il constitue le centre

de cette similitude. D'où $r = s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

b. $r(P) = s_1 \circ s_2(P) = s_1 \circ s_2 \circ s_2^{-1}(M) = s_1(M) = N$. Ainsi $r(P) = N$. Ainsi, à partir de N, on fait une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ pour une construction géométrique de P. Plus précisément, on trace un demi-cercle (C) de rayon ON, à partir de N puis on trace la demi-droite $[Oz)$ telle que : $([Oz), \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\pi}{4}$ Le point P est le point de rencontre de la demi-droite $[oz)$ et du demi-cercle (C)



c. Pour $M = O$, d'après **1-a.**, $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \dfrac{\pi}{8} \Rightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = \dfrac{\pi}{8}$ or $(\overrightarrow{AO}, [AC)) = \dfrac{\pi}{8}$ donc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AO}, [AC))$. D'où $N \in [AC)$

Par ailleurs $P = s_2^{-1}(M) \Rightarrow M = s_2(P)$. Si $M = O$, alors $s_2(P) = O$ ce qui donne $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CO}) = \dfrac{\pi}{8}$ or $([CA), \overrightarrow{CO}) = \dfrac{\pi}{8}$ donc $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CO}) = ([CA), \overrightarrow{CO})$ et par suite $P \in [CA)$

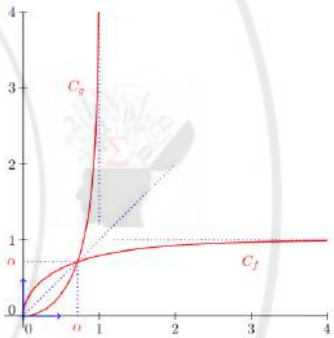
Problème

A/ 1-a. f est bien définie sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{-x}}$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{-x} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ la fonction f n'est pas dérivable en 0 et au point de d'abscisse 0 (c'est l'origine), il y a une demi tangente verticale.

b. f est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2f(x)} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite $y = 1$ est asymptote à (C_f). (Dresser la tableau des variations)

c. $1 - f'(x) = \dfrac{2f(x) - \mathrm{e}^{-x}}{2f(x)}$. On pose $\varphi(x) = 2f(x) - \mathrm{e}^{-x}$. φ est dérivable sur $[1/2, +\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = 2f'(x) + \mathrm{e}^{-x}$ donc φ est strictement croissante croissante sur $[1/2, +\infty[\Rightarrow \forall\, x \in]1/2, +\infty[$, $\varphi(x) > \varphi(1/2) \simeq 0.6 > 0$. Par conséquent, $\forall\, x \geq 1/2$, $1 - f'(x) > 0$ autrement dit $f'(x) < 1$



Notons $\psi(x) = f(x) - x$ est continue sur $I =]1/2, +\infty[$. ψ est dérivable sur I de dérivée $\psi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ alors ψ est strictement décroissante sur I. De plus $\psi(1/2) \simeq 0.127$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = -\infty$ alors on déduit de cela que l'équation $\psi(x) = 0$ a une unique solution α. Comme $\psi(0.7) = 0.0095 > 0$ et $\psi(0.8) \simeq -0.058 < 0$ alors $0.7 < \alpha < 0.8$

d. Voir figure

2-a. f est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante ; elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = f([0, +\infty[) = [0, 1[$

Pour tout $y \in J = [0, 1[$; il existe un unique x dans $[0, +\infty[$ tel que $y = f(x)$

$y = f(x) \Leftrightarrow y^2 = 1 - \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x = -\ln(1 - y^2)$. Ainsi $\forall\, x \in J$; $g(x) = -\ln(1 - x^2)$

b. On pose $\phi(x) = g(x) - x$. Alors ϕ est dérivable sur J de dérivée $\phi'(x) = g'(x) - 1 = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2} > 0$ sur $]1/2, 1[$ alors ϕ est strictement croissante sur $]1/2, 1[$. De plus $\phi(1/2) \simeq -0.21$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \phi(x) = +\infty$ alors on déduit de cela que l'équation $\phi(x) = 0$ a une unique solution sur $]1/2, 1[$ que nous notons β.

On a : $g(\beta) = \beta \Leftrightarrow -\ln(1 - \beta^2) = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \mathrm{e}^{-\beta} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\beta}}$ car $\beta > 0$

Ainsi $g(\beta) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) = \beta$ et par suite β est une solution de l'équation $f(x) = x$ et $\beta \in]1/2; +\infty[$ donc $\beta = \alpha$ compte tenu de l'unicité de α. D'où $g(x) = x$ admet une unique solution α sur $]1/2, 1[$.

c. g est la réciproque de f alors (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Donc s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.

Écriture complexe de s : $z' = i\overline{z}$. Expression analytique de s : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ (Voir la figure pour la représentation)

3-a. $h(x)$ est bien définie et dérivable sur $[\alpha, 1[$ et $\forall\, x \in [\alpha, 1[$; $h'(x) = \dfrac{\Psi(x) \times \Psi''(x)}{(\Psi'(x))^2}$ or $\Psi(x) = g(x) - x$ est croissante sur $[\alpha, 1[$ (Voir **2-b.**). Donc $\forall\, x \in [\alpha, 1[$, $\Psi(x) \geq \Psi(\alpha) = 0$ donc $\Psi(x) \geq 0$ sur $[\alpha, 1[$

De plus $\forall\, x \in [\alpha, 1[$, $\Psi''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^2} > 0$ par suite $\forall\, x \in [\alpha, 1[$, $h'(x) \geq 0$ puis on déduit que h est croissante sur $[\alpha, 1[$.

h est continue et strictement croissante sur $[\alpha, 1[$ alors elle réalise une bijection sur $[\alpha, 1[$. or $[\alpha, 17/20[\subset [\alpha, 1[$ alors h réalise une bijection sur $[\alpha, 17/20[$ vers $J = h([\alpha, 17/20[) = [h(\alpha), h(0.85)[= [0, h(17/20)[$ or $h(17/20) \simeq 0.77 \Rightarrow J \subset [\alpha, 17/20[$

$c_0 \in [\alpha, 17/20[$. Par récurrence simple, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in [\alpha, 17/20[\subset [\alpha, 1[$. D'où la suite (c_n) est bien définie.

b. $\forall x \in [\alpha, 17/20[$, $0 \leq h'(x) \leq \dfrac{3}{4}$ alors $\displaystyle\int_\alpha^{c_n} h'(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_\alpha^{c_n} \frac{3}{4}\, \mathrm{d}x \Rightarrow h(c_n) - h(\alpha) \leq \frac{3}{4}(c_n - \alpha) \Rightarrow c_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(c_n - \alpha)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in [\alpha, 17/20[$ alors $|c_n - \alpha| = c_n - \alpha$ et $|c_{n+1} - \alpha| = c_{n+1} - \alpha$. D'où $|c_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|c_n - \alpha|$

c. Par récurrence :

• $|c_1 - \alpha| \leq \frac{3}{4}|c_0 - \alpha|$ d'après **3-b.** alors le résultat est vrai pour $n = 0$.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 0$. Alors $|c_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |c_0 - \alpha|$. D'après **3-b.**

$|c_{n+2} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|c_{n+1} - \alpha| \Rightarrow |c_{n+2} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} |c_0 - \alpha|$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. Le résultat reste vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où pour tout entier n, $|c_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |c_0 - \alpha|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n - \alpha| = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \alpha$

B/ 4. $\forall\, x \in J$, $F_2(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{g(x)} (1 - \mathrm{e}^{-t}) \, \mathrm{d}t = \left[t + \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{g(x)} = g(x) + \mathrm{e}^{-g(x)} - 1 = g(x) - x^2$

$I_2 = F_2(\alpha) = g(\alpha) - \alpha^2 = \alpha - \alpha^2$ car $g(\alpha) = \alpha$

5-a. La fonction g est dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout $x \in J$, $g'(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $H_n(u) = \displaystyle\int_0^u [f(t)]^n \, \mathrm{d}t$. Puisque f est continue, H_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $H_n'(u) = [f(u)]^n$

Comme $F_n = H_n \circ g$, la fonction F_n est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $F_n'(x) = H_n'(g(x)) \cdot g'(x) = \dfrac{2x^{n+1}}{1 - x^2}$

b. Pour tout x distinct de 1 et -1, on réduit le second membre au même dénominateur et on identifie les numérateurs des deux membres. On obtient : $a = -2$, $a + b + c = 0$, $b - c = 0$ c'est à dire $a = -2$, $b = c = 1$

c. D'après ce qui précède, $\forall\, x \geq 0$; $F_1'(x) = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$. Par conséquent, il existe une constante réelle c telle que $\forall\, x \in J$, $F_1(x) = -2x - \ln(|1-x|) + \ln(|1+x|) + c$. Or $F_1(0) = 0$ car $g(0) = 0$ donc $c = 0$ puis $F_1(x) = -2x - \ln(1-x) + \ln(1+x)$

Comme $F_1(x) = -2x - \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$ alors $I_1 = -2\alpha - \ln(1 - \alpha) + \ln(1 + \alpha)$

d. $g(\alpha) = \alpha$ et $f(x) \geq 0$ sur $[0, \alpha]$ alors l'aire demandée est égal en unités d'aires à : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{g(\alpha)} f(t) \, \mathrm{d}t = I_1$

Soit l'aire demandé est égale à $I_1 \times 2cm \times 2cm = 4I_1$ (en cm^2)

6-a. $F_{n+2}'(x) - F_n'(x) = \dfrac{2x^{n+3}}{1 - x^2} - \dfrac{2x^{n+1}}{1 - x^2} = -2x^{n+1}$. Donc il existe donc une constante c_n telle que pour tout $x \in J$, $F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\dfrac{2}{n+2}x^{n+2} + c_n$. or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $F_n(0) = 0$ donc $c_n = 0$. Ainsi $x \in J$, $F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\dfrac{2}{n+2}x^{n+2}$

b. On en déduit, en donnant à x la valeur α, $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$ car $I_n = F_n(\alpha)$

7. On a : $I_{2n+2} - I_{2n} = -\dfrac{2}{2n+2}\alpha^{2n+2} = -\dfrac{1}{n+1}\alpha^{2n+2}$ ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}[I_{2k+2} - I_{2k}] = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\alpha^{2k+2} = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\alpha^{2k}$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}[I_{2k+2} - I_{2k}] = I_{2n} - I_2$. Ainsi $I_{2n} = I_2 - \sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$ or $I_2 = \alpha - \alpha^2$. D'où $I_{2n} = \alpha - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^{2k}}{k}$

On a de même : $I_{2n+3} - I_{2n+1} = -\dfrac{2}{2n+3}\alpha^{2n+3}$ ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}[I_{2k+3} - I_{2k+1}] = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{2k+3}\alpha^{2k+3} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}\alpha^{2k+1}$

Ainsi $I_{2n+1} = I_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}\alpha^{2k+1}$ or $I_1 = -2\alpha - \ln(1 - \alpha) + \ln(1 + \alpha) = -2\alpha + \ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$

8-a. $g(\alpha) = \alpha$. On a pour tout $x \in [0, \alpha]$, $0 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ or $f(\alpha) = \alpha$. Ainsi $0 \leq \displaystyle\int_0^{g(x)} [f(t)]^n \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{g(x)} \alpha^n \, \mathrm{d}t$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$

b. Comme $\alpha \in]0, 1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après **8-a.** et le théorème des gendarmes.

Par conséquent les suites (I_{2n}) et (I_{2n+1}) extraites de la suite (I_n), sont aussi convergentes et de limite 0.

Les relations $I_{2n} = \alpha - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $I_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ nous permet de déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k} = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$

Épreuve 14

Exercice 1

1-a. $D_g = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g'(x) = 4(x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$. g est alors décroissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $]1, +\infty[$ (Dresser le tableau de variation)

b. D'après **1-a.**, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq g(1) > 0$. D'où $g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1 + (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} = g(x)$ ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (Dresser le tableau de variation)

3-a. $f(\ln 2) = 0$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 5\ln 2/4)] = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 5\ln 2/4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$ donc $(\mathcal{D})$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$
$f(x) - (x - 5\ln 2/4) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $(\mathcal{D})$ est au dessus de (C_f) sur $]-\infty, 0[$ et en dessous de (C_f) sur $]0, +\infty[$ et coupe (C_f) en 0. (Faire la représentation de (C_f) et $(\mathcal{D})$)

4-a. Les solutions de (E_h) sont sous la forme : $x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

b. Notons $\varphi(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-2x}$. φ est dérivable de dérivée $\varphi'(x) = (-2Ax - 2B + A)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Comme (C_φ) passe par l'origine O alors $B = 0$. La tangente est parallèle à la droite $y = x + 1$ en O alors $A - 2B = 1 \Rightarrow A = 1$. Donc la solution recherchée est la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$

c. $f'(x) = 1 + (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ et $f''(x) = 4(x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ ainsi $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 4x - 5\ln 2 + 4$

d. Soit g une solution de (E). Comme f est solution de (E) alors :
g solution de $(E) \Leftrightarrow g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) \Leftrightarrow (g-f)''(x) + 4(g-f)'(x) + 4(g-f)(x) = 0$
Ainsi g solution de $(E) \Leftrightarrow g - f$ est solution de (E_0). Par suite il existe des réels A et B tels que $g(x) - f(x) = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-2x}$
D'où les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-2x} + x\,\mathrm{e}^{-2x} + x - \dfrac{5}{4}\ln 2$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

5-a. D'après **3-b.**, on déduit que D_λ en unité d'aire est : $D_\lambda = \displaystyle\int_0^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\lambda (x - 5\ln 2/4)\,\mathrm{d}t = \int_0^\lambda [f(t) - (x - 5\ln 2/4)\,\mathrm{d}t$
Ainsi, en utilisant une intégration par parties, on déduit que : $D_\lambda = \displaystyle\int_0^\lambda t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(1 - 2\lambda\,\mathrm{e}^{-2\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda})\ u.a$
D'où $D_\lambda = \dfrac{1}{4}(1 - 2\lambda\,\mathrm{e}^{-2\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}) \times 2cm \times 2cm \Rightarrow D_\lambda = 1 - (2\lambda + 1)\,\mathrm{e}^{-2\lambda}\ cm^2$

b. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} D_\lambda = 1\ cm^2$

Exercice 2

NB : Se servir d'une figure claire et lisible pour pouvoir répondre correctement aux questions de cet exercice.

1-a. $FC = CH = HF = a\sqrt{2}$ donc CFH est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$

b. Soient M, A et B des points du plan. M appartient au plan médiateur de $[AB]$ si et seulement si $AM = MB$

• On déduit facilement que $AC = AF = AH = a\sqrt{2}$ donc A appartient au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$.

• De même $GC = GF = GH = a$ donc G appartient au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$.

• I étant le centre de gravité du triangle équilatéral CFH alors $IC = IF = IH = \dfrac{CF\sqrt{3}}{3} = a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. D'où I appartient au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$.

c. $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal au plan médiateur de $[CF]$ et $\overrightarrow{CH}$ est orthogonal au au plan médiateur de $[CH]$

• Comme A et G appartiennent au plan médiateur de $[CF]$ alors $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CF}$. De même A et G appartiennent au plan médiateur de $[CH]$ alors $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CH}$. Or $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) tous deux orthogonal à $\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (CFH). D'où (AG) est orthogonale au plan (CFH).

• De même comme I et G appartiennent au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$ alors $\overrightarrow{IG}$ est orthogonal au plan (CFH) (en suivant le raisonnement du premier point). Donc d'après le premier point, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires. Alors $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{IG} \Rightarrow I \in (AG)$. D'où (AG) passe par I.

2. AFH est un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$. En utilisant **1-b.**, on déduit que C, E et J appartiennent au plan médiateur $[AF]$ et au plan médiateur $[AH]$. Donc $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AF}$ et à $\overrightarrow{AH}$ et par suite $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal au plan (AFH). D'où (CE) est orthogonale au plan (AFH).
Comme C, E et J appartiennent au plan médiateur $[AF]$ et au plan médiateur $[AH]$ alors $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux au plan (AFH). Donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires $\Rightarrow \exists\ \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CE} = \beta\overrightarrow{CJ} \Rightarrow J \in (CE)$. D'où (CE) passe par J

3. • Comme AFH est un triangle équilatéral et J est son centre de gravité alors J est dans le plan (AFH) donc $\overrightarrow{JA}$ est un vecteur du plan (AFH). D'après **2.**, $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal au plan (AFH) et $J \in (CE)$ alors $\overrightarrow{JC}$ est orthogonal au plan $(AFH) \Rightarrow \overrightarrow{JC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{JA}$. Donc $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}) = \dfrac{\pi}{2}$

• De même comme CFH est un triangle équilatéral et I est son centre de gravité alors I est dans le plan (CFH) donc $\overrightarrow{IC}$ est un vecteur du plan (CFH). D'après **1.**, $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (CFH) et $I \in (AG)$ alors $\overrightarrow{IA}$ est orthogonal au plan $(CFH) \Rightarrow \overrightarrow{IA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IC}$. Donc $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Les points A, J, I et C étant non alignés et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC})$ alors ils sont cocycliques.

• Notons F' le projeté orthogonal de F sur (AH). Comme J est le centre de gravité du triangle équilatéral AFH, alors $\overrightarrow{JF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{F'F}$. Or $\overrightarrow{F'F} = \overrightarrow{F'H} + \overrightarrow{HF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF}$. D'où $\overrightarrow{JF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AH} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{HF}$

• De même Notons F'' le projeté orthogonal de F sur (CH). Comme I est le centre de gravité du triangle équilatéral CFH, alors $\overrightarrow{FI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FF''}$. Or $\overrightarrow{FF''} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF''} = \overrightarrow{FH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC}$. D'où $\overrightarrow{FI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{HC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FH}$

Ainsi $\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FI} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) + \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FH}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D'où $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{JI}$

• Par définition, O est le milieu de $[FH]$. Comme CFH est un triangle équilatéral et I est son centre de gravité alors $\overrightarrow{CI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CO}$ donc C, O et I sont alignés. En considérant le triangle équilatéral AFH, on déduit de même que A, O et J sont alignés. De plus $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{JI}$ alors (AC) et (IJ) sont parallèles. Alors $\widehat{IOJ} = \widehat{COA}$

CGO est un triangle rectangle en G alors $OC^2 = a^2 + OG^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow OC = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

AEO est un triangle rectangle en E alors $OA^2 = a^2 + OE^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow OC = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ainsi COA est un triangle isocèle en O. Soit O' le milieu de $[AC]$ alors OO' est la bissectrice de l'angle $\widehat{COA}$ et $\widehat{COA} = 2\widehat{AOO'}$. $\tan(\widehat{AOO'}) = \dfrac{AO'}{OO'} = \dfrac{AC/2}{OO'}$ Or $OO' = a$ et $AC = a\sqrt{2}$ alors $\tan(\widehat{AOO'}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui est indépendant de a et par conséquent $\widehat{COA}$ est indépendant de a. Avec $\tan(\widehat{AOO'}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{AOO'} \simeq 35,26° \Rightarrow \widehat{COA} \simeq 70.53°$ pour tout a.

4-a. $ABCD$ est un carré donc les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires. De même (BD) est perpendiculaire à (CG). Comme $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ACG) alors $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au plan (ACG). O étant le milieu de la diagonale $[FH]$ alors (OH) est parallèle à (BD). Donc $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal au plan (ACG).

b. Les plans (CFH) et (AFH) sont deux plans sécants alors $R = s_2 \circ s_1$ est une rotation d'espace, d'axe (Δ) et d'angle θ que nous allons déterminer.

• L'axe (Δ) : Elle est la droite orientée telle que $(\Delta) = (CFH) \cap (AFH)$. Donc (Δ) est la droite orientée (OH)

• Angle θ : On a : $R(I) = s_2 \circ s_1(I) = s_2(I)$ car $I \in (CFH)$. Ainsi $\theta = 2\widehat{IOJ} \simeq 141°$

5. r est une rotation du plan. Alors r est la rotation de centre O (Car O est le seul point de (Δ) appartenant au plan P) et d'angle θ défini plus haut.

• $h(I) = C$, $h(J) = A$ or $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{JI}$ donc h a pour rapport 3. I étant le centre de gravité du triangle équilatéral CFH, $\overrightarrow{CO} = 3\overrightarrow{IO}$, notons $O' = h(O)$ alors $\overrightarrow{h(I)h(O)} = 3\overrightarrow{IO}$ soit $\overrightarrow{CO'} = 3\overrightarrow{IO}$ puis on déduit que $h(O) = O$. h est alors l'homothétie de centre O et de rapport 3.

• $r \circ h$ est alors une similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport $k = 3$.

Problème

A/ 1. Les fonctions $x \mapsto Arctan(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$ alors f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0)$ avec $\varphi(x) = Arctan(x)$. Or $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0 et donc continue sur $[0, +\infty[$

2-a. $\forall\, x \in I$ et $\forall\, t \in [0, x]$, $0 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq 1 + t^2 \leq 1 + x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

b. $\forall\, x \in I$ et $\forall\, t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\, \mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2} \leq arctan(x) \leq x$

c. D'après **2-b.** $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} - f(0) \leq f(x) - f(0) \leq 1 - f(0) \Rightarrow -\dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0$ alors $f'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. D'où f est dérivable à droite en 0.

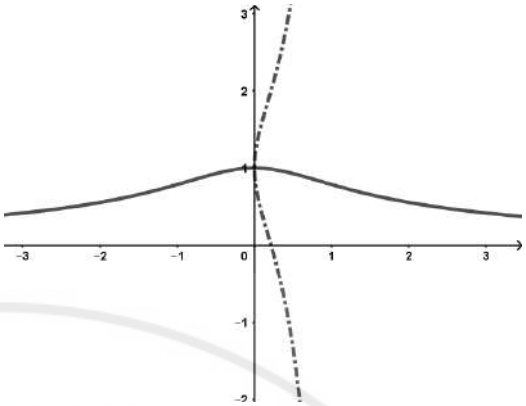
3-a. $Arctan$ étant une fonction impaire alors f est une fonction paire.

$\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \times arctan(x) = \dfrac{x - (1+x^2)arctan(x)}{x^2(1+x^2)} = \dfrac{1}{x(1+x^2)} - \dfrac{f(x)}{x}$

b. D'après **2-b.**, $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

(Voir le tableau de variations de f)
c. Faire la représentation graphique (C_f) sur $\mathbb{R}$

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$1 \searrow 0$



B/ 4. L'ensemble des points invariants par φ est la droite $\Delta : y = -x + 1$
5. $D_{\phi_a} = \mathbb{R} \setminus \{(a-1)/a\}$. Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y') = \varphi(M)$, il s'agit de montrer que $y' = \phi_a(x')$
• $x' = -y + 1 = -\dfrac{x}{ax - a + 1} + 1 = \dfrac{(a-1)(x-1)}{ax - a + 1}$. Si $x' = \dfrac{a-1}{a}$ alors $\dfrac{(a-1)(x-1)}{ax - a + 1} = \dfrac{a-1}{a} \Rightarrow a(x-1) = ax - a + 1$
car $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Ainsi on aura $-a = -a + 1$ ce qui impossible. Donc $x' \neq \dfrac{a-1}{a}$ et $x' \in D_{\phi_a}$
• $\phi_a(x') = \phi_a(-y+1) = \dfrac{-y+1}{a(-y+1) - a + 1} = \dfrac{-y+1}{-ay+1}$. En remplaçant y par $\dfrac{x}{ax - a + 1}$, on a : $\phi_a(x') = \dfrac{(-x+1)(-a+1)}{-a+1}$
Ainsi $f_a(x') = -x + 1 = y'$. D'où C_a est globalement invariante par φ.
6. $\varphi : z' = -i\overline{z} + 1 + i$; l'écriture complexe de φ est sous la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$ alors φ est un antidéplacement de rapport 1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$
7. Soit t et s deux applications du plan dans lui-même définies par : $t : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ et $s : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ s est la symétrie orthogonale d'axe la deuxième bissectrice,t la translation de vecteur $\vec{u} = (1,1)$ et $\varphi = t \circ s$
8. Pour la construction, construire d'abord (C'_f), image de (C_f) par s puis (C_φ), image de (C'_f) par t.
C/ 9-a. D'après **2-b.**,$\forall\ x \in]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,x[$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq f(t) \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\ \mathrm{d}t$; par suite
$arctan(x) \leq \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq x$ puis $\dfrac{arctan(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq 1$. D'où $f(x) \leq g(x) \leq 1$
b. On note $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \psi'(0) = 1$ donc g est continue en 0
$f(x) \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow \dfrac{f(x) - g(0)}{x - 0} \leq \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \dfrac{1 - g(0)}{x - 0}$ soit $\dfrac{f(x) - 1}{x - 0} \leq \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq 0$; D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$
D'où g est dérivable à droite en 0.
10. $\forall\ x \in]0,+\infty[$ et $\forall\ t \in]0,x]$, $f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ alors il existe une fonction F telle que $F'(t) = f(t)$. Ainsi $g(x) = \dfrac{1}{x}[F(x) - F(0)]$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto F(x) - F(0)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ alors g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
Ainsi $\forall\ x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}[F(x) - F(0)] + \dfrac{F'(x)}{x} = -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \dfrac{f(x)}{x}$. D'où $g'(x) = \dfrac{1}{x}[f(x) - g(x)]$
11. Pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$ d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$
12-a. Pour $x \in [1,+\infty[$ et $\forall\ t \in]0,x]$; $0 < arctan(t) < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{arctan(t)}{t} < \dfrac{\pi}{2t} \Rightarrow 0 < \displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t < \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$
Ainsi $0 < \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\ln(x)}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée)
b. $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t + \dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Notons $a = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ alors $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
13. Notons $\Psi(x) = g(x) - x$. Ψ est continue et dérivable sur $]0,1[$ de dérivée $\Psi'(x) = g'(x) - 1 = \dfrac{1}{x}[f(x) - g(x) - x] \leq 0$
car $f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow \forall x \in]0,1[,\ f(x) - g(x) - x \leq 0$ donc Ψ est décroissante sur $]0,1[$. De plus $\Psi(0) = 1 > 0$ et $\Psi(1) = g(1) - 1 \leq 0$ d'après **9-a.** donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et vu que Ψ est bijective sur $]0,1[$, on déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $\Psi(\alpha) = 0$ soit $g(\alpha) = \alpha$
14-a. D'après **2-b.**, $\forall\ x \in]0,1[$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leq arctan(x) \leq x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{arctan(x)}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$

b. $g'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - g(x)) \Rightarrow |g'(x)| = \dfrac{1}{x}|f(x) - g(x)|$. Or $f(x) \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - 1| = 1 - f(x)$

$|g'(x)| \leq \dfrac{1}{x}[1 - f(x)] \leq \dfrac{x}{1+x}$. Or la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0,1]$ donc $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0,1]$

D'où $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0,1]$

15-a. $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$; ainsi $0 < f(x) \leq g(x) \leq 1$ et on conclut alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = g(U_{n-1}) \in]0,1]$

D'après **14-a.** $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0,1]$. Ainsi :

• Si $U_n \leq \alpha$; $\displaystyle\int_{U_n}^{\alpha} |g'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_{U_n}^{\alpha} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \Rightarrow \left|\int_{U_n}^{\alpha} g'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_{U_n}^{\alpha} |g'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}(\alpha - U_n) \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\alpha - U_n)$ car $g(\alpha) = \alpha$

• Si $U_n \geq \alpha$; $\displaystyle\int_{\alpha}^{U_n} |g'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_{\alpha}^{U_n} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \Rightarrow \left|\int_{\alpha}^{U_n} g'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_{\alpha}^{U_n} |g'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}(U_n - \alpha) \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(U_n - \alpha)$

D'où $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b. Montrons par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

• Pour $n = 0$, $|U_0 - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$ et pour $n = 1$, $|U_1 - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right) |U_0 - \alpha|$ d'après la relation de récurrence de **15-a.** donc le résultat est vrai à l'ordre 0 et 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ alors $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$. D'après **15-a.** ;

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha| \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$ par hypothèse de récurrence. Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

D/ 16. $W_n = \ln\left[\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right]^{n^2} = n^2 \ln\left[\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right] = n^2\left[\ln(arctan(n)) - \ln(arctan(n+1))\right]$

17. On pose $\phi(x) = \ln[arctan(x)]$ sur $]0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• La fonction $x \mapsto arctan(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\forall\ x \in]0, +\infty[$, $arctan(x) > 0$; $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $x \in]0, +\infty[$. Donc ϕ est continue sur $]0, +\infty[$. Ainsi ϕ est continue sur $[n, n+1]$

• La fonction $x \mapsto arctan(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall\ x \in]0, +\infty[$, $(arctan(x))' > 0$; $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $x \in]0, +\infty[$. Donc ϕ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Ainsi ϕ est dérivable sur $]n, n+1[$

Ainsi d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que $\phi(n+1) - \phi(n) = (n+1-n)\phi'(c)$ ainsi $\ln[arctan(n+1)] - \ln[arctan(n)] = \phi'(c)$ Or $\phi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{1}{arctan(x)} \Rightarrow \ln[arctan(n+1)] - \ln[arctan(n)] = \dfrac{1}{(1+c^2)arctan(c)}$

Or $\ln[arctan(n+1)] - \ln[arctan(n)] = -\dfrac{W_n}{n^2}$. D'où $\forall n \geq 1$, $\exists c \in]n, n+1[$ tel que $W_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$

18. Pour $c \in]n, n+1[$, $arctan(n) < arctan(c) < arctan(n+1)$ car la fonction $artan$ est croissante sur $[0, +\infty[$

De plus $n < c < n+1 \Rightarrow 1 + n^2 < 1 + c^2 < 1 + (n+1)^2$ puis on déduit que :

$(1+n^2)arctan(n) < (1+c^2)arctan(c) < [1+(n+1)^2]arctan(n+1)$ puis on a :

$-\dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} < \dfrac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)} < \dfrac{-n^2}{[1+(n+1)^2]arctan(n+1)}$. On conclut alors que :

$\dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} \leq W_n \leq \dfrac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arcant(n+1)}\ \forall n \geq 1$

19. $\lim\limits_{n \to +\infty} arctan(n) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} = -\dfrac{2}{\pi}$. De même $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arcant(n+1)} = -\dfrac{2}{\pi}$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = -\dfrac{\pi}{2}$ en utilisant le théorème des gendarmes. $V_n = \mathrm{e}^{W_n}$ or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \exp(\lim\limits_{n \to +\infty} W_n) = \mathrm{e}^{-2/\pi}$

Épreuve 15

Exercice 1

1-a. $||\overrightarrow{e_1}||^2 = \frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})(\vec{i}-\vec{j}) = 1$; $||\overrightarrow{e_2}||^2 = \frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j})(\vec{i}+\vec{j}) = 1$ et $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})(\vec{i}+\vec{j}) = 0$. Donc $\mathcal{R}_a = (\Omega_a, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan.

b. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M} \Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = \left(1-\frac{1}{a}\right)\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j} + X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} = \left(1-\frac{1}{a}\right)\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}X(\vec{i}-\vec{j}) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y(\vec{i}+\vec{j})$

Ainsi $x\vec{i} + y\vec{j} = \left[1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\right]\vec{i} + \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)\right]\vec{j}$. D'où $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$

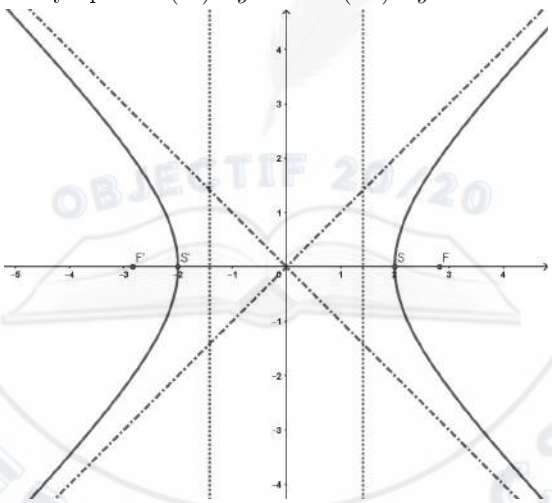
c. $M \in (C_a) \Leftrightarrow y = f(x)$ puis on remplace x et y par leurs expressions en fonction de X et Y trouvées en **1-b.** et on déduit que : $M \in (C_a) \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = \frac{2(a-1)}{a^2}$. Cette dernière équation est l'équation de (C_a) dans $\mathcal{R}_a$

d. $a \neq 1 \Rightarrow a - 1 \neq 0$ donc nous reconnaissons l'équation réduite d'une hyperbole. On pose $\alpha = \frac{\sqrt{2|a-1|}}{|a|}$

• Si $a - 1 > 0$ alors $Y^2 - X^2 = \left(\frac{\sqrt{2(a-1)}}{|a|}\right)^2$ et les sommets de (C_a) sont : $S_a(0,\alpha)$ et $S'_a(0,-\alpha)$

• Si $a - 1 < 0$ alors $Y^2 - X^2 = -\left(\frac{\sqrt{2(1-a)}}{|a|}\right)^2$ et les sommets de (C_a) sont : $S_a(\alpha,0)$ et $S'_a(-\alpha,0)$

e. (C_{-1}) dans $\mathcal{R}_{-1}$ a pour équation : $X^2 - Y^2 = 4$. Ainsi (C_{-1}) est une hyperbole de foyers $F(2\sqrt{2},0)$ et $F'(-2\sqrt{2},0)$; de sommets $S_{-1}(2,0)$ et $S'_{-1}(-2,0)$; d'asymptotes $(\Delta) : y = x$ et $(\Delta') : y = -x$ et de directrices $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$



2. Dans le repère $\mathcal{R}_a$, (C_a) a ses sommets, suivant les valeurs de a, soit sur l'axe des abscisses ou sur l'axe des ordonnées.

Or $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + \sqrt{2}Y \\ x - y = 1 - \frac{2}{a} + \sqrt{2}X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}[x - y - 1 + 2/a] \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}[x + y - 1] \end{cases}$

• Dans $\mathcal{R}_a$, les sommets de $(C_a) \in$ à $X = 0$ si et seulement si $a > 1$ et dans ce cas, $X = 0 \Rightarrow x - y - 1 + 2/a = 0$

• Dans $\mathcal{R}_a$, les sommets de (C_a) appartiennent à $Y = 0$ si et seulement si $a < 1$ et dans ce cas, $Y = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$

On conclut alors que dans $\mathcal{R}$, (C_a) a ses sommets sur (D) si et seulement si $a < 1$

3-a. Dans $\mathcal{R}_a$, $\Omega_a(0,0)$, S_a et S'_a sont les couples $(0,\alpha)$ et $(0,-\alpha)$ avec α défini en **1-d.** $\overrightarrow{\Omega_a S_a}$ et $\overrightarrow{\Omega_a S'_a}$ sont les couples $(0,\alpha)$ et $(0,-\alpha)$. Ainsi $\Omega_a S_a = \Omega_a S'_a = \alpha = \frac{\sqrt{2|a-1|}}{|a|}$

Dans $\mathcal{R}$, $\Omega_a\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$; $\Omega_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_2\Omega_a} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a},\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Omega_2\Omega_a = \sqrt{2}\frac{|a-2|}{2a}$

b. Le premier point de **2.** montre que dans $\mathcal{R}$, pour $a > 1$, le centre Ω_a et les sommets S_a et S'_a appartiennent à la droite (D') d'équation $y = x - 1 + 2/a$. Alors Ω_2 et Ω_a sont situés sur deux droites parallèles (car Ω_2 est sur la droite $y = x$ et Ω_a sur $y = x - 1 + 2/a$). On remarque également que Ω_a et Ω_2 sont situés sur la droite $(D) : y = -x + 1$ qui est perpendiculaire à (D'). Alors $\Omega_2\Omega_a S_a$ est un triangle rectangle en Ω_a. Ainsi $\Omega_2 S_a^2 = \Omega_2\Omega_a^2 + \Omega_a S_a^2$. D'où $\Omega_2 S_a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c. D'après **3-a.** $\Omega_a S_a = \Omega_a S'_a$ donc on a aussi $\Omega_2 S'^2_a = \Omega_2\Omega_a^2 + \Omega_a S'^2_a$. D'où $\Omega_2 S'_a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On déduit que S_a et S'_a sont sur le cercle de centre Ω_2 et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 2

1-a. Le discriminant de cette est équation est : $\Delta = (i\sqrt{7})^2$ et ses solutions $x_1 = \dfrac{3 - i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}$

b. $|x_1| = |x_2| = 2$

2-a. Comme $O = bar\{(A,4),(B,-3),(C,1)\}$ alors $\dfrac{4\times 1 - 3\times z + 1\times z^2}{4-3+1} = 0 \Rightarrow z^2 - 3z + 4 = 0 \Rightarrow z$ solution de (E)

b. z est solution de (E) et $Im(z) > 0$ alors $z = \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}$ et $z^2 = \dfrac{1 + 3i\sqrt{7}}{2}$. Donc $B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ et $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)$

3-a. Soit M un point du plan : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$
Or $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = 2OM^2 + 4OA^2 - 3OB^2 + OC^2$
$OA = 1$, $OB = 2$ et $OC = 4$. Ainsi $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM^2 = \dfrac{k-8}{2}$

- Si $k < 8$ alors (Γ) est l'ensemble vide ;
- Si $k = 8$ alors $(\Gamma) = \{O\}$;
- Si $k > 8$ alors (Γ) est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-8}{2}}$

b. $89 > 8$ alors (Γ) est le cercle de centre 0 et de rayon $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$ soit $(\Gamma) : x^2 + y^2 = \dfrac{81}{2}$

Problème

A/ 1-a. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1 + [\ln(x)]^2}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ entant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall\, x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+[\ln(x)]^2} - \dfrac{2\frac{1}{x}\ln(x)}{(1+[\ln(x)]^2)^2} \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1 + [\ln(x)]^2 + 2x\ln x}{x^2(1+\ln^2(x))^2)} = -\dfrac{(1+\ln(x))^2}{x^2(1+\ln^2(x))^2}$

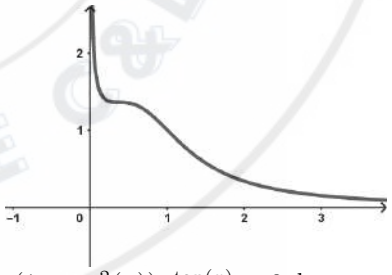
b. $f'(x) \geq 0$ sur $]0,+\infty[$ avec $f'(\mathrm{e}^{-1}) = 0$ donc f est décroissante sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
(Voir le tableau des variations en **d.**)

c. f'' existe sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)[\ln^3(x) + 3\ln^2(x) + 5\ln(x) + 3]}{x^3(1+\ln^2(x))^3} = \dfrac{2\ln(x)[\ln(x)+1][\ln^2(x) + 2\ln(x) + 3]}{x^3(1+\ln^2(x))^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^{-1}$. De plus, $\forall x > 0$, $\ln^2(x) + 2\ln(x) + 3 > 0$ et par conséquent $f''(x) > 0$ sur $]0,\mathrm{e}^{-1}[$, $f''(x) < 0$ sur $]\mathrm{e}^{-1}, 1[$ et $f''(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$. Par suite f'' s'annule et change de signe en $x = \mathrm{e}^{-1}$ et en $x = 1$. D'où les points $x = \mathrm{e}^{-1}$ et $x = 1$ sont des points d'inflexion.

d. Voir la figure

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0



2. g est bien définie, continue et dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ de dérivée $g'(x) = (1+\tan^2(x))\,\mathrm{e}^{\tan(x)} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$ donc est bijective sur cet intervalle. $g(]-\pi/2,\pi/2[) =]\lim\limits_{x\to -\pi/2} g(x), \lim\limits_{x\to \pi/2} g(x)[=]0,+\infty[$

D'où g réalise une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $]0,+\infty[$. $\forall\, y \in]0,+\infty[, \exists! x \in]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $y = \mathrm{e}^{\tan(x)} \Rightarrow \tan(x) = \ln(y)$ soit $x = arctan(\ln(y))$. g^{-1} est alors la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g^{-1}(x) = arctan(\ln(x))$

b. $g^{-1}(1) = 0$; $g^{-1}(\mathrm{e}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g^{-1}(\exp(1/\sqrt{3})) = \dfrac{\pi}{6}$

c. $g^{-1}(x) = arctan(\ln(x))$. Les fonctions $g_1 : x \mapsto \ln x$ et $g_2 : x \mapsto arctan(x)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc g^{-1} est dérivable sur cet intervalle de dérivée $g'^{-1}(x) = g'_1(x) \times g'_2(g_1(x)) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\ln^2(x)} = f(x)$

3. $f(x) > 0$ sur $[1,\mathrm{e}]$, donc, en unités d'aire, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} g'^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = g^{-1}(\mathrm{e}) - g^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}\ u.a$

Ainsi $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{4} \times 2cm \times 2cm = \pi\ cm^2$

4. $F(x)=\displaystyle\int_1^{e^x} f(t)\,dt=\int_1^{e^x} g'^{-1}(t)\,dt=g^{-1}(e^x)=arctan(x)$. F est alors bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Notons $\varphi(x)=\tan(x)$ alors $\varphi(F(x))=x\Rightarrow F'(x)\times\varphi'(F(x))=1$. Ainsi $F'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(F(x))}$ or $\varphi'(x)=1+\tan^2(x)$

Ainsi $\varphi'(F(x))=1+x^2$. D'où $\forall\ x\in\mathbb{R}\,;\ F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

B/ 5-a. Pour $x\in[1,e]$, $0\leq\ln^2(x)\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+\ln^2(x)\leq 2\Rightarrow x\leq x(1+\ln^2(x))\leq 2x$. Ainsi $\dfrac{1}{2x}\leq\dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}\leq\dfrac{1}{x}$

Ainsi pour $x\in[1,e]$ et $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $(\ln x)^{2n}\geq 0$ d'où $\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x}\leq\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x(1+\ln^2(x))}\leq\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x}$

b. D'après **5-a.**, $x\in[1,e]$ et $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x}\leq(\ln x)^{2n}f(x)\leq\dfrac{(\ln x)^{2n}}{x}$. Ainsi en intégrant ces inégalités, on a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^e\frac{(\ln x)^{2n}}{x}\,dx\leq\int_1^e(\ln x)^{2n}f(x)\,dx\leq\int_1^e\frac{(\ln x)^{2n}}{x}\,dx\Rightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^e\leq I_n\leq\left[\frac{(\ln x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^e$

D'où pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2(2n+1)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{2n+1}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$ d'après le théorème des gendarmes.

6-a. $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)\times\ln^2(x)+f(x)=\dfrac{\ln^2(x)}{x[1+\ln^2(x)]}+\dfrac{1}{x[1+\ln^2(x)]}=\dfrac{1+\ln^2(x)}{x[1+\ln^2(x)]}=\dfrac{1}{x}$

b. $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)\times\ln^2(x)+f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)\times\ln^{2n+2}(x)+f(x)\times\ln^{2n}(x)=\dfrac{\ln^{2n}(x)}{x}$ puis en intégrant, on a :

$\displaystyle\int_1^e f(x)\times\ln^{2n+2}(x)\,dx+\int_1^e f(x)\times\ln^{2n}(x)\,dx=\int_1^e\frac{\ln^{2n}(x)}{x}\,dx\Rightarrow I_{n+1}+I_n=\left[\frac{(\ln x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^e=\frac{1}{2n+1}$

7-a. pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_{k+1}-u_k=(-1)^{k+1}I_{k+1}+(-1)^{k+1}I_k=(-1)^{k+1}(I_{k+1}+I_k)=\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

b. $u_{k+1}-u_k=\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\Rightarrow\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}[u_{k+1}-u_k]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}[u_{k+1}-u_k]=u_n-u_0$ car il s'agit d'une somme télescopique.

D'où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=u_n-u_0$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=\lim_{n\to+\infty}[u_n-u_0]$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^nI_n=0$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=-u_0=-I_0=-\frac{\pi}{4}$

8-a. Pour tout $x\in\mathbb{R}\,;\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kx^{2k}=\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k$ qui est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x^2\neq 1$ ($\forall x\in\mathbb{R}$) et de premier terme 1. On déduit alors que :

Pour tout $x\in\mathbb{R}\,;\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kx^{2k}=\frac{1-(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kx^{2k}+\frac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}=F'(x)$

D'où pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}$

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kx^{2k}+\frac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kx^{2k}\,dx+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$; puis on déduit :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\times(\sqrt{3})^{2k+1}}+(-1)^nJ_n=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\times(3)^k}+(-1)^nJ_n=\frac{\pi}{6}$. D'où $\dfrac{t_n}{\sqrt{3}}+(-1)^nJ_n=\dfrac{\pi}{6}$

c. Pour tout $x\in[0;1/\sqrt{3}]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq x^2\leq\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{3}{4}\leq\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$ puis on déduit que : $\dfrac{3}{4}x^{2n}\leq\dfrac{x^{2n}}{x^2+1}\leq x^{2n}$

d. Pour tout $x\in[0;1/\sqrt{3}]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4}x^{2n}\leq\dfrac{x^{2n}}{x^2+1}\leq x^{2n}\Rightarrow\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{2n}\,dx\leq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx\leq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{2n}\,dx$

Ainsi $\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}\leq J_n\leq\dfrac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}(2n+1)}=0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n=0$ en utilisant le théorème des gendarmes.

En utilisant **8-b.**, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}t_n=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

Correction BAC C-E Togo 2000

Exercice 1

1-a. $D_g = \mathbb{R}$; g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^2}$ (déterminer $g'(x)$ pour $x > 0$ et $g'(x)$ pour $x < 0$ puis déduire la forme de $g'(x)$ donnée). On déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	↗	1

b. Soit M d'affixe z. Si M appartient à l'axe des abscisses alors z est un réel. Ainsi il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = x$. $M' = f(M)$ alors $z' = \dfrac{x}{1+|x|}$. D'où l'image de l'axe des abscisses par f est la courbe représentative de g.

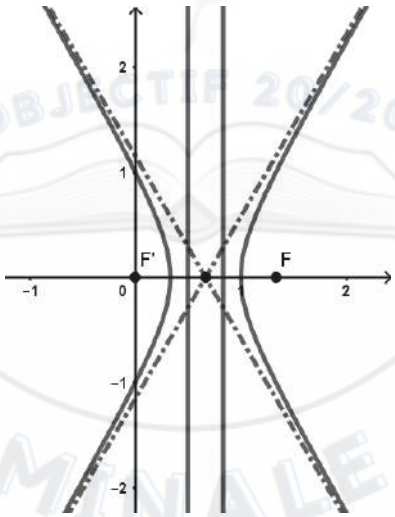
2. $M' = f(M) \Rightarrow z' = \dfrac{z}{1+|z|}$ alors $|z'| = \dfrac{|z|}{1+|z|} \leq 1$ car si $|z| = 0$, $\dfrac{|z|}{1+|z|} = 0 \leq 1$ et si $|z| > 0$, $\dfrac{|z|}{1+|z|} \leq \dfrac{|z|}{|z|} = 1$. Ainsi $|z'| \leq 1 \Rightarrow x'^2 + y'^2 \leq 1$. D'où $M'(x', y')$ appartient au disque de centre O et de rayon 1.

3. $M' = f(M) \Rightarrow z' = \dfrac{z}{1+|z|}$ alors $x' = \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ et $y' = \dfrac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

4-a. Δ a pour équation $x = \dfrac{1}{2}$. $M' \in \Delta \Rightarrow x' = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (2x-1)^2 = x^2+y^2$ soit $3x^2 - 4x - y^2 + 1 = 0$

b. D'après **4-a.**, si $3x^2-4x-y^2+1 = 0$ alors $(2x-1)^2 = x^2+y^2$ ou encore $\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2}$ soit $M' \in \Delta$. Donc l'ensemble de points M tel que $M' \in \Delta$ est inclus dans (Γ) d'équation $3x^2-4x-y^2+1 = 0$. Or $3x^2-4x-y^2+1 = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 - y^2 - \dfrac{1}{3}$.

Ainsi (Γ) a pour équation : $\dfrac{(x-2/3)^2}{1/9} - \dfrac{y^2}{1/3} = 1$. Donc (Γ) est une hyperbole de centre $\Omega(2/3, 0)$, de foyers $F(4/3; 0)$ et $F'(0, 0)$, de directrices $x = \dfrac{5}{6}$ et $x = \dfrac{1}{2}$, de sommets $S_1(1, 0)$ et $S_2(1/3, 0)$ et d'asymptotes $y = -\sqrt{3}x + 2/\sqrt{3}$ et $y = \sqrt{3}x - 2/\sqrt{3}$



5. r a pour expression complexe : $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, l'angle de r.

Soit $M_1''(z_1'') = r(f(M)) \Rightarrow z'' = \dfrac{z'}{1+|z'|} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} z}{1+|z|}$. Soit $M_2''(z_2'') = f(r(M))$ alors : $z_2'' = \mathrm{e}^{i\theta} \times \left(\dfrac{z}{1+|z|}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} z}{1+|z|}$.

D'où $f(r(M)) = r(f(M))$

Exercice 2

1-a. (AC) et (OA) sont deux droites sécantes en A alors $S_{(AC)} \circ S_{(OA)}$ est une rotation de centre A et d'angle θ avec $\theta = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AC) et $\vec{u'}$ est un vecteur directeur de (OA). Donc $\theta = 2(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}})$. O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC donc O est le point d'intersection des trois bissectrices du triangle ABC (Voir *figure 1* à la page suivante). D'où $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Ainsi $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Par suite $S_{(AC)} \circ S_{(OA)}$ est une rotation de centre A et d'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ qui n'est rien d'autre que R_1. D'où $R_1 = S_{(AC)} \circ S_{(OA)}$

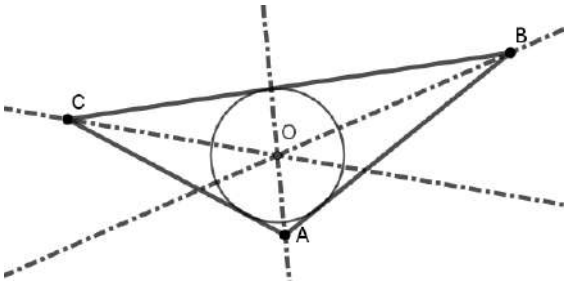


figure 1

b. • $B_1 = R_1(B) \Rightarrow B_1 \in (AC)$, ABB_1 est un triangle isocèle en A et la bissectrice (AO) est la médiatrice de $[BB_1]$ (Voir *figure 2*).

O appartient à la médiatrice de $[B_1B]$ alors $(\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1O}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$. Or (BO) est la bissectrice de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ alors $2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ d'où $2(\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1O}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. On pose alors une $R = S_{(B_1O)} \circ S_{(AC)}$, $(AC) = (AB_1)$ (car A, C et B_1 sont alignés) donc $B_1 = (AC) \cap (B_1O)$. Ainsi $R = S_{(B_1O)} \circ S_{(AC)}$ est la rotation de centre B_1 et d'angle $2(\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1O}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ce qui n'est rien d'autre que R_2. D'où $R_2 = S_{(B_1O)} \circ S_{(AC)}$.

En utilisant **1-a.**, on a : $R_2 \circ R_1 = S_{(B_1O)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(OA)} = S_{(B_1O)} \circ S_{(OA)}$ qui est la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_1})$ (les angles sont orientés)

$R_2 \circ R_1(C) = C_2 \Rightarrow (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

On a aussi $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_2}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CC_2})$. $R_2 \circ R_1(C) = C_2 \Rightarrow COC_2$ est isocèle en O alors

$(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CC_2}) = -\frac{1}{2}\left[\pi - (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC_2})\right] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

D'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC_2}) = 0 \Rightarrow C$, A et C_2 sont alignés (voir *figure 3*)

On conclut alors $R_3 \circ R_2 \circ R_1(O)$ est le symétrique de O par rapport à (AC). D'où (C') est le cercle de centre O', symétrique de O par rapport à (AC) et de rayon celui de (C) (Voir *figure 4*)

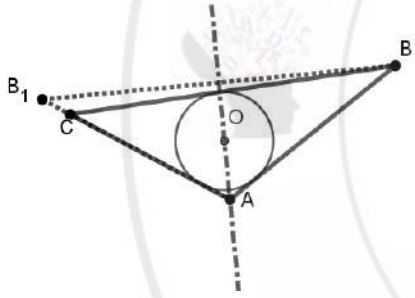


figure 2

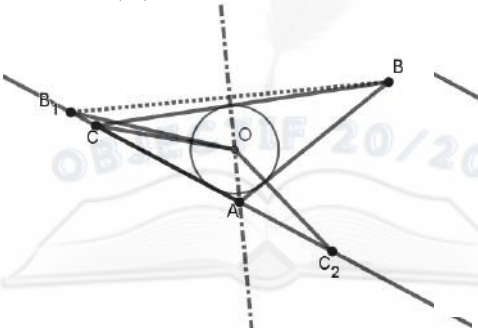


figure 3

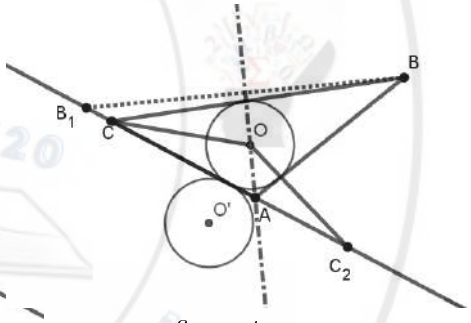


figure 4

• Comme R_1, R_2 et R_3 sont des rotations alors $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$ Car il s'agit de la somme de tous les angles d'un triangle. Donc $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ est une symétrie centrale. Or $R_3 \circ R_2 \circ R_1(O) = O'$. Donc $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ est la symétrie centrale de centre le milieu de $[OO']$

2-a. • $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{A'O})$

• $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{A'O'})$

D'après **1-b.**, A' appartient à la médiatrice de $[OO'] \Rightarrow OA'O'$ est un triangle isocèle en A'. Par conséquent, $(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{A'O'})$

D'où $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'})$

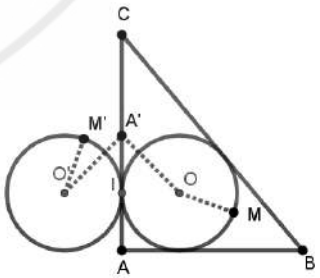


figure 5

b. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{A'M'} \wedge \overrightarrow{A'M}||$

$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'M'}$ et $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM}$

Par conséquent $\overrightarrow{A'M'} \wedge \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'O'} \wedge \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{A'O'} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} \wedge \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{O'M'} \wedge \overrightarrow{OM}$

Notons $\vec{k}$ le troisième vecteur de l'espace.

• A', O et O' sont indépendants de $M \Rightarrow \overrightarrow{A'O'} \wedge \overrightarrow{A'O} = \alpha_1 \vec{k}$ avec α_1 un réel indépendant de la position du point M

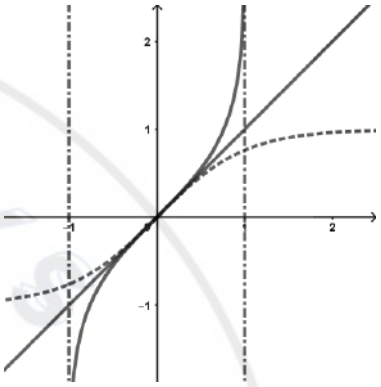
• En utilisant **1-a.**, on déduit que pour tout point $M \in (C)$, $M' \in (C')$ or (C) et (C') ont le même rayon $\Rightarrow O'M' = OM$. De plus $O'A' = OA'$, $\overrightarrow{A'O'} \wedge \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{A'O}$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'})$ alors $\overrightarrow{A'O'} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M'} \wedge \overrightarrow{A'O} = \vec{0}$

• Montrons que (OM) est perpendiculaire à $(O'M')$

$(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{AO'}) + (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OM})$

A appartient à la médiatrice de $[OO'] \Rightarrow (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AO}) = -\dfrac{\pi}{2}$ (les angles sont orientés)
A et A' appartiennent à la médiatrice de $[OO']$. De plus A' est le symétrique de A par rapport à $(OO') \Rightarrow AOA'O'$ forme un carré. Par suite (OA') est parallèle à $(O'A)$ et (OA) est aussi parallèle à $(O'A')$. Par conséquent
$(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{AO'}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O}) + (\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{AO'}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O})$;
$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OM}) = -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AO}) = -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'}) - (\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{AO}) = -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'})$. Or d'après **2-a.** $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{A'O'})$
D'où $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{AO'}) + (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (OM)$ est perpendiculaire à $(O'M')$
Par conséquent $\overrightarrow{O'M'} \wedge \overrightarrow{OM}$ est indépendant de M (car $OM = r$ et $O'M' = r$ et (OM) est perpendiculaire à $(O'M')$)
Finalement, $\overrightarrow{A'M'} \wedge \overrightarrow{A'M}$ est indépendant de M. D'où l'aire du triangle $A'M'M$ garde une valeur constante.

Problème



A/ 1. $\dfrac{1}{2}\ln\left(-1+\dfrac{2}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow D_f =]-1,1[$ et $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$. Donc f est impaire. f est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} > 0$ sur $]-1,1[$ ainsi f est strictement croissante sur $]-1,1[$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x) = +\infty$
2. Notons $\mathcal{A}$ cette aire. En unité d'aire :
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$
Or une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$ est $t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ et une primitive de $t \mapsto \ln(1-t)$ est $t \mapsto -(1-t)\ln(1-t) - t$
Alors $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}[(1+t)\ln(1+t) - t]_0^{1/2} + \dfrac{1}{2}[(1-t)\ln(1-t) + t]_0^{1/2} = \dfrac{3}{4}\ln 3 - \ln 2\ u.a$
Ainsi $\mathcal{A} = \left[\dfrac{3}{4}\ln 3 - \ln 2\right] \times 2cm \times 2cm = 3\ln 3 - 4\ln 2\ cm^2$. D'où $\mathcal{A} = 3\ln 3 - 4\ln 2\ cm^2$
3. f est continue et strictement croissante sur D_f alors f réalise une bijection sur $]-1,1[$. Or $f(]-1,1[) =]\lim\limits_{x\to -1^+} f(x); \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)[$
Ainsi $f(]-1,1[) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$. Donc f réalise une bijection sur $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$
Pour $y \in \mathbb{R}$, $\exists!\ x \in]-1,1[$ tel que $y = f(x)$. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = \mathrm{e}^{2y}$ soit $1+x = (1-x)\,\mathrm{e}^{2y}$
Ainsi $y = f(x) \Rightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^{2y}-1}{\mathrm{e}^{2y}+1}$. D'où f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
f^{-1} est la réciproque de f alors $(C_{f^{-1}})$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.
4. Pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(a) + f^{-1}(b) = \dfrac{\mathrm{e}^{2a}-1}{\mathrm{e}^{2a}+1} + \dfrac{\mathrm{e}^{2b}-1}{\mathrm{e}^{2b}+1} = \dfrac{(\mathrm{e}^{2a}-1)(\mathrm{e}^{2b}+1) + (\mathrm{e}^{2b}-1)(\mathrm{e}^{2a}+1)}{(\mathrm{e}^{2a}+1)(\mathrm{e}^{2b}+1)} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2(a+b)}-2}{(\mathrm{e}^{2a}+1)(\mathrm{e}^{2b}+1)}$
$1 + f^{-1}(a)f^{-1}(b) = 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{2a}-1}{\mathrm{e}^{2a}+1} \times \dfrac{\mathrm{e}^{2b}-1}{\mathrm{e}^{2b}+1} = \dfrac{(\mathrm{e}^{2a}+1)(\mathrm{e}^{2b}+1) + (\mathrm{e}^{2a}-1)(\mathrm{e}^{2b}-1)}{(\mathrm{e}^{2a}+1)(\mathrm{e}^{2b}+1)} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2(a+b)}+2}{(\mathrm{e}^{2a}+1)(\mathrm{e}^{2b}+1)}$
Ainsi $\dfrac{f^{-1}(a)+f^{-1}(b)}{1+f^{-1}(a)f^{-1}(b)} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2(a+b)}-2}{2\,\mathrm{e}^{2(a+b)}+2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2(a+b)}-1}{\mathrm{e}^{2(a+b)}+1} = f^{-1}(a+b)$. D'où $f^{-1}(a+b) = \dfrac{f^{-1}(a)+f^{-1}(b)}{1+f^{-1}(a)f^{-1}(b)}$
B/ 1. • Si $h(c) = 1$ alors $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $h(a) = h[(a-c)+c] = \dfrac{h(a-c)+h(c)}{1+h(a-c)h(c)} = \dfrac{h(a-c)+1}{1+h(a-c)} = 1$. D'où $h = 1$ sur $\mathbb{R}$.
• Si $h(c) = -1$ alors $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $h(a) = h[(a-c)+c] = \dfrac{h(a-c)+h(c)}{1+h(a-c)h(c)} = \dfrac{h(a-c)-1}{1-h(a-c)} = -1$. D'où $h = -1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Comme h n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h(x) \neq 1$ et $h(x) \neq -1$ d'après **B/ 1.**
Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, $h(x) = h\left(x/2 + x/2\right) = \dfrac{h(x/2)+h(x/2)}{1+h(x/2)h(x/2)} = \dfrac{2h(x/2)}{1+h^2(x/2)}$. Or $h(x/2) \neq -1$ et $h(x/2) \in \mathbb{R}$ donc $[h(x/2)+1]^2 > 0 \Rightarrow h^2(x/2)+1 > -2h(x/2)$ et $-1 < \dfrac{2h(x/2)}{1+h^2(x/2)}$ soit $-1 < h(x)$. De même $h(x/2) \neq 1$ et $h(x/2) \in \mathbb{R}$ donc $[h(x/2)-1]^2 > 0 \Rightarrow h^2(x/2)+1 > 2h(x/2)$ et $\dfrac{2h(x/2)}{1+h^2(x/2)} < 1$ soit $h(x) < 1$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 < h(x) < 1$. Ainsi h prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $]-1,1[$.
3. • $h(0) = h(0+0) = \dfrac{h(0)+h(0)}{1+h(0)h(0)} = \dfrac{2h(0)}{1+h^2(0)} \Rightarrow h(0)[1+h^2(0)] = 2h(0) \Rightarrow h(0) = 0$ ou $1+h^2(0) = 2$ soit $h(0) = 0$ ou $h^2(0) = 1$. Or $h^2(0)$ est forcement différent de 1 car $h(0) \in]-1,1[$ d'après **B/ 2.** D'où $h(0) = 0$.
• Pour $x \in \mathbb{R}$, $h(0) = h(x+[-x]) = 0$ or $h(x+[-x]) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{1+h(x)h(-x)} = 0$. Ainsi $h(x)+h(-x) = 0$. D'où $h(-x) = -h(x)$ et h est impaire.

4. Par récurrence sur n :

• Pour $n=1$, évident. $\dfrac{1+h(2x)}{1-h(2x)}=\dfrac{1+h(x+x)}{1-h(x+x)}=\dfrac{1+[h(x)+h(x)]/[1+h(x)h(x)]}{1-[h(x)+h(x)]/[1+h(x)h(x)]}=\dfrac{1+h^2(x)+2h(x)}{1+h^2(x)-2h(x)}=\left[\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\right]^2$

D'où le résultat est vrai aussi pour $n=2$.

• Supposons le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n\geq 2$ alors $\dfrac{1+h(nx)}{1-h(nx)}=\left[\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\right]^n$

Alors $\dfrac{1+h[(n+1)x]}{1-h[(n+1)x]}=\dfrac{1+h(nx+x)}{1-h(nx+x)}=\dfrac{1+[h(nx)+h(x)]/[1+h(nx)h(x)]}{1-[h(nx)+h(x)]/[1+h(nx)h(x)]}=\dfrac{1+h(nx)h(x)+h(nx)+h(x)}{1+h(nx)h(x)-h(nx)-h(x)}$ ainsi

$\dfrac{1+h[(n+1)x]}{1-h[(n+1)x]}=\dfrac{[1+h(x)][1+h(nx)]}{[1-h(x)][1-h(nx)]}=\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\times\dfrac{1+h(nx)}{1-h(nx)}=\left[\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\right]^{n+1}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

D'où pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $\dfrac{1+h(nx)}{1-h(nx)}=\left[\dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}\right]^n$

5. • Si $n=0$, $h(0)=0$. Supposons $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1+h(n)}{1-h(n)}=\left[\dfrac{1+h(1)}{1-h(1)}\right]^n$ (En remplaçant x par 1 dans la relation de **B/ 4.**)

Ainsi $\dfrac{1+h(n)}{1-h(n)}=a^n\Rightarrow 1+h(n)=a^n[1-h(n)]$. D'où $h(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$

• Supposons $n\in\mathbb{Z}$. Si $n\in\mathbb{N}$, $h(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$ d'après le premier point. Si $n\in\mathbb{Z}^-$ alors $-n\in\mathbb{N}$ et $h(-n)=\dfrac{a^{-n}-1}{a^{-n}+1}$ ainsi $h(-n)=\dfrac{1-a^n}{1+a^n}$ or h est impaire d'après **B/ 3.** alors $h(-n)=-h(n)$. D'où $h(n)=\dfrac{a^n-1}{1+a^n}$. D'où $\forall n\in\mathbb{Z}\ h(n)=\dfrac{a^n-1}{a^n+1}$

C/ 1-a. Pour $n\in\mathbb{N}$ et pour $x\geq 0$, la fonction $t\mapsto[g(t)]^n$ est continue sur $[0,x]$. Donc $I_n(x)$ existe.

b. $I_0(x)=\displaystyle\int_0^x 1\ \mathrm{d}t=x$; $I_1(x)=\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t=[\ln(1+\mathrm{e}^{-2t})+t]_0^x=\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})+x-\ln 2=\ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{2}\right]+x$

D'où $I_1(x)=\ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right]$

Remarque : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ et une primitive de cette fonction est : $x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})+x$

2-a. g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t)=\dfrac{4\,\mathrm{e}^{2t}}{[1+\mathrm{e}^{2t}]^2}\Rightarrow 1-g'(t)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{4t}-2\,\mathrm{e}^{2t}}{[1+\mathrm{e}^{2t}]^2}=\dfrac{[\mathrm{e}^{2t}-1]^2}{[1+\mathrm{e}^{2t}]^2}=\left[\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1}\right]^2=[g(t)]^2$

b. Pour $n\geq 2$; $I_n(x)=\displaystyle\int_0^x[g(t)]^{n-2}\times[g(t)]^2\ \mathrm{d}t=\int_0^x[1-g'(t)][g(t)]^{n-2}\ \mathrm{d}t=\int_0^x[g(t)]^{n-2}\ \mathrm{d}t-\int_0^x g'(t)[g(t)]^{n-2}\ \mathrm{d}t$

Or $\displaystyle\int_0^x g'(t)[g(t)]^{n-2}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n-1}\left[g^{n-1}(t)\right]_0^x=\frac{1}{n-1}g^{n-1}(x)$. D'où $I_n(x)=I_{n-2}(x)-\dfrac{1}{n-1}g^{n-1}(x)$ pour tout $n\geq 2$

3-a. Par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$

• Pour $p=1$, $I_2(x)=I_0(x)-g(x)=x-g(x)$ et $I_3(x)=I_1(x)-\dfrac{1}{2}g^2(x)=\ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right]-\dfrac{1}{2}g^2(x)$. Donc vrais pour $p=1$

• Supposons que les deux résultats (1) et (2) sont vrais jusqu'à un ordre $p\geq 1$.

$I_{2(p+1)}(x)=I_{2p}(x)-\dfrac{1}{2p+1}g^{2p+1}(x)=x-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k-1}(g(x))^{2k-1}-\frac{1}{2p+1}g^{2p+1}(x)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence sur $I_{2p}(x)$. D'où $I_{2p+2}(x)=x-\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{2k-1}(g(x))^{2k-1}$. Ainsi (1) est vrai à l'ordre $p+1$ aussi.

$I_{2(p+1)+1}(x)=I_{2p+1}(x)-\dfrac{1}{2p+2}g^{2p+2}(x)=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}(g(x))^{2k}-\frac{1}{2p+2}g^{2p+2}(x)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence sur $I_{2p+1}(x)$. D'où $I_{2p+2}(x)=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)-\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{2k}(g(x))^{2k}$. Ainsi (2) est vrai à l'ordre $p+1$ aussi.

D'où pour $p\in\mathbb{N}^*$, $I_{2p}(x)=x-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k-1}(g(x))^{2k-1}$ et $I_{2p+1}(x)=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}(g(x))^{2k}$

b. Soient $n\in\mathbb{N}$, $x\geq 0$ et $\forall\ t\in[0,x]$. D'après l'expression de $g'(t)$ en **2-a.**, on déduit que $g(t)$ est strictement croissante sur $[0,x]$. Ainsi $\forall t\in[0,x]$, $g(0)\leq g(t)\leq g(x)\Rightarrow 0\leq g^{2p}(t)\leq g^{2p}(x)$ puis en intégrant entre 0 et $x\geq 0$, on conclut que : $0\leq I_{2p}(x)\leq x(g(x))^{2p}$. $g(x)=f^{-1}(x)$ donc $\forall\ x\geq 0$, $0\leq g(x)<1$ ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty}g^{2p}(x)=0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}xg^{2p}(x)=0$

D'où $\lim\limits_{p\to+\infty}I_{2p}(x)=0$ d'après le théorème des gendarmes. D'où $I_{2p}(x)$ est convergente de limite 0.

4. Si $x=f(u)$ alors $g(f(u))=u$ car $f^{-1}(x)=g(x)$. Ainsi la suite $\varphi_p(u)=I_{2p}(f(u))$ comme $\lim\limits_{p\to+\infty}I_{2p}(x)=0\ \forall x>0$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\varphi_p(u)=0$. On pose $u=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 3^3}+\dfrac{1}{5\times 3^5}+\cdots+\dfrac{1}{(2p-1)3^{2p-1}}=f(1/3)-\varphi_p(1/3)$ comme $\lim\limits_{p\to+\infty}\varphi_p(1/3)=0$ et $f(1/3)=\dfrac{1}{2}\ln(2)=\ln(\sqrt{2})$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 3^3}+\dfrac{1}{5\times 3^5}+\cdots+\dfrac{1}{(2p-1)3^{2p-1}}\right]=\ln(\sqrt{2})$

Correction BAC C-E Togo 2001

Exercice 1

1. Tirage simultané de 4 boules parmi n alors le nombres de tirages possible est C_n^4

2-a. $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=0$ car dans les 4 boules, au moins 1 boule porte un numéro supérieur à 1, 2 et 3. Pour $k\geq 4$, le nombre de boules portant un numéro strictement inférieur à k est $k-1$. Ainsi $P(X=k)=\dfrac{1\times C_{k-1}^3}{C_n^4}$

Ainsi : $P(X=k)=0$ si $1\leq k\leq 3$ et $P(X=k)=\dfrac{C_{k-1}^3}{C_n^4}$ si $4\leq k\leq n$

b. $\sum_{k=1}^{n}P(X=k)=1\Rightarrow\sum_{k=1}^{3}P(X=k)+\sum_{k=4}^{n}P(X=k)=1$. D'où $\sum_{k=4}^{n}C_{k-1}^3=C_n^4$

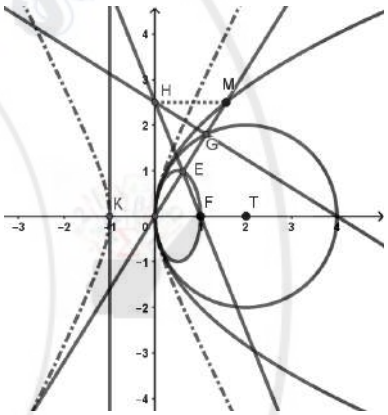
3. $P(X=n-1)=\dfrac{C_{n-2}^3}{C_n^4}=\dfrac{(n-2)!}{3!(n-5)!}\times\dfrac{4!(n-4)!}{n!}=\dfrac{4(n-4)}{n(n-1)}$. Ainsi $P(X=n-1)=0,2\Rightarrow 0.2n^2-4.2n+16=0$

$\Delta=4.84$ et donc $n_1=5$ et $n_2=16$. Ainsi la probabilité $P(X=n-1)=0.2$ si $n=5$ ou $n=16$.

4. • Pour $n=5$; $E(X)=\sum_{k=1}^{5}kP(X=k)=4P(X=4)+5P(X=5)=4\times 0.2+5\times 0.8=4.8$

• Pour $n=16$; $E(X)=\sum_{k=1}^{16}kP(X=k)=4P(X=4)+5P(X=5)+\cdots 16P(X=16)=13.6$

Exercice 2



1-a. (P) a pour foyer $F(1,0)$ et de directrice $(\Delta):x=-1$

b. Voir figure.

2-a. $a_{(FH)}=\dfrac{y_H-y_F}{x_H-x_F}=-t\Rightarrow(FH):y=-tx+c$ or $H\in(FH)\Rightarrow c=t$. Ainsi $(FH):y=-tx+t$. De même (OM) a pour équation $ty=4x$. Soit $E=(OM)\cap(FH)$, alors $-t^2x_E+t^2=4x_E\Rightarrow x_E=\dfrac{t^2}{4+t^2}$ et $y_E=\dfrac{4t}{4+t^2}$.

b. $(2x_E-1)^2=\left[\dfrac{t^2-4}{t^2+4}\right]^2$ et $1-y_E^2=1-\dfrac{16t^2}{(4+t^2)^2}=\left[\dfrac{t^2-4}{t^2+4}\right]^2$.

Ainsi $(2x_E-1)^2=1-y_E^2\Rightarrow y_E^2+(2x_E-1)^2=1$. D'où $E\in(\Gamma)$

c. D'après **2-a.**, E appartient à la conique $(\Gamma_A):y^2+(2x-1)^2=1$ qui est une ellipse de centre $\Omega(1/2,0)$ et de sommets $S_1(1,0)$; $S_2(0,0)$; $S_3(1/2,1)$ et $S_4(1/2,-1)$

3. Notons t l'ordonnée de M. D'après **2-a.**, $(OM):ty=4x$. $K=(-1,0)\Rightarrow(KH)$ a pour équation $y=tx+t$

Soit $L=(OM)\cap(KH)$, alors $t^2x_L+t^2=4x_L\Rightarrow x_L=\dfrac{t^2}{4-t^2}$ et $y_L=\dfrac{4t}{4-t^2}$ si $t\notin\{-2,2\}$ et si $t=2$ ou $t=-2$, les droites $(0M)$ et (KH) sont parallèles et par conséquent ne sont pas sécant.

$(2x_L+1)^2=\left[\dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right]^2$ et $1+y_L^2=1+\dfrac{16t^2}{(4-t^2)^2}=\left[\dfrac{4+t^2}{4-t^2}\right]^2$. Ainsi $(2x_L+1)^2-y_L^2=1$. Ainsi L appartient à l'hyperbole (Γ_2) d'équation $(2x+1)^2-y^2=1$ de centre $\Omega_2(-1/2,0)$, de sommets $S(0,0)$ et $S'(-1.0)$, d'asymptotes $y=-2x-1$ et $y=2x+1$. Voir la figure pour la représentation graphique de (Γ_2)

4-a. Supposons $t\neq 0$, (D) coefficient directeur $-\dfrac{1}{a_{OM}}=-\dfrac{t}{4}$ ainsi (D) a pour équation $y=-\dfrac{t}{4}x+t=t\left(-\dfrac{1}{4}x+1\right)$.

Ainsi un point $\in(D)$ $\forall\ t\neq 0$ si et seulement si ses coordonnées sont indépendantes de t. Ainsi il faut que $-\dfrac{1}{4}x+1=0$ soit $x=4$ et $y=0$. De plus, pour $t=0$, (D) est la droite d'équation $y=0$ qui passe par $I(4,0)$. D'où quelque soit le réel t, la droite (D) passe par un point fixe I de coordonnées $(4,0)$

b. Notons $J=(OM)\cap(D)$, alors $-t^2x_J+4t^2=16x_J\Rightarrow x_J=\dfrac{4t^2}{16+t^2}$ et $y_J=\dfrac{16t}{16+t^2}$. On a : $(x_J-2)^2=4\left(\dfrac{t^2-16}{t^2+16}\right)^2$ et $y_J^2=4\left(\dfrac{8t}{t^2+16}\right)^2\Rightarrow(x_J-2)^2+y_J^2=4$. D'où J appartient au cercle de centre $T(2,0)$ et de rayon 2

Problème

A/ 1. $D_{f_a}=]-|a|,|a|[$. $\forall x\in D_{f_a}$, $-x\in D_{f_a}$ et $f_a(-x)=-f(x)$. D'où f_a est impaire.

2. Si $a>0$, $\lim\limits_{x\to-a^+}f_a(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-}f_a(x)=+\infty$. De même si $a<0$, $\lim\limits_{x\to a^+}f_a(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-a^-}f_a(x)=-\infty$. D'où les droites $x=|a|$ et $x=-|a|$ sont des asymptotes de (C_a)

3. f_a est dérivable sur $]-|a|,|a|[$ de dérivée : $f_a'(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right]=\dfrac{a}{a^2-x^2}$ ainsi :

• Si $a>0$, $f_a'(x)>0$ et donc f_a est strictement croissante sur $]-a,a[=D_{f_a}$

• Si $a<0$, $f_a'(x)<0$ et donc f_a est strictement décroissante sur $]a,-a[=D_{f_a}$

4-a. $\forall a\neq 0$, f_a est continue et strictement monotone sur D_{f_a}. Ainsi f_a réalise une bijection de D_{f_a} sur $f(D_{f_a})=\mathbb{R}$

b. D'après **4-a.**, $\forall\, y\in\mathbb{R}$, $\exists!\, x\in D_{f_a}$ tel que $y=f_a(x)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$ soit $\dfrac{a+x}{a-x}=\mathrm{e}^{2y}\Rightarrow x=\dfrac{a(\mathrm{e}^{2y}-1)}{\mathrm{e}^{2y}+1}$

D'où la réciproque f_a^{-1} de f_a est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a^{-1}(x)=\dfrac{a(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

5-a. L'affinité orthogonale φ d'axe $(O,\vec{j})$ et de rapport a est l'application qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{PM'}=a\overrightarrow{PM}$ P étant le projeté orthogonal de M sur $(O,\vec{j})$. Pour $M(x,y)$ alors $P(0,y)$ et : $\overrightarrow{PM'}=k\overrightarrow{PM}\Leftrightarrow x'\vec{i}+(y'-y)\vec{j}=ax\vec{i}$. D'où $\begin{cases}x'=ax\\ y'=y\end{cases}$ Ainsi soit $M\in(C_1)$ et $M'(x',y')=\varphi(M)$ alors on a :

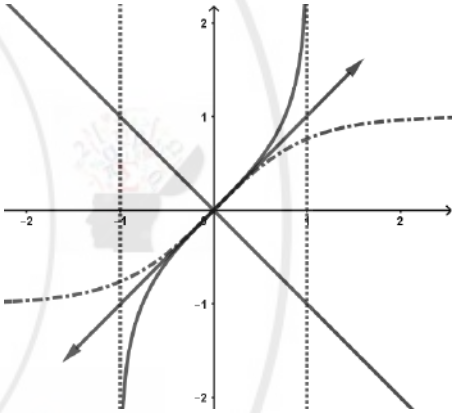
$y'=y=f_a(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)\Rightarrow y'=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x'/a}{1-x'/a}}\right)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{a+x'}{a-x'}}\right)$. D'où $M'(x',y')\in(C_a)$. D'où le résultat.

b. $f_a(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\right)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{aa'/a'+x}{aa'/a'-x}}\right)$. On pose $x'=\dfrac{a'}{a}x$ et $y'=y$ alors $f_a(x')=\ln\left(\sqrt{\dfrac{a'+x'}{a'-x'}}\right)$. D'où l'affinité ψ, ayant pour expression analytique $\begin{cases}x'=a'x/a\\ y'=y\end{cases}$ transforme (C_a) en $(C_{a'})$

6-a. $R:\begin{cases}x'=y\\ y'=-x\end{cases}$ et $S:\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$ alors $R\circ S:\begin{cases}x'=-y\\ y'=-x\end{cases}$ Soit $M(x,y)\in(\Gamma_a)$ et $M'(x',y')=R\circ S(M)$

alors $-x'=\dfrac{a(\mathrm{e}^{-2y'}-1)}{\mathrm{e}^{-2y'}+1}\Rightarrow y'=\ln\left(\sqrt{\dfrac{a+x'}{a-x'}}\right)$ ainsi une équation cartésienne de $R\circ S(\Gamma_a)$ est : $y=\ln\left(\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\right)$

b. L'équation cartésienne de (C_a) est la même que celle de $R\circ S(\Gamma_a)$. Ce résultat était prévisible car, f_a^{-1} étant la réciproque de f_a alors (C_a) est l'image de (Γ_a) par la symétrie orthogonale S' d'axe la première bissectrice soit $S':\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}$ ainsi si $M(x,y)\in(\Gamma_a)$ et $M'(x',y')=S'(M)$, $M'\in(C_a)$ soit $y'=f_a(x')\Rightarrow -y'=f_a(-x')$ car f_a est une fonction impaire. Ainsi en posant $y''=-y'$ et $x''=-x'$, $y''=f_a(x'')$. Par suite si $M(x,y)\in(\Gamma_a)$ et $M'(x',y')=R\circ S(M)$ alors $M'\in(C_a)$.



7. $f_1'(0)=1$ alors la tangente en 0 a pour équation $y=x$. Voir figure

B/ 1. g dérivable sur $[0,\pi/2[$ de dérivée $g'(x)=(\sin x)'f_1'(\sin x)=\cos(x)\times\dfrac{1}{1-\sin^2(x)}$

D'où $\forall\, x\in[0,\pi/2[$, $g'(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g'(t)\,\mathrm{d}t=g(\pi/6)-g(0)=\ln(\sqrt{3})$. Donc $c=\sqrt{3}$

3. Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, et $\forall\, x\in[0,\pi/6]$, $\Psi_n(x)=\dfrac{(\sin(x))^{2n}}{\cos x}$

a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, et $\forall\, x\in[0,\pi/6]$, $\cos(x)>0$ et $\sin(x)\geq 0$ alors $\Psi_n(x)\geq 0$ ainsi $I_n\geq 0$ car il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[0,\pi/6]$

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{2n+2}(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{2n}(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{2n}(x)}{\cos x}[\sin^2(x)-1]\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^{2n}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Or $\forall x\in[0,\pi/6]$ $\sin^{2n}(x)\cos(x)\geq 0\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$ et (I_n) est décroissante.

c. $\forall x\in[0,\pi/6]$, $0\leq\sin(x)\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0\leq\sin^{2n}(x)\leq\dfrac{1}{2^{2n}}\Rightarrow 0\leq\dfrac{\sin^{2n}(x)}{\cos(x)}\leq\dfrac{1}{4^n}\times\dfrac{1}{\cos(x)}\Rightarrow 0\leq I_n\leq\dfrac{1}{4^n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

D'où $0\leq I_n\leq\dfrac{\ln(\sqrt{3})}{4^n}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{3})}{4^n}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ d'après le théorème des gendarmes.

C/ 1. Pour $x\in[0,\pi/2[$, $\sin(x)\neq 1$, $s_n(x)=1+\sin^2(x)\dfrac{1-\sin^{2n-2}(x)}{1-\sin^2(x)}=\dfrac{1-\sin^{2n}(x)}{\cos^2(x)}$

2. Pour $x\in[0,\pi/2[$, h_n est dérivable et $h_n'(x)=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\cos(x)\sin^{2p-2}(x)=\cos(x)\sum_{p=0}^{n-1}\sin^{2p}(x)=\dfrac{1-\sin^{2n}(x)}{\cos(x)}$ d'après **C/ 1.**

3. $h_n(0)=0$ alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}h_n'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{2n}(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\ln(\sqrt{3})-I_n$. D'où $h_n(\frac{\pi}{6})=\ln(\sqrt{3})-I_n$

4. $U_n=h_n(\frac{\pi}{6})$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\ln(\sqrt{3})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

Correction BAC C-E Togo 2002

Exercice 1

1-a. Les fonctions g_1 et g_2 sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives :
$g_1'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $g_2'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$ puis on déduit que :
• g_2 est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
• g_1 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
On déduit de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) \geq 0$ et $g_2(x) \leq 0$
$g_1(x) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geq x + 1$ (*)
$g_2(x) \leq 0 \Rightarrow (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \leq 0$. De plus, si $x \in]0, 1[$ alors on déduit que $\mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ (**)
D'où pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $1 + x < \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{1-x}$

2. Soit $y > 1$ alors $\dfrac{1}{y} \in]0, 1[$ alors $1 + \dfrac{1}{y} < \mathrm{e}^{1/y} < \dfrac{1}{1 - 1/y}$ puis $\ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{1}{y} < \ln\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

3-a. Pour $n \geq 2$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$ et par suite $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow$ la suite U est décroissante.
Pour $n \geq 2$, $U_n \geq 0$ en tant que somme de termes positifs. On conclut alors que U est convergente car elle est croissante et minorée par 0.

b. Pour tout $n \geq 2$ et $k \geq 2$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k} < \ln\left(\dfrac{k}{1-k}\right)$ puis en sommant pour $k = n$ à $k = 2n$ on a :
$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k} < \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$ or : $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et
• $\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} [\ln(1+k) - \ln(k)] = \ln(2n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{1+2n}{n}\right)$
• $\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n}^{2n} [\ln(k) - \ln(k-1)] = \ln(2n) - \ln(n-1) = \ln\left(\dfrac{2n}{n-1}\right)$
D'où pour $n \geq 2$, $\ln\left(\dfrac{1+2n}{n}\right) < U_n < \ln\left(\dfrac{2n}{n-1}\right)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+2n}{n}\right) = \ln 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n}{n-1}\right) = \ln 2$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$ d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 2

1. $7 \equiv 2[5]$ donc $8x \equiv 7[5] \Leftrightarrow 8x \equiv 2[5]$
On a aussi : $8 \times 2 = 16$ donc l'inverse de 8 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est 2. Ainsi comme $8x \equiv 7[5]$ alors $8 \times 2x \equiv 14[5]$ puis $x \equiv 4[5]$
D'où les entiers relatifs x tels que $8x \equiv 7[5]$ sont $x \equiv 4[5]$ ce qui revient au même à dire les entiers relatifs x de la forme $x = 4 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2. Résolvons l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $336x + 210y = 294$
• *pgcd* de 336 et 210 : le $PGCD(336, 210) = 42$. Le $PGCD(336, 210)$ divise $c = 294$. Par suite l'équation (E) admet au moins une solution. Ainsi résoudre (E) est équivalent à résoudre (E') : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $8x + 5y = 7$
• Recherche d'une solution particulière de (E') :
$8 \times 2 - 5 \times 3 = 1 \Rightarrow 8 \times 14 - 5 \times 21 = 7$. Ainsi le couple $(x_0, y_0) = (14, -21)$ est une solution particulière de (E')
• Résolution de (E') : (x, y) est solution de $(E') \Leftrightarrow 8x + 5y = 8x_0 + 5y_0 \Rightarrow 8(x - x_0) = 5(y_0 - y)$.
− Puisque $8(x - x_0) = 5(y_0 - y)$, alors 8 divise $5(y_0 - y)$. Comme $8 \wedge 5 = 1$ alors d'après le théorème de Gauss, on conclut que 8 divise $y_0 - y$. Par suite $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 8k \Rightarrow y = y_0 - 5k$.
− En remplaçant dans l'égalité $8(x - x_0) = 5(y_0 - y)$, y par $y_0 - 8k$ on tire que $x = x_0 + 5k$.
D'où les solutions de l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $336x + 210y = 294$ sont les couples $(x, y) = (14 + 5k, -21 - 8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$

3. Soit (a, b) un couple d'entier naturel tel que $PGCD(a, b) = 42$ et $PPCM(a, b) = 1680$ alors $\begin{cases} a \cdot b = 70560 \\ a|1680 \text{ et } b|1680 \\ 42|a \text{ et } 42|b \end{cases}$
• $42|a$ et $42|b \Rightarrow \exists (k, k') \in \mathbb{N}$ tel que $a = 42k$ et $b = 42k'$ avec $k \wedge k' = 1$. De plus $a|1680$ et $b|1680 \Rightarrow k|40$ et $k'|40$ donc k et k' sont des diviseurs de 40. Or les diviseurs de 40 sont : $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Donc k et k' est dans cet ensemble.
• $a \cdot b = 70650 \Rightarrow k \cdot k' = 40$. Donc les valeurs possibles des (k, k') sont $\{(1, 40); (2, 20); (4, 10); (40, 1); (20, 2); (10, 4)\}$
Et comme $k \wedge k' = 1$ alors $(k, k') \in \{(1, 40); (40, 1)\}$
D'où les couples (a, b) sont $(42, 1680)$ et $(1680, 42)$

Problème

A/

1. L'écriture complexe d'une rotation est : $z' = \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega$. Or $T(K)=K$ et $T(A)=B \Rightarrow \begin{cases} -i = \mathrm{e}^{i\theta}(-i-\omega)+\omega \\ -1 = \mathrm{e}^{i\theta}(1-\omega)+\omega \end{cases}$

et on déduit alors $\mathrm{e}^{i\theta} = i$. D'où T est la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

L'écriture complexe de T est alors $z' = iz - 1 - i$

2. Supposons $M \neq K$, l'angle $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_2M_1})$ est un argument $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z} = \dfrac{(i-1)z_1-1-i}{(i-1)z-1-i} = \dfrac{i[(i-1)z-1-i]}{(i-1)z-1-i} = i$

et par suite $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_2M_1}) = \dfrac{\pi}{2}$ d'où les droites (MM_1) et (M_2M_1) sont perpendiculaires.

3. T est une transformation du plan donc l'image d'un cercle est un cercle de même rayon. Or le cercle de diamètre $[AB]$ est le cercle de centre O et de rayon $r=1$. L'image du point O par T est le point $O'(-1,-1)$. D'où quand M décrit le cercle de diamètre $[AB]$, M_1 décrit le cercle de centre O' et de rayon 1 soit le cercle d'équation $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

B/

1. On a : $Z' = \alpha Z - \alpha Z_1 + 1 = \alpha(1-i)Z + \alpha(1+i) + 1 \Rightarrow Z' = \alpha(1-i)[Z+i]+1$

b. Ensemble des points invariants : Soit $M(Z_\alpha)$ tel que $M = T_\alpha(M) \Rightarrow Z_\alpha = \alpha(1-i)[Z+i]+1 \Rightarrow Z_\alpha = \dfrac{1-2i\alpha^2}{\alpha^2+(1-\alpha)^2}$.

On note Ω le point d'affixe Z_α

• Si $\alpha = 0$, le point A est le seul point invariant et T_α est l'application qui a tout point M du plan, on associe le point A.

• Si $\alpha < 0$, T_α est la similitude directe de centre Ω, de rapport $-\alpha\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$

• Si $\alpha > 0$, T_α est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\alpha\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

2. $Z' = \alpha(1-i)Z + \alpha(1+i)+1 \Rightarrow x'+iy' = \alpha(1-i)(x+iy)+\alpha(1+i)+1 \Rightarrow x'+iy' = \alpha(x+y+1)+1+i\alpha(y-x+1)$

Donc par identification, $\begin{cases} x' = \alpha(x+y+1)+1 \\ y' = \alpha(y-x+1) \end{cases}$

4-a. On déduit de la question précédente que $x'_E = \alpha+1$ et $y'_E = 2\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha}+\alpha$

b. $x'_E = \alpha+1 \Rightarrow \alpha = x'_E - 1$. Or comme $y'_E = 2\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha}+\alpha$ alors $y'_E = 2(x'_E-1)\,\mathrm{e}^{x'_E-1}+x'_E-1$. D'où lorsque α décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points E' est la courbe (C) d'équation : $y = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}+x-1$

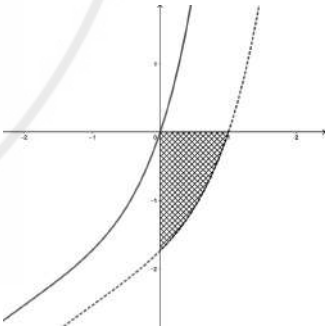
C/

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^x+1$.

De plus f est deux dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x) = 2(x+2)\,\mathrm{e}^x \Rightarrow f'$ est strictement décroissante sur $]-\infty,-2]$ et strictement croissante sur $[-2,+\infty[$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq f'(-2)$ Or $f'(-2) \approx 0.73 > 0$ alors on conclut que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



3-a. Voir figure

b. On note φ la transformation affine d'expression analytique $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y \end{cases}$ Soit $M' = \varphi(M)$

alors $y = y'$ et $x = x'-1$

$M \in (C_f) \Leftrightarrow y = 2x\,\mathrm{e}^x + x \Leftrightarrow y' = 2(x'-1)\,\mathrm{e}^{x'-1}+x'-1$. D'où l'ensemble (C) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u} = (1,0)$

d. La courbe (C) coupe (ox) en $x=1$ donc l'aire demandée $\mathcal{A}$ est égale, en unité d'aire, à $-\displaystyle\int_0^1 [2(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}+x-1]\,\mathrm{d}x$

car la fonction est négative sur $[0,1]$. D'où $\mathcal{A} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$ en $u.a$ (une intégration par parties permet d'obtenir le résultat)

4-a.. Montrons le résultat par récurrence sur n :

• Pour $n=1$, on a : $g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x-1} = 2(x+1-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ donc le résultat est vrai à l'ordre $n=1$.

• Supposons le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ alors $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ par hypothèses de récurrence.

$g^{(n+1)}(x) = 2\,\mathrm{e}^{x-1} + 2(x+n-1)\,\mathrm{e}^{x-1} = 2[x+(n+1)-1]\,\mathrm{e}^{x-1}$. Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$. D'où le résultat

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(x+k-1)\,\mathrm{e}^{x-1} = 2n(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1} + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{e}^{x-1}$

Correction BAC C-E Togo 2003

Exercice 1

1. Les points A, B, C sont non alignés. Par définition une application affine du plan est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images alors il existe une application affine du plan dans lui même telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C'$

2. Si $C = C'$ alors $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$ et A, B, C sont non alignés alors f est l'identité du plan.

3. Si $C \neq C'$ alors l'ensemble des points invariants est la droite (AB)

4-a. Notons ϕ l'application linéaire associée à f. Alors $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{OC}$ car $O \in (AB)$ donc $f(O) = O$

Or $\phi(\overrightarrow{OM}) = x\phi(\overrightarrow{AB}) + y\phi(\overrightarrow{OC}) = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{OC'}$. Ainsi $x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{AB} + \alpha y\overrightarrow{OC}$. D'où $\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha y \end{cases}$

b. Comme $C \neq C'$ alors forcement $\alpha \neq 1$

• L'ensemble des points invariants par f est la droite la droite $y = 0$ soit l'axe des abscisses (AB).

• Si $\alpha = 0$, f est la projection sur (AB) parallèlement $\overrightarrow{OC}$

• Si $\alpha = -1$, f est symétrie axiale d'axe (AB) suivant la direction $\overrightarrow{OC}$

• Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ f est l'affinité d'axe (AB), de direction $\overrightarrow{OC}$ et de rapport α

5-a. Par définition, $k \neq 0$. Notons φ l'application linéaire associée à f. Alors $\phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM'} = x'\overrightarrow{AB} + y'\frac{1}{k}\overrightarrow{AC}$. Or $\phi(\overrightarrow{AM}) = x\phi(\overrightarrow{AB}) + y\frac{1}{k}\phi(\overrightarrow{AC}) = x\overrightarrow{AB} + y\frac{1}{k}\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB} + y\frac{1}{k}\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AB}$. D'où $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$

b. • Pour tout point M de P, $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MM'} = (x' - x)\overrightarrow{AB} + (y' - y)\frac{1}{k}\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AB}$

• Soit $M(x, y)$. Si (CM) est parallèle à (AB) alors $M \in (CC')$. De plus $\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB} \Rightarrow (MM')$ est parallèle à (AB) donc $M' \in (CC')$. Une fois que $M(x, y)$ est placé, M' est le point sur la droite (CC') tel que $\overrightarrow{MM'} = y\overrightarrow{AB}$.

• Si (CM) n'est pas parallèle à (AB) comme $\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB} \Rightarrow (MM')$ est parallèle à (AB). Une fois que le point $M(x, y)$ est placé, on construit M' en traçant la droite parallèle à (AB) et passant par M puis on place M' sur cette droite de sorte que $\overrightarrow{MM'} = y\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

1-a. Soit $M \in P$ tel que $M = f_a(M)$ alors $k = aik + 1 \Rightarrow (1 - ai)k = 1$. Ainsi f_a admet un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{1 + ai}{1 + a^2}$. f_a est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1 + ai}{1 + a^2}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + arg(a)$.

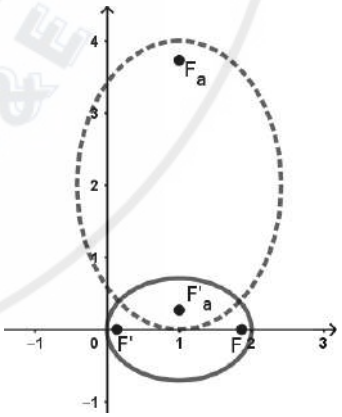
Notons r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport a. Alors $r \circ h = h \circ r = f_a$. Donc f_a est la composée de r et h. (Forme réduite d'une similitude directe)

b. Notons $k' = x' + iy'$ et $k = x + iy$. $k' = aik + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -ay + 1 \\ y' = ax \end{cases}$. Soit $M(x, y) \in (C_a)$ et $M' = f_a(M)$. $M(x, y) \in (C_a) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{y'^2}{a^2} + 2\frac{(1 - x')^2}{a^2} - 2\frac{y'}{a} = 0 \Leftrightarrow 2(x' - 1)^2 + y'^2 - 2ay' = 0$. Ainsi (C'_a) a pour équation : $2(x - 1)^2 + y^2 - 2ay = 0$.

$(C) : x^2 + 2y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2y^2 = 1$ alors (C) est une ellipse de foyers $F(1 + \sqrt{2}/2; 0)$ et $F'(1 - \sqrt{2}/2; 0)$

Comme $a \neq 0$ alors f_a est bijective. Et comme $(C'_a) = f_a(C)$ alors on conclut que (C'_a) est une ellipse de foyers $F_a = f_a(F) = (1, a + a\sqrt{2}/2)$ et $F'_a = f_a(F') = (1, a - a\sqrt{2}/2)$

Voir la figure pour la construction de (C) et (C'_2)



2-a. L'expression analytique de g_a est : $\begin{cases} x' = -ay + 1 \\ y' = ax \\ z' = az \end{cases}$

b. Soit $M(y, z)$ dans le repère $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $M' = g_2(M)$ est un point du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$

$M \in (H) \Leftrightarrow y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x' - 1)^2}{a^2} - \frac{z'^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 - z'^2 = a^2$. Ainsi, dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$, $g_2(H)$ a pour équation $(x - 1)^2 - z^2 = 4$. Pour la construction, (H) doit être construite dans le repère $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $g_2(H)$ dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$. Faire la construction.

Problème

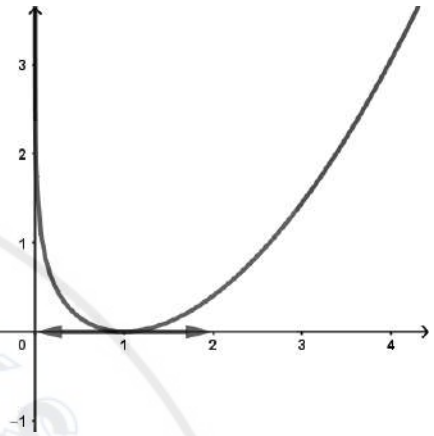
A/ 1. $P'(x) = 2ax + b \Rightarrow xP'(x) - 2P(x) = -bx - 2c \Rightarrow b = 0$ et $c = 0$. D'où $P(x) = ax^2$ $\forall$ $a \in \mathbb{R}$

2-a. $g = \frac{f}{P} \Rightarrow f = gP$. f solution de $(E) \Leftrightarrow x[g'(x) \times P(x) + P'(x) \times g(x)] - 2g(x) \times P(x) = \ln(x)$. Ainsi on a alors :

f solution de $(E) \Leftrightarrow ag'(x) \times x^3 + 2ax^2 g(x) - 2ax^2 g(x) = \ln(x) \Leftrightarrow ax^3 g'(x) = \ln(x)$. D'où f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{ax^3}$

b. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right] + \int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right] + \left[-\frac{1}{4x^2}\right]$. D'où l'ensemble des primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$ est l'ensemble : $x \mapsto -\dfrac{\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

c. D'après **2-a.** et **2-b.** on déduit que f est solution de (E) si et seulement si g est sous la forme $g(x) = -\dfrac{\ln x}{2ax^2} - \dfrac{1}{4ax^2} + \dfrac{C}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Or $f(x) = g(x) \times P(x) \Rightarrow f(x) = -\dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{4} + Cx^2$. D'où l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1+\ln(x^2)}{-4} + \alpha x^2$ où α est un nombre réel. (Se rappeler que $2\ln(x) = \ln(x^2)$)



3-a. $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$. D'où $\varphi(x) = \dfrac{1+\ln(x^2)}{-4} + \dfrac{1}{4}x^2$

b. φ est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée : $\varphi'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $]0,1[$; strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et $\varphi(1) = 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

B/ 1. $I(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{4} - \frac{x\ln x - x}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_\lambda^1 = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda\ln\lambda - \lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{12}$

2. $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda\ln\lambda = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\dfrac{\lambda}{4} + \dfrac{\lambda\ln\lambda - \lambda}{2} - \dfrac{\lambda^3}{12}\right] = 0$. D'où $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda) = \dfrac{1}{3}$

3-a. Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n-1$, $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right] \subset]0,1]$. Comme φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ alors $\forall x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, $\varphi\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \varphi(x) \le \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b. $x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, $\varphi\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \varphi(x) \le \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\,\mathrm{d}x \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}x$.
Ainsi $\dfrac{1}{n}\varphi\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \le \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ puis $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. D'où $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$
$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ ainsi $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ et par suite on déduit que : $I\left(\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

5-a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k/n)}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
• Pour $n = 1$, $1^2 = 1(1+1)(2\times 1+1)/6$
• Supposons que le résultat reste vrai jusqu'à un ordre $n \ge 1$ et montons le résultat à l'ordre $n+1$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[6n+6+2n^2+n]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ le résultat est vrai à l'ordre $n+1$. D'où le résultat.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\right)$. Or $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{n}{k} = \frac{n^n}{n!}$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$

c. De **5-a.** et **5-b.**, on déduit que : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} + \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) - \frac{1}{4}$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{3}$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} = \dfrac{1}{12}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^n}{n!}\right) = 1$. De même $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = \left(\dfrac{n^n}{n!}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{V_n}$ et comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{V_n} = \mathrm{e}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \mathrm{e}$

Correction BAC C-E Togo 2004

Exercice 1

1. $U_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$ et $U_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = [2x\sqrt{1+x}]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ or $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2^{5/2}}{3} - \frac{2}{3}$. D'où $U_1 = 2\sqrt{2} - \frac{2^{7/2}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}(x-1)\,\mathrm{d}x$ or pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}(x-1) \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$. D'où (U_n) est une suite décroissante.

3-a. Soit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. φ est continue, et dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} < 0$. Donc φ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $x^n \geq 0$ alors $\frac{\sqrt{2}}{2}x^n \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. D'où $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

4-a. Pour tout n$\in \mathbb{N}^*$; $U_{n-1} + U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}}(1+x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ or $\forall x \in [0,1]$, $x^{n-1}\sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}x^{n-1}$

Ainsi $U_{n-1} + U_n \leq \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x$. D'où $U_{n-1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n} - U_{n-1}$ et en utilisant **3-a.** on déduit que $U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} = \frac{n+2}{\sqrt{2}n(n+1)}$ (*)

D'après **3-a.** et (*), on déduit alors que $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq U_n \leq \frac{n+2}{\sqrt{2}n(n+1)} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} \leq nU_n \leq \frac{n+2}{\sqrt{2}(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{\sqrt{2}(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Théorème des gendarmes)

Exercice 2

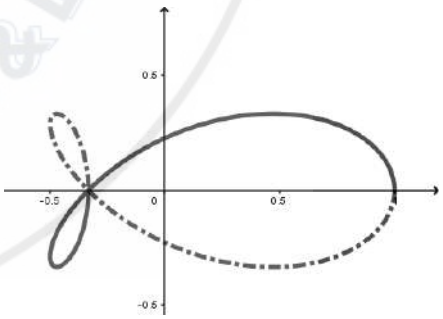
1. $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$. $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $Z+1 = 1+\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overrightarrow{AQ}$ a pour affixe $Z^2+Z+\frac{1}{Z}+1 = 1+\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{2i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta} = (1+\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-i\theta}+\mathrm{e}^{i\theta})$ ainsi comme $\mathrm{e}^{-i\theta}+\mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos(\theta)$ alors $\overrightarrow{AQ} = 2\cos(\theta)\overrightarrow{AM}$. D'où les points A, M et Q sont alignés.

2. $Z_{G_\theta} = \frac{Z+Z^2+1/Z}{3} \Rightarrow X_{G_\theta} = \frac{2}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos(2\theta)$ et $Y_{G_\theta} = \frac{1}{3}\sin(2\theta)$

3-a. $x(t)$ est pair et $2\pi-$périodique et $y(t)$ est impair et $2\pi-$périodique donc on peut réduire le domaine d'étude à $[0,\pi]$.

Pour tout $t \in [0,\pi]$; $x'(t) = -\frac{2}{3}[\sin(2t) + 2\sin(t)] = -\frac{2\sin(t)}{3}[2\cos(t)+1]$. Par suite $x(t)$ est décroissante sur $[0, 2\pi/3]$ et croissante sur $]2\pi/3, \pi]$

Pour tout $t \in [0,\pi]$; $y'(t) = \frac{2}{3}\cos(2t)$ donc $y(t)$ est croissante sur $[0,\pi/4]$ et sur $[3\pi/4,\pi]$ et $y(t)$ est décroissante sur $[\pi/4, 3\pi/4]$



b. Voir la figure.

4. D'après **2.**, on conclut que si M décrit le cercle trigonométrique, G_θ décrit (Γ)

Problème

A/ 1-a. $\overrightarrow{Bf(B)} = \vec{j}$ donc $f(B) = A$. $\overrightarrow{Cf(C)} = \vec{j}$ donc $f(C) = D$

b. $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{f(O)f(B)} = \vec{0} \Rightarrow \varphi(\vec{j}) = \vec{0}$ et $\varphi(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{f(O)f(C)} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \varphi(\vec{i}) = \vec{i}$. D'où $\varphi(\vec{j}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$

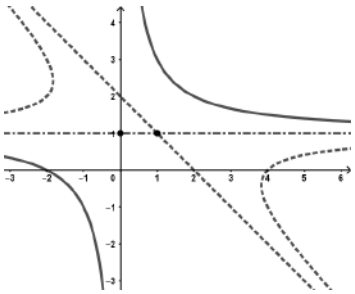
2. Pour $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f(M)$, $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{AM'}$. Or $\overrightarrow{AM'} = x'\vec{i} + (y'-2)\vec{j}$ et $\varphi(\overrightarrow{OM}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) = x\vec{i}$

Par suite $x'\vec{i} + (y'-2)\vec{j} = x\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 \end{cases}$ Ainsi si $M' = f(M)$ alors $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$

3. $f \circ f$: $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 \end{cases}$. D'où $f \circ f = f$

L'ensemble des points invariants par f est la droite $y = 2$. De plus pour tout point M du plan, $M' = f(M)$ est un point de la droite $y = 2$; $f \circ f = f$ et $\overrightarrow{Mf(M)} = (2-y)\vec{j}$ alors f est la projection sur la droite $y = 2$ parallèlement à l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$

B/ 1-a. $\overrightarrow{Bf(B)} = \vec{i}$ donc $f(B) = C$. $\overrightarrow{Cf(C)} = \vec{i}$ donc $f(C) = E$
b. $\varphi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$ et $\varphi(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AE} \Rightarrow \varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j}$. D'où $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$ et $\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$
2. Pour $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f(M)$, $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{AM'}$. Or $\overrightarrow{AM'} = x'\vec{i} + (y'-2)\vec{j}$ et
$\varphi(\overrightarrow{OM}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) = (x+y)\vec{i} - y\vec{j}$. Par suite $x'\vec{i} + (y'-2)\vec{j} = (x+y)\vec{i} - y\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$
3-a. Si $M = f(M)$ alors $\begin{cases} x = x+y \\ y = -y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ donc f n'a pas de point invariants.
b. $f \circ f : \begin{cases} x'' = x' + y' \\ y'' = -y' + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x+2 \\ y'' = y \end{cases}$. Donc $f \circ f$ est la translation de vecteur $\vec{u} = (2,0)$
4. Expression analytique de $t : \begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y \end{cases}$ alors $t \circ f : \begin{cases} x'' = x'-1 \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x+y-1 \\ y'' = -y+2 \end{cases}$. Notons $S = t \circ f$
• L'ensemble des points invariants par S : Soit $M = S(M)$ alors $\begin{cases} x = x+y-1 \\ y = -y+2 \end{cases} \Rightarrow y = 1$ donc l'ensemble des points invariants par S est la droite d'équation $y = 1$
• Expression analytique de $S \circ S : \begin{cases} x'' = x' + y' - 1 \\ y'' = -y' + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$ ainsi $S \circ S = Id_P$ d'où S est une involution $\Rightarrow$ S est une symétrie axiale (en considérant le fait que l'ensemble des points invariants par S est une droite)
• Pour $M' = f(M)$, $\overrightarrow{MM'} = (y-1)\vec{i} + (-2y+2)\vec{j} = (y-1)(\vec{i} - 2\vec{j})$
Ainsi S est la symétrie axiale d'axe $y = 1$ parallèlement à la direction $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$
5-a. $M_{n+2} = f(M_{n+1}) = f(f(M_n)) = f \circ f(M_n)$ ainsi d'après **B/ 3-b.**, $\begin{cases} x_{n+2} = x_n + 2 \\ y_{n+2} = y_n \end{cases}$ comme
$\overrightarrow{M_nM_{n+2}} = (x_{n+2} - x_n)\vec{i} + (y_{n+2} - y_n)\vec{j}$ alors $\overrightarrow{M_nM_{n+2}} = 2\vec{i}$
b. $M_0 = O$ alors $M_1 = f(M_0) = A$ donc $M_1 \in$ à la droite $y = 2$; $\overrightarrow{OM_2} = 2\vec{i} \Rightarrow M_2 \in (O, \vec{i})$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \in (O, \vec{i}) \cup (D)$ avec $(D) : y = 2$
• Les points M_0, M_1 et M_2 appartiennent à $(O, \vec{i}) \cup (D)$
• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 2$. $f = t_{\vec{i}} \circ S$ car $t^{-1} = t_{-\vec{i}}$. Ainsi si $M_n \in (O, \vec{i})$ alors $S(M_n) = (x_n - 1, 2)$ et $t_{\vec{i}}(S(M_n)) = (x_n, 2)$. Ainsi si $M_n \in (O, \vec{i})$ alors $M_{n+1} \in (D)$. De même si $M_n \in (D)$, $S(M_n) = (x_n+1; 0)$ et $t_{\vec{i}}(S(M_n)) = (x_n+2, 0) \in (O, \vec{i})$. Ainsi si $M_n \in (D)$ alors $M_{n+1} \in (O, \vec{i})$. D'où $M_{n+1} \in (O, \vec{i}) \cup (D)$
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \in (O, \vec{i}) \cup (D)$ avec $(D) : y = 2$
c. $M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -y_n + 2$
$z_{n+1} = y_{n+1} - 1 = -y_n + 1 = -(y_n - 1)$ alors $z_{n+1} = -z_n$ ainsi z_n est une suite géométrique de raison -1 avec $z_0 = -1$.
Ainsi $z_n = (-1)^n z_0 \Rightarrow z_n = (-1)^{n+1}$ puis on déduit que $y_n = (-1)^{n+1} + 1$.
On déduit alors que pour tout entier naturel k, $x_{k+1} - x_k = (-1)^{k+1} + 1 \Rightarrow \forall n \geq 1$; $\sum_{k=0}^{n-1}[x_{k+1} - x_k] = \sum_{k=0}^{n-1}[(-1)^{k+1} + 1]$ or $\sum_{k=0}^{n-1}[x_{k+1} - x_k] = x_n - x_0 = x_n$ car $x_0 = 0$. Par ailleurs $\sum_{k=0}^{n-1}[(-1)^{k+1} + 1] = \sum_{k=0}^{n-1}[(-1)^{k+1}] + \sum_{k=0}^{n-1}[1] = n + \dfrac{-1 + (-1)^n}{2}$. D'où $x_n = n + \dfrac{-1 + (-1)^n}{2} = n - \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$. Le résultat reste vrai pour $n = 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = n - \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$
C/ 1. Posons $\psi : \begin{cases} x = X - Y \\ y = X + Y + 1 \end{cases}$; ψ est une application affine bijective et pour $M(x,y) \in (\Gamma_k)$ et $M'(X,Y)$ tel que $M = \psi(M')$. $M(x,y) \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow x(y-1) = k \Leftrightarrow (X-Y)(X+Y) = k$ ou encore $X^2 - Y^2 = k$ qui est une équation d'une hyperbole. Comme ψ est bijective, on conclut alors que (Γ_k) est aussi une hyperbole. Notons (Γ_k^{-1}) la courbe d'équation $X^2 - Y^2 = k$. (Γ_k^{-1}) a pour centre $\Omega'(0,0)$ et pour asymptotes les droites d'équation $Y = X$ et $Y = -X$. Alors (Γ_k) a pour centre $\Omega = \psi(\Omega') = (0,1)$ et pour asymptotes les droites d'équation $y = 1$ et $x = 0$.
2-a. • Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: Soit $M(x,y) \in (\Gamma_k)$ et $M'(x',y') = f(M)$. $M(x,y) \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow$ $x(y-1) = k$. Or $x = x'+y'-2$ et $y = -y'+2$ ainsi $M(x,y) \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow -x'y' - y'^2 + x' + 3y' - 2 = k$.
Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (Γ'_k) a pour équation : $-xy - y^2 + x + 3y = k + 2$.
• Soit M un point de coordonnées (x,y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) dans $(C, \vec{i}, \vec{i} - \vec{j})$, alors on a : $\begin{cases} x = X + Y + 1 \\ y = -Y + 1 \end{cases}$ Soit $M(x,y) \in (\Gamma'_k)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors d'après le premier point, $-(X+Y+1)(-Y+1) - (-Y+1)^2 + X + Y + 1 + 3(-Y+1) = k + 2 \Rightarrow XY = k$.
Dans $(C, \vec{i}, \vec{i} - \vec{j})$, (Γ'_k) a pour équation : $xy = k$
b. $(\Gamma'_k) = f(\Gamma_k)$ et comme f est une application affine bijective et (Γ_k) est une hyperbole alors (Γ'_k) est aussi une hyperbole de centre $\Omega_k = f(\Omega) = (1,1)$ et d'asymptotes les droites $y = 1$ et $y = -x + 2$ (Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$)
3. Voir la figure. Construction dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



Correction BAC C-E Togo 2005

Exercice 1

1-a. Algorithme d'Euclide :

$2005 = 1 \times 1967 + 38$ $\quad$ $29 = 3 \times 9 + 2$
$1967 = 51 \times 38 + 29$ $\quad$ $9 = 4 \times 2 + 1$
$38 = 1 \times 29 + 9$ $\quad$ $2 = 2 \times 1 + 0$

Ainsi le $pgcd(2005; 1967) = 1$ puis on conclut que 2005 et 1967 sont premiers entre eux.

b. Remontée de l'algorithme d'Euclide

$1 = 9 - 4 \times 2$
$1 = 9 - 4 \times (29 - 3 \times 9) = -4 \times 29 + 13 \times 9$
$1 = -4 \times 29 + 13 \times (38 - 29) = 13 \times 38 - 17 \times 29$
$1 = 13 \times 38 - 17 \times (1967 - 51 \times 38) = -17 \times 1967 + 880 \times 38$
$1 = -17 \times 1967 + 880 \times (2005 - 1967) = 880 \times 2005 - 897 \times 1967$

Ainsi le couple $(a, b) = (880, -897)$ vérifie $2005a + 1967b = 1$

2. On a : $2005a + 1967b = 1 \Rightarrow 1967b = 1 - 2005a$ et par suite $1967b \equiv 1[2005]$. Donc dans $\mathbb{Z}/2005\mathbb{Z}$, $1967b = 1$. D'où l'inverse de $\overset{\cdot}{1967}$ dans $\mathbb{Z}/2005\mathbb{Z}$ est $\overset{\cdot}{b} = \overset{\cdot}{1108}$

3. Dans $\mathbb{Z}/2005\mathbb{Z}$, $\overset{\cdot}{1967}\dot{x} + \overset{\cdot}{1515} = \overset{\cdot}{38} \Rightarrow \overset{\cdot}{1108} \times \overset{\cdot}{1967}\dot{x} + \overset{\cdot}{1108} \times \overset{\cdot}{1515} = \overset{\cdot}{1108} \times \overset{\cdot}{38} \Rightarrow \dot{x} + \overset{\cdot}{435} = \overset{\cdot}{2004}$

Ainsi $\dot{x} = 1569$

Exercice 2

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\,\mathrm{d}x$ or pour tout $x \in [1, 2]$, $\dfrac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, 2]$; $\dfrac{1}{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}} \geq 0$ donc $I_n \geq 0$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors minorée par 0. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée alors elle converge.

2. Pour $x \in [1, 2]$ et $n > 1$; $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 1 - x \leq 0$. Ainsi $1 \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1-x}} \leq \mathrm{e}$ puis $\dfrac{1}{x^n} \leq \dfrac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$ et par intégration on a :

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x$ (*). Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

D'où on déduit, d'après (*), que $\dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \dfrac{e}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes

3. • f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f_n'(x) = \dfrac{-[nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{1-x} - x^n\,\mathrm{e}^{1-x}]}{x^{2n}\,\mathrm{e}^{2(1-x)}} = \dfrac{1}{x^n\,\mathrm{e}^{1-x}} - \dfrac{n}{x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_n'(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$; $f_n'(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x) \Rightarrow \displaystyle\int_1^2 f_n'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x - n\int_1^2 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi $f_n(2) - f_n(1) = I_n - nI_{n+1}$

D'où $nI_{n+1} - I_n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{2^n}$ (**)

• D'après (**), $nI_{n+1} = I_n + 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{2^n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

• D'après (**), pour tout $n \geq 2$, $(n-1)I_n - I_{n-1} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n-1}} \Rightarrow nI_n = I_n + I_{n-1} + 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n-1}}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$

Problème

A/ 1. • Le déterminant du système associé à g est $\dfrac{1}{2} \neq 0$ alors g est bijective.

• Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y') = S(M)$. Notons H le milieu de $[MM']$

$$M' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ est colinéaire à } \vec{j} \\ H \text{ est un point de } (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ \dfrac{y + y'}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x + x'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$$

• $S \circ g$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = x' - y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y'' = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \left[-\dfrac{3}{4}x + y + \dfrac{1}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y'' = \dfrac{1}{4}x - y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

• $g \circ S$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x' + 1 \\ y'' = -\dfrac{3}{4}x' + y' + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\dfrac{3}{4}x + x - y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y'' = \dfrac{1}{4}x - y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

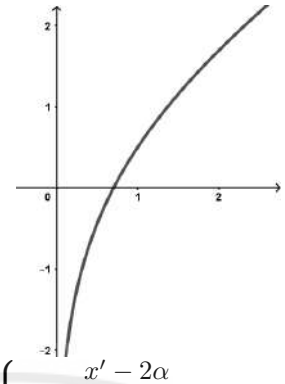
$S \circ g$ et $g \circ S$ ont les mêmes expressions analytiques donc $S \circ g = g \circ S$

2. Soit $M = g(M)$ alors $x = -x/2 + 1$ et $y = -3x/4 + y + 1/2 \Rightarrow x = 2/3$. Ainsi (Δ) est la droite d'équation $x = 2/3$

3. Soit M n'appartenant pas à (Δ) et $M' = g(M)$; $\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = (-3x/2+1)\vec{i} + (-3x/4+1/2)\vec{j}$
Ainsi $\overrightarrow{MM'} = (-3x/4+1/2)(2\vec{i}+\vec{j})$. Ainsi (MM') garde la même direction que $\vec{u} = (2,1)$
4. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (MM') et $M \in (MM')$ alors (MM') a pour équation : $(X-x)-2(Y-y) = 0$. (Δ) a pour équation : $X = \dfrac{2}{3}$ alors $X_1 = \dfrac{2}{3}$ et $Y_1 = \dfrac{1}{3} - x + y$. Ainsi pour $M(x,y)$, M_1 a pour coordonnées $X_1 = \dfrac{2}{3}$ et $Y_1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{2} + y$
5. Soit $M(x,y)$ et $M' = g(M)$. $\overrightarrow{M_1M'} = (x'-X_1)\vec{i} + (y'-Y_1)\vec{j} = (-x/2+1/3)\,\vec{i} + (-x/4+1/6)\,\vec{j}$ et
$\overrightarrow{M_1M} = (x-X_1)\vec{i} + (y-Y_1)\vec{j} = (x-2/3)\,\vec{i} + (x/2-1/3)\,\vec{j}$ ainsi $\overrightarrow{M_1M'} = -1/2\overrightarrow{M_1M}$. D'où g est l'affinité d'axe (Δ), de rapport $-1/2$ et de directrice une droite ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(2,1)$
B/ 1-a. f est une homothétie si $a = b \neq 1$. Si $a = b = 1$, f est une homothétie si $f(O) = O$(dans ce cas, $f = Id_P$)
b. f est une translation si $a = b = 1$ avec $f(O) \neq O$
2. • Comme $\overrightarrow{OA}$ est colinéaire à $\vec{j}$ alors A est forcement un point de l'axe des ordonnées. Ainsi il existe un y tel que $A = (0,y)$. $\psi(\overrightarrow{OA}) = y\psi(\vec{j})$ or en prenant un point $N(0,1)$, $\overrightarrow{ON} = \vec{j}$ et $N' = S(N)$ a pour coordonnées $(0,-1)$. Ainsi $\psi(\vec{j}) = \overrightarrow{S(O)S(N)} = \overrightarrow{ON'} = -\vec{j}$. D'où il existe un y tel que $\psi(\overrightarrow{OA}) = -y\vec{j}$
• $B(x,y) \in (D)$ et $B \neq O$ alors $y = \dfrac{1}{2}x$. Donc $B(x;x/2)$ avec $x \neq 0$. $\psi(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{S(O)S(B)} = \overrightarrow{OB} = x\vec{i} + \dfrac{1}{2}x\vec{j}$.
D'où il existe un réel $x \neq 0$ tel que $\psi(\overrightarrow{OB}) = x\vec{i} + \dfrac{1}{2}x\vec{j}$
• Pour $A \neq O$, il existe $y \neq 0$ tel que $\overrightarrow{OA} = y\vec{j}$. Ainsi $\psi(\overrightarrow{OA}) = y\psi(\vec{j}) = -y\vec{j}$. D'où $\psi(\vec{j}) = -\vec{j}$
$\overrightarrow{OB} = x\vec{i} + \dfrac{1}{2}x\vec{j} = \dfrac{x}{2}(2\vec{i}+\vec{j})$. Ainsi $\psi(\overrightarrow{OB}) = \dfrac{x}{2}\psi(2\vec{i}+\vec{j}) = x\vec{i} + \dfrac{1}{2}x\vec{j}$ avec $x \neq 0$. D'où $\psi(2\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}+\vec{j}$
3. • $S(O) = O \in (D)$; $\psi(\vec{j}) = b\vec{j}$ avec $b = -1$ et $\psi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ avec $a = 1$. Donc $S \in \mathcal{F}$
• Notons $O' = g(O)$ alors $O'(1,1/2) \Rightarrow O' = g(O) \in (D)$
Soit $M_1(0,1)$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{j}$. $O' = g(O) = (1,1/2)$; $M_1' = g(M_1) \Rightarrow M_1'(1,3/2)$ alors $\overrightarrow{O'M_1'} = \vec{j}$. Ainsi $\varphi(\overrightarrow{OM_1}) = \varphi(\vec{j}) = \vec{j}$
Soit $M_2(2,1)$, $\overrightarrow{OM_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$. $M_2' = g(M_2) \Rightarrow M_2'(0,0)$; $\overrightarrow{O'M_2'} = -\dfrac{1}{2}(2\vec{i}+\vec{j})$. Ainsi $\varphi(\overrightarrow{OM_2}) = \varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = -\dfrac{1}{2}(2\vec{i}+\vec{j})$
Par suite $g(O) \in (D)$; $\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$ avec $b = 1$ et $\psi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j})$ avec $a = -\dfrac{1}{2}$. Donc $g \in \mathcal{F}$
4-a. Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f_1(M)$. $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f_1(O)f_1(M)} = \overrightarrow{O'M'}$ (*). Comme par définition $O' = f_1(O) \in (D)$ alors il existe un réel α/ $O'(2\alpha,\alpha)$. Alors $\overrightarrow{O'M'} = (x'-2\alpha)\vec{i} + (y'-\alpha)\vec{j}$. Or $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$ (**)
$\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$; $\varphi(2\vec{i}+\vec{j}) = a(2\vec{i}+\vec{j}) \Rightarrow \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + \dfrac{a-1}{2}\vec{j}$. Ainsi d'après (**), on a : $\varphi(\overrightarrow{OM}) = ax\vec{i} + \left[y + \dfrac{x(a-1)}{2}\right]\vec{j}$
Puis d'après (*) ; on déduit que : $\begin{cases} x' - 2\alpha = ax \\ y' - \alpha = \dfrac{a-1}{2}x + y \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
b. Soit $M = f_1(M) \Rightarrow x = ax + 2\alpha$ et $y = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \Rightarrow (1-a)x = 2\alpha$. D'où
• Si $a = 1$ et que $\alpha = 0$ (c'est à dire $f(O) = O$) alors tout point est invariant par f_1
• Si $a = 1$ et que $\alpha \neq 0$ (c'est à dire $f(O) \neq O$) alors f_1 n'a pas de points invariants
• Si $a \neq 1$, l'ensemble des points invariants par f_1 est la droite d'équation $x = -\dfrac{2\alpha}{a-1}$
c. On a : $\alpha = 0$ alors :
• $x_{n+1} = ax_n$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $x_n = a^n x_0$
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $y_{n+1} = \dfrac{a-1}{2}x_n + y_n \Rightarrow y_{n+1} - y_n = \dfrac{a-1}{2}x_n$. Par suite pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_{k+1} - y_k = \dfrac{a-1}{2}x_k$ (*)
– Si $a = 1$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $y_{k+1} - y_k = 0$ soit $y_{k+1} = y_k$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = y_0$.
– Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; $y_{k+1} - y_k = \dfrac{a-1}{2}x_k = \dfrac{a-1}{2}a^k x_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}[y_{k+1} - y_k] = \dfrac{a-1}{2}x_0 \sum_{k=0}^{n-1} a^k$
or $\sum_{k=0}^{n-1}[y_{k+1} - y_k] = y_n - y_0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \dfrac{1-a^n}{1-a}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $y_n = y_0 - \dfrac{(1-a^n)}{2}x_0$
• Etude de la convergence de x_n et y_n :
– Si $-1 < a < 1$ avec $a \neq 0$, x_n et y_n sont convergentes de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0 - \dfrac{1}{2}x_0$
– Si $a = 1$; x_n et y_n sont convergentes de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$
– Si $a \in]-\infty,-1]$ ou $]1,+\infty[$; x_n et y_n ne sont pas convergentes.
NB : L'énoncé impose que a soit non nul.
C-1. F est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée : $F'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+2}{2x}$
$F'(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$ alors F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$\|\|$	$+$
$F(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$+\infty$



2-a. $a \neq 0$. Pour $M(x,y)$, on note $M'(x',y') = f_1(x)$ alors $\begin{cases} x = \dfrac{x'-2\alpha}{a} \\ y = y' - \alpha - \dfrac{(a-1)(x'-2\alpha)}{2a} \end{cases}$

$M \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \ln(x) \Leftrightarrow y' - \alpha - \dfrac{(a-1)(x'-2\alpha)}{2a} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x'-2\alpha}{a} + \ln\left(\dfrac{x'-2\alpha}{a}\right)$. Ainsi on déduit que :

$M \in (C) \Leftrightarrow y' = \alpha + \dfrac{(a-1)(x'-2\alpha)}{2a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x'-2\alpha}{a} + \ln\left(\dfrac{x'-2\alpha}{a}\right) = \dfrac{1}{2}x' + \ln\left(\dfrac{x'-2\alpha}{a}\right)$. D'où l'équation de l'image de (C) par f_1 est : $y = \dfrac{1}{2}x + \ln\left(\dfrac{x-2\alpha}{a}\right)$

b. $\dfrac{x-2\alpha}{a} = px + q \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{a}$ et $q = -\dfrac{2\alpha}{a}$ ou encore $a = \dfrac{1}{p}$ et $\alpha = -\dfrac{q}{2p}$. Ainsi $(C_{p,q})$ est l'image de (C) par l'application $f_1(p,q) \in \mathcal{F}_1$ définie par une expression analytique : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{p}x - \dfrac{q}{p} \\ y' = \dfrac{1-p}{2p}x + y - \dfrac{q}{2p} \end{cases}$; avec $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$

3. $p = -2$ et $q = 2$ alors $a = -\dfrac{1}{2}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. (Γ) est l'image de (C) par l'application $f_1(-2,2) \in \mathcal{F}_\infty$ définie par une expression analytique : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\dfrac{3}{4}x + y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ cette application n'est rien d'autre que l'application g

4. $g \circ S$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y' = \dfrac{1}{4}x - y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 2x'$ et $y = -\dfrac{1}{2}x' - y' + 1$

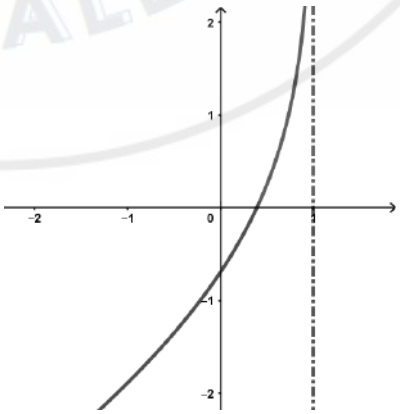
$M(x,y) \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \ln x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x' - y' + 1 = \dfrac{1}{2}(2-2x') + \ln(2-2x') \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{2}x' - \ln(2-2x')$

Ainsi (C') a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \ln(2-2x)$. Notons $h(x) = \dfrac{1}{2}x - \ln(2-2x)$. h est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, 1[$ de dérivée : $h'(x) = \dfrac{3-x}{2(1-x)}$. $h'(x) > 0$ sur $]-\infty; 1[$ donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$	1
$h'(x)$	$+$	$\|\|$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$ $\|\|$



Correction BAC C-E Togo 2006

Exercice 1

1. $a \neq 0 \Rightarrow U_{n+1} = \dfrac{a-b}{a}U_n$ donc (U_n) est une suite géométrique.

2. Tableau à double entrées :

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6
2	−1	0	1/3	1/2	3/5	2/3
3	−2	−1/2	0	1/4	2/5	1/2
4	−3	−1	−1/3	0	1/5	1/3
5	−4	−3/2	−2/3	−1/4	0	1/6
6	−5	−2	−1	−1/2	−1/5	0

Chaque cellule représente le résultat de l'opération $\dfrac{a-b}{a}$

(U_n) est constante si et seulement si $\dfrac{a-b}{a} = 0$ ou $\dfrac{a-b}{a} = 1$

• La probabilité que $\dfrac{a-b}{a} = 0$ est $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

• La probabilité que $\dfrac{a-b}{a} = 1$ est $\dfrac{0}{36}$

Ainsi $p_1 = \dfrac{1}{6}$

3-a. (U_n) est convergente si $-1 < \dfrac{a-b}{a} \leq 1$. Ainsi en exploitant le tableau de la question **2.** on tire : $p(A) = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$

b. La suite (U_n) est une suite alternée si $\dfrac{a-b}{a} < 0$ puis en exploitant le tableau de la question **2.** on tire : $p(B) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

c. La suite (U_n) est une suite alternée et convergente si $-1 < \dfrac{a-b}{a} < 0$ puis en exploitant le tableau de la question **2.** on tire : $p(C) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

4. $A \cap B$ est l'évènement : " (U_n) est une suite convergente et alternée" alors $p(A \cap B) = p(C) = \dfrac{1}{6}$

$p(A) \times p(B) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{16} \neq \dfrac{1}{6}$ alors les évènements A et B ne sont pas indépendants

Exercice 2

1-a. Le déterminant du système associé à H_k est : k^2 ainsi :

• Si $k \neq 0$, H_k est bijective

• Si $k = 0$, H_k n'est pas bijective.

2. Soit $M(x, y)$ tel que $H_k(M) = M$ alors $x = kx - k - 1$ et $y = ky \Rightarrow (k-1)x = k+1$ et $(k-1)y = 0$. Ainsi :

• Si $k = 1$, H_k n'a pas de point invariant

• Si $k \neq 1$, H_k admet un seul point invariant de coordonnées $x = \dfrac{k+1}{k-1}$ et $y = 0$

c. • Si $k = 1$, H_k est la translation de vecteur $(-2, 0)$

• Si $k = 0$, H_k est l'application qui à tout point M du plan associe le point $A(-1, 0)$

• Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; H_k a pour écriture complexe $z' = kz - (k+1) = kz + (1-k)\dfrac{k+1}{k-1}$. Donc H_k est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{k+1}{k-1}$ et de rapport k.

d. • Pour $k = 0$; pour tout $M(x, y)$, $H_k(M) = (-1, 0)$. Ainsi (D) est globalement invariante par H_k si le point $(-1, 0) \in (D)$ c'est-à-dire $-a + c = 0$. D'où pour $k = 0$, (D) est globalement invariant par H_k si et seulement si $a = c$.

• Pour $k \neq 0$, soit $M(x, y)$ et $M' = H_k(M)$ alors $x = \dfrac{x' + k + 1}{k}$ et $y = \dfrac{y'}{k}$. Soit $M(x, y) \in (D)$ alors $ax + by + c = 0$ ou encore $a\dfrac{x' + k + 1}{k} + b\dfrac{y'}{k} + c = 0 \Rightarrow ax' + by' + a(k+1) + kc = 0$ (*). $M'(x', y') \in (D)$ si et seulement si $ax' + by' = -c$. Ainsi en utilisant (*), pour que $M'(x', y') \in (D)$, il faut et il suffit que $a(k+1) + kc - c = 0 \Rightarrow a(1+k) = c(1-k)$. D'où pour $k \neq 0$; pour que (D) soit globalement invariant par H_k, il faut et il suffit que $a(1+k) = c(1-k)$.

2-a. Écriture complexe de R : $z' = \mathrm{e}^{i\pi/4}(z-1) + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z - \left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b-i. $Z_G = \dfrac{1 + z + 2z_1}{2} = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z - \left(\dfrac{-3+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ii. Soit $M(z) \in (\Delta)$ alors $z = 2 + iy$. Ainsi $x_G + iy_G = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(2 + iy) - \left(\dfrac{-3+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puis on déduit que : $x_G = \dfrac{5+\sqrt{2}}{2} - y\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_G = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}y$. Ainsi $(1+\sqrt{2})x_G + \sqrt{2}y_G = \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}$. D'où quand M décrit (Δ), G décrit la droite d'équation $(1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}y = \dfrac{9}{2} + 3\sqrt{2}$

3. • Si $k=0$, $R\circ H_k$ est l'application qui a tout point M du plan associe le point $R(A)$ avec $(-1,0)$.
• Si $k=1$ alors $R\circ H_k$ est la composée d'une translation et d'une rotation. D'où $R\circ H_k$ est une rotation.
• Si $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, alors $R\circ H_k$ est la composée d'une homothétie et d'une rotation. D'où $R\circ H_k$ est une similitude plane directe.

Problème

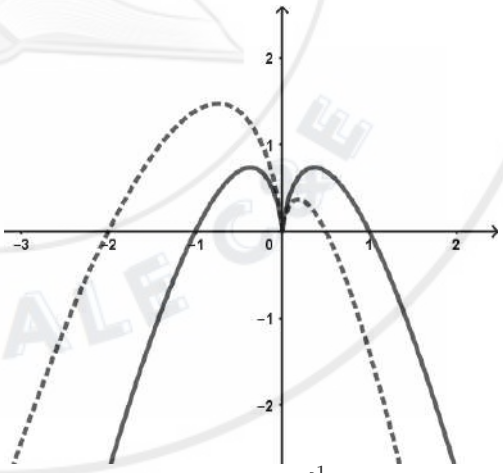
A/ 1. $\forall\ x\in]0,+\infty[\,;\ kg_1(x)=-kx\ln(1)-2k|x|\ln(|x|)=-2kx\ln(x)$
$\forall(x_1,x_2)\in]0,+\infty[^2,\ kg_1(x_1x_2)=-2kx_1x_2\ln(x_1x_2)=-2kx_1x_2[\ln(x_1)+\ln(x_2)]=x_2[-2kx_1\ln(x_1)]+x_1[-2kx_2\ln(x_2)]$
Ainsi $\forall(x_1,x_2)\in]0,+\infty[^2\,;\ kg_1(x_1x_2)=x_2kg_1(x_1)+x_1kg_1(x_2)$. D'où $kg_1\in(E)$
2-a. Soit $f\in(E)$ alors $f(1\times1)=1\times f(1)+1\times f(1)\Rightarrow f(1)=2f(1)$ et on conclut que $f(1)=0$.
b. $\forall x\in]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[$, $f(x\times t)=tf(x)+xf(t)$ ainsi en dérivant par rapport à la variable t on a :
$xf'(x\times t)=f(x)+xf'(t)$ et puis on remplace t par 1 ce qui donne : $xf'(x)=f(x)+xf'(1)$. D'où $\forall x\in]0,+\infty[$, $xf'(x)-f(x)=xf'(1)$

c. D'après la relation (1) on déduit que $\forall\ x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{f'(1)}{x}$. Or $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)$ et $\dfrac{1}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)=\left[\dfrac{1}{x}f(x)\right]'$ alors $\left[\dfrac{1}{x}f(x)\right]'=\dfrac{f'(1)}{x}$ puis $\dfrac{f(x)}{x}=f'(1)\ln(x)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$ or $f(1)=0$ alors $C=0$ et par conséquent $\dfrac{f(x)}{x}=f'(1)\ln(x)$
d. D'après **2-c.**, si f est solution de E alors $f(x)=f'(1)x\ln(x)$.
Réciproquement si $f(x)=f'(1)x\ln(x)$ alors $\forall(x_1,x_2)\in]0,+\infty[^2$, $f(x_1x_2)=x_2f'(1)x_1\ln(x_1)+x_1f'(1)x_2\ln(x_2)$ ainsi $f(x_1x_2)=x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$.
Ainsi les solutions de E sont les fonctions $x\mapsto ax\ln(x)$ avec $a\in\mathbb{R}$
NB : pour $h(x)=ax\ln(x)$, h est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $f'(x)=a[1+\ln(x)]$ et on a bien $f'(1)=a$

B/ 1. $g_\alpha\in E$ si $\ln(\alpha^2)=0$. Ainsi $g_\alpha\in E$ si $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$
2-a. $g_1(x)=-2x\ln(x)$. g_1 est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée : $g_1'(x)=-2[1+\ln x]$. Ainsi pour $x\in]0,\mathrm{e}^{-1}]$, $g_1'(x)\geq0\Rightarrow g_1$ est croissante sur $]0,\mathrm{e}^{-1}]$; pour $x\in]\mathrm{e}^{-1},+\infty[\,;\ g_1'(x)<0\Rightarrow g_1$ est strictement décroissante sur $]\mathrm{e}^{-1};+\infty[$
b. f_1 est une fonction paire donc on peut restreindre le domaine d'étude à $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_1(x)=g_1(x)$. Ainsi d'après **B/ 2-a.**, f_1 est croissante sur $]0,\mathrm{e}^{-1}]$ et strictement décroissante sur $]\mathrm{e}^{-1};+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to0}f_1(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=-\infty$

Tableau de variation

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$		↗	$2\mathrm{e}^{-1}$	↘	
	0				$-\infty$



c. Voir la figure pour la représentation de C_1.
$C_1=C_1^+\cup C_1^-$ avec C_1^- l'image de C_1^+ par rapport à la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

d. Pour $x\in[\mathrm{e}^{-1},1]$, $f(x)\geq0$ alors l'aire $\mathcal{A}$ demandée est égale, en unité d'aire, $\mathcal{A}=\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}f_1(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}2x\ln x\,\mathrm{d}x$
Or $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}x\ln x\,\mathrm{d}x=[\frac{x^2}{2}\ln(x)]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}-\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}$. Ainsi $\mathcal{A}=\dfrac{1-3\,\mathrm{e}^{-2}}{2}$ *u.a.*
D'où $\mathcal{A}=\dfrac{1-3\,\mathrm{e}^{-2}}{2}\times2cm\times2cm=2(1-3\,\mathrm{e}^{-2})\ cm^2$
3-a. Pour $\alpha>0$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{x}{\alpha}\in]0,+\infty[$ et $g_\alpha\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)=-\dfrac{x}{\alpha}\ln(\alpha^2)-2\dfrac{x}{\alpha}\ln\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\alpha}\left[-2x\ln(\alpha)-2x\ln x+2x\ln(\alpha)\right]$
D'où Pour $\alpha>0$ et pour tout $x\in]0,+\infty[\,;\ g_\alpha\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\alpha}g_1(x)$

b. Soit $\alpha > 0$. On considère l'application h définie par : $\begin{cases} x' = x/\alpha \\ y' = y/\alpha \end{cases}$. h est l'homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $\frac{1}{\alpha}$. Soit $M(x,y)$ et $M' = h(M)$ alors $x = \alpha x'$ et $y = \alpha y'$.
$M(x,y) \in C_1^+ \Leftrightarrow y = -2x\ln(x) \Leftrightarrow \alpha y' = -2\alpha x'\ln(\alpha x') = -2\alpha x'\ln(x') - 2\alpha x'\ln(x')$. On déduit alors que :
$M(x,y) \in C_1^+ \Leftrightarrow y' = -x'\ln(\alpha^2) - 2x'\ln(x')$. D'où $M(x,y) \in C_1^+ \Leftrightarrow M'(x',y') \in C_\alpha^+$. On conclut que C_α^+ est l'image de C_1^+ par l'homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $\frac{1}{\alpha}$

c. Le maximum de g_α est $\frac{1}{\alpha}g_1(\mathrm{e}^{-1}) = \frac{2}{\alpha\,\mathrm{e}}$

4-a. S_α expression analytique : $\begin{cases} x' = -\alpha^2 x \\ y' = \alpha^2 y \end{cases}$
• Si $\alpha = 1$, S_α est la symétrie orthogonale d'axe (oy)
• Si $\alpha \in]0,+\infty[\backslash\{1\}$, le seul point invariant par S_α est le point $O(0,0)$ et S_α est la similitude indirecte de centre O, d'angle π et de rapport α^2.

b. Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y') = S_\alpha(M)$ lors $x = -\frac{x'}{\alpha^2}$ et $y = \frac{y'}{\alpha^2}$. Ainsi pour $x \in]0,+\infty[\,;\, x' \in]-\infty,0[$ et :
$M(x,y) \in C_\alpha^+ \Leftrightarrow y = -x\ln(\alpha^2) - 2x\ln(x) \Leftrightarrow \frac{y'}{\alpha^2} = \frac{x'}{\alpha^2}\ln(\alpha^2) + 2\frac{x'}{\alpha^2}\ln\left(-\frac{x'}{\alpha^2}\right) \Leftrightarrow y' = -x'\ln(\alpha^2) + 2x'\ln(-x')$
D'où $M(x,y) \in C_\alpha^+ \Leftrightarrow M'(x',y') \in C_\alpha^-$ puis on conclut que C_α^- est l'image de C_α^+ par S_α.
5. Voir la figure de la question **B/ 2-c**

C/ 1. • Résolution de $g_\alpha(x) > 0$
Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, $g_1(x) = 0$ pour $x = 1$ puis en se basant sur le tableau de variation, on déduit que $g_1(x) > 0$ sur $]0,1[$. Or d'après **B/ 3-b.**, C_α^+ est l'image de C_1^+ par une homothétie h définie en **B/ 3-b.**. Ainsi sur $]0,+\infty[$, $g_\alpha(x) > 0$ pour $x \in]0,1/\alpha[$ $(\alpha > 0)$. D'où $g_\alpha(x) > 0$ sur $]0,1/\alpha[$
• $g_\alpha(x) - 2x = -x\ln(\alpha^2) - 2x - 2x\ln(x) = -x\ln(\alpha^2\,\mathrm{e}^2) - 2x\ln(x)$ car $2x = 2x\ln(\mathrm{e}) = x\ln(\mathrm{e}^2)$. On pose $\beta = \alpha\,\mathrm{e}$ alors $g_\alpha(x) - 2x = g_\beta(x)$ puis on déduit d'après le premier point que $g_\alpha(x) - 2x > 0$ sur $]0,1/\beta[$ avec $\beta = \alpha\,\mathrm{e}$

2. (U_n) est constante si $\frac{1}{2}g_\alpha(U_0) = U_0$ soit $g_\alpha(U_0) = 2U_0 \Rightarrow U_0 = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$ car $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$. D'où (U_n) est constante pour $U_0 = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$.

3-a. Par récurrence :
• $2U_1 = g_\alpha(U_0)$ or d'après **B/ 3-c.** le maximum de g_α est $\frac{2}{\alpha\,\mathrm{e}}$. De plus pour tout $x \in]0,1/\alpha[$, $g(x) > 0$ d'après **C/ 1.** alors $0 < 2U_1 < \frac{2}{\alpha\,\mathrm{e}}$ soit $0 < U_1 < \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$. Donc vrai pour $n = 1$.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ c'est-à-dire pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$, $0 < U_n < \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$ et montrons à l'ordre $n+1$.
$2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$ or $U_n \in \left]0, \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}\right[$ (par hypothèse de récurrence) alors $0 < g_\alpha(U_n) < \frac{2}{\alpha\,\mathrm{e}}$. D'où $0 < U_{n+1} < \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$
D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(g_\alpha(U_n) - 2U_n)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$ donc $g_\alpha(U_n) - 2U_n > 0$ d'après **C/ 1.** D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

c. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$ alors elle est convergente. Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Comme $2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$ et que g_α est continue sur $]0,+\infty[$ alors $2l = g(l)$ ou encore $g(l) - 2l = 0 \Rightarrow l = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{e}}$

Correction BAC C-E Togo 2007

Exercice 1

1-a. $\varphi(G) = \alpha GA^2+\beta GB^2 = \alpha(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA})^2+\beta(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})^2 \Rightarrow \varphi(G) = \alpha OG^2+\beta OG^2+\alpha OA^2+\beta OB^2+2\overrightarrow{GO}(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB})$
Or $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG}$ et $\alpha OA^2+\beta OB^2 = \varphi(O)$ alors $\varphi(G) = \varphi(O) - OG^2$
b. $\varphi(O) = \alpha OA^2+\beta OB^2 = \alpha a^2+\beta b^2$. $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors $g = \alpha a+\beta b$ car $\alpha+\beta = 1$
$\varphi(G) = \varphi(O) - OG^2 = \alpha a^2+\beta b^2-(\alpha a+\beta b)^2$
c. $\varphi(G) = \alpha a^2+\beta b^2-(\alpha a+\beta b)^2 = \alpha a^2+\beta b^2-(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+2\alpha\beta ab) = \alpha(1-\alpha)a^2+\beta(1-\beta)b^2-2\alpha\beta ab$ or $1-\alpha = \beta$ et $1-\beta = \alpha$ alors $\varphi(G) = \alpha\beta a^2+\alpha\beta b^2-2\alpha\beta ab = \alpha\beta(a-b)^2$. D'où $\varphi(G) = \alpha\beta(a-b)^2$
2-a. $E(X) = \alpha a+\beta b$ et $E(X^2) = \alpha a^2+\beta b^2$
b. $V(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = \alpha a^2+\beta b^2-(\alpha a+\beta b)^2 = \varphi(G)$ d'après **1-b.**
3. $X(\Omega) = \{40,100\}$; $p(X=40) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $p(X=100) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. On pose $\alpha = \dfrac{2}{3}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$; $a = 40$ et $b = 100$
Alors $V(X) = \varphi(G) = \alpha\beta(a-b)^2 = \dfrac{2}{9}60^2 = 800$

Exercice 2

1. Une application affine est une similitude si elle a pour écriture complexe $z' = az+b$ ou $z' = a\overline{z}+b$. Donc f_a est une similitude si $a = -2i$ ou $a = -i$
2. • Pour $a = -2i$, l'écriture complexe de f_a est : $z' = -\overline{z}$ qui est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (oy), l'axe des ordonnées.
• Pour $a = -i$, f_a : $z' = iz$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
3-a. Soit $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ alors $z' = (a+2i)z+(1-ai)\overline{z} \Leftrightarrow x'+iy' = (a+2i)(x+iy)+(1-ai)(x-iy)$. Ainsi $x'+iy' = (1+a)x-y(2+a)+i[(2-a)x+(-1+a)y]$ ainsi l'expression analytique de f_a est : $\begin{cases} x' = (1+a)x-(2+a)y \\ y' = (2-a)x+(-1+a)y \end{cases}$
b. Le déterminant de l'expression analytique de **3-a.** est : $(1+a)(-1+a)+(2+a)(2-a) = 3 \neq 0$ donc f_a est une transformation affine.
4. Soit $M = f(M) \Rightarrow \begin{cases} x = (1+a)x-(2+a)y \\ y = (2-a)x+(-1+a)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = (2+a)y \\ (a-2)x = (a-2)y \end{cases}$ ainsi :
• Si $a = 2$, l'ensemble des points invariants par f_a est la droite $y = \dfrac{1}{2}x$
• Si $a \neq 2$, f_a n'a pas de points invariants.
5. f_2 a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = 3x-4y \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow y = y'$ et $x = \dfrac{1}{3}(x'+4y')$
$M(x,y) \in (D_k) \Leftrightarrow 3x-4y = k \Leftrightarrow x'+4y'-4y' = k$. Ainsi $M(x,y) \in (D_k) \Leftrightarrow x' = k$.
D'où $f(D_k)$ est la droite d'équation $x = k$

Problème

A/ 1. r est définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée $r'(x) = \dfrac{-2\alpha x}{(x^2+1)} \leq 0$. Donc r est décroissante sur $[0,+\infty[$.
Ainsi $r([0,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} r(x), \lim\limits_{x\to 0} r(x)] =]\beta,\alpha+\beta] =]a,b]$, on déduit que $\beta = a$ et $\alpha = b-a$.
En prenant $\beta = a$ et $\alpha = b-a$, $r(x)$ est continue de $[0,+\infty[$ dans $]a,b] \subset [a,b]$. Donc $r \in C$. D'où C n'est pas vide.
2-a. Par définition, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \in [a,b] \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$. $u(a) = f(a)-a \geq 0$ et $u(b) = f(b)-b \leq 0$. Ainsi $u(a)\cdot u(b) \leq 0$.
u est continue et $u(a)\cdot u(b) \leq 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $\alpha \in [a,b]$ tel que $u(\alpha) = 0$.
b. Supposons que f est dérivable alors u est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée $u'(x) = f'(x)-1$. De plus $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| < 1$ alors $u'(x) < 0$ sur $[a,b]$. Donc u est strictement décroissante sur $[a,b]$. Ainsi d'après **2-a.** et le fait que u soit continue et strictement monotone sur $[a,b]$, on déduit que l'équation (E) admet une unique solution sur $[a,b]$
3. Les fonctions $f(t)$ et $q(t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$ alors les fonctions $t \mapsto q(t)f(t)$ et $t \mapsto q(t)$ admettent chacune une primitive $[0,+\infty[$. Notons $F(t)$ et $Q(t)$ une des primitives respective $q(t)f(t)$ et $q(t)$ alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $F'(t) = q(t)f(t)$ et $Q'(t) = q(t)$
Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(0)$ et $\displaystyle\int_0^x q(t)\,\mathrm{d}t = Q(x)-Q(0)$. Ainsi pour $x \in]0,+\infty[$, $Q(x)-Q(0) \neq 0$ (car q est continue et strictement négative sur $]0,+\infty[$ alors l'intégrale de q sur un intervalle non nul de $[0,+\infty[$ est un réel non nul). Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x \mapsto F(x)-F(0)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus pour tout $x \in]0,+\infty[$, comme $Q(x)-Q(0) \neq 0$ alors les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{Q(x)-Q(0)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. D'où $k(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$

4-a. Les fonctions $x \mapsto f''(x) + f(x)$ et $x \mapsto \sin(x-a)$ sont continues sur $[a,b]$ alors h est continue sur $[a,b]$. D'où $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné.

b. $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b [f''(x)+f(x)]\sin(x-a)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f''(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x$ (*)

$\int_a^b f''(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x = [f'(x)\sin(x-a)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cos(x-a)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\cos(x-a)\ \mathrm{d}x$ car $b-a=\pi \Rightarrow \sin(b-a)=0$

Ainsi $\int_a^b f''(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\cos(x-a)\ \mathrm{d}x = -\left([f(x)\cos(x-a)]_a^b - \int_a^b -f(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x\right)$ puis on déduit que : $\int_a^b f''(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x = f(b)+f(a)-\int_a^b f(x)\sin(x-a)\ \mathrm{d}x$. D'où d'après (*) on déduit que : $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = f(b)+f(a)$

b. Supposons par absurde que $\forall\ x \in [a,b]$, $f(x)>0$ mais que l'inéquation $f''(x)+f(x)>0$ n'admet pas de solution sur $[a,b]$ c'est-à-dire $\forall\ x\in[a,b]$, $f(x)>0$ et il n'existe pas un réel $x\in[a,b]$ tel que $f''(x)+f(x)>0$ ou autrement dit $\forall\ x\in[a,b]$, $f(x)>0$ et $f''(x)+f(x)\leq 0$.

$\forall\ x\in[a,b]$, $a\leq x\leq b \Rightarrow 0\leq x-a\leq b-a=\pi$. D'où $\forall\ x\in[a,b]$, $0\leq\sin(x-a)\leq 1$. Ainsi $\forall\ x\in[a,b]$, $h(x)=[f''(x)+f(x)]\sin(x-a)\leq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \leq 0$ (**) en tant qu'intégrale d'une fonction négative sur un intervalle.

Or d'après **4-b.**, comme f est strictement positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = f(b)+f(a) > 0$ ce qui est absurde car d'après (**) $\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \leq 0$.

D'où si f est strictement positive sur $[a,b]$ l'inéquation $f''(x)+f(x)>0$ admet au moins une solution sur $[a,b]$

B/ 1-a. f est continue sur $[0,+\infty[$ alors $\exists$ une fonction F dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que $F'(t)=f(t)$. Ainsi, pour $x>0$, $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{F(x)-F(0)}{x}$. Les fonctions $x\mapsto F(x)-F(0)$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ alors g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall x\in]0,+\infty[\,;\ g'(x)=\frac{F'(x)}{x}-\frac{1}{x^2}(F(x)-F(0))=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. D'où $\forall x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$

b. D'après **B/ 1-a.**, $g(x)=\frac{F(x)-F(0)}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0)=f(0)$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=f(0)$ donc g est continue en 0.

g est continue sur $[0,+\infty[$. $f\in C \Rightarrow \forall x\in[0,+\infty[\,;\ 0\leq f(x)\leq 1 \Rightarrow 0\leq\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\leq x$. Ainsi pour $x>0$, $0\leq g(x)\leq 1$.

De plus comme $g(0)=f(0)\in[0,1]$ alors $\forall x\in[0,+\infty[\,;\ 0\leq g(x)\leq 1$ puis on déduit que $g\in C$

2-a. Pour $x>0$, $xg'(x)+g(x)-f(x)=f(x)-g(x)+g(x)-f(x)=0$

b. $\forall x>0$, et $\forall\ t\in[0,x]\,;\ f(0)\leq f(t)\leq f(x) \Rightarrow \int_0^x f(0)\ \mathrm{d}t\leq\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\leq\int_0^x f(x)\ \mathrm{d}t$ puis $xf(0)\leq\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\leq xf(x)$

D'où pour $x>0$, $f(0)\leq\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\leq f(x)\Rightarrow f(0)\leq g(x)\leq f(x)$

c. On a : $g'(x)=\frac{1}{x}(f(x)-g(x))$ d'après **B/ 1-a.** alors on déduit que pour $x>0$, $g'(x)\geq 0$ donc g est croissante sur $[0,+\infty[$

3-a. • φ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$, $0\leq\varphi(x)\leq 1$ alors $\varphi\in C$

• $\varphi\in C$. On pose alors $f(t)=\varphi(t)$, on conclut que $\gamma\in C$ d'après **B/ 1-c.**

• Calculons $\int_0^x\varphi(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x\in[0,2\pi]$:

- Pour $x\in[0,\pi]\,;\ \int_0^x\varphi(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^x\sin t\ \mathrm{d}t=1-\cos(x)$
- Pour $x\in[\pi,2\pi]\,;\ \int_0^x\varphi(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^\pi\varphi(t)\ \mathrm{d}t+\int_\pi^x\varphi(t)\ \mathrm{d}t=3+\cos x$

b. Pour $x>0$, $\frac{\gamma(x)-\gamma(0)}{x-0}=\frac{\gamma(x)}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma(x)-\gamma(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Or $\cos(x)=1-2\sin^2(x/2)$ ainsi $\frac{1-\cos x}{x^2}=2\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2$. Posons $\psi(x)=\sin(x/2)\,;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(x/2)}{x}=\psi'(0)=\frac{1}{2}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. D'où γ est dérivable en 0 et $\gamma'(0)=\frac{1}{2}$.

D'après **B/ 1-a.** ; on déduit que γ est dérivable sur $[0, 2\pi]$ de dérivée :

– Pour $x \in [0, \pi]$; $\gamma'(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} - \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{x\sin(x) - 1 + \cos(x)}{x^2}$

– Pour $x \in [\pi, 2\pi]$; $\gamma'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x} - \dfrac{3+\cos(x)}{x^2} = -\dfrac{x\sin(x) + \cos(x) + 3}{x^2}$

c. • Pour $x \in [0, \pi]$; $\gamma'(x) = \dfrac{x\sin(x) - 1 + \cos(x)}{x^2}$. $\gamma'(x)$ est dérivable sur $]0, \pi]$ de dérivée $\gamma''(x) = \dfrac{-2x\sin(x) + x^2\cos(x) - 2\cos(x) + 2}{x^3}$. Posons pour $x \in [0, \pi]$, $u(x) = -2x\sin(x) + x^2\cos(x) - 2\cos(x) + 2$; u est dérivable de dérivée $u'(x) = -x^2\sin(x) \leq 0$ sur $[0, \pi] \Rightarrow u$ est décroissante sur $[0, \pi]$; ainsi $\forall\, x \in [0, \pi]$, $u(\pi) \leq u(x) \leq u(0)$ ou encore $4 - \pi^2 \leq u(x) \leq 0$. On déduit alors que $\forall x \in]0, \pi]$, $\gamma''(x) \leq 0$ ainsi γ' est décroissante sur $[0, \pi]$. On a : $\gamma'(2) = 0.1$ et $\gamma'(5/2) = -0.05$. γ' est continue et $\gamma'(2) \cdot \gamma'(5/2) \leq 0$ alors déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, qu'il existe un α_1 tel que $2 \leq \alpha_1 \leq \dfrac{5}{2}$ tel que $\gamma'(\alpha_1) = 0$. De plus comme γ' est décroissante sur $[0, \pi]$ alors α_1 est unique sur $[0, \pi]$.

• Pour $x \in [\pi, 2\pi]$, $\gamma'(x) = -\dfrac{x\sin(x) + \cos(x) + 3}{x^2}$. γ' est dérivable sur $]0, \pi]$ de dérivée : $\gamma''(x) = \dfrac{2x\sin(x) - x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 6}{x^3}$. Posons $v(x) = 2x\sin(x) - x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 6$; v est dérivable sur $[\pi, 2\pi]$ et $v'(x) = x^2\sin(x) \leq 0$. Ainsi v est décroissante sur $[\pi, 2\pi]$. or $v(\pi) = \pi^2 + 4$ et $v(2\pi) = 8 - 4\pi^2 < 0$

x	π		2π
$v'(x)$		$-$	
$v(x)$	π^2+4	↘	$8-4\pi^2$

tableau 1

En exploitant le tableau des variations de v, on déduit qu'il existe un unique réel $r \in [\pi, 2\pi]$ tel que $v(r) = 0$. Ainsi, pour $x \in [\pi, r]$, $v(x) \geq 0$ et pour $x \in [r, 2\pi]$, $v(x) \leq 0$. D'où pour $x \in [\pi, r]$, $\gamma''(x) \geq 0$ et γ' est croissante ; pour $x \in [r, 2\pi]$, $\gamma''(x) \leq 0$ et γ' est décroissante. Voir *tableau 2* pour les variations de γ'.

Encadrement de r : $v(4.5) = 1.03$ et $v(4.6) = -0.99$. Ainsi $4.5 < r < 4.6$

$\gamma'(4.5) = 0.08$ et $\gamma'(4.6) \simeq 0.8$ alors $\gamma'(r) > 0$; $\gamma'(\pi) \leq 0$ et $\gamma'(r) > 0$ ainsi on déduit qu'il existe un unique $\alpha_2 \in [\pi, r]$ tel que $\gamma'(\alpha_2) = 0$. De même $\gamma'(2\pi) \leq 0$ et $\gamma'(r) > 0$ ainsi on déduit qu'il existe un unique $\alpha_3 \in [r, 2\pi]$ tel que $\gamma'(\alpha_3) = 0$. Ainsi on conclut que l'équation $\gamma'(x) = 0$ admet exactement 3 solutions sur $[0, 2\pi]$ à savoir α_1, α_2 et α_3 avec $2 \leq \alpha_1 \leq \dfrac{5}{2}$; $\pi \leq \alpha_2 \leq 4.5$ et $4.6 \leq \alpha_3 \leq 2\pi$

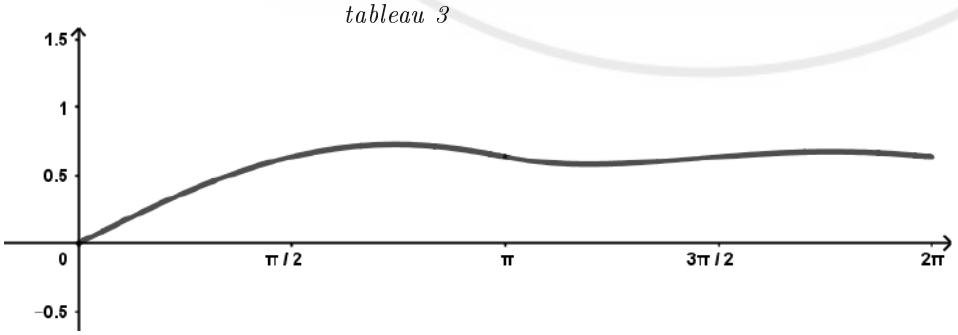
x	π		r		2π
$\gamma''(x)$		$+$	0	$-$	
$\gamma'(x)$		↗	$\gamma'(r)$	↘	
	$-\frac{2}{\pi^2}$				$-\frac{1}{\pi^2}$

tableau 2

d. En utilisant la question précédente, on déduit que $\forall x \in [0, \alpha_1]$, $\gamma'(x) \geq 0$ et γ est croissante sur $[0, \alpha_1]$; pour $x \in [\alpha_1, \pi]$, $\gamma'(x) \leq 0$ et γ est décroissante sur $[\alpha_1, \pi]$; pour $x \in [\pi, \alpha_2]$, $\gamma'(x) \leq 0$ et γ est décroissante sur $[\pi, \alpha_2]$; pour $x \in [\alpha_2, \alpha_3]$, $\gamma'(x) \geq 0$ et γ est croissante sur $[\alpha_2, \alpha_3]$; pour $x \in [\alpha_3, 2\pi]$, $\gamma'(x) \leq 0$ et γ est décroissante sur $[\alpha_3, 2\pi]$. Voir **tableau 3** pour le tableau de variations de γ.

x	0		α_1		π		α_2		α_3		2π
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\gamma(x)$	0	↗	$\gamma(\alpha_1)$	↘	0	↘	$\gamma(\alpha_2)$	↗	$\gamma(\alpha_3)$	↘	$\frac{2}{\pi}$

tableau 3



Correction BAC C-E Togo 2008

Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la réciproque de la fonction tan est dérivable. Notons $h(x) = \tan(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $h(\varphi(x)) = x$ et en dérivant cette égalité on a : $\varphi'(x) \times h'(\varphi(x)) = 1 \Rightarrow \varphi'(x) = \dfrac{1}{h'(\varphi(x))}$. Or pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $h'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + h^2(x) \Rightarrow h'(\varphi(x)) = 1 + x^2$. $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

2. • Montrons que $0 \leq x - \varphi(x)$ pour $x \geq 0$.

Soit $\psi(x) = x - \varphi(x)$. Pour $x \geq 0$, ψ est dérivable de dérivée : $\psi'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ pour $x \geq 0 \Rightarrow \psi$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour tout $x \geq 0$, $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$ car $\varphi(0) = 0$. D'où $0 \leq x - \varphi(x)$ pour $x \geq 0$.

• Montrons que $x - \varphi(x) \leq \dfrac{1}{3}x^3$ pour tout $x \geq 0$

Posons $\phi(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \varphi(x)$. ϕ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $\phi'(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2} \geq 0$ pour $x \geq 0 \Rightarrow \phi$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour tout $x \geq 0$, $\phi(x) \geq \phi(0) = 0$. D'où $x - \varphi(x) \leq \dfrac{1}{3}x^3$ pour tout $x \geq 0$.

D'où $\forall x \geq 0$, $0 \leq x - \varphi(x) \leq \dfrac{1}{3}x^3$

3-a. Pour $x > 0$, $0 \leq x - \varphi(x) \leq \dfrac{1}{3}x^3 \Rightarrow 0 \leq 1 - g(x) \leq \dfrac{1}{3}x^2$. Ainsi pour $x > 0$ et pour $t \in]0, x]$, $0 \leq 1 - g(t) \leq \dfrac{1}{3}t^2$ puis en intégrant, on a : $0 \leq \displaystyle\int_0^x [1 - g(t)]\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{1}{3}t^2\ \mathrm{d}t \Rightarrow 0 \leq x - \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{9}x^3$. Par suite, pour $x > 0$,
$0 \leq 1 - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{9}x^2$. D'où pour $x > 0$, $0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{1}{9}x^2$

b. D'après la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} [1 - f(x)] = 0$ (d'après le théorème des gendarmes) ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ d'où f est continue à droite en 0. De plus pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - 1}{x}$ or en utilisant **3-a.**, on déduit que $-\dfrac{1}{9}x \leq \dfrac{f(x) - 1}{x} \leq 0$. On conclut alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 0$ d'où f est dérivable à droite en 0.

4-a. D'après **1.**, on déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t)$. Or $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \dfrac{\pi}{2}$ alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$. Soit $x > 1$; pour tout $t \in [1, x]$, $t > 0$ et $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$ puis $0 \leq \dfrac{\varphi(t)}{t} \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t} \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ pour tout réel $x > 1$

b. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln(x)$ ainsi, pour $x > 1$, $0 \leq \displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\ln(x) \Rightarrow$ pour $x > 1$, $0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\frac{\ln(x)}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x g(t)\ \mathrm{d}t = 0$ (*). La fonction g est continue sur $[0, 1]$ alors $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$ est finie. Notons $M = \displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$; $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{M}{x}$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = 0$ (**). De (*) et (**), on conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice 2

1. $Z(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) + i[2\sin(t) - \sin(2t)] = 2[\cos(t) + i\sin(t)] - [\cos(2t) + i\sin(2t)]$. D'où $Z(t) = 2\,\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{2it} = \mathrm{e}^{it}(2 - \mathrm{e}^{it})$
(C) est alors l'image du cercle trigonométrique par une application f de (P) dans (P) qui à tout M d'affixe z associé le point M' d'affixe $z' = 2z - z^2$

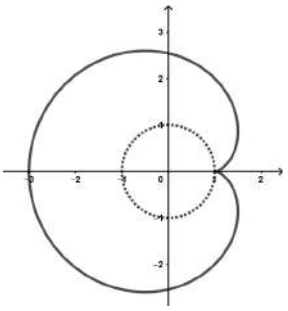
2-a. m d'affixe $z = \mathrm{e}^{it}$ est un point du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ alors l'équation de la tangente (T) en m au cercle trigonométrique est : $x\cos(t) + y\sin(t) = 1$ (Voir l'équation de la tangente en un point d'une ellipse. **NB** : un cercle est une ellipse d'excentricité $e = 0$). (T) a alors pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} = (\cos(t), \sin(t))$

• $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 = [2\cos(t) - \cos(2t) - 1]\vec{e}_1 + [2\sin(t) - \sin(2t)]\vec{e}_2$. Or $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et
$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 2(1 - \cos t)[\cos(t)\vec{e}_1 + \sin(t)\vec{e}_2] = 2(1 - \cos t)\vec{n}$. Ainsi $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal à (T).

• Notons I le milieu de $[AM]$ alors $x_I = \dfrac{2\cos(t) - \cos(2t) + 1}{2}$ et $y_I = \dfrac{2\sin(t) - \sin(2t)}{2} \Rightarrow \cos(t)x_I + \sin(t)y_I = 1$ car :
$\cos t x_I + \sin t y_I = \dfrac{2\cos^2 t - \cos t(2\cos^2 t - 1) + \cos(t)}{2} + \dfrac{2\sin^2(t) - 2\sin^2(t)\cos(t)}{2} = \dfrac{2 - 2\cos^3(t) + 2\cos t(1 - \sin^2 t)}{2} = 1$
D'où $I \in (T)$. On conclut alors que A et M sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente (T) en m au cercle trigonométrique

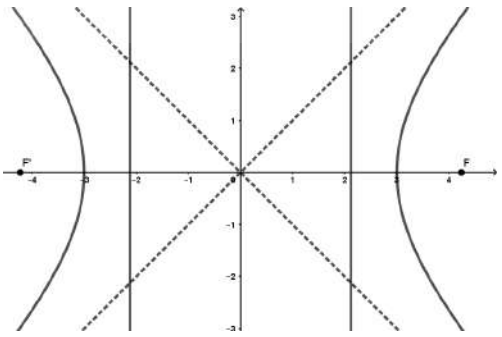
b. Connaissant le point m, on trace la tangente (T) en m au cercle trigonométrique ; le point M est alors l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (T).

3. Les variations :
• $X(t)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ de dérivée : $X'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = -2\sin t(1 - 2\cos(t))$. X' s'annule sur $[0,\pi]$ en 0 et $\dfrac{\pi}{3}$. D'où X est croissante sur $[0,\pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3,\pi]$
• $Y(t)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ de dérivée : $Y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = -2[2\cos^2(t) - \cos(t) - 1]$. On pose $x = \cos t$; $Y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 9 \Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi Y' s'annule sur $[0,\pi]$ en 0 et $\dfrac{2\pi}{3}$. D'où Y est croissante sur $[0,2\pi/3]$ et décroissante sur $[2\pi/3,\pi]$
4. Voir le graphe.



Problème

A/ 1-a. Soit $M(x,y)$ un point du plan. $f_h(M) = M \Rightarrow \begin{cases} x = hx \\ y = x + hy \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} (1-h)x = 0 \\ (1-h)y = x \end{cases}$ ainsi :
• Si $h = 1$, la droite $x = 0$ est l'ensemble des points invariants.
• Si $h \neq 1$, le point $O(0,0)$ est le seul point invariant.
b. Le déterminant du système associé à f_h est h^2. Ainsi f_h est bijective si $h \neq 0$ et pour $h = 0$, f_h n'est pas bijective.
2. S_Δ a pour expression analytique $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ et sa réciproque est elle même (car il c'est une symétrie orthogonale)
$f_0 = g \circ S_\Delta \Rightarrow g = f_0 \circ S_\Delta^{-1}$. Ainsi $g = f_0 \circ S_\Delta$. g a alors pour expressions analytique $\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = x' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = y \end{cases}$
puis on déduit facilement que g est la projection orthogonale sur la droite $x = 0$.
3-a. $f_{-h} \circ f_h$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = -hx_1 \\ y'' = x_1 - hy_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -h^2x \\ y'' = -h^2y \end{cases}$ puis on déduit que $f_{-h} \circ f_h$ est l'homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport $-h^2$.
b. S_1 a pour expressions analytique : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ et S_2 : $\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = -y \end{cases}$. $S_2 \circ S_1$ a pour expression analytique : $\begin{cases} X' = x' \\ Y' = -y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = -y \\ Y' = x \end{cases}$ En utilisant l'expression analytique de $f_{-h} \circ f_h$ de la question précédente, on déduit que t a pour expression analytique : $\begin{cases} X'' = -y'' \\ Y'' = x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'' = h^2y \\ Y'' = -h^2x \end{cases}$ et on tire que l'écriture complexe de t est : $Z'' = -ih^2z = h^2\,\mathrm{e}^{i3\pi/2}\,z$. Ainsi t est une similitude directe de centre $O(0,0)$, de rapport h^2 et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$
4. • S : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ ainsi $f_h \circ S$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x_1'' = hx' \\ y_1'' = x' + hy' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'' = -hx \\ y_1'' = -x + hy \end{cases}$
• $f_h \circ S_\Delta$ a pour expression analytique $\begin{cases} x_2'' = hx' \\ y_2'' = x' + hy' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2'' = hy \\ y_2'' = y + hx \end{cases}$
• u a alors pour écriture analytique : $\begin{cases} X = -hx_2'' \\ Y = -x_2'' + hy_2'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -h^2y \\ Y = h^2x \end{cases}$. Ainsi pour M d'affixe z, l'affixe Z de $u(M)$ est : $Z = ih^2z$. D'où u est une similitude directe de centre $O(0,0)$, de rapport h^2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
B/ 1. Soit $M(x,y)$ avec $x \neq 0$ alors $H(0,y)$ et $M_1(x,x+y)$.
• $\overrightarrow{HM_1} = x_1\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j} = x\vec{i} + x\vec{j} = x(\vec{i} + \vec{j})$. D'où (HM_1) a la même direction que le vecteur $\vec{u}_1 = (1,1)$
• $\overrightarrow{MM_1} = x\vec{j}$. D'où (MM_1) a la même direction que le vecteur $\vec{u}_2 = (0,1)$ ((MM_1) est parallèle à l'axe des ordonnées)
• Méthode pour construire M_1 à partir du point M : On projette M sur l'axe des ordonnées pour avoir le point H puis on trace une première droite passant par M et parallèle à l'axe des ordonnées et une deuxième droite passant par H et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}_1 = (1,1)$. L'intersection de ces deux droites donne le point M_1.
2. (H) : $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ alors (H) est une hyperbole de centre $O(0,0)$, d'axe focal l'axe des abscisses, d'excentricité $e = \sqrt{2}$, de foyers $F(3\sqrt{2},0)$ et $F'(-3\sqrt{2},0)$, de directrices $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $x' = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, de sommets $S_1(3,0)$ et $S_2(-3,0)$ et d'asymptotes les droites $y = x$ et $y = -x$ (Voir la figure ci-contre pour la représentation graphique)



3-a. Si $M(x,y)$ et $M_1 = f_1(M)$ alors $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - x_1 \end{cases}$
$M \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 9$ ou encore $x_1^2 - (y_1 - x_1)^2 = 9$
Ainsi $M \in (H) \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{9 + y_1^2}{2y_1}$. Ainsi (H_1) a pour équation $x = F(y)$ avec F la fonction définie par : $F(t) = \dfrac{9 + t^2}{2t}$

b. • $\lim\limits_{t\to 0^-} F(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = +\infty$ alors la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale de (H_1) (**NB** : On remarquera que l'équation de (H_1) est sous la forme $x = F(y)$ et non de la forme $y = F(x)$)

• $\lim\limits_{t\to -\infty} F(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} F(t) = +\infty$ or $\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{F(t)}{t} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{F(t)}{t} = \dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{t\to -\infty} \left(F(t) - \dfrac{1}{2}t\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} \left(F(t) - \dfrac{1}{2}t\right) = 0$

On conclut que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}y$ est une asymptote oblique de (H_1) (Même remarque qu'au premier point)

• L'asymptote $y = 0$ a bien pour vecteur directeur $\vec{i}$ et l'asymptote $2x - y = 0$ a bien pour vecteur directeur $\vec{i} + 2\vec{j}$

c. Équation de (H_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ où $\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j}$)

Soit M de coordonnées (X, Y) dans $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{k} = (X+Y)\vec{i} + 2Y\vec{j}$

Ainsi $\begin{cases} x = X + Y \\ y = 2Y \end{cases}$. $M(x, y) \in (H_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{9 + y^2}{2y} \Leftrightarrow X + Y = \dfrac{9 + (2Y)^2}{2(2Y)}$. Ainsi $M \in (H_1) \Leftrightarrow Y = \dfrac{9}{4X}$ qui est l'équation d'une hyperbole. On conclut alors que (H_1) est une hyperbole.

C/ 1. Montrons les résultats demandés par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

• Pour $n = 1$, $M_1 = f_h(M_0)$ et par définition, $x_1 = hx_0$ et $y_1 = x_0 + hy_0$. Donc les résultats sont vrais à l'ordre 1.

• Supposons les résultats sont vrais jusqu'à un ordre $n \geq 1$. Comme $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = f_h(M_n)$, Ainsi $\begin{cases} x_{n+1} = hx_n \\ y_{n+1} = x_n + hy_n \end{cases}$

et $x_n = h^n x_0$; $y_n = nh^{n-1}x_0 + h^n y_0$ alors $x_{n+1} = h^{n+1}x_0$ et $y_{n+1} = h^n x_0 + nh^n x_0 + h^{n+1}y_0 = (n+1)h^n x_0 + h^{n+1}x_0$.

Ainsi les résultats sont vrais à l'ordre $n + 1$ aussi. D'où pour tout naturel non nul n $x_n = h^n x_0$ et $y_n = nh^{n-1}x_0 + h^n y_0$

2. Si $x > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$ alors $\dfrac{x_n}{x_0} > 0$. De plus $x_n = h^n x_0 \Rightarrow h^n = \dfrac{x_n}{x_0}$ ou encore $n = \dfrac{1}{\ln h} \ln \dfrac{x_n}{x_0}$ ($h \neq 1$ et $h > 0$)

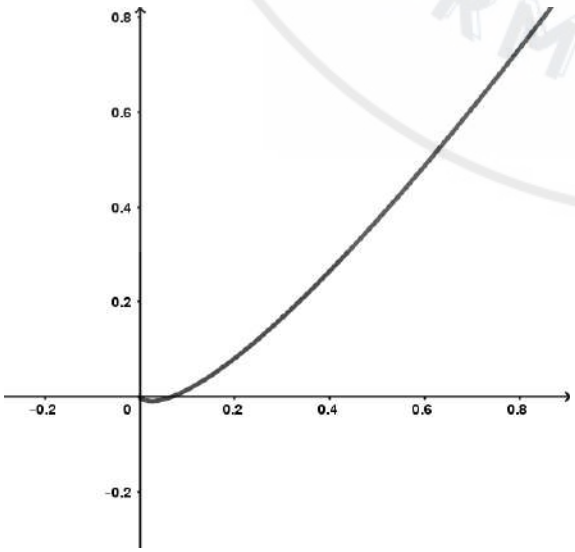
pour tout naturel non nul n, $y_n = nh^{n-1}x_0 + h^n y_0 \Rightarrow y_n = n\dfrac{h^n}{h}x_0 + \dfrac{x_n}{x_0}y_0 = \dfrac{x_n}{h\ln h} \ln \dfrac{x_n}{x_0} + \dfrac{x_n}{x_0}y_0$. Ainsi, on déduit alors $y_n = x_n \left(\dfrac{y_0}{x_0} + \dfrac{1}{h\ln h} \ln \dfrac{x_n}{x_0}\right)$. Ce résultat reste vrai pour $n = 0$. D'où $y_n = x_n \left(\beta + \alpha \ln \dfrac{x_n}{x_0}\right)$ avec $\beta = \dfrac{y_0}{x_0}$ et $\alpha = \dfrac{1}{h\ln h}$.

Pour le point $M_0(x_0, y_0)$ fixé avec $x_0 > 0$, tous les points M_n appartiennent à la courbe (C) d'équation : $y = x \left(\dfrac{y_0}{x_0} + \dfrac{1}{h\ln h} \ln \dfrac{x}{x_0}\right)$

3. D'après la question précédente, on déduit que $g(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e} \ln x\right)$

g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée : $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e} + \ln(x) + 1}{\mathrm{e}}$. $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}}$. g est alors décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}}]$ et croissante sur $]\mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}}, +\infty[$.

x	0	$\mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}}$	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$ 0	$+$
$g(x)$	0 ↘	$g(\mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}})$	↗ $+\infty$



NB : La courbe représentative et le tableau de variations ne sont pas demandés.

Correction BAC C-E Togo 2009

Exercice 1

1. $\delta = pgcd(n(2n-1);(n-1)(2n-1)) = 2n-1$ car pour $n>1$, n et $n-1$ sont premiers entre eux (puisque $n-(n-1)=1$)
La relation $pgcd(a,b)\times ppcm(a,b) = ab$ donne $\mu = n(n-1)(2n-1)$

2. $a' = \dfrac{a}{\delta}$ et $b' = \dfrac{b}{\delta} \Rightarrow a = a'\delta$ et $b = b'\delta$. Or $\mu\delta = ab$ alors (1) $\Leftrightarrow a+b = \delta^2$ ou encore $a'\delta + b'\delta = \delta^2 \Rightarrow \delta = a'+b'$ on déduit alors que si a et b satisfont (1) alors $\delta = a'+b' \Rightarrow a = a'(a'+b')$ et $b = b'(a'+b')$

3. D'après la question précédente, si a et b satisfont (1) alors $a = a'(a'+b')$ et $b = b'(a'+b')$. Si ces solutions satisfont aussi (2) alors $\delta = a-b = a'(a'+b') - b'(a'+b') = a'^2 - b'^2 = (a'+b')(a'-b')$ (*)
De plus comme $a = a'\delta$ et $b = b'\delta$ alors $\delta = a-b \Rightarrow \delta = a'\delta - b'\delta \Rightarrow a'-b' = 1$ ou encore $b' = a'-1$
Ainsi on déduit d'après (*) que si a et b satisfont les relations (1) et (2) alors $\delta = 2a'-1$ puis on déduit que $a = a'\delta = a'(2a'-1)$ et $b = b'\delta = (a'-1)(2a'-1)$ car $b' = a'-1$

4. D'après **3.**, si a et b satisfont les relations (1) et (2) alors $a = a'(2a'-1)$ et $b = (a'-1)(2a'-1)$ avec $a = a'\delta$ et $b = b'\delta$.
Ainsi $(a-b)^2 = (2a'-1)^2$ et $a+b = (2a'-1)(a'+a'-1) = (2a'-1)^2$. D'où $(a-b)^2 = a+b$

5. Si a et b satisfont la relation (3), ils ne satisfont pas forcément les relations (1) et (2).
En effet, posons $a=10$ et $b=6$. $(a-b)^2 = 16$ et $a+b = 16$ alors a et b satisfont la relation (3).
Or $\delta = pgcd(a,b) = 2$ et $\mu = ppcm(a,b) = 30$ alors $\mu(a+b) = 480$ et $ab\delta = 120$ donc a et b ne satisfont pas (1)
Aussi $a-b = 4$ et $\delta = 2$ alors a et b ne satisfont pas aussi (2)

6. Soient a et b tels que $(a-b)^2 = a+b$ avec $\delta = pgcd(a,b) = 11$. Il existe alors a' et b' tels que $a = 11a'$ et $b = 11b'$ avec $pgcd(a',b') = 1$. $(a-b)^2 = a+b \Leftrightarrow 11(a'-b')^2 = a'+b'$. Posons alors $n = a'-b'$. On a donc $\begin{cases} a'-b' = n \\ a'+b' = 11n^2 \end{cases}$ puis on déduit que $a' = \dfrac{n+11n^2}{2} = \dfrac{n(11n+1)}{2}$ et $b' = \dfrac{11n^2-n}{2} = \dfrac{n(11n-1)}{2}$ ou encore $2a' = n(11n+1)$ et $2b' = n(11n-1)$ or $pgcd(a',b') = 1 \Rightarrow pgcd(2a',2b') = 2$ alors $pgcd(2a',2b') = pgcd(n(11n+1);n(11n-1)) = n\times pgcd(11n+1,11n-1) = 2$
Ainsi pour que $11(a'-b')^2 = a'+b'$, il faut alors que $n=1$ et $pgcd(11n+1,11n-1) = 2$ ou $n=2$ et $pgcd(11n+1,11n-1) = 1$.

• Pour $n=1$, $a' = \dfrac{n(11n+1)}{2} = 6$ et $b' = \dfrac{n(11n-1)}{2} = 5$. On a bien $pgcd(a',b') = 1$ puis on déduit que $a = 66$ et $b = 55$ or $(a-b)^2 = 121$ et $a+b = 121$ donc les entiers $a=66$ et $b=55$ vérifient la relation (3) avec $\delta = 11$
De plus $a-b = \delta$

• Pour $n=2$, $11n+1 = 23$; $11n-1 = 21 \Rightarrow pgcd(11n+1;11n-1) = 1$. $a' = \dfrac{n(11n+1)}{2} = 23$ et $b' = \dfrac{n(11n-1)}{2} = 21$ et on a bien $pgcd(a',b') = 1$ puis on déduit que $a = 253$ et $b = 231$ or $(a-b)^2 = 484$ et $a+b = 484$ donc les entiers $a=253$ et $b=231$ vérifient la relation (3) avec $\delta = 11$
Par contre $a-b = 22$ et $\delta = 11$ donc $a-b \neq \delta$. Donc le couple $(a,b) = (253,231)$ n'est pas solution.
On conclut que seul le couple $(a,b) = (66,55)$ vérifie les relation (3), (2) et (1) pour $\delta = 11$

Exercice 2

1-a. La fonction $g(t)$ est continue sur $]1,+\infty[$ alors elle admet une primitive sur cet intervalle que l'on note G. Alors, $\forall t \in]1,+\infty[$, $G'(t) = g(t)$. Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = G(x^2) - G(x)$. Les fonction $x \mapsto -G(x)$ et $x \mapsto G(x^2)$ sont dérivables sur $]1,+\infty[$ alors f est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
$\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) = G(x^2) - G(x) \Rightarrow G'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x)$. D'où $\forall t \in]1,+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^6-1} - \dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{-x^3+2x-1}{x^6-1}$

b. $x^6-1 > 0$ pour tout $x>1$. Posons $R(x) = -x^3+2x-1$. $R(1) = 0 \Rightarrow \exists\, a,b$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $R(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
Par identification, on déduit que $a=-1$, $b=-1$ et $c=1$. Les racines de $R(x)$: $\Delta = 5 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$. On déduit alors que $-x^2-x+1 < 0$ sur $]1,+\infty[$ puis que $R(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$. D'où $f'(x) < 0$ sur $]1,+\infty[\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

2-a. Pour $x>1$, $g'(x) = \dfrac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$. g est alors strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Ainsi, $\forall x>1$ et $\forall t \in [x,x^2]$, $g(x^2) \leq g(t) \leq g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_x^{x^2} g(x^2)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} g(x)\,\mathrm{d}t$

D'où pour tout $x>1$, $(x^2-x)g(x^2) \leq f(x) \leq (x^2-x)g(x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)g(x^2) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

3-a. $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1} = \dfrac{(a+b)x^2+(a+c-b)x+a-c}{x^3-1} \Rightarrow a+b=0$; $a+c-b=0$ et $a-c=1 \Rightarrow b=-a$; $c=a-1$ et $a+c-b=0$; Ainsi $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$ et $c=-\dfrac{2}{3}$.

b. $h(x) = -\dfrac{x+2}{3(x^3-1)}$. h est dérivable sur $]1,+\infty[$ de dérivée : $h'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{3(x^2+x+1)^2}$. $h'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$ alors h est croissante sur $]1,+\infty[$

c. h étant croissante sur $]1,+\infty[$, $\forall x > 1$; $t \in [x, x^2]$, $h(x) \leq h(t) \leq h(x^2)$ puis $\displaystyle\int_x^{x^2} h(x)\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2} h(x^2)\ \mathrm{d}t$

D'où pour tout $x > 1$, $(x^2-x)h(x) \leq \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t \leq (x^2-x)h(x^2)$

d. Pour $x > 1$, $(x^2-x)h(x) \leq \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t \leq (x^2-x)h(x^2) \Rightarrow xh(x) \leq \frac{1}{x-1}\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t \leq xh(x^2)$

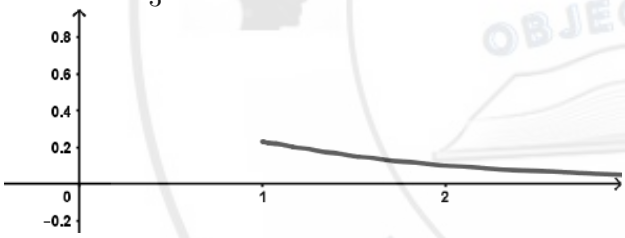
$\lim\limits_{x\to 1^+} xh(x) = -\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} xh(x^2) = -\dfrac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t = -\dfrac{1}{3}$ d'après le théorème des gendarmes.

4. $g(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} + h(x)$ alors $f(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t + \int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2-1}{x-1} + \int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t$. Ainsi, pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x+1) + \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t$.

Pour $x > 1$, $(x^2-x)h(x) \leq \displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t \leq (x^2-x)h(x^2)$ et comme $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-x)h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-x)h(x^2) = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 1^+}\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)\ \mathrm{d}t = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x+1) = \ln(2)$ alors on déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{3}\ln 2$

5. f admet une limite finie en 1 alors (C) est continue en 1.

De plus $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\dfrac{1}{6}$ car $x^6-1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$ donc la courbe a une pente de $-\dfrac{1}{6}$ au point $(1, \dfrac{1}{3}\ln 2)$



Problème

I/ 1-a. Soit $M(x,y)$ tel que $f_{a,b}(M) = M$ alors $\begin{cases} x = ax \\ y = -ay + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)x = 0 \\ (1+a)y = b \end{cases}$ ainsi :

- Si $a = 1$, l'ensemble des points invariants est la droite $y = \dfrac{b}{1+a} = \dfrac{b}{2}$
- Si $a = -1$ et $b = 0$, l'ensemble des points invariants est la droite $x = 0$
- Si $a = -1$ et $b \neq 0$, on n'a pas de point invariant.
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, le point Ω de coordonnées $x = 0$ et $y = \dfrac{b}{1+a}$ est le seul point invariant.

b.

- Si $a = -1$ et $b = 0$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ $f_{a,b}$ est alors la symétrie orthogonale d'axe $x = 0$.
- Si $a = -1$ et $b \neq 0$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + b \end{cases}$ et son écriture complexe est $z' = -\overline{z} + ib$. Le rapport de $f_{a,b}$ est 1 donc c'est une isométrie. De plus pour $a = -1$ et $b \neq 0$, $f_{a,b}$ n'a pas de points invariants alors on conclut que $f_{a,b}$ est une symétrie glissée. $f_{a,b} \circ f_{a,b}$ a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 2b \end{cases}$ qui est une translation de vecteur $2\vec{u} = (0, 2b)$. Ainsi le vecteur de la symétrie glissée est $\vec{u} = (0, b)$. Notons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, $t_{\vec{u}}$ a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$ Soit S une application telle que $f_{a,b} = t_{\vec{u}} \circ S$ alors $S = t_{-\vec{u}} \circ f_{a,b} \Rightarrow S$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ qui est la symétrie orthogonale d'axe $x = 0$; Finalement on conclut que pour

$a=-1$ et $b\neq 0$, $f_{a,b}$ est la symétrie glissée d'axe $x=0$ et de vecteur $\vec{u}=(0,b)$

• Si $a=1$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est : $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y+b \end{cases}$ et son écriture complexe est $z'=\overline{z}+ib$. Le rapport de $f_{a,b}$ est 1 donc c'est une isométrie. De plus $f_{a,b}$ laisse invariant une droite alors il s'agit de la symétrie orthogonale d'axe $y=\dfrac{b}{2}$

2-a. a non nul et $|a|\neq 1$. La symétrie orthogonale S_D d'axe $y=\dfrac{b}{1+a}$ a pour expression analytique $\begin{cases} x_1=x \\ y_1=-y+\dfrac{2b}{1+a} \end{cases}$

Soit h une application affine du plan dans lui-même tel que $f_{a,b}=h\circ S_D$. Alors $h=f_{a,b}\circ S_D^{-1}$ or $S_D^{-1}=S_D \Rightarrow h=f_{a,b}\circ S_D$. h a alors pour expression analytique : $\begin{cases} x''=ax_1 \\ y''=-ay_1+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=ax \\ y''=ay+\dfrac{b(1-a)}{1+a} \end{cases}$. On déduit que le seul point invariant par h est le point $\Omega\left(0;\dfrac{b}{1+a}\right)$. D'où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.

Conclusion : $f_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $y=\dfrac{b}{1+a}$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport a

b-b_1 Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$

• Pour $n=1$, $M_1(a,b)$. Donc le résultat est vrai à l'ordre 1

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n\geq 1$. Comme $M_{n+1}=f_{a,b}(M_n)$, alors $\begin{cases} x_{n+1}=ax_n \\ y_{n+1}=-ay_n+b \end{cases}$ or par hypothèse de récurrence, $x_n=a^n$ et $y_n=b\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}$ alors $x_{n+1}=a^{n+1}$ et $y_{n+1}=-ab\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}+b=\dfrac{b+ab(-a)^n}{1+a}$

D'où $y_{n+1}=b\dfrac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}$. Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où le résultat.

b_2 • Si n est impair, $x_n=a^n$ et $y_n=b\dfrac{1+a^n}{1+a} \Rightarrow y_n=\dfrac{b}{1+a}x_n+\dfrac{b}{1+a}$. Ainsi, si n est impair, le point M_n appartient à la droite (D_1) d'équation $y=\dfrac{b}{1+a}x+\dfrac{b}{1+a}$. Cette droite passe bien par A de coordonnées $\left(0,\dfrac{b}{1+a}\right)$ et le point M_1.

• Si n est pair, $x_n=a^n$ et $y_n=b\dfrac{1-a^n}{1+a} \Rightarrow y_n=-\dfrac{b}{1+a}x_n+\dfrac{b}{1+a}$. Ainsi, si n est pair, le point M_n appartient à la droite (D_2) d'équation $y=-\dfrac{b}{1+a}x+\dfrac{b}{1+a}$.

• Montrons que (D_2) est l'image de (D_1) par $f_{a,b}$: Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')=f_{a,b}(M)$ alors $\begin{cases} x'=ax \\ y'=-ay+b \end{cases}$ alors $x=\dfrac{x'}{a}$ et $y=\dfrac{-y'+b}{a}$. $M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow y=\dfrac{b}{1+a}x+\dfrac{b}{1+a}$ ou encore $\dfrac{-y'+b}{a}=\dfrac{b}{1+a}\dfrac{x'}{a}+\dfrac{b}{1+a}\Leftrightarrow y'=-\dfrac{b}{1+a}x'+\dfrac{b}{1+a}$. Ainsi si $M\in(D_1)$, $M'=f_{a,b}\in(D_2)$. (D_2) est bien la transformée de (D_1) par $f_{a,b}$

II/ 1. • Ensemble des points invariants : $M=g_{\alpha,\beta}(M)\Rightarrow z=\alpha z+i\beta$ ou encore $(1-\alpha)z=i\beta$ ainsi :

- Si $\alpha=1$ et $\beta\neq 0$, $g_{\alpha,\beta}$ n'a pas de point invariant.
- Si $\alpha=1$ et $\beta=0$, $g_{\alpha,\beta}$ tout point est invariant par $g_{\alpha,\beta}$
- Si $\alpha\neq 1$, $g_{\alpha,\beta}$ admet un seul point invariant à savoir le point d'affixe $z=\dfrac{i\beta}{1-\alpha}$

On conclut alors que :

• Si $\alpha=1$ et $\beta=0$, $g_{\alpha,\beta}$ est l'identité du plan.

• Si $\alpha=1$ et $\beta\neq 0$, $g_{\alpha,\beta}$ est la translation de vecteur $\vec{w}=(0,\beta)$ (car un déplacement qui n'admet aucun point invariant)

• Si $\alpha\neq 1$, $g_{\alpha,\beta}$: $z'=\alpha z+(1-\alpha)\dfrac{i\beta}{1-\alpha}\Rightarrow g_{\alpha,\beta}$ est l'homothétie de centre Q d'affixe $z=\dfrac{i\beta}{1-\alpha}$ et de rapport α

2-a. Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$

• Pour $n=1$, $z_1=\alpha+i\beta$ donc vrai à l'ordre 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n\geq 1$. Comme $N_{n+1}=g_{\alpha,\beta}(N_n)$ alors $z_{n+1}=\alpha z_n+i\beta$ or par hypothèse de récurrence, $z_n=\alpha^n+i\beta\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$ alors $z_{n+1}=\alpha^{n+1}+i\alpha\beta\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}+i\beta=\alpha^{n+1}+i\beta\dfrac{\alpha-1+\alpha^{n+1}-\alpha}{\alpha-1}=\alpha^{n+1}+i\beta\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$.

Le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où le résultat.

b. D'après la question précédente, les coordonnées des points N_n sont : $x_n=\alpha^n$ et $y_n=\beta\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\Rightarrow y_n=\beta\dfrac{x_n-1}{\alpha-1}$ alors tous les points N_n appartiennent à la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{\beta}{\alpha-1}x-\dfrac{\beta}{\alpha-1}$. Cette droite passe bien par N_1 et B

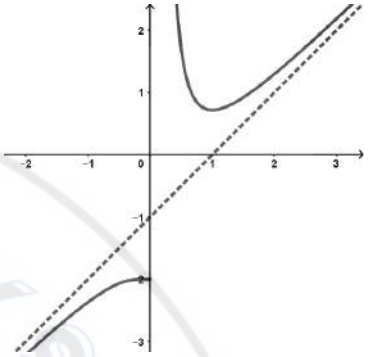
3. Pour $\alpha = -a$ et $\beta = b$ avec a non nul et $|a| \neq 1$; (Δ) a pour équation : $y = -\dfrac{b}{1+a}x + \dfrac{b}{1+a}$ qui est aussi l'équation de la droite (D_2) trouvée en **I/ 2-b-b_2**

III/ 1. • La fonction φ_1 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; g_1 est dérivable de dérivée $\varphi_1'(x) = \dfrac{x-1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi φ_1 est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et est décroissante sur $]0, 1]$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} \varphi_1(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi_1(x) = +\infty$ donc φ_1 n'est pas continue en 0

• Les branches infinies : La droite $x = 0$ est une asymptote verticale de (C_1) en 0 par valeur supérieur.



$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi_1(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [\varphi_1(x) - x] = -1$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty} [x\exp(1/x) - x] = \lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{\exp(X)-1}{X}$. On pose $h(x) = \exp(x)$ alors

$\lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{\exp(X)-1}{X} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} [\varphi_1(x) - x] = -1$.

Ainsi la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_1) en $+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi_1(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [\varphi_1(x) - x] = -1$ Ainsi la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_1) en $-\infty$

2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

• Pour $n = 1$; $\varphi_1 = x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2$. Donc le résultat est vrai à l'ordre 1.

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$. $(C_{n+1}) = g_{2,1}(C_n)$ et si $M' = g_{2,1}(M)$ alors $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

$M \in C_n \Leftrightarrow y = x\exp\left(\dfrac{2^{n-1}}{x}\right) - 2^{n-1} - 1$ par hypothèse de récurrence. Or $x = \dfrac{x'}{2}$ et $y = \dfrac{y'-1}{2}$ alors

$M \in C_n \Leftrightarrow \dfrac{y'-1}{2} = \dfrac{x'}{2}\exp\left(\dfrac{2^{n-1}}{x'/2}\right) - 2^{n-1} - 1$ ou encore $y' = x'\exp\left(\dfrac{2^n}{x'}\right) - 2^n - 1$ et comme $(C_{n+1}) = g_{2,1}(C_n)$ on déduit alors que φ_{n+1} a pour expression $\varphi_{n+1}(x) = x\exp\left(\dfrac{2^n}{x}\right) - 2^n - 1$. Le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = x\exp\left(\dfrac{2^{n-1}}{x}\right) - 2^{n-1} - 1$

3-a. • Pour tout $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi_n(x) = +\infty$ (Par croissance comparée) donc la droite $x = 0$ est une asymptote en 0 pour toutes les courbes (C_n)

• Pour tout $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi_n(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [\varphi_n(x) - x] = -1$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty} [x\exp(2^{n-1}/x) - x] = \lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{\exp(2^{n-1}X)-1}{X}$. On pose $\psi(x) = \exp(2^{n-1}x)$ alors

$\lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{\exp(2^{n-1}X)-1}{X} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\psi(x)-h(0)}{x-0} = \psi'(0) = 2^{n-1}$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} [\varphi_n(x) - x] = -1$. Ainsi la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de toutes les courbes (C_n) en $+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi_n(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [\varphi_n(x) - x] = -1$. Ainsi la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de toutes les courbes (C_n) en $-\infty$

On conclut alors que toutes les courbes (C_n) ont les mêmes asymptotes.

b. La tangente de (C_n) a une direction définie par $\vec{i}$ si $\varphi_n'(x) = 0$.

Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, φ_n est dérivable de dérivée : $\varphi_n'(x) = \dfrac{x - 2^{n-1}}{x}\exp\left(\dfrac{2^{n-1}}{x}\right)$

Ainsi, $\varphi_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 2^{n-1}$. Donc $x_{E_n} = 2^{n-1}$; comme $E_n \in (C_n)$ alors $y_{E_n} = 2^{n-1}(\mathrm{e}-1) - 1 \Rightarrow y_{E_n} = x_{E_n}(\mathrm{e}-1) - 1$. D'où tous les points E_n se situent sur la droite d'équation $y = (\mathrm{e}-1)x - 1$. Cette droite passe bien par le point B de coordonnées $(0, -1)$. Ainsi, l'ensemble de ces points (E_n) est inclus dans la droite d'équation $y = (\mathrm{e}-1)x - 1$

Correction BAC C-E Togo 2010

Exercice 1

I/ 1. • Continuité et dérivabilité de f en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)x\ln|x| = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f$ est continue en 0.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(x+1)\ln|x| = -\infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

• Continuité et dérivabilité de g en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \varphi'(0) = 0$ avec $\varphi(x) = \ln(x^2+1)$. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0 \Rightarrow g$ est continue en 0.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1 \Rightarrow g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.

• Continuité et dérivabilité de h en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}] = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0) = 1 \Rightarrow h$ est continue en 0.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$ (par croissance comparée) $\Rightarrow h$ est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

2. Posons $\psi(x) = \ln(x^2+1) - x^2$ avec $x \geq 0$. ψ est continue et dérivable de dérivée $\psi'(x) = -\dfrac{2x^3}{x^2+1} \leq 0 \Rightarrow \psi$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, $\forall x \geq 0$, $\psi(x) \leq \psi(0) = 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$, $\ln(x^2+1) \leq x^2$.

D'après ce qui précède, $\forall x \in]0,1]$, $\ln(x^2+1) \leq x^2 \Rightarrow \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \leq x$. De plus $g(0) = 0 \leq 0$. D'où $\forall x \in]0,1]$, $g(x) \leq x$

II/ 1. La probabilité demandée est : $\dfrac{2}{3}$ (Car il y a deux fonctions continues et dérivables en 0 à savoir h et g)

2-a. $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

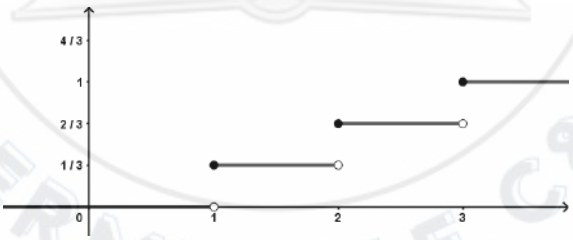
• $p(X=1)$ correspond à la probabilité de tirer f au premier tirage $\Rightarrow p(X=1) = \dfrac{1}{3}$

• $p(X=2)$ correspond à la probabilité de tirer f au deuxième tirage $\Rightarrow p(X=2) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

• $p(X=3)$ correspond à la probabilité de tirer f au troisième tirage $\Rightarrow p(X=3) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{3}$

b. $E(X) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3} = 2$

c.



Exercice 2

1-a. $I_1 = -\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t \ \mathrm{d}t = -[t\ln t - t]_1^{\mathrm{e}} = -1$ (Une primitive de la fonction $t \mapsto \ln t$ est la fonction $t \mapsto t\ln t - t$)

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^{n+1} \ \mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\left[t\times(\ln t)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\times\dfrac{n+1}{t}(\ln t)^n \ \mathrm{d}t\right]$ (Intégration par parties en posant $u(t) = (\ln t)^{n+1}$ et $v'(t) = 1$). Ainsi, $I_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left[e - (n+1)\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t\right]$

or $-\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^n}{(n)!}\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t = I_n$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}$

c. Prouvons le résultat demandé par récurrence :

• Pour $n = 1$, $I_1 = -1 \Rightarrow$ le résultat est vrai à l'ordre 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ donné. D'après la question précédente, $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}$ or par hypothèse de récurrence, $I_n = \left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right)\mathrm{e} - 1$ alors

$I_{n+1} = \left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right)\mathrm{e} - 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e} = \left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\mathrm{e} - 1$. Le résultat

est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \mathrm{e} - 1$

2-a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [1, \mathrm{e}]$, $0 \leq \ln t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\ln t)^n \leq 1$. Par conséquent, $0 \leq \int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \leq \int_1^{\mathrm{e}} 1 \ \mathrm{d}t$.

D'où $0 \leq \int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e} - 1$

b. $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \Rightarrow |I_n| = \frac{1}{n!} \int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t$ or $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n \ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e} - 1$ alors $|I_n| \leq \frac{\mathrm{e}-1}{n!}$

c. $|I_n| \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}-1}{n!} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. D'où (I_n) est convergente de limite 0

3. $S_n = \frac{I_n + 1}{\mathrm{e}}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Problème

A/ 1. $Z_{O'} = ai$ donc O' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$

I a pour abscisse $\frac{ia}{2}$. Notons $I' = f_a(I)$ alors $Z_{I'} = a^2 \frac{\overline{ia}}{2} + ai = -i\frac{a|a|^2}{2} + ai$ or $|a|^2 = 1 \Rightarrow Z_{I'} = \frac{ia}{2} = Z_I$

D'où I, le milieu de $[OO']$ est invariant par f_a

2. La symétrie orthogonale S par rapport à (OU) a pour écriture analytique : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ donc une écriture complexe $Z = \overline{z}$. Notons g l'application du plan dans lui même telle que $g = f_a \circ S$. L'écriture complexe de g est alors :

$Z' = a^2\overline{Z} + ai = a^2 z + ai \Rightarrow g$ est un déplacement car son écriture complexe est sous la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $|\alpha| = |a^2| = 1$

$g = f_a \circ S \Rightarrow f_a = g \circ S^{-1} = g \circ S$ car $S^{-1} = S$

D'où f_a est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OU) et d'un déplacement.

f_a est un antidéplacement car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement.

3-a. $Z_I = \frac{ai}{2} = -\frac{\sin\theta}{2} + i\frac{\cos\theta}{2} \Rightarrow x_I = -\frac{\sin\theta}{2}$ et $y_I = \frac{\cos\theta}{2}$. Ainsi $x_I^2 + y_I^2 = \frac{1}{4}$. D'où, quand θ décrit $[0, 2\pi[$, I décrit le cercle de centre O et de rayon $1/2$

b. $z_{A'} = a^2\overline{a} + ai \Rightarrow z_{A'} = a|a|^2 + ai = a + ia = (\cos\theta - \sin\theta) + i(\cos\theta + \sin\theta)$. Ainsi $x_{A'} = \cos\theta - \sin\theta$ et $y_{A'} = \cos\theta + \sin\theta$

Ainsi $x_{A'}^2 + y_{A'} = (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2 = 2$. D'où , quand θ décrit $[0, 2\pi[$, A' décrit le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

c. L'affixe de $\overrightarrow{IU}$ est : $1 - \frac{ai}{2} \Rightarrow \left|\left|\overrightarrow{IU}\right|\right|^2 = \left(1 + \frac{\sin\theta}{2}\right)^2 + \frac{\cos^2\theta}{4} = \frac{5}{4} + \sin\theta$ or pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ alors

$\frac{1}{4} \leq \left|\left|\overrightarrow{IU}\right|\right|^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left|\left|\overrightarrow{IU}\right|\right| \leq \frac{3}{2}$. D'où , quand θ décrit $[0, 2\pi[$, la norme de $\overrightarrow{IU}$ prend ses valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

B/ 1-a. S_a es une symétrie orthogonale alors elle a une écriture complexe sous la forme : $z_2 = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $|\alpha| = 1$. Or $S_a(O) = O \Rightarrow \beta = 0$ et $S_a(A) = A \Rightarrow \alpha\overline{a} = a$ ou encore $\alpha = \frac{a}{\overline{a}}$. D'où S_a a pour écriture complexe : $z_2 = \frac{a}{\overline{a}}\overline{z}$

b. $g_a \circ S_a$ a pour écriture complexe : $z' = a^2\overline{\left(\frac{a}{\overline{a}}\overline{z}\right)} = |a|^2 z$. $h = g_a \circ S_a$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k = |a|^2$.

$g_a \circ S_a = h \Rightarrow g_a = h \circ S_a^{-1} = h \circ S_a$ car $S_a^{-1} = S_a$. De plus, $S_a \circ h$ a pour écriture complexe : $z' = \frac{a}{\overline{a}}\overline{|a|^2 z} = a^2\overline{z}$. Ainsi $S_a \circ h = h \circ S_a = g_a$. D'où g_a est la composée de la symétrie orthogonale S_a et de l'homothétie h.

2. • $M_0(x_0, y_0) \neq O \Rightarrow (x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = g_a(M_{n-1}) \Rightarrow M_n = g_a^n(M_0)$ et $S_a \circ h = h \circ S_a = g_a$

– Si n est pair, $M_n = g_a^n(M_0) = (h \circ S_a)^n (M_0) = h^n \circ S_a^n(M_0)$ car $S_a \circ h = h \circ S_a$ (S_a et h commutent) avec h l'homothétie définie à la question **B/ 1-a.**

Pour n pair, $S^n = Id_P$ car $S \circ S = S^2 = Id_P$. Par conséquent, si n est pair, $M_n = g_a^n(M_0) = h^n(M_0)$. Or on peut déduire d'après **B/ 1-a.** que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, h^n a pour écriture complexe : $z' = |a|^{2n} z$.

Ainsi, si n est pair, $M_n = h^n(M_0) \Rightarrow x_n = |a|^{2n} x_0$ et $y_n = |a|^{2n} y_0$ et par conséquent $y_0 x_n - x_0 y_n = 0 \Rightarrow M_n$ appartient à la droite d'équation $y_0 x - x_0 y = 0$. De plus, x_n a le même signe que x_0 et y_n a le même signe que y_0. Donc, si $x_0 \geq 0$, M_n appartient à la demie droite d'équation $y_0 x - x_0 y = 0$ avec $x \geq 0$ et si $x_0 \leq 0$, M_n appartient à la demie droite d'équation $y_0 x - x_0 y = 0$ avec $x \leq 0$

– Si n est impair,$M_n = h^n \circ S_a^n(M_0)$. Pour n impair, $S_a^n = S_a$ et par conséquent $M_n = g_a^n(M_0) = h^{n-1}(h \circ S_a)(M_0)$. Or $h \circ S_a = g_a$ alors $M_n = h^{n-1} \circ g_a(M_0)$. On pose $a = \alpha + i\beta$

Ainsi, si n est impair, M_n a pour affixe $z_n = |a|^{2(n-1)} a^2 \overline{z}_0 \Rightarrow x_n = |a|^{2(n-1)}[(\alpha^2 - \beta^2)x_0 + 2\alpha\beta y_0]$ et $y_n = |a|^{2(n-1)}[2\alpha\beta x_0 - (\alpha^2 - \beta^2)y_0]$. $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ car sinon, $z_n = 0$ et donc $z_{n+1} = 0$ ce qui est impossible car si n est impair, $n+1$ est pair et par conséquent $z_{n+1} \neq 0$ d'après le cas ***n* pair** $\Rightarrow$ pour n impair, au moins x_n est non nul ou y_n est non nul. Alors, au moins $\lambda = 2\alpha\beta x_0 - (\alpha^2 - \beta^2)y_0$ est non nul ou $\mu = (\alpha^2 - \beta^2)x_0 + 2\alpha\beta y_0$ est non nul. Par exemple, si $\mu = 0$, $x_n = 0 \Rightarrow M_n$ appartient à la droite d'équation $x = 0$; si $\lambda = 0$, $y_n = 0 \Rightarrow M_n$ appartient à la droite $y = 0$ et si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, $y_n = \frac{\lambda}{\mu} x_n \Rightarrow M_n$ appartient à la droite d'équation $y = \frac{\lambda}{\mu} x$.

Dans tous les cas, si n est impair, les points M_n appartiennent à une droite fixe. De plus dans ce cas, x_n a toujours

le signe de μ et y_n a toujours le même signe de λ. Donc, pour n est impair, les points M_n appartiennent tous à une demie droite fixe .

On conclut alors d'après les deux cas énumérés ci-dessus que l'ensemble des points M_n est contenu dans la réunion de deux demi-droites.

• $\left|\left|\overrightarrow{OM_{n+1}}\right|\right| = |z_{n+1}| = |a^2||\overline{z}_n|$ or $|\overline{z}_n| = |z_n| = \left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$. D'où $\left|\left|\overrightarrow{OM_{n+1}}\right|\right| = |a|^2\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$

• On déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right| = |a|^{2n}\left|\left|\overrightarrow{OM_0}\right|\right|$

• $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ converge si $|a|^{2n}$ converge c'est-à-dire $|a| \leq 1$ ou encore si A appartient au disque fermé de centre O et de rayon 1. Par suite, si A appartient au disque ouvert de centre O et de rayon 1, $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ converge de limite 0 ; si A est un élément au bord du disque $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ converge vers $\left|\left|\overrightarrow{OM_0}\right|\right|$; Sinon, $\left|\left|\overrightarrow{OM_n}\right|\right|$ diverge

3-a. f_a a pour écriture complexe $z' = a^2\overline{z}+ia$. Notons $a = \alpha+i\beta$. f_a a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = (\alpha^2-\beta^2)x + 2\alpha\beta y - \beta \\ y' = 2\alpha\beta x - (\alpha^2-\beta^2)y + \alpha \end{cases}$

Soit $M(x,y)$ tel que $M = f_a(M)$ alors $\begin{cases} (-1+\alpha^2-\beta^2)x + 2\alpha\beta y = \beta \\ 2\alpha\beta x - (1+\alpha^2-\beta^2)y = -\alpha \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}$ et $y = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}$

D'où f_a admet un seul point invariant $\Omega_a\left(\dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}, \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}\right)$ donc d'affixe $\dfrac{ia}{|a|^2+1}$ en posant $a = \alpha+i\beta$

b. • $\overrightarrow{OO'} = -\beta\overrightarrow{OU}+\alpha\overrightarrow{OV}$. D'après la question précédente : $\overrightarrow{O\Omega_a} = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+1}(-\beta\overrightarrow{OU}+\alpha\overrightarrow{OV}) \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega_a} = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+1}\overrightarrow{OO'}$

On déduit alors que $\Omega_a \in (OO')$. De plus $0 < \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+1} < 1$ pour tout α et β, on conclut alors que $\Omega_a \in [OO']$

• Notons h l'homothétie de centre Ω_a et de rapport $|a^2|$; h a pour écriture complexe : $z' = |a^2|z + (1-|a^2|)\dfrac{ia}{|a|^2+1}$ car l'affixe de $\Omega_a = \dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2+1} + \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}i = \dfrac{ia}{|a|^2+1}$. h^{-1} est l'homothétie de centre Ω_a et de rapport $\dfrac{1}{|a^2|} \Rightarrow h^{-1}$ a pour écriture complexe : $Z_1 = \dfrac{1}{|a^2|}z + \dfrac{|a^2|-1}{|a^2|}\dfrac{ia}{|a|^2+1}$

Notons $S = f \circ h^{-1}$ alors S a pour écriture complexe : $Z' = a^2\overline{Z_1} + ai = \dfrac{a^2}{|a^2|}\overline{z} + \dfrac{|a^2|-1}{|a^2|}\dfrac{-i\overline{a}}{|a|^2+1}a^2 + ai$

Or $|a^2| = |a|^2 = a\overline{a}$ alors l'écriture complexe de S dévient : $Z' = \dfrac{a}{\overline{a}}\overline{z} + \dfrac{2ia}{|a|^2+1} \Rightarrow S$ est un antidéplacement.

Trouvons l'écriture complexe de $S \circ S$:

$S \circ S$ a pour écriture complexe : $Z'' = \dfrac{a}{\overline{a}}\overline{\left(\dfrac{a}{\overline{a}}\overline{z} + \dfrac{2ia}{|a|^2+1}\right)} + \dfrac{2ia}{|a|^2+1} = z - \dfrac{2ia}{|a|^2+1} + \dfrac{2ia}{|a|^2+1} = z$. D'où $S \circ S = Id_P$ et par conséquent, S est une involution.

Trouvons l'ensemble des points invariants par S :

En utilisant l'écriture complexe de S et en posant $Z' = X' + iY'$; $z = x + iy$, on déduit l'expression analytique qui est :

$$\begin{cases} X' = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)x + 2\alpha\beta y\right] - \dfrac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2+1} \\ Y' = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[-(\alpha^2-\beta^2)y + 2\alpha\beta x\right] + \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1} \end{cases}$$

Soit $M(x,y)$ tel que $M = f_a(M)$ alors $-\beta^2 x + \alpha\beta y = \dfrac{\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2+1}$ et $-\alpha\beta x + \alpha^2 y = \dfrac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2+1}$. $a \neq 0 \Rightarrow (\alpha,\beta) \neq (0,0)$

- Si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et l'ensemble des points invariants est la droite $x = -\dfrac{\beta}{\beta^2+1}$
- Si $\beta = 0$ alors $\alpha \neq 0$ et l'ensemble des points invariants est la droite $y = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$
- Si $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, l'ensemble des points invariants est la droite $-\beta x + \alpha y = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+1}$

Dans tous les cas, l'ensemble des points invariants par S est une droite. S est alors une involution et un antidéplacement laissant invariant une droite $\Rightarrow S$ est une symétrie orthogonale. $S = f_a \circ h^{-1} \Rightarrow f_a = S \circ h$

De plus $h \circ S$ a pour écriture complexe : $z' = |a|^2\left(\dfrac{a}{\overline{a}}\overline{z} + \dfrac{2ia}{|a|^2+1}\right) + (1-|a^2|)\dfrac{ia}{|a|^2+1} = a^2\overline{z} + ai \Rightarrow h \circ S = S \circ h = f_a$

D'où f_a est la composée de l'homothétie de centre Ω_a et de rapport $|a^2|$ et de la symétrie orthogonale S définie plus haut.

4. D'après **II/ 3-a.**, Ω_a a pour affixe $\dfrac{ia}{|a|^2+1}$. Par conséquent, $\left|\left|\overrightarrow{O\Omega_a}\right|\right| = \dfrac{|a|}{|a|^2+1} \Rightarrow \left|\left|\overrightarrow{O\Omega_a}\right|\right| < 1$ pour tout a. Par conséquent, si $L > 1$, il n'existe pas un a tel que $\left|\left|\overrightarrow{O\Omega_a}\right|\right| = L$

Correction BAC C-E Togo 2011

Exercice 1

1. Si un entier divise M et N alors, pour tout $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, cet entier divise $uM+vN$. Ainsi, si un entier divise M et N, il divise $13M-11N=50$. D'où tout diviseur de M et de N est un diviseur de 50

2-a. Si (x_0,y_0) est solution de (E) alors $50x_0-11y_0=3$ ou encore $50x_0=11y_0+3$ puis on conclut que $11y_0+3$ est un multiple de 50.

b. Résolution de (E) :

• $pgcd(50,11)=1$ qui divise 3 alors (E) admet au moins une solution.

• Solution particulière :

En remontant l'algorithme d'Euclide (détailler), on a : $1=2\times50-9\times11\Rightarrow6\times50-27\times11=3\Rightarrow(6,27)$ est une solution particulière de (E)

• Solution générale :

(x,y) solution de $(E)\Leftrightarrow50x-11y=3\Leftrightarrow50x-11y=6\times50-27\times11\Leftrightarrow50(x-6)=11(y-27)$.Ainsi 11 divise $50(x-6)$ et comme $50\wedge11=1$, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $x-6$. Donc $\exists\ k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-6=11k$ ou encore $x=6+11k$. De même $50(x-6)=11(y-27)$ alors 50 divise $11(y-27)$ et puisque $50\wedge11=1$, d'après le théorème de Gauss, 50 divise $y-27$. Donc $\exists\ k'\in\mathbb{Z}$ tel que $y-27=50k'$ ou encore $y=50k'+27$. Comme $50x-11y=3$ alors $k'=k$.

D'où les solutions de (E) sont les couples de la forme : $(x,y)=(11k+6,50k+27)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

c. D'après **1.**, tout diviseur de M et N est un diviseur de 50, on déduit que 50 est le $pgcd$ de M et N si il divise M et N.

• 50 est un diviseur de $M\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $M=50k$ ou encore $50k-11n=3$. D'après **2-b.**, si 50 divise M alors n est sous la forme de $n=50k+27$ avec $k\in\mathbb{Z}$

• Si 50 divise M alors forcément il divise N. En effet : $13M-11N=50$ et si 50 divise M alors $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $M=50k$. Ainsi $13M-11N=50\Rightarrow50(13k-1)=11N$. Ainsi 50 divise $11N$ or 11 et 50 sont premiers entre eux alors on conclut que 50 divise N.

D'où $pgcd(M,N)=50$ si n est sous la forme $n=50k+27$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice 2

1. • $(C_{0,k})$ a pour équation : $x^2+y^2=k$. Donc $(C_{0,k})$ est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}$

• $(C_{1,k})$ a pour équation : $2x^2=k$. Donc $(C_{1,k})$ est la réunion des droites d'équation $x=\sqrt{\dfrac{k}{2}}$ et $x=-\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

• $(C_{-1,k})$ a pour équation : $2y^2=k$. Donc $(C_{-1,k})$ est la réunion des droites d'équation $y=\sqrt{\dfrac{k}{2}}$ et $y=-\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

2-a. • $(C_{1/2,6})$ a pour équation : $3x^2+y^2=12$ donc $3x^2+y^2=12$ est une courbe $(C_{k,\lambda})$

• $(C_{2,6})$ a pour équation : $3x^2-y^2=6$ donc $3x^2-y^2=6$ est une courbe $(C_{k,\lambda})$

b. • $3x^2+y^2=12$ est la courbe $(C_{1/2,6})$ qui est une ellipse de centre O, d'axe focal $(0y)$, de foyers $F(0,2\sqrt{2})$ et $F'(0,-2\sqrt{2})$; de directrice $y=3\sqrt{2}$ et $y=-3\sqrt{2}$, de sommets $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2\sqrt{3})$ et $(0,-2\sqrt{3})$ (Voir fig 1 pour la représentation)

• $3x^2-y^2=6$ est la courbe $(C_{2,6})$ qui est une hyperbole de centre O, d'axe focal $(0x)$, de foyers $F(2\sqrt{2},0)$ et $F'(-2\sqrt{2},0)$; de directrice $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de sommets $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ et d'asymptotes $y=-\sqrt{3}x$ et $y=\sqrt{3}x$ (Voir fig 2 pour la représentation)

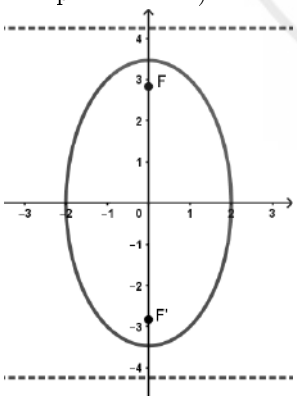


fig 1

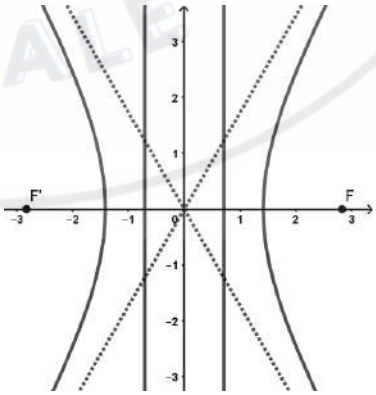


fig 2

3. Pour $\lambda\notin\{-1,0,1\}$ et $k>0$, $C_{\lambda,k}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{k/(1+\lambda)}+\dfrac{y^2}{k/(1-\lambda)}=1$ qui est l'équation réduite d'une ellipse ou d'une hyperbole.

• Si $0<\lambda<1$, $C_{\lambda,k}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a^2=\dfrac{k}{1+\lambda}$ et $b^2=\dfrac{k}{1-\lambda}$. De plus pour $0<\lambda<1$, $a^2<b^2$. Ainsi, pour $0<\lambda<1$, $C_{\lambda,k}$ est une ellipse d'axe focal (oy) et d'excentricité $e=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}}$

• Si $-1<\lambda<0$, $C_{\lambda,k}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a^2=\dfrac{k}{1+\lambda}$ et $b^2=\dfrac{k}{1-\lambda}$. De plus pour $-1<\lambda<0$, $a^2>b^2$. Ainsi, pour $-1<\lambda<0$, $C_{\lambda,k}$ est une ellipse d'axe focal (ox) et d'excentricité $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{-2\lambda}{1+\lambda}}$

• Si $\lambda<-1$, $C_{\lambda,k}$ a pour équation $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a^2=-\dfrac{k}{1+\lambda}$ et $b^2=\dfrac{k}{1-\lambda}$. Ainsi, pour $\lambda<-1$, $C_{\lambda,k}$ est une hyperbole d'axe focal (oy) et d'excentricité $e=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}}>1$

• Si $\lambda>1$, $C_{\lambda,k}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a^2=\dfrac{k}{1+\lambda}$ et $b^2=\dfrac{k}{\lambda-1}$. Ainsi, pour $\lambda>1$, $C_{\lambda,k}$ est une hyperbole d'axe focal (ox) et d'excentricité $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}}>1$

Problème

A/ 1. Soit $M(x,y)$ tel que $T_a(M)=M$ alors $\left\{\begin{array}{l}x=ax\\y=2ax+y\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(1-a)x=0\\2ax=0\end{array}\right.$ ainsi :

• Si $a=0$, la droite $x=0$ est l'ensemble des points invariants.
• Si $a=1$, la droite $x=0$ est l'ensemble des points invariants.
• Si $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, la droite $x=0$ est l'ensemble des points invariants.
Par suite, pour tout réel a, la droite $x=0$ est l'ensemble des points invariants.

2. Soit $M(x,y)\notin E$ et $M'(x',y')=T_a(M)$. $\overrightarrow{MM'}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}=x(a-1)\vec{i}+2xa\vec{j}=x[(a-1)\vec{i}+2a\vec{j}]$. D'où pour $M(x,y)\notin E$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+2a\vec{j}$

3. $T_0:\left\{\begin{array}{l}x'=0\\y'=y\end{array}\right.\Rightarrow T_0$ est la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées

4. $T_{-1}:\left\{\begin{array}{l}x'=-x\\y'=-2x+y\end{array}\right.\Rightarrow T_{-1}\circ T_{-1}:\left\{\begin{array}{l}x''=-x'\\y''=-2x'+y'\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}x''=x\\y''=y\end{array}\right.$ ainsi T_{-1} est une involution donc soit une symétrie centrale ou une symétrie axiale. Or d'après **2.**, pour $M(x,y)\notin E$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $\vec{u}=-2\vec{i}-2\vec{j}$ (pour $a=-1$) donc il s'agit d'une symétrie axiale. On conclut que T_{-1} est la symétrie axiale d'axe $x=0$ et de direction $\vec{u}=-2\vec{i}-2\vec{j}$

5. Soient $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}$ et $M'=T_a(M)$. Notons P, le projeté de M sur la droite $x=0$ parallèlement à $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+2a\vec{j}$. Soit (D) la droite passant par $M(x,y)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$; (D) a pour équation $2a(X-x)+(1-a)(Y-y)=0$. Le point P est alors l'intersection de (D) et la droite $x=0$ (l'axe des ordonnées) $\Rightarrow x_P=0$ et $y_P=\dfrac{2ax}{1-a}+y$ ainsi

$\overrightarrow{PM'}=(x'-x_P)\vec{i}+(y'-y_P)\vec{j}=ax\vec{i}+\dfrac{2a^2x}{a-1}\vec{j}$ et $\overrightarrow{PM}=(x-x_P)\vec{i}+(y-y_P)\vec{j}=x\vec{i}+\dfrac{2ax}{a-1}\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{PM'}=a\overrightarrow{PM}$

Ainsi pour $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}$, T_a est l'affinité d'axe $x=0$ (l'axe des ordonnées), de direction $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+2a\vec{j}$ et de rapport a.

B/ 1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $M_n=T_1(M_{n-1})\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_n=x_{n-1}\\y_n=2x_{n-1}+y_{n-1}\end{array}\right.$

2. • Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=x_{n-1}$ alors $x_n=x_0\ \forall n\in\mathbb{N}$
• $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=2x_{n-1}+y_{n-1}=2x_0+y_{n-1}$ alors (y_n) est une suite arithmétique de raison $2x_0\Rightarrow y_n=y_0+2nx_0\ \forall n\in\mathbb{N}$

3. Pour tout n, $x_n=x_0$ donc tous les points M_n appartiennent à la droite d'équation $x=x_0$

4. Notons (Δ_k) la droite d'équation $x=k$. Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')=T_1(M)$ alors $\left\{\begin{array}{l}x'=x\\y'=2x+y\end{array}\right.$
$M\in(\Delta_k)\Leftrightarrow x=k$ ou encore $x'=k\Leftrightarrow M'\in(\Delta_k)$. D'où la droite $x=k$ est globalement invariant par T_1

C/ 1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+\sin x|>0\}$ ou encore $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+\sin x\neq 0\}$
• Pour $x>1$ ou $x<-1$, $x+\sin x\neq 0$ (Si $x<-1$, $x+\sin x<0$ et pour $x>1$, $x+\sin x>0$)
• Posons $\psi(x)=x+\sin x$ pour $x\in[-1,1]$. ψ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée $\psi'(x)=1+\cos(x)>0$ donc ψ est strictement croissante sur $[-1,1]$ donc si il existe un $x_0\in[-1,1]$ tel que $\psi(x_0)=0$ alors il est unique. Or $\psi(0)=0$. Ainsi $|x+\sin x|>0$ si $x\in\mathbb{R}^*$. D'où $D_f=\mathbb{R}^*$

2. • $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (Par croissance comparée)
• $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

3. g est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ de dérivée $g'(x)=\cos x+\sin x+1$. Pour $x\in[0,\pi[$, $\sin x\geq 0$ ainsi pour $x\in[0,\pi[$ $\cos x+\sin x+1\geq\cos x+1>0\Rightarrow g'(x)>0$ sur $[0,\pi[$. Or $g'(\pi)=0\Rightarrow g'(x)=0$ sur $[0,\pi]$ si $x=\pi$. D'où pour $x\in[0,\pi[$, $g'(x)\geq 0\Rightarrow g$ est strictement croissante sur $[0,\pi]$

4. $g(\pi/4)=\dfrac{\pi}{4}-1<0$ et $g(\pi/3)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$ alors il existe au moins un réel $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$ tel que $g(\alpha)=0$. De plus g est strictement croissante sur $[0,\pi]$ alors α est unique

5. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, f est dérivable en x de dérivée $f'(x)=\dfrac{\sin(x)-\cos(x)+x-1}{x+\sin(x)}=\dfrac{g(x)}{x+\sin(x)}$.

• En utilisant la fonction ψ définie en **C/ 1.**, on déduit que : $x+\sin(x)<0$ pour $x\in]-\infty,0[$ et $x+\sin(x)>0$ pour $x\in]0,+\infty[$

• En utilisant **C/ 3.** et **C/ 4.**, on déduit que $g(x)\leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $g(x)>0$ sur $]\alpha,\pi]$. De plus, pour $x<0$, $\sin(x)\leq 0\Rightarrow g(x)<0$ pour $x<0$. Pour $x>\pi$, $x-1>2$ or $\sin x-\cos x\geq -2\Rightarrow g(x)>0$ pour $x>\pi$. Ainsi, $g(x)\leq 0$ pour $x\in]-\infty,0[\cup]0,\alpha]$ et $g(x)\geq 0$ pour $x\in[\alpha,+\infty[$

• Ainsi, pour $x\in]-\infty,0[$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$. Pour $x\in]0,\alpha]$, $f'(x)\leq 0$ et f est décroissante sur $]0,\alpha]$. Pour $x\in]\alpha,+\infty[$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\infty$ alors la droite d'équation $y=x$ est une branche infinie de (C_f) en $+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-\infty$ alors la droite d'équation $y=x$ est une branche infinie de (C_f) en $-\infty$

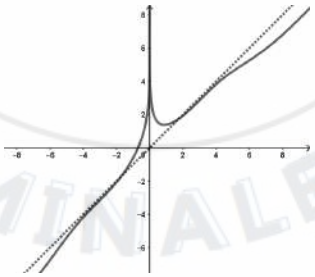
En conclusion, la droite $y=x$ est une branche infinie de (C_f) en $\pm\infty$

7. f est continue sur $]0,+\infty[$. De plus $f(\pi/4)\simeq 1.38>0$ et $f(\pi/3)\simeq 1.4>0$ alors $f(\alpha)>0$ car $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$ donc pour $x\in]0,+\infty[$, $f(x)>0$ puisque $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)\geq f(\alpha)>0$ (d'après le tableau des variations de f)

f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$. De plus $f(-\pi/4)\simeq -0.19<0$ et $f(-\pi/6)\simeq 0.45>0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{4};-\dfrac{\pi}{6}\right[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que f est bijective sur $]-\infty,0[$

8. D'après **A/ 4.**, pour construire l'image d'un point de (C_f) par T_{-1}, on cherche son symétrique par rapport à l'axe des abscisses et parallèlement à la direction $\vec{u}=(-2,-2)$

9. L'image de (C_f) par T_{-1} est (C_f). En effet, soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')=T_{-1}(M)$ alors $\begin{cases}x'=-x\\y'=-2x+y\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}x=-x'\\y=-2x'+y'\end{cases}$. Ainsi $M\in(C_f)\Leftrightarrow y=x+1-\ln|x+\sin(x)|$ ou encore $y'=x'+1-\ln|x'+\sin(x')|$



D/ 1. $4a$ est un multiple de 8 si $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $4a=8k\Rightarrow a=2k$. Ainsi $4a$ est multiple de 8 si $a=2k$.

2. $a=2k$ avec $a\in[-10,10[\Rightarrow a\in B=\{-10;-8;-6;-4;-2;0;2;4;6;8\}$

3-a. (T_a) est une transformation si et seulement si $a\neq 0$. Ainsi $X(\Omega)=\{3,4\}$

• $p(X=4)$ est la probabilité de ne pas tirer 0 lors du tirage. alors $p(X=4)=\dfrac{C_9^4}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{5}$

• $p(X=3)$ est la probabilité d'avoir 0 lors du tirage. Alors $p(X=3)=\dfrac{1\times C_9^3}{C_{10}^4}=\dfrac{2}{5}$

b. L'espérance : $E(X)=4\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{18}{5}$

4-a. La probabilité demandée est : $p=C_{10}^3\times\dfrac{9^3}{10^{10}}=120\times\dfrac{9^3}{10^{10}}\approx 8.75\times 10^{-6}$

b. $Y(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ et $p(Y=i)=C_{10}^i\dfrac{9^i}{10^{10}}$ avec $i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$E(Y)=\sum\limits_{i=0}^{10}i\times C_{10}^i\times\dfrac{9^i}{10^{10}}\simeq 9$; $E(Y^2)=\sum\limits_{i=0}^{10}i^2\times C_{10}^i\times\dfrac{9^i}{10^{10}}\simeq 81.9\Rightarrow V(Y)=\dfrac{9}{10}$

Correction BAC C-E Togo 2012

Exercice 1

1. Pour que l'évènement se réalise, il faut que le tirage de l'urne 1 vers l'urne 2 soit exactement identique au tirage de l'urne 2 vers l'urne 1. C'est-à-dire, si on tire 2 boules blanches de l'urne 1 vers l'urne 2, il faut tirer 2 boules blanches lors du tirage de l'urne 2 vers l'urne 1 ou si on tire 2 boules noires de l'urne 1 vers l'urne 2, il faut tirer 2 boules noires lors du tirage de l'urne 2 vers l'urne 1 ou encore si on tire 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 1 vers l'urne 2, il faut tirer 1 boule blanche et 1 boule noire lors du tirage de l'urne 2 vers l'urne 1.

• La probabilité de tirer 2 boules blanches de l'urne 1 vers l'urne 2 et 2 boules blanches de l'urne 2 vers l'urne 1 est : $\dfrac{C_n^2}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_4^2}{C_5^2} = \dfrac{3n(n-1)}{5(n+3)(n+2)}$

• La probabilité de tirer 2 boules noires de l'urne 1 vers l'urne 2 et 2 boules noires de l'urne 2 vers l'urne 1 est : $\dfrac{C_3^2}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{9}{5(n+3)(n+2)}$

• La probabilité de tirer 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 1 vers l'urne 2 et 1 boule blanche, 1 boule noire de l'urne 2 vers l'urne 1 est : $\dfrac{C_n^1 \times C_3^1}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{18n}{5(n+3)(n+2)}$

Ainsi $p(A) = \dfrac{3n(n-1)}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{9}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{18n}{5(n+3)(n+2)} = \dfrac{3n(n-1)+9+18n}{5(n+3)(n+2)} = \dfrac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$

2. Pour avoir l'évènement B, il faut soit tirer 2 boules noires de l'urne 1 vers l'urne 2 et tirer 1 boule noire et 1 boule blanche de l'urne 2 vers l'urne 1 ou soit tirer 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 1 vers l'urne 2 et tirer 2 boules blanches de l'urne 2 vers l'urne 1.

• La probabilité de tirer 2 boules noires de l'urne 1 vers l'urne 2 et tirer 1 boule noire et 1 boule blanche de l'urne 2 vers l'urne 1 est : $\dfrac{C_3^2}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \dfrac{18}{5(n+3)(n+2)}$

• La probabilité de tirer 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 1 vers l'urne 2 et tirer 2 boules blanches de l'urne 2 vers l'urne 1 est : $\dfrac{C_n^1 \times C_3^1}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{9n}{5(n+3)(n+2)}$

Ainsi $p(B) = \dfrac{18}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{9n}{5(n+3)(n+2)} = \dfrac{9n+18}{5(n+3)(n+2)}$

3-a. Le nombre possible de boules blanches contenues dans l'urne 2 à l'issu de l'épreuve est : 0, 1,2, 3. Ainsi le gain est maximal pour $\alpha = 0$ et ce gain vaut $30n$. Pour que le gain dépasse la mise, il faut que $30n \geq 200 \Rightarrow n \geq \dfrac{200}{30} = 6,66$. Donc si n ne dépasse pas 6, le gain du joueur restera inférieur à sa mise $\Rightarrow$ le joueur est perdant toujours. Donc le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 6

b. $\alpha \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow X(\Omega) = \{30n-200, 20n-200, 10n-200, -200\}$

• $p(X = 20n-200) = p(B) = \dfrac{9n+18}{5(n+3)(n+2)}$

• $p(X = 10n-200) = p(A) = \dfrac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$

• $p(X = 30n-200)$ correspond à la probabilité pour que $\alpha = 0$. Pour que $\alpha = 0$, il faut tirer 2 boules noires de l'urne 1 vers 2 puis tirer 2 boules blanches de l'urne 2 vers 1. Ainsi $p(X = 30n-200) = \dfrac{C_3^2}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{5(n+3)(n+2)}$

• $p(X = -200)$ correspond à la probabilité pour que $\alpha = 3$. Pour que $\alpha = 3$, il faut soit tirer 2 boules blanches de l'urne 1 vers 2 puis tirer 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 2 vers 1 ou soit tirer 1 boule blanche et 1 boule noire de l'urne 1 vers 2 puis tirer 2 boules noires de l'urne 2 vers 1. Ainsi $p(X = -200) = \dfrac{C_n^2}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_4^1 \times C_1^1}{C_5^2} + \dfrac{C_n^1 \times C_3^1}{C_{n+3}^2} \times \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{2n^2+n}{5(n+3)(n+2)}$

On vérifie que : $\dfrac{9n+18}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{3}{5(n+3)(n+2)} + \dfrac{2n^2+n}{5(n+3)(n+2)} = \dfrac{5(n^2+5n+6)}{5(n^2+5n+6)} = 1$

c. $E(X) = \sum_{\alpha=0}^{3} [10n(3-\alpha)-200] p(X = 10n(3-\alpha)-200) = \dfrac{2(3n^2-73n-300)}{n+3}$

Exercice 2

1-a. Pour $x \in [0,1]$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$U_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1$. Ainsi $U_0 = \ln(1+\sqrt{2})$

b. $U_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = [\sqrt{1+x^2}]_0^1$. D'où $U_1 = -1+\sqrt{2}$

2-a. Pour $n \geq 0$, $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1)\,\mathrm{d}x$. Or pour $x \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1)$ est négative. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}(x-1)\,\mathrm{d}x \leq 0$ (intégrale sur un segment d'une fonction négative). Alors $U_{n-1} - U_n \leq 0$ et on déduit que (U_n) est décroissante.
Pour $n \geq 0$, $U_n \geq 0$ car il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive donc (U_n) est minorée par 0. (U_n) est décroissante et minorée par 0, on conclut alors qu'elle est convergente.

b. Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$
Or $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ alors on déduit que pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ (1)
En utilisant (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

3-a. Pour $n \geq 3$, $U_n + U_{n-2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
D'où pour $n \geq 3$, $U_n + U_{n-2} = I_n$
Intégration par parties : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \times \sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{U_n}{n-1}$
Comme $U_n + U_{n-2} = I_n$ alors $U_n + U_{n-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n-1} - \dfrac{U_n}{n-1}$. D'où $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 3$

b. (U_n) est décroissante alors $U_{n-2} \geq U_n \Rightarrow nU_n + (n-1)U_{n-2} \geq (2n-1)U_n$. D'où pour $n \geq 3$, $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2)

c. De (1), on déduit que : $\dfrac{2n-1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq (2n-1)U_n$ puis en utilisant (2), on déduit que $\dfrac{2n-1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{(n+1)\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)U_n = \sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $(2n-1)U_n = 2nU_n - U_n$

Problème

A/ 1. Comme f laisse invariant A et B alors la droite (AB) est invariante par f.
$X_B = \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = X_A$; $Y_B = \sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -Y_A$
(AB) a pour équation $x = \dfrac{1}{2}$. Ainsi (OC) est perpendiculaire à (AB) et le milieu de $[OC] \in (AB)$. On conclut alors que f est la symétrie orthogonale d'axe $x = \dfrac{1}{2}$

2. Pour $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f(M)$, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{e}_1 \Rightarrow y' = y$. En plus le milieu de $[MM'] \in (AB)$ alors $\dfrac{x'+x}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x' = -x+1$. D'où $\begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = y \end{cases}$
$x' + iy' = (-x+1) + iy \Rightarrow Z' = -\overline{Z} + 1$

3. Le cercle γ de centre C et de rayon 1 a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$
$M' = f(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = -x'+1 \\ y = y' \end{cases}$ Ainsi $M \in \gamma \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ ou encore $x'^2 + y'^2 = 1$
Ainsi γ' a pour équation $x^2 + y^2 = 1$

B/ 1-a. $Z_A = \mathrm{e}^{i\pi/3} \Rightarrow$ l'affixe de $F(A)$ est $\mathrm{e}^{2i\pi/3} + 1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F(A) = A$
$Z_B = \mathrm{e}^{5i\pi/3} \Rightarrow$ l'affixe de $F(B)$ est $\mathrm{e}^{10i\pi/3} + 1 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F(B) = B$
L'affixe de $F(O)$ est $1 \Rightarrow F(O) = C$

b. Soit M tel que $F(M) = M$ alors $z = z^2 + 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0$. Les solutions sont $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc seuls les points A et B sont invariants par F.

2-a. Soit $M(x,y)$ alors l'affixe de M s'écrit $Z = x + iy = (x-1) + iy + 1$. On pose $Z_0 = (x-1) + iy$ alors $Z = Z_0 + 1$. Or tout nombre complexe non nul admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. Donc il existe z_1 et z_2 tel que $z_1 = -z_2$ et $Z_0 = z_1^2 = z_2^2$. On considère alors les points m_1 et m_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Les points m_1 et m_2 sont bien distincts, symétriques par rapport à O et sont par définition sont les antécédents de M.
D'où tout point M de P, à l'exception du point C, admet par F deux antécédents distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à O.

b-b_1 $z_1 = -z_2 \Rightarrow Om_1^2 = Om_2^2$. De plus $Om_1^2 = |z_1|^2 = |Z-1| = CM$. D'où $Om_1^2 = Om_2^2 = CM$

b_2 Notons α une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{CM})$.

$z_1^2 = Z-1 \Rightarrow angz_1 = \frac{1}{2}ang(z_1^2) = \frac{1}{2}ang(Z-1) + 2k\pi$. Or $ang(Z-1) = \alpha$ alors $angz_1 = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_2 = -z_1 \Rightarrow angz_2 = \frac{1}{2}ang(-(Z-1)) + 2k'\pi = \frac{1}{2}ang(Z-1) + \pi + 2k'\pi$. D'où $angz_2 = \frac{\alpha}{2} + \pi + 2k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$

c. $\vec{u}$ a ses coordonnées sous la forme de : $\vec{u} = k\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. On déduit alors que :

• (D) a pour équation $\sin\frac{\alpha}{2}x - \cos\frac{\alpha}{2}y = 0$

• (D') a pour équation $\cos\frac{\alpha}{2}x + \sin\frac{\alpha}{2}y = 0$

• $Q \in (D')$ et $OQ = 1$ alors on peut prendre $Z_Q = i\,e^{i\alpha/2}$

• $N \in (D')$; $ON = CM$ et N se trouve au côté opposé de Q alors on peut prendre $Z_N = -iCM\,e^{i\alpha/2}$

• Notons I le milieu de $[QN]$ alors $Z_I = i\frac{1-CM}{2}e^{i\alpha/2}$. Ainsi (Γ) a pour équation $|z - Z_I|^2 = \frac{(1+CM)^2}{4}$

• Montrons que m_1 et m_2 appartiennent à (D). On a : $z_1^2 = z_2^2 = Z-1$ et d'après **B/ 2-b**, $z_1 = \sqrt{CM}\,e^{i\alpha/2}$ et $z_2 = -\sqrt{CM}\,e^{i\alpha/2}$. Ainsi $x_{m_1} = \sqrt{CM}\cos\frac{\alpha}{2}$ et $y_{m_1} = \sqrt{CM}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}x_{m_1} - \cos\frac{\alpha}{2}y_{m_1} = 0$ donc $m_1 \in (D)$

De même $x_{m_2} = -\sqrt{CM}\cos\frac{\alpha}{2}$ et $y_{m_2} = -\sqrt{CM}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}x_{m_2} - \cos\frac{\alpha}{2}y_{m_2} = 0$ donc $m_2 \in (D)$

• Montrons que m_1 et m_2 appartiennent au cercle (Γ) :

$|z_1 - Z_I|^2 = \left|\sqrt{CM}\,e^{i\alpha/2} - i\frac{1-CM}{2}e^{i\alpha/2}\right|^2 = \left|\sqrt{CM} - i\frac{1-CM}{2}\right|^2 = CM + \frac{(1-CM)^2}{4} = \frac{(1+CM)^2}{4}$ ainsi $m_1 \in (\Gamma)$

De même $|z_2 - Z_I|^2 = \left|-\sqrt{CM}\,e^{i\alpha/2} - i\frac{1-CM}{2}e^{i\alpha/2}\right|^2 = \left|-\sqrt{CM} - i\frac{1-CM}{2}\right|^2 = \frac{(1+CM)^2}{4}$ ainsi $m_2 \in (\Gamma)$

On vient de démontrer que les points m_1 et m_2 appartiennent à la fois au cercle (Γ) et à la droite (D). Or un cercle coupe une droite au maximum en 2 points. D'où m_1 et m_2 sont les seuls points d'intersection entre (Γ) et (D).

En conclusion : (Γ) coupe (D) en m_1 et m_2

3. Soit $m(z)$ et $M(Z) = F(m)$ alors $Z = z^2 + 1 \Rightarrow z^2 = Z - 1$.

Ainsi $m(z) \in (\gamma') \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ ou encore $|z^2| = 1 \Leftrightarrow |Z-1| = 1$

Ainsi $m(z) \in (\gamma') \Leftrightarrow |Z-1|^2 = 1$. D'où $F(\gamma') = \gamma$

4-a. $M = F(m) \Rightarrow Z = z^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} X = x^2 - y^2 + 1 \\ Y = 2xy \end{cases}$

b. • Exprimons dans un premier temps x et y en fonction de X et Y

$\begin{cases} X = x^2 - y^2 + 1 \\ Y = 2xy \end{cases} \Rightarrow (X-1)^2 + Y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \Rightarrow (X-1)^2 + Y^2 = (x^2+y^2)^2$ ou encore $x^2 + y^2 = \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}$

Ainsi on a : $\begin{cases} X - 1 = x^2 - y^2 \\ \sqrt{(X-1)^2 + Y^2} = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(X - 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2})}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}}$

• Image de l'axe des abscisses :

$m \in$ l'axe des abscisses si $y = 0 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}} = 0$ ou encore $(X-1)^2 + Y^2 = (X-1)^2$

Ainsi $m \in$ l'axe des abscisses $\Leftrightarrow Y = 0$. D'où l'image de l'axe des abscisses par F est l'axe des abscisses.

• Image de l'axe des ordonnées :

$m \in$ l'axe des ordonnées si $x = 0 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}(X - 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}} = 0$ ou encore $(X-1)^2 + Y^2 = (X-1)^2$

Ainsi $m \in$ l'axe des ordonnées $\Leftrightarrow Y = 0$. D'où l'image de l'axe des ordonnées par F est l'axe des abscisses.

c. Notons Σ l'ensemble cherché.

Si $m \in \Sigma$ alors $M = F(m) \in$ à l'axe des abscisses. Ainsi si $m \in \Sigma$ alors $Y = 0 \Rightarrow 2xy = 0$. D'où $x = 0$ ou $y = 0$.

D'où l'ensemble des points du plan dont l'image par F appartient à l'axe des abscisses est la réunion de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

5-a. Soient $m(x,y)$ et $M(X,Y)$ tel que $M = F(m)$.

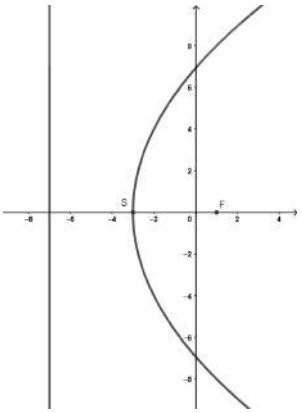
$m \in (\Delta) \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}} = 2$.

Or $\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}} = 2 \Rightarrow -X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2} = 8$ puis $(X-1)^2 + Y^2 = (X+7)^2$ et en développant on déduit que $\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-X + 1 + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}} = 2 \Leftrightarrow Y^2 = 16(X+3)$

Ainsi $m \in (\Delta) \Leftrightarrow Y^2 = 16(X+3)$. D'où l'image de (Δ) par F est la courbe (C) d' equation $y^2 = 16(x+3)$.

b. Cette courbe est une parabole d'axe $(0x)$, de sommet $(-3,0)$, de foyer $F(1,0)$ et de directrice $x = -4$

c.



Correction BAC C-E Togo 2013

Exercice 1

1. Notons $(E) : 4z^4+3z^2+1=0$. On pose $Z=z^2$, $(E) \Leftrightarrow (E') : 4Z^2+3Z+1=0$;

$\Delta = (\sqrt{7}i)^2 \Rightarrow Z_1 = \dfrac{-3-i\sqrt{7}}{8}$ et $Z_2 = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{8}$

• $z^2 = \dfrac{-3-i\sqrt{7}}{8} \Rightarrow z_1 = \dfrac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = -\dfrac{1-i\sqrt{7}}{4}$

• $z^2 = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{8} \Rightarrow z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}$ et $z_4 = -\dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}$

D'où l'ensemble des solutions de E est : $S=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ avec z_1,z_2,z_3,z_4 définis plus haut

On remarque facilement que : $z_1=\overline{z}_3$ et $z_2=\overline{z}_4$

2. D'après **1.**, $4z^4+3z^2+1 = 4(z-z_1)(z-z_3)(z-z_2)(z-z_4)$ or $2(z-z_1)(z-z_3) = 2z^2-z+1$ et $2(z-z_2)(z-z_4) = 2z^2+z+1$

D'où $4z^4+3z^2+1 = (2z^2+z+1)(2z^2-z+1)$

3. • $b \in \mathbb{N}$ et $b \geq 5$. Notons N ce nombre. Si N à pour écriture $\overline{40301}$ dans la base b alors $N = 4b^4+3b^2+1$ en base 10.

De même, si un nombre a pour écriture $N_0 = \overline{211}$ dans la base b alors $N_0 = 2b^2+b+1$ dans la base 10.

D'après la question précédente, $N = N_0 \times N_1$ avec $N_1 = 2b^2-b+1 \Rightarrow N$ est un multiple de N_0.

D'où dans tout système de numération de base b supérieure ou égal à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$

• $b=9$; $N=26488$, $N_0=172$ et $N=154$. En base 9, $N_1 = \overline{181}$. Le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$ en base 9 est $\overline{181}$

Exercice 2

1. Le déterminant du système associé à f_u est : $1 \neq 0 \Rightarrow f_u$ est bijective.

Soient $M \in (P)$ et $M' = f_u(M) \Rightarrow x' = x+2u$ et $y' = ux+y+u^2$. Par suite $x' = x+2u \Rightarrow x = x'-2u$ et $y' = ux+y+u^2 \Rightarrow y = y'-ux'+u^2$. D'où f_u^{-1} a pour écriture analytique : $\begin{cases} x' = x-2u \\ y' = -ux+y+u^2 \end{cases}$

2. $M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$ ou encore $-ux'+y'+u^2 = \dfrac{(x'-2u)^2}{4}$ or $\dfrac{(x'-2u)^2}{4} = \dfrac{x'}{4}+u^2-ux'$

D'où pour $M'(x',y') = f_u(M)$, $M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y' = \dfrac{x'^2}{4} \Leftrightarrow M' \in \Gamma$. Par suite Γ est globalement invariante par f_u

3-a Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M_n \in \Gamma$:

• $O \in \Gamma$ alors $M_1 = f_{\frac{1}{2}}(O) \in \Gamma$ d'après la question précédente. Donc le résultat à l'ordre 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ alors $M_n = f_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1}) \in \Gamma$.

$M_{n+1} = f_{\frac{1}{2^{n+1}}}(M_n) \in \Gamma$ d'après la question **2.** et l'hypothèse de récurrence.

D'où pour tout entier naturel n, $M_n \in \Gamma$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $M_k = f_{\frac{1}{2^k}}(M_{k-1}) \in \Gamma$ alors $\begin{cases} x_k = x_{k-1}+1/2^{k-1} \\ y_k = x_k/2^k + y_k + 1/2^{2k} \end{cases}$

• $x_k = x_{k-1} + \dfrac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ puis $\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}}$. Or $\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1}) = x_n - x_1 = x_n - 1$ et $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

• $y_k = \dfrac{x_{k-1}}{2^k} + y_{k-1} + \dfrac{1}{2^{2k}} \Rightarrow y_k - y_{k-1} = \dfrac{2}{2^k} - \dfrac{1}{2^k 2^{k-2}} + \dfrac{1}{2^{2k}}$. Par suite $y_k - y_{k-1} = \dfrac{2}{2^k} - \dfrac{3}{2^{2k}}$ puis en sommant cette égalité on a : $\sum_{k=2}^{n}(y_k-y_{k-1}) = 2\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^k} - 3\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^{2k}}$ or $\sum_{k=2}^{n}(y_k-y_{k-1}) = y_n - y_1 = y_n - \dfrac{1}{4}$; $2\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^k} = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{12}\left(1-\dfrac{1}{2^{2(n-1)}}\right) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{3\times 2^{2n}}$. D'où $y_n = 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{2n}}$

NB : On vérifie qu'on a bien $y_n = \dfrac{x_n^2}{4}$ pour tout entier naturel non nul (Les $M_n \in \Gamma$)

c. D'après la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$. Lorsque n tend vers l'infini, les points M_n convergent vers le point de coordonnées $(2,1)$

d. Par définition, $X_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}} = 2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n\times 2^{n-1}}$. D'où $X_n = 2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n\times 2^{n-1}}$

$Y_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k}{n} = 1-\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{2k}} = 1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n\times 2^{n-1}}+\dfrac{1}{3n}-\dfrac{1}{3n\times 2^{2n}}$. D'où $Y_n = 1-\dfrac{5}{3n}+\dfrac{1}{n\times 2^{n-1}}-\dfrac{1}{3n\times 2^{2n}}$

e. D'après la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 1$. Lorsque n tend vers l'infini, les points G_n convergent vers le point de coordonnées $(2,1)$

4-a. Γ est une parabole alors pour tout $M_0(x_0,y_0)\in\Gamma$, la tangente à Γ au point M_0 a pour équation $x_0x = p(y+y_0)$ avec $p=2$ dans notre cas. On déduit alors que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

• La tangente (T_n) à Γ au point $M_n(x_n,y_n)$ a pour équation : $2y = \left[2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]x - 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{2n}}\right]$

• La tangente (T_{n+1}) à Γ au point $M_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ a pour équation : $2y = \left[2-\dfrac{1}{2^{n}}\right]x - 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n}}+\dfrac{1}{2^{2(n+1)}}\right]$

Par suite, $I_n\in(T_n)\cap(T_{n+1}) \Rightarrow \left[2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]X'_n - 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{2n}}\right] = \left[2-\dfrac{1}{2^{n}}\right]X'_n - 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n}}+\dfrac{1}{2^{2(n+1)}}\right]$

Ainsi $-\dfrac{1}{2^n}X'_n = 2\left[-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{3}{2^{2n+2}}\right] \Rightarrow X'_n = 2-\dfrac{3}{2^{n+1}}$

On déduit alors : $2Y'_n = \left[2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]\left[2-\dfrac{3}{2^{n+1}}\right] - 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{2n}}\right] \Rightarrow 2Y'_n = 2+\dfrac{1}{2^{2n}}-\dfrac{6}{2^{n+1}}$. D'où $Y'_n = 1+\dfrac{1}{2^{2n+1}}-\dfrac{6}{2^{n+2}}$

En conclusion, le point I_n, intersection des tangentes à Γ aux points M_n et M_{n+1}, a pour coordonnées $X'_n = 2-\dfrac{3}{2^{n+1}}$ et $Y'_n = 1+\dfrac{1}{2^{2n+1}}-\dfrac{6}{2^{n+2}}$

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(X'_n-2)^2 = \left[2-\dfrac{3}{2^{n+1}}-2\right]^2 = \dfrac{9}{2^{2(n+2)}} = \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{2^{2n+1}}$. D'où $\dfrac{1}{2^{2n+1}} = \dfrac{2}{9}(X'_n-2)^2$

c. $X'_n = 2-\dfrac{3}{2^{n+1}} = 2-\dfrac{6}{2^{n+2}} \Rightarrow \dfrac{6}{2^{n+2}} = 2-X'_n$ puis on déduit, en utilisant aussi la question précédente que :

$Y'_n = 1+\dfrac{2}{9}(X'_n-2)^2+(X'_n-2) \Rightarrow Y'_n = \dfrac{1}{9}[2X'^2_n+X'_n-1]$. D'où les points I_n appartiennent à la parabole Γ' d'équation $y=\dfrac{1}{9}[2x^2+x-1]$

d. $\dfrac{1}{9}[2x^2+x-1] = \dfrac{2}{9}\left[\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{2}{9}\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$. Par conséquent Γ' a pour équation $y+\dfrac{1}{8} = \dfrac{2}{9}\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2$

D'où Γ' a pour paramètre $p=\dfrac{9}{4}$, de sommet $S(-1/4,-1/8)$, d'axe focal $x=-\dfrac{1}{4}$, de directrice $y=-\dfrac{5}{4}$ et de foyer $F(-1/4,1)$

Problème

I/ 1. Posons $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$. $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = -\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = -\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = -\varphi'(0) = 1.$

D'où $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$

2. Pour $x\in]0,1]$, $g(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}x\ln x$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0}x\ln x = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to0}g(x) = 0 = g(0)$. D'où g est continue en 0 et par conséquent on conclut que g est continue sur $[0,1]$

3. • Dérivabilité de g en 0 :

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\ln x \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty \Rightarrow g$ n'est pas dérivable en 0. D'où g est dérivable sur $]0,1]$

• Dérivée de g :

Pour $x\in]0,1]$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$. D'où $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}(x\ln x+\mathrm{e}^x-1)$ pour $x\in]0,1]$

4-a. f est deux fois dérivable sur $]0,1]$ et on a : $f'(x) = \mathrm{e}^x+\ln x+1$; $f''(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x}$

Pour $x\in]0,1]$, $f''(x)>0 \Rightarrow f'$ est strictement croissante sur $]0,1]$

$f'(1) = \mathrm{e}+1>0$ et $\lim\limits_{x\to0}f'(x) = -\infty$. En utilisant le fait que f' est strictement croissante sur $]0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que f' s'annule une seule fois sur $]0,1]$ en un point x_0

b. • On déduit d'après ce qui précède que : pour $x\in]0,x_0]$, $f'(x)\le0$ et pour $x\in[x_0,1]$, $f'(x)\ge0$

• On déduit alors que f est strictement décroissante sur $]0,x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0,1]$

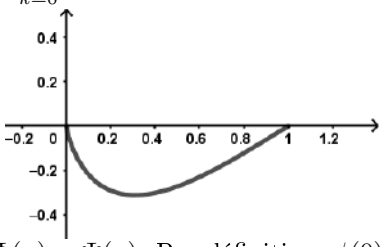
$\lim\limits_{x\to0}f(x) = 0 \Rightarrow f(x_0)<0$ (car f est décroissante sur $]0,x_0]$) et $f(1) = \mathrm{e}-1>0$. Par conséquent, on déduit que f s'annule une seule fois sur $]x_0,1]$ pour une valeur x_1 (f est strictement croissante sur $]x_0,1]$ et f ne s'annule pas sur $]0,x_0]$ puisque $\forall x\in]0,x_0]$, $f(x)<f(0)=0$)

5 & 6. Voir la page suivante.

II/ 1. $\forall x\in(0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!}$. Pour $x\in[0,1]$, φ_n est dérivable de dérivée $\varphi'_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k\dfrac{x^{k-1}}{k!}$.

Et par suite $\varphi_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^k}{k!} = -\varphi_{n-1}(x)$. D'où $\varphi_n'(x) = -\varphi_{n-1}(x)$

x	0	x_1	1
$g'(x)$	‖	$-$ $\quad 0$	$+$
$g(x)$	0 ↘	$g(x_1)$	↗ 0



2-a. Pour tout $x \in [0,1]$, notons $\phi(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$. Par définition, $\phi(0) = 0$ car $\Phi(0) = \Psi(0)$ et pour tout $x \in]0,1]$, $\phi'(x) = \Phi'(x) - \Psi'(x) \leq 0$ car $\forall x \in]0,1]$, $\Phi'(x) \leq \Psi'(x)$ donc ϕ est décroissante sur $[0,1]$. Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\phi(x) \leq \phi(0) = 0$. D'où $\forall x \in [0,1]$, $\Phi(x) \leq \Psi(x)$

b. Montrons par récurrence sur n que $\forall x \in [0,1]$; $\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$. On pose $\Psi(x) = \mathrm{e}^{-x}$

• Pour $n = 0$, on a clairement $\varphi_0(x) = 1 \geq \mathrm{e}^{-x}$ (*)

$\varphi_1(0) = \Psi(0) = 1$ et $\varphi_1'(x) = -\varphi_0(x) \leq -\mathrm{e}^{-x} = \Psi'(x)$ (En utilisant (*)) $\Rightarrow \varphi_1'(x) \leq \Psi'(x)$ pour tout $x \in]0,1]$ puis on déduit d'après la question précédente que $\varphi_1(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ (**). De (*) et (**), on conclut que $\varphi_1(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_0(x)$

• Supposons que ces inégalités restent vraies jusqu'à un ordre $n \geq 0$ et montons que cela reste vrai à l'ordre $n+1$

$\varphi_{2n+2}(0) = \Psi(0)$ et $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_{2n+2}'(x) = -\varphi_{2n+1}(x)$ or $\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ par hypothèse de récurrence

$\Rightarrow \varphi_{2n+2}'(x) \geq -\mathrm{e}^{-x} = \Psi'(x)$. Par conséquent, $\varphi_{2n+2}(x) \geq \mathrm{e}^{-x}$ (***) d'après la question **2-a.**

De même $\varphi_{2n+3}(0) = \Psi(0)$ et $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_{2n+3}'(x) = -\varphi_{2n+2}(x) \leq -\mathrm{e}^{-x} = \Psi'(x)$ d'après (***). On déduit, en utilisant **2-a.**, que $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_{2n+3}(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ (****). D'où $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_{2n+3}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n+2}(x)$. Donc vraies à l'ordre $n+1$.

D'où pour tout entier naturel n et pour tout x de $[0,1]$; $\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$

c. Pour tout n et pour tout $x \in]0,1]$, $\varphi_{2n+1}(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$, $(1-\varphi_{2n+1}(x))\ln x \leq (1-\mathrm{e}^{-x})\ln x \leq (1-\varphi_{2n}(x))\ln x$

D'où pour tout n et pour tout $x \in]0,1]$, $[1-\varphi_{2n+1}(x)]\ln x \leq g(x) \leq [1-\varphi_{2n}(x)]\ln x$ (pour $x \in]0,1]$, $\ln x \leq 0$)

III/ 1. Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^n$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et une primitive de $v'(x)$ est $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

D'où pour tout entier naturel n, $I_n(\alpha) = \dfrac{\alpha^{n+1}}{n+1}\left[\dfrac{1}{n+1} - \ln\alpha\right] - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

2. On déduit d'après **III/ 1.** que, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$

3. $\forall x \in [0,1]$, $[1-\varphi_{2n+1}(x)]\ln x \leq g(x) \leq [1-\varphi_{2n}(x)]\ln x$ alors en intégrant les inégalités précédentes, on a :

$$\int_\alpha^1 [1-\varphi_{2n+1}(x)]\ln x\,\mathrm{d}x \leq \int_\alpha^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\alpha^1 [1-\varphi_{2n}(x)]\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I_0(\alpha) - \int_\alpha^1 \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\ln x\,\mathrm{d}x \leq \int_\alpha^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq I_0(\alpha) - \int_\alpha^1 \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\ln x\,\mathrm{d}x$$

Puis $I_0(\alpha) - \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^k}{k!}I_k(\alpha) \leq \displaystyle\int_\alpha^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq I_0(\alpha) - \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}I_k(\alpha)$

D'où $-\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\dfrac{(-1)^k}{k!}I_k(\alpha) \leq \displaystyle\int_\alpha^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq -\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}I_k(\alpha)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I_k(\alpha) = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$ alors $\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\dfrac{(-1)^k}{k!}\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2}$

4. En utilisant l'indication, on déduit que l'aire $\mathcal{A}$ du domaine Δ est égale à $\mathcal{A} = \left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right| \times 10 \times 10\ cm^2$

L'aire $\mathcal{A}$ est encadrée à 10^{-1} près si $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2}\right| \times 100 = \dfrac{100}{(2n+1)!(2n+2)^2} \leq 10^{-1}$

Donc $n_0 = 2$ convient. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2} \approx -0.20343$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2} \approx -0.20319$

Par suite $20.319 \leq \mathcal{A} \leq 20.343$ (en cm^2)

Correction BAC C-E Togo 2014

Exercice 1

1-a. $a=2$ ou $a=3$ et $b=2$ ou $b=4$ alors $X(\Omega)=\{-12,-7,-4,1\}$
Loi de probabilité :

- $p(X)=-12$: C'est la probabilité qui correspond à $a=2$ et $b=4 \Rightarrow p(X=-12)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{6}$
- $p(X)=-7$: C'est la probabilité qui correspond à $a=3$ et $b=4 \Rightarrow p(X=-7)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{3}$
- $p(X)=-4$: C'est la probabilité qui correspond à $a=2$ et $b=2 \Rightarrow p(X=-4)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{6}$
- $p(X)=1$: C'est la probabilité qui correspond à $a=3$ et $b=2 \Rightarrow p(X=1)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{3}$

On vérifie que : $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=1$

b. (E) admet pour solution générale une fonction non sinusoïdale si $a^2-4b\geq 0$. D'où la probabilité demandée est $p=\dfrac{1}{3}$

2. Pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale, il faut que $a^2-4b\geq 0$ soit $a=3$ et $b=2$.
Lors de n lancés, la probabilité de ne pas avoir $a=3$ et $b=2$ est : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Ainsi $p(Y\geq 1)$ qui est la probabilité pour qu'on obtienne au moins une fois $a=3$ et $b=2$ est : $p(Y\geq 1)=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Ainsi $p(Y\geq 1)\geq 0.999 \Rightarrow 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\geq 0.999 \Rightarrow n\ln(2/3)\leq -3\ln 10$ ou encore $n\geq -\dfrac{3\ln(10}{\ln(2/3)}\simeq 17.04$
D'où le plus petit n tel la probabilité de l'événement $\{(Y\geq 1)\}$ est supérieure ou égale à $0,999$ est $n=18$

3-a. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{(1-x\ln x)\,\mathrm{e}^{-x}}{x}$. De même f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x)=\dfrac{(-2x-1+x^2\ln x)\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$. Ainsi $f''(x)+3f'+2f=\dfrac{(-2x-1+x^2\ln x+3x-3x^2\ln x+2x^2\ln x)\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$.
D'où f est solution de (E')

b. L'équation caractéristique de $(E_{(3,2)})$ est : $r^2+3r+2=0$. $\Delta=1$ et les solutions sont $r_1=-2$ et $r_1=-1$
Ainsi les solutions de $(E_{(3,2)})$ sont les fonctions $x\mapsto A\,\mathrm{e}^{-2x}+B\,\mathrm{e}^{-x}$ avec A et $B\in\mathbb{R}$

c. Soit g deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$;
g solution de $(E')\Leftrightarrow g''(x)+3g'+2g=\dfrac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$ or d'après **3-a.**, $f''(x)+3f'+2f=\dfrac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi
g solution de $(E')\Leftrightarrow g''(x)+3g'+2g=f''(x)+3f'+2f$ ou encore $(g-f)''(x)+3(g-f)'(x)+2(g-f)(x)=0$ ce qui signifie que $g-f$ est solution de $(E_{(3,2)})$. Par suite g est solution de (E') si et seulement si $g-f$ est solution de $(E_{(3;2)})$.

d. D'après la question précédente, si g est solution de (E') alors $g-f$ est sous la forme : $g(x)-f(x)=A\,\mathrm{e}^{-2x}+B\,\mathrm{e}^{-x}$
Ainsi $g(x)=A\,\mathrm{e}^{-2x}+B\,\mathrm{e}^{-x}+f(x)$ avec A et $B\in\mathbb{R}$
D'où les solution de (E') sont les fonctions : $x\mapsto A\,\mathrm{e}^{-2x}+B\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\ln x$ avec A et $B\in\mathbb{R}$

Exercice 2

1-a. $Z'=\dfrac{1}{2}(Z+i\overline{Z})+i-1 \Rightarrow \begin{cases} x'=(x+y)/2-1 \\ y'=(x+y)/2+1 \end{cases}$

b. $g(M)=M \Rightarrow \begin{cases} x=(x+y)/2-1 \\ y=(x+y)/2+1 \end{cases} \Rightarrow y=x+2$. D'où (D) a pour équation $y=x+2$

c. Soit $H=g(M)$ alors $x'=\dfrac{x+y}{2}-1$ et $y'=\dfrac{x+y}{2}+1 \Rightarrow y'=x'+2$ d'où $H\in(D)$
On a : $\overrightarrow{MH}=(x'-x)\vec{u}+(y'-y)\vec{v}=-\left(\dfrac{x-y}{2}+1\right)\vec{u}+\left(\dfrac{x-y}{2}+1\right)\vec{v}=\left(\dfrac{x-y}{2}+1\right)(-\vec{u}+\vec{v})$
Ainsi $\overrightarrow{MH}$ garde une direction fixe qui est celle de $\vec{w}=(-1,1)\Rightarrow (MH)$ est dirigée par $\vec{w}=(-1,1)$. Or (D) a pour équation $-x+y-2=0\Rightarrow(-1,1)$ est un vecteur normal de (D). D'où (MH) est perpendiculaire à (D)

d. Pour tout point M d'image par g le point H, $H\in(D)$ et (MH) est perpendiculaire à (D) alors g la projection orthogonale sur la droite (D) d'équation $y=x+2$

2-a. $Z-Z'=Z-\dfrac{1}{2}Z-\dfrac{i}{2}\overline{Z}-i+1=\dfrac{1}{2}(Z-i\overline{Z}+2-2i)$

b. $MH^2=|Z-Z'|^2=\dfrac{1}{4}|Z-i\overline{Z}+2-2i|^2=4|Z-1|^2$ car $M\in(E)\Rightarrow|Z-i\overline{Z}+2-2i|=4|Z-1|$
Or $MF^2=|Z-1|^2$. D'où $MH=2MF$
Pour $M\in(E)$: $\dfrac{MF}{MH}=\dfrac{1}{2}$, H étant le projeté orthogonal de M sur (D). Ce qui est la définition d'une ellipse de foyer F

de directrice (D) et d'excentricité $e = 1/2$

3-a. Comme (D) est la directrice de l'ellipse (E) alors l'axe focal (Δ) est perpendiculaire à $(D) \Rightarrow (D) : x + y + c = 0$. Or (D) passe par F car F est le foyer $\Rightarrow c = -1$. D'où l'axe focal de (E) est la droite (Δ) d'équation $x + y = 1$

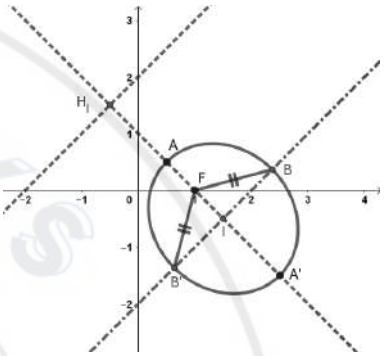
• $Z_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \Rightarrow x_A = \dfrac{1}{2}$ et $y_A = \dfrac{1}{2}$; $x_A + y_A = 1 \Rightarrow A$ appartient à l'axe focal (Δ)

De plus $Z_A - i\overline{Z}_A + 2 - 2i = 2 - 2i$ et $(Z_A - 1) = \dfrac{1}{2}i - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(2 - 2i) \Rightarrow Z_A - i\overline{Z}_A + 2 - 2i = 4(Z_A - 1)$ ou encore $|Z_A - i\overline{Z}_A + 2 - 2i| = 4|Z_A - 1|$ et $A \in (E)$. Comme est A appartient à (E) et à son axe focal (Δ) alors il est un sommet de (E)

• De même $Z_{A'} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i \Rightarrow x_{A'} = \dfrac{5}{2}$ et $y_{B'} = -\dfrac{3}{2}$; $x_{B'} + y_{B'} = 1 \Rightarrow A'$ appartient à l'axe focal (Δ)

De plus $Z_{B'} - i\overline{Z}_{B'} + 2 - 2i = 6 - 6i$ et $(Z_{A'} - 1) = -\dfrac{1}{4}(6 - 6i) \Rightarrow |Z_{B'} - i\overline{Z}_{B'} + 2 - 2i| = 4|Z_{B'} - 1|$ et $A' \in (E)$. D'où B' est aussi un sommet de (E)

c. Construction géométrique de B et B'.



Comme B et B' sont les sommets de (E) alors ils appartiennent à la droite orthogonale à l'axe focal (Δ) et passant par I ; I étant le milieu du segment $[AA']$. Or pour tout point M de (E), $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{2}$ et en particulier $\dfrac{BF}{BH_B} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{B'F}{B'H_{B'}} = \dfrac{1}{2}$. Comme (BB') est parallèle à (D) alors $BH_B = B'H_{B'} = IH_I$. Or $Z_I = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $H_I = g(I) \Rightarrow Z_{H_I} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ donc $IH_I = |Z_I - Z_{H_I}| = 2\sqrt{2}$. Donc pour construire B et B', il suffit de placer deux points sur la médiatrice de $[AA']$ et de part et d'autre de (Δ) tel que la distance entre ces points et F soit égale à $\sqrt{2}$

Problème

A/ 1-a. f_α est bien définie sur $]0, +\infty[$. Pour $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ puis on déduit que $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^\alpha} + 1 - x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'_\alpha(x) = \dfrac{-x^{\alpha+1} + 1 - \alpha \ln x}{x^{\alpha+1}} = \dfrac{N(x)}{x^{\alpha+1}}$ avec $N(x) = -x^{\alpha+1} + 1 - \alpha \ln x$

b. $N(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $N'(x) = -\dfrac{(\alpha+1)x^{\alpha+1} + \alpha}{x} < 0$. Donc N est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On vérifie facilement que $N(1) = 0$

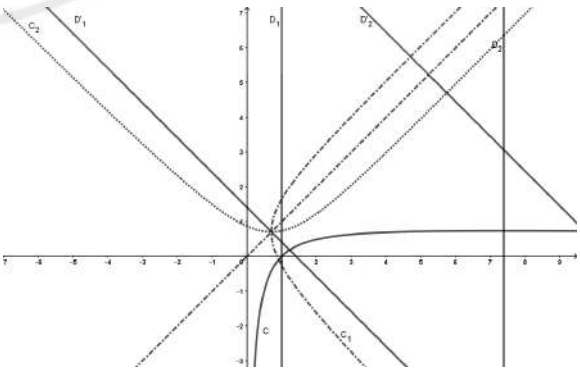
c. Pour $x \in]0, 1]$, $N(x) \geq 0 \Rightarrow f_\alpha$ est croissante sur $]0, 1[$; pour $x \in]1, +\infty[$, $N(x) \leq 0 \Rightarrow f_\alpha$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ Le point de (C_α) où l'ordonnée est maximale se situe en $x = 1$. Donc il s'agit du point $(1, 0)$

2-a. $A_\lambda = -\displaystyle\int_\lambda^1 \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x\right) \mathrm{d}x$ (Le signe $-$ car f_α est négative sur $]0, 1[$) $A_\lambda = -\displaystyle\int_\lambda^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x - \int_\lambda^1 (1 - x) \mathrm{d}x$ ainsi $A_\lambda = \lambda - \dfrac{\lambda^2}{2} - \dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_\lambda^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ Or $\displaystyle\int_\lambda^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{1}{x} \times 2\sqrt{x} \mathrm{d}x = -2\sqrt{\lambda}\ln\lambda - 4 + 4\sqrt{\lambda}$

D'où $A_\lambda = \lambda - \dfrac{\lambda^2}{2} + \dfrac{7}{2} + 2\sqrt{\lambda}\ln\lambda - 4\sqrt{\lambda}$ (en unité d'aire)

b. $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A_\lambda = \dfrac{7}{2}$

B/ 1. g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$. Pour $x \in]0, \mathrm{e}^2[$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $]0, \mathrm{e}^2[$; pour $x \in [\mathrm{e}^2, +\infty[$, $g'(x) \leq 0 \Rightarrow g$ est décroissante sur $[\mathrm{e}^2, +\infty[$. $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} g(x) = 0$.



2-a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. De plus $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$. D'où $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

b. $\vec{u} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\vec{j}$

$\vec{u}$ est l'image de $\vec{i}$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$; de même $\vec{v}$ est l'image de $\vec{j}$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. D'où R est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

c. R a pour écriture complexe $Z = \mathrm{e}^{i\pi/4}\, z$ et pour expression analytique : $\begin{cases} X = \sqrt{2}(x-y)/2 \\ Y = \sqrt{2}(x+y)/2 \end{cases}$

Soit $M(x,y)$ et $M'(X,Y)$ tel que $M' = R(M)$ alors $x = (X+Y)/\sqrt{2}$ et $y = (-X+Y)/\sqrt{2}$

• $M \in (D_1') \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow (X+Y)/\sqrt{2} = 1$ ou encore $Y = -X + \sqrt{2}$. D'où l'image de (D_1') par R est la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}$

• $M \in (D_2') \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow (X+Y)/\sqrt{2} = \mathrm{e}^2$ ou encore $Y = -X + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^2$. D'où l'image de (D_2') par R est la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^2$

3-a. Δ a pour équation $y = x$. Donc S est la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice $\Rightarrow$ S a pour écriture complexe $Z = i\overline{z} = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\overline{z}$ et R a pour écriture complexe $Z' = \mathrm{e}^{i\pi/4}\, z$. Donc $S \circ R$ a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\overline{Z'} = \mathrm{e}^{i\pi/2} \times \mathrm{e}^{-i\pi/4}\,\overline{z} = \mathrm{e}^{i\pi/4}\,\overline{z}$

b C_1 est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et C_2 est l'image de C_1 par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) (Voir la figure pour la construction)

c. Le vecteur directeur de (Δ) est le vecteur $\vec{u}$ et (D_1'); $(D'2)$ ont pour vecteur directeur le vecteur $\vec{w} = (-1,1)$. Or $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ d'où (D_1') et (D_2') sont orthogonales à (Δ).

• L'image de la droite $y = 0$ par R est la droite $y = x$. Ainsi l'image de la droite $y = 0$ par H est la droite $y = x$. De même comme (D_1') et (D_2') sont orthogonales à (Δ) alors elles sont globalement invariantes par $S \Rightarrow$ l'image de la droite $x = 1$ par H est (D_1') et celle de $x = \mathrm{e}^2$ est (D_2')

• L'aire du domaine (Γ) limite par les courbes C_1 , C_2 , (D') et (D_2') est la somme de deux aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_1$ est l'aire du domaine compris entre C_1, la droite $y = x$ et les droites (D_1') et (D_2'); $\mathcal{A}_2$ est l'aire du domaine compris entre C_2, la droite $y = x$ et les droites (D_1') et (D_2') . (Voir figure)

R et H sont des bijections $\Rightarrow$ elles conservent les aires. On note $(D_1) : x = 1$, $(D_2) : x = \mathrm{e}^2$ et $(\Omega) : y = 0$

• Comme $C_1 = R(C)$, $(D_1') = R(D_1)$, $(D_2') = R(D_2)$ et $(\Delta) = R(\Omega)$ alors l'aire $\mathcal{A}_1$ est la même que celle du domaine compris entre C, l'axe des abscisses $(y = 0)$ et les droites $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$. Ainsi en unité d'aire, $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} g(x)\ \mathrm{d}x$

• De même $C_2 = H(C)$, $(D_1') = H(D_1)$, $(D_2') = H(D_2)$ (car $(D_1') = S(D_1')$ et $(D_2') = S(D_2')$) et $(\Delta) = H(\Omega)$ alors l'aire $\mathcal{A}_2$ est la même que celle du domaine compris entre C, l'axe des abscisses $(y = 0)$ et les droites $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$. Ainsi en unité d'aire, $\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} g(x)\ \mathrm{d}x$

Par suite l'aire demandée est : $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} g(x)\ \mathrm{d}x$

En utilisant **A/ 2-a.**, on déduit qu'une primitive de $g(x)$ est $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} g(x)\ \mathrm{d}x = 4$

D'où l'aire du domaine (Γ) est égale, en unité d'aire, à 8.

C/ 1-a. Pour $k \geq 10$, g est décroissante sur $[k, k+1]$ d'après **B/ 1.**. Ainsi $\forall t \in [k, k+1]$, $g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$ puis $\displaystyle\int_k^{k+1} g(k+1)\ \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g(k)\ \mathrm{d}t$. D'où $g(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq g(k)$

b. Pour $n \neq 10$ et $k \geq 10$, $g(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq g(k)$ et en sommant pour $k = 10$ à n on a :

$\displaystyle\sum_{k=10}^{n} g(k+1) \leq \sum_{k=10}^{n}\int_k^{k+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=10}^{n} g(k) \Rightarrow \sum_{k=11}^{n+1} g(k) \leq \int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=10}^{n} g(k)$. Or $\displaystyle\sum_{k=11}^{n+1} g(k) = \sum_{k=10}^{n+1} g(k) - g(10)$

D'où pour $n \geq 10$, $U_{n+1} - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq U_n$

c. Pour $t \geq 1$, $g(t) \geq 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante. Par suite, $U_n \leq U_{n+1} \Rightarrow U_n - g(10) \leq U_{n+1} - g(10)$

Ainsi comme $U_{n+1} - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq U_n$ alors $U_n - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq U_n$

2-a. D'après ce qui précède, $U_n - g(10) \leq \displaystyle\int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq U_n \Rightarrow 0 \leq U_n - \int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t \leq g(10)$ ou encore $0 \leq V_n \leq g(10)$. D'où (V_n) est bornée.

b. Pour $n \geq 10$, $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n - \left(\displaystyle\int_{10}^{n+2} g(t)\ \mathrm{d}t - \int_{10}^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t\right) = U_{n+1} - U_n - \int_{n+1}^{n+2} g(t)\ \mathrm{d}t$

Or $U_{n+1} - U_n = g(n+1)$ et d'après **C/ 1-a.**, $g(n+2) \leq \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} g(t)\ \mathrm{d}t \leq g(n+1) \Rightarrow g(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} g(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$

Ainsi pour $n \geq 10$, $V_{n+1} - V_n \geq 0$. D'où (V_n) est croissante.

Comme (V_n) est croissante et majorée car bornée (D'après **C/ 2-a.**), alors elle converge

Correction BAC C-E Togo 2015

Exercice 1

1. $bx^2+ay^2-bx+ay+\dfrac{a+b-4ab^2}{4}=b\left[(x-1/2)^2-\dfrac{1}{4}\right]+a\left[(y+1/2)^2-\dfrac{1}{4}\right]+\dfrac{a+b-4ab^2}{4}$

Ainsi $bx^2+ay^2-bx+ay+\dfrac{a+b-4ab^2}{4}=0\Rightarrow b\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=ab^2$

Ainsi $(E_{a,b})$ a pour équation $\dfrac{(x-1/2)^2}{ab}+\dfrac{(y+1/2)^2}{b^2}=1$ donc $(E_{a,b})$ est une conique à centre de centre $\Omega(1/2,-1/2)$

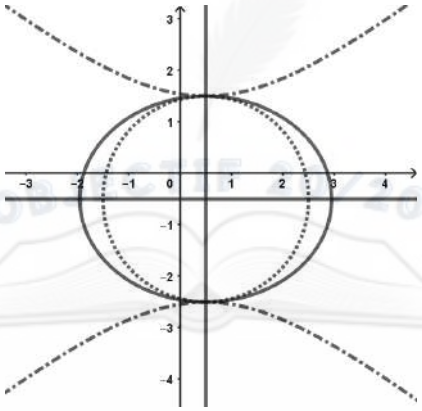
2. Se servir d'un tableau à double entrée

- $(E_{a,b})$ est cercle si $ab=b^2\Rightarrow a=b$. Ainsi $p(C)=6\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$
- $(E_{a,b})$ est ellipse non réduite à un cercle si a et b sont de même signe avec $a\neq b$. Ainsi $p(E)=12\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{3}$
- $(E_{a,b})$ est une hyperbole si a et b sont de signe différent. Ainsi $p(H)=18\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{2}$
- $(E_{a,b})$ est une hyperbole équilatère si a et b sont de signe différent avec $|a|=|b|$. Ainsi $p(H')=6\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}$

3. $(E_{3,2})$: $\dfrac{(x-1/2)^2}{6}+\dfrac{(y+1/2)^2}{4}=1$. Donc $(E_{3,2})$ a pour axe focal $y=-\dfrac{1}{2}$, de foyers $F(1/2+\sqrt{2},-1/2)$ et $F'(1/2-\sqrt{2},-1/2)$, de sommets $(1/2+\sqrt{6},-1/2)$, $(1/2-\sqrt{6},-1/2)$, $(1/2,-5/2)$ et $(1/2,3/2)$

4. $(E_{-3,2})$: $-\dfrac{(x-1/2)^2}{6}+\dfrac{(y+1/2)^2}{4}=1$. Donc $(E_{-3,2})$ a pour axe focal $x=\dfrac{1}{2}$, de foyers $F(1/2,\sqrt{10}-1/2)$ et $F'(1/2,-\sqrt{10}-1/2)$, de sommets $(1/2,-5/2)$ et $(1/2,3/2)$

5.



Exercice 2

1. f a pour écriture complexe $z_1=i\overline{z}+a+ib$; comme $|i|=1$ alors f est une isométrie.

2. f est une symétrie orthogonale si $f\circ f=Id$. Or $f\circ f$ a pour expression complexe :
$Z=i\overline{(i\overline{z}+a+ib)}+a+ib=z+i(a+b)+(a+b)$. Ainsi $f\circ f=Id$ si $a=-b$

Pour $a=-b$ et $M'=f(M)$, $\overrightarrow{MM'}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}=(y+a-x)(\vec{i}-\vec{j})\Rightarrow\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle de $(1,-1)$. De plus l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) $y=x-a$. Ainsi pour tout point $M\notin(D)$, (MM') est orthogonale à (D).

Si on choisit A de sorte que $a=-b$, f est une isométrie laissant invariant une droite et de plus pour tout point $M\notin(D)$, (MM') est orthogonale à (D). Donc f est une symétrie orthogonale d'axe $y=x-a$ pour $A(a,-a)$.

3-a. f a pour expression analytique : $\begin{cases}x'=y+a\\y'=x+b\end{cases}$. $f(M)=M\Rightarrow\begin{cases}x=y+a\\y=x+b\end{cases}$ $\Rightarrow f$ a de points invariants si $a=-b$ ce qui n'est pas le cas. Alors f n'a pas de points invariants. f étant un antidéplacement du plan n'ayant aucun point invariant alors elle est une symétrie glissée.

- Le vecteur de la symétrie glissée :

$f\circ f$ a pour écriture complexe $Z=i\overline{(i\overline{z}+a+ib)}+a+ib=z+(1+i)(a+b)$. Ainsi le vecteur de la symétrie glissée est la vecteur $\vec{u}=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2}\right)$

- L'axe de la symétrie glissée :

Notons $t_{-\vec{u}}$ la translation de vecteur $-\vec{u}$. Alors $t_{-\vec{u}}$ a pour écriture complexe $z'=z-\dfrac{b+a}{2}-i\dfrac{b+a}{2}$. Posons $S=f\circ t_{-\vec{u}}$

S a pour écriture complexe $Z'=i\overline{\left(z-\dfrac{b+a}{2}-i\dfrac{b+a}{2}\right)}+a+ib=i\overline{z}+(1-i)\dfrac{a-b}{2}$ soit une expression analytique :

$\begin{cases} x' = y + (a-b)/2 \\ y' = x - (a-b)/2 \end{cases}$. Ainsi l'ensemble des points invariants par S est la droite (Δ) d'équation $y = x - \dfrac{a-b}{2}$ (On vérifie bien que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ))

D'où l'axe de la symétrie glissée est la droite (Δ) d'équation $y = x - \dfrac{a-b}{2}$

b. Pour $p \geq 1$, montrons par récurrence que f^{2p} est une translation.

• Pour $p = 1$, d'après le premier point de la question précédente, f^2 est une translation de vecteur $(a+b, a+b)$. Donc le résultat est vrai à l'ordre $p = 1$.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $p \geq 1$ et montrons à l'ordre $p+1$:
$f^{2(p+1)} = f^{2p} \circ f^2$ or f^2 est une translation de même que f^{2p} par hypothèse de récurrence. Ainsi $f^{2(p+1)}$ est une translation. Ainsi, pour tout $p \geq 1$, f^{2p} est une translation.
Or $f^{2p} = (f^2)^p$ ainsi le vecteur de translation de f^{2p} est $(p(a+b), p(a+b))$

• Comme f est une symétrie glissée, f peut s'écrire sous la forme $f = S \circ t_{\vec{u}}$ où S est une symétrie orthogonale (Voir la question précédente). Ainsi $f^{2p+1} = f \circ f^{2p} = S \circ t_{(2p+1)\vec{u}}$. D'où f^{2p+1} est une symétrie glissée.

Problème

I/ 1. $f(x) = -1 \Rightarrow -x + \sin x = -x$. Ainsi $f(x) = -1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec $k \in 0$
Ainsi sur $[0, +\infty[$, $f(x) = -1$ pour $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

2-a. Pour $x \in]0, +\infty[$, $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -x-1 \leq -x+\sin x \leq 1-x$ puis on divise par $x > 0$, on a : $\dfrac{-1-x}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1-x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x} = -1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ d'après le théorème des gendarmes.

b. • Pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1-x}{x} \Rightarrow \sin x = 1$. Ainsi $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ si $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$

• Pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{-1-x}{x} \Rightarrow \sin x = -1$. Ainsi $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{-1-x}{x}$ si $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

c. En utilisant les questions **2-a.** et **2-b.**, on déduit que pour tout $x \in]0, +\infty[$, (C) est en dessous de (γ_2) et au dessus de (γ_1). ((C) coupe (γ_2) aux points $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ et coupe (γ_1) aux points $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$)

3. Pour $x \in]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto -x + \sin x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

4-a. Notons $\varphi(x) = \tan x - x$. φ est continue, dérivable sur $]0, \pi/2[$ de dérivée $\varphi'(x) = \tan^2(x) > 0 \Rightarrow \varphi$ est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$. Ainsi $\forall x \in]0, \pi/2[$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. D'où $\tan x - x > 0$ sur $]0, \pi/2[$

b. Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $\varphi(x) = \tan x - x$ est dérivable et $\varphi'(x) = \tan^2 x \geq 0 \Rightarrow x \mapsto \tan x - x$ est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$. De plus $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \varphi(x) = +\infty$ on conclut, d'après le théorème de valeur intermédiaire et la bijection de φ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, qu'il existe un seul x_k de $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ tel que $\varphi(x_k) = 0$ ou encore $\tan(x_k) = x_k$.
$\varphi(k\pi) = \tan(k\pi) - k\pi = -k\pi < 0$ donc $x_k > k\pi$ (puisque que φ est croissante)

c. Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{x - \tan x}{x^2/\cos x}$

• $x_1 > \pi$ et $x_1 < \dfrac{3\pi}{2}$ ainsi pour $x \in]0, \pi/2[$, $x - \tan x < 0$ et $\cos x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Pour $x \in]\pi/2, \pi[$, $x - \tan x > 0$ et $\cos x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ et pour $x \in]\pi, x_1[$, $x - \tan x > 0$ et $\cos x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0, x_1[$.

• Pour k pair, $x_{2k} \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ avec $x_{2k} > 2k\pi$ et $x_{2k+1} \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[$ avec $x_{2k+1} > (2k+1)\pi$. Ainsi pour $x \in \left]x_{2k}, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$, $x \in \left]2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\Rightarrow \cos x > 0$ et $x - \tan x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$; pour $x \in \left]\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[$, $\cos x < 0$ et $x - \tan x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$; pour $x \in]\pi + 2k\pi, x_{2k+1}[$, $\cos x < 0$ et $x - \tan x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Ainsi pour $x \in]x_{2k}, x_{2k+1}[$, $f'(x) < 0$

• Pour k impair, $x_{2k+1} \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[$ avec $x_{2k+1} > (2k+1)\pi$ et $x_{2k+2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + (2k+2)\pi; \dfrac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[$ avec $x_{2k+1} > (2k+2)\pi$. Ainsi pour $x \in \left]x_{2k+1}, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$, $x \in \left]\pi + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\Rightarrow \cos x < 0$ et $x - \tan x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$; pour $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[$, $\cos x > 0$ et $x - \tan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$; pour $x \in]2\pi + 2k\pi, x_{2k+2}[$, $\cos x > 0$ et $x - \tan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Ainsi pour $x \in]x_{2k+1}, x_{2k+2}[$, $f'(x) > 0$

Conclusion : Pour k pair, $f'(x) < 0$ sur $]x_k, x_{k+1}[$ et pour k impair, $f'(x) > 0$ sur $]x_k, x_{k+1}[$

5-a. • On pose $\phi(x) = x - \sin x$. ϕ est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $\phi'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow \phi$ et croissante sur $[0, +\infty[$, $\phi(x) \geq \phi(0) = 0$. D'où $0 \leq x - \sin x$ (*)

• Posons $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. φ est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. De même, φ' est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $\varphi''(x) = x - \sin x \geq 0$ d'après le premier point. Ainsi φ' est croissante sur $[0, +\infty[$ $\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[$, $\varphi'(x) \geq \varphi'(0) = 0$. φ est croissante sur $[0, +\infty[\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 \Rightarrow x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$ (**)

De (*) et (**), on conclut que $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

b. • f est continue en 0. En effet, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ or $f(x) = -1 + \dfrac{\sin x}{x}$. D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

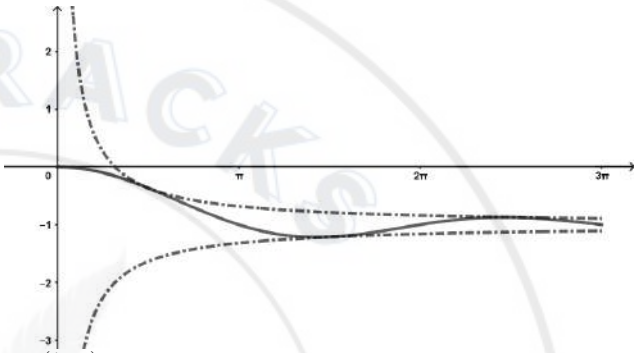
• Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-x + \sin x}{x^2}$. D'après **5-a.**, pour $x > 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6} \Rightarrow -\dfrac{x}{6} \leq \dfrac{-x + \sin x}{x^2} \leq 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. D'où f est dérivable en 0.

6-a. Tableau des variations :

b. Voir le graphe

x	0		x_1		x_2		3π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	-1



II/ 1. Pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $F(\pi) - F(\pi(1-x)) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi(1-x)} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{\pi(1-x)}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$. Faisons le changement de variable $t = \pi(1-u)$ alors $\displaystyle\int_{\pi(1-x)}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = -\int_{x}^{0} \frac{\sin(\pi(1-u))}{\pi(1-u)}\pi\, \mathrm{d}u = \int_0^x \frac{\sin(\pi(1-u))}{1-u}\, \mathrm{d}u$ or $\sin(\pi(1-u)) = \sin(\pi u)$

Ainsi $F(\pi) - F(\pi(1-x)) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(\pi u)}{1-u}\, \mathrm{d}u = G(x)$. D'où pour tout élément x de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$

• $f(x) + 1 = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow F(\pi) = J$. $G(1/2) = F(\pi) - F(\pi/2)$. Or $F(\pi/2) = 0 \Rightarrow G(1/2) = F(\pi) = J$. D'où $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$

2-a. Pour $n \geq 1$, $U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(\pi t)\, \mathrm{d}t + \cdots + \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k \sin(\pi t) = \sin(\pi t)\frac{1-t^n}{1-t} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\frac{1-t^n}{1-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\, \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$

Ainsi $U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} = J - r_n \Rightarrow J = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + r_n$

b. Pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\sin(\pi t) \leq 1$ et $\dfrac{1}{1-t} \leq 2 \Rightarrow \dfrac{\sin(\pi t)}{1-t} \leq 2$ puis $\dfrac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \leq 2t^n$ (*)

En intégrant (*) on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n\, \mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)2^n}$. Ainsi $r_n \leq \dfrac{1}{(n+1)2^n}$

c. Pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\sin(\pi t) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \geq 0$ puis $r_n \geq 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)2^n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$.

D'où $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1})$

3-a. $U_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi}$; $U_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \left[-t \times \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^{1/2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2}$

b. Pour $n \geq 2$, par intégration par parties : $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \left[-t^n \times \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^{1/2} + \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos(\pi t)\, \mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}\cos(\pi t)\, \mathrm{d}t = \left[t^{n-1} \times \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^{1/2} - \frac{n-1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-2}\sin(\pi t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi 2^{n-1}} - \frac{n-1}{\pi}U_{n-2}$. D'où $U_n = \dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right]$

4. On pose $V_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. Le **II/ 3.** nous permet d'avoir la valeur de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1})$ alors pour avoir la valeur de J à 10^{-2} près, il faut chercher n tel que $V_{n+1} - V_n = U_n$ soit plus petit que 10^{-2}. Cela revient à trouver le plus petit entier n_0 tel que $U_{n_0} \leq 10^{-2}$ et la valeur approchée de J à 10^{-2} sera : $U_0 + U_1 + \cdots + U_{n_0}$

Correction BAC C-E Togo 2016

Exercice 1

1. Par définition, $p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}$ or $p(\overline{B}) = 1-p(B)$ et $p(A\cap\overline{B}) = p(\overline{B}\cap A) = p(A)\times p(\overline{B}/A)$. On sait que $p(\overline{B}/A) = 1-p(B/A)$ alors $p(A\cap\overline{B}) = p(A)(1-p(B/A))$ (*). De plus $p(A\cap B) = p(A)\times p(B/A)$ et $p(A\cap B) = p(B)\times p(A/B)$ alors $p(B)\times p(A/B) = p(A)\times p(B/A) \Rightarrow p(B/A) = \dfrac{p(A/B)\times p(B)}{p(A)}$ et en remplaçant dans la relation (*) on déduit que $p(A\cap\overline{B}) = p(A)(1-p(B/A)) = p(A) - p(A/B)\times p(B)$ puisque $p(B)\times p(A/B) = p(A)\times p(B/A)$

D'où $p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{p(A) - p(A/B)\times p(B)}{1-p(B)}$

2-a. Notons E l'évènement : «le renard est enragé» et A l'évènement : «le renard est abattu»

La probabilité demandée est $p = p(E/\overline{A}) = \dfrac{p(E\cap\overline{A})}{p(\overline{A})} = \dfrac{p(E) - p(E/A)\times p(A)}{1-p(A)}$ (d'après la question **1.**).

- $p(E) = \dfrac{3}{10}$ et $p(A) = b$
- $p(E/A) = \dfrac{2}{5}$

D'où $p = \dfrac{0.3 - 0.4b}{1-b}$

b. $p \leq 0.1 \Leftrightarrow \dfrac{0.3-0.4b}{1-b} \leq 0.1 \Leftrightarrow 0.3 - 0.4b \leq 0.1 - 0.1b$ car $1-b > 0$. Ainsi $p \leq 0.1 \Leftrightarrow b \geq \dfrac{2}{3}$

D'où le plus petit b pour que $p \leq 0.1$ est $b_0 = \dfrac{2}{3}$

c. La probabilité que $k \geq 0$ sur 10 de ces territoires soit(ent) décontamine de la rage est égale à $C_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \times \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}$

Ainsi la probabilité demandée est : $\displaystyle\sum_{k=8}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = \frac{67}{19683} \approx 0.0034$

Exercice 2

1-a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AE}$ or $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{AE}$. D'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = -||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AD}||^2 = 0$. D'où $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$

c. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = -||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AE}||^2$ car

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = 0$. De plus $||\overrightarrow{AB}||^2 = ||\overrightarrow{AE}||^2 = 1$. D'où $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$

d. B, D et E ne sont pas alignés donc forment un plan et de plus $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs non colinéaire de (BDE). Or d'après ce qui précède, on déduit que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ (d'après **1-b.** et **1-c.**).

Comme $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ qui sont deux vecteurs non colinéaire (BDE) alors $\overrightarrow{AG}$ est normal à (BDE). D'où (AG) est orthogonale au plan (BDE)

2. I est le centre de gravité de $BDE \Rightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$ (définition vectorielle du centre de gravité)

- $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$. Comme $B \in (BDE)$ et que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs non colinéaire de (BDE) alors on conclut que I appartient à (BDE)
- De même $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$ ou encore $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires d'où A, G et I sont alignés $\Rightarrow I$ est un point de (AG).

I est alors le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

3-a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$ or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Ainsi G a pour coordonnées $(1,1,1)$.

$\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal de (BDE) alors (BDE) a une équation de la forme : $x+y+z+c=0$. De plus $B \in (BDE)$ $\Rightarrow c = -1$. D'où (BDE) a pour équation $x+y+z=1$

b. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$ or $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ donc H a pour coordonnées $(0,1,1)$.

(Δ) est orthogonale au plan $(BDE) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (1,1,1)$ est un vecteur directeur (Δ).

D'où (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c. $M \in (\Delta) \Rightarrow M(t, 1+t, 1+t)$. Ainsi si ce point $M \in (BDE)$, on a : $t+1+t+1+t = 1 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi le point d'intersection entre (Δ) et (BDE) a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

d. Dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, B, D et E ont pour coordonnées respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$
Ainsi $\overrightarrow{BE} = (-1,0,1)$ et $\overrightarrow{BD} = (-1,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE} = (1,1,1)$. D'où $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AG}$

e. • $d(H,(BDE)) = \dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Autre méthode : $d(H,(BDE)) = HJ = \sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

• Notons $\mathcal{V}$ le volume demandé : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}bh$ avec $b = surface(BDE) = \dfrac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}\right|\right| = \dfrac{||\overrightarrow{AG}||}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h = d(H,(BDE)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D'où $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}$ (En unité de volume)

Problème

I/ 1. • Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}[x - 1 + \mathrm{e}^x] = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2\ln(x)}{1+x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ (croissance comparée). Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^-} = 0 = f(0)$ d'où f est continue en 0.

• Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[1 + \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right] = 2$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = (\mathrm{e}^x)'_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x\ln x}{1+x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ donc f n'est pas dérivable en 0 (Mais f admet des nombres dérivées finis à droite et à gauche de 0)

2-a. k est définie, continue et deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $k'(x) = \dfrac{x\ln x + 2x + 2}{x}$ et $k''(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$.
Ainsi, pour $x \in]0,2[$, $k''(x) < 0 \Rightarrow k$ est strictement décroissante sur $]0,2[$ et pour $x \in [2,+\infty[$, $k''(x) \geq 0 \Rightarrow k$ est croissante sur $[2,+\infty[$

b-b_1 k est continue sur $]0,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit qu'il existe au moins un $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$
De plus, pour $x \in]0,+\infty[$, $k'(x) \geq k'(2) = 3 + \ln 2 > 0$ (d'après la question précédente) $\Rightarrow k$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Par suite k est bijective sur $]0,+\infty[$ puis on conclut que le réel α est unique. D'où l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α

b_2 $k(0.5) \simeq -0.23$ et $k(0.6) \simeq 0.27 \Rightarrow 0.5 < \alpha < 0.6$ avec $|0.6 - 0.5| = 0.1$
On déduit de ce qui précède que $k(x) \leq 0$ sur $]0,\alpha]$ et $k(x) \geq 0$ sur $[\alpha,+\infty[$

3. Les variations de f :
• Pour $x \in]-\infty,0]$, f est dérivable de dérivée : $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]-\infty,0]$
• Pour $x \in [0,+\infty[$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{-x[(x+2)\ln x + x + 1]}{(x+1)^2} = \dfrac{-xk(x)}{(x+1)^2}$. D'après les questions précédentes, on déduit que pour $x \in [0,\alpha]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0,\alpha]$ et pour $x \in [\alpha,+\infty[$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $[\alpha,+\infty[$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

Tableau des variations

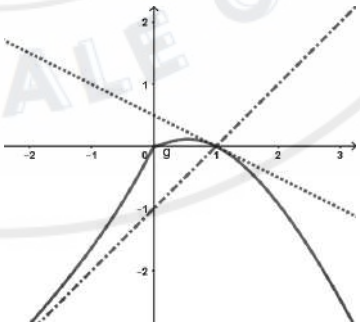


fig 1

4-a. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = -1 \Rightarrow$ la droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C) en $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ alors la branche infinie est une branche parabolique verticale.

b. (T) a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow (T)$ est la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

c. Voir *fig 1* pour la représentation graphique.

5-a. Le déterminant du système associé à F est $-1 \neq 0 \Rightarrow F$ est bijective.
Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y') = F(M)$. $\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = -2x(\vec{i}+\vec{j})$. D'où $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $\vec{u} = (1,1)$ (celle de la première bissectrice)
b. Ensemble des points invariants : Soit $M(x,y) \in P$.
$M = F(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = -2x + y \end{cases} \Rightarrow x = 0$. D'où l'ensemble des points invariants par F est la droite d'équation $x = 0$.
c. Soit I le milieu de $[MM']$ alors $x_I = \dfrac{x'+x}{2} = 0$ et $y_I = \dfrac{y'+y}{2} = -x + y$. Par suite quand M décrit P, les milieux de $[MM']$ décrivent la droite d'équation $x = 0$.
d. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{IM} = x(\vec{i}+\vec{j})$ et $\overrightarrow{IM'} = -x(\vec{i}+\vec{j}) \Rightarrow F$ est une affinité d'axe $x = 0$; de direction celle du vecteur $\vec{u} = (1,1)$ et de rapport -1. Autrement dit, F est la symétrie axiale par rapport $x = 0$ et parallèlement au vecteur $\vec{u} = (1,1)$.
e. Soit $M(x,y)$. $M'(x',y') = F(M) \Leftrightarrow x' = -x$ et $y' = -2x + y$ ou encore $x = -x'$ et $y = -2x' + y'$
• Cas où l'abscisse de M est négative c'est-à-dire $x \leq 0$:
$M \in (C) \Leftrightarrow y = x - 1 + \mathrm{e}^x$ ou encore $-2x' + y' = -x' - 1 + \mathrm{e}^{-x'}$. Ainsi pour $x \leq 0$ ($x' \geq 0$), $M \in (C) \Leftrightarrow y' = x' - 1 + \mathrm{e}^{-x'}$.
• Cas où l'abscisse de M est positive c'est-à-dire $x \geq 0$:
$M \in (C) \Leftrightarrow y = \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x}$ ou encore $-2x' + y' = \dfrac{-x'^2 \ln(-x')}{1-x'}$. Ainsi pour $x \geq 0$ ($x' \leq 0$),
$M \in (C) \Leftrightarrow y' = 2x' + \dfrac{-x'^2 \ln(-x')}{1-x'}$. D'où $(C') = F(C)$ a pour équation : $\begin{cases} y = x - 1 + \mathrm{e}^x \text{ si } x \geq 0 \\ y = 2x - \dfrac{x^2 \ln(-x)}{1-x} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
B/ 1-a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto -t^n \ln t$ est continue sur $[0,1]$ car $\lim\limits_{t \to 0^+} -t^n \ln t = 0 = g_n(0)$. D'où J_n existe.
b. Pour $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$
$J_n = \lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_x^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow J_n = \frac{1}{(n+1)^2}$
2-a.
$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t$.
Ainsi $1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-t)^n}{1+t}$. D'où $P_n(t) = 1 + (-1)^{n+1}t^n$
b. $\forall t \in [0,1]$, $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) + \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}g_{k+1}(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t^{k+1}\ln t = -\ln t \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^{k+2}$
Ainsi $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) + \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) = -t^2\ln t \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = -t^2\ln t\frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{-t^2\ln t - (-1)^{n+1}t^{n+2}\ln t}{1+t}$
Par suite $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) + \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) + (-1)^n\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} = \dfrac{-t^2\ln t - (-1)^{n+1}t^{n+2}\ln t}{1+t} + \dfrac{(-1)^{n+1}t^{n+2}\ln t}{1+t}$
D'où $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) + \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) + (-1)^n\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} = -\dfrac{t^2\ln t}{1+t} = f(t)$ (*)
On intègre les deux membres de l'égalité entre 0 et 1 (*) : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}g_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t + (-1)^n\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = J$
$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}g_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 g_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t$ par linéarité de linéarité de l'intégrale. Or $\displaystyle\int_0^1 g_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t = J_{k+1}$
Par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_{k+1} + (-1)^n\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = J$. D'où $J = J_2 - J_3 + J_4 - \cdots + (-1)^{n-1}J_{n+1} + (-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$
c. Pour $t \in]0,1]$, $-\ln t \geq 0$ et $0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{-t^{n+2}\ln t}{1+t} \leq -t^{n+2}\ln t$. Ainsi $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq -\int_0^1 t^{n+2}\ln t\,\mathrm{d}t$
Or $\displaystyle -\int_0^1 t^{n+2}\ln t\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^{n+3}}{n+3}\ln t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{n+3}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{(n+3)^2}$. D'où $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+3)^2}$
3. D'après la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$ puis que $J = \lim\limits_{x \to +\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_{k+1}$
D'après **B/ 1-b.**, $J_{k+1} = \dfrac{1}{(k+2)^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_{k+1}$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = J$

Correction BAC C-E Togo 2017

Exercice 1

1-a. Les points O, I et J sont trois points du plan non alignés et ayant des images par f_α. Par définition, toute application affine est clairement définie par la donnée de trois points du plan non alignés et leurs images. On conclut que f_α est une application affine du plan.

b. f_α est bijective si l'image d'un plan est un plan c'est-à-dire si O, A et B ne sont pas alignés. Il faut que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne soit pas colinéaire $\Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ or $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (-2\alpha - 2 + \alpha + 2)\vec{k} = -\alpha\vec{k}$. Ainsi f_α est bijective si $\alpha \neq 0$

c. Pour tout point M et N, par définition, $l_\alpha(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ avec $M' = f_\alpha(M)$ et $N' = f_\alpha(N)$. Ainsi :

- $l_\alpha(\vec{i}) = l_\alpha(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OA}$. Ainsi $l_\alpha(\vec{i}) = (\alpha+1)\vec{i} + (\alpha+2)\vec{j}$
- $l_\alpha(\vec{j}) = l_\alpha(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{OB}$. Ainsi $l_\alpha(\vec{i}) = -\vec{i} - 2\vec{j}$.
- $M(x,y) \in P$, $l_\alpha(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ or $l_\alpha(\overrightarrow{OM}) = xl_\alpha(\vec{i}) + yl_\alpha(\vec{j}) = [(\alpha+1)x - y]\vec{i} + [(\alpha+1)x - 2y]\vec{j}$

D'où f_α a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = (1+\alpha)x - y \\ y' = (2+\alpha)x - 2y \end{cases}$

2. $f_\alpha \circ f_\alpha$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = (1+\alpha)x' - y' \\ y'' = (2+\alpha)x' - 2y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = (-1+\alpha+\alpha^2)x + (1-\alpha)y \\ y'' = (-2+\alpha+\alpha^2)x + (2-\alpha)y \end{cases}$

D'où $f_\alpha \circ f_\alpha = Id_P$ si $\alpha = 1$

3. Soit $M = f_\alpha(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1+\alpha)x - y \\ y = (2+\alpha)x - 2y \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha x = y \\ 3y = (2+\alpha)x \end{cases}$ Ainsi :

- Si $\alpha = 1$, l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = x$.
- Si $\alpha \neq 1$, seul O est le seul point invariant.

4. Pour $\alpha = 1$, f_1 a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$. $f_1 \circ f_1 = Id_P$ et la droite d'équation $y = x$ est l'ensemble des points invariants d'après **2.** et **3.** ainsi f_α est une symétrie axiale.

De plus pour $M' = f(M)$, $\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = (x-y)(\vec{i} + 3\vec{j}) \Rightarrow$ pour tout point M du plan n'appartenant pas à la première bissectrice (droite $y = x$), $\overrightarrow{MM'}$ garde une directrice fixe qui est celle du vecteur $\vec{u} = (1,3)$.

D'où f_1 est la symétrie axiale par rapport à l'axe d'équation $y = x$ et parallèlement à la direction $\vec{u} = (1,3)$

5-a. f_0 a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ alors $y' = 2x'$. Ainsi la droite $(\Delta) : y = 2x$ est l'ensemble des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P

b. • Expression analytique de s : Soit $M(x',y') = s(M)$ alors $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} \Rightarrow x'\vec{i} + y'\vec{j} = -x\vec{i} - y\vec{j}$

Ainsi s a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$. De plus $s^{-1} = s$

• Supposons $f_0 = p \circ s \Rightarrow p = f_0 \circ s$. Par suite p a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = x' - y' \\ y'' = 2x' - 2y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -x + y \\ y'' = -2x + 2y \end{cases}$

Ainsi p a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$

• Montrons que p est une projection :

$p \circ p$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x'' = -x' + y' \\ y'' = -2x' + 2y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -x + y \\ y'' = -2x + 2y \end{cases}$ Ainsi $p \circ p = p$ et on conclut que p est une projection.

Soient $M \in P$ tel que $M = p(M)$ alors $\begin{cases} x = -x + y \\ y = -2x + 2y \end{cases} \Rightarrow y = 2x$. D'où l'ensemble des points invariants par p est la droite (Δ) d'équation $y = 2x$.

Pour $M \in P$ et $M' = p(M)$, $\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = (-2x+y)(\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow$ pour tout point M du plan n'appartenant pas à (Δ), $\overrightarrow{MM'}$ garde une directrice fixe qui est celle du vecteur $\vec{v} = (1,1)$

En conclusion, p est la projection sur la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ suivant le vecteur $\vec{v} = (1,1)$

Exercice 2

1. $P(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{C_\alpha^2}{C_{30}^2} + \dfrac{C_\beta^2}{C_{30}^2} + \dfrac{C_\gamma^2}{C_{30}^2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + \gamma(\gamma-1)}{870} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-30}{870}$ car $\alpha + \beta + \gamma = 30$

2-a. • Première méthode :

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc forment un plan. On vérifie que les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan donné. Donc une équation de (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$.

• Deuxième méthode :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-30, 30, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-30, 0, 30)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Or $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (900, 900, 900)$. Ainsi (ABC) a une équation de la forme

$900x+900y+900z+c=0$. Or $A(30,0,0)\in(ABC)\Rightarrow c=-900\times 30$. Ainsi $(ABC): 900x+900y+900z-900\times 30=0$ ou encore $x+y+z-30=0$. D'où une équation du plan (ABC) est : $x+y+z-30=0$

b. M a pour coordonnées (α,β,γ) et $\alpha+\beta+\gamma=30\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma-30=0$. D'où M appartient au plan (ABC)

c. $OM^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $870P(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-30$. D'où $870P(\alpha,\beta,\gamma)+30=OM^2$

d. Notons Δ la droite orthogonale au plan (ABC) et passant par O. $\vec{n}=(1,1,1)$ est un vecteur directeur de Δ (D'après la deuxième méthode **2-a.**). Ainsi Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Soit M un point appartenant à Δ alors M a pour coordonnées de la forme (t,t,t). De plus si ce point appartient au plan (ABC), $t+t+t-30=0\Rightarrow t=10$. D'où H a pour coordonnées $(10,10,10)$.

e. $P(\alpha,\beta,\gamma)$ est minimale pour OM^2 minimale (en utilisant **2-c.**). Or OM^2 est minimale pour $M=H$. D'où pour que $P(\alpha,\beta,\gamma)$ soit minimale, il faut que $\alpha=\beta=\gamma=10$. Dans ce cas, $P(10,10,10)=\dfrac{9}{29}$

3-a. Pour gagner $kn-n$, il faut que le jour tire deux boules de même couleur d'un seul coup. Ainsi la probabilité demandé est $P(10,10,10)=\dfrac{9}{29}$

b. La loi de probabilité : $X(\Omega)=\{-n,kn-2n,kn-n\}$.

• $p(X=kn-n)=\dfrac{9}{29}$

• $p(X=kn-2n)$ correspond à la probabilité de tiré deux boules de couleurs différentes au premier tirage puis deux boules de même couleurs au deuxième tirage. Ainsi $p(X=kn-2n)=\dfrac{3C_{10}^1\times C_{10}^1}{C_{30}^2}\times\dfrac{9}{29}=\dfrac{180}{841}$

• $p(X=-n)$ correspond à la probabilité de tiré deux boules de couleurs différentes lors du premier tirage et deuxième tirage. Ainsi $p(X=-n)=\dfrac{3C_{10}^1\times C_{10}^1}{C_{30}^2}\times\dfrac{3C_{10}^1\times C_{10}^1}{C_{30}^2}=\dfrac{400}{841}$

On vérifie que $\dfrac{400}{841}+\dfrac{180}{841}+\dfrac{9}{29}=1$

c. $E(X)=\dfrac{9}{29}(kn-n)+\dfrac{180}{841}(kn-2n)-\dfrac{400}{841}n=\dfrac{441}{841}kn-\dfrac{1021}{841}n$

Problème

A/ 1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{1-x}{1+x}>0;1+x\neq 0\right\}\Rightarrow D_f=]-1,1[$

2. • f est définie, continue et dérivable sur $]-1,1[$. On peut écrire $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$ ainsi

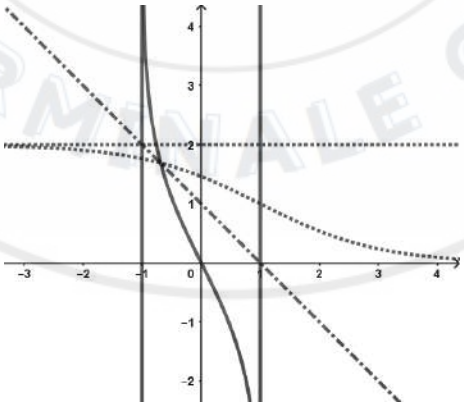
$\forall\, x\in]-1,1[,\ f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2}{x^2-1}$

• $\forall\, x\in]-1,1[,\ f'(x)<0\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-1,1[$

• $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	‖ $-\infty$

Tableau des variations



B/ 1. Le déterminant du système associé à T_k est : $-k^2-1=-(1+k^2)\neq 0$ donc T_k est une transformation du plan.

2. Soit $M\in P$ tel que $T_k(M)=M\Leftrightarrow\begin{cases} x=kx-y+1\\ y=-x-ky+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-k)x=-y+1\\(1+k)y=-x+1\end{cases}\Rightarrow(1+k)[(k-1)x+1]=-x+1$

Par suite, pour $M(x,y)=T_k(M)$, $k^2x+k=0$ ainsi :

• Si $k=0$, l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y=-x+1$

• Si $k\neq 0$, $k^2x+k=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{k}$ et $y=\dfrac{1}{k}$. Ainsi pour $k\neq 0$, seul le point $\Omega\left(-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)$ et le seul point invariant.

3. Écriture complexe de T_k : Notons $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$

$z' = (kx - y + 1) + i(-x - ky + 1) = k(x - iy) - i(x + iy) + 1 + i = k\overline{z} - iz + 1 + i$
D'où l'écriture complexe de T_k est : $z' = k\overline{z} - iz + 1 + i$

4. $T_k \circ T_k$ a pour expressions analytique : $\begin{cases} x'' = kx' - y' + 1 \\ y'' = -x' - ky' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = (k^2+1)x + k \\ y'' = (k^2+1)y - k \end{cases}$

Ainsi $T_k \circ T_k$ a pour écriture complexe $Z = (k^2+1)z + k(1-i)$. Ainsi,
• Si $k = 0$, $Z = z \Rightarrow T_k \circ T_k$ est l'identité du plan.
• Si $k \neq 0$, on pose $K = k^2 + 1$ et $z_0 = -\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k}i$. Alors $Kz + (1-K)z_0 = (k^2+1)z + k(1-i)$ par suite, pour $k \neq 0$, $T_k \circ T_k$ est l'homothétie de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)$ et de rapport $k^2 + 1$

5-a. • T_0 a pour écriture analytique $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$. D'après les questions précédentes, $T_0 \circ T_0 = Id_P$ et la droite $y = -x + 1$ est l'ensemble des points invariants $\Rightarrow T_0$ est une symétrie axiale.
De plus, pour $M' = T_0(M)$, $\overrightarrow{MM'} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} = (-x-y+1)(\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow$ pour tout point M du plan n'appartenant pas à la droite $y = -x + 1$, $\overrightarrow{MM'}$ garde une directrice fixe qui est celle du vecteur $\vec{v} = (1, 1)$ qui est orthogonale à la droite $y = -x + 1$. Par suite T_0 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = -x + 1$
• Soit $M' = T_0(M)$ alors $x = -y' + 1$ et $y = -x' + 1$.
$M \in (C) \Leftrightarrow y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \Leftrightarrow x' = 1 - \ln\left(\dfrac{y'}{2-y'}\right)$. Or $x' = 1 - \ln\left(\dfrac{y'}{2-y'}\right) \Rightarrow \mathrm{e}^{1-x'} = \dfrac{y'}{2-y'} \Rightarrow y' = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{1-x'}}{1+\mathrm{e}^{1-x'}}$
Ainsi (Γ) a pour équation $y = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{1-x}}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$

b. Voir la figure pour la représentation graphique

C/ 1. Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$, $g'(x) = -\sin x f'(\cos x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{2}{\sin x}$. D'où g est une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$ de : $x \mapsto \dfrac{2}{\sin x}$

2. pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{2n}(t) \geq 0$ et $\dfrac{-1}{\sin t} > 0 \Rightarrow -\dfrac{\cos^{2n} t}{\sin t} \geq 0$ et par suite $I_n(a) \geq 0$ en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction positive.
De plus, pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \cos t$ est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$
$\Rightarrow$ pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $\cos t \leq \cos a$ puis $\cos^{2n} t \leq \cos^{2n} a$ (*). De même, pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$,
$0 < -\sin(a) \leq -\sin t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \dfrac{-1}{\sin t} \leq \dfrac{-1}{\sin a}$ puis $-\dfrac{\cos^{2n} t}{\sin t} \leq -\dfrac{\cos^{2n} a}{\sin a}$ en utilisant (*). En intégrant les deux membres de cette dernière inégalité, on a : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-\cos^{2n} t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-\cos^{2n} a}{\sin a}\,\mathrm{d}t = \frac{-\cos^{2n} a}{\sin a}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$
D'où $0 \leq I_n(a) \leq \dfrac{\cos^{2n} a}{-\sin a}\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (**)
On note la constante $\dfrac{1}{-\sin a}\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = M$. $\forall a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$, $0 \leq \cos a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos^{2n} a}{-\sin a}\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} M\cos^{2n} a = 0$
D'après (**), on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

3-a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $F_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^{2k-1} t}{2k-1}$. Or pour tout entier naturel k avec $k \in [1, n]$, $\dfrac{\cos^{2k-1} t}{2k-1}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$. Par suite F_n est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$ en tant que somme finie des fonctions dérivables sur cet intervalle.
$\forall t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $F_n'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\sin t\cos^{2k-2} t = -\sin t\sum_{k=0}^{n-1} \cos^{2k} t = -\sin t\frac{1-\cos^{2n} t}{1-\cos^2 t} = \frac{-1+\cos^{2n} t}{\sin t}$ car $1 - \cos^2 t = \sin^2 t$
D'où, $\forall\, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $F_n'(t) = \dfrac{-1+\cos^{2n} t}{\sin t}$
$F_n\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\cos^k(-\pi/2) = 0$

b. $\forall\, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; a\right]$, $F_n'(t) = \dfrac{-1+\cos^{2n} t}{\sin t} \Rightarrow \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} F_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-1+\cos^{2n} t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} F_n'(t)\,\mathrm{d}t = F_n(a) - F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = F_n(a)$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{-1+\cos^{2n} t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} -\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{\cos^{2n} t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{g(x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{a} - I_n(a) = -\frac{g(a)}{2} - I_n(a)$ car $g(-\pi/2) = f(0) = 0$.
D'où $F_n(a) = \dfrac{-g(a)}{C} - I_n(a)$ avec $C = 2$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a) = \dfrac{-g(a)}{2}$

D/ 1. Pour $x \in]0,1[$, $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k$ est la somme des $2n$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$. D'où $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \dfrac{1-x^{2n}}{1-x}$ (1)

Dans la relation (1), on remplace x par $-x \Rightarrow \sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k = \dfrac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \dfrac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$ car $(-1)^{2n-1} = -1$

D'où $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = \dfrac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$ (2)

2-a. • Pour $x \in]0;1[\,; t \in]0,x[$, $0 < t < x \Rightarrow 1-x^2 < 1-t^2 < 1$. D'où $1 < \dfrac{1}{1-t^2} < \dfrac{1}{1-x^2}$

• Pour $x \in]0;1[\,; t \in]0,x[\,; t^{2n} < \dfrac{t^{2n}}{1-t^2} < \dfrac{t^{2n}}{1-x^2} \Rightarrow \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t < \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t < \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}t$.

Or $\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} > 0$ et $\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$. D'où $0 < \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t < \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$

b. • Pour $x \in]0,1[$ et $t \in]0,x[$ $\sum_{k=0}^{2n-1} t^k = \dfrac{1-t^{2n}}{1-t} \Rightarrow \int_0^x \sum_{k=0}^{2n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{1-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Or

$\int_0^x \sum_{k=0}^{2n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ et $\int_0^x \dfrac{1-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$

D'où $-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$

• De même, pour $x \in]0,1[$ et $t \in]0,x[$ $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k t^k = \dfrac{1+(-1)^{2n-1}t^{2n}}{1+t} \Rightarrow \int_0^x \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{1+(-1)^{2n-1}t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Or

$\int_0^x \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ et $\int_0^x \dfrac{1+(-1)^{2n-1}t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x) - (-1)^{2n}\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ car $(-1)^{2n-1} = -(-1)^{2n}$

D'où $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + (-1)^{2n}\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n}\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

c. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + (-1)^{2n}\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right]$

Or $\sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n-1} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} = 2\left[x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]$ et $(-1)^{2n}\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

D'où $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

NB : On remarquera que $(-1)^{2n} = 1$

3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -2 \times \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et $-\dfrac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} < -2\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t < -\dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ d'après **D/ 2-a.**

On pose $U(x) = -2\left[x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right] - \dfrac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$ et

$V(x) = -2\left[x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right] - \dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

On a alors $U(x) \leq f(x) \leq V(x)$

Correction BAC C-E Togo 2018

Exercice 1

I/ 1-a. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (a+b-5)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. D'où $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ est égal à $(a+b-5)\vec{w}$ avec $\vec{w} = (1,1,1)$

b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a+b=5$

2-a. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan Q alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $Q \Rightarrow \vec{w}$ est un vecteur normal au plan Q. Ainsi Q a une équation de la forme : $x+y+z+c=0$. Or $A \in Q \Rightarrow c=-2$. D'où Q a pour équation : $x+y+z-2=0$

b. Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut que $a+b=5 \Rightarrow (a,b) \in \{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2)\}$. Donc la probabilité demandée est égale à : $\dfrac{4}{4^2} = \dfrac{1}{4}$

II/ 1. • $p(A_1)$ correspond à la probabilité que A obtienne des vecteurs colinéaires et B non. A obtient du premier coup des vecteurs colinéaires avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ et B n'obtient pas du premier coup des vecteurs colinéaires avec une probabilité de $1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. D'où $p(A_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

• De même, on déduit aussi que $p(B_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

• $p(C_1)$ correspond à la probabilité que A et B obtiennent des vecteurs colinéaires au premier coup ou que A et B n'obtiennent pas des vecteurs colinéaires au premier coup. Ainsi $p(C_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

2. $p(C_n)$ correspond à la probabilité que le jeu continue après la nième partie cela revient à dire qu'aucun des deux joueurs n'a gagné lors des $n-1$ parties et que aucun n'a gagné aussi à la nième partie. $p(C_n) = p(C_{n-1})\left[\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}\right] = \dfrac{5}{8}p(C_{n-1})$

Puis on déduit que $p(C_n) = \left[\dfrac{5}{8}\right]^n$

3-a. $p(A_n)$ correspond à la probabilité que A gagne le jeu à la nième partie cela revient à dire qu'aucun des deux joueurs n'a gagné lors des $n-1$ parties et que A a gagné la nième partie. $p(A_n) = p(C_{n-1})\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}p(C_{n-1})$

Puis on déduit que $p(A_n) = \dfrac{3}{16}\left[\dfrac{5}{8}\right]^{n-1}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n) = 0$

b. $p(A_n) \leq 10^{-2} \Rightarrow \dfrac{3}{16}\left[\dfrac{5}{8}\right]^{n-1} \leq 10^{-2} \Rightarrow n \geq 7.23$. D'où $n_0 = 8$.

Exercice 2

I/ 1-a. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $t \in [0,x]$, $\dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+x} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t} \leq \mathrm{e}^t$ puis en intégrant les membres de ces inégalités entre 0 et $x \geq 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+x}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^x-1$ car $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x-1$

b. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[\mathrm{e}^x-1] = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ d'après **1-a.** et le théorème des gendarmes.

•, Pour $x>0$, on déduit d'après **1-a.** que : $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x(x+1)} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ (*). Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x(x+1)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ d'après (*) et le théorème des gendarmes.

On déduit que la branche infinie de (C) en $+\infty$ est une branche parabolique verticale.

2-a. Pour $x \in]-1,0]$ et $t \in [x,0]$, $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t} \leq \dfrac{1}{1+t}$ puis en intégrant les membres de ces inégalités entre 0 et $x \leq 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{\mathrm{e}^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \ln(1+x) \leq f(x) \leq \mathrm{e}^x\ln(1+x)$ car $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$

b. $\lim\limits_{x\to-1^+} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \mathrm{e}^x\ln(1+x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

3. Pour $x \in]-1,+\infty[$, f est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} > 0$. f est alors strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ (Voir le tableau de variation à la question **4.**)

4-a. (T) a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow y = x$

b. Posons $\varphi(t) = \mathrm{e}^t - t - 1$ pour $t>0$. φ est continue et dérivable de dérivée $\varphi'(t) = \mathrm{e}^t - 1$. Pour $t \in]-1,0]$, $\varphi'(t) \leq 0$ $\Rightarrow \varphi$ est décroissante sur $]-1,0]$; pour $x \in [0,+\infty[$, $\varphi'(t) \geq 0 \Rightarrow \varphi$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, pour $t>-1$,

$\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$. D'où, pour tout $t > -1$, $\mathrm{e}^t - t - 1 \geq 0$

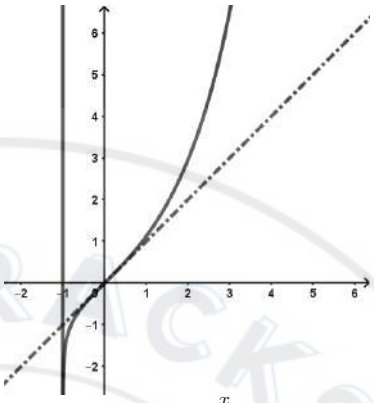
c. Pour $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) - x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t - x$ or $x = \displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t$ alors $f(x) - x = \displaystyle\int_0^x \left[\frac{\mathrm{e}^t}{1+t} - 1\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - t - 1}{1+t}\,\mathrm{d}t$

• Pour $x \in]-1, 0]$ et $t \in [x, 0]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t - t - 1}{1+t} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - t - 1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq 0$. D'où (T) est au dessus de (C) pour $x \in]-1, 0]$,.

• Pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, x]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t - t - 1}{1+t} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - t - 1}{1+t}\,\mathrm{d}t \geq 0$. D'où (C) est au dessus de (T) pour $x \in [0, +\infty[$.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Tableau des variations



II/ 1-a. g est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+x)^2} \geq 0$. g est alors croissante sur $[0, +\infty[$

b. $\forall t \in [n, n+1]$, $g(n) \leq g(t) \leq g(n+1) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^n}{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{t+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+2}$ puis en intégrant entre n et $n+1$ on a : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^n}{n+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+2}\,\mathrm{d}t$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+2}$

2-a. Posons $\varphi(x) = g(x) - \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$. φ est définie et continue sur $[n, n+1]$. De plus, $\varphi(n) = g(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$ et $\varphi(n+1) = g(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ en utilisant **II/ 1-a.**. On déduit qu'il existe au moins un α_n tel que $\varphi(\alpha_n) = 0$

De plus φ est dérivable de dérivée $\varphi'(x) = g'(x) \Rightarrow \varphi$ est strictement croissante sur $[n, n+1]$. On déduit alors que α_n est unique. D'où l'équation $g(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ admet dans $[n; n+1]$ une unique solution α_n

b. $\alpha_n \in [n, n+1] \Rightarrow n \leq \alpha_n \leq n+1 \Rightarrow 1 \leq \dfrac{\alpha_n}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 + \dfrac{1}{n}\right] = 1$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 1$

Problème

A/ 1-a. O, I et J sont trois points non alignés du plan. f_λ est une transformation affine si l'image de ces trois points ne sons pas alignées c'est-à-dire $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ or $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1 - \lambda^2 + \lambda^2)\vec{k} = \vec{k} \neq \vec{0}$. D'où f_λ est une transformation affine.

b. Comme une application affine est clairement définies à travers la données de trois points non alignés et de leurs images, il suffit de montrer que $g_\lambda(O) = O$, $g_\lambda(I) = A$ et $g_\lambda(J) = B$.

On a : $O' = g_\lambda(O) = (0,0) = O$, $I' = g_\lambda(I) = (1-\lambda, -\lambda) = A$ et $J' = g_\lambda(J) = (\lambda, 1+\lambda) = B$. D'où $f_\lambda = g_\lambda$

c. $f_{-\lambda}$ a pour expression analytique : $\begin{cases} X = (1+\lambda)x - \lambda y \\ Y = \lambda x + (1-\lambda)y \end{cases}$

Cherchons l'expression analytique de $f_\lambda \circ f_{-\lambda}$:

$f_\lambda \circ f_{-\lambda}$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = (1-\lambda)X + \lambda Y \\ y' = -\lambda X + (1+\lambda)Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$f_\lambda \circ f_{-\lambda} = Id_P$ puis on déduit que $f_{-\lambda} = f_\lambda^{-1}$ (unicité de la fonction réciproque)

2-a. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $M \in P$ et $M' = f_\lambda(M)$, $(1+\lambda)x'^2 = (1+\lambda)\left[(1-\lambda)x + \lambda y\right]^2 = (1-\lambda)(1-\lambda^2)x^2 + \lambda^2(1+\lambda)y^2 + 2\lambda(1-\lambda^2)xy$

$(1-\lambda)y'^2 = (1-\lambda)\left[-\lambda x + (1+\lambda)y\right]^2 = \lambda^2(1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)(1-\lambda^2)y^2 - 2\lambda(1-\lambda^2)xy$

Ainsi $(1+\lambda)x'^2 + (1-\lambda)y'^2 = (1-\lambda)[\lambda^2 + 1 - \lambda^2]x^2 + (1+\lambda)[1 - \lambda^2 + \lambda^2]y^2 = (1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2$

D'où $\theta_{-\lambda} \circ f_\lambda = \theta_\lambda$

b. $\theta_{-\lambda} \circ f_\lambda = \theta_\lambda \Rightarrow \theta_{-\lambda} \circ f_\lambda \circ f_\lambda^{-1} = \theta_\lambda \circ f_\lambda^{-1}$. Or $f_{-\lambda} = f_\lambda^{-1}$ et $f_\lambda \circ f_\lambda^{-1} = Id_P$ alors $\theta_\lambda \circ f_{-\lambda} = \theta_{-\lambda}$

3-a. Soient $M(x, y)$ et $M' = f_\lambda(M)$ alors $x = (1+\lambda)x' - \lambda y'$ et $y = \lambda x' + (1-\lambda)y'$

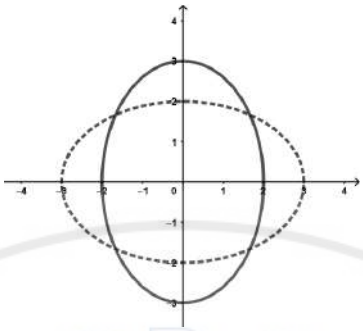
$M \in C_{(\lambda,k)} \Leftrightarrow (1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 = k$ ou encore $(1-\lambda)\left[(1+\lambda)x' - \lambda y'\right]^2 + (1+\lambda)\left[\lambda x' + (1-\lambda)y'\right]^2 = k$

Or $\theta_\lambda \circ f_{-\lambda} = \theta_{-\lambda} \Rightarrow (1-\lambda)\left[(1+\lambda)x' - \lambda y'\right]^2 + (1+\lambda)\left[\lambda x' + (1-\lambda)y'\right]^2 = (1+\lambda)x'^2 + (1-\lambda)y'^2$

Ainsi $M \in C_{(\lambda,k)} \Leftrightarrow (1+\lambda)x'^2 + (1-\lambda)y'^2 = k$. D'où $f_\lambda(C_{(\lambda,k)}) = C_{(-\lambda,k)}$

b. • Équation de $C_{\left(-\frac{5}{13},\frac{72}{13}\right)}$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. C'est une ellipse d'axe focal (oy), de sommets $(2,0)$; $(-2,0)$; $(0,3)$ et $(0,-3)$

• $f_{-\frac{5}{13}}(C_{\left(-\frac{5}{13},\frac{72}{13}\right)})=C_{\left(\frac{5}{13},\frac{72}{13}\right)}$ qui a pour équation : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. C'est une ellipse d'axe focal (ox), de sommets $(3,0)$; $(-3,0)$; $(0,2)$ et $(0,-2)$



c. • Pour $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$,$C_{(\lambda,a)}$ est l'union de deux droites.

• Pour $\lambda\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}$, $C_{(\lambda,a)}$ a pour équation : $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}=1$ avec $\alpha=\dfrac{a}{1-\lambda}$ et $\beta=\dfrac{a}{1+\lambda}$.

Si $\lambda\in]-1,1[$, $\alpha>0$ et $\beta>0\Rightarrow C_{(\lambda,a)}$ est une ellipse.

Si $\lambda\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, l'un des valeurs α ou β est négative $\Rightarrow C_{(\lambda,a)}$ est une hyperbole.

4. (D_λ) a pour vecteur directeur $\vec{v}_\lambda=(-1-\lambda,1-\lambda)$. Supposons qu'il existe un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}_\lambda$ est colinéaire à $\vec{u}\Rightarrow$ qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $v_\lambda=\mu\vec{u}$. Dans ce cas, $-1-\lambda=\mu$ et $1-\lambda=\mu\Rightarrow -1-\lambda=1-\lambda$ ce qui est impossible. D'où $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, la droite (D_λ) n'a jamais la direction du vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$

5-a. Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')=S_\lambda(M)$

• $\overrightarrow{MM'}\wedge\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow x'-y'=x-y$

• Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à $(D_\lambda)\Rightarrow(1-\lambda)\dfrac{x'+x}{2}+(1+\lambda)\dfrac{y'+y}{2}=0$ ou encore

$(1-\lambda)x'+(1+\lambda)y'=-(1-\lambda)x-(1+\lambda)y$. Ainsi $\begin{cases}x'=x-y+y'\\(1-\lambda)x'+(1+\lambda)y'=-(1-\lambda)x-(1+\lambda)y\end{cases}$ et en remplaçant la première ligne dans la deuxième, on a : $(1-\lambda)(x-y+y')+(1+\lambda)y'=-(1-\lambda)x-(1+\lambda)y\Rightarrow y'=(-1+\lambda)x-\lambda y$ puis en remplaçant cette expression de y' dans la première ligne, on déduit que $x'=\lambda x-(1+\lambda)y$

D'où S_λ a pour expression analytique : $\begin{cases}x'=\lambda x-(1+\lambda)y\\y'=(-1+\lambda)x-\lambda y\end{cases}$

b. Soient $M\in P$ et $M'(x',y')=S_\lambda(M)$ alors $x=\lambda x'-(1+\lambda)y'$ et $y=(-1+\lambda)x'-\lambda y'$ car $S_\lambda^{-1}=S_\lambda$

$M\in(C_{(\lambda,k)})\Leftrightarrow(1-\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2=k\Leftrightarrow(1-\lambda)\left[\lambda x'-(1+\lambda)y'\right]^2+(1+\lambda)\left[(-1+\lambda)x'-\lambda y'\right]^2=k$

Or $(1-\lambda)\left[\lambda x'-(1+\lambda)y'\right]^2=\lambda^2(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)(1-\lambda^2)y'^2-2\lambda(1-\lambda^2)x'y'$ (*)et

$(1+\lambda)\left[(-1+\lambda)x'-\lambda y'\right]^2=(1-\lambda)(1-\lambda^2)x'^2+\lambda^2(1+\lambda)y'^2+2\lambda(1-\lambda^2)x'y'$ (**) et en sommant de (*) et (**) on a : $(1-\lambda)\left[\lambda x'-(1+\lambda)y'\right]^2+(1+\lambda)\left[(-1+\lambda)x'-\lambda y'\right]^2=(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2$

Ainsi $M\in C_{(\lambda,k)})\Leftrightarrow(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=k\Leftrightarrow M'(x',y')\in C_{(\lambda,k)})$. D'où $C_{(\lambda,k)}$ est globalement invariant par S_λ

c. $f_\lambda\circ S_\lambda$ a pour écriture analytique $\begin{cases}X''=(1-\lambda)x'+\lambda y'\\Y''=-\lambda x'+(1+\lambda)y'\end{cases}$ avec $\begin{cases}x'=\lambda x-(1+\lambda)y\\y'=(-1+\lambda)x-\lambda y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X''=-y\\Y''=-x\end{cases}$

On reconnait l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la deuxième bissectrice. D'où $f_\lambda\circ S_\lambda$ est la symétrie orthogonale par rapport à la deuxième bissectrice (droite d'équation $y=-x$)

d. Notons $z=x+iy$ et $z'=X''+iY''$. Alors $z'=X''+iY''=-y-ix=-i(x-iy)=-i\overline{z}$. D'où l'écriture complexe associée à $S=f_\lambda\circ S_\lambda$ est : $z\longmapsto-i\overline{z}$.

B/ 1-a. f a pour écriture complexe : $z'=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{z}$. $f\circ f$ a pour écriture complexe $z''=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{z}}=z$.

D'où $f\circ f=Id_P\Rightarrow f$ est une involution.

b. $f\circ S$ a pour écriture complexe : $z'=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{-i\overline{z}}=\mathrm{e}^{2i\pi/3+i\pi/2}\,z$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{7\pi}{6}$ (ou $-\dfrac{5\pi}{6}$). D'où $f\circ S$ est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{7\pi}{6}$

2-a. Supposons $g=T\circ f$ alors $T=g\circ f$ car $f^{-1}=f$ d'après **B/ 1-a.**. Ainsi T a pour écriture complexe $z'=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{z}}-\sqrt{3}-3i=z-\sqrt{3}-3i$. D'où T est la translation de vecteur $\vec{v}=(-\sqrt{3},-3)$

b. L'écriture complexe associée à $f\circ T$ est : $z'=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{z-\sqrt{3}-3i}=\mathrm{e}^{2i\pi/3}\,\overline{z}-\sqrt{3}-3i$. Puis on déduit que $f\circ T=T\circ f$

3-a. • $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $g^{2n}=(T\circ f)^{2n}=T^{2n}\circ f^{2n}$ car $f\circ T=T\circ f$. Or $f^{2n}=(f^2)^n=Id_P$ car f est une involution

D'où $g^{2n}=T^{2n}$ qui est la translation de vecteur $\vec{w}=2n\vec{v}=(-2n\sqrt{3},-6n)$

• $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $g^{2n+1}=g^{2n}\circ g=T^{2n}\circ T\circ f=T^{2n+1}\circ f\Rightarrow g^{2n+1}$ est une similitude indirecte.

b. $g^{2n}(O)=T^{2n}(O)$ or $(-\sqrt{3}-3i)=-2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}\Rightarrow z_0=-4n\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$

Correction BAC C-E Togo 2019

Exercice 1

1. La fonction définie par : $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus les fonctions u et v définies par : $u(x)=3x$ et $v(x)=x$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (Classe $\mathcal{C}^1$= fonctions dérivables à dérivées continues). Par suite, la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour $x\in]0,+\infty[$, $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{3f(3x)}{3x}=\dfrac{f(x)-f(3x)}{x}$

2-a. Supposons que $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $f(t)=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\dfrac{\lambda-\lambda}{x}=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F'(x)=0$. On déduis que F est une fonction constante. De plus $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\lambda}{t}\,\mathrm{d}t=\lambda\left[\ln t\right]_{3x}^{x}=\lambda[\ln x-\ln(3x)]=-\lambda\ln(3)$

b. Supposons que $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $f(t)=\dfrac{1}{t}$ alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{t}\right]_{3x}^{x}=-\frac{2}{3x}$

3-a. • Pour $x=\dfrac{\pi}{6}$ et $t\in[\pi/6,\pi/2]$, $\dfrac{\cos t}{t}\geq 0\Rightarrow\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t<0$. D'où $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0$

• Pour $x=\dfrac{\pi}{2}$ et $t\in[\pi/2,3\pi/2]$, $\dfrac{\cos t}{t}\leq 0\Rightarrow\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t>0$. D'où $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$

b. $\forall t\in]0,+\infty[$, $-1\leq\cos t\leq 1\Rightarrow-\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{\cos t}{t}\leq\dfrac{1}{t}$. D'où $\forall t\in]0,+\infty[$, $\dfrac{f(t)}{t}\leq\dfrac{1}{t}$

$\forall x\in]0,+\infty[$ et $\forall t\in[x,3x]$, $-\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{f(t)}{t}\leq\dfrac{1}{t}\Rightarrow\displaystyle\int_{x}^{3x}\frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_{x}^{3x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_{x}^{3x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Rightarrow-\ln 3\leq\int_{x}^{3x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\leq\ln 3$

Or $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_{x}^{3x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. D'où $-\ln 3\leq F(x)\leq\ln 3$. F est minorée par $-\ln 3$ et est majorée par $\ln 3$. Par conséquent, la fonction F est bornée.

c. Pour $x\in[0,+\infty[$, posons $\varphi(x)=\sin x-x$. φ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée $\varphi'(x)=\cos x-1\leq 0\Rightarrow$ φ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, $\forall x\in[0,+\infty[$, $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$. D'où $\sin x\leq x$ $\forall x\in]0,+\infty[$

d. • Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)$. Par suite, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\cos(t)=1-2\sin^2(t/2)$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{3x}^{x}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{3x}^{x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-2\int_{3x}^{x}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\,\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln 3$

Alors $F(x)=-\ln 3-2\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\,\mathrm{d}t$. D'où $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)+\ln 3=-2\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t$

• D'après **3-b.**, $-\ln 3\leq F(x)\Rightarrow 0\leq F(x)+\ln 3$

On a : $F(x)+\ln 3=-2\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t=2\int_{x}^{3x}\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t$ or d'après **3-c.**, $\sin(\frac{t}{2})\leq\dfrac{t}{2}\Rightarrow\sin^2(\frac{t}{2})\leq\left(\dfrac{t}{2}\right)^2$ et par conséquent $\displaystyle\int_{x}^{3x}\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t\leq\int_{x}^{3x}\frac{(\frac{t}{2})^2}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{x}^{3x}\frac{t}{4}\,\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_{x}^{3x}\frac{t}{4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x}^{3x}=x^2$. Ainsi $2\displaystyle\int_{x}^{3x}\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\,\mathrm{d}t\leq 2x^2\Rightarrow F(x)+\ln 3\leq 2x^2$

D'où $0\leq F(x)+\ln 3\leq 2x^2$

Remarque : une coquille s'est glissée dans l'épreuve où il faut lire $\ln 3$ au lieu de 3. Cette erreur est sciemment laissée dans ce document pour que les candidats soient conscients que certaines erreurs, bien que très rares, glissent souvent dans les énoncés.

• $\lim\limits_{x\to 0^+}2x^2=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+}[F(x)+\ln 3]=0$ d'après le théorème des gendarmes puis on déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=-\ln 3$

4-a. Intégration par parties : $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{t}\times\sin t\right]_{3x}^{x}-\int_{3x}^{x}\frac{-1}{t^2}\times\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{3x}+\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

D'où $\left|F(x)-\dfrac{3\sin(x)-\sin(3x)}{3x}\right|=\left|\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|$ or $\left|\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_{x}^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$. De plus $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right|\leq\dfrac{1}{t^2}$

Ainsi $\left|\displaystyle\int_{3x}^{x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_{x}^{3x}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3x}$. D'où $\left|F(x)-\dfrac{3\sin(x)-\sin(3x)}{3x}\right|\leq\dfrac{2}{3x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left|F(x)-\dfrac{3\sin(x)-\sin(3x)}{3x}\right|=0$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin(x)-\sin(3x)}{3x}=0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

b. D'après **1.**, $\forall x\in]0,+\infty[$, $F'(x)=\dfrac{\cos(x)-\cos(3x)}{x}$ Or $\forall(p,q)\in\mathbb{R}^2$, $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

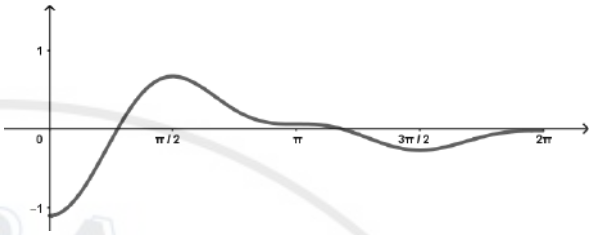
Par conséquent $\dfrac{\cos(x)-\cos(3x)}{x}=-2\sin(2x)\sin(-x)=4\cos(x)\sin^2(x)$ car $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$

D'où $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \dfrac{4\cos(x)\sin^2(x)}{x}$

5-a. Pour $x \in]0, \pi/2]$, $F'(x) \geq 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $]0, \pi/2]$; $x \in [\pi/2, \pi]$, $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F$ est décroissante sur $[\pi/2, \pi]$; $x \in [\pi, 3\pi/2]$, $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F$ est décroissante sur $[\pi, 3\pi/2]$; $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, $F'(x) \geq 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[3\pi/2, 2\pi]$
Voir ci-dessous le tableau des variations.

b. F_1 est continue sur $]\pi/6, \pi/2[$ et est strictement croissante sur cet intervalle. De plus d'après **3-a.**, $F_1(\pi/6) < 0$ et $F_1(\pi/2) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que , l'équation $F_1(x) = 0$ possède une et une seule solution sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$F_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
$F_1(x)$	‖ $-\ln 3$	↗	$F_1(\frac{\pi}{2})$	↘	$F_1(\pi)$	↘	$F_1(\frac{3\pi}{2})$	↗	$F_1(2\pi)$



Remarque : La courbe représentative de la fonction F_1 est donnée à titre indicatif (non demandée dans l'énoncé).

Exercice 2

1. • $z_0 = 2 \Rightarrow z_0' = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_1 = \dfrac{z_0 + z_0'}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. Par Par conséquent, l'affixe du point A_1 est $z_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

• $z_1' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_1 = -i\sqrt{3}$. Par Par conséquent, l'affixe du point A_1' est $z_1' = -i\sqrt{3}$

• A_2 est le milieu du segment $[A_1A_1'] \Rightarrow z_2 = \dfrac{z_1 + z_1'}{2} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$. Par Par conséquent, l'affixe de A_2 est $z_2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$

• $z_2' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_2 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$. Par Par conséquent, l'affixe de A_2' est $z_2' = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$

2-a. A_{n+1} est le milieu de $[A_nA_n'] \Rightarrow z_{n+1} = \dfrac{z_n + z_n'}{2} = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right) z_n$. D'où $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right) z_n$

(z_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ et de premier terme $z_0 = 2 \Rightarrow z_n = z_0 \times q^n$. D'où $z_n = 2\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n$

Notons f l'application affine du plan dont l'expression complexe est : $z' = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right) z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/6}\, z$. f est bien une similitude directe du plan de centre 0, de rapport $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = f(A_n)$; on conclut alors que A_{n+1} est l'image de A_n par la similitude directe du plan de centre O, de rapport $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$, soit par la composée de l'homothétie de centre O, de rapport $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de la rotation de centre O et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 2\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-in\pi/6}$ car $\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/6}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ et $\theta_n = -\dfrac{n\pi}{6}$

c. $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$

Interprétation géométrique : Les points successifs de la suite (A_n) se rapprochent de l'origine O du repère en parcourant une courbe en spirale.

d. $r_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ et $r_{n+6} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+6} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 r_n = \dfrac{27}{64} r_n$. D'où $r_{n+6} = \dfrac{27}{64} r_n$.

$\theta_n = -\dfrac{n\pi}{6}$ et $\theta_{n+6} = -\dfrac{(n+6)\pi}{6} = \theta_n - \pi$. D'où $\theta_{n+6} = \theta_n - \pi$

3-a. $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right) z_n$; $A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|-\dfrac{1}{4} - \dfrac{i\sqrt{3}}{4}\right| |z_n| = \dfrac{1}{2}|z_n|$

De même $A_{n-1}A_n = \dfrac{1}{2}|z_{n-1}|$ or $z_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/6}\, z_{n-1} \Rightarrow |z_n| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|z_{n-1}|$

Ainsi $|z_{n+1}-z_n| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|z_n - z_{n-1}|$. D'où $A_nA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_{n-1}A_n$

b. $d_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$. La suite (A_nA_{n+1}) est une suite suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dont le premier terme est $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = 1$. Par conséquent, d_n est la somme des n premiers termes de la suite (A_nA_{n+1})

D'où $d_n = \dfrac{1-(\sqrt{3}/2)^n}{1-\sqrt{3}/2} = \dfrac{2}{2-\sqrt{3}}\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] = 2(2+\sqrt{3})\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$. D'où $d_n = 2(2+\sqrt{3})\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$

c. $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 2(2+\sqrt{3})$

Problème

A/ 1-a. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{E}$ laisse invariant une droite donnée est que cette droite soit incluse ou orthogonale au plan.

b. La symétrie orthogonale par rapport à l'unique plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') laisse simultanément invariantes les droites (D) et (D'). La symétrie orthogonale par rapport à l'unique plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) laisse simultanément invariantes les droites (D) et (D'). Ces plans étant uniques, il n'existe donc pas d'autre symétrie orthogonale par rapport à un plan qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D').

2-a. • Le point A appartient à la droite (D) qui est incluse au plan (P). Donc le point A appartient au plan (P). Le point A appartient au plan (P') par définition de (P'). D'où le point A appartient à l'intersection des plans (P) et (P').

• Le point B appartient à la droite (D') qui est incluse au plan (P'). Donc le point B appartient au plan (P'). Le point B appartient au plan (P) par définition de (P). D'où le point B appartient à l'intersection des plans (P) et (P'). Par conséquent, l'intersection des plans (P) et (P') est la droite (AB).

b. La droite (AB) étant orthogonale aux droites (D) et (D'), un vecteur directeur de la droite (AB) est donc orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Or $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par conséquent, un vecteur directeur de la droite (AB) est colinéaire au vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$

3. Nous avons montré dans la question **1-b.** que la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) laisse simultanément invariantes les droites (D) et (D'). Nous savons qu'une symétrie orthogonale conserve les longueurs. Dès lors le symétrique d'un point quelconque de (Γ) vérifie également la propriété des points de (Γ). Par conséquent, (Γ) admet le plan (P) comme plan de symétrie. Une démonstration analogue montre que (Γ) admet le plan (P') comme plan de symétrie.

Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires car (P) contient la droite (D) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (D') du plan (P'). Nous savons que la composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans perpendiculaires est la symétrie orthogonale par rapport à la droite, intersection des deux plans perpendiculaires. Par conséquent, (Γ) admet la droite (AB) comme axe de symétrie.

4. • Considérons l'intersection de (Γ) avec le plan (P).

Dans le plan (P), tout point de (Γ) se situe à égale distance des droites (D) et (D'), en l'occurrence de la droite (D) et du point B.

Par conséquent, l'intersection de (Γ) avec le plan (P) est une parabole de foyer B et de directrice (D).

• Considérons l'intersection de (Γ) avec le plan (P').

Dans le plan (P'), tout point de (Γ) se situe à égale distance des droites (D) et (D'), en l'occurrence de la droite (D') et du point A.

Par conséquent, l'intersection de (Γ) avec le plan (P) est une parabole de foyer A et de directrice (D').

B/1-a. • Montrons que les droites (D) et (D') sont orthogonales.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1-1 = 0$. D'où, les droites (D) et (D') sont orthogonales.

Montrons que les droites (D) et (D') sont non coplanaires en montrant qu'elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

• $\vec{u}\wedge\vec{v} = (0,0,-2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires car $\vec{u}\cdot\vec{k} = 0$. Nous en déduisons que la droite (D) est incluse dans un plan ayant $\vec{k}$ comme vecteur normal. La droite (D) est donc incluse dans un plan horizontal passant par le point $A(0;0;1)$.

De même les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires car $\vec{u}\cdot\vec{k} = 0$. Nous en déduisons que la droite (D') est incluse dans un plan ayant $\vec{k}$ comme vecteur normal. La droite (D') est donc incluse dans un plan horizontal passant par le point $B(0;0;-1)$.

Nous en déduisons que les droites (D) et (D') sont incluses respectivement dans deux plans horizontaux distincts car l'un passe par le point A de cote égale à 1 alors que l'autre passe par le point B de cote égale à -1.

Par conséquent, les droites (D) et (D') ne sont pas sécantes.

Puisque les droites (D) et (D') ne sont ni parallèles, ni sécantes, ces droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

• Montrons que le point O appartient à (Γ)

$OA = OB = 1$ car les coordonnées des points A et B sont respectivement $(0;0;1)$ et $(0;0;-1)$.

La droite (OA) est perpendiculaire à (D) car $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u} = 0$. Donc la distance du point O à la droite (D) est égale à 1

La droite (OB) est perpendiculaire à (D') car $\overrightarrow{OB}\cdot\vec{v}=0$. Donc la distance du point O à la droite (D') est égale à 1
D'où le point O appartient à (Γ)

b. Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}$ et (D) passe par $A(0,0,1)$. D'où, une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ y=1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

$Q\in(D)\Rightarrow\exists t\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de Q sont $(t,t,1)$. Soit $M(x,y,z)$
$MQ^2=(t-x)^2+(t-y)^2+(1-z)^2=2t^2-2t(x+y)+x^2+y^2+(z-1)^2$
Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $t\mapsto 2t^2-2t(x+y)+x^2+y^2+(z-1)^2$
La distance de M à (D) est la plus petite valeur de MQ, soit la plus petite valeur de MQ^2 c'est-à-dire la valeur du minimum de la fonction f .
Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=4t-2(x+y)$. $f'(t)=0\Rightarrow t=\dfrac{x+y}{2}$

Nous en déduisons que la plus petite valeur de MQ existe pour $t=\dfrac{x+y}{2}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-2\left(\frac{x+y}{2}\right)(x+y)+x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{x^2+2xy+y^2}{2}-2xy+(z-1)^2$$
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x^2-2xy+y^2}{2}+(z-1)^2=\frac{(x-y)^2}{2}+(z-1)^2$$

D'où la distance de M à (D) est égale à $\sqrt{\dfrac{(x-y)^2}{2}+(z-1)^2}$

c. Calculons la distance du point M à la droite (D').
• un vecteur directeur de (D') est $\vec{v}$ et (D') passe par $B(0,0,-1)$. D'où, une représentation paramétrique de la droite (D') est : $\begin{cases} x=s \\ y=-s \\ y=-1 \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$

$S\in(D')\Rightarrow\exists s\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de S sont $(s,-s,-1)$. Soit $M(x,y,z)$
$MS^2=(s-x)^2+(-s-y)^2+(-1-z)^2=2s^2-2s(x-y)+x^2+y^2+(z+1)^2$
• Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s\mapsto 2s^2-2s(x-y)+x^2+y^2+(z+1)^2$
La distance de M à (D') est la plus petite valeur de MS, soit la plus petite valeur de MS^2 c'est-à-dire la valeur du minimum de la fonction g .
pour tout $s\in\mathbb{R}$, $g'(s)=4s-2(x-y)$. $g'(s)=0\Rightarrow s=\dfrac{x-y}{2}$

Nous en déduisons que la plus petite valeur de MS existe pour $s=\dfrac{x-y}{2}$

$g\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=\dfrac{(x+y)^2}{2}+(z+1)^2$. D'où la distance de M à (D') est égale à $\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{2}+(z+1)^2}$

d. Le point M appartient à (Γ) si la distance de M à (D) est égale à la distance de M à (D')
Donc $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{2}+(z+1)^2}=\sqrt{\dfrac{(x-y)^2}{2}+(z-1)^2}\Leftrightarrow\dfrac{(x+y)^2}{2}+(z+1)^2=\dfrac{(x-y)^2}{2}+(z-1)^2$ puis en développant et en réduisant les deux membres de cette égalité, on déduit que : $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow xy+2z=0$

2-a. Tout plan orthogonal à la droite (AB) admet une équation cartésienne de la forme $z=k$ où k est une constante.
Dans ce cas, la relation obtenue dans la question **B/ 1-d.** s'écrit : $xy+2k=0$, soit $xy=-2k$ avec k constant.
• Cas où $k\neq 0$ (cas général) : $xy=-2k$ est l'équation d'une hyperbole équilatère.
D'où les intersections de (Γ) avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont des hyperboles équilatères.
• Cas où $k=0$: Cas exceptionnel
Le plan orthogonal à la droite (AB) admet comme équation : $z=0$. Dans ce cas, la relation $xy+2k=0$ s'écrit $xy=0$, soit $x=0$ ou $y=0$.
La système $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ représente l'axe des ordonnées du repère.
La système $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ représente l'axe des abscisses du repère.
Par conséquent, l'intersection de (Γ) avec le plan d'équation : $z=0$ est une hyperbole dégénérée, réduite à ses asymptotes.

b. Les plans orthogonaux à l'axe $(O,\vec{i})$ admettent une équation cartésienne de la forme $x=k$ où k est une constante.
Dès lors, la relation $xy+2z=0$ s'écrit : $ky+2z=0$ avec k constant.
Le système $\begin{cases} x=k \\ ky+2z=0 \end{cases}$ représente une droite.
Les plans orthogonaux à l'axe $(O,\vec{j})$ admettent une équation cartésienne de la forme $y=k$ où k est une constante.
Dès lors, la relation $xy+2z=0$ s'écrit : $kx+2z=0$ avec k constant.

Le système $\begin{cases} y = k \\ kx + 2z = 0 \end{cases}$ représente une droite.

Par conséquent, les intersections de (Γ) avec les plans orthogonaux à $(O, \vec{i})$ ou à l'axe $(O, \vec{j})$ sont des droites.

C/ 1-a. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'abscisse d'un point de l'espace est égale à l'abscisse de son projeté orthogonal sur le plan d'équation $z = 0$. De même, l'ordonnée d'un point de l'espace est égale à l'ordonnée de son projeté orthogonal sur le plan d'équation $z = 0$.

Par conséquent, la courbe (C_z), projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $z = 0$ a pour représentation paramétrique :

$(C_z) : \begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $x(t) = 4\cos(t) \Rightarrow x(\pi - t) = -4\cos(t) = -x(t)$; $y(t) = \sin(2t) \Rightarrow y(\pi - t) = -\sin(t) = -y(t)$

D'où $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

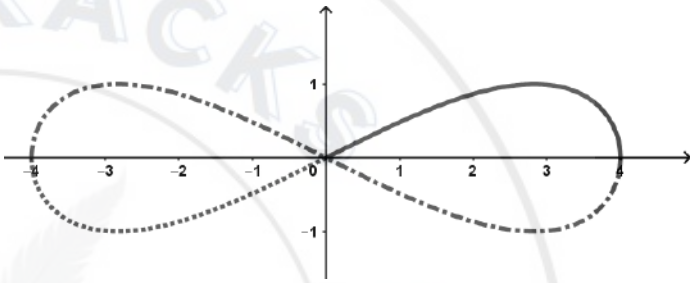
c. Représentation graphique de (C_z)

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t) \Rightarrow$ les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$

En utilisant la question précédente et ce point, on peut alors réduire le domaine d'étude à $[0, \pi/2]$

• Tableau de variation et courbe.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		
$x(t)$	4	↘	$2\sqrt{2}$	↘	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

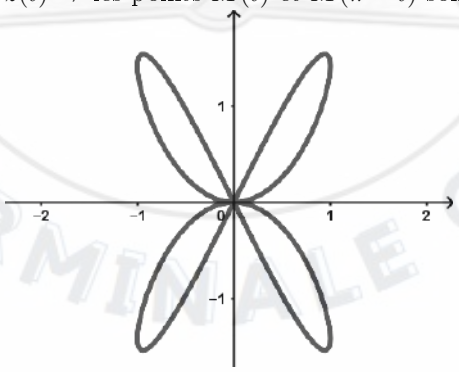


2. $\begin{cases} x(t)y(t) + 2z(t) = 0 \\ x(t) = 4\cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \Rightarrow 4\cos(t)\sin(2t) + 2z(t) = 0$ ou encore $z(t) = -2\cos t \sin(2t)$.

D'où une représentation paramétrique de la courbe (C_x) est : $\begin{cases} y(t) = \sin(2t) \\ z(t) = -2\cos t \sin(2t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

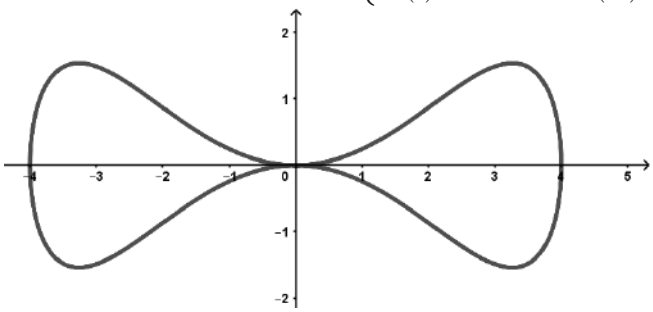
$y(-t) = -y(t)$ et $z(-t) = -z(t) \Rightarrow$ les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

De même $y(\pi - t) = -y(t)$ et $z(\pi - t) = z(t) \Rightarrow$ les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$



Représentation graphique de (C_x)

De même une représentation paramétrique de la courbe (C_y) : $\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ z(t) = -2\cos t \sin(2t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$



Représentation graphique de (C_y)

Correction BAC C-E Togo 2020

Exercice 1

1. Pour que (E_m) ait des solutions, il faut et il suffit que $pgcd(24,9)=3$ divise m.

2. Résolution de (E_3) : Pour $m=3$, (E_3) dévient : $8x+3y=1$

• $8\times(-1)+3\times 3=1 \Rightarrow (-1,3)$ est une solution particulière de (E_3)

• Soit (x,y) une solution de (E_3) alors $8x+3y=1$ or $8\times(-1)+3\times 3=1 \Rightarrow 8x+3y=8\times(-1)+3\times 3$ et par conséquent $8(x+1)=3(3-y) \Rightarrow 3$ divise $8(x+1)\wedge 3=1$ et d'après le théorème de Gauss, on déduit que 3 divise $x+1 \Rightarrow$ qu'il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+1=3k \Rightarrow x=3k-1$

Pour $x=3k-1$, $8x+3y=1 \Rightarrow 8(3k-1)+3y=1$ ou encore $y=-8k+3$

Réciproquement, si un couple est de la forme $(x,y)=(3k-1,-8k+3)$ alors $8x+3y=1$

D'où les solutions de (E_3) sont alors sous la forme $(x,y)=(-1+3k;3-8k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

3. Résolution de (E_{3q}) avec $k\in\mathbb{Z}$: Pour $m=3q$, (E_{3q}) dévient : $8x+3y=q$

• $8\times(-1)+3\times 3=1 \Rightarrow 8\times(-q)+3\times 3q=q$. Par conséquent $(-q,3q)$ est une solution particulière de (E_{3q})

• Les solutions de (E_{3q}) sont alors sous la forme $(x,y)=(-q+3k;3q-8k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ (même démarche qu'à la question précédente)

4. $\begin{cases} n\equiv 20[24] \\ n\equiv 5[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=20+24x \text{ avec } x\in\mathbb{Z} \\ n=5+9y \text{ avec } y\in\mathbb{Z} \end{cases}$ puis on déduit que $20+24x=5+9y$ ou encore $24x+9(-y)=3(-5)$. Dans ce cas $q=-5$ puis on déduit d'après la question précédente que les couples (x,y) sont sous la forme : $(x,y)=(5+3k;15+8k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ puis on déduit que $n=140+72k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement, supposons que n s'écrit sous la forme de : $n=140+72k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors on a :

$n=20+24(5+3k)$ et $n=5+9(15+8k) \Rightarrow \begin{cases} n\equiv 20[24] \\ n\equiv 5[9] \end{cases}$

D'où les solutions de (S) sont les entiers relatifs n s'écrivant sous la forme de : $n=140+72k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 2

1. Par construction, $M\in(OK) \Rightarrow M$ est un point de la première bissectrice différent de O. Donc il existe un réel $t\neq 0$ tel que $m=t+it$. Dans ce cas :

• $|m-1|=|t-1+it|=\sqrt{(t-1)^2+t^2}$ et $|m-i|=|t+i(t-1)|=\sqrt{(t-1)^2+t^2}$. D'où $|m-1|=|m-i|$.

• $(1+im)(1-m)=[(1-t)+it][(1-t)-it]=2t^2-2t+1\neq 0$ car $\Delta=4-4\times 2=-4<0$. D'où $(1+im)(1-m)\in\mathbb{R}^*$

• $m(1-i)=t(1+i)(1-i)=2t\neq 0$ car $t\neq 0$. D'où $m(1-i)\in\mathbb{R}^*$

2-a. Le rapport de s est $k=\dfrac{IM}{IO}=\dfrac{|m-1|}{1}=|m-1|$

b. $J'=s(J)$ et $M'=s(M) \Rightarrow k=\dfrac{M'J'}{MJ}=\dfrac{M'J'}{|m-i|} \Rightarrow M'J'=|m-1||m-i|$

$M'=s(M) \Rightarrow k=\dfrac{M'I}{MI}=\dfrac{M'I}{|m-1|} \Rightarrow M'I=|m-1|^2$ car $k=|m-1|$

c. $|m-1|^2=(m-1)\overline{(m-1)}=[(-1+t)+it][(-1+t)-it]=(-1+t)^2+t^2$

$|m-1||m-i|=|(m-1)(m-i)|=|[(-1+t)+it][t+i(-1+t)]|=|i[t^2+(-1+t)^2]|=t^2+(-1+t)^2$. D'où $M'I=M'J'$

3-a. • s est une similitude directe plane $\Rightarrow$ son écriture complexe est sous la forme de $z'=az+b$.

$s(I)=I$ et $s(O)=M \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b=m \end{cases} \Rightarrow b=m$ et $a=1-m$. D'où l'écriture complexe de s est : $z'=(1-m)z+m$

• L'affixe de $\overrightarrow{JJ'}$ est $z_{J'}-z_J$ or $z_J=i$ et $z_{J'}=i+m(1-i) \Rightarrow$ l'affixe de $\overrightarrow{JJ'}$ est $m(1-i)$

• L'affixe de $\overrightarrow{M'J'}$ est $z_{J'}-z_{M'}$ or $z_{J'}=i+m(1-i)$ et $z_{M'}=m(2-m) \Rightarrow$ l'affixe de $\overrightarrow{M'J'}$ est :

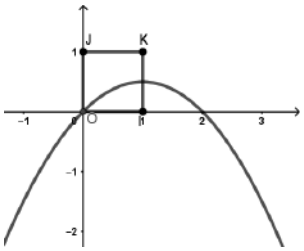
$i+m(1-i)-m(2-m)=i-m-im+m^2$. Or $i(1+im)(1-m)=i(1-m+im-im^2)=i-im-m+m^2$. D'où l'affixe de $\overrightarrow{M'J'}$ est $i(1+im)(1-m)$

b. Par construction, (JK) a pour équation $y=1$. L'affixe de $\overrightarrow{JJ'}$ est $m(1-i)\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \overrightarrow{JJ'}$ est un vecteur directeur de la droite $(JK) \Rightarrow J'\in(JK)$

l'affixe de $\overrightarrow{M'J'}$ est $i(1+im)(1-m)$. Or $(1+im)(1-m)$ est un réel non nul d'après **1.** $\Rightarrow i(1+im)(1-m)$ est imaginaire pur. Par conséquent $\overrightarrow{M'J'}$ est orthogonal à (JK). On en déduit que J' est bien le projeté orthogonal de M' sur (JK).

c. $M'=s(M) \Rightarrow m'=(1-m)m+m=2m-m^2=2(x+ix)-2ix^2$ car m peut se mettre sous la forme $m=x+ix$ avec $x\neq 0$. $m'=x'+iy'=2(x+ix)-2ix^2 \Rightarrow x'=2x$ et $y'=2x-2x^2$. On déduit alors que $y'=x'-\dfrac{x'^2}{2}$. D'où M' appartient à la courbe (P) d'équation $y=x-\dfrac{x^2}{2}$ lorsque le point M décrit la droite (OK) privée du point O

4. Voir la représentation à la page suivante



Problème

A/ 1. • Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-n-2\}$, f_n est dérivable en x $f_n'(x) = \dfrac{2+2n}{(x+n+2)^2} + \mathrm{e}^{-x-1} > 0$

$\Rightarrow f_n$ est strictement croissante sur $]-\infty, -n-2[$ et sur $]-n-2, +\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to(-n-2)^-} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-n-2)^+} f_n(x) = -\infty$

x	$-\infty$		$-n-2$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

2-a. Montrons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ que $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$

• $\mathrm{e}^2 > 3$ et $\mathrm{e}^3 > 5 \Rightarrow$ le résultat est vrai à l'ordre 0 et 1.

• Supposons le résultat vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ et montrons que $\mathrm{e}^{n+3} > 2(n+1)+3$

$\mathrm{e}^{n+3} = \mathrm{e}^{n+2}\,\mathrm{e} > (2n+1)\,\mathrm{e}$ car $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$ (hypothèse de récurrence). Or $\mathrm{e} > 2 \Rightarrow (2n+1)\,\mathrm{e} > 4n+2 > 2n+6 > 2n+5$

D'où le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$

• $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+3} - \mathrm{e}^{-n-2} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+2}}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+2} > 2n+3$ alors $f_n(n+1) > 0$

b. • f_n est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -n-2[\Rightarrow f_n$ est bijective sur cet intervalle.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-n-2)^-} f_n(x) = +\infty$; on déduit alors qu'il existe un unique réel $x_0 \in]-\infty, -n-2[$ tel que $f_n(x_0) = 0$

• De même f_n est continue et strictement croissante sur $]-n-2, +\infty[\Rightarrow f_n$ réalise une bijection sur cet intervalle et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to(-n-2)^+} f_n(x) = -\infty$; on déduit alors qu'il $\exists! u_n \in]-n-2, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$. De plus, $f_n(n+1) > 0$ et $f_n(n) = -\mathrm{e}^{-n-1} < 0$. D'où $u_n \in [n, n+1]$

D'où l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dont une solution positive notée u_n qui appartient à $[n; n+1]$

3. D'après **2-b.**, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n, n+1] \Rightarrow n \leq u_n \leq n+1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

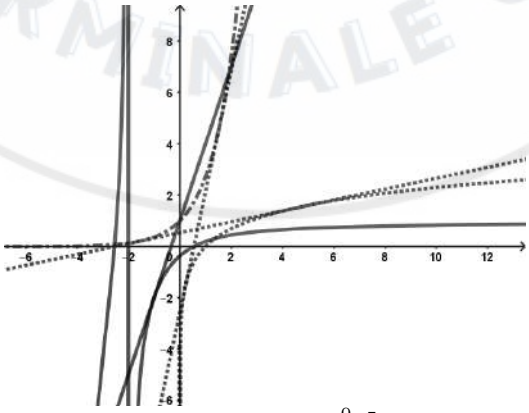
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n, n+1] \Rightarrow n \leq u_n \leq n+1 \Rightarrow \dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{u_n}{1+n} \leq 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n+1} = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

B/ 1. (T) a pour équation : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Rightarrow y = 3x+1$

2-a. $f(0.5) \simeq -0.2$ et $= f(0.6) \simeq 0.03$. Par suite $0.5 < u < 0.6$ et $|0.6 - 0.5| = 10^{-1}$ (on peut s'aider d'une dichotomie pour trouver l'encadrement)

b. Pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une seule solution qui est u. Par conséquent, si $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0 - 1) = 0$ alors forcement $x_0 - 1 = u \Rightarrow x_0 = u+1$. D'où la solution de l'équation, $f(x-1) = 0$ sur $[0, +\infty[$ est $u+1$

3. Voir la figure ci-dessous



4. (T) est au dessus de (C) sur $[-1, 0]$. L'aire demandée est : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[3x+1 - \frac{x}{x+2} + \mathrm{e}^{-x-1}\right] \mathrm{d}x$. Or $\dfrac{x}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$

Alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[3x + \frac{2}{x+2} + \mathrm{e}^{-x-1}\right] \mathrm{d}x = -\frac{3}{2} + 2\ln(2) + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = -\frac{1}{2} + 2\ln(2) - \frac{1}{\mathrm{e}}$ (en unité d'aire)

Puis $\mathcal{A} = \left[-\frac{1}{2} + 2\ln(2) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \times 1cm \times 1cm$. D'où $\mathcal{A} = -\frac{1}{2} + 2\ln(2) - \frac{1}{\mathrm{e}}\ cm^2$

C/ 1. Voir figure

2. Pour $M(x_0, y_0) \in (\gamma)$, la tangente à (γ) en ce point a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0)$ avec $\varphi(x) = \ln x$. Cette tangente passe par $O \Rightarrow -x_0\varphi'(x_0) + \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow 1 = \ln(x_0)$. D'où $x_0 = \mathrm{e}$. D'où seul la tangente au point $M_0(\mathrm{e}, 1)$ à la courbe (γ) passe par O et cette tangente a pour équation $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$.

$\ln(x)$ est la réciproque de la fonction $\mathrm{e}^x \Rightarrow (\Gamma)$ est l'image de (γ) par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice $(y = x)$. Par conséquent, il existe une unique tangente de (Γ) passant par O qui est l'image de $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$ par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice soit une droite d'équation de $y = \mathrm{e}\,x$

3-a. (T_a) a pour équation : $y = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a$ et (D_λ) a pour équation $y = \frac{1}{\lambda}(x - \lambda) + \ln\lambda$

b. (T_a) et (D_λ) sont parallèles pour $\mathrm{e}^a = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$

c. (T_{-1}) a pour équation : $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x + \frac{2}{\mathrm{e}}$ et (D_b) a pour équation $y = \mathrm{e}^a\,x - 1 - a$. Si (T_{-1}) et (D_b) étaient confondues, alors $\mathrm{e}^a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $\frac{2}{\mathrm{e}} = -1 - a$ ce qui est impossible. Donc (T_{-1}) et (D_b) ne sont pas confondues.

(T_a) a pour équation : $y = \mathrm{e}^a\,x + \mathrm{e}^a(1 - a)$ et (D_b) a pour équation $y = \frac{1}{b}x - 1 + \ln b$. (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $\mathrm{e}^a = \frac{1}{b}$ et $\mathrm{e}^a(1 - a) = -1 + \ln b \Leftrightarrow b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^a(1 - a) = -1 - a$ ou encore $b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^{-a} = \frac{a - 1}{a + 1}$

D'où (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^{-a} = \frac{a - 1}{a + 1}$ $(a + 1 \neq 0$ puisque $a \neq -1\ )$

4. $f(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x + 1} - \mathrm{e}^{-x} = 0$ ou encore $\frac{x - 1}{x + 1} = \mathrm{e}^{-x}$. D'où $f(x - 1) = 0$ si et seulement si $\frac{x - 1}{x + 1}\mathrm{e}^x = 1$

5-a. Posons $\psi(x) = g(x) - 1$. ψ est définie, continues et dérivables sur $[0, +\infty[$ de dérivée $\psi'(x) = g'(x) = \frac{(x^2 + 1)\,\mathrm{e}^x}{(x + 1)^2} > 0$

$\Rightarrow \psi$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $\psi(1.5) \simeq -0.1 < 0$ et $\psi(1.6) \simeq 0.14 > 0$. On déduit alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que ψ soit bijective, qu'il existe un unique réel $x_0 \in]1.5, 1.6[$ tel que $\psi(x_0) = 0$. D'où l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution μ dans $[1.5, 1.6]$

$g(\mu) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu - 1}{\mu + 1}\mathrm{e}^\mu = 1$ ou encore $\frac{\mu - 1}{\mu + 1} = \mathrm{e}^\mu$. Par conséquent $f(\mu - 1) = 0$. On déduit alors $\mu = u + 1$ d'après **B/ 2-b.**

b-i. $g(x) \times g(-x) = \frac{x - 1}{x + 1}\mathrm{e}^x \times \frac{-x - 1}{-x + 1}\mathrm{e}^{-x} = 1$

ii. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{x - 1}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x + 1}\mathrm{e}^x = 1$ ou encore $g(x) = 1$.

Or sur $[0, +\infty[$, il existe un unique $\mu \in [1.5, 1.6]$ tel que $g(\mu) = 1$. $g(\mu) \times g(-\mu) = 1$ d'après la question précédente alors $g(-\mu) = 1$. D'où l'équation $\mathrm{e}^{-x} = \frac{x - 1}{x + 1}$ admet deux solutions opposées à savoir μ et $-\mu$

iii. D'après tout ce qui précède, on déduit que les valeurs possibles de a pour que (T_a) et (D_b) soient confondues sont μ et $-\mu$. Ainsi les valeurs possibles de b sont e^μ et $\mathrm{e}^{-\mu}$

D'où les tangentes communes aux courbes (Γ) et (γ) sont : $y = \mathrm{e}^\mu\,x + \mathrm{e}^\mu(1 - \mu)$ et $y = \mathrm{e}^{-\mu}\,x + \mathrm{e}^{-\mu}(1 + \mu)$

iv. Voir la figure.

6-a. $y_A = \mathrm{e}^\mu$ et $y_B = \ln\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)$

b. D'après **C/ 3-c.**, (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^{-a} = \frac{a - 1}{a + 1}$. Ainsi T_μ a pour équation $y = \mathrm{e}^\mu\,x + \mathrm{e}^\mu(1 - \mu)$ et $(T_{-\mu})$ a pour équation $y = \mathrm{e}^{-\mu}\,x + \mathrm{e}^{-\mu}(1 + \mu)$.

La symétrie orthogonale S par rapport à la première bissectrice a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Soit $M'(x', y') = S(M)$ alors $x = y'$ et $y = x'$.

$M \in (T_\mu) \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^\mu\,x + \mathrm{e}^\mu(1 - \mu)$

$\Leftrightarrow x' = \mathrm{e}^\mu\,y' + \mathrm{e}^\mu(1 - \mu)$

$\Leftrightarrow y' = \mathrm{e}^{-\mu}[x' - \mathrm{e}^\mu(1 - \mu)] = \mathrm{e}^{-\mu}\,x' + (\mu - 1)$. Or $\frac{\mu - 1}{\mu + 1} = \mathrm{e}^{-\mu} \Rightarrow \mu - 1 = \mathrm{e}^{-\mu}(\mu + 1)$

D'où $M \in (T_\mu) \Leftrightarrow y' = \mathrm{e}^{-\mu}\,x' + \mathrm{e}^{-\mu}(1 + \mu)$. Par conséquent $M' \in (T_{-\mu})$. D'où (T_μ) et $(T_{-\mu})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

c. Le point de contact A' de (Γ) avec $(T_{-\mu})$ est l'image de B par rapport à la symétrie orthogonale d'axe $y = x$. De même, Le point de contact B' de (γ) avec $(T_{-\mu})$ est l'image de A par rapport à la symétrie orthogonale d'axe $y = x$

Ainsi, $B' = (\mathrm{e}^\mu, \mu)$ et $A' = \left(\ln\frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)$

Correction BAC C-E Togo 2021

Exercice 1

1. P et Q sont confondus si $z^2 = z - 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

2. $Z_{\overrightarrow{MP}} = -1$ et $Z_{\overrightarrow{MQ}} = z^2 - z = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$. $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$

Ainsi $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont alignés si et seulement si $2xy - y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

De plus pour que P et Q soient non confondus, il faut que $z \neq \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z \neq \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. On note A le point d'affixe $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. A et B sont bien sur la droite $x = \dfrac{1}{2}$. De plus si M a pour affixe 1 ou 0, M sera égale à Q. On conclut alors que l'ensemble (E) des points M du plan tels que les trois points distincts M, P et Q soient alignés est l'ensemble $(\mathcal{D}_1) \cup (\mathcal{D}_2)$ privée des points 0, $I(1)$, A et B où $(\mathcal{D}_1)$ est la droite d'équation $y = 0$ et $(\mathcal{D}_2)$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$

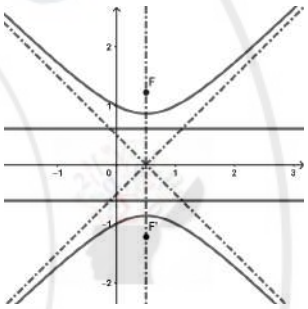
3. $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$Z_{\overrightarrow{PM}} = 1$ et $Z_{\overrightarrow{PQ}} = z^2 - z + 1 = (x^2 - y^2 - x + 1) + i(2xy - y) \Rightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} = x^2 - y^2 - x + 1$

D'où $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux si et seulement si $x^2 - y^2 - x + 1 = 0$. Ainsi l'ensemble (F) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient orthogonaux est d'équation $x^2 - y^2 - x + 1 = 0$

4. $x^2 - y^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \dfrac{3}{4} = 0$

D'où l'ensemble (F) a pour équation $-\dfrac{(x - 1/2)^2}{3/4} + \dfrac{y^2}{3/4} = 1$



Ainsi, (F) est une hyperbole d'excentricité $e = \sqrt{2}$, d'axe focal, l'axe $x = \dfrac{1}{2}$, de foyers $F(1/2, \sqrt{3/2})$ et $F(1/2, -\sqrt{3/2})$, de directrices $y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ et $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, de sommets $S_1(1/2, \sqrt{3}/2)$ et $S_1(1/2, -\sqrt{3}/2)$, d'asymptotes $y = x - \dfrac{1}{2}$ et $y = -x + \dfrac{1}{2}$

Exercice 2

1-a. f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1 + x\,\mathrm{e}^{1-x}}{x} < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} xf(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} [x\,\mathrm{e}^{1-x} - x \ln x] = 0$

c. Pour $x \in]0, 1[$, $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1-t} - t \ln t + t\right]_x^1 = \mathrm{e}^{1-x} + x \ln x - x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \mathrm{e}$

2-a. f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ alors pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ on a :

$f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\dfrac{k}{n}\right) \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t.$

D'où $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b. En sommant les inégalités trouvées en **2-a.** on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\frac{1}{n}\right)$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} = S_n - \frac{1}{n}$. D'où $S_n - \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq S_n - \dfrac{1}{n}$

On a : $S_n - \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq S_n - \dfrac{1}{n} \Rightarrow -\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) - F\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq -S_n \leq -F\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$ puis en multipliant par (-1), on déduit que $F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

3-a. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}[F(1/n)+f(1/n)/n]=\mathrm{e}$ (d'après **1-c.**) et $\lim\limits_{n\to+\infty}[F(1/n)+1/n]=\mathrm{e}$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\mathrm{e}$ d'après le théorème des gendarmes.

b. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{(1-\frac{k}{n})}=\dfrac{\mathrm{e}}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{(-\frac{1}{n})}\right)^k=\dfrac{\mathrm{e}}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\frac{n}{n}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\,\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1]}$. D'où $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{(1-\frac{k}{n})}=\dfrac{e-1}{n\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right]}$

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}k}{\prod\limits_{k=1}^{n}n}\right)$ or $\prod\limits_{k=1}^{n}n=n^n$ et $\prod\limits_{k=1}^{n}k=n!$. D'où $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$

c. • On a : $S_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n}f\left(\dfrac{p}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{(1-\frac{k}{n})}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)=\dfrac{e-1}{n\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right]}-S_n$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1]=\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^X-1}{X}=1$ puis on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right]=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e-1}{n\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right]}=\mathrm{e}-1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\mathrm{e}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)=\mathrm{e}-1-\mathrm{e}=-1$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)=-1$

• $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)=\ln\left[\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\Rightarrow\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)=\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$ puis on déduit que $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\exp\left[\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)\right]$. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ alors on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Problème

A/ 1. $T\circ T$ a pour expression analytique : $\begin{cases}x''=x'\\y''=ax'+by'+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''=x\\y'=a(1+b)x+b^2y+a(1+b)\end{cases}$

2-a-i. Pour $(a;b)=(0;1)$, T a pour écriture complexe : $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}\Rightarrow T$ est la symétrie orthogonale d'axe $y=0$.

ii. Pour $b=0$ et $a\neq0$, $T\circ T=T$ (d'après la question la question précédente) donc T est une projection. De plus dans ce cas, l'ensemble des point invariants est la droite $(\Delta):y=a(x+1)$ et pour tout point M du plan n'appartenant pas (Δ) d'image M' par T, $\overrightarrow{MM'}=[(a-1)x+a]\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $\vec{j}$. D'où pour $b=0$ et $a\neq0$, T est la projection sur la droite $(\Delta):y=a(x+1)$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

b. Si $a=0$ et $b\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$, T a pour expression analytique $\begin{cases}x'=x\\y'=by\end{cases}\Rightarrow$ l'ensemble des points invariants par T est la droite $y=0$ (l'axe des abscisses) car $b\neq0$ et $b\neq1$

• Soit M un point du plan et $M'=T(M)$ alors $\overrightarrow{MM'}=(b-1)y\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle du vecteur $\vec{j}$ (car $b\neq1$)

• Soit $M(x,y)$ et H le projeté de M sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées alors H a pour coordonnées $(x,0)$. $\overrightarrow{HM}=y\vec{j}$ et $\overrightarrow{HM'}=by\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{HM'}=b\overrightarrow{HM}$

D'où si $a=0$ et $b\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$, T est l'affinité de rapport b, d'axe $y=0$ et de direction celle de $\vec{j}$ (affinité orthogonale)

3-a. T est une involution si et seulement si $T\circ T=Id_P$. Or on peut déduire de la question **A/ 1.** que $T\circ T=Id_P$ si $b^2=1$ et $a(1+b)=0\Rightarrow b=1$ et $a=0$ ou $b=-1$ et $a\in\mathbb{R}$

b. Soit $M(,y)$ tel que $M=T(M)$ alors $y=ax+by+a\Rightarrow(1-b)y=a(x+1)$

• Si $b=1$ et $a=0$, l'ensemble des points invariants (J) est le plan $\mathcal{P}$;

• Si $b=1$ et $a\neq0$, l'ensemble des points invariants (J) est la droite $x=-1$

• Si $b\neq1$, l'ensemble des points invariants (J) est la droite $y=\dfrac{a}{1-b}(x+1)$

c.• Pour $b=-1$, T a pour expression analytique : $\begin{cases}x'=x\\y'=ax-y+a\end{cases}\Rightarrow T\circ T=Id_{\mathcal{P}}$ (d'après **A/ 3-a.**). T est alors une involution $\Rightarrow(T)$ est soit une symétrie axiale, soit une symétrie centrale.

• L'ensemble des points invariants par T est la droite $(D):y=\dfrac{a}{2}(x+1)$ d'après **A/ 3-b.**

• Pour tout point $M(x,y)$ n'appartenant pas à (D) et $M'=T(M)$; $\overrightarrow{MM'}=(ax-2y+a)\vec{j}$. On déduit alors que pur point $M\notin(D)$, $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe qui est celle de $\vec{j}$

D'où, pour $b=-1$, T est la symétrie axiale d'axe $(D):y=\dfrac{a}{2}(x+1)$ suivant l'axe des ordonnées.

4-a. Première méthode : Démonstration à l'aide des équations mathématiques (beaucoup plus difficile)

$M_0\neq M\Rightarrow x_{M_0}\neq x_M$ et $y_{M_0}\neq y_M$ ou $x_0\neq x_M$ et $y_{M_0}=y_M$ ou $x_{M_0}=x_M$ et $y_{M_0}\neq y_M$

La droite (M_0M) a pour équation $-(y_{M_0}-y_M)(X-x_{M_0})+(x_{M_0}-x_M)(Y-y_{M_0})=0$

La droite $(M_0'M')$ a pour équation $-[a(x_{M_0}-x_M)+b(y_{M_0}-y_M)](X-x_{M_0})+(x_{M_0}-x_M)(Y-ax_{M_0}-by_{M_0}-a)=0$
La droite (J) a pour équation $-ax+(1-b)y=a$
Cas où (M_0M) est parallèle à (oy) : $x_{M_0}=x_M$ et $y_{M_0}\neq y_M$
$x_{M_0}=x_M \Rightarrow x_{M_0'}=x_{M'}=x_M=x_{M_0}$ (car $x'=x$). Par suite (M_0M) et $(M_0'M')$ sont confondues. Dans ce cas soit (J) est parallèle $(M_0M)=(M_0'M')$ ou coupe $(M_0M)=(M_0'M')$ (Pour deux droites (D_1) et (D_2) données, ces deux droites sont sécantes ou parallèles)
Cas où (M_0M) n'est pas parallèle à (oy) : $x_{M_0}\neq x_M$
• Si (M_0M) et (J) se coupent en un point I alors il existe α_1 et $\alpha_2\in\mathbb{R}$ avec $\alpha_1\neq\alpha_2$ tel que $y_{M_0}-y_M=\alpha_1 a$ et $x_{M_0}-x_M=\alpha_2(1-b)$. Dans ce cas, il faut que $a\neq 0$ car sinon, $y_M=y_{M_0}\Rightarrow(M_0M)$ est parallèle à l'axe des abscisses or si $a=0$, forcement $b\neq 1$ car $M\neq M_0$ et (J) a dans ce cas pour équation : $y=0\Rightarrow(J)$ est l'axe des abscisses ; ce qui contredit le fait que (M_0M) et (J) se coupent.
De même, $b\neq 1$ car sinon $x_{M_0}=x_M\Rightarrow(M_0M)$ est parallèle à l'axe des ordonnées or si $b=1$, forcément $a\neq 0$ car $M\neq M_0$ et (J) a pour équation $x=-1\Rightarrow(J)$ est aussi parallèle à l'axe des ordonnées ; ce qui contredit le fait que (M_0M) et (J) se coupent
Dans ce cas $[a(x_{M_0}-x_M)+b(y_{M_0}-y_M)]=[a\alpha_2+ba(\alpha_1-\alpha_2)]$ et $x_{M_0}-x_M=\alpha_2(1-b)$ puis on déduit d'après tout ce qui précède $a\alpha_2+ba(\alpha_1-\alpha_2)\neq\alpha_1 a$ (si $a\alpha_2+ba(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1 a$ alors $a\alpha_2(1-b)=\alpha_1 a(1-b)\Rightarrow a=0$ ou $b=1$)
Donc si (M_0M) et (J) se coupent alors $(M_0'M')$ coupe (M_0M) et (J)
Montrons que I, point d'intersection de (M_0M) et (J), appartient à $(M_0'M')$. D'après ce qui précède, $x_{M_0}\neq x_M$ et $b\neq 1$.
$I\in(J)\Rightarrow -ax_I+(1-b)y_I=a$; $I\in(M_0M)\Rightarrow y_I-y_{M_0}=\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}(x_I-x_{M_0})$
Pour $x_{M_0}\neq x_M$, $(M_0'M')$ a pour équation $Y=ax_{M_0}+by_{M_0}+a+\left[a+b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}\right](X-x_{M_0})$. Ainsi, pour $X=x_I$, on a :
$ax_{M_0}+by_{M_0}+a+\left[a+b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}\right](x_I-x_{M_0})=ax_{M_0}+by_{M_0}+a+a(x_I-x_{M_0})+b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}(x_I-x_{M_0})$ or
$b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}(x_I-x_{M_0})=b(y_I-y_{M_0})$. Ainsi $ax_{M_0}+by_{M_0}+a+\left[a+b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}\right](x_I-x_{M_0})=by_I+a+ax_I=y_I$ car $-ax_I+(1-b)y_I=a$. Par conséquent $y_I=ax_{M_0}+by_{M_0}+a+\left[a+b\dfrac{y_{M_0}-y_M}{x_{M_0}-x_M}\right](x_I-x_{M_0})\Rightarrow I\in(M_0'M)$

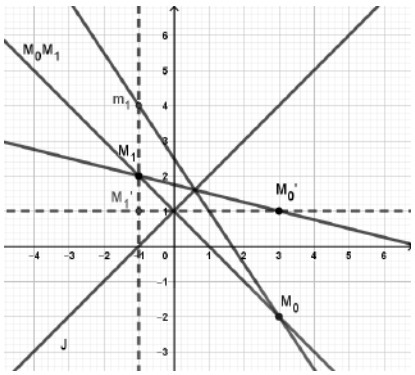
En conclusion, si (M_0M) et (J) se coupent alors (M_0M), $(M_0'M')$ et (J) sont concourantes.

• Si (M_0M) est parallèle à (J) avec (M_0M) non parallèle à (oy), alors il existe un réel α_1 tel que $y_{M_0}-y_M=\alpha_1 a$ et $x_{M_0}-x_M=\alpha_1(1-b)$. Dans ce cas : $[a(x_{M_0}-x_M)+b(y_{M_0}-y_M)]=[a\alpha_1(1-b)+b\alpha_1 a]=\alpha_1 a$ et $x_{M_0}-x_M=\alpha_1(1-b)$ $\Rightarrow(M_0'M')$ est parallèle aussi (J). D'où si (M_0M) est parallèle à (J) alors les droites (M_0M), $(M_0'M')$ et (J) sont parallèles.

En conclusion : les droites (J), (M_0M) et $(M_0'M')$ sont concourantes ou parallèles.

Deuxième méthode : Démonstration à l'aide de l'application T
• Supposons que (M_0M) et (J) se coupent en un point Ω :
$\Omega\in(J)\Leftrightarrow T(\Omega)=\Omega$. De plus $\Omega\in(M_0M)\Rightarrow T(\Omega)=\Omega\in T(M_0M)=(M_0'M)$
Donc (M_0M), (J) et $(M_0'M')$ sont concourantes.
• Supposons que (M_0M) et (J) sont parallèle :
T transforme (M_0M) et (J) en deux droites parallèles. Or $T(J)=J$ et $T(M_0M)=(M_0'M)$. Donc $(M_0'M')$ et (J) sont parallèles. On en déduit donc que (M_0M), (J) et $(M_0'M')$ sont parallèles.
• Supposons que (M_0M) est parallèle à (oy) :
Dans ce cas (M_0M) est globalement invariante par T. $(M_0'M')=(M_0M)$. Donc elles sont parallèles $(b=1)$ ou concourantes $(b\neq 1)$.
b. Cas où (M_0M) n'est pas parallèle à (oy)
• Si (M_0M) et (J) se coupent en un point I, alors le point M' est l'intersection de la droite (IM_0') et la droite d'équation $X=x$ (La droite passant par M et parallèle à l'axe (oy))
• Si (M_0M) et (J) sont parallèles, notons (Δ) la droite passant par M_0' et parallèle à (J). Le point M' est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite $X=x$ (La droite passant par M et parallèle à l'axe (oy))
Cas où (M_0M) est parallèle à (oy)
Pour $M(x,y)$, $\overrightarrow{MM'}=[ax+(b-1)y+a]\vec{j}$. On construit M' de sorte que $\overrightarrow{MM'}=[ax+(b-1)y+a]\vec{j}$
5-a. $M_0(3,-2)$ et $M_0'(3,1)\Rightarrow 3a-2b+a=1$. (J) a pour équation $y=x+1\Rightarrow\dfrac{a}{1-b}=1$. Donc $\begin{cases}4a-2b=1\\ a=1-b\end{cases}$
D'où $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=\dfrac{1}{2}$. L'expression analytique de T est alors $\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{1}{2}(x+y+1)\end{cases}$

b. Le déterminant du système associé à T est $\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow T$ est bijective.



Pour la construction de M_1'
La droites (M_0M_1) n'est pas parallèle à (oy) et (M_0M_1) coupe (J) donc la construction de M_1' se fait en suivant la méthode de construction de la question **A/ 4-b.** en utilisant le cas où (M_0M_1) n'est pas parallèle à (oy) et (M_0M_1) coupe (J). On trouve graphiquement que M_1' a pour coordonnées $(-1, 1)$
Pour la construction de m_1, antécédent de M_1 : $M_1 = T(m_1)$
D'après **4-a.**, on conclut que (m_1M_0), (M_1M_0') et (J) sont concourantes en un point I.
m_1 est alors le point d'intersection de (IM_0') et la droite $x = -1$
Graphiquement, m_1 a pour coordonnées $(-1, 4)$

c. Soit $M(x, y)$ alors H a pour coordonnées $(x, x+1)$ par suite $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}[-x+y-1]\vec{j}$ et $\overrightarrow{HM} = [y-x-1]\vec{j}$.
D'où $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$

On déduit alors que T est l'affinité de rapport $\frac{1}{2}$, d'axe la droite $y = x+1$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

B/ 1. t a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y \end{cases}$
• Soit $M(x, y)$ et $M' = t(M)$ alors $x = x'+1$ et $y = y'$
$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y' = f(x'+1)$. D'où $t(C)$ a pour équation $y = f(x+1)$.
• Soit $M(x, y)$ et $M' = T(M)$ alors $x = x'$ et $y = \frac{1}{b}(y' - ax' - a)$ ($b \neq 0$)
$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{b}(y' - ax' - a) = f(x')$ et par conséquent $y' = ax' + bf(x) + a$. D'où $f(C)$ a pour équation $y = ax + bf(x) + a$.
D'où si f est telle que $T(C) = t(C)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = ax + bf(x) + a$
• Supposons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $f''(x+1) = bf''(x)$ (*). Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f''(n) = b^n f''(0)$
- En utilisant (*) et en remplaçant x par 0, on a : $f''(1) = bf''(0)$ donc le résultat est vrai à l'ordre 1
- Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ alors $f''(n) = b^n f''(0)$. Montrons que le résultat reste encore vrai à l'ordre $n+1$.
D'après (*), $f''(n+1) = bf''(n) \Rightarrow f''(n+1) = b^{n+1} f''(0)$ car $f''(n) = b^n f''(0)$ par hypothèse de récurrence.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $f''(n) = b^n f''(0)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = g''(0)\,\mathrm{e}^{\beta x} \Rightarrow g(x) = \frac{g''(0)}{\beta^2}\,\mathrm{e}^{\beta x} + \gamma x + \delta$. On pose $g''(0) = \alpha$; α, γ et $\delta \in \mathbb{R}$
Réciproquement, si $g(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}\,\mathrm{e}^{\beta x} + \gamma x + \delta$, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\beta x} = g''(0)\,\mathrm{e}^{\beta x}$.
D'où les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = g''(0)\,\mathrm{e}^{\beta x}$ sont : $g(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}\,\mathrm{e}^{\beta x} + \gamma x + \delta$
Dans ce cas, $g(x+1) = \frac{\alpha}{\beta^2}\,\mathrm{e}^{\beta(x+1)} + \gamma x + \delta + \gamma$

3-a. Si $b = 1$ alors $f(x+1) = ax + f(x) + a$ et $f''(x) = f''(0)$. On déduit que $f(x) = \alpha\frac{x^2}{2} + \gamma x + \delta$
$f(x+1) = \alpha\frac{x^2}{2} + (\alpha+\gamma)x + \frac{\alpha}{2} + \gamma + \delta$. Par conséquent $\alpha\frac{x^2}{2} + (\alpha+\gamma)x + \frac{\alpha}{2} + \gamma + \delta = \alpha\frac{x^2}{2} + (a+\gamma)x + \delta + a$ puis par identification on a : $\begin{cases} \alpha+\gamma = a+\gamma \\ \alpha/2 + \gamma + \delta = \delta + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \gamma = a/2 \end{cases}$ par suite $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + \delta$. Or $f(0) = \delta$
D'où, si $b = 1$, $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + f(0)$

b. Si $b \neq 1$, alors $f(x+1) = ax + bf(x) + a$ et $f''(x) = f''(0)\,\mathrm{e}^{x\ln b}$. D'après **B/ 2.**, on déduit que $f(x) = \frac{f''(0)}{(\ln b)^2}\,\mathrm{e}^{x\ln b} + \gamma x + \delta$
$f(x+1) = \frac{f''(0)\,\mathrm{e}^{\ln b}}{(\ln b)^2}\,\mathrm{e}^{x\ln b} + \gamma x + \delta + \gamma \Rightarrow \frac{f''(0)\,\mathrm{e}^{\ln b}}{(\ln b)^2}\,\mathrm{e}^{x\ln b} + \gamma x + \delta + \gamma = b\frac{f''(0)}{(\ln b)^2}\,\mathrm{e}^{x\ln b} + (b\gamma + a)x + b\delta + a$ puis par identification on a : $\gamma = b\gamma + a \Rightarrow$, $\gamma = \frac{a}{1-b}$; $\delta + \gamma = b\delta + a \Rightarrow \delta = -\frac{ab}{(1-b)^2}$. Donc $f(x) = \frac{f''(0)}{(\ln b)^2}b^x + \frac{a}{1-b}x - \frac{ab}{(1-b)^2}$ car $\mathrm{e}^{x\ln b} = \mathrm{e}^{\ln(b^x)} = b^x$
D'après l'expression de f, on déduit que $f(0) = \frac{f''(0)}{(\ln b)^2} - \frac{ab}{(1-b)^2} \Rightarrow f(0) + \frac{ab}{(1-b)^2} = \frac{f''(0)}{(\ln b)^2}$ puis on déduit alors que

$f(x) = \dfrac{a}{1-b}x - \dfrac{ab}{(1-b)^2}(1-b^x) + f(0)b^x$

4-a.• f_1 est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f_1''(x) = 2(\ln 2)^2\,\mathrm{e}^{-x\ln 2} \Rightarrow f_1''(x) = f_1''(0)\,\mathrm{e}^{-x\ln 2}$

• $f_1(x+1) = x + \mathrm{e}^{-x\ln 2} \Rightarrow x + \mathrm{e}^{-x\ln 2} = (a+b)x + 2b\,\mathrm{e}^{-x\ln 2} - b$ puis par identification, on a : $-b + a = 0$ et $a + b = 1$ $\Rightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$

Réciproquement, si $a = b = \dfrac{1}{2}$ alors $f_1(x+1) = ax + bf_1(x) + a$

On conclut alors que f_1 satisfait la condition (I) pour $a = b = \dfrac{1}{2}$

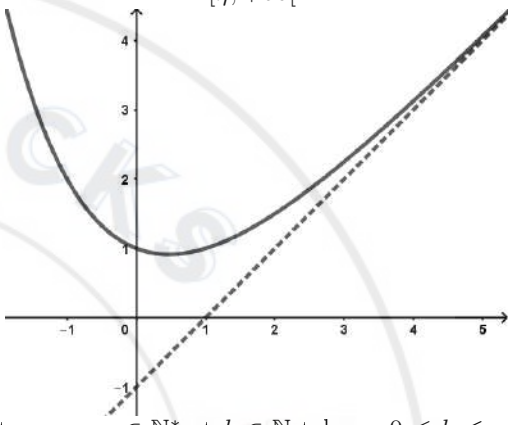
b. f_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_1'(x) = -2\ln 2\,\mathrm{e}^{-x\ln 2} + 1$

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-x\ln 2} = \dfrac{1}{2\ln 2} \Rightarrow x = \dfrac{\ln(2\ln 2)}{\ln 2}$. Notons $\eta = \dfrac{\ln(2\ln 2)}{\ln 2}$; pour $x \in]-\infty, \eta[$, $f_1'(x) < 0 \Rightarrow f_1$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \eta]$, pour $x \in]\eta, +\infty[$, $f_1'(x) > 0 \Rightarrow f_1$ est strictement croissante sur $[\eta, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = +\infty \Rightarrow \mathcal{T}_1$ admet une branche infinie de direction (oy) en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f_1(x) - x] = -1 \Rightarrow$ la droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique de $\mathcal{T}_1$ en $+\infty$

x	$-\infty$		η		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_1(\eta)$	$\nearrow$	$+\infty$



C/ 1-a. Si $b = 1$, $U_{n+1} = an + U_n + a \Rightarrow U_{n+1} - U_n = an + a$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n-1$, $U_{k+1} - U_k = ak + a$ puis en sommant on a : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} [U_{k+1} - U_k] = a\sum\limits_{k=0}^{n-1} k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1} [U_{k+1} - U_k] = U_n - U_0$, $a\sum\limits_{k=0}^{n-1} k = a\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a = na \Rightarrow U_n - U_0 = a\dfrac{n(n+1)}{2}$

D'où, si $b = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}a$

b. Montrons par récurrence sur n que si $b \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = b^n U_0 + a\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)b^k$

• $U_{n+1} = an + bU_n + a \Rightarrow U_1 = bU_0 + a = b^1 U_0 + a(1-0)b^0$ donc le résultat est vrai à l'ordre $n = 1$

• Supposons que le résultat est vrai jusqu'à un ordre $n \geq 1$ et montrons qu'il est aussi vrai à l'ordre $n+1$

$U_{n+1} = an + bU_n + a \Rightarrow U_{n+1} = an + b\left[b^n U_0 + a\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)b^k\right] + a = b^{n+1}U_0 + a(n+1) + a\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)b^{k+1}$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)b^{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (n+1-k)b^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (n+1-k)b^k - (n+1)$

D'où $U_{n+1} = b^{n+1}U_0 + a\sum\limits_{k=0}^{n} (n+1-k)b^k \Rightarrow$ le résultat est aussi vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où, si $b \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = b^n U_0 + a\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)b^k$

2-a. (U_n) est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$. Cette condition est vérifiée pour $a = 0$ et $b = 1$ ou si $U_0 = 0$ et $a = b = 0$ ou si $U_0 \neq 0$ et $a = b = 0$ (dans ce cas, U_n est constante à partir du rang $n = 1$)

b. (U_n) est une suite arithmétique non constante si et seulement si il existe un réel μ non nul tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \mu$. Avec l'expression de U_{n+1}, U_{n+1}, cette condition est vérifiée pour $a = 0$, $b = 1$ et $a \neq 0$ ce qui est impossible.

Cependant si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $U_n = an$ et si de plus $U_0 = 0$ alors la suite (U_n) est une suite arithmétique à partir du rang $n = 0$. Mais si $U_0 \neq 0$, (U_n) est une suite arithmétique à partir du rang 1

c. (U_n) est une suite géométrique non constante si et seulement si il existe un réel $q \neq 1$ et $q \neq 0$ tel que $U_{n+1} = qU_n$. Cette condition est vérifiée pour $a = 0$ et $b \neq 1$ et $b \neq 0$

D'où (U_n) est une suite géométrique non constante pour $a = 0$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

3. On remarque que si $a \neq 0$, la suite (U_n) ne converge pas.

Puis on déduit des questions précédente que si $a = 0$, (U_n) converge si et seulement si $b \in]-1, 1]$. Ainsi :

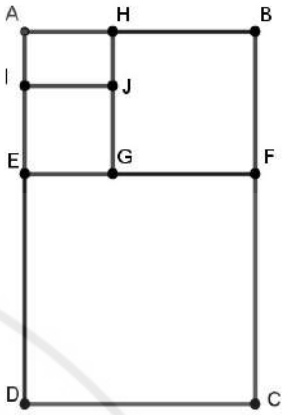
• Si $a = 0$ et $b = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U_0$

• Si $a = 0$ et $b \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Correction BAC C-E Togo 2022

Exercice 1

1-a. Voir la figure



b. • Justifions que $q^2 = 1 - q$

$q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ alors $q^2 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \dfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$

Or $1 - q = 1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{4}(4 - 2\sqrt{5} + 2) = \dfrac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})$. D'où $q^2 = 1 - q$

• Montrons que $FG = q$

$BFGH$ est un carré alors $FG = BF$. Or $BF = BC - FC$. Comme $ABCD$ est un rectangle alors $BC = AD = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. De même comme $FCDE$ est un carré alors $FC = EF = AB = 1$. Par conséquent $BF = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = q$

D'où $FG = q$

• Montrons que $AH = q^2$

Graphiquement on a : $AH = AB - HB$ or $HB = FG = q$ (puisque $BFGH$ est un rectangle) et $AB = 1$

Alors $AH = 1 - q$ or $1 - q = q^2$. D'où $AH = q^2$

2-a. Puisque S_1 est une similitude directe alors elle est une transformation du plan. Par conséquent tout point du plan à un et un seul antécédent. $S_1(F) = F$ et notons M_0 un point du plan tel que $S_1(M_0) = G$

Alors $\dfrac{FG}{FM_0} = q$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FM_0}, \overrightarrow{FG}}) = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow FG = qFM_0$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FM_0}, \overrightarrow{FG}}) = -\dfrac{\pi}{2}$

Or $FG = q$ et $FC = 1$ alors $FG = qFC$ et graphiquement on a $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FG}}) = -\dfrac{\pi}{2}$. On déduit alors que $M_0 = C$

D'où l'antécédent de G par S_1 est C

b. S_1 est une transformation du plan alors l'image du carré $FCDE$ est un carré $F'C'D'E' = FGD'E'$ puisque $S_1(F) = F$ et $S_1(C) = G$. Or $FB = q$ et $FE = 1$ alors $FB = qFE$ et graphiquement $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc $S_1(E) = B$

De même $FD = \sqrt{2}$ et $FH = q\sqrt{2}$ alors $FB = qFE$ et graphiquement $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FH}}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc $S_1(D) = H$

D'où l'image du carré $FCDE$ est le carré $FGHB = BFGH$

3. Les éléments de S_2

$S_2(G) = G$ et $S_2(H) = E \Rightarrow$ le rapport de S_2 est $\dfrac{EG}{HG}$ et son angle est $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}})$. Or $EG = AH = q^2$ et $HG = FG = q$ alors le rapport de S_2 est q. Graphiquement on a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où S_2 est la similitude directe de centre G, de rapport q et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

4-a. • Montrons que $g(D) = E$

$g(D) = S_2 \circ S_1(D)$. Or $S_1(D) = H$ (d'après la question précédente) et $S_2(H) = E$ (par définition). D'où $g(D) = E$

• Montrons que $g(C) = G$

$g(C) = S_2 \circ S_1(C)$. Or $S_1(C) = G$ (d'après **2-a.**) et $S_2(G) = G$ (par définition). D'où $g(C) = G$

b. On sait que $AE = BF = q$ et $AD = BF + 1$ alors $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{q}{1+q}$

Comme S_1 et S_2 sont de similitudes directes alors g est aussi une similitude directe. De plus $g(D) = E$ et $g(C) = G$ alors le rapport de g est $\dfrac{GE}{DC} = \dfrac{FE - FG}{FE} = 1 - q = q^2$, d'angle $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EG}}) = 0$

On a : $\dfrac{q}{1+q} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = q^2$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = 0$. Donc on déduit que $g(A) = A$

D'où g est une similitude directe de centre A, de rapport q^2 et d'angle 0. (c'est l'homothétie de centre A et de rapport q^2)

c. Comme $I = g(E)$ et g est une homothétie de centre A de rapport $0 < q^2 < 1$ alors $I \in [AE]$ et par conséquent $AI = q^2AE = q^3 \Rightarrow EI = EA - AI = q - q^3 = q(1 - q^2) = q^2$ puisque $1 - q = q^2 \Rightarrow 1 - q^2 = q$. Donc $EI = EG$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EI}}) = \pi/2$ puisque $I \in [EA]$

Comme $J = g(F)$ et $I = g(E)$ alors $IJ = q^2EF = q^2$ puisque $EF = 1$. Par suite on déduit que $I \in [HG]$. Et comme $IJ = q^2 = EG = EI$ alors forcement $GJ = q^2$. Donc $EG = GJ = IJ = EI$ avec $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EI}}) = \pi/2$. On conclut alors que le quadrilatère $EGJI$ est de carré. (voir la figure pour la construction des points I et J)

Exercice 2

1-a. Comme $M \in [EC]$ alors il existe un $t \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{ME} + t(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$ ou encore $(1-t)\overrightarrow{ME} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ ce qui veut dire que $M = bar\{(C,t);(E,1-t)\}$ avec $t \in [0,1]$
D'où M est le barycentre des points pondérés (C,t) et $(E,1-t)$ où t appartient à $[0,1]$
Comme $C = (1,1,0)$ et $M = bar\{(C,t);(E,1-t)\}$ alors $X_M = \dfrac{tX_C + (1-t)X_E}{t+1-t} = t$, $Y_M = t$ et $Z_M = 1-t$

b. Le plan médiateur du segment $[IJ]$ est l'ensemble des points équidistants de I et J. $I(1,1/2,0)$ et $J(1/2;1;0)$
Or on a : $IC = \sqrt{0+(1/2)^2} = \dfrac{1}{2}$ et $JC = \sqrt{(1/2)^2+0^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C \in$ au plan médiateur du segment $[IJ]$
De même $EC = \sqrt{1^2+(1/2)^2+1^2} = \dfrac{3}{2}$ et $JE = \sqrt{(1/2)^2+1^2+1^2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow E \in$ au plan médiateur du segment $[IJ]$
Puisque E et C appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$ alors la droite (EC) est inclus dans ce plan. Or $M \in [EC]$ alors M appartient au plan médiateur du segment $[IJ] \Rightarrow IM = JM$ et par conséquent IMJ est un triangle isocèle en M

c. $IM^2 = (1-t)^2 + (1/2-t)^2 + (1-t)^2 = \dfrac{9}{4} + 3t^2 - 5t$

2-a. Le plan médiateur du segment $[IJ]$ est forcement orthogonal à $[IJ]$. Par conséquent le milieu du segment $[IJ]$ que l'on note Ω appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$. Les coordonnées de Ω sont $(3/4, 3/4, 0)$ et on a :
$\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{I\Omega}{IM}$ or $I\Omega = \sqrt{(1/4)^2+(1/4)^2+0^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. D'où $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4IM}$

b. Pour $\theta \in [0,\pi]$, $\dfrac{\theta}{2} \in [0,\pi/2]$. Or si $\dfrac{\theta}{2}$ est maximal θ est maximal et vice-versa. De plus pour $x \in [0,\pi/2]$, la fonction sin est strictement croissante et par conséquent pour $\dfrac{\theta}{2} \in [0,\pi/2]$, $\dfrac{\theta}{2}$ est maximal si $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal c'est-à-dire si $\dfrac{\sqrt{2}}{4IM}$. Or dire que $\dfrac{\sqrt{2}}{4IM}$ revient à dire que IM est minimale. D'où $\dfrac{\theta}{2}$ est maximal si IM est maximale $\Rightarrow \theta$ est maximal si IM est minimale

c. f est continue et dérivable sur $[0,1]$ de dérivée $f'(t) = 6t-5$. Par suite f est strictement décroissante sur $[0;5/6]$ et strictement croissante sur $[5/6;1]$.
On déduit alors que $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \geq f(5/6)$. Ainsi IM est minimale pour $t = \dfrac{5}{6}$. Dans ce cas, on trouve $M_0 = \left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{6}\right)$ et $IM_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Donc la mesure de $\widehat{IMJ}$ est maximale pour $M = M_0$.

Problème

A/ 1-a. Pour $x \in]-2;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+2}$. Or f est dans $S \Rightarrow (2+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(2+x)$
Or si $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+2}$ alors $f'(x) = \dfrac{(2+x)g'(x) - g(x)}{(2+x)^2} \Rightarrow (2+x)f'(x) + f(x) = g'(x)$. Mais comme $(2+x)f'(x) + f(x) = 1+\ln(2+x)$ alors $g'(x) = 1+\ln(2+x)$ puis on conclut que g est une primitive sur $]-2,+\infty[$ de la fonction $h(x) = 1+\ln(2+x)$

b. Soient g_1 une primitive de h et $\forall\, x \in]-2,+\infty[$, $t(x) = \dfrac{g_1(x)}{2+x}$. t est bien dérivable sur $]-2,+\infty[$ de dérivée
$t'(x) = \dfrac{g_1'(x)(2+x) - g_1(x)}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)[1+\ln(2+x)] - g_1(x)}{(2+x)^2} \Rightarrow (2+x)t'(x) + t(x) = 1 + \ln(2+x)$ et par conséquent t est bien un élément de S

2. Pour $x > -2$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x 1\ \mathrm{d}t + \int_0^x \ln(2+t)\ \mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_0^x \ln(2+t)\ \mathrm{d}t = [t\ln(2+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{2+t}\ \mathrm{d}t$
Par suite $\displaystyle\int_0^x \ln(2+t)\ \mathrm{d}t = x\ln(2+x) - \int_0^x \frac{t}{2+t}\ \mathrm{d}t$ or $\dfrac{t}{2+t} = 1 - \dfrac{2}{2+t}$ donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2+t}\ \mathrm{d}t = [t]_0^x - 2\,[\ln(2+t]_0^x$ et par suite
$\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2+t}\ \mathrm{d}t = x - 2\ln(2+x) + 2\ln(2) \Rightarrow \int_0^x \ln(2+t)\ \mathrm{d}t = (x+2)\ln(2+x) - x - 2\ln(2)$ puis on déduit que $F(x) = (2+x)\ln(2+x) - 2\ln(2)$.
D'où les primitives de h sur $]-2,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (2+x)\ln(2+x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

3. D'après **1.** et **2.**, on déduit que f est dans S si et seulement si $f(x) = \dfrac{g(x)}{2+x}$ avec $g(x)$ sous la forme de $g(x) = (2+x)\ln(2+x) + C$.
D'où l'ensemble S sont les fonctions f qui sont sous la forme de $f(x) = \ln(2+x) + \dfrac{C}{(2+x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

B/ 1-a. • Limite f_k en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$ pour tout réel k
• Limite en -2 par valeurs supérieures

Si $k \leq 0$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f_k(x) = -\infty$ et si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f_k(x) = +\infty$

b. f_k est définie, continue et dérivable sur $]-2, +\infty[$ de dérivée

$f_k'(x) = \dfrac{1}{2+x} - \dfrac{k}{(2+x)^2} = \dfrac{x+2-k}{(x+2)^2}$. f_k s'annule en $x_k = -2 + k$

Cas où $k \leq 0$

x	-2		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$+$	
$f_k(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

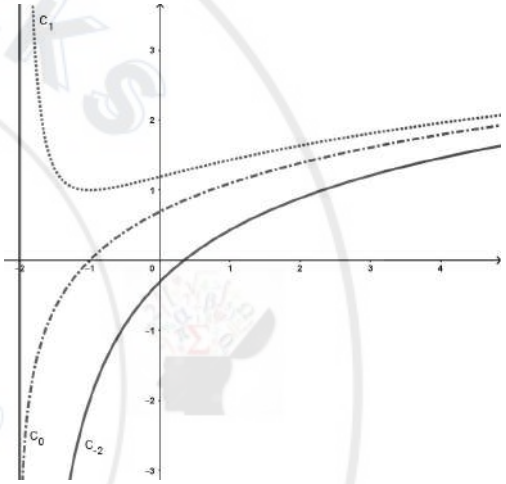
• Pour $k \leq 0$, $x_k \leq -2$ et dans ce cas $f_k'(x) > 0$ pour tout $x \in]-2, +\infty[$ et par conséquent f_k est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$

• Pour $k > 0$, $x_k > -2$ et dans ce cas $f_k'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-2, x_k] \Rightarrow f_k$ est strictement décroissante sur $]-2, x_k]$ et pour $x \in [x_k; +\infty[$, $f_k'(x) \geq 0 \Rightarrow f_k$ est strictement croissante sur $[x_k, +\infty[$.

Cas où $k > 0$

x	-2		x_k		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(x_k)$	↗	$+\infty$

c. Voir la figure



2. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $Q_{n-2}(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}(1+t)^{k-2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k (1+t)^k$

Or $\sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k (1+t)^k$ est la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $(1+t)^2$ et de raison $-1-t \neq 1$ puisque $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ainsi $\sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k (1+t)^k = (1+t)^2 \dfrac{1-[-(1+t)]^{n-1}}{2+t}$

Et par suite $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$

$Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t} \Rightarrow \dfrac{1}{2+t} = Q_{n-2}(t) + (-1)^{n-1}\dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}$

Alors $\dfrac{1}{2+t} = -t + (1+t)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}(1+t)^{n-2} + (-1)^{n-1}\dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}$

b. $f_0(x) = \ln(2+x)$ pour tout $x \in]-2, +\infty[$. On considère $x \in]-1, 0[$

Or $\dfrac{1}{2+t} = (-1)^{n-1}\dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t} + \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}(1+t)^{k-2}$ puis par intégration

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x} \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}(1+t)^{k-2}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_{-1}^{x} \dfrac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(2+t)]_{-1}^{x} = \ln(2+x)$ et

$$\int_{-1}^{x} \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}(1+t)^{k-2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{-1}^{x} (-1)^{k-2}(1+t)^{k-2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}(1+x)^{k-1}$$

Par suite $\ln(2+x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^k + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t$. On pose $P_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^k$

Alors pour tout $x \in]-1, 0[$; $f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t$

3-a. Pour tout $x \in [-1, 0]$ et $\forall t \in [-1, x]$, $1 \leq 2+t \leq x+2 \Rightarrow \dfrac{1}{t+2} \leq 1$ puis comme $(1+t)^{n-1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$

alors $\dfrac{(1+t)^{n-1}}{t+2} \leq (1+t)^{n-1} \Rightarrow \int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{x} (1+t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Or $\int_{-1}^{x} (1+t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{(1+x)^n}{n}$

Mais puisque $x \in]-1, 0[$ alors $1+x \leq 1 \Rightarrow \dfrac{(1+x)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. En conclusion $\forall x \in [-1; 0]$, $\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n}$

b. D'après **2-b.**, $f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow |f_0(x) - P_{n-1}(x)| = \left|\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t\right|$

Or $\forall x \in [-1; 0]$, $\int_{-1}^{x} \dfrac{(1+t)^{n-1}}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n}$ alors $|f_0(x) - P_{n-1}(x)| \leq \dfrac{1}{n}$. De plus, pour $x \in]-1, 0]$, $1+x > 0$ donc

$|f_0(x) - P_{n-1}(x)| \leq \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{|f_0(x) - P_{n-1}(x)|}{(x+1)} \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$ puis que $\left|\dfrac{f_0(x)}{x+1} - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$ (car $1+x > 0$)

D'où $\forall x \in]-1; 0]$, $\left|\phi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$

c. D'après la question précédente, $\forall x \in]-1; 0]$, $\left|\phi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$ par conséquent, pour tout $n \geq 2$

$I_n = \left[-1 + \dfrac{1}{n}; 0\right] \subset]-1, 0]$ et par suite $\forall x \in I_n$, $\left|\phi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \dfrac{1}{n(x+1)} \Rightarrow -\dfrac{1}{n(x+1)} \leq \phi(x) - \dfrac{P_{n-1}(x)}{x+1} \leq \dfrac{1}{n(x+1)}$

Puis en intégrant cette dernière inégalité on a : $-\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{1}{n(x+1)}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\phi(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{1}{n(x+1)}\,\mathrm{d}x$

• $-\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{1}{n(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{1}{n(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

• $\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}(1+x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$

Or $\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}(1+x)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^k}{k}\right]_{-1+1/n}^{0} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k}\frac{1}{n^k}$ par conséquent $\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left[1-\frac{1}{n^k}\right]$

On a : $S_n(0) = -\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = -1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$

$S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) = -1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = -1+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)^2}\frac{1}{n^{k-1}}$

Donc $S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) = -1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\frac{1}{n^k}$. Par suite $S_n(0)-S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left[1-\frac{1}{n^k}\right]$

On déduit alors que $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\phi(x)\,\mathrm{d}x-[S_n(0)-S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)] \leq -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ puis en réarrangeant les termes on déduit que : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\phi(x)\,\mathrm{d}x+S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0) \leq -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\phi(x)\,\mathrm{d}x+S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)$

C/ 1. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que $f_0(x)$ est infiniment dérivables sur $]-2,+\infty[$

• $f_0(x)=\ln(2+x)$. f_0 est dérivable sur $]-2,+\infty[$ de dérivée $f_0'(x)=\frac{1}{2+x}$.

Or $\psi_1(x)+\frac{(1+x)^2}{2+x} = 1-(1+x)+\frac{(1+x)^2}{2+x} = \frac{(2+x)+(1+x)(-2-x+1+x)}{(2+x)^2} = \frac{1}{2+x}$

Par suite $\psi_1(x)+\frac{(1+x)^2}{2+x} = f_0'(x)$. Donc le résultat est vrai à l'ordre $n=1$.

• Supposons que le résultat reste vrai jusqu'à un ordre $n\geq 1$ alors $f_0'(x)=\psi_n(x)+\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$

Or $\psi_{n+1}(x)+\frac{(1+x)^{2(n+1)}}{2+x} = \psi_n(x)+(-1)^{2n}(1+x)^{2n}+(-1)^{2n+1}(1+x)^{2n+1}+\frac{(1+x)^{2(n+1)}}{2+x}$

$= \psi_n(x)+\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}[2+x-(2+x)(1+x)+(1+x)^2] = \psi_n(x)+\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$

Par suite $f_0'(x)=\psi_{n+1}(x)+\frac{(1+x)^{2(n+1)}}{2+x}$ et le résultat est vrai à l'ordre $n+1$ aussi.

D'où $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-2;+\infty[,\ f_0'(x)=\psi_n(x)+\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[-1,0]$, $\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\geq 0 \Rightarrow 0\leq\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[-1,0]$, $1\leq 2+x\leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2+x}\leq 1$ puis $\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\leq(1+x)^{2n}$ et en intégrant entre -1 et 0 on a :

$\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{0}(1+x)^{2n}\,\mathrm{d}x$. Or $\int_{-1}^{0}(1+x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n+1}$

3-a. D'après **C/ 1.**, on a : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-2;+\infty[,\ f_0'(x)=\psi_n(x)+\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$ et en intégrant entre -1 et 0 on a :

$\int_{-1}^{0}f_0'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x$. Or $\int_{-1}^{0}f_0'(x)\,\mathrm{d}x = f_0(0)-f_0(-1) = f_0(0)$ et

$\int_{-1}^{0}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i\int_{-1}^{0}(1+x)^i\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2n-1}\frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i} = U_n$

D'où $\forall n\ \mathbb{N}^*$, $f_0(0) = U_n+\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x$.

b. D'après **C-2.**, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}\,\mathrm{d}x=0$ d'après le théorème des gendarmes. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n = f_0(0)=\ln(2)$

Annexe

Formulaire de trigonométrie circulaire

addition d'un tour

$\cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\tan(x+2\pi) = \tan x$
$\operatorname{cotan}(x+2\pi) = \operatorname{cotan} x$

addition d'un demi-tour

$\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\tan(x+\pi) = \tan x$
$\operatorname{cotan}(x+\pi) = \operatorname{cotan} x$

angle opposé

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\operatorname{cotan}(-x) = -\operatorname{cotan} x$

angle supplémentaire

$\cos(\pi-x) = -\cos x$
$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\tan(\pi-x) = -\tan x$
$\operatorname{cotan}(\pi-x) = -\operatorname{cotan} x$

angle complémentaire

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{cotan} x$
$\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2}-x) = \tan x$

quart de tour direct

$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotan} x$
$\operatorname{cotan}(x+\frac{\pi}{2}) = -\tan x$

quart de tour indirect

$\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$
$\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos x$
$\tan(x-\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotan} x$
$\operatorname{cotan}(x-\frac{\pi}{2}) = -\tan x$

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
$= 2\cos^2 a - 1$
$= 1 - 2\sin^2 a$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Formules de factorisation

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

cos x, sin x et tan x en fonction de t=tan(x/2)

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Divers

$1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$
$1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$
$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
$\forall x \notin \pi\mathbb{Z},\ 1 + \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}.$