NAJ²

Fomesoutra.com
ça soutra !

TERMINALES SCIENTIFIQUES

NGOULEMA AIME JAURES & NGOMA DAOUDA

LE CHEMIN DE L'EXCELLENCE

Cours synthétisés et détaillés

Exercices d'applications

Correction détaillée

Sommaire

V. ISOMETRIE

- Cours
- Exercices d'applications et corrigé
- Exercices

VI. SUITES NUMERIQUES

- Cours
- Exercices d'applications et corrigé
- Exercices

LIMITES ET CONTINUITÉ

Mathématicien Anglais. William Young, issu de parents épiciers, montre dès le primaire un fort potentiel pour les mathématiques à tel point que le directeur de son école, Edwin A. Abott, auteur d'une célèbre livre de mathématiques, ``Flatland´´, l'encourage à poursuivre ses études dans cette direction. Young entre à l'université de Cambridge en 1881. Il est assez probable qu'il ne se serait pas intéressé à la recherche s'il n'avait pas rencontré sa futur femme, Grace Chisholm, elle même tout juste docteur en mathématiques suite à une thèse avec Félix Klein. Young s'est intéressé à la théorie des fonctions réelles et a découvert, de manière indépendante de Lebesgue et avec un autre formalisme, la théorie d'intégration dite de Lebesgue, qui généralise celle de Riemann. Il s'est intéressé aux séries de Fourier et aux séries orthogonales. Sa contribution majeure est sans doute celle apportée au calcul différentiel pour les fonctions à plusieurs variables qui inspira de nombreux livres d'enseignement consacrés à ce sujet. Young fit de nombreux voyages et visita de nombreuses universités en Europe, Amériques, Asie et Afrique. En 1940, alors que la seconde guerre mondial a éclaté, il se retrouve coincé à Lausanne et ne peut rejoindre sa femme et ses cing enfants. Il passa ainsi les deux dernières années de sa vie dans la détresse de cette séparation.

I-Limites, continuités et prolongement

« *Entrainement difficile combat facile* »

EXERCICE 1

Déterminer les limites des fonctions suivantes

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to \pi}\frac{1+cosx}{x-\pi}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{sinx(cos2x-cosx)}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2cosx-1}{4sin^2x-3}$

6) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2})tanx$

7) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-2x-1)$

8) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sinx-cosx}{2x-\frac{\pi}{2}}$

9) $\lim_{x\to \pi}\frac{1+cosx}{(x-\pi)^2}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{\sqrt{1-cos3x}}$

11) $\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-1|}{x+1}$

12) $\lim_{n\to +\infty}\frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-(1+2^2+\cdots+x^n)\right]$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}$

17) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{2cosx-\sqrt{2}}{3x-\frac{3\pi}{4}}$

18) $\lim_{x\to \alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$

19) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\sin 3x}{x\sin x}$

20) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

23) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{3+2\cos x}$

24) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$

25) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos 2x}$

27) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+2\cos x)$

28) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3}{x+\sqrt{x}}$

29) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$

30) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$

31) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x^2}-5}{4x^2}$

32) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{+x\sqrt{+x}}}-\sqrt{x})$

33) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

34) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{\cos x+2}-1}{(x-\pi)^2}$

35) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+4\tan 2x-3\tan 3x}{x^2\tan x}$

36) $\lim_{x\to -\infty}x\cos(\frac{\pi x}{2x+1})$

37) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$

38) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 4x}$

39) $\lim_{n\to +\infty}\frac{n^1+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}$

40) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

Rappel

La partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier qui lui est immédiatement inférieur ou égal, on le note
$E(x).\forall x\epsilon\mathbb{R}\quad E(x)\leq x<E(x)+1$

EXERCICE 2

Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit la fonction numérique définie par

$h : x \mapsto \frac{\sqrt{3x+10}-x}{\sqrt{2x^2+2x-4}-x-1}$

Déterminer l'ensemble de définition D de h puis déterminer la limite de h en 5

Exercice4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

Par: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} \; si \quad x > 4 \\ (x+k)^2 si \quad x \leq 4 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de k pour que f soit continue sur son ensemble de définition

Exercice5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

Par :$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2x + 5 \quad si \; x > 4 \\ (x+k)^2 \qquad si \; x \leq 4 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de k pour que f soit continue en 4.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur$\mathbb{R}$

Par :$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \quad si \; \neq 0 \\ 0 \quad si \; x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice7

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$et à valeurs dans $[0\,;1]$.Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution

Exercice8

On considère l'équation (E) : $x^3 + 3x - 2 = 0$

1) Justifier que (E) admet une unique solution α $dans$ $\mathbb{R}$.
2) Donner un encadrement de α d'amplitude10^{-3}

Exercice9

Montrer que l'équation$x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions réelles dans $\mathbb{R}$.

Exercice10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = \begin{cases} 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) si \; x \neq 0 \\ 0 \quad si \; x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout x $x\epsilon\,\mathbb{R}^+$,$|f(x)|$<|x|
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) Etudier la continuité de f en $x_0 > 0$

Exercice11

Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 1} \; si \; x > 1 \\ f(x) = x^3 + 3x - 2 \; si \; x \leq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites en +∞ et $-\infty$
2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
3) Démontrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans$]-1\,;1[$.

   b) Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}75$

   c)Déterminer le signe $f(x)$ sur $]-1;1[$

Exercice12 (interro TD LPEE 2018)

Soit la fonction $f: x \mapsto 3x + 2\sin x$

1 a)Montrer que pour tout x de$\mathbb{R}$ on à :

$$3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} \; si \; x \neq 0 \\ \frac{1}{5} \; si \; x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x\ de\ \left]\frac{2}{3};+\infty\right[\ \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

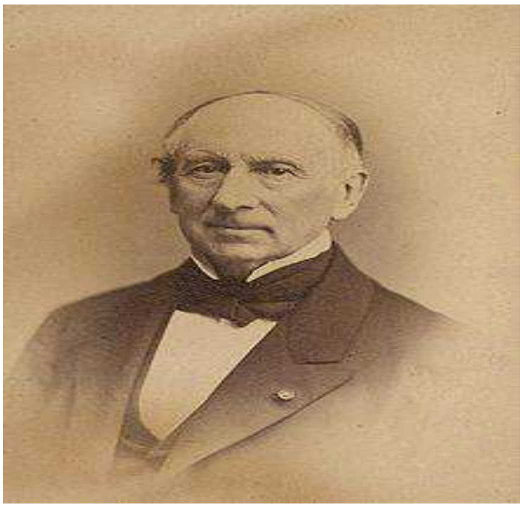
Execice13

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

1) Calculer la limite de la fonction f en 1.
2) En déduire que la fonction g est un prolongement par continuité de f en 1

« ***Le but n'est pas d'être meilleur que les autres, mais bien d'être meilleur que la personne que vous étiez hier.*** »

Dérivabilité et étude de fonctions



Mathématicien français, Cauchy est, après Léonard Euler (voir 1 page 29), et avec près de 800 publications, le mathématicien le plus prolifique de l'histoire des mathématiques. Il fut un pionnier dans diverses branches des mathématiques comme l'étude de la convergence et de la divergence des séries (notions que vous découvrirez en spé), l'étude des groupes de permutations (voir le chapitre 26, ce travail fut précurseur de la théorie des groupes). Il travailla sur la théorie des équations différentielles et fut le découvreur des fonctions holomorphes. Il ne se comporta pas toujours de manière adroite avec les jeunes mathématiciens. Il sous-estima ainsi le travail d'Abel ou de Galois et égara même un mémoire, pourtant capital, de ce dernier. Il fut enseignant à l'école Polytechnique. Son cours était d'une rigueur inhabituelle pour l'époque et il fut décrié au départ par ses élèves et ses collègues. Il allait néanmoins devenir une référence pour tout travail en analyse au 19ème siècle.

II-DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

1-DERIVABILITE

1.1-DERIVABILEEN UN POINT

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I de IR et $a\epsilon I$

f est dérivable en a si et seulement si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L \quad L\epsilon IR$$

L S'appelle de nombre dérivé de f en a

Dans ce cas la courbe de f admet une tangente au point $A(a,f(a))$ d'équation cartésienne $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$f'(a)$ est le coefficient directeur(ou la pente) de la tangente, son vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}$

Interprétation graphique

Si f est continue sur I et sa courbe ne présente aucun changement brusque dans son allure alors f est dérivable en tout point a de I

APPLICATION 1

1) Etudier la dérivabilité de f en 1

$f(x)=2x^2-3x+1$

Correction

1) $lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$

$=lim_{x\to1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)}$

$=lim_{x\to1}(2x-1)$

$=1$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=1$

1.2-Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite en un point

Définition

■f est une fonction définie sur un intervalle du type $[a,b[$

■f est dérivable a droite en a si et seulement si $lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L_1 \quad L_1\in IR$

L_1 S'appelle le nombre dérivé de f à droite en a

Dans ce cas la courbe f admet une demie tangente à droite au point $A(a,f(a))$ d'équation cartésienne : $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$

$f'_d(a)$ est le coefficient directeur de cette demie tangente et son vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\f'_d(a)\end{pmatrix}$

■f est une fonction définie sur un intervalle du type $]b,a]$

■f est dérivable à gauche en a si et seulement si $lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L_2 \quad L_2\in IR$

L_2 S'appelle le nombre dérivé de f à gauche en a

Dans ce cas la courbe f admet une demie tangente à gauche au point $A(a,f(a))$ d'équation cartésienne $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$

$f'_g(a)$ est le coefficient directeur de cette demie tangente et son vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-f'_g(a)\end{pmatrix}$

Théorème : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en en a c.-à-d. $f'_d(a)=f'_g(a)$

***Remarque** : $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ alors f n'est pas dérivable en a et le point $A(a,f(a))$ est un point anguleux. Dans ce cas les deux demi tangente ne sont pas portés par la même droite*

Cas particuliers :

■ si f est derivable en a et $f'(a)=0$, alors la courbe de f admet en $A(a,f(a))$ une tangente horizontale.

■ si $lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ Alors (C_f) admet à droite au point $A(a,f(a))$ une demi tangente

verticale dirigé vers le haut définit par : $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$ **interprétation graphique**

■ si $lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ Alors (C_f) admet à droite au point $A(a, f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le bas définit par : $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$ **interprétation graphique**

■ si $lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ Alors (C_f) admet à gauche au point $A(a, f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le bas définit par : $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$ **interprétation graphique**

■ si $lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ Alors (C_f) admet à gauche au point $A(a, f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le haut définit par : $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$ **interprétation graphique**

APPLICATIONS 2

Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la dérivabilité de f en 2 et en -2, puis interpréter les résultats obtenus.

CORRECTION

1$\{\forall\, x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0\} \Leftrightarrow D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

2-$lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}-x+2}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} - 1\right)$$

$$= lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}} - 1\right.$$

$$= -1 + lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{(x+2)}{(x-2)}}$$

Par ailleurs limite d'une composé ce donne comme suite

$\begin{cases} lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty \\ lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$ d'où $lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{(x+2)}{(x-2)}} = +\infty$

Par somme de limite $lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

Conclusion : f n'est pas dérivable à droite en 2 et (C_f) de f admet au point d'abscisse 2 une demie tangente verticale dirigée vers le haut.

APPLICATIONS 3

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

1) donner le domaine de définition de f et écrire sans symbole de valeurs absolues

2) étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en -1

CORRECTION

1) $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\forall \in]-\infty; -1] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1}$$

$$\forall \in [-1; 0] \quad f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}$$

$$\forall \in [0; +\infty[\quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

2 continuités

Rappel : une fonction f définie sur I et soit$a \in I.f$ Est continue en a si et seulement si f a une limite en a égale a $f(a)$.En particulier f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Continuité en -1

$*$ $lim_{x \to -1^+} f(x) = lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{2} = f(-1)$

Donc f est continue en -1.

Continuité en 0

$*$ $lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 1 à gauche et à droite

$$\lim_{x\to -0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}$$

$$=0$$

Donc f est dérivable à droite en 0 $, f'_d(0)=0$

Conclusion : $f'_g(0)=f'_d(0)$ *donc f est dérivable en 0.*

Rappelons quelques résultats importants :

Dérivées des fonctions usuelles :

f	f'	*L'ensemble de dérivabilité*
$x\longmapsto x^n\ n\epsilon IN^*$	$x\longmapsto nx^{n-1}$	IR
$x\mapsto\frac{1}{x^n}\ n\in IN^*$	$x\mapsto -nx^{-n-1}$	IR^*
$x\longmapsto sin(ax+b)$ $a\neq 0$	$acos(ax+b)$	IR
$x\mapsto cos(ax+b)$ $a\neq 0$	$-asin(ax+b)$	IR
$x\mapsto tg(ax+b)$ $a\neq 0$	$a[1+tg^2(ax+b)]$	*Tout intervalle inclus dans* D_f
$x\longmapsto\sqrt{x}$	$x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	IR_+^*

Opération sur les fonctions dérivables

f	f'	*Intervalle de dérivabilité*
$f+g$	$f'+g'$	I
af	af'	I
f^n	$nf'f^{n-1}$	I
$f\times g$	$f'.g+g'.f$	I
$\frac{f}{g}\quad (g\neq 0)$	$\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$	*Tout intervalle inclus* $\{x\in I, g(x)\neq 0\}$
$\sqrt{f}\ ,\ f>0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	*Tout intervalle inclus* $\{x\in I, f(x)>0\}$
gof	$f'\times(g'of)$	I

APPLICATION 4

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes

$f(x)=(1-2x)^n\quad g(x)=cos^2(2x+1)$

$h(x)=\sqrt{x^2+1}\qquad ;\qquad l(x)=\frac{x}{x^2-3x}$

■ *f est dérivable sur IR comme compose de fonction dérivable sur IR*

$$f'(x)=n(1-2x)'(1-2x)^{n-1}$$

$$f'(x)=n\times -2\times(1-2x)^{n-1}$$

$$f'(x)=-2n(1-2x)^{n-1}$$

■ *g est dérivable sur IR comme composé de dérivable sur IR*

$$g'(x)=2\times\left(cos(2x+3)\right)'cos^{2-1}(2x+3)$$

$$g'(x)=2\times -2\times sin(2x+3)\,cos(2x+3)$$

$$g'(x)=-4\,sin(2x+3)\,cos(2x+3)$$

■ *h est dérivable sur IR*

$$h'(x)=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\forall\in IR\qquad h'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

■ *l est dérivable sur* $IR-\{0;3\}$ *comme quotient de fonctions*

$$l'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'$$

$$l'(x)=\frac{(x)'(x^2+1)-(x+1)'x}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall\in IR-\{0;3\}\quad l'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-x}{(x^2+1)^2}$$

$$l'(x)=\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^2}$$

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $f'(x)$=0 sur I alors f est constante sur I.

Si $f'(x) \geq 0$ sur I alors la fonction f est croissante sur I.

Si $f'(x) \leq 0$ sur I alors la fonction f est décroissante sur I.

Si $f'(x) > 0$ sur I alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Si $f'(x) < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

NB :

Déterminer le sens de variation d'une fonction f revient à :

- *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*
- *Etudier la continuité et la dérivabilité.*
- *Calculer la dérivée et étudier son signe.*
- *Conclure.*

Fonctions :

Définition : *une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre, un unique autre nombre appelé images.si on appelle f cette fonction, l'image de x par f sera note*

$:x \xrightarrow{f} y$ ou $y = f(x)$ *On dit que y est l'image de x par la fonction f que x est un antécédent de y par f.*

Fonctions réciproques

- *Soit I un intervalle de IR et f une fonction définie sur I. On dit que f réalise une bijection de I sur f(I) si pour tout y de f(I) l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique sur I.*
- *Soit f une bijection de I sur f(I). on appelle fonction réciproque de f et note f^{-1}la fonction définie sur f(I) qui à tout y de f(I) associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$ il en découle que $\forall x \epsilon I$ et $\forall y \epsilon f(I), f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$ et $(f^{-1} o f)(x) = x$ Et aussi $(f o f)(y) = y$.*

Théorèmes : (bijection)

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f(I) de plus f^{-1} possede le même sens de variation que f

- $\begin{cases} x = f(y) \\ y \epsilon I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \epsilon f(I) \end{cases}$
- *(C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à (D) : y = x.*

Théorème : (dérivabilité de f^{-1})

- *Si :*

$$\begin{cases} f \text{ est strictement monotone.} \\ f \text{ est dérivable sur } I \text{ alors } f^{-1} \text{est dérivable sur } f(I) \\ f' \text{ne s'annule jamais sur } I \end{cases}$$

Et on a pour tout $x \epsilon f(I)$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f(y)}$ *avec* $y = f'(x)$.

Application : 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) *Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.*
2) *Montrer que f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \epsilon \left]\frac{-1}{3}; 0\right[$*

CORRECTION

f est dérivable sur IR comme fonction polynôme et$\forall$ x IR $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

Le signe de f'.

_Résolvons les inéquations suivantes : $3x^2$ $-2x+3>0$ et $3x^2$ $-2x$ $+3< 0$

Pour cela posons :$3x^2$-2x +3 = 0

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(3) < 0$$

x	$-\infty$ $+\infty$
f'(x)	+

f est strictement croissante sur IR.

- *f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur*

$]lim_{x\to-\infty} f(x)\,;lim_{x\to+\infty} f(x)[$, C'est à dire $]-\infty;+\infty[$

Donc : $J =]-\infty;+\infty[$

On sait que f est continue et strictement croissante sur IR, à fortiori sur $\left]\frac{-1}{3};0\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{3};0\right[$ sur $\left]f\left(-\frac{1}{3}\right);f(0)\right[= \left]-\frac{4}{27};1\right[$

De plus : $0\epsilon\ \left]-\frac{4}{27};0\right[$ de ce fait l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha\ \epsilon \left]-\frac{1}{3};0\right[$ tel que

$tel\ que\ f(\alpha) = 0$

Application 6 :

Soit f la fonction définie sur D= $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\ par\ f(x) = \frac{1}{cosx}$

1a) Montrer que f est dérivable sur D.

b) Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 1.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $I \setminus \{1\}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

Correction :

1 a) La fonction cosinus est dérivable sur

$\mathbb{R}\ comme\ fonctio\ trigo\ a\ fortoiri\ sur\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{cosx}-1}{x}$$

$$= lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\cos x}$$

$$= lim_{x\to0^+}\frac{x}{cosx}\times\frac{1-cosx}{x^2}$$

$$= 0\times\frac{1}{2}$$

$$= 0$$

Donc f est dérivable à droite en 0.

Dérivabilité en $\frac{\pi}{2}$

Par une méthode analogue $lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$

Conclusion : f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a: $f(x)' = \frac{sinx}{cos^2x}$

$$\forall\ x\ \epsilon\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\ cosx \geq 0\ et\ sinx\ \geq 0$$

Alors :$f'(x) = \frac{sinx}{cos^2x} \geq 0\ d'où\ f\ est\ croissante\ sur\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	
f	1 ↗	$+\infty$

2) f est continue et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$

avec :$f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = [1;+\infty[= I$

D'où $I = [1+\infty[$

2)$f'(0) = 0$ donc la courbe admet au point d'abscisse 0 une demie tangente horizontale.

De ce fait :$\left(C_{f^{-1}}\right)$ admet au point d'abscisse 1 une demie tangente verticale.

Donc :f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1.

3) f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) \neq 0, alors\ f^{-1}est\ derivable\ sur]1;+\infty[$

Et pour tout x de $]1;+\infty[\ (f^{-1})' = \frac{1}{f\prime(f^{-1})(x)}$

$$= \frac{1}{f\prime(y)}$$

Posons :$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{cosy}$

$$\Leftrightarrow cosy = \frac{1}{x}$$

De ce fait : $siny = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ alors $(f^{-1})'(x) = \frac{cos^2y}{siny}$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

- ***Théorème des accroissements finis***

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors il existe un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

- ***Théorème : (inégalités des accroissements finis)***

Si f est une fonction continue $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et si pour tout x de $]a;b[$ il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$

- ***Corollaire***

Si on a : $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ |f'(x)| \leq k\ \forall x \epsilon I \\ a \text{ et } b \in I \text{ avec } a < b \end{cases}$

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$

Application 7 :

1) Démontrer que pour tout nombre réel a de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $a \leq \tan a \leq 2a$
2) Démontrer que pour tout a et b de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\frac{b-a}{(cosa)^2} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{(cosb)^2}$

CORRECTION :

Considérons la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x) = tanx$. f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] f'(x) = 1 + tan^2x$$

$$\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\ f'(x) > 0$$

<u>Conclusion</u> : f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ on a: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

En appliquant tangente on a :

$$\tan 0 \leq \tan x \leq \tan\frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq tan^2x \leq 1$$

$$1 \leq 1 + tan^2x \leq 2$$

$$1 \leq f'(x) \leq 2$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ on a :

$$1(a-0) \leq f(a) - f(0) \leq 2(a-0)$$

$$a \leq f(a) \leq 2a$$

D'où : $\forall\, x\epsilon \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\ a \leq \tan a \leq 2a$

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$

La fonction tangente est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\ f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$

Soit a et b appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ avec $a < b$ et $x\epsilon \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction cosinus st strictement décroissante et strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $a \leq x \leq b$

$$\cos a \leq \cos x \leq \cos b$$

$$cos^2b \leq cos^2x \leq cos^2a$$

$$\frac{1}{cos^2a} \leq \frac{1}{cos^2x} \leq \frac{1}{cos^2b}$$

$$\frac{1}{cos^2a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{cos^2b}$$

D'après les inégalités des accroissements finis on a :

$$\frac{b-a}{cos^2a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{cos^2b}$$

Application : 8

Soit f la fonction définie par $-0{,}5x^2 + x + 1$

1) Montrer que pour tout $x \in [1; 1.5]$ on a : $|f'(x)| \leq 0{,}5$
2) Montrer que $\forall\ x\epsilon\ [1; 1{,}5]\ \ |f(x) - \sqrt{2}| \leq 0{,}5|x - \sqrt{2}|$

Correction :

1) f est continue et dérivable sur$[1; 1{,}5]$ et

$$\forall\ x \in [1; 1{,}5] \quad f'(x) = -x + 1$$

Et $\forall\ x \in [1; 1{,}5] \quad 1 \leq x \leq 1{,}5$

$$-1{,}5 \leq -x \leq -1$$

$$-0{,}5 \leq 1 - x \leq 0 \leq 0{,}5$$

Donc : $|f'(x)| \ \leq 0{,}5$

2) remarquons que
$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\ \ \epsilon\ [1; 1{,}5]$ et $\left|f'(x)\right| \leq 0{,}5$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliqué à $[1\,; 1{,}5]$ *on a* :

$|f(x) - f(\sqrt{2})| \leq 0{,}5|x - \sqrt{2}|$ Or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Conclusion : $|f(x) - \sqrt{2}| \leq 0{,}5|x - \sqrt{2}|$

Etude de fonction

Point d'inflexion

Soit f la fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de IR et $a \in I$. Si f'' s'annule en changeant de signe alors le point I (a ;f(a)) est un point d'inflexion pour la courbe de f.

Parité :

f est paire $\Leftrightarrow \forall x\ D_f$ on a: $\begin{cases} -x\ \epsilon D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

- Si f est paire ou impaire le domaine d'étude se réduit à $D_f \cap [0; +\infty[$
- Si f est paire alors la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe $(o; \vec{j})$
- Si f est impaire alors la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe $(o; \vec{\imath})$

Périodicité :

f est périodique de période T $\Leftrightarrow \forall x\ \varepsilon D_f$ on a :

$$\begin{cases} x + T\ \epsilon D_f \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

- Si f est de période T, le domaine d'étude se réduit à un intervalle d'amplitude T contenue dans D_f

Application 9 :

Soit la fonction f définie sur IR par :f(x)= $|sinx|$

1) Etudier la parité de f
2) Montrer que f est périodique

Correction :

1) $\forall x\epsilon\mathbb{R}\,; -x\epsilon\mathbb{R}$ donc : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. et : $f(-x) = \left|sin -x\right|$

Or : $sin(-x) = -\sin x$ car : la fonction $x \longmapsto \sin x$ est impaire. Alors : $f(-x) = \left|-\sin x\right|$

$$= \left|\sin x\right|$$

D'où : $\forall\ x\mathbb{R}:\ f(-x) = f(x)$

Conclusion : la fonction f est paire.

2) $\forall\ x\ \epsilon\mathbb{R},\ x + \pi\ \epsilon\ \mathbb{R}\ , f(x + \pi) = \left|sin(x + \pi)\right|$

$$= \left|-\sin x\right|$$

$$= \left|\sin x\right|$$

$$f(x + \pi) = f(x)$$

Conclusion : la fonction f est π-périodique.

Application10 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = 3\,sin(4x + \frac{\pi}{6})$

1) Démontrer que f est T-périodique et déterminer sa période
2) Calculer la dérivée de f
3) Etudier le signe de f' et les variations de f sur$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

CORRECTION :

1) $\forall\ x\ \epsilon \mathbb{R}\ ,\ x + T\ \epsilon\ \mathbb{R}$.

On a $f(x + k\pi) = 3\,sin(4(x + k\pi) + \frac{\pi}{6})$

$$= sin(4x + 4k\pi + \frac{\pi}{6})$$

Or : $4k\pi = 2\pi \Longrightarrow k = \frac{1}{2}$

Donc : $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\,sin(4x + \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$

$$= 3\,sin(4x + 2\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= 3\,sin(4x + \frac{\pi}{6})$$

D'où :$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$

Conclusion : f est $\frac{\pi}{2}$ périodique.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 12\,cos(4x + \frac{\pi}{6})$

3) résolvons l'équation $f'(x) = 0$

On a :

$12\,cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ Ou $4x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{6}\ ou\ 4x = -\frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\ \ ou\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Comme f est$\frac{\pi}{2}$ –périodique donc on peut réduit notre étude de $\mathbb{R}$ sur$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Et$\forall\ x\epsilon \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

On a :$-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$

Le signe de f' sur $\left[0; \frac{\pi}{12}\right]$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$$

$$0 \leq 4x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq 4x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

En appliquant cosinus

$$0 \leq cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq f'(x) \leq 6\sqrt{3}$$

On peut conclure que $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur$\left[0; \frac{\pi}{12}\right]$. Même raisonnement sur $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$ et sur$\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Axe de symétrie :

$(\Delta): x = a$ est un axe de symetrie pour la droite(C) $\Leftrightarrow$ $\forall x\ \epsilon\ D_f : \begin{cases} (2a - x)\epsilon D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Si$(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie pour (C) alors on peut réduire le domaine d'étude à $[a; +\infty[$.

Centre de symétrie :

$A(a; b)$ est un centre de symétrie pour (C) $\Leftrightarrow$ $x\epsilon\ D_f$ on a :$\begin{cases} 2a - x\ \epsilon\ D_f \\ f(2a - x) + f(2a + x) = 2b \end{cases}$

Si A(a ;b) est un centre de symétrie pour (C) alors le domaine d'étude est réduit à $D_f \cap [a; +\infty[$.

Application : 11

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ *et (C) sa courbe représentative. Démontrer que le point* $(3; 2)$ *est un centre de symétrie de la courbe représentative de*

CORRECTION :

f *Existe ss i* $x \neq 3$; *donc :*$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$: $f(x) = 2 + \frac{5}{x-3}$

pour tot$x \in D_f$, $3 - x \in D_f$ $3 + x \in D_f$.

On a : $f(3-x) + f(3+x) = 2 + \frac{5}{(3-x)-3} + 2 + \frac{5}{(3+x)-3}$

$$= 2 + \frac{-5}{x} + 2 + \frac{5}{x}$$

$$= 4$$

Donc : $f(3-x) + f(3+x) = 4$

Alors le point (3 ; 2) est un centre de symétrie a la courbe représentative de f.

Branches infinis :

Soit f une fonction numérique, a et b deux réels

- *si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *alors la droite d'équation* $x = a$ *est asymptote à* (C)
- *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ *alors la droite d'équation* $y = b$ *est asymptote à*(C).
- *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *alors on calcule* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
- *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ *alors* (C) *admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de* ∞
- *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ *alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.*
- *Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ *alors on calcule* $\lim_{x\to\infty} [f(x) - x]$
- *Si* $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ *alors la droite d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote au voisinage de* ∞ .
- *si*$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$ *alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'équation*$y = ax$.

Position relative

Pour étudier la position relative (C_f) *par rapport à*(D): $y = ax + b$, *sur I on peut procéder comme suit :*

1) *on calcule la différence de (* $f(x) - (ax + b)$)
2) *on étudie le signe de cette différence*
3) *on conclut.*

- *Si sur I* $(f(x) - (ax + b)) > 0$ *alors* $f(x) > ax + b$. *D'où :*(C_f) *est au-dessus de (D) sur I*
- *Si sur I* $[f(x) - (ax + b)] < 0$ *alors* $f(x) < ax + b$. *D'où :*(C_f) *est en dessous de (D) sur I.*
- *Si en* x_0 $f(x) - (ax + b) = 0$ *alors* (C_f)*et* (D) *se coupent au point d'abscisse* x_0

Extremum :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- *On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout* $x \in J, f(x) \leq f(a)$.
- *On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout* $x \in J$, $f(x) \geq f(a)$.
- *On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*
- *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant a. Si f admet un extremum local en a alors* $f'(a) = 0$.*Si* $f'(x)$ *s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.*

Application12 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Exprimer $f(x)$ sans symbole valeur absolue.
2)
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisse 1 et 5 ?
4) Etudier les variations de f
5) Démontrer que les droites d'équations $y=x-3$ et $y=-x+3$ sont asymptotes à (C).
6) Démontrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation

CORRECTION:

On a: $x^2-6x+5=x^2-5x-x+5$

$$=x(x-1)-5(x-1)$$

$$=(x-1)(x-5)$$

1) $\forall\ x\epsilon]-\infty;1]\cup[5;+\infty[\ f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$

Et $\forall\ x\ \epsilon\ [1;5]\ \ f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

2) f est continue sur $]-\infty;1]\cup[1;5]\cup[5;+\infty[$ comme composée de deux fonctions continue sur cet intervalle.

On : $lim_{x\to1_<}f(x)=0$ et $lim_{x\to1_>}f(x)=0$

Par ailleurs : $lim_{x\to1_<}f(x)=lim_{x\to1_>}f(x)=f(1)=0$
f est continue en

Ensuite : $lim_{x\to5_<}f(x)=0$ et $lim_{x\to5_>}f(x)=0$

En effet : $lim_{x\to5_<}f(x)=lim_{x\to5_>}f(x)=f(5)=0$

f est continue en 5

Conclusion : f est continue en 1 et en 5, donc f est continue sur IR.

- ***Dérivabilité*** :

Dérivabilité à gauche

F est dérivable sur $]-\infty;1]\cup[1;5]\cup[5;+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a : $lim_{x\to1_<}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=lim_{x\to1_<}\frac{\sqrt{x^2-6x+5}-0}{x-1}=lim_{x\to1_<}\sqrt{\frac{x^2-6x+5}{(x-1)^2}}$

$$=lim_{x\to1_<}\sqrt{\frac{x-5}{x-1}}$$

Or: $lim_{x\to1_<}\frac{x-5}{x-1}=-\infty$ et $lim_{X\to1_<}\sqrt{X}=+\infty$

Donc par composée des limites on a : $lim_{x\to1_<}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

De même par un raisonnement analogue à droite on a :

$$\lim_{x\to1_>}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1_>}\frac{\sqrt{x^2-6x+5}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1_>}\sqrt{\frac{x^2-6x+5}{(x-1)^2}}$$
$$=+\infty$$

Conclusion : f n'est pas dérivable $f'_g(1)\neq f'_d(1)$ cependant (C) admet des tangentes verticales

Dérivabilité à droite et à gauche de 5 même démarche que celle en 1.

$lim_{x\to5_<}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\infty$ et $\lim_{x\to5_>}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=+\infty$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 5, cependant (C) admet des tangentes verticales au point d'abscisse 5.

3) f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]5;+\infty[$ et pour tout $x\epsilon]-\infty;1[\cup]5;+\infty[\ \ f'(x)=(\sqrt{x^2-6x+5})'$

$$=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}}$$

$$=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$$

Le signe de f'(x) $\forall\ x\ ]-\infty;1]\ x^2-6x+5>0$

Ceci entraine que $\sqrt{x^2-6x+5}>0$ et $x-3<0$

Alors $\forall\ x]-\infty;1]\ \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}<0$ donc $f'(x)<0$

Ensuite : pour tout $\forall\ x\ \epsilon[5;+\infty[\ \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$

Donc : $f'(x)>0\ \forall\ x\ \epsilon\ [5;+\infty[$.

Conclusion : f est croissante sur $[5;+\infty[$ *et décroissante sur*$]-\infty;1]$.

Ensuite pour tout $\forall\ x\ \epsilon\ ]1;5[-x^2+5x-6>0$

Et : $\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}>0$ *, donc le signe est celui de* $-x+3$

$\forall\ x\ \epsilon]-\infty;3]\ f'(x)>0 et\ \forall\ x\ \epsilon\ [3;+\infty[f'(x)<0$

Conclusion : f est strictement croissante sur $]-\infty;3]$ *et strictement décroissante sur* $[3;+\infty[$

4)on a $lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+5}-(x-3)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x^2-6x+5}-(x-3)][\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)]}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x+3)}$$

$$=lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}}$$

$$=0$$

De même par un raisonnement analogue pour

$lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+3)=0$

Conclusion : les droites $(\Delta):y=x-3$ *et* (Δ') *:*

$y=-x+3$ *Sont asymptotes à (C).*

4) *Axe de symétrie*

On a: $a+x\ \epsilon\ D_f$; $a-x\ \epsilon\ D_f$

Et : $f(a+x)=f(a-x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+x)^2-6(a+x)+5}=\sqrt{(a-x)^2-6(a-x)+5}$$

$$\Leftrightarrow (a+x)^2-6(a+x)+5=(a-x)^2-6(a-x)+5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax-6x=-2ax+6x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x(a-3)=0$$

D'où : $a=3$

Conclusion : la droite d'équation x=3 est un axe de symétrie.

Apploication13 :

On considère la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^3-x-1}{x-1}$

1) Soit la fonction u définie par $u(x)=2x^3-3x^2+2$
   a) Etudier les variations de u
   b) Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution $\alpha\ \epsilon\mathbb{R}$ *tel que* $-\frac{3}{4}<\alpha<-\frac{3}{2}$
   c) Déduire le signe de $u(x)$
2) Déterminer l'ensemble de définition D de f et les limites aux bornes de D.
   a) Justifier que $\forall\ x\ \epsilon\ D\ f'(x)=\frac{u(x)}{(x-1)^2}$
   b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
3) Justifie que $f(\alpha)=\frac{1}{2}(3\alpha+1-\frac{3}{\alpha-1})$

b) Encadrer $f(\alpha)$ puis déduis le signe $f(\alpha)$

c)Justifier que (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0 puis déduire le signe de f(x).

CORRECTION :

1) U est dérivable sr IR comme fonction polynôme $\forall\ x\ IR\ u'(x)=6x^2-6x$

Signe de u'(x)

Résolvons les inéquations $f'(x)>0\ et\ f'(x)<0$

Pour cela posons : $6x^2-6x=0$

$$6x(x-1)=0$$

	-∞	0	1	+ ∞
$6x^2-6x$	+	• -	• +	

$$\forall\ x\ \epsilon\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[\ u'(x)>0$$

$$\forall\ x\ \epsilon[0;1]u'(x)<0$$

Conclusion : u est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ *et sur* $[1;\ +\infty[$ et strictement décroissantes sur$[0;1]$.

b) En traçant le tableau de variation nous remarquerons que sur $]-\infty;0]$ u est continue et strictement croissante. Donc u réalise une bijection de

$]-\infty;0]sur\ ]-\infty;2]\ de\ plus\ 0\epsilon]-\infty;2]$

De ce fait 0 admet un unique antécédent $\alpha \epsilon\ ]-\infty;0]$ tel que $u(\alpha)=0$.

c) Sur le tableau de variation nous constations que u admet un minimum local en 1 c'est à dire $u(x) \geq u(1)$

$$u(x) \geq 1$$

Par conséquent : α est l'unique solution dans IR de l'équation u(x)=0

$$u\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-17}{32} \; et \; u\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{27}$$

Or : $\frac{-17}{32} < 0 < \frac{2}{27}$

Donc : $\frac{-3}{4} < \alpha < \frac{-2}{3}$

Le signe de u(x)

Sur $]-\infty;0]$ on sait que $u(\alpha)=0$ et u étant strictement croissante. Donc on déduit que :

$\forall\, x \,\epsilon\ ]-\infty;\alpha] u(x) < 0 et\ \forall\, x\epsilon\ [\alpha;+\infty[\ u(x) > 0$

2a) $\forall\, x \,\epsilon\, D_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0\,, x \neq 1$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty;1[\, \cup\,]1;+\infty[$$

$$on\ a:\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

f est dérivable surD_f et : $f'(x) = \left(\frac{x^3-x-1}{x-1}\right)'$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-1)(x-1) - 1\times(x^3-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^2}$$

D'où : $f'(x) = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$

$\forall\, x \,\epsilon D_f\ (x-1)^2 > 0$ Donc le signe de f'(x) est celui de u(x).

$\forall\, x \,\epsilon\ ]-\infty;\alpha]\ u(x) < 0\ ainsi\ f'(x) < 0$

Et :$\forall\, x \,\epsilon\ [\alpha;1] \cup [1;+\infty[\ u(x) > 0\ alors\ f'(x) > 0$

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $[1;\alpha]\ et\ sur\ [\alpha;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$

3) on sait que $u(\alpha)=0$ on a :

$$\begin{cases} u(\alpha) = 2\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \\ f(\alpha) = \frac{\alpha^3-\alpha+1}{\alpha-1} \end{cases}$$

Or : $u(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\alpha^3-3\alpha+2=0$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^3 = 3\alpha - 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{3\alpha^2-2}{2}$$

Donc : $f(\alpha) = \frac{\frac{3\alpha^2-2}{2}-\alpha-1}{\alpha-1}$

D'où :$f(\alpha) = \frac{3\alpha^2-2\alpha-4}{2(\alpha-1)}$

$$= \frac{3\alpha^2-3\alpha+\alpha-1-3}{2(\alpha-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha(\alpha-1)+(\alpha-1)-3}{\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(3\alpha+1)-3}{\alpha-1}\right)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(3\alpha+1-\frac{3}{\alpha-1}\right)$$

b) encadrement :

On sait que : $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$

$$-\frac{9}{4} < 3\alpha < -\frac{6}{3}$$

$$-\frac{5}{4} < 3\alpha+1 < -1 \qquad (1)$$

En partant toujours de : $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$

$$-1-\frac{3}{4} < \alpha-1 < -\frac{2}{3}-1$$

Par suite : $-\frac{3}{5} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{4}{7}$

Donc :$\frac{12}{7} < -\frac{-3}{\alpha-1} < \frac{9}{5} \qquad (2)$

$$(1)+(2)\ on\ a: \frac{-5}{4}+\frac{12}{7} < 3\alpha+1-\frac{3}{\alpha-1} < \frac{9}{5}-1$$

Ainsi : $\frac{13}{56} < f(\alpha) < \frac{2}{5}$

Donc : $f(\alpha) > 0$.

c)d'apes le tableau de variation on constate que sur $]-\infty;1]$ f admet un minimum local en α tel que $f(x) \geq f(\alpha) > 0, donc\ f(x) > 0$

De ce fait :0 $\notin\ ]-\infty;1]$ donc sur cette intervalle f ne coupe l'axe des abscisses.

Sur $]1;+\infty[$ f est continue et strictement croissante, donc f réalise une bijection de$]1;+\infty[\ sur\ ]-\infty+\infty[$ de plus 0 $\epsilon]-\infty+\infty[$ de ce fait α admet un antécédent $x_0\ \epsilon]1;+\infty[$

Tel que $f(x_0) = 0$.

Le signe de f(x)

Sur $]1;+\infty[\ f(x_0) = 0$

$$\forall\ x\ \epsilon\ ]1;x_0]\ x \leq x_0$$

f étant croissante $x \leq x_0$; $f(x) \leq f(x_0)$

Donc : $f(x) \leq 0$

$$\forall\ x\ \epsilon[x_0;+\infty[\ on\ a\ x \geq x_0$$

f étant strictement croissante alors $x \geq x_0$

On a: $f(x) \geq f(x_0)\quad donc\ f(x) \geq 0$.

Exercices d'entrainements

Exercice1 : (devoir$T^{le}D\ LPEE$)

On considère la fonction numérique sur IR par :

$$f(x) = \left|x+1\right| + \frac{1}{x-1}$$

1) Donner le domaine de définition de f et écrire f(x) sans valeur absolue
2) Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f.
3) Etudier la dérivabilité de f en -1
4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5) Démontrer que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.
6)

Exercice2 :

Partie

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x) = \frac{1}{n}x^3 + 3x - 2$

1a) Etudier les variations de f_n

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha\ \epsilon\ \mathbb{R}$ et vérifier que : $0 < \alpha_n < 1$

c)En déduire le signe de $f_n(x)\ pour\ x\ de\ IR$

2a) Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{(\alpha_{n+1})^3}{n(n+1)}$ en déduire le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$

b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n)

c)En déduire que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B

Soit g la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}\ si\ x < 1 \\ g(x) = 1 + \sqrt{2x-1}\ si\ x\ \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que g est dérivable en 1

2a) Montrer que si $x\ \epsilon]-\infty;1[\ on\ a$:

$$g'(x) = \frac{2xf_1(x)}{(x^2+1)^2}$$

b) dresser le tableau de variation de g

c)Etudier les branches infinis de (C)

d) Tracer la courbe (C)

Exercice3 :

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi[\ par\ f(x) = tan\frac{x}{2}$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et montrer que $(f^{-1})' = \frac{2}{1+x^2}$
3) Pour tout $x\epsilon\ ]0;+\infty[$ on pose :

$$\varphi(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

a)Montrer que φ est derivable sur $]0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $f^{-1}(1)$ puis déduire que pour tout $\forall\ x\ \epsilon]0;+\infty[\ f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - f^{-1}(\sqrt{x})$

4) on considère les deux suites u et v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\sqrt{k})$ et

$$V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{n}^{2n} f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{k}})$$

a)Montrer que pour tout $n\ \epsilon\ IN^*\ f^{-1}(\sqrt{n}) \leq U_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

c)Exprimer $V_n\ et\ \ U_n\ en$ fonction de n puis calculer$lim_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 4 :

Soit la fonction g définie sur IR par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$$

a)Montrer que pour tout réel x $\quad g'(x) = \frac{6}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

b) Etablir le tableau de variation de g.

c)Calculer g(1). En déduire une étude de signe de g(x).

2) soit f la fonction définie sur par

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+3} - x - 1$$

a)Montrer que $\forall\ x\ \epsilon\ IR, f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

c)Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse.

Exercice5

(Partie A)

Soit la fonction f définie IR par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Etudier les variations de f sur IR.
2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé préciser les asymptotes de (C).

3a) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I que l'on précisera

b) Ecrire une équation de tangente T à (C) en I

c)Etudier la position relative de T de (C)

4a) Tracer (C) et T dans un même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

b) Que représente I pour (C) justifier.

5a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer l'expression de f'(x) pour tout x de J

6a) Montrer que l'équation$f(x) = x$ admet une solution unique réelle α.

Partie B

Soit la suite U définie sur N par u_0 un réel donné $U_0 \geq 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que $\forall\ n \,\epsilon\, IN\ ; U_n \geq 1$
2) Montrer que pour tout $x\ de[1; +\infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
3) En déduire que pour tout n de IN
$$\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \left|U_n - \alpha\right|$$
4) Montrer que pour tout n de IN
$$\left|U_n - \alpha\right| \leq (\tfrac{1}{2\sqrt{2}})^n \left|U_n - \alpha\right|$$
5) En déduire que U converge et déterminer sa limite.
6) On suppose que $U_0 \leq \alpha$.

a) Montrer que $\forall\ n \,\epsilon\, IN\ \ U_n \leq \alpha$
b) Etudier le signe de $f(x) - x$ et en déduire que U est monotone.
c) Conclure.

Exercice6 :

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = \frac{2}{3} cos\, x + \frac{1}{3}$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une dans $[0; \pi]$ une solution unique α. Et vérifier que $\alpha \,\epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3) Soit la suite U définie sur IN par :
$$0 < U_0 < \alpha\ \forall\ n \,\epsilon\, IN\ U_{n+1} = f(U_n)$$

a) Montrer que $\forall\ n \,\epsilon\, IN\ \ 0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$
b) Montrer $\forall\ n \,\epsilon\, IN\ U_{2n} \leq \alpha \leq U_{2n+1}$
c) Montrer que pour tout $x\ de\ [0; \pi]$
$$\left|f(x) - \alpha\right| \leq \tfrac{2}{3} \leq \left|x - \alpha\right|$$
d) En déduire que pour tout n de IN
$\left|U_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{2^n}{3}\right) \left|U_0 - \alpha\right|$ et trouver alors $lim_{n \to +\infty} U_n$

4) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}(U_k - \alpha)$

a) Montrer que $\forall\ n \,\epsilon\, IN\ \ s_n > 0$
b) Montrer que la suite (s_n) est croissante
c) Montrer que pour tout n de IN
$$\left|s_n\right| \leq 3\left|U_0 - \alpha\right|$$

Exercice 7 :

Soit n un entier non nul, on considère la fonction f_n telle qu'à tout réel strictement positif x associe $f_n(x) = \frac{x^n+1}{4x^2}$ soit (C_n) sa courbe représentative.

1) Etudier les variations de $f_1\ et\ f_2$
2) Pour tout $n > 2$ etudier f_n on étudiera en particulier sa continuité, son sen de variation, et les limites éventuelles en $+\infty\ et\ en\ 0$ et les asymptotes.

3a) étudier l'intersection des courbes $(C_n)\ et\ (C_{n'})$ pour deux entiers naturels distincts n et n'.

4) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un même point B dont on précisera les coordonnées. On suppose que $n < n'$ étudier la position relative de $(C_n)\ et\ (C_{n'})$.

Exercice8 :

On considère la fonction g définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$g(x) = \frac{\sqrt{sin\, 2x}}{sin\, x}$$

1) Etudier la dérivabilité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$
2) Montrer que g est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x\ de\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
3) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]\ sur\ [0; \infty +[$
4) Montrer que g^{-1} est dérivable est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que pour tout $x\ de\ ]0; +\infty[\ on\ a: (g^{-1})'(x) = \frac{4x}{4+x^2}$
5) Pour tout $x > 0$ on pose
$$h(x) = g^{-1}(\sqrt{2x}) + g^{-1}(\sqrt{\tfrac{2}{x}})$$

a) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$
b) Montrer que h est dérivables sur $]0;+\infty[$ et calculer h'(x).
c) Montrer que pour tout $x > 0 \;\; h(x) = \frac{\pi}{2}$

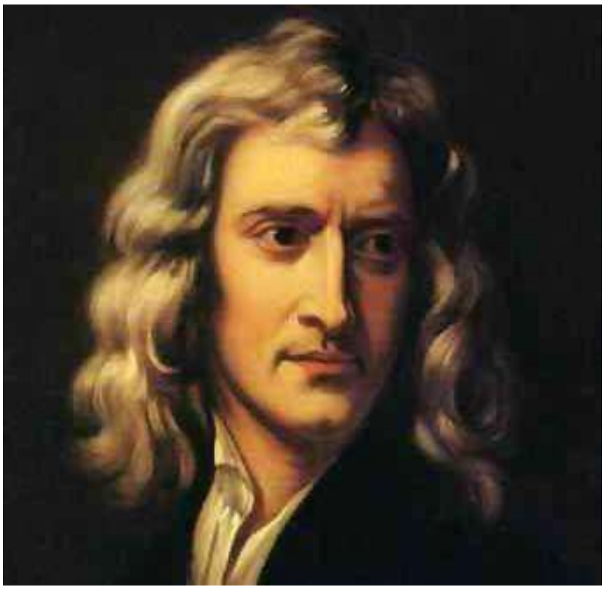
Exercice 9 :

On considère la fonction polynôme p définie par :
$p(x) = 2x^3 - 3x - {}^21$

1) Etudier les variations de P
2) Montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \,\epsilon\,]1{,}6; 1{,}7[$
3) On considère la fonction f définie sur D_f par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$

a) Donner l'ensemble de définition de f
b) Etudier f.

ARITHMÉTIQUES



Abraham de Moivre est un mathématicien français qui vécut la plus grande partie de sa vie en exil à Londres en raison de la révocation de l'Edit de Nantes. Il fut l'auteur de deux ouvrages majeurs en mathématiques. Le premier, consacré aux probabilités ``Doctrine of chance´´et paru en 1718, s'intéresse en particulier au calcul des probabilités d'un événement aléatoire dépendant d'autres événements aléatoires ainsi qu'aux problèmes de convergence des variables aléatoires. Le second, ``Miscellanea Analytica´´, paru en 1730, est un ouvrage d'analyse dans lequel figure pour la première fois la fameuse « formule de Stirling ». On raconte cette histoire au sujet de sa mort. Il s'était rendu compte qu'il dormait un quart d'heure de plus chaque nuit. En utilisant cette suite arithmétique, il avait calculé à quelle date il mourrait : cela devait correspondre au jour où il dormirait 24 heures. Ce fut exactement ce qu'il advint.

DIVISIBILITE DANS Z

Définition

Soient a et b deux entiers($b \neq 0$),on dit que b divise a et on note $b \ / \ a$,si et seulement si il existe un entier k tel que $a = kb$,on dit aussi que b est un diviseur de a.on dit aussi que a est un multiple de b

Exemple 1: 7 divise 56 car 56=7× 8 avec 8 entier, 7 est un diviseur de 56 et 56 est un multiple de 7, on peut écrire 7 / 56

Exemple 2 : pour tout nombre entier n , $n+1$ divise n^2-1 car $(n+1)(n-1) = n^2-1$

Remarque

0 est multiple de tout entier

Tout entier naturel non nul n, a pour diviseur dans Z 1 ;-1 ; n et –n

Proposition

Tout diviseur positif d'un naturel non nul n, vérifie $1 \leq d \leq n$

Tout naturel non nul a un nombre fini de diviseur

Remarque

0 à une infinité de diviseur

Exemple : les diviseurs de 24 dans IN sont

$$D(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; 24\}$$

Les diviseurs de 24 dans Z sont

$$D(24) = \{-24; -12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 3; 4; 6; 12; 24\}$$

Définition

Un nombre premier est un nombre entier strictement plus grand que 1, dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même dans IN

Exemple :2; 3; 5; 7; 11; 13 … sont des nombres premiers

Remarque

Si n est un nombre premiers alors $D(n) = \{1; n\}$

Proposition

Propriété de la divisibilité dans Z

$soient\ a, b, c, \lambda\ et\ \beta\ dans$ Z

1) $si \begin{cases} a \ / \ b \\ c \ / \ d \end{cases}$ $alors\ ac \ / \ bd$

2) $si \begin{cases} a \ / \ b \\ b \ / \ a \end{cases}$ $alors\ a = \pm b$ (Antisymétrie)

3) $si \begin{cases} a \ / \ b \\ a \ / \ c \end{cases}$ $alors\ \ a / \lambda b + \beta c$

4) $si \begin{cases} a \ / \ b \\ b \ / \ c \end{cases}$ $alors\ a \ / \ c$ (Transitive)

Remarque

La proposition 2 est parfois utilisée pour démontrer des égalités

La proposition 3 est souvent utilisée dans la recherche des diviseurs

APPLICATION 1

Exercice 1

1-Déterminer les entiers relatifs n tels que 11 divise $n-6$.

Exercice 2

2-Déterminer les entiers relatifs n tels que $4n+5$ divise 7

Exercice 3

3-Déterminer les entiers relatifs n tel que $2n + 5\ divise\ 8n - 3$

Exercice 4

4-soit $(d, n) \in$ Z×Z tel que d divise $9n - 11$ et d divise $11n + 2$, quelles sont toutes les valeurs possibles pour d ?

Exercice 5

5-Trouver les entiers n pour lesquels $\frac{n+15}{n+2}$ est entier

Exercice 6

6-Déterminer les entiers x et y tels que $x^2 - y^2 = 9$

Exercice 7

On considère l'équation (E) ou b et c des entiers relatifs : $x^3 + x^2 + bx + c = 0$

1) Montrer que si un entier a est une solution de (E) alors a / c

CORRECTION 1

1-$11/n - 6 \Leftrightarrow \exists k \in Z, n - 6 = 11k$

$\Leftrightarrow \exists k \in Z, n = 11k + 6$, il y'a donc une infinité de solutions : $S = \{11k + 6, avec\ k\epsilon Z\}$

CORRECTION 2

2-les diviseurs entiers de 7 sont $\{1; -1; 7; -7\}$ on raisonne par disjonction des cas

$4n + 5 = -1$ $4n = -6$ $n = -\frac{3}{2} \in pas\ a\ Z$	$4n + 5 = 1$ $4n = -4$ $n = -1 \in Z$
$4n + 5 = 7$ $4n = 2$ $n = \frac{1}{2} \in pas\ a\ Z$	$4n + 5 = -7$ $4n = -12$ $n = -3 \in Z$

Vérification

$4(-1) + 5 = 7$ Et $1 / 7$

$4(-3) \times 5 = -7$ Et $-7 / 7$

Par conséquent, il y'a que deux solutions

$$S = \{-1; -3\}$$

CORRECTION 3

3- $2n + 5/2n + 5$ et $2n + 5/8n - 3$

D'où : $2n + 5/8n - 3 - 4(2n + 5) = -23$

Or les diviseurs entiers de -23 sont :$\{1; -1; 23; -23\}$

On raisonne par disjonction des cas.

$2n + 5 = 1$ $n = -2 \in Z$	$2n + 5 = -1$ $n = -3 \in Z$
$2n + 5 = 23$ $n = 9 \in Z$	$2n + 5 = -23$ $n = -14 \in Z$

Vérification :

- $2(-2) + 5 = 1$ et $8(-2) - 3 = -19$

Par suite $1/-19$

- $2(-3) + 5 = -1$ et $8(-3) - 3 = -27$

Par suite $-1 / -19$

- $2(9) + 5 = 23$ et $8(9) - 3 = 69$

Par suite $23 / 69$

- $2(-14) + 5 = -2$ et $8(-14) - 3 = 115$

Par suite $23 / 115$

Conclusion : il y'a 4 solutions

$$S = \{-14; -3; -2; 9\}$$

CORRECTION 4

4- $d/9n - 1$ et $d/11n + 2$

D'où : $d/11 \times (9n - 1) - 9(11n + 2) = -29$

Or -29 est un nombre premier ses diviseurs entiers sont :$\{-1; 1; -29; 29\}$

De ce fait $d \in \{-1; 1; -29; 29\}$

CORRECTION 5

5-on simplifie d'abord et on isole la variable n

$$\frac{n + 15}{n + 2} = \frac{n + 2 + 13}{n + 2} = 1 + \frac{13}{n + 2}$$

Par suite $\frac{n+15}{n+2} \in Z \Leftrightarrow \frac{13}{n+2} \in Z$ c'est adire si et seulement si $n + 1$ divise 13

Ensuite les diviseurs de 13 sont :$\{-13; 1; -1; 13\}$

On raisonne par disjonction de cas :

$n+2=-13$ $n=-15\in Z$	$n+2=1$ $n=-1\in Z$
$n+2=-1$ $n=-3\in Z$	$n+2=13$ $n=11\in Z$

Apres vérifications $S=\{-15;-3;-1;11\}$

CORRECTION 6

6-soient x et y des entiers naturels

il est naturel de factoriser $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

Ainsi $(x-y)(x+y)=15$ cela implique

$x-y$ et $x+y$ sont nécessairement des diviseurs positifs de 15, en effet $x+y$ somme de deux entiers naturels est un nombre positif. Tout comme 15, il en va nécessairement de même pour $x-y$, puisque ce terme intervient dans ce produit. Avec $x>y$

Les diviseurs 15 sont :$\{-15;-5--3;-1;1;3;5;15\}$

Donc $(x-y;x+y)$ ne peut être qu'un des couples suivants :$(1;15)$, $(3;5)$

Il ne reste plus qu'a étudier les différentes possibilités de x et y

Si$(x-y;x+y)=(1;15)$ alors $x=8$ et $y=7$

De plus $8^2-7^2=15$

Si $(x-y);(x+y)=(3;5)$ alors $x=4$ et $y=1$

De plus : $4^2-1^2=15$

Finalement les couples$(x;y)$ sont $(8;7)$ et $(4;1)$

CORRECTION 7

a est solution de $(E)\Leftrightarrow a^3+a^2+ab+c=0$

$$\Leftrightarrow a(a^2+a+b)=-c$$

a Divise $-c$ c'est-à-dire $a\ /\ c$

Application 2

1) Le nombre n désigne un entier naturel, démontrer que $n+1$ divise n^2+5n+4 et n^2+3n+2

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$

3) En déduire que quel que soit n $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2

CORRECTION

1) $n^2+5n+4=n^2+n+4n+4$

$$=n(n+1)+4(n+1)$$
$$=(n+1)(n+4)$$

Donc $n+1$ divise n^2+5n+4

$$n^2+3n+2=n^2+n+2n+2$$
$$=n(n+1)+2(n+1)$$
$$=(n+1)(n+2)$$

Donc $n+1$ divise n^2+3n+2

2) on simplifie d'abord

$$\frac{3n^2+15n+9}{n+1}=\frac{(3n+12)(n+1)-3}{n+1}$$
$$=3n+12-\frac{3}{n+1}$$

Par suite :

$$n+1/3n^2+15n+9\Leftrightarrow n+1\ /\ 3$$

Or les diviseurs de 3 sont :$\{-3;-1;1;3\}$

On raisonne par disjonction des cas

- $n+1=-3\Longrightarrow n=-4\notin IN$
- $n+1=-1\Longrightarrow n=-2\notin IN$
- $n+1=1\Longrightarrow n=0\in IN$
- $n+1=3\Longrightarrow n=2\in IN$

Conclusion : les entiers naturels n pour lesquels $n+1$ divise $3n^2+15n+19$ sont 0 et 2

3) soit n un entier naturel

$\begin{cases} n+1/n^2+3n+2 \\ n^2+3n+2/3n^2+15n+19 \end{cases}$ Alors $n+1/3n^2+15n+19$

Or $n+1/n^2+3n+2 \Leftrightarrow n \in \{0;2\}$

Pour n=0 : $n^2+3n+2=2$ et $3n^2+15n+19$=9

Dans ce cas 2 ne divise pas 9

Pour n=2 : $n^2+3n+2=12$ et $3n^2+15n+19$=51

Dans ce cas 12 ne divise pas 51

Conclusion : il n'existe pas d'entier naturel n pour lequel n^2+3n+2 divise $3n^2+15n+19$

Application 3

1) Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair

2) Démontrer que lorsque n est un entier impair ,8 divise n^2-1

CORRECTION

Le produit de deux entiers consécutifs s'écrit : $N=n(n+1)$ avec $n \in Z$

Procédons par un raisonnement par disjonction des cas

- si n pair alors $N=2k$,$k \in Z$

Par suite $N=2k(2k+1)$

$$=2\big(k(2k+1)\big)$$

Posons $k'=k(2k+1)$

Ensuite $N=2k'$ avec $k' \in Z$

Donc N est pair

- si n est impair alors $N=2k+1$,$k \in Z$

Par suite $N=(2k+1)(2k+2)$

$$=2(2k+1)(k+1)$$

Posons $k'=(2k+1)(k+1)$

Ensuite $N=2k'$ avec $k' \in Z$

Donc N est pair

Conclusion : le produit de deux nombre entiers consécutifs est pair

2) n est un entier impair posons $n=2k+1$, $k \in Z$

$$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

$$=(2k+2)(2k)$$

$$=4k(k+1)$$

Or d'après ce qui précède $k(k+1)=2k'$

$$n^2-1=8k'$$

Conclusion : 8 divise n^2-1

Division Euclidienne dans Z

Soit a un entier et soit b un entier naturel non nul, il existe un unique entier q et un unique entier r tels que :

$a=bq+r$ et $0 \leq r < b$

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de a par b, q s'appelle de quotient et r le reste

Proposition

b Divise a si et seulement si le reste de la division de a par b est nul.

On peut étendre le théorème au cas où a est un entier et b un entier non nul.

$a=bq+r$ Avec $0 \leq r < |b|$

Application 3

1) Déterminer l'ensemble E de tous les entiers a tels que $|a|<53$ et tels que le reste dans la division de a par 11 soit egal a 3

CORRECTION

Un entier a appartient a E $\Leftrightarrow \begin{cases} a=11q+3 \\ |11q+3|<53 \end{cases}$

On déduit que a appartient a E ssi $a=11q+3$ et $-56<11q<50$ par suite

$E = \{-52; -41; -30; -19; -8; 3; 14; 25; 36; 47\}$

Application 4

1) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $7n + 5$ par $3n + 1$.

CORRECTION

On peut écrire $7n + 5 = 2(3n + 1) + n + 3$

Pour que ce soit l'égalité de la division euclidienne de $7n$ +5 par $3n + 1$, il faut que

$$0 \leq n + 3 < 3n + 1$$

Conditions sur le reste c'est-à-dire : $n > 1$

Pour n=0 : $7n + 5 = 5$ et $3n + 1 = 1$

$5 = 5 \times 1 + 0$ Le reste vaut 0

Pour n=1 :$7n + 5 = 12$ et $3n + 1$ =4

$12 = 4 \times 3 + 0$ Le reste vaut 0

Application 5

Soit n un entier naturel

1) déterminer en fonction de n le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2$ par $n + 1$

2) En déduire les valeurs de n, pour lesquelles $n + 1$ Divise n^2+1

CORRECTION

1) On peut écrire : $n^2 + 2 = (n - 1)(n + 1) + 3$

Pour que ce soit l'Egalite de la division euclidienne de $n^2 + 2$ par $n + 1$ il faut que :

$0 \leq 3 < n + 1$ Cela implique que $n > 2$

Pour $n = 0$: $n^2 + 2 = 2$ et $n + 1 = 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$Le reste vaut 0

Pour $n = 1$: $n^2 + 2 = 3$ et $n + 1 = 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$Le reste vaut 1

Pour $n = 2$: $n^2 + 2 = 6$ et $n + 1 = 3$

$6 = 3 \times 2 + 0$ Le reste vaut 0

1) $n + 1/n^2 + 2 \Leftrightarrow n \in \{0; 2\}$

D'après la question précédente

Congruence dans Z

Définition

Soit n un entier naturel non nul on dit que a *et* b sont congrus modulo n, si et seulement si a et b ont le meme reste dans la division euclidienne par n

On dit aussi que a est egal b modulo n.

Notation : $a \equiv b[n]$ ou $a \equiv b(modulo\ n)$

Une conséquence importante de cette définition est que :

$a \equiv r[n]$ Avec $0 \leq r < n$ si et seulement si r est le reste de la division euclidienne de $a\ par\ n$

Exemple :$25 = 11 \times 2 + 3$ donc $25 \equiv 3[11]$

Théorème :

Soient a et b deux entier relatifs et n un entier naturel, a *et* b ont meme reste dans la division euclidienne par n, si et seulement si $a - b$ est divisible par n

Corollaire :

a *et* b Sont congrus modulo n, si et seulement si $a - b$ est divisible par n

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n/a - b$$

Proposition

1)a est divisible par n$\Leftrightarrow a \equiv 0[n]$

2)$n \equiv 0[n]$

3)$a \equiv a[n]$

4)$si \begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$ alors $a \equiv c[n]$

5)$si \begin{cases} a \equiv a'[n] \\ b \equiv b'[n] \end{cases}$ alors $a + b \equiv a' + b'[n]$

6) $si \begin{cases} a \equiv a'[n] \\ b \equiv b'[n] \end{cases}$ alors $a \times b \equiv a' \times b'[n]$

7)$a \equiv b[n]$ si $p \in IN$ alors $a^p \equiv b^p[n]$

8) $a \equiv b[n]$ si $k \in Z$ alors $ka \equiv kb[n]$

Applications 6

Déterminer l'ensemble des entier tels que :

$$x + 4 \equiv 2[8]$$

CORRECTION

$$x + 4 \equiv 2[8] \Leftrightarrow x \equiv -2[8] \Leftrightarrow x \equiv 6[8]$$

Application 7

Déterminer l'ensemble des x , entiers tels que $5x \equiv 3[7]$

CORRECTION

On remplit un tableau des valeurs prises modulo 7 par $5x$ lorsque x prend les valeurs des restes possibles modulo 7 c'est-à-dire

x	0	1	2	3	4	5	6
$5x$	0	5	3	1	6	4	2

Illustration du tableau ci-dessus pour mieux comprendre le remplissage des cases

$x \equiv 0[7]$ Cela implique $5x \equiv 0[7]$

$x \equiv 1[7]$ Cela implique $5x \equiv 5[7]$

$x \equiv 2[7]$ Cela implique $5x \equiv 10 \equiv 3[7]$

$x \equiv 3[7]$ Cela implique $5x \equiv 15 \equiv 1[7]$

Même raisonnement pour les restes suivants

Application 8

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 11^n par 7.

CORRECTION

Pour se donner une idée de la démonstration, on teste sur les premières valeurs de n :

$11^0 \equiv 1[7]$;$11^1 \equiv 4[7]$;$11^2 \equiv 2[7]$;$11^3 \equiv 1[7]$

Nous remarquons que nous avons une boucle

Donc 3 est la période des exposants de 11^n modulo 7

On a alors 3 cas.

$si\ \ n \equiv 0[3]$Alors il existe $k \in Z$ tel que $n = 3k$

Donc : $11^n = 11^{3k} \equiv (11^3)^k \equiv 1[7]$

Dans ce cas le reste vaut 1

$si\ n \equiv 1[7]$Alors il existe $k \in Z$ tel que $n = 3k + 1$

Donc $11^n = (11^3)^k \times 11 \equiv 1 \times 11 \equiv 4[7]$

Dans ce cas le reste vaut 4

$si\ n \equiv 2[3]$Alors il existe $k \in Z$ tel que $n = 3k + 2$

Donc $11^n = (11^3)^k \times 11^2 \equiv 2[7]$

Dans ce cas le reste vaut 2

Conclusion : les reste possible de la division euclidienne de 11^n par 7 sont 1 ; 4;2

L'arbre devient solide sous le vent

Application 9

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a

a) $5^{2n} - 3^n$ divisible par 11

b) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17

CORRECTION

Rappel : $b \,/\, a \Leftrightarrow a \equiv 0[b]$

$$5 \equiv 5[11] \Longrightarrow 5^2 = 25 \equiv 3[11]$$

Par suite : $5^2 \equiv 3[11] \;\Leftrightarrow 5^{2n} \equiv 3^n[11]$

En effet : $5^{2n} - 3^n \equiv 0[11]$

Donc $5^{2n} - 3^n$ divisible 11.

$$5 \equiv 5[17] \Longrightarrow 5^2 = 25 \equiv 8[17] \equiv 2^3[17]$$

Ensuite $5^{2n} \equiv 2^{3n}[17] \;\Longrightarrow 5^{2n+1} \equiv 5 \times 2^{3n}[17]$

Ainsi $3 \times 5^{2n+1} \equiv 15 \times 2^{3n}[17]$ or $15 \equiv -2[17]$

$$3 \times 5^{2n+1} \equiv -2^{3n+1}[17]$$

En effet : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

Donc $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17

Application 10

Soit n un entier naturel tel que $n = 10a + b$ avec $a\ et\ b$ des entiers naturels.

1) Prouver que n est divisible par 13 si et seulement si $a + 4b$ est divisible par 13

2) Pour quelle valeurs de l'entier naturel n

$3 \times 4^n + 2$ Est divisible par 11.

CORRECTION

1) Ici nous procèderons un raisonnement par double implication en remarquant que :

$n \equiv 0[13] \Longrightarrow 10a + b \equiv 0[13] \Longrightarrow 40a + 4b \equiv 0[13]$

$\begin{cases} 40 \equiv 1[13] \\ 4 \equiv 4[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40a \equiv a[13] \\ 4b \equiv 4b[13] \end{cases} \Leftrightarrow 40a + 4b \equiv a + 4b[13]$

Réciproquement

$a + 4b \equiv 0[13] \Longrightarrow 10a + 40b \equiv 0[13] \Longrightarrow 10a + b \equiv 0[13]$

Soit $n \equiv 0[13]$

Conclusion : n est divisible par 13 si et seulement si

$$a + 4b \equiv 0[13]$$

2) on détermine le cycle des restes dans la division de 4^n par 11

$4^0 \equiv 1[11]$; $4^1 \equiv 4[11]$; $4^2 \equiv 5[11]$

; $4^3 \equiv 9[11]$; $4^3 \equiv 3[11]$; $4^3 \equiv 1[11]$

5 est la période des exposants de 4 modulo 11

En remplit le tableau modulo 11

n	0	1	2	3	4
4^n	1	4	5	9	3
3×4^n	3	1	4	5	9
$3\times 4^n + 2$	5	3	6	7	0

Conclusion : $3\times 4^n + 2$ est divisible par 11 si et seulement si $n - 4$ est divible par 5

Application 11

Soient $a\ et\ b$ deux entiers verifiant : $a \equiv 4[5]$ et $b \equiv 3[5]$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.

2) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que :

$n^2 - 3n + 6$ Est divisible par 5.

CORRECTION

On a: $a \equiv 4[5] \Longrightarrow a^2 = 16 \equiv 1[5]$

Cela implique encore $7a^2 = 7 \equiv 2[5]$

$$b \equiv 3[5] \Longrightarrow b^2 = 9 \equiv 4[5]$$

Cela implique encore $4b^2 = 16 \equiv 1[5]$

$\begin{cases} a \equiv 4[5] \\ b \equiv 3[5] \end{cases}$ Alors $2ab = 24 \equiv 4[5]$

Ainsi $7a^2 - 4b^2 + 2ab \equiv 2 - 1 + 4[5] \equiv 0[5]$

2) Posons $N = n^2 - 3n + 6$

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	1	1
$-3n$	0	2	4	4	3
6	6	6	6	6	6
N	6	4	4	1	0

Conclusion: $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5 si et seulement si $n = 5k + 4 \ avec \ k \in IN$

Application 12

Determiner suivant les valeurs de l'entier naturel n,le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n

2)Demontre que pout tout entier naturel non nul k,on a

$$1 + 13 + 13^2 + 13^3 + \cdots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$$

3)on pose pour tout entier naturel n,

$$A_n = 1 + 13 + \cdots + 13^n$$

Determine suivant les valeurs de n,le chiffre des unites de A_n

CORRECTION

$13^0 \equiv 1[10]$; $13^1 \equiv 3[10]$; $13^2 \equiv 9[10]$
$13^3 \equiv 7[10]$; $13^4 \equiv 1[10]$

Nous remarquons que nous avons une boucle ,donc 4 est la periode des exposants de 13^n modulo 10.

Alors on a 4 cas

Si $n \equiv 0[4]$ alors il existe $\in IN$, tel que $n = 4k$

Ainsi $13^4 \equiv 1[10] \Longrightarrow (13^4)^k \equiv 1^k[10]$ soit $13^n \equiv 1[10]$

Dans ce cas le reste vaut 1

Si $n \equiv 1[4]$ alors il existe $k \in IN$,tel que n=4k+1

Ainsi $13^1 \equiv 1[10] \Longrightarrow 13^{4k} \times 13 = 13 \equiv 3[10]$ par suite $13^{4k+1} \equiv 3[10]$ $soit$ $13^n \equiv 3[10]$

Dans ce cas le reste vaut 3

Si $n \equiv 2[4]$ alors il existe un $k \in IN$ tel que n=4k+2

Ainsi $13^{4k} \equiv 1[10] \Longrightarrow 13^{4k} \times 13^2 = 13^2 \equiv 9[10]$ par suite $13^{4k+2} \equiv 9[10]$ soit $13^n \equiv 9[10]$

Dans ce cas le reste vaut 9

Si $n \equiv 3[4]$ alors il existe $k \in IN$, tel que n=4k+3 ainsi $13^{4k} \equiv 1[10] \Longrightarrow 13^{4k} \times 13^3 = 13^3 \equiv 7[10]$ par suite $13^{4k+3} \equiv 7[10]$ soit $13^n \equiv 7[10]$

Dans ce cas le reste vaut 7

Conclusion: les restes possible de la division euclidienne de 13^n par 10 sont : 1;3 ; 9 et 7

3)Soit $p(n)$ la proposition « $1 + 13 + \cdots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$ »

Initialisation,verifions que p(n) est vraie

Posons: $S_k = 1 + 13 + \cdots + 13^{4k-1}$

$$S_1 = 1 + 13 + 13^2 + 13^3 = 2380 \equiv 0[10]$$

Donc p(0) est vraie

Heredite pour tout n entier fixe,supposons que $p(n)$ est vraie c'est a dire

$$1 + 13 + \cdots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$$

Montrons alors que p(n+1) est vraie c'est a dire

$$1 + 13 + \cdots 13^{4k-1} + 13^{4k+1} + 13^{4k+2} + 13^{4k+3} \equiv 0[10]$$

$$S_{k+1} = 1 + 13 + \cdots 13^{4k-1} + 13^{4k+1} + 13^{4k+2} + 13^{4k+3}$$

$$S_{k+1} = S_k + 13^{4k}(13 + 13^2 + 13^3)$$

$$S_{k+1} = S_k + 13^{4k}S_1$$

Or d'apres l'hypothese on a $S_k \equiv 0[10]$

D'apres ce qui precede:

$$S_1 \equiv 0[10] \Leftrightarrow 13^{4k}S_1 \equiv 0 \times 13^{4k}[10]$$

$$\begin{cases} 13^{4k}S_1 \equiv 0[10] \\ S_k \equiv 0[10] \end{cases}$$

....

en additionnant menbre a menbre on obtient

$$S_k + 13^{4k}S_1 \equiv 0[10]$$

$$S_{k+1} \equiv 0[10]$$

Donc p(n+1) est vraie ,la proposition est hereditaire .

Conclusion: par initialisation et heredite ,pour tout k entier naturel

$$1 + 13 + \cdots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$$

3)On a : $A_n = 1 + 13 + \cdots + 13^n$

A_n est la sommes de n+1 termes d'une suite geometrique de raison 13 et de premiers terme 1.

On peut ecrire :$A_n = \frac{13^{n+1}-1}{12}$

Pour n=0, $A_n = \frac{13^{0+1}-1}{12} = 1$; $A_n \equiv 1[10]$

Pour n=1, $A_n = \frac{13^{1+1}-1}{12} = 14$; $A_n \equiv 4[10]$

Pour n=2, $A_n = \frac{13^3-1}{12} = 183$; $A_n \equiv 3[10]$

Pour n=3 , $A_n = \frac{13^4-1}{12} = 2380$; $A_n \equiv 0[10]$

Pour n=4, $A_n = \frac{13^5-1}{12} = 30941$; $A_n \equiv 1[10]$

Nous remarquons que 4 est la periode des exposant de A_n modulo 10

Donc nous avons 4 cas.

$n \equiv 0[4]$ alors il existe k ∈ IN tel que $n = 4k$

$13^4 \equiv 1^4[10] \Leftrightarrow (13^4)^k \equiv 1[10] \Rightarrow A_n = \frac{13^{4k+1}-1}{12} \equiv 1[10]$

Soit $A_n \equiv 1[10]$

$n \equiv 1[4]$ alors il existe k∈IN tel que $n = 4k + 1$

$13^{4k+1} \equiv 13[10] \Rightarrow A_n = \frac{13^{4k+2}-1}{12} \equiv 3[10]$ soit $A_n \equiv 1[10]$

$n \equiv 2[4]$ alors il existe k∈IN tel que $n = 4k + 2$

$13^{4k+2} \equiv 169[10] \Rightarrow A_n = \frac{13^{4k+3}-1}{12} \equiv 0[10]$ soit $A_n \equiv 3[10]$

$n \equiv 3[4]$ alors il existe k∈IN tel que $n = 4k + 3$

$13^{4k+3} \equiv 2197[10] \Rightarrow A_n = \frac{13^{4k+4}-1}{12} \equiv 0[10]$ soit $A_n \equiv 0[10]$

Conclusion: si u designe le chiffre des unites de A_n alors

u=1 si n=4k

u=2 si n=4k+1

u=3 si n=4k+2

u=3 si n=4k+3

Plus grand commun Diviseur

I-1Generalites

Definition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls le plus grand diviseur commun a a et b est appele le pgcd de a et b

On note pgcd(a, b) ou encore $a \wedge b$

Remarque: comme 1 divise tous nombres entiers a et b alors pgcd$(a, b) \geq 1$

Exemple : pgcd$(24; 18) = 6$; pgcd$(60; 84) = 12$

pgcd$(31; 45) = 1$

Propositions

- pgcd$(a; a) = a$ et pgcd$(1; a) = 1$
- si b / a alors pgcd$(a; b) = |b|$

theoreme

soit a et b deux entiers non nuls et un couple d'entiers $(q; r)$ tels que $a = bq + r$

et le pgcd$(a; b)$ =pgcd$(b; r)$

methode:egalite entre deux nombres

soit d et D deux quantites.pour montrer que d=D,il suffit:

1-de montrer successivement que D≤d puis d≤D

2-dans le cas de nombres entiers positives,on pourra aussi montrer que D/d et d/ D

Algorithme d'euclide

Theoreme

Soit a et b deux naturels non nuls que b ne divise pas a. la suite des divisions euclidienne suivantes finit par s'arreter le dernier reste non nul est alors le pgcd$(a;b)$

a et b $\quad a = bq_0 + r$ avec $b > r_0 \geq 0$

b et r_0 $\quad b = r_0q_1 + r$ avec $r_0 > r_1 \geq 0$

r_{n-1} et r_n $\quad r_{n-1} = r_nq_{n-1} + r$ avec $r_{n-1} > r_n \geq 0$

On a alors : pgcd$(a,b) = r_n$

Exemple :calculer le pgcd$(4539,1958)$

$$4539 = 1958 \times 2 + 623$$

$$1958 = 623 \times 3 + 89$$

$$623 = 89 \times 7 + 0$$

Le dernier reste non nul est : 89

Conclusion: pgcd$(4534; 1958) = 89$

Theoreme

Soient a et b deux entiers non nuls les diviseurs communs de a et b sont exactement les diviseurs du pgcd(a,b)

$$\begin{cases} d \;/\; a \\ d \;/\; b \end{cases} \Leftrightarrow d \;/\; pgcd(a;b)$$

Exemple: determiner le pgcd de 1960 et de 34300

$$1960 = 2^3 \times 5 \times 7^2$$

$$34300 = 2^2 \times 5^2 \times 7^3$$

Ainsi pgcd$(1960; 34300) = 2^2 \times 5 \times 7^2$

Proposition

Pour tout entier naturel k non nul pgcd(ka,kb)=$k$pgcd$(a;b)$

Exemple: pgcd$(800,500) = 100$pgcd$(8;5) = 100$

pgcd$(36,24) = 12$pgcd$(3;2) = 12$

Application 13

Determiner selon les valeurs e n le pgcd de

$A = 2n + 1 \;\; ; B = n - 5$

CORRECTION

On Remarque tout d'abord que

$$A - 2B = 2n + 1 - 2(n-5) = 11$$

Cela implique que $A = 2B + 11$

D'apres le theoreme on a donc pgcd(A,B)=pgcd$(B;11)$

Comme 11 est un nombre premier celui ci peut valoir que 1 ou 11, or pgcd$(B;11) = 11$ equivaut a dire que 11 divise B de ce fait $B \equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow n - 5 \equiv 0[11] \;\Leftrightarrow n = 11k + 5$

Conclusion: le pgcd$(A;B) = 11$ lorsque n est congru a 5 modulo 11 et a pgcd$(A,B) = 1$

Application 14

Soient a et b deux entiers naturels non nulls soient $x = 7a + 5b$ et $y = 4a + 3b$

Montrer que pgcd(x,y) =pgcd(a,b)

CORRECTION

$$7a + 5b = (4a + 3b) + (3a + 2b)$$

pgcd$(7a + 5b, 4a + 3b)$ =pgcd$(4a + 3b, 3a + 2b)$

or $3a + 2b = 2(a + b) + a$

pgcd$(4a + 3b, 3a + 2b)$ =pgcd$(a + b, a)$ =pgcd(a,b)

donc pcgd(x,y) =pgcd(a,b)

Nombre premiers entre eux

Definition

On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si pgcd$(a,b) = 1$

Exemple

$\text{pgcd}(15,8) = 1$ donc 8 et 15 sont premier entre eux.

Remarque cela revient aussi a dire que leurs diviseurs sont -1 et 1

Une autre consequence est que deux entiers consecutifs n et n+1 sont necessairement premiers entre eux puisque tout diviseur des deux diviserait 1

Proposition

Un nombre premier est premier avec tout les nombres qu'il ne divise pas.

Proposition

Soient a et b des naturels non nuls et d un divieur commun de a et b.on pose $a = da'$ et $b = db'$

Le pgcd de a et b est d si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux .

$\text{pgcd}(a,b) = d \Leftrightarrow \text{pgcd}(a',b') = 1$

corollaire

soient a et b deux entiers non nul et $d = \text{pgcd}(a,b)$ alors il existe un unique couple d'entier (a',b') premiers entre eux tels que

$a = da'$ et $b = db'$

Application 15

determiner les entiers naturels dont la somme est 600 et dont le pgcd est 50.

CORRECTION

On cherche a et b tels que $\begin{cases} a+b=600 \\ pgcd(a;b)=50 \end{cases}$

D'apres le corollaire qui precede il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que

$a = 50a'$ et $b = 50b'$

Ainsi $a + b = 50(a' + b') = 600 \Longrightarrow a' + b' = 12$

On cherche donc tous les couples d'entiers naturels verifiant cette relation et on ne garde que les couples d'entiers premiers entre eux. $(1;11),(5;7),(7;5),(11;1)$ les couples sont alors $(50;550),(250;350),(350;250),(550;50)$

Reciproquement on verifier que ces couples sont bien vrais

Theoreme de Bezout

Egalite de Bezout

Soit a et b deux entier non nuls et $d = \text{pgcd}(a;b)$ il esxiste alors un couple (u,v) d'entiers relatives tells que $au + bv = d$

Corollaire

Tout diviseur commun a a et b divise leur pgcd

Theoreme de Bezout Roc

Deux entiers relatifs a a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entier relatifs u et v tels que $au + bv = 1$

Remarque

$$au + bv = 1 \Leftrightarrow au \equiv 1[b]$$

Exemple: 2n+1 et 3n+2 sont premiers entre eux

$$u(2n+1) + v(3n+2) = 1$$

Dans ce cas $u = -3$ et $v = 2$

C'est n'est pas la chute qui represente l'echec,l'echec c'est de rester la ou l'on est tombe

Application 16

Montrer que les nombres 3920 et 1089 sont premiers entre eux et determiner u et v tel que 3920u +1089v=1

CORRECTION

$$3920 = 1089 \times 3 + 653$$
$$1089 = 653 \times 1 + 436$$
$$653 = 436 \times 1 + 217$$
$$436 = 217 \times 2 + 2$$
$$217 = 2 \times 108 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$

le dernier reste non nul est bien 1,donc 3920 et 1089 sont premiers entreb eux.

On remonte ensuite l'algorithme d'Euclide:

$$1 = 217 - 2 \times 108$$
$$1 = 217 - (436 - 217 \times 2) \times 108$$
$$1 = 217 \times 217 - 436 \times 108$$
$$1 = 217 \times (653 - 436 \times 1) - 436 \times 108$$
$$1 = 217 \times 653 - 436 \times 217 - 436 \times 108$$
$$1 = 217 \times 653 - 436 \times 325$$
$$1 = 217 \times 653 - (1089 - 653) \times 325$$
$$1 = 653 \times 542 - 1089 \times 325$$
$$1 = (3920 - 1089 \times 3) \times 542 - 1089 \times 325$$
$$1 = 3920(542) + 1089(-1951)$$

Donc u=542 et v=-1951

faites en sorte que chaque action quotidienne soit un acte d'amour

Theoreme

l'equation $ax + by = c$ admet des solutions entieres si et seulement si c est un multiple du pgcd(a, b)

Exemple:

L'equation $4x + 9y = 2$ admet des solutions car pgcd$(4; 9) = 1$ et 2 est multiple de 1

L'equation $9x - 15y = 2$ n'admet pas de solution car pgcd$(9; 15) = 3$ et 2 non multiple de 3

Theoreme du Gauss

Proposition

si un entier est premier avec deux entiers alors il est premiers avec leur produit.

Exemple: 4 est premier avec 9 et avec 35 donc 4 est premier avec 315

pour tout n entier naturel,si n est premier avec n+1 et n-1 donc n et premier avec $(n - 1)(n + 1)$

theoreme

soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls si a divise le produit bc si a et b sont premiers entre eux alors a divise c

$$\begin{cases} a \,/\, bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a \,/\, c$$

Exemple : soients a et b deux entiers tels que

$$5a = 14b$$

14 divise le produit $5a$ les entiers 14 et 5 sont premiers entre eux donc 14 divise a de meme 5 divise b

Application 17

Trouver les solutions dans Z^2 de l'equation $5(x-1) = 7y$.

CORRECTION

5 divise $7y$ comme pgcd$(5;7) = 1$ d' après Gauss 5 divise y c'est a dire $y = 5k, k \in Z$

Remplacant dans 1 on a: $5(x-1) = 7y$

$$5(x-1) = 7 \times 5k \Leftrightarrow x - 1 = 7k$$

$$x = 7k + 1$$

Les solutions sont sous la forme

$$S = \{7k + 1; 5k\}$$

Consequence du theoreme de Gauss

Si un entier c est divisible par des entiers $a\ et\ b$ premiers entre eux, alors il est divisible par les produit ab.

Si un entier premier divise un produit de facteurs ab,alors il divise au moin un facteurs $a\ et\ b$

Application 18

Determiner les entiers $x\ et\ y$ tels que 7x+5y=0

CORRECTION

Cette equation s'ecrit $7x = -5y$ par suite, 7 divise $-5y$ de comme $pgcd(7;5) = 1$,donc 7 divise y d'apres le theoreme de Gauss ,il existe un entier k∈ Z tel que $y = 5k$

En remplacant dans la premiere egalite on a: $7x = -5 \times 7k$ d'ou $x = -5k$

Les solutions sont les couples

$$S = \{(-5k; 7k)\}\ avec\ k \in Z$$

Application 19

Determiner les entiers $x\ et\ y$ tels que $5x + 7y = 1$

CORRECTION

comme 5 et 7 sont premiers entre eux,il existe d'apres le theoreme de bezout deux nombres u et v entiers relatifs tels que 5u+7v=1

pour determiner u et v ,on peut utiliser l'algorithme d'Euclide on Remarque que

$7 = 5 \times 1 + 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$

En faisant une remontada on obtient

$1 = 5 - 2 \times 2$

$1 = 5 - 2(7 - 5 \times 1)$

$1 = 5 \times (3) + 7 \times (-2)$

on pourra alors prendre u=3 et v= -2 le couple $(3; -2)$ est une solution particuliere de cette equation

on va se servir de cette solution particuliere pour obtenir la solution generale

5u+7v=1⟺5u+7v=5×3+7× (-2) equivaut encore a $5(u-3) + 7(v+2) = 0$

Equation d'un type connu, on deroule la methode

5 divise $7(v+2), et$ pgcd$(5,7) = 1$ donc 5 divise $v + 7$ par consequent $v = -2 + 5k$, $k \in Z$

Par suite $5(u-3) = 7 \times 5k \Rightarrow u = 3 + 7k$

Les solutions sont de la forme: $\begin{cases} x = 3 + 7k \\ y = -2 + 5k \end{cases}$ *

Application20 $(Extrait\ Bac\ Gabon)$

Soit α , $a\ et\ b$ trois entiers naturels non nuls tels que : $\alpha = pgcd(a,b)$.

1)Prouve que α divise $\lambda a + \mu b$ avec λ et μ deux entier relatives.

2) soit $x = 5n^2 + 7$ et $y = n^2 + 2$

Prouve que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2 alors pgcd$(x, y) = 3$

CORRECTION

1)$\alpha = pgcd(a, b)$ alors $\alpha/a\ et\ \ \alpha\ /\ b$ donc α divise tout combinaison lineaire de $a\ et\ b$ en effet: $\alpha\ /\ \lambda a + \mu b$

2)$n \equiv 2[3]\ \Leftrightarrow n = 3k + 2$ avec $k \in Z$

Ainsi pgcd$(5n^2 + 7; n^2 + 2)$=pgcd$(5(3k + 2)^2 + 7; (3k + 2)^2 + 2)$

Pgcd $(5(3k + 2)^2 + 7; (3k + 2)^2 + 2)$
=pgcd$\big(3(15k^2 + 20k + 9); 3(3k^2 + 4k + 2)\big)$=
3 pgcd$\big((15k^2 + 20k + 9); (3k^2 + 4k + 2)\big)$

Or $\big(-1(15k^2 + 20k + 9) + 5(3k^2 + 4k + 2)\big) = 1$

pgcd$\big((15k^2 + 20k + 9); (3k^2 + 4k + 2)\big) = 1$

donc pgcd$(5n^2 + 7; n^2 + 2)$=pgcd$(x, y) = 3$

Application21 $(extrait\ BAC\ GABON)$

1)Determiner en utilisant l'algorithme d'euclide le pgcd de 6092 et 135

b)Que peux t'on conclure pour les nombres 6092 et 135?

2)Soit l'equation (E) dans $Z \times Z$

$6092x + 135y = 1$

a)Determiner une solution particuliere (E)

b)Resoudre l'equation (E)

3)Deduis-en les solutions dans $Z \times Z$ de l'equation (E'): 6092x+135y=45 apres avoir prouve qui si $(x; y)$ est solution de (E') alors x est un multiple de 45.

CORRECTION

1)6092=135×45+17

135=17×7+16

17=16×1+1

16=16× 1+0 le dernier reste non nul vaut 1,donc pgcd$(6092; 135) = 1$

Conclusion: 6092 et 135 sont premiers entre eux.

2)cherchons les solutions particulieres

Faisons une remontada de l'algorithme d'euclide

1=17-16× 1

1=17−$(135 - 17 \times 7) \times 1$

1=17−135+17× 7

1=17+17× $7 - 135$

1=17× $8 - 135$

1=$(6092 - 45 \times 135) \times 8 - 135$

1=$6092 \times 8 - 135(45 \times 8 + 1)$

1=$6092 \times 8 - 135 \times 361$

1=$6092(8) + 145(-361)$

D'ou le couple $(8; -361)$ est une solution particuliere de (E)

b) resolvons (E)

$\begin{cases} 9062x + 135y = 1 \\ 9062 \times 8 + 135(-361) = 1 \end{cases}$ equivaut a

$$6092(8 - x) = 135(y + 361)$$

pgcd$(6092; 135) = 1$ de plus 6092 divise $135(y + 361)$ donc 6092 divise $y + 361$ d'ou d'apres gauss il existe un entier relative k tel que $y + 361 = 6092k \Longrightarrow y = -361 + 6092k$

par suite $6092(8 - x) = 135 \times 6092k$

$$8 - x = 135k$$

Ainsi: $x = -135k + 8$

D'ou $S = \{(8 - 135k; -361 + 6092k)\}$ k∈Z

3) 6092x+135y=45⇔ $6092x = 45 - 135y$

Ainsi $6092x = 45(1 - 3y)$

45 divise $6092x$,mais 45 ne divise pas 6092 donc 45 divise x,ce qui implique que x est multiple de 45. Dans ce cas nous prenons x =90

Valeur de y: $6092 \times 90 = 45(1-3y)$ cela implique que $y = -406$ ainsi le couple $(90; -406)$ est une solution particuliere de (E')

Resolution de (E')

$$\begin{cases} 6092x + 135y = 45 \\ 6092 \times 90 + 135 \times -406 = 45 \end{cases}$$

Les equations ci dessus sont equivalente

$6092(x-90) = 135(-y-406)$

6092 divise $135(-y-406)$ comme $\text{pgcd}(6092; 135) = 1$ donc 6092 divise$-y-406$,d'après Gauss il existe un entier relative δ tel que:

$-y-406 = 6092\delta \Longrightarrow y = -406 - 6092\delta$ ainsi

$x = 90 + 135\delta$

Ensemble solution de (E') est:

$S = \{(90 + 135\delta; -406 - 6092\delta)\}\ \delta \epsilon Z$

Application 22

On considere l'entier naturel A qui s'ecrit $\overline{1x416}$ dans le systeme de numeration de base sept.

1)determiner x pour que :

a-A soit divisible par six

b-A soit divisible par cinq

2)deduis-en qu'il existe un entier x tel que A soit divisible par trente

CORRECTION

$A = \overline{1x416}$ dans le systeme de numeration de base sept on a

$A = 6 \times 7^0 + 1 \times 7 + 4 \times 7^2 + x \times 7^3 + 1 \times 7^4$

1.a)determinons x pour que A soit divisible par six

On a: $7 \equiv 1[6]$; $7^2 \equiv 1[6]$; $7^3 \equiv 1[6]$;$7^4 \equiv 1[6]$

Ainsi $A \equiv 1 + 4 + x + 1[6] \Longrightarrow A \equiv x + 6[6]$

$6 \equiv 0[6] \Leftrightarrow 6 + x \equiv x[6]$ donc $A \equiv x[6] \Leftrightarrow A = 6k + x$

Conclusion: A est divise par 6 si $x = 0$

1.b) $7 \equiv 2[5]$; $7^2 \equiv 4[5]$; $7^3 \equiv 3[5]$; $7^4 \equiv 1[5]$

Ainsi $A \equiv 1 + 2 + 1 + 3x + 1[5] \Longrightarrow A \equiv 3x + 5[5]$

$5 \equiv 0[5] \Leftrightarrow 5 + 3x \equiv 3x[5]$ donc $A \equiv 3x[5] \Leftrightarrow A = 5k + 3x$

Conclusion: A est divisible par 5 si $3x = 0 \Longrightarrow x = 0$

2)A divisible par 5 et par 6 si $x = 0$, donc A est aussi divisible par le produit de 5 et 6 qui est 30 a condition que $x = 0$

Application 23

a *et* b sont des entier naturel non nul tels que $a > b$.

1)Demontrer que pgcd$(a; b)$ =pgcd$(a-b; b)$

2)Soit n un entier naturel on pose $a = 2n$ et $b = 3n + 1$

2.a)Montrer que a *et* b sont premier entre eux si et seulement si n est pair

CORRECTION

soit D=pgcd(a, b) et d =pgcd$(a-b, b)$

D divise a *et* b donc D divise toute combinaisons lineaire de a *et* b c'est a dire $D/a-b$ et D≤d

Donc D divise $a-b$ *et* b

d divise $a-b$ *et* b donc d divise toute combinaisons lineaire de $a-b$ *et* b c'est a dire $d/a-b+b = a$ et d≤D

Donc d divise a *et* b

Par consequent d'apres les deux raisonnement precedent : $D = d$

Donc: pgcd(a, b) =pgcd$(a-b, b)$

2.a) ***premiere methode***

d divise a *et* b donc divise toute combinaisons lineaire de a *et* b donc :

$d/ -3a + 2b = -6n + 6n + 2 = 2$

Les valeurs de d sont donc chercher dans l'ensemble $d = \{1; 2\}$

$si\ n \equiv 0[2] \Longrightarrow 2n \equiv 0[2] \Longrightarrow a \equiv 0[2]$

Ensuite $3n \equiv 0[2] \Longrightarrow b \equiv 1[2]$

$a\ et\ b$ Sont des parite differente donc d=1

Si $n \equiv 1[2] \Longrightarrow 2n \equiv 2[2] \Longrightarrow a \equiv 0[2]$

De plus $3n \equiv 3[2] \Longrightarrow 3n + 1 \equiv 0[2]$

a et b sont premiers entre si et seulement si n est pair.

Deuxieme methode

on utilise la propriete pdcg(a, b) =pgcd$(a - b, b)$

pgcd$(3n + 1; 2n)$ =pgcd$(3n + 1 - 2n; 2n)$

=pgcd$(n + 1; 2n)$

=pgcd$(2n - (n + 1); n + 1)$

=pgcd$(n - 1 - (n + 1); n + 1)$

= pgcd$(2; n + 1)$

Si n est pair alors n+1 est impair donc pgcd$(2; n + 1) = 1$

donc $3n + 1\ et\ 2n$,sont premiers entre eux

si n est impair alors n+1 esr pair donc pgcd$(2; n + 1) = 2$

donc $3n + 1\ et\ 2n\ ne\ sont\ pas$ premiers entre eux .

Application 24

On se propose dans cette question de determiner les entier relatives N tells que: $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

1)verifier que 239 est solution de ce systeme

2)soit N un entier relatives solution de ce systeme

2.a)Demontrer que N peut s'ecrire sous la forme $N = 1 + 17k = 5 + 13y$ ou $(x, y) \in Z^2$ verifiant que $17x - 13y = 4$

3)Resoudre l'equation $17x - 13y = 4$ avec $(x, y) \in Z^2$

4)En deduire qu'il existe un entier relatives k tel que $N = 18 + 221k$

CORRECTION

1) $269 = 13 \times 18 + 5$ et $239 = 17 \times 14 + 1$

Donc 239 verifier le systeme

$N \equiv 5[13]$ donc il existe $y \in Z$ tel que $N = 5 + 13y$

$N \equiv 1[17]$ donc il existe $x \in Z$ tel que $N = 1 + 17x$

Donc $N = 1 + 17x = 5 + 13y \Leftrightarrow 17x - 13y = 4\ (E)$

3)$(1; 1)$ est une solution particuliere evidente de (E) : car $17 \times 1 - 13 \times 1 = 4$

Soit $(x; y)$ une solution de (E) on a :

$$\begin{cases} 17x - 13y = 4 \\ 17 \times 1 - 13 \times 1 = 4 \end{cases}$$

....

En soustrayant termes a termes on obtient

$17(x - 1) - 13(y - 1) = 0$ soit $17(x - 1) = 13(y - 1)$

13 divise $17(x - 1)$, comme pgcd$(13; 17) = 1$ donc 13 divise $x - 1$,d'apres gauss il existe un entier relative k tel que $x - 1 = 13k \Longrightarrow x = 1 + 13k$

Par suite $13(y - 1) = 17 \times 13k$

soit encore $y - 1 = 17k$ avec $k \in Z$

$y = 17k + 1$

D'ou: $S = \{1 + 13k; 1 + 17k\}$ avec $k \in Z$

3) $N = 1 + 17x$ avec $x = 1 + 13k$

$N = 1 + 17(1 + 13k) = 18 + 221k$ avec $k \in Z$

Application 25

soit p un entier relatif ,on s'interesse dans cette question a l'equation (E_p):

$3x + 4y = p$ ou $x\ et\ y$ sont des entiers relatifs

a)Determiner est une solution particuliere de l'equation (E_p)

b)Donner l'ensemble des solutions (x, y) de l'equation (E_p) en fonction de p

2)On considere maintenant l'equation (E):

$6x + 8y - z = 0$ soit (x_0, y_0, z_0) une solution de (E)

2.a)Demontrer z_0 est pair

b)on pose $z_0 = 2p$ ou p$\in Z$

Prouver que le couple $(x_0; y_0)$ est solution de (E_p)

C) Determiner l'ensemble des solutions de l'equation (E)

CORRECTION

soit p un entier relative donne

1.a) $4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 4 - 3 \times 1$

Soit $1 = 3(-1) + 4(1)$

En multipliant par l'entier relatif p de part et d'autre de l'egalite on obtient

$$1 = 3(-1) + 4(1) \Leftrightarrow p = 3(-p) + 4(p)$$

Donc le couple $(-p; p)$ est une solution particuliere de l'equation (E_p)

b)soit (x, y) une solution de l'equation (E_p) on a alors :

$$\begin{cases} 3x + 4y = p \\ 3(-p) + 4p = p \end{cases}$$

……………………………………………………………………

En soustrayant termes a termes on obtient

$3(x + p) + 4(y - p) = 0 \Leftrightarrow 3(x + p) = 4(-y + p)$ (E)

4 divise $3(x + p)$ comme pgdc$(3,4) = 1$ donc 4 divise $x + p$,d'apres Gauss alors il existe un entier relative k tel que $x + p = 4k \Longrightarrow x = -p + 4k$

En remplacant $x + p$ dans (E) on a:

$4(-y + p) = 3 \times 4k$ avec k$\in Z$

$$-y + p = 3 \Longrightarrow y = p - 3k$$

D'ou $S = \{-p + 4k; p - 3k\}$ avec k$\in Z$

2.a) on a: $6x_0 + 8y_0 - z_0 = 0 \Leftrightarrow z_0 = 2(3x_0 + 4y_0)$

On sait que $(x_0, y_0)\epsilon Z^2$ posons $p = (3x_0 + 4y_0)$

$z_0 = 2p$ avec $p\epsilon Z$

Donc z_0 est pair

b)En remplacant z_0 par $2p$ on obtient

$2p = 2(3x_0 + 4y_0) \Leftrightarrow p = (3x_0 + 4y_0)$

Donc (x_0, y_0) est solution de (E_p)

c)l'ensemble triplet solution de (E) est sous la forme : $\begin{cases} x = -p + 4k \\ y = p - 3k \\ z = 2p \end{cases}$ avec k$\in Z$

l'ensemble solution est dans l'ensemble des points de coordonnees entieres de la droite passant par le point $A(-p; p; 2p)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4; -3; 0)$

Application 26

On considere la suite (U_n) d'entiers naturels definie par :

$$\begin{cases} U_0 = 14 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases} \quad pour\ tout\ \ entier\ naturel\ n$$

1)calculer $U_1; U_2; U_3$ et U_4

Quelle conjecture peut t'on emettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2.a)Montrer que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+2} \equiv U_n[4]$$

2.b) En deduire que pour tout entier naturel k,

$$U_{2k} \equiv 2[4] \quad \text{et} \quad U_{2n+1} \equiv 0[4]$$

C)Montrer que pour tout entier naturel n,

$$2U_n = 5^{n+2} + 3$$

d)En deduire que,pour tout entier naturel n, $\quad 2U_n \equiv 28[100]$

3)Determiner les deux derniers chiffres de l'ecriture decimale de U_n suivant les valeurs de n

4) Montrer que le pgcd de deux termes consecutifs de la suite (U_n) est constant et preciser sa valeur

CORRECTION

$$U_1 = 5U_0 - 6 = 64$$

$$U_2 = 5U_1 - 6 = 314$$

$$U_3 = 5U_0 - 6 = 1564$$

$$U_4 = 5U_0 - 6 = 7814$$

Conjecture,si n est pair,les deux dernier chiffres de U_n sont 14, et si n est impair ce sont alors 64.

2.a)pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = 5U_n - 6$$

$$U_{n+2} = 5(5U_n - 6) - 6 = 25U_n - 36$$

$$U_{n+2} - U_n = 24U_n - 36 = 4(6U_n - 9)$$

$$U_{n+2} - U_n = 4(6U_n - 9)$$

Posons $k = 4(6U_n - 9) \in IN$

On a

$$U_{n+2} - U_n = 4k$$

donc $U_{n+2} \equiv U_n[4]$

2.b) soit $P(k)$ la proposition ≪ $U_{2k} \equiv 2[4]$ et $U_{2k+1} \equiv 0[4]$ ≫

- initialisation,verifions que $P(0)$ est vraie
  $U_O = 14$ et $14 \equiv 2[4] \implies U_0 \equiv 2[4]$
  $U_1 = 64$ et $64 \equiv 0[4] \implies U_1 \equiv 0[4]$

Donc $P(0)$ est vraie

- Heredite,pour tout k entier fixe,supposons que $P(k)$ soit vraie c'est a dire que :

$U_{2k} \equiv 2[4]$ et $U_{2k+1} \equiv 0[4]$

Montrons alors que $P(k+1)$ est aussi vraie c'est a dire:

$U_{2k+2} \equiv 2[4]$ et $U_{2k+3} \equiv 0[4]$ **(But)**

D'apres la question precedente on a

$U_{k+2} \equiv U_k[4] \Leftrightarrow U_{2k+2} \equiv U_{2k}[4]$

En remplacant par l'hypothese de recurrence on a:

$$U_{2k+2} \equiv 2[4]$$

D'apres toujours la question precedente on a:

$U_{k+2} \equiv U_k[4] \Leftrightarrow U_{2k+3} \equiv U_{2k+1}[4]$

En remplacant par l'hypothese de recurrence on a:

$$U_{2k+3} \equiv 0[4]$$

Donc $P(k+1)$ est vraie,la proposition est hereditaire

- **Conlusion** par initialisation et heredite pour tout k entier naturel:

$U_{2k} \equiv 2[4]$ et $U_{2n+1} \equiv 0[4]$

C)soit $Q(n)$ la proposition ≪ $2U_n = 5^{n+2} + 3$ ≫

Pour tout n entier naturel

- Initialisation,verifions que $Q(O)$ est vraie

D'une part : $2U_0 = 2 \times 14 = 28$ (1)

D'autre part : $5^{0+2} + 3 = 28$ (2)

$$(1) = (2) \Leftrightarrow 2U_0 = 5^{0+2} + 3$$

donc $Q(0)$ est vraie

- Heredite,pour tout entier n fixe,supposons que $Q(n)$ soit vraie c'est a dire

$$2U_n = 5^{n+2} + 3$$

Montrons alors que $Q(n+1)$ est aussi vraie c'est a dire

$$2U_{n+1} = 5^{n+3} + 3 \quad \textbf{(BUT)}$$

D'apres ce qui precede on a:

$$U_{n+1} = 5U_n - 6$$

En multipliant de part et d'autre par 2 on obtient

$2U_{n+1} = 10U_n - 12$ soit $2U_{n+1} = 5(2U_n) - 12$

En introduisant l'hypothese on a:

$$2U_{n+1} = 5(5^{n+2} + 3) - 12$$

Par suite : $2U_{n+1} = 5^{n+3} + 3$

De ce fait $Q(n+1)$ est vraie ,la proposition est hereditaire

- **Conclusion :** par initialisation et heredite pour tout n entier naturel

$$2U_n = 5^{n+2} + 3$$

❖ Dans cette question nous procederons un double raisonnement par recurrence en implication:

C) soit $R'(n)$ la proposition ≪ $5^{n+2} \equiv 25[100]$ ≫ Pour tout n entier naturel

- Initialisation,verifions que $R(O)$ est vraie

$$5^{0+2} = 25 \equiv 25[100]$$

Donc $R'(0)$ est vraie

- Heredite,pour tout entier n fixe,supposons que $R'(n)$ soit vraie c'est a dire :

$$5^{n+2} \equiv 25[100]$$

Montrons alors que $R'(n+1)$ est aussi vraie c'est a dire

$$5^{n+3} \equiv 25[100] \quad \textbf{(BUT)}$$

D'apres l'hypothese on a:

$$5^{n+2} \equiv 25[100] \Leftrightarrow 5^{n+3} \equiv 5 \times 25[100]$$

Or $5 \times 25 = 125 \equiv 25[100]$

D'ou: $5^{n+3} \equiv 25[100]$

De ce fait $R'(n+1)$ est vraie la proposition est hereditaire

- **Conclusion** par initialisation et heredite pour tout n entier naturel
  $5^{n+2} \equiv 25[100]$

soit $R(n)$ la proposition ≪ $5^{n+2} + 3 \equiv 28[100]$ ≫ Pour tout n entier naturel

- Initialisation,verifions que $R(O)$ est vraie

$$5^{0+2} + 3 = 28 \equiv 28[100]$$

Donc $R(0)$ est vraie

- Heredite,pour tout entier n fixe,supposons que $R(n)$ soit vraie c'est a dire :

$$5^{n+2} + 3 \equiv 28[100]$$

Montrons alors que $R(n+1)$ est aussi vraie c'est a dire

$$5^{n+3} + 3 \equiv 28[100] \quad \textbf{(BUT)}$$

D'apres premier raisonnement $R'(n)$ on a:

$$5^{n+3} \equiv 25[100] \Longrightarrow 5^{n+3} + 3 \equiv 28[100]$$

Soit $2U_{n+1} \equiv 28[100]$

De ce fait $R(n+1)$ est vraie la proposition est hereditaire

- **Conclusion** par initialisation et heredite pour tout n entier naturel

$$2U_n \equiv 28[100]$$

3)comme $2U_n \equiv 28[100]$ les deux derniers chiffres de $2U_n$ sont 28. Par consequent,les deux chiffres de U_n sont 14 et 64.or d'apres la question 2 , $U_{2k} \equiv 2[4]$ comme $14 \equiv 2[4]$ et $64 \equiv 0[4]$ on deduit que lors que n est pair les deux derniers chiffres de U_n sont 14

On sait aussi que $U_{2k+1} \equiv 0[4]$ donc lorsque n est impair les deux derniers chiffres de U_n sont 64.

3)Rappel:soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$ alors pgcd$(a; b)$=pgcd$(a - b; b)$

Doit d =pgcd$(U_{n+1}; U_n)$

d =pgcd$(5U_n - 6; U_n)$ =pgcd$(4U_n - 6; U_n)$...

d =pgcd$(U_n - 6; U_n)$ =pgcd$(U_n; 6)$

d est donc un diviseur de 6 et ses valeurs possibles sont 1;2;3;6 on sait que U_n se termine par 14 ou 64 donc U_n est pair

$5^{n+2} = 2U_n - 3$ donc U_n n'est pas multiple de 3 sinon 5^{n+2} le serait ce qui est impossible,on en deduit que $d = 2$

Par consequent le pgcd de deux termes consecutifs de la suite (U_n) est constant et vaut 2

Petit Theoreme de Fermat

Theoreme

Soient p un nombre premier et $a \geq 2$ est un entier non multiple de p,alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p , $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exemple :7 est premier et ne divise pas 3,donc $3^6 - 1$ est divisible par 7 ainsi $3^{6n} \equiv 1[7]$

Corollaire

Soient p un nombre premier,a est un entier superieur ou egal a 2 alors $a^p - a$ est divisible par p implique $a^p \equiv a[p]$

Application 27

1)Determiner les restes de la division euclidienne de 2^{2013} par 5 et par 13

CORRECTIONS

Comme 5 est premier ,D'apres le petit theoreme de Fermat on a: $2^{5-1} \equiv 1[5]$ $equivaut\ a$

$2^4 \equiv 1[5]$

La division euclidienne de 2013 par 4 est:

$$2013 = 4 \times 503 + 1$$

Donc $2^{2013} = (2^4)^{503} \times 2 \equiv 1^{503} \times 2[5] \equiv 2[5]$

$0 \leq 2 < 5$ donc 2 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 5

Comme 13 est premier ,D'apres le petit theoreme de Fermat on a: $2^{13-1} \equiv 1[13]$ $equivaut\ a$ $2^{12} \equiv 1[13]$

La division euclidienne de 2013 par 12 est:

$$2013 = 12 \times 167 + 9$$

Donc $2^{2013} = (2^{12})^{167} \times 2^9 \equiv 1^{503} \times 2^9[13] \equiv 5[13]$

$0 \leq 5 < 13$ donc 5 est le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 13

il n'y a pas d'echec,mais des experiences

Exercice d'entrainement

Exercice 1

1)Demontrer soigneusement la transivite de la relation de congruence

2)Montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour a et b entier relatives

3)En deduire que si $a \equiv b[n]$,alors $a^3 \equiv b^3[n]$

Exercice 2

1)si on divise un nombre a par 18,le reste est 13.

Quel est le reste de la division de a par 6?

2)si l'on divise un nombre A par 6 le reste est 4

Quels sont les restes possible de la division de A par 18?

Exercice 3

On considere la suite dont le terme general est define pour tout n entier naturel par :

$$U_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

1)Verifier que les six premiers termes de la suite sont tous multiples de 7

2) soit n entier naturel montrer que :

$U_n = 2U_n + 7 \times 3^{2n+1}$

3)Montrer que pour tout n entier naturel,U_n est divisible par 7.

Exercice 4

1)Montrer soigneusement que la somme de deux entiers pairs est un entier pair

2)Montrer soigneusement que la somme d'un entier pair avec un entier impair est un entier impair

3)Montrer que le carré d'un entier pair est un entier pair.

4)Montrer que le carre d'un entier impair est un entier impair

5)soient a et b deux entiers relatifs,en deduire l'etude de la parite de $(a+b)^2$ selon la parite de a et b

Exercice 5

Soit n un entier relatif,on pose $a = n - 2$ et $b = n^2 + n + 3$

1)Demontrer que :pgcd$(a; b)$ =pgcd$(a; 9)$

2)Pour quelles valeurs de l'entier n,la fraction $\frac{n^2+n+3}{n-2}$ est elle un entier relatif?

Exercice 6

Soit a et b et k trois entiers naturels non nulls.

1-Demontrer que :pgcd$(a; b)$ =pgcd$(a + b; b)$

2-Demonter que :pgcd$(ka; kb) = k\times$pgcd$(a; b)$

Exercice 7

on considere l'equation (E): $8x + 5y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs.

a)donner une solution particulier de (E)

b)resoudre (E)

2)soit N entier tel qu'il existe a et b verifiant

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a; -b)$ est solution de (E)

b)quell est le reste dans la division euclidienne de N par 40?

3.a)Resoudre (E'): $8x + 5y = 100$ ou x et y sont des entiers relatifs.

Il est bien des choses qui ne paraissent impossibles que tant qu'on ne les a pas tentees

Exercice 8

1)Determiner l'ensemble des couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que: $\begin{cases} PGCD(x; y) = 6 \\ xy = 432 \end{cases}$

2)Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n + 3$ divise $n + 1$

3)Trouver les entiers relatifs qui verifient

$$x^2 + 2x = 35$$

4)Determiner tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que: $x^2 = y^2 + 33$

5)soient $a = 6k - 2$ et $b = 4k + 3$

5.1)Montrer que si d divide a et b alors d divise 13

5.2)Quelles sont alors les valeurs possible de d?

Exercice 9

Soit n un entier relative ,on pose $a = n - 2$ et $b = n^2 + n + 3$

1)demontrer que: pgcd$(a; b)$ =pgcd$(a; 9)$

2)Pour quelles valeurs de l'entier relative n,la fraction $\frac{n^2+n+3}{n-2}$ est –elle un entier relatif?

Exercice 10

On considere la suite d'entiers naturels definie par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 10U_n + 21 \end{cases}$ pour tout n entier naturel

1)calucler $U_0; U_1; U_2$ et U_3

b)Quel conjecture peut-on emettre concernant l'ecriture decimale de U_n?

2)Demontrer que pour tout entier naturel n,

$$3U_n = 10^{n+1} - 7$$

3)En deduire pour tout n∈ IN,une preuve de la conjecture faite en 1b.

4)demontrer que pour tout n∈ IN, U_n n'est divisible ni par 2 ni par 3,ni par 5.

5.a)Demontrer que pour tout n∈ IN,

$$3U_n \equiv 4 - (-1)^n[11]$$

b)En deduire que pour n ∈ IN, U_n n'est pas divisible par 11

Exercice 11

1)Demontrer que si $a \equiv 2[5]$ et $b \equiv 3[5]$ alors $a^2 + b^2 \equiv 1[5]$.

2)Resoudre dans Z : $4x \equiv 2[5]$

Exercice 12

1.a)Demontrer que por tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est multiple de 7.

b)En deduire que pour entier naturel n,$2^{3n+1} - 2$ est multiple de 7 et $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2)Determiner les restes possible modulo des puissances de 2.

3)le nombre p etant un entier naturel,on considere l'entier : $A_P = 2^P + 2^{2p} + 2^{3p}$

3.a)si p=3n quel est le reste modulo 7 de A_P

3.b)Demontrer que si p=3n+1, alors A_P est divisible par 7.

Exercice 13

1)Quels sont les restes possible de la division de 3^n par 11?

2)En deduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice 14

On considere dans Z×Z l'equation (E):

$$2x + 5y = 6$$

1.a) verifie que $(3; 0)$ est une solution de (E)

b)Resoudre l'equation (E)

2)Soit $(x; y)$ une solution de (E)

2.a)Quelles sont les valeurs possible de pgcd$(x; y)$?.

2.b)Determine les couples $(x; y)$ solutions de (E) tels que pgcd$(x; y) = 3$

Exercice 15

1)Un nombre s'ecrit $\overline{x43y}$ dans le systeme de numeration dont la base 7

Determine x et y de maniere que ce nombre soit divisible par 6

2)Trouve le reste du nombre 564^{2013} lorsqu'on le divisible par 31.

3)Resoudre dans Z×Z l'equation :

$$564x + 906y = 186$$

Exercice 16

1.a)Determine suivant les valeurs de l'entier naturel n,le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

b)Justifie que $(2014)^{2015} - 3$ est divisible par 7.

2)Pour tout entier naturel n,on pose :

$$S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$$

a)Demontre que pour tout entier naturel n, on a:

$$4S_n = 5^{n+1} - 1$$

b)Deduis en que pour tout entier naturel n, S_n et 5^n sont premiers entre eux

3)soit a un entier relative

a)Demontrer que :
$4S_n \equiv a[7]$ si et seulement si $S_n \equiv 2a[7]$

b)Deduis en le reste de la division euclidienne de S_{2014} par 7.

C)Determiner le plus petit entier naturel non nul n tel que S_n soit divisible par 7.

Exercice 17

les suites d'entiers naturels (X_n) et (Y_n) sont definie sur IN par

$$:\begin{cases} X_0 = 3 \\ X_{n+1} = 2X_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{n+1} = 2Y_n + 3 \end{cases}$$

1)Demontre que pour tout entier naturel n on a: $X_n = 2^{n+1} + 1$

2.a)calcule le pgcd$(X_8; X_9)$ et pgcd$(X_{2002}; X_{2003})$

Que peut-tu deduire pour X_8 et X_9 d'une part et pour X_{2002} et X_{2003} d'autre part.

2.b) X_n et X_{n+1} sont t'il premiers entre eux pour tout entier naturel n.?

3.a)Demontre que pour tout entier naturel n, $2X_n - Y_n = 5$.

b)Exprime Y_n en fonction de n

c)En utilisant les congruences modulo 5,etudie suivant les valeurs de l'entiers naturel p,le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

4)on note d_n =pgcd$(X_n; Y_n)$

a)Demontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$

b)En deduire l'ensemble des entiers naturels n tels que X_n et Y_n soient premiers entre eux.

Exercice 18

Partie A

1.Enoncer le theoreme de Bezout et le theoreme de Gauss.

2.Demontrer le theoreme de Gauss en utilisant le theoreme de Bezout.

Partie B

Il s'agit de resoudre dans Z le systeme:

$$(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$$

1)Demontrer qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que:

$$19u + 12v = 1$$

Verifier que,pour un tel couple,le nombre

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2.a)soit n_0 une solution de (S),verifier que le systeme (S) equivaut a: $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b)Demontrer que le le systeme :

$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ equivaut a $n \equiv n_0(12 \times 19)$

3.a)Trouver un couple $(u; v)$ solution de l'equation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

4)un entier naturel n est tel que lorqu'on le divise par 12,le reste est 6,et lorsqu'on le divise par 19,le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$.quel est le reste de cette division?

Exercice 19

1.a)Determiner l'ensemble des couples $(x; y)$ de nombres entiers relatifs,solution de l'equation $(E): 8x - 5y = 3$

b)Soit m un nombres entier relatifs tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers verifiant $m = 8p + 1$; $m = 5q + 4$

Montrer que le couple $(p; q)$ est solution de l'equation (E) et en deduire que $m \equiv 9[40]$

c)Determiner le plus petit de ces nombres entiers m superieurs a 2000.

2)soit n un nombre entier naturel.

2.a)Demontrer que pour tout nombre entier naturel k, on a: $2^{3k} \equiv 1[7]$

2.b)Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7?

3)Soient a et b deux nombres entiers naturels inferieur ou egal a 9 avec a non nul.

On considere le nombre $N = a \times 10^3 + b$.on rappelle qu'en base 10 ce nombre s'ecrit sous la forme: $N = \overline{a00b}$

On se propose de determiner parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisible par 7.

a)Verifer que $10^3 \equiv -1[7]$

b)En deduire tous les nombres entiers N cherches.

Exercice 20

L'Objectif de cet exercice est l'etude des points a coordonnees entiers du plan P ayant pour equation cartesienne:

$$10x + 15y + 6z = 73$$

1)soit $M(x; y; z)$ un point appartenant au plan P et au plan d'equation $z = 3$,on suppose que les coordonnees x, y et z appartiennent a l'ensemble Z d'entiers relatif

$(E): 2x + 3y = 11$

b) Justifie que le couple $(7; -1)$ est uen solution particuliere de (E).

C)Montrer qu'il existe exactement deux points appartement au plan P et au plan $z = 3$ et dont les coordonnees appartiennent a l'ensemble IN des entiers naturels.

c.1)Determiner les coordonnees de ces deux points.

2) Dans cette question,on se propose de determiner tous les points $M(x; y; z)$ du plan P dont les coordonnees sont des entiers naturels

Soient $x; y$ et z des entiers naturels tels que

$$10x + 15y + 6z = 73$$

2.a) Montrer que y est impair

b)Montrer que : $x \equiv 1[3]$ et que $z \equiv 3[5]$

c)on pose alors: $x = 1 + 3p$; $y = 1 + 2q$ et

$z = 3 + 5r$ ou p ,q et r sont des entier naturels c-1)Montrer que le point $M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement si $p+q+r=1$

d)En deduire qu'il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnees sont des entiers naturels.

d.1)Determiner les coordonnees de ces points.

Exercice 21

soit a un entier naturel non nul et (U_n) la suite definie par : U_n =pgcd$(n;a)$

1)Pour $a=15$ calcule les 3 premiers termes de la suite (U_n)

b)pour $a=4$ soient $m\ et\ n$ des entiers naturels tels que : $U_m=U_n=2$

b.1)Prouver que : $U_{m+n}=4$

2) soit b un entier naturel

Demontrer que pour tout entier relatif q on a

pgcd$(a;b)$ =pgcd$(a;b-qa)$

2.b) calculer $U_0\ et\ U_a$

2.c)Demontrer que $U_a=U_{n+a}$

Quelle propriete de la suite (U_n) a t'on mise en evidence?

3)pour $a=15$ calculer U_n avec $n=15^{21}+2$

Exercice 22

Un entier naturel A s'ecrit $\overline{361}$ dans la base le systeme de numeration de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

1)Demontrer que : $3b^2+6b-2\equiv 0[7]$

b)Deduis en l'ensemble (E) des valeurs de b

2)on suppose dans cette equation que b=8

2.a)Verifie que b appartient a (E)

2.b)Donne l'ecriture decimale de A

2.c)Demontrer que A est un nombre premier.

Exercice 23

On considere l'equation (E) :$(x;y)\in Z^2$

$$19x+9y=3$$

1)Prouver que si $(x;y)$ est solution de (E) alors x est un multiple de 3.

2)Resoudre l'equation (E)

3)Determine les couples $(x;y)$ solutions de l'equation (E) tels que pgcd de $x\ et\ y$ soit maximum.

Exercice 24

Soient $a,b,c\ et\ d$ des entiers relatifs

1)Demontrer que si $a\equiv b[7]$ et $c\equiv d[7]$

Alors $ac\equiv bd[7]$.

b)En deduire que pour $a\ et\ b$ entiers relatifs non nuls, si $a\equiv b[7]$ alors pour tout entier naturel n

$$a^n\equiv b^n[7]$$

2)pour $a=2$ puis pour $a=3$,determiner un entier naturel n non nul tel que: $a^n\equiv 1[7]$

3)Soit a un entier naturel non divisible par 7.

3.a)Montrer que : $a^6\equiv 1[7]$

b)On appelle ordre de $a[7]$ et on designe par k,le petit naturel non nul tel que : $a^k\equiv 1[7]$

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k verifie: $a^r\equiv 1[7]$

En deduire que k divise 6.

c)Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4)A tout entier naturel n,on asocie le nombre :

$$A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$$

Montrer que : $A_{2006}\equiv 6[7]$.

Je m'exerce plus et j'ameliore mes Resultats

SIMILITUDES

Mathématicien Allemand. Rudolf Lipschitz se caractérise par la grande diversité de ses contributions : fonctions de Bessel, séries de Fourier (il est à l'origine d'un critère pour tester leur convergence), géométrie Riemannienne, mécanique (il travailla à résoudre les équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi), théorie des nombres (il étudia les quaternions et, plus généralement, les algèbres de Clifford qu'il redécouvra et qu'il appliqua à la représentation des rotations d'un espace euclidien). Il est en particulier célèbre pour son amélioration du théorème de Cauchy quant à l'existence des solutions d'une équation différentielle. C'est lors de ce travail qu'il introduisit les fonctions qui maintenant portent son nom et que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Similitude directe planes

1-transformations du plan

Définition 1

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une transformation si f est une bijection du plan dans lui-même c'est-à-dire si pour tout N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(M) = N$

Exemples : une translation, une homothétie, une rotation, une symétrie axiale, une identité, du plan sont des transformations du plan.

Contre-exemple : projection orthogonale sur Une droite

Propriété 1

Soit f une transformation du plan, l'application du plan dan lui-même qui a tout point N associe l'unique point M tel que $f(M) = N$ est aussi une transformations du plan,elle est appelée transformations réciproque de f et notée f^{-1} on a alors $f(M) = N \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$

Exemples : une translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Une rotation de centre O et d'angle α $non\ nul$ est une transformation et sa réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$

Une homothétie de centre O et de rapport k est une tranformation et sa reciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$

La réussite est la somme des efforts répétés jours après jours

2-Généralité

Définition 2

On appelle similitude du plan toute transformations f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan par laquelle pour tout point M, N, P, Q $(M \neq N\ et\ P \neq Q)$

On a: $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$

Propriété 2

Soit f une transformation du plan,f est une similitude si et seulement si, il existe un réel $k > 0$, tels que f multiplie les distances par k C'est-à-dire pour tous points $M\ et\ N$ dont les images par f sont notées $M'\ et\ N'$ on a :

$$M'N' = kMN$$

Le nombre réel k strictement positif est appelé rapport de la similitude

Démonstration 1

Soit f une similitude et deux points distincts $A\ et\ B$ d'image respectives $A'\ et\ B'$,$A' \neq B'$ car f est une transformation.

On pose $k = \frac{A'B'}{AB}$ par suite $k > 0$

Etant donne deux points $M\ et\ N$ distincts du plan et $M'\ et\ N'$ leurs images par$f$, $M' \neq N'$

f Conserve les rapports de distances donc :

$$\frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{AB}$$

D'où :$\frac{M'N'}{MN} = \frac{A'B'}{AB} = k$ par suite $M'N' = kMN$

Réciproquement, on suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points $M\ et\ N$ du plan d'images respectives $M'et\ N'$ on a $M'N' = kMN$

Soit quatre points $A, B, C\ et\ D$ $avec$ $A \neq B\ et\ C \neq D$ D'images respectives A', B', C'et D' on a : $A'B' = kAB$ et $D'C' = kDC$

Donc

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

f Conserve les rapports de distances, donc f est une similitude.

Exemples

↳ Les translations, les symétries axiales, les rotations, l'application identique sont des similitudes de rapports 1, car elles conservent les distances.

↳Une similitude de rapport 1 est appelée une isométrie.

↳Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$

Propriété 3

·Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k'}$

·similitude de rapport k',alors les composées fof' sont des similitudes de rapport kk'

·L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.

Exemple : la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Remarque : dans le cadre d'une isométrie l'image d'un triangle est un triangle isométrique.

2,1-Classification des Similitudes

Propriété 4

Une similitude conserve les angles géométriques, elle transforme un angle orienté égal ou opposé

Définition 3

Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés

Une similitude indirecte est une similitude qui transforme un angle orienté en son opposé

↳ L'image d'un triangle ABC par une similitude directe est un triangle directement semblable et son image par une similitude indirecte est un triangle inversement semblable.

Exemples : une translation, une rotation et une homothétie sont des similitudes directes, une réflexion est une similitude indirecte

Propriété 5

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe,

La composée de deux similitude indirecte est une similitude directe

La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte

Deux ou trois points invariants

Soit $A, B\ et\ C$ trois points non alignés, si f est une similitude telle que $f(A) = A$,$f(B) = B$,et $f(C) = C$ alors f est l'application identique

Démonstration 2

Soit A, B et C trois points non alignés et f une similitude telle que :

$f(A) = A$; $f(B) = B$; et $f(C) = C$

Le rapport de la similitude f est :

$$k = \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

Donc f est une isométrie

Soit f une isométrie du plan et A, B et C trois points du plan non alignés.

Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

Prenons les points A' , B' ,C' et M' les images respectives des points A,B,C et M

Alors
$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC})$$
$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = x\varphi(\overrightarrow{AB}) + y\varphi(\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = x\overrightarrow{f(A)f(B)} + y\overrightarrow{f(A)f(C)}$$
$$\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$$

∗Si les points A, B et C sont fixe par f

Alors
$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC})$$
$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = x\varphi(\overrightarrow{AB}) + y\varphi(\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = x\overrightarrow{f(A)f(B)} + y\overrightarrow{f(A)f(C)}$$
$$\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (3)$$

D'après $(1)\ et\ (3)$Cela nous conduit a $M = M'$

Donc isométrie ou similitude de rapport 1 qui fixe trois points non alignés est une identité

Propriété 6

Soit A, B deux points distincts, si f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors f est la symetrie axiale d'axe (AB)

Démonstration 3

Soit A et B deux points distincts et f est une similitude telle que $f(A) = A$,$f(B) = B$ on a $\frac{f(A)f(B)}{AB}$=1 f est une similitude de rapport 1 de ce fait f est une isométrie

f Est une isométrie du plan admettant au moins deux points fixes A, B mais trois non alignés

Soit C$\notin$ (AB) et $f(C) = C'$ alors $C' \neq C$

Or $AC = AC'$ et $BC = BC'$ donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$ et il s'ensuit que l'image de C par la réflexion d'axe (AB) notée $S_{(AB)}$ de ce fait $S_{(AB)}$ est une isométrie de même que $S_{(AB)}of$

Par ailleurs : $\begin{cases} S_{(AB)}of(A) = S_{(AB)}(A) = A \\ S_{(AB)}of(B) = S_{(AB)}(B) = B \\ S_{(AB)}of(C) = S_{(AB)}(C') = C \end{cases}$

Ainsi $S_{(AB)}of = id$

Toute réflexion est involutive, c'est-à-dire qu'elle a pour réciproque elle-même.

En effet $S_{(AB)}^{-1} = S_{(AB)}$

D'où : $S_{(AB)} = f$

Une similitude fixant deux points est une reflexion d'axe (AB)

Propriétés caractéristiques

Une transformation S est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z \longmapsto az + b$ ou a et b sont des nombres complexes (a non nul)

Le rapport de la similitude est égal au module de a et son angle est un argument de a

Propriété 7

Toute similitude plane directe, autre qu'une translation admet un point fixe unique ce point fixe est appelé centre de la similitude

Démonstration 4

Soit S une similitude directe dont l'écriture complexe est :$z' = az + b$ si M d'affixe z est un point fixe de S alors $S(M) = M$ c'est-à-dire $z' = z$ l'affixe z est solution de l'équation :

$$z = az + b$$

Soit $(1 - a)z = b$

↳ si $a = 1$, S Est une translation

↳si $b = 0$ S est l'identité et tout point du plan et fixe si $b \neq 0$,il y'a aucun point fixe

↳ si $a \neq 1$ L'équation précèdent admet une solution unique $\omega = \frac{b}{1-a}$

S a donc un point fixe unique d'affixe ω

Théorème

Une similitude plane directe de rapport k et d'angle θ est :

Soit une translation si k=1 et $\theta = 0$

Soit la composée dans un ordre quelconque d'une rotation de centre Ω et d'angle θ et d'une homothétie de même centre Ω de rapport k.

Elle admet une écriture complexe de la force.

$z' - \omega = a(z - \omega)$ Avec $a = ke^{i\theta}$

Le rapport $k = |a|$

L'angle $\theta + k2\pi = Arg(a)$,$k \in Z$

Propriété 8

Etant donnée quatre points A, B , A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$ il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' ,elle a pour rapport $\frac{A'B'}{AB}$

Et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

Remarques

Les translations et l'homothétie de rapport positif ont pour angle $\theta = 0[2\pi]$

Les homothéties de rapport négatif ont pour angle $\theta = \pi[2\pi]$

Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta[2\pi]$

Définition 4

On dit que f est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ

On note $f = S(\Omega, k, \theta)$ si $k > 0$ et $\theta \in IR$

Cas particulier

Si $k = 1$,la similitude f est une rotation

$$f = S(\Omega, 1, \theta) = r(\Omega, \theta)$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ la similitude f est une homothetie de rapport k : $f = S(\Omega, k, 0) = h(\Omega, k)$

si $\theta \equiv \pi[2\pi]$,la similitude f est une homothetie de rapport k : $f = S(\Omega, k, \pi) = h(\Omega, -k)$

2,2- Déplacements

Une similitude directe de rapport 1 est appelé un déplacement

Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation, soit une identité du plan

Si l'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = az + b \quad a \in C^* \; et \; b \in C$

Pour un déplacement $|a| = 1$

Si $a = 1$ le déplacement est une translation,

$si \; b = 0$ Le déplacement est l'identité du plan

Si $a \neq 1$ on a $a = e^{i\theta}$ donc le déplacement est une rotation d'angle θ donc le centre Ω d'affixe ω

3-Similitudes planes indirectes

Propriété 9

Etant donné une droiteΔ, toute similitude indirecte S est la composée de la symétrie σ d'axe Δ et d'une similitude directe S'

Propriété 10

Une transformation est une similitude indirecte si et seulement si, son écriture complexe est sous la forme : $z \longmapsto a\overline{z} + b \; (a \neq 0)$

En effet d'une similitude sur les configurations

Propriété 11

Toute similitude de rapport $k(k > 0)$

→Multiplie les distances par k et les aires par k^2

→Conserve les angles géométriques donc le parallélisme et l'orthogonalité

→Conserve les alignements, les milieux et les intersections

→Conserve les barycentres d'un système De n points pondérés

→Transforme une droite en une droite et un segment et un segment

Qu'est ce qui conditionne la réussite ? la capacité à soutenir un effort continu

Application 1

Dans le plan orienté ABCD est un carré 1 et de centre O tel que :$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ I est le milieu du segment $[AO]$.

a)Justifier qu'il existe une unique similitude S telle que : $S(A) = O$ et $S(B) = I$

a)Déterminer le rapport et l'angle le rapport et l'angle de S.

b) Donner une écriture complexe de S dans le repère orthonormal directe$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

On note Ω le centre de S Démontrer que les droites $(A\Omega)$ et (ΩD) sont perpendiculaire

Application 2

Le plan est muni d'une repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct on considère l'application f du plan dans lui-même qui a tout point d'affixe$z$, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$$

1) Démontrer que f est une similitude directe dont on donnera le centre Ω ,le rapport k et d'angle θ .

2) Soit M_O le point d'affixe$1 + 4\sqrt{3} + 3i$.

Pour tout entier naturel le point M_{n+1} est définie par $M_{n+1} = f(M_n)$

2a) calculer ΩM_n en fonction de n

b) placer les points M_o et construire les points M_1,M_2,M_3 et M_4

c)A partir de quel rang n_O a-t-on pour tout n≥ n_0 M_n appartient au disque de centre Ω et de 0,05

Calculer M_0M_1

3) pour tout entier naturel n, on note

$$d_n = M_nM_{n+1}$$

3a) Montrer Pout tout entier naturel (d_n) est une suite géométrique donc on précisera les premiers termes et la raison.

On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

b) calculer l_n e fonction de n, et Déterminer sa limite

4) pour tout entier naturel non nul n, on note G_n l'isobarycentre des pointsM_0,M_1,M_2 ,…M_n

a)Montrer que pour tout $n > 0$ $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$

b) En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$

Correction

f S'écrit sous la forme : $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}i \in C^*$; $b = \frac{1-3i}{2} \in C$

Donc f est une similitude directe.

Eléments caractéristiques

Soit k le rapport de f

Rapport $k = |a|$

$$k = \left|\frac{1}{2}i\right|$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Soit θ un argument de f

$$\theta = Arg(a)$$

$$\theta = Ag\left(\frac{1}{2}i\right)$$

$$\theta = Arg\left(\frac{1}{2}\right) + Arg(i)$$

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Le centre : le point Ω d'affixe ω est solution de l'équation $f(M) = M$ ainsi

$$\Leftrightarrow \ \omega - \frac{1}{2}i\omega = \frac{1-3i}{2}$$

$$\frac{\omega(1+i)}{2} = \frac{1-3i}{2}$$

$$\omega = \frac{1-3i}{1+i}$$

$$\omega = 1 - i$$

Conclusion :f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre ω

2)$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(M_n) = M_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega M_n \quad (a) \\ (\overrightarrow{\Omega M_n}, \overrightarrow{\Omega M_{n+1}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

En partant du(a).

$\Omega M_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega M_n$, On pose $U_n = \Omega M_n$

D'où : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$

De ce fait (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $U_0 = \Omega M_0 = |z_0 - z_\Omega|$

Par suite $U_0 = \left|4\sqrt{3} + 4i\right| = 8$

Formule explicite: $U_n = q^{n-k}U_k$ le premier terme vaut 0 donc $k = 0$

Ainsi $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 8$ d'où :$\Omega M_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

b)$M_1 = f(M_0) \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}iz_0 + \frac{1-3i}{2} = -1 + i(2\sqrt{3} - 1)$

Ensuite : $z_2 = \frac{1}{2}iz_1 + \frac{1-3i}{2}$ et : $z_3 = \frac{1}{2}iz_2 + \frac{1-3i}{2}$

Apres avoir donné la forme algébrique placez les points.

c)$M_n \in D(\Omega, 0{,}05) \Leftrightarrow \Omega M_{n_0} \leq 0{,}05$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} 8 \leq 0{,}05$$

D'où : $n_0 \geq \frac{ln\left(\frac{0,05}{8}\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 7{,}32$; $n_0 = 8$

Calcul de M_0M_1

On a :$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(M_0) = M_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_0 = \frac{1}{2}\Omega M_1 \\ (\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

De ce fait le triangle $M_0\Omega M_1$ est rectangle en Ω

Ainsi :$M_0M_1{}^2 = M_0\Omega^2 + \Omega M_1{}^2$

Par ailleurs :$\begin{cases} M_0\Omega = |z_\Omega - z_0| = 8 \\ \Omega M_1 = |z_1 - z_\Omega| = 4 \end{cases}$

Par suite :$M_0M_1{}^2 = 8^2 + 4^2 \Longrightarrow M_0M_1 = 4\sqrt{5}$

3) $d_n = M_nM_{n+1}$

$$\begin{cases} f(M_n) = M_{n+1} \\ f(M_{n+1}) = M_{n+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{2}M_nM_{n+1} \quad (p) \\ (\overrightarrow{M_nM_{n+1}}, \overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

En partant de (p) $M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{2}M_nM_{n+1}$

Cela conduit à : $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $d_0 = M_0M_1 = 4\sqrt{5}$

Formule explicite : $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 4\sqrt{5}$ pour n ≥ 0

$$l_n = d_0 + d_1 + \cdots d_n$$

$$l_n = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right) + 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n 4\sqrt{5}$$

$$l_n = 4\sqrt{5}\,(1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n)$$

Posons $K_n = (1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n)$

On constate que K_n est la somme de n+1 termes consécutif d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

De ce fait on a : $K_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Par suite

$$l_n = 8\sqrt{5}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Si on a : $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Au final : $\lim_{n\to+\infty} l_n = 8\sqrt{5}$

4)$G_n = bar\{(M_0, 1); (M_1, 1) \ldots (M_n, 1)\}$

En effet :

$$\overrightarrow{G_nM_0} + \overrightarrow{G_nM_1} + \overrightarrow{G_nM_2} + \cdots + \overrightarrow{G_nM_n} = \vec{0}$$

Ensuite :

$$\overrightarrow{G_n\Omega} + \overrightarrow{\Omega M_0} + \cdots + \overrightarrow{G_n\Omega} + \overrightarrow{\Omega M_n} = \vec{0}$$

Par ailleurs

$$\begin{cases} \overrightarrow{G_n\Omega} + \overrightarrow{G_n\Omega} + \overrightarrow{G_n\Omega} + \cdots + \overrightarrow{G_n\Omega} = (n+1)\overrightarrow{G_n\Omega} \\ \overrightarrow{\Omega M_0} + \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega M_2} + \cdots + \overrightarrow{\Omega M_n} = \sum_{p=0}^{n}\overrightarrow{\Omega M_p} \end{cases}$$

Par suite :

$$(n+1)\overrightarrow{G_n\Omega} + \sum_{p=0}^{n}\overrightarrow{\Omega M_p} = \vec{0}$$

$$(n+1)\overrightarrow{\Omega G_n} = \sum_{p=0}^{n}\overrightarrow{\Omega M_p}$$

$$(n+1)\left\|\overrightarrow{\Omega G_n}\right\| = \sum_{p=0}^{n}\left\|\overrightarrow{\Omega M_p}\right\|$$

Cependant on sait que :$\Omega M_p = \left(\frac{1}{2}\right)^p 8$

$$\sum_{p=0}^{n} \Omega \mathrm{M}_p = 8\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^p$$

$$\textstyle\sum_{p=0}^{n} \Omega \mathrm{M}_p = 8\times 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{p=0}^{n} \Omega \mathrm{M}_p = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On remarque que pour tout entier naturel n

On a : $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 0$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 1$$

$$16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 16$$

$$\sum_{p=0}^{n} \Omega \mathrm{M}_p \leq 16$$

$$(n+1)\Omega \mathrm{G}_n \leq 16$$

D'où pour tout $n \geq 0$: $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \Omega G_n = 0$, Donc les points Ω et G_n sont confondus

Application 3 (BAC BLANC LRW 2005)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ unité 2cm.on donne les points A, B et C d'affixes respectives i ;$\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+i$; on appelle I, J et K les milieux respectifs des segments$[OB]$,$[AC]$ et $[BC]$ et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B

1. faire une figure

2a) Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Donner l'écriture complexe de S

c)En déduire l'affixe ω du centre Ω de S

d) Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?

3) on considère la transformation $S^2 = SoS$

3.a)Quelles sont les images des points O ; B et A par S^2

b) Montrer que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

c)En déduire que les droites (OC), (BJ) ,(AK) sont concourantes

4) On définit la suite des points A_n de façon suivante :$A_0 = A$ et pour tout entier naturel n,

$$A_{n+1} = S(A_n)$$

a)Placer les points, A_1,A_2 et A_3 sur la figure

b) On note U_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$ Exprimer U_n en fonction de U_{n+1}

c)Calculer U_0 et en déduire U_n en fonction de n

d) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

Correction

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IB = kAO \quad (a)\ \ k > 0 \\ (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{IB}) \equiv \theta[2\pi] \quad (b) \end{cases}$$

Soit le k le rapport de S, en partant de (a) on a :

$$k = \frac{IB}{AO}$$

$$k = \frac{|z_B - z_I|}{|z_0 - z_A|}$$

$$k = \frac{\left|\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{|i-0|}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle de S soit θ $l'angle$ de S en partant du (b)

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{IB}) = \left(\overrightarrow{AO},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= (-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b) Ecriture complexes de S

S est une similitude directe d'écriture complexe :

$$S: \quad z' = az + b$$

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_I = az_A + b \\ z_B = az_0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2} = ai + b \\ \sqrt{2} = a \times 0 + b\end{cases}\end{cases}$$ C'est évident que $b = \sqrt{2}$

Ainsi $\frac{\sqrt{2}}{2} = ai + \sqrt{2}$ après calcul : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

D'où : l'écriture complexe de S est :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz + \sqrt{2}$$

c)l'affixe du centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + i)$$

d) Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?

On sait déjà que

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases}$$

Soit B' l'image de B par S on a :

$$S(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_B + \sqrt{2}$$

$$z_{B'} = \frac{\sqrt{2}}{2}i \times \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$z_{B'} = i + \sqrt{2}$$

D'où : $B'\begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ 1\end{pmatrix} \Longrightarrow B' = C$ ainsi $S(B) = C$

Soit C' l'image de C par S on a :

$$S(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_C + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}i(\sqrt{2} + i) + \sqrt{2}$$

$$z_{C'} = i + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où : $C'\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1\end{pmatrix} \Longrightarrow C' = J$ ainsi $S(C) = J$

Conclusion : S transforme le rectangle $AOBC$ en $IBCJ$ car $S(A) = I$,$S(O) = B$,$S(B) = C$ et $S(C) = J$

3) $S^2 = SoS$

a)image de O, B et A par S^2

$$S^2(O) = SoS(O)$$
$$= S(B)$$
$$S^2(O) = C$$

$$S^2(B) = SoS(B)$$
$$= S(C)$$
$$S^2(B) = J$$

$$S^2(A) = SoS(A)$$
$$= S(I)$$

Soit I' l'image de I par S on a :

$$S(I) = I' \Leftrightarrow z_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_I + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2}i \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$z_{I'} = \frac{1}{2}i + \sqrt{2}$$

D'où $I'\begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \Longrightarrow I' = K$ ainsi $S(I) = K$

Par suite $S^2(A) = K$

1ere méthode :

S^2 Est la composée de deux similitudes directe dont l'angle est la somme des deux angles de S, soit α l'angle de S : $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Soit k le rapport de S^2 on a : $k = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

Le centre de S^2 :

On a: $S^2(\Omega) = SoS(\Omega) = S(\Omega) = \Omega$

On constate : $S^2\left(\Omega; \pi; \frac{1}{2}\right) = h\left(\Omega, -\frac{1}{2}\right)$

Conclusion : S^2 est une similitude de rapport de $\frac{1}{2}$ d'angle π et de centre Ω de ce fait S^2 *est une homothetie* de rapport

2eme Méthode : passez par la composée de de SoS pour montrer que S^2 est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre Ω

On sait que : $S^2 = h$

c)$\begin{cases} h(O) = C \\ h(\Omega) = \Omega \end{cases}$ d'où $\Omega \in (OC)$

$\begin{cases} h(B) = J \\ h(\Omega) = \Omega \end{cases}$ D'où $\Omega \in (BJ)$

$\begin{cases} h(A) = K \\ h(\Omega) = \Omega \end{cases}$ D'où $\Omega \in (AK)$

Donc les droites (OC),(BJ)et (AK) sont concourantes en Ω

4) $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout entier n naturel

$$A_1 = S(A_O) \Leftrightarrow z_{A_1} = \frac{1}{2}iz_A + \sqrt{2}$$

Apres calcul $z_{A_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Même démarche pour les points suivants

b)

$$\begin{cases} S(A_n) = A_{n+1} \\ S(A_{n+1}) = A_{n+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{n+1}A_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1} \\ (\overrightarrow{A_nA_{n+1}}, \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En partant de la première relation on a :

$$A_{n+1}A_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1} \Longrightarrow U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$$

(U_n) Est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $U_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Formule explicite : $U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

$$S_n = \frac{\sqrt{6}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 \times \frac{\sqrt{6}}{2} + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n)$$

En posons : $T_n = (1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n)$

T_n Est la somme de n+1 termes consécutif d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme 1 :

Ainsi $T_n = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$

Par suite $S_n = \frac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$ Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = 0$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}}$

Application

ABC est un triangle équilatéral direct de côté 4cm et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$,$[CA]$, et $[AB]$.on pose $s_B(A) = A'$

1a)Faire une figure illustrant les données que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$.
Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

c)soit r la rotation qui transforme C en B et J en K
Déterminer l'angle et le centre de r.

2) soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en I et on pose $h = Sor$

a)Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

b) soit Ω le centre de S.Montrer que $\Omega \in \Gamma$ et que les points Ω, A et I sont alignés

c)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h

Correction

b) on a : $BA' = AB \neq 0$ donc il existe un unique antidéplacement g transformant B en A et A' en B

Nature de g :
Supposons que g soit une symétrie orthogonale
On a: $gog(A') = g(B) = A$
Nous constatons que $gog \neq id$
De ce fait g ne peut pas être une réflexion, dans ce cas g est une symétrie glissante

Autre démarche : nous aurons pu remarquer que $med[BA] \neq med[A'B]$, de ce fait g ne peut pas être une symétrie orthogonale $(reflexion)$

Forme réduite de $g = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}$

Cherchons Δ

On a $\begin{cases} K\ mil[BA] \in \Delta \\ L\ mil[A'B] \in \Delta \end{cases}$ $K \neq L$ d'où :$(KL) = \Delta$

En d'autre terme $(AB) = \Delta$

Cherchons le vecteur

On sait que g est une symétrie glissante

$$\begin{cases} gog = t_{2\vec{u}} \\ gog(A') = A \end{cases} \Leftrightarrow t_{2\vec{u}} = t_{\overrightarrow{A'A}}$$

Par suite $2\vec{u} = \overrightarrow{A'A} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{BA}$

Alors $g = t_{\overrightarrow{BA}} o S_{(BA)}$

c)soit $\begin{cases} r(C) = B \\ r(J) = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BK = CJ \quad (a) \\ (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{BK}) \equiv \theta[2\pi] \quad (b) \end{cases}$

En partant du (b)

$$(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$$

Soit Ω' le centre de r : $\Omega' \in \begin{cases} med[BC] \\ med[CJ] \end{cases}$

En effet $\Omega' = A$

Conclusion : donc r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

2a)

Soit $\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BI = kAC \quad k > 0 \ (a) \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}) \equiv \theta[2\pi] \quad (b) \end{cases}$

Le rapport en partant de (a)

$$k = \frac{BI}{AC}$$

$$k = \frac{\frac{1}{2}AC}{AC} = \frac{1}{2}$$

Angle de S en partant du (b)

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$$

3)$S(\Omega) = \Omega \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}$

De plus $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ d'où :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})[\pi]$$

Donc les points $A, B, C\ et\ \Omega$ sont cocyclique de ce fait $\Omega \in \Gamma$

Montrons alignement des points $\Omega, A\ et\ I$

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) + (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I})$$

Les points $A, B, C\ et\ \Omega$ sont cocycliques

Et $S(I) = C$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{3} \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{BA}, BC) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0$$

Donc les points $\Omega, A\ et\ I$ sont alignés

c) h est la composé de r et S

$r\ et\ S$ Étant des similitudes, d' où :

L'angle de h :$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0$

Le rapport de h : $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Donc h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$

Cherchons son centre : $h = Sor$

$h(A) = Sor(A) = S(A) = B$

Soit Ω'' le centre de h : $\overrightarrow{\Omega'' B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega'' A}$

D'où :$\Omega'' = A'$

Conclusion : h est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le point A'

Application 4(BAC blanc LERNB 2005)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .On considère la transformation f du plan qui a tout point M d'affixe associe le point M' d'affixe

$$z' = (-\sqrt{3} + i)z$$

Et on définit une suite de points (M_n) de façon suivante :M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$ on appelle z_n l'affixe du point M_n

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
Placer les points $M_0, M_1, et\ M_2$ sur la figure

b) justifier que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) soient deux entier n et p tels que $n \geq p$ .Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur n et p pour que les points $O, M_n\ et\ M_p$ sont alignés

4) soit k un entier relatif.
On considère l'équation (E_k) : $12x - 5y = k$
a)justifier que l'équation (E_k) admet au moins une solution et indiquer une méthode permettant de prouver une solution particulière

b) Résoudre l'équation (E_3): $12x - 5y = 3$

c)En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que (M_n) appartienne a la demie droite $[Ox)$

Correction

1)$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = (-\sqrt{3} + i)z$
f s'écrit sous la forme de $z' = az + b$ avec $a = -\sqrt{3} + i$ et $b = 0$ de plus $-\sqrt{3} + i \in C^*$
Donc f est une similitude directe

-Eléments caractéristiques de f
Soit k le rapport de f

$$k = |a|$$
$$k = \left|-\sqrt{3} + i\right|$$
$$k = 2$$

L'angle : soit θ l'angle de f

$$\theta \equiv Arg(-\sqrt{3} + i)[2\pi]$$

$$\theta = Arg\left(2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)$$
$$\theta = Arg(2) + Arg\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$\theta = Arg\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$\theta = Arg\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$
$$\theta \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Soit le centre Ω le point d'affixe ω
$\omega = \frac{b}{1-a}$ Vu que $b = 0$ alors $\omega = 0$ d'où $\Omega = O$

Conclusion :f est une similitude de centre O d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et de rapport 2

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$z_1 = (-\sqrt{3} + i)z_0 = -1 - i\sqrt{3}$$
$$z_2 = (-\sqrt{3} + i)z_1$$

Apres avoir calculé les affixes des points placez les points

b) Justifions que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

$$\begin{cases} f(O) = O \\ f(M_0) = M_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = 2OM_0 \\ (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(O) = O \\ f(M_1) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM_2 = 2OM_1 \\ (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$

Par suite $:\frac{OM_1}{OM_0} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{M_1M_2}{M_0M_1} = 2$
De plus

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Conclusion : les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables

2) soit $p(n)$ la proposition "$z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$"

Initialisation, vérifions que $p(0)$ est vraie

$$p(0): \quad z_0 = 2^0 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Hérédité, pour tout entier n fixé, supposons que $p(n)$ est vraie c'est-à-dire

$$p(n): \quad z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$$

Montrons alors que $p(n+1)$ *est* aussi vraie c'est-à-dire

$$p(n+1): z_{n+1} = 2^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$$ **(BUT)**

D'apres l'hypothese on a $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

En multipliant de part et d'autres par $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ on a

$$2e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n = 2^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$$

Ensuite $z_{n+1} = 2^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$

Donc $p(n+1)$ est vraie la proposition est Héréditaire

Conclusion : par initialisation et hérédité pour tout n entier naturel *on a*: $z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) les points M_n M_p *et* O *sont alignés*

$$\left(\overrightarrow{OM_P}, \overrightarrow{OM_n}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM_P}, \overrightarrow{OM_n}\right) = k\pi$$

$$k \in Z$$

Par ailleurs $\left(\overrightarrow{OM_P}, \overrightarrow{OM_n}\right) = Arg\left(\frac{z_n}{z_p}\right)$

$$\Rightarrow Arg\left(\frac{2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}}{2^p e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}\right)}}\right) = Arg\left(2^{n-p} e^{i\left(\frac{5n\pi}{6}-\frac{5p\pi}{6}\right)}\right)$$

$$Arg\left(\frac{z_n}{z_p}\right) = \frac{5\pi}{6}(n-p)$$

Par suite

$$\left(\overrightarrow{OM_P}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{5\pi}{6}(n-p)$$

$$n = 6k + p \Leftrightarrow n \equiv p[6]$$

4)(E_k) : $\quad 12x - 5y = k$

$pgcd(12,5) = 1 \Leftrightarrow 12u + 5v = 1 \;\; (u,v) \in Z^2$

Soit k *un entier* ,en multipliant par k on obtient : $12ku + 5kv = k$ en posant $x = ku$ *et* $-y = kv$ on a : $12x - 5y = k$, de ce fait k est multiple du $pgcd(12,5)$ donc l'équation (E_k) admet au moins une solution.

$$12 = 5 \times 2 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$

Méthode algorithme d'Euclide

$$1 = 5 \times 1 - 2 \times 2$$
$$1 = 5 - 2(12 - 5 \times 2)$$
$$1 = 5(1+4) - 2 \times 12$$
$$1 = 12(-2) + 5(5)$$
$$1 = 12(-2) - 5(-5)$$
$$k = 12(-2k) - 5(-5k)$$

D'où $x = -2k$, $y = -5k$

Donc le couple $(-2k; -5k)$ est solution de (E_k)

Résoudre : $12x - 5y = 3$ $\;\; ici\; k = 3$

Ainsi *le couple* $(-6; -15)$ est une solution particulière

$$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12(-6) - 5(-15) = 3 \end{cases}$$

……………………………………………………………………………

Ensuite $12(x+6) = 5(y+15)$

12 divise $5(y+15)$ comme $pgcd(12,5) = 1$ alors 12 divise $y + 15$,d'après GAUSS il existe un entier $k' \in Z$ tel que $y + 5 = 12k' \Rightarrow$

$$y = 12k' - 15$$

$$12(x+6) = 5 \times 12k'$$
$$x = 5k' - 6$$

D'où : $S = \{5k' - 6; 12k' - 15\}\; k' \in Z$

C) $M_n \in [0; +\infty[$ c'est-à-dire que M_n d'affixe z_n est un réel strictement positif cela équivaut a

$$Arg(z_n) \equiv 0[2\pi]$$

$$Arg\left(2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}\right) = 2m\pi \quad m \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6} = 2m\pi$$

Par suite en simplifiant on a : $\;12m - 5n = 3$

Cela revient a $m = 5q - 6$ *et* $n = 12q - 15$

$$avec \;\; q \in Z \; et \; q \geq 2$$

Applications 6

ABC est un triangle équilatéral tel que

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Ω Est un triangle équilatéral tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

I et J Sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),D est le point de la droite(AC) tel que $DA = D\Omega$

1) Montrer que $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit $R = S_{(\Omega D)} o S_{(\Omega J)}$

2) Justifier que R est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Soit $F = R(J)$

3) Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$

4) soit l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$ on pose $f = hoR$

a)Vérifier que $f(J) = I$

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c)calculer $\frac{\Omega\mathrm{I}}{\Omega\mathrm{A}}$ et $\frac{\Omega\mathrm{A}}{\Omega\mathrm{J}}$

En déduire que le rapport de f est égal a $1 + \sqrt{3}$

5) soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = L$

a)Monter que $g = foS_{(\Omega J)}$

b) Déterminer le rapport de g

c)Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD)

d) Montrer que $g = hoS_{(\Omega D)}$

ISOMETRIE

Gottfried Leibniz est un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et juriste allemand. Il se montre précoce intellectuellement et possède de fortes capacités d'apprentissage. Il dit avoir appris seul le latin et à 15 ans il connaît la littérature grecque et latine. Il obtient son baccalauréat à 17 ans et rentre la même année à l'Université de Leipzig où il étudie la philosophie, le droit et les mathématiques. Cette université lui refuse en 1666 de lui décerner le titre de docteur, sans doute à cause de son très jeune âge et il obtient celui-ci un an plus tard à l'Université de Nuremberg. Plutôt que de chercher un poste universitaire, il rentre au service du baron von Boyneburg à Francfort qui l'initie à la politique. Leibniz est, avec Newton, l'inventeur du calcul infinitésimal et fut le découvreur des formules de dérivation d'un produit, d'un quotient et d'une puissance. Newton était parvenu de son côté, quelques années auparavant, aux mêmes résultats que Leibniz mais sans publier son travail. Une longue polémique s'ensuivit afin de déterminer qui avait la paternité de cette théorie.

Isométrie

1) Transformation du plan

1.1 Définition 1 :Une transformation f du plan est une application du plan dans lui-même telle que pour tout point M' du plan il existe un unique point M tel que $f(M) = M'$.on dit que le point M' est l'image du point M par la transformation f ou M est un antécedent de M' par f.

Remarque 1 : par définition une transformation est une bijection

Exemple : une translation, une rotation, une homothétie, une réflexion sont des transformation du plan

Définition 2 : On dit que M est invariant ou fixe par la transformation f si $f(M) = M$

Définition 3 : Si F est une figure du plan ensemble de point quelconque. On appelle image de F par f et on note F(f) l'ensemble des points de la forme f(M) lorsque M décrit F .si $f(F) = F$,on dit que F est globalement invariant par f

Remarque 2 : dire que F est globalement invariant par f ne signifie pas que tous les points de F sont fixes par f.

Définition 4 : La transformation M qui a tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la transformation identique ou l'identité du plan on la note $Id_p ou\ Id$

Remarque 3 : pour cette transformation tous les points sont invariants

I -Composition

Définition 5 : la transformation composé de f et g, notéefog est la transformation qui tout point M du plan associe le point $fog(M) = f[g(M)]$

Remarque 4 : En général $fog \neq gof$ .lorsque $fog = gof$ on dit que les transformations f et g commutent.

1) Transformation réciproque

Définition 6 : la réciproque f^{-1} d'une transformation f est la transformation qui a tout point N associe son unique antécédent par f.
$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N)$

f^{-1} Est une transformation et $(f^{-1})^{-1} = f$

$$f^{-1}of = fof^{-1} = Id$$

Si f et g sont deux transformations, fog est une transformation et $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

Remarque 5 : si $h = fog$ alors $f = hog^{-1}\ et\ g = f^{-1}oh$

Isométrie du plan

Définition 7: une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les distances précisément, pour tous points A et B d'image respectives $A'\ et\ B'$ on a : $AB = A'B'$

Théorème 1 : Si f est une isométrie du plan :

*L'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$

*L'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$

*L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R

* f Conserve le parallélisme

* f Conserve l'orthogonalité

* f Conserve les milieux : si$I$ est milieu de$[AB]$,$f(I)$ est milieu de $[f(A)f(B)]$

* f Conserve les barycentres

* f Conserve les angles géométriques

Définition 8 : une Isométrie qui conserve l'orientation des angles est un déplacement.

Définition 9 : une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un antidéplacement

Théorème 2 : la composé d'un déplacement et d'un antidéplacement peu importe l'ordre est un antidéplacement

Théorème 3 : la composé de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement

Isométrie Usuelles

Translation

Définition 10 : une translation est une isométrie caractérisé par son vecteur de translation $\vec{u}$,cette transformation est notée $t_{\vec{u}}$ défini par $t_{\vec{u}}(M) = (M') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Remarque :$t_{\vec{0}} = Id$

Remarque :$\begin{cases} t_{\vec{u}}(M) = M' \\ t_{\vec{u}}(N) = N' \end{cases}$ $ainsi\ \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Théorème : $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Théorème : une translation est un déplacement qui n'a aucun point invariant ou fixe

Réflexion(ou symétrie orthogonale)

Soit Δ une droite du plan la reflexion d'axe Δ est la transformation notée S_Δ définie par :

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' = M\ si\ M \in \Delta \\ \Delta\ est\ la\ médiatrice\ de\ [MM']\ si\ M \notin \Delta \end{cases}$$

Théorème : $S_\Delta o S_\Delta = Id$; $S_\Delta^{-1} = S_\Delta$

Théorème : une réflexion est un antidéplacement qui a pour point fixe tout point de Δ

la difficulté est la pour me faire progresser

Rotation

Définition11 : une rotation est une isométrie qui est caractérisé par son angle θ et son centre ω .cette transformation se note $r_{\omega;\theta}$ ou $Rot(\omega;\theta)$ définie par :

$$r_{\omega;\theta}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \omega M' = \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Remarque : $r_{\omega;\pi} = S_\omega$ **est la symétrie de centre** ω

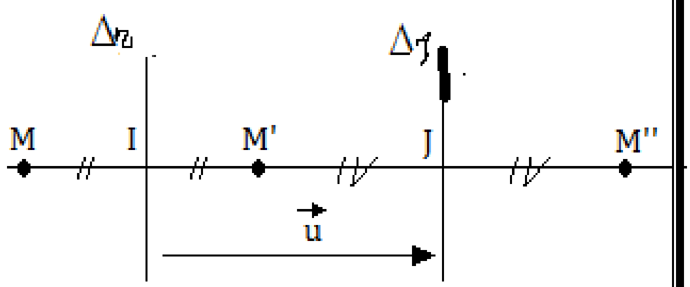
Remarque : si $\begin{cases} r_{\omega;\theta}(M) = M' \\ r_{\omega;\theta}(N) = N' \end{cases} \Leftrightarrow (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega N'}) \equiv (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N})[2\pi]$

Théorème : $(r_{\omega;\theta})^{-1} = r_{\omega;-\theta}$

Théorème : une rotation est un déplacement qui a pour seul point fixe le centre de la rotation

Composée de deux réflexions d'axe $\Delta_1\ et\ \Delta_2$

Cas ou les axes $\Delta_1\ et\ \Delta_2$ sont parallèles



Démonstration :

soient $S_{\Delta_1}(M') = M''$;$S_{\Delta_2}(M) = M'$,$I\ et\ J$ les milieux respectifs de $[MM']\ et\ [M'M'']$ on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'} \\ \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J} \end{cases}$$

....

En additionnant membre à membre on obtient :

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J})$$

$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$ Avec $\overrightarrow{IJ} = \vec{u}$

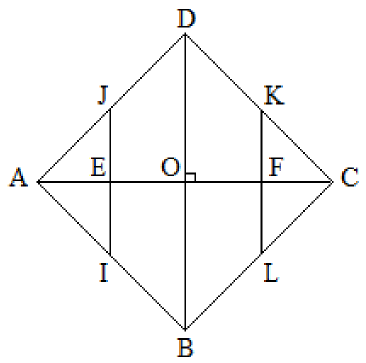
$\Leftrightarrow \ t_{2\vec{u}}(M) = M''$

Théorème : si S_{Δ_1} et S_{Δ_2} sont des réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 tels que $\Delta_1 \parallel \Delta_2$,la composée $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$ est la translation de vecteurs $2\vec{u}$ avec $\vec{u}$ tel que $\Delta_1 = t_{\vec{u}}(\Delta_2)$

Remarque : $S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1} = t_{-2\vec{u}}$ **et donc dans le cas ou** $\Delta_1 = \Delta_2$ **:** $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2} \neq S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$

APPLICATION 1

$ABCD$ Est un losange de centre O et I, J, K, L, E, F les milieux respectifs de$[AB]$, $[AD]$,$[CD]$,$[CB]$.$[IJ]$ Et $[LK]$

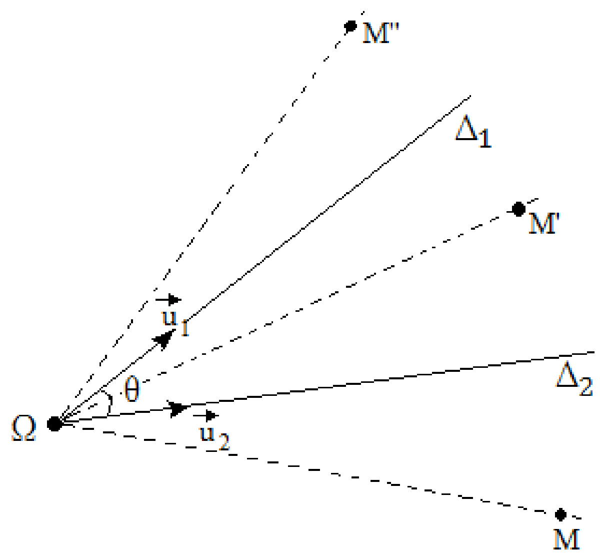


$t_{\overrightarrow{OA}} = t_{2\overrightarrow{EO}} = S_{(BD)} o S_{(IJ)}$

$S_{(KL)} o S_{(DB)} = t_{2\overrightarrow{OF}} = t_{\overrightarrow{OC}}$

$t_{\overrightarrow{Ac}} = S_{(KL)} o S_{(IJ)}$

Cas ou les axes Δ_1 et Δ_2 sont sécants en Ω



Démonstration. Soit $S_{\Delta_2}(M) = M'$; $S_{\Delta_1}(M') = M''$

$S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}(\Omega) = S_{\Delta_1}(\Omega) = \Omega$

S_{Δ_1} Et S_{Δ_2} étant des isométries : $\Omega M' = \Omega M$ et $\Omega M'' = \Omega M'$ donc $\Omega M'' = \Omega M$

Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ_1 et Δ_2

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}_2) + (\vec{u}_2, \vec{u}_1) + (\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M''})$

Une réflexion étant un antidéplacement

$(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}_2) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u}_2)$ Et $(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M'})$

Par suite on a:

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = -(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u}_2) + (\vec{u}_2, \vec{u}_1) - (\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M'})$

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = (\vec{u}_2, \vec{u}_1) + (\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

D'où :$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) = 2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

Par conséquent $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

Théorème : soient S_{Δ_1} et S_{Δ_2} deux réflexions d'axes Δ_1 et Δ_2 sécants en Ω et de vecteur directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ la composée $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

APPLICATION 2(LNLM Tle C2 2019

$ABCD$ Est un carré de centre O.

1. Déterminer la transformation dans chacun des cas suivants :

$a)\ f = S_{(DC)} o S_{(AC)}$; $b)\ f = S_{(DC)} o S_{(AB)}$

$c)f = r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$; $d)f = S_{(AC)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$e)f = t_{2\overrightarrow{AD}} o r_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}$; $f)f = S_{(OB)} o S_{(OA)}$

CORRECTION

$$a)\ S_{(DC)} o S_{(AC)} = r\left(C, 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC})\right)$$

$$= r\left(C, 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})\right)$$

$$= r\left(C, 2 \times -\frac{\pi}{4}\right)$$

D'ou: $S_{(DC)} o S_{(AC)} = Rot\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)$

Conclusion : $a\ )f = r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)}$

$b)S_{(DC)} o S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$ (Ici les axes sont parallèles)

Décomposons d'abord les rotations en produit de deux réflexions d'axe sécantes

$$c)r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} = r\left(C, 2 \times -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(C, 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})\right)$$

$$= S_{(CD)} o S_{(CA)}$$

$$r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = r\left(A, 2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$$

$$= S_{(AC)} o S_{(AB)}$$

Par suite

$$r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CD)} o S_{(CA)} o S_{(AC)} o S_{(AB)}$$

$$or\ S_{(CA)} o S_{(AC)} = Id$$

$$r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CD)} o S_{(AB)}$$

$$r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$$

$$conclusion: c)f = t_{2\overrightarrow{AD}}$$

$d)$Decomposons d'abord la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en composée de deux réflexions d'axe sécants

$$r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = r\left(A, 2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$$

$$= S_{(AC)} o S_{(AB)}$$

$$par\ suite$$

$$S_{(AC)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AC)} o S_{(AC)} o S_{(AB)}$$

$$S_{(AC)} o r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AB)}$$

Car $S_{(AC)} o S_{(AC)} = Id$

$$conclusion: d)f = S_{(AB)}$$

$e)$ Comme ce qui précède procédant d'abord à la décomposition :

$$t_{2\overrightarrow{AD}} = S_{(DC)} o S_{(AB)}$$

$$r_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)} = r\left(A, 2 \times -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(A, 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\right)$$

$$= S_{(AB)} o S_{(AC)}$$

$$par\ suite$$

$$t_{2\overrightarrow{AD}} o r_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(DC)} o S_{(AB)} S_{(AB)} o S_{(AC)}$$

$$= S_{(DC)} o S_{(AC)}$$

$$= r\left(C, 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC})\right)$$

$$= r\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$conclusion: e)\ f = r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$f)\ S_{(OB)} o S_{(OA)} = r\left(O, 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right)$$

$$= r\left(O, 2\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= r(O, \pi)$$

D'où : $S_{(OB)} o S_{(OA)} = S_O$

Application 3(LNLM 2019)

$ABCD$ Est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations :

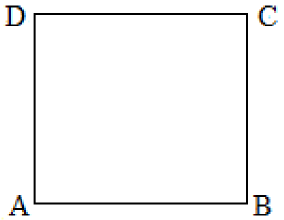
$r_1 = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right) r_2 = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ Et $r_3 = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$

a)Déterminer l'image de C par $r_2 o r_1$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 o r_1$.

b) Déterminer l'image de C par $r_3 o r_1$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_3 o r_1$

c)Déterminer la nature et les éléments caractéristique de $r_3 o r_2$

CORRECTION



a)$r_2 o r_1(C) = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) or \left(B, \frac{\pi}{2}\right)(C)$

$$= r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(A)$$

$$r_2 o r_1(C) = A$$

Nature : de $r_2 o r_1$

1ere méthode :

$r_2 o r_1$ a pour somme d'angles : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, de ce fait $r_2 o r_1$ est une symétrie centrale qui transforme C en A

2eme méthode par la décomposition

$$r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) = r\left(A, 2\times\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$$

$$= S_{(AC)} o S_{(AB)}$$

$$r\left(B, \frac{\pi}{2}\right) = r\left(B, 2\times\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= r\left(B, 2(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})\right)$$

$$= S_{(BA)} o S_{(BD)}$$

par suite

$$r_2 o r_1 = S_{(AC)} o S_{(AB)} o S_{(BA)} o S_{(BD)}$$

$$r_2 o r_1 = S_{(AC)} o S_{(BD)}$$

$$r_2 o r_1 = Rot\left(O, 2(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})\right)$$

$$r_2 o r_1 = Rot(O, -\pi)$$

$$r_2 o r_1 = S_O$$

Conclusion: $r_2 o r_1$ est une symétrie centrale de centre O qui transforme C en A.

c) image de C par $r_3 o r_1$:

$$r_3 o r_1(C) = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right) or \left(O, -\frac{\pi}{2}\right)(C)$$

$$= r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)(B)$$

$$r_3 o r_1(C) = B$$

Somme des angles de $r_3 o r_1$ donne :$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$ alors $r_3 o r_1$ est une translation

NB : lorsque la somme des angles d'une composée de deux rotations donne 0 alors la transformation est une translation

En effet : $r_3 o r_1(C) = B \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(C) = B$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \vec{u}$$

Conclusion : $r_3 o r_1$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

c)par un raisonnement analogue démarche laissée à l'apprenant.

Théorème :

↪**Une isométrie fixant trois points A, B et C non alignés est l'identité**.

↪**Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe(AB).**

↪**Une isométrie de fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.**

Déplacement du plan

Soit f un déplacement.

1.si f fixe un point, ce ne peut être que l'identité du plan ou la rotation

2. si f ne fixe aucun point alors $f = tog$ avec g fixant un point.

$g = t^{-1}of$ est un déplacement fixant un point c'est donc une identité ou une rotation.

$- \, si \, g$ est l'identité $f = toId = t$

$- \, si \, g$ est une rotation r : $f = tor$

Théorème : les déplacements du plan sont les translations et les rotations

Antidéplacement du plan

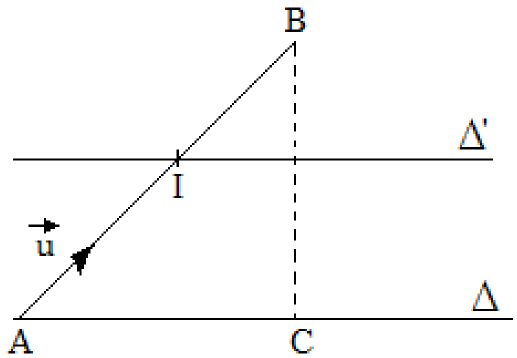
Soit f un antidéplacement du plan

1. si f fixe un point ce ne peut être qu'une réflexion et la composée tos ou t est une translation et s une réflexion

Définition : une symétrie glissée est la composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe Δ, dont $\vec{u}$ est le vecteur directeur. On note $S_{\Delta,\vec{u}}$

Théorème : la composée d'une translation et d'une réflexion est une réflexion ou une symétrie glissée

Démonstration :



Soit $f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}$ soit $A \epsilon \Delta$ et B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Soit C le projeté orthogonale de B sur Δ et

Soit Δ' la parallèle a Δ passant par I de $[AB]$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}} + t_{\overrightarrow{CB}} = t_{\overrightarrow{AC}} o t_{\overrightarrow{CB}} \; or \; t_{\overrightarrow{CB}} = t_{2\overrightarrow{CM}} = S_{\Delta'} o S_{\Delta}$$

Ainsi $\quad t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{\Delta'} o S_{\Delta}$

Par suite :

$$f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}$$

$$= t_{\overrightarrow{AC}} o S_{\Delta'} o S_{\Delta} o S_{\Delta}$$

$f = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{\Delta'}$ Car $S_{\Delta} o S_{\Delta} = Id$

$$f = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{\Delta'}$$

↪Si $\overrightarrow{AC} = \vec{o}$, $f = t_{\vec{o}} o S_{\Delta} = S_{\Delta'}$

↪si $\overrightarrow{AC} \neq \vec{o}$, $f = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{\Delta'}$ avec $\overrightarrow{AC}$ vecteur directeur de Δ'

donc f est une symérie glissée d'axe Δ'et de *vecteur* directeur $\overrightarrow{AC}$ on note $S_{\Delta',\overrightarrow{AC}}$

Théorème : $f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}$

Remarque : si f est une reflexion $fof = Id_p$

Remarque : si f est une symétrie glissée :

alors $fof = t_{2\vec{u}}$ de plus $f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}$ cela implique $S_{\Delta} = t_{-\vec{u}} of$ permet de déterminer Δ

Application 4(extrait BAC GABON)

$ABCD$est un carré direct ;$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_{Δ} et telle que : $f(B) = C$ et $f(D) = A$

1. a)Montrer que le point $O\ mil[BD]$ est invariant par f,et que c'est l'unique point du plan invariant par f

b) En déduire la nature et les caractéristiques de f

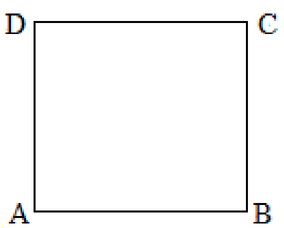
2) soit$g = foS_{\Delta}$ et $\varphi = S_{\Delta} of$

a)Chercher $g(A), et\ g(C)$. Déduire que $g = S_{(AC)}$

b) Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$

c) En déduire la nature de $go\varphi$

CORRECTION



a)On sait que f est une Isométrie,

O milieu de $[BD] \Longrightarrow f(O)\ mil[f(B), f(D)] = [CA]$

f Conserve les milieux : donc $f(O) = O$

Implique que $O\ milieu\ de\ [CA]$.

b)f est une isométrie fixant un point

Nature : f ne peut être ni une symétrie axiale ni une identité du plan car $f(B) = C$ et $f(D) = A$

Conclusion :f *est une rotation de centre* O

■Eléments caractéristiques :

Une rotation est caractérisée par son angle et son centre

Centre : $O\ car\ f(O) = O$

Angle on a:$\begin{cases} f(B) = C \\ f(D) = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CA = BD \\ (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$$* (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = (2\overrightarrow{OD}, 2\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion:f est une rotation de centre O et de d'angle$\frac{\pi}{2}$.

2.a) on a $g = foS_{\Delta}$ et $\varphi = S_{\Delta} of$

$g(A) = foS_{\Delta}(A)$ Et $g(C) = foS_{\Delta}(C)$

$g(A) = f(D)$; $g(C) = f(B)$

$g(A) = A$; $g(C) = C$

g étant une isométrie fixant deux points A et C, donc g est une symétrie axiale.

Déduction : $g = foS_{\Delta}$ or $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f = r\left(O, 2 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f = r\left(O, 2(\vec{u}, \overrightarrow{AC})\right) = r\left(O, 2(\overrightarrow{BD}, \vec{u})\right)$$

$$f = S_{(AC)} S_{\Delta}$$

Par suite on a :

$g = S_{(AC)} o S_{\Delta} o S_{\Delta}$ Avec $S_{\Delta} o S_{\Delta} = Id$

D'où : $g = S_{(AC)}$

b) Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$

1ere Démarche

On a ;$\varphi = S_{\Delta} o f$ **et**

$\varphi(B) = S_{\Delta} o f(B)$; $\varphi(D) = S_{\Delta} o f(D)$

$\varphi(B) = S_{\Delta}(C)$; $\varphi(D) = S_{\Delta}(A)$

$= B;$; $= D$

$d'ou: \varphi = S_{(BD)}$

2eme **Demarche**

$\varphi = S_{\Delta} o f$ **Avec** $f = S_{(AC)} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o S_{(BD)}$

Ainsi $\varphi = S_{\Delta} o S_{\Delta} o S_{(BD)}$

D'où : $\varphi = S_{(BD)}$

c)Nature de $go\varphi$

1ere Démarche :

$go\varphi = foS_{\Delta} o S_{\Delta} o f = fof \ avec \ f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$

La composée de deux rotation est soit une rotation ou une translation.

Ainsi la somme d'angle de fof donne :$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

De plus $go\varphi(O) = fof(O)$

$go\varphi(O) = f(O)$

$go\varphi(O) = O$

Conclusion : $go\varphi$ est une rotation de centre O et d'angle π en d'autre terme $go\varphi$ est une symétrie centrale c'est-à-dire :

$$go\varphi = r_{(O,\pi)} = S_O$$

2eme Démarche :

$$go\varphi = S_{(AC)} o S_{(BD)}$$

$$= r\left(O, 2(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC})\right)$$

$$= r\left(O, 2 \times -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= r(O, -\pi)$$

$$go\varphi = S_O$$

conclusion: $go\varphi$ est une symétrie centrale

« ***Réussir c'est d'aller d'échec en échec sans perdre son enthousiasme*** »

Application 5

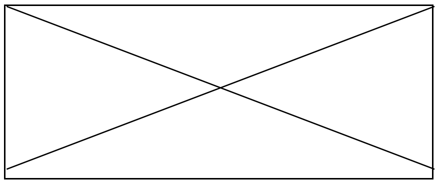


Figure à compléter au fur et à mesure

$ADBK$ Est un rectangle de centre I tel que :

$$(\overrightarrow{BK}; \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi], \qquad S_{(BK)}(A) = C$$

J Milieu de $[BC]$ et $[KE]$ et $S_{(AD)}(B) = B'$

Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et transforme A en B et B en C et K en E

1.a)Prouver que le triangle ABC est équilatéral

b) Prouver que (IJ) est la médiatrice de $[KB]$

2) Prouver que f n'est pas une translation. Déduire la nature de f.

3) Montrer que $f(I) = J$

4) soit l'isométrie $\varphi = foS_{(IJ)} ot_{\overrightarrow{JI}}$

a) Déterminer $\varphi(J)$, $\varphi(C)$ et $\varphi(E)$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristique de f

CORRECTION

1.a) Prouvons que le triangle ABC est équilatéral.

On sait que $S_{(BK)}(A) = C$ cela veux dire que (BK) est la médiatrice du segment $[AC]$ ce qui implique que $AB = BC \quad (1)$

Vu que $S_{(BK)}(A) = C$ nous donne

$$(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA}) \equiv -(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC})[2\pi]$$

Ce qui permet de dire $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}) + (\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA})$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que le triangle ABC est équilatéral

b) $ADBK$ est un rectangle de centre I cela implique que $IB = IK \quad (a)$

On sait que $J\ mil[BC]$ et $K\ mil[AB]$,d'après le théorème des milieux en considérant le triangle ABC on a : $JK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = JB$

D'où : $JK = JB \qquad (b)$

D'après $(a) et\ (b)$ que le quadrilatère soit un losange ou un carré le résultat restera le même, les diagonales $[IJ]\ et\ [BK]\ joue\ le\ meme\ role$ l'une est médiatrice de l'autre si bien que la droite (IJ) soit médiatrice de$[BK]$

2) Raisonnement par l'absurde

Supposons que f soit une translation on a :

$\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$ $cela\ implique$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ Ce qui est absurde donc notre supposition est fausse f n'est pas une translation

f est une isométrie sans point fixes, et elle n'est pas une translation dans ce cas $f$est une symétrie glissée

3) Montrons que $f(I) = J$

On sait que $I\ mil[AB] \Rightarrow f(I)\ mil[f(A)f(B)] = [BC]$

f Conserve les milieux donc $f(I) = J$

4)$\varphi = foS_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{JI}}$

$$\varphi(J) = foS_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{JI}}(J) = foS_{(IJ)}(I) = f(I) = I$$

$$\varphi(C) = foS_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{JI}}(C) = foS_{(IJ)}(K) = f(B) = C$$

$$\varphi(E) = foS_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{JI}}(E) = foS_{(IJ)}(B) = f(K) = E$$

$nous\ constatons\ que\ \varphi$ est une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés $J, C\ et\ K\ donc\ \varphi = Id_p$

$$\varphi = Id_p \Leftrightarrow foS_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{JI}} = Id$$

$$\Leftrightarrow foS_{(IJ)} = Ido\left(t_{\overrightarrow{JI}}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f = Idot_{\overrightarrow{IJ}}oS_{(IJ)}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f = S_{(IJ)}ot_{\overrightarrow{IJ}}$$

Comme $\overrightarrow{IJ}$ est le vecteur directeur de (IJ) alors f est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et d'axe (IJ).

Expressions analytique de la symétrie par rapport à la première bissectrice

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)

$Dessin\ a\ faire\ tiré\ du\ CIAM\ 1^{ère}S, pag65$

Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) d'équation: y = x$ qui transforme M en M'

Déterminons l'expression analytique de S

Démonstration :

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow y = x$ Son vecteur directeur est $\vec{u}\binom{1}{1}$ et son vecteur normal est $\vec{n}\binom{1}{-1}$

$$\begin{cases} il\ existe\ un\ réel\ \alpha \in IR^*\ tel\ que\ \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{n} \\ Imil[MM'] \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \left(\dfrac{x'+x}{2}; \dfrac{y'+y}{2}\right) \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'-x = \alpha \\ y'-y = -\alpha \end{cases} (1) \\ \dfrac{x'+x}{2} = \dfrac{y'+y}{2} (2) \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ x'+x = y'+y \quad (2) \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ 2x + \alpha = 2y - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ 2\alpha = 2y - 2x \Longrightarrow \alpha = y - x \quad (2) \end{cases}$$

En remplaçant $(2)\ dans\ (1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x' = y - x + x \\ y' = -(y-x) + y \end{cases}$$

D'où : $S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ écriture analytique de la symétrie orthogonal

Si (Δ) a pour équation $x = a$ son vecteur normal est $\vec{n}\binom{1}{0}$ et en appliquant un raisonnement analogue on trouve :

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$

Expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

APPLICATION 6(1^{ere} S CIAM page 65 num 1.e)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $x = -3$ et la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-2}{1}$.

Déterminer les transformations analytiques de S et t puis toS

CORRECTION

Expression analytique de S

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = y \end{cases}$$

Expression analytique de t

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Expression analytique de toS

$toS(M) = t(M_1) = M'$ Ainsi: $\begin{cases} S(M) = M_1 \\ t(M_1) = M' \end{cases}$

$$S(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x - 6 \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$t(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 - 2 \\ y' = y_1 + 1 \end{cases}$$

Si bien que : $toS(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 6 - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Alors :$toS(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 8 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Ecriture complexe d'une translation

Soit M un point d'affixe z et $\vec{u}$ un vecteur quelconque du plan.on appelle M' $l'image$ du point M par la translation t de vecteur $\vec{u}$.

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

Théorème : l'écriture complexe d'une translation

L'écriture complexe d'une translation t et de vecteur $\vec{u}$ est : $t(z) = z' = z + z_{\vec{u}}$

Ecriture analytique de la translation :

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $\vec{u}$ d'affixe $a + ib$

Par identification :$t(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Application 7(Tle SE page240 num 4)

$A(2 - i)$, $B(1 - 3i)$ Sont deux points du plan. Quelle est la translation t qui transforme A en B. Et Quelle est l'écriture complexe de t , $puis$ son l'écriture analytique ?

CORRECTION

$$t_{\vec{u}}(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_A - z_B = z_{\vec{u}}$$

$$z_{\vec{u}} = 2 - i - 1 - 3i$$

D'où : $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe $1 - 4i$

Ecriture complexe de la translation

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + 1 - 4i$$

Ecriture analytique :

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

Ecriture complexe de la rotation

Soit M et Ω deux point ,distincts du plan d'affixes respectives z et ω .on appelle M' l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

- Dans un premier temps d'après la figure $on\ a :$ $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$
- Dans un second nous avons la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$ mesure θ $radian$. On sait que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = argz$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'})$$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})$$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = arg(z_{\overrightarrow{\Omega M'}}) - arg(z_{\overrightarrow{\Omega M}})$$

$$(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)[2\pi]$$

Autrement dit nous pouvons établir l'équivalence :

$$r_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 \times e^{i\theta} \quad \text{or } \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$

D'où :$r_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

Théorème: l'écriture complexe d'une rotation

L'écriture complexe de la rotation r et de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est :

$$z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$$

$$z' = e^{i\theta}z - e^{i\theta}\omega + \omega$$

Posons : $a = e^{i\theta}$ et $b = \omega - e^{i\theta}\omega$

D'où :$r(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b \quad avec\ a \neq 1$ et $le\ module\ de\ a = 1$ et b est un nombre complexe quelconque

Remarque: si le module de $a = 1$ et si $a = 1$ alors la transformation est une translation

Le centre de la rotation : résolvons l'équation $r(\omega) = \omega \Leftrightarrow \omega = a\omega + b$

D'où : $\omega = \frac{b}{1-a}$ et l'angle $arg(a) = arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$

Application 8(extrait BAC GABON2006)

Soient les points $A(5;0)$ $B(4;1)A'(-3;2)B'(-4;1)$ et $w(0;-3)$

1) Démontrer qu'il existe un unique déplacement f tel que , $f(A) = A'$ $\quad f(B) = B'$

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

2)R est la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est de $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

3) Montrer que $f = ToR$ puis donner l'écriture analytique de f

CORRECTION

On a :$\overrightarrow{AB}\binom{-1}{1}$; $\overrightarrow{A'B'}\binom{-1}{1}$

$AB = A'B' = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ Avec $A \neq A'$ donc il existe un unique déplacement f qui transforme $A\ en\ A'\ et\ B\ en\ B'$

$f\ est$ Un déplacement dans ce cas f est soit une rotation ou une translation d'écriture complexe

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \quad z' = az + b$$

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+2i = a(5)+b \\ -4+i = a(4+i)+b \end{cases}$$

Eliminons b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+2i = a(5)+b \\ 4-i = -a(4+i)-b \end{cases}$$

....

En additionnant membre on obtient :

$$1+i = a(1-i)$$

Par suite $\quad i\left(\frac{1}{i}+1\right) = a(1-i)$

$$i(1-i) = a(1-i)$$

Ainsi: $a = i$

Ensuite $\quad b = -3+2i-5i = -3-3i$

D'où : $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 3 - 3i$

Ici $a = i \neq 1$donc f est une rotation

D'angle : $arg(a) = arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de centre $w = \frac{-3+3i}{1-i} = -3$ d'où : $w(-3; 0)$

Conclusion : f est une rotation de centre $w(-3; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

3) Montrer que $f = ToR$

Donnons d'abord les écritures complexe de R et T

- $R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$

$$\Leftrightarrow z' = i(z - z_A) + z_A$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 5i + 5$$

- $T_{\overrightarrow{AA'}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$

$$\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\overrightarrow{AA'}}$$

$$\Leftrightarrow z' = z - 8 + 2i$$

$ToR(M) = M' \Leftrightarrow T(M_1) = M'$ de ce fait

On a : $\begin{cases} R(M) = M_1 \\ T(M_1) = M' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = iz + 5 - 5i \\ z' = z_1 - 8 + 2i \end{cases}$

D'où : $ToR(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz + 5 - 5i - 8 + 2i$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 3 - 3i$$

Donc : $f = ToR$

Ecriture analytique

Posons : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$$x' + iy' = i(x + iy) - 3 - 3i$$

Par suite

$$x' + iy' = -y - 3 + ix - 3$$

Par identification

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y - 3 \\ y' = x - 3 \end{cases}$$

« *La chance est la faculté à saisir des bonnes occasions.* »

Application 9

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ Est un repère orthonormé direct du plan. On donne les points $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$ à tout point M du plan de coordonnée $(x; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$ d'affixe M et T est l'application qui a tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que :

$$z_1 = iz - (i + 1)$$

a)Préciser la nature de l'application T

b) Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M decrit le cercle de diametre $[AB]$?

2)λ est un réel donné non nul,T_λ est l'application qui a tout point M d'affixe z,associe le point M' barycentre de $(M; \lambda), (M_1; -\lambda), (A; 1)$

2a) Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que :

$$z' = \lambda(1 - i) + \lambda(1 + i) + 1$$

b) Pour qu'elle valeur de λ,T_λ est t-elle une rotation ? Une translation ?

CORRECTION

a) $z_1 = iz - (i + 1)$

Nature :T est une rotation en effet: $\begin{cases} |a| = 1 \text{ } avec \text{ } a \neq 1 \text{ } et \text{ } a \in C^* \\ arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

b) l'image d'un cercle par une rotation est un cercle.

Soit A' et B' les images respectives des points A et B par la transformation T.

$$T(A) = A' \Leftrightarrow z'_A = iz_A - (i + 1)$$

$$z'_A = i(1) - i - 1$$

$$z'_A = -1 = z_B \Rightarrow A'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $T(A) = B$

$$T(B) = B' \Leftrightarrow z'_B = iz_B - (i+1)$$

$$\Leftrightarrow z'_B = i(-1) - i - 1$$

$$z'_B = -1 - 2i \Rightarrow B'\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Conclusion : lorsque M decrit le cercle (C) de diamètre $[AB]$,M_1 va décrire le cercle (C_1) de diamètre $[BB']$.

2a) $M' = bar\{(M;\lambda),(M_1;-\lambda),(A;1)\}$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\lambda z - \lambda z_1 + z_A}{\lambda - \lambda + 1}$$

Par suite : $z' = \lambda z - \lambda\big(iz - (i+1)\big) + 1$

D'où : $z' = \lambda(1-i) + \lambda(1+i) + 1$

b)T_λ est une rotation $\Leftrightarrow |\lambda(1+i)| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\sqrt{2} = 1 \\ \lambda\sqrt{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

T_λ Est une rotation ssi $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

T_λ ne peut être une translation car $\lambda \in IR$ et $1 - i \in C$ donc impossible d'avoir $a = 1$

Ecriture complexe de l'application identique

L'écriture complexe de l'application identique du plan est : $Id(z) = z' = z$

Ecriture analytique de l'application identique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Ecriture complexe de la symétriecentrale s de centre Ω et d'affixe ω est :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'}$$

$$\Leftrightarrow z' = -z + 2\omega$$

NB : une symétrie centrale est aussi une homothétie de rapport -1 ou une rotation d'angle $\pm\pi$

Ecriture complexe des antidéplacements

Ecriture complexe d'une réflexion d'axe(Ox)

Théorème : $\Delta_0 = (O;\vec{e}_1)$ étant l'axe des abscisses, la réflexion d'axe Δ_0 a pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$

Théorème :Δ est la droite d'équation $y = b$, la réflexion d'axe Δ a pour écriture complexe :

$$z' = \overline{z} + 2b$$

Synthèse :

Théorème : l'écriture complexe des antidéplacements est :

$$z' = a\overline{z} + b \ avec \ |a| = 1$$

Application $10(Extrait\ BAC\ GABON\ 2007)$

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.soit f l'application définie sur le plan (P) dans lui –même qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

1a-Montrer que f est une isométrie

b) Déterminer l'écriture complexe de f

c)f est il un déplacement ou antidéplacement ?

d) Quel est l'ensemble des points invariant par f

e)En déduire la nature exacte de f.

2-Determiner l'écriture analytique de fof.quelle est alors la nature exacte de fof

3-On admet que $f = sot = tos$ ou s est une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{w}$

a)Démontrer que : $fof = tot$

b) Déterminer les coordonnés de K le milieu de $[OO']$ avec $f(O) = O$

c)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

d) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s par rapport a (Δ)

CORRECTION

1a)$f(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = y_A + 4 \\ y'_A = x_A - 2 \end{cases}$

$f(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_B = y_B + 4 \\ y'_B = x_B - 2 \end{cases}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_A - y'_B)^2}$

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{(y_B + 4 - y_A - 4)^2 + (x_A - 2 - x_B + 2)^2}$

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_A - x_B)^2}$

D'où :$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$

$donc\ f$ Est une isométrie du plan

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$$

b) Ecriture complexe de$f$.

$$\begin{cases} x' = y + 4 \\ iy' = i(x - 2) \end{cases}$$

………………………………………………………………………

En additionnant membre à membre on obtient

$$z' = ix + y + 4 - 2i$$

$$z' = i(x - iy) + 4 - 2i$$

$$z' = i\bar{z} + 4 - 2i$$

b) f Est écrit sous la forme :$z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1 \Longrightarrow |i| = 1$

Donc f est un antidéplacement vu son écriture complexe.

d) point invariant : résolvons l'équation

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 4 = 0\ (a) \\ x - y - 2 = 0 (b) \end{cases}$$

$(a) \neq (b)$,Donc il n'existe pas de point invariant par f.

e)$\begin{cases} f\ est\ un\ antidéplacement \\ f\ n'admet\ pas\ de\ point\ invariant \end{cases}$

Conclusion : f est une symétrie glissée

2-composition de fof.

$$f(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y + 4 \\ y_1 = x - 2 \end{cases}$$

$$f(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y_1 + 4 \\ y' = x_1 - 2 \end{cases}$$

Ensuite $fof(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

fof Est une translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{2}$

3a) Démontrer que $fof = tot$

$$fof = S_\Delta ot_{\vec{w}} oS_\Delta ot_{\vec{w}} = t_{\vec{w}} ot_{\vec{w}} = t_{2\vec{w}}$$

$\vec{w}$ Vecteur directeur de (Δ) d'apes 2 et 3a on a ;

$$\begin{cases} fof = t_{2\vec{w}} \\ fof = t_{\vec{u}} \end{cases} \Leftrightarrow t_{\vec{u}} = t_{2\vec{w}}$$

Ainsi $\vec{w}\binom{1}{1}$

3b- $k\ milieu\ de\ [OO']$

$$f(O) = O' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow O'\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où : $k\binom{2}{-1}$

c)$\vec{w}$ est le vecteur directeur de (Δ).de ce fait on a :

$$M\epsilon(\Delta) \Leftrightarrow x - y + C = 0$$

$$k \in (\Delta) \Leftrightarrow 2+1+C=0$$

Par suite $C = 3$

D'où : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow x-y+3=0$

Conclusion : f est une symétrie glissée de vecteur

Directeur $\vec{w}\binom{1}{1}$ d'axe (Δ) d'équation cartésienne : $x-y+3=0$

Autre démarche pour trouver la droite (Δ) démontrerons que l'ensemble des points I milieux de $[MM']$ est une droite (Δ) on a $I\left(\frac{x'+x}{2};\frac{y'+y}{2}\right)$

Par suite $I\left(\frac{y+x+4}{2};\frac{x+y-2}{2}\right)$

$$I\left(\frac{x+y}{2}+2;\frac{x+y}{2}-1\right)$$

$$I\left(\frac{x+y}{2}+2;\frac{x+y}{2}+2-3\right)$$

Posons $X = \frac{x+y}{2}+2$

Ensuite $I(X;X-3)$

Ainsi : $Y = X-3$

D'où : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow x-y+3=0$

d) Ecriture analytique de S

$$\begin{cases} il\ existe\ \ un\ réel\ \alpha \in IR^*\ tel\ que\ \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{n} \\ I\ mil[MM'] \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=-\alpha \end{cases} \quad car\ \vec{n}\binom{1}{-1} \\ \left(\frac{x'+x}{2};\frac{y'+y}{2}\right) \in (\Delta) \end{cases}$$

Ensuite

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y-\alpha \end{cases} \\ \frac{x'+x}{2} - \left(\frac{y'+y}{2}\right) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y-\alpha \end{cases} \\ 2x+\alpha-2y+\alpha+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y-\alpha \end{cases} \\ \alpha = y-x-3 \end{cases}$$

Ainsi

$$S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+y-x-3 \\ y' = y-y+x+3 \end{cases}$$

D'où :

$$S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y-3 \\ y' = x+3 \end{cases}$$

Application 11

Dans le plan P,on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .soit D le point du plan tel que le triangle CDA soit rectangle isocèle et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

1) soit R_A la rotation de centre A et transformant B et C et R_c la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ on pose $f = R_C o R_A$

a)Déterminer $f(A)\ et\ f(B)$

b) Démontrer que f est une rotation dont on présiceras l'angle et le centre O. Placer O

c)Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$

2) on note $g = foS_{(BC)}$

a)Quelle est la nature l'application g.

b) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$

3) On note H le milieu de$[BC]$,
$g(C) = C'\ et\ \ g(H) = H'$

a)Montrer que H' est le milieu de $[OD]$

b) Donner la forme réduite de g

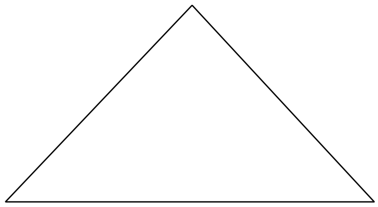


Figure à compléter au fur à mesure

CORRECTION

On a : $\begin{cases} CA = CD \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $R_{(C,-\frac{\pi}{2})}(A) = D$

$$f(A) = R_c o R_A(A) = R_C(A) = D$$

$$f(B) = R_C o R_A(B) = R_c(C) = C$$

Angle de R_A :

On a : $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ d'où : $R_{(A,\frac{\pi}{4})}(A) = A$

b)f etant la composée de deux rotations dont la sommes d'angle donne : $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

Donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Le centre :

On a : $\begin{cases} f(A) = D \\ f(B) = C \end{cases}$ donc O appartient aux médiatrices des segments $[AD]$ et $[BC]$.

c)d'une part les angles $(\widehat{BOC})$ et $(\widehat{OCA})$ sont complémentaires donc $(OB) \parallel (AC)$

D'autre part les angles $(\widehat{CAB})$ et $(\widehat{ABO})$ sont complémentaires donc :$(AB) \parallel (OC)$

Donc $ABOC$ est un parallélogramme et $AB = AC$

2) on note $g = foS_{(BC)}$

a)g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc g est un antidéplacement

b)⋆ $g(A) = foS_{(BC)}(A) = f(O) = O$

⋆ $g(B) = foS_{(BC)}(B) = f(B) = D$

3) on note H le milieu de $[BC]$

a)H milieu de$[BC]$, et H milieu aussi de $[AO]$ par suite $g(H)$ est milieu de $[g(A), g(O)]$.

Ainsi H' $milieu$ de $[OD]$.

b) On a : $g(A) = O$ et $g(B) = C$

Comme la médiatrice de $[AO]$ n'est pas médiatrice de $[BC]$ alors g n'est pas une symétrie orthogonale, c'est donc une symétrie glissée

On a : $g = S_\Delta o t_{\vec{u}}$

On a : $g(B) = C$ donc le milieu$H$ de $[BC] \in \Delta$

$g(O) = D$ Donc le milieu H' de $[OD] \in \Delta$

Par suite $\Delta = (HH')$

$$g(H) = t_{\vec{u}} o S_\Delta(H) = t_{\vec{u}}(H) = H'$$

Donc g est une symétrie glissée d'axe (HH') et de vecteur directeur $\overrightarrow{HH'}$

Dans le silence on n'entend plus que l'essentiel

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

EXERCICE 1

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Notons I le milieu de $[BC]$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et

$$f = r_c o t o r_B$$

1) Déterminer la nature de f

2) Quelle est l'image de B par f

3) Caractériser f

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, on considère un losange $ABCD$ tel que :$AB = BC = CD = DA = 5$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. on désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments

$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[BD]$.on note (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ') la médiatrice de$[CD]$.

1) soit f l'isométrie du plan définie par : $f(A) = B$; $f(B) = D$ et $f(D) = C$.

a)Prouver que f est un antidéplacement.

b) Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C et D

2) soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a)Démontrer que $f = r o \sigma$

b) A-t-on $f = \sigma o r$?

3) soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC)

a)Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale S_2 telle que $r = s_1 o s_2$

b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme$f = s_1 o t_1$, ou $t_1$est une translation que l'on précisera.

4) soit t_2 la tanslation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} o f$.

a) Déterminer $g(D), g(I), g(O)$.En déduire la nature précise de la transformation g.

b) Démontrer que $f = t_2 o g$ a $t'on$ $f = g o t_2$?

EXERCICE 3(extrait Devoir TleC ,LPEE)

Soit (C) un cercle de centre de O et de diamètre$[BC]$,A le point de (C) tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,A' le point diamétralement opposé a A sur (C) et $S_{(BC)}(A) = I$

1.a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = O$

b) Montrer que f est une rotation de centre I

c)Montrer que $f(O) = A$

2) soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = C$.

a)Montrer que $g = S_o o S_{(AB)}$

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) soit E le point tel que $OICE$ est un parallélogramme et $D = f(C)$

On pose $t = f o r_{\left(D, -\frac{\pi}{3}\right)}$

a)Déterminer $t(C)$ et caractériser t.

b) Déterminer $t(E)$.en déduire la nature du triangle EBD

EXERCICE 4

Dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{V})$on considère l'application f qui au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ on note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'

1a) Exprimer z' en fonction de z

b) Démontrer que $f = ros$ ou s est une reflexion d'axe $(O,\vec{u})$et r une rotation affine à préciser.

2) En décomposant r en deux réflexions, démontrer que f est une réflexion et préciser son axe.

3) soit g l'application du plan qui a tout point $M(x,y)$ associe $M''(x'',y'')$ avec $\begin{cases} x'' = y + 1 \\ y'' = x + 1 \end{cases}$

On note z l'affixe de M et z'' l'affixe de M''

a)Exprimez z'' en fonction de z

b) Déterminer la nature de l'isométrie t telle que $g = tof$

c)K étant le milieu du segment$[MM'']$,démontrer que K appartient à une droite fixe lorsque M décrit le plan.

EXERCICE 5

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit I,J,K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ soit

$f = RoT$ et $g = ToR$.

1) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

2) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et$g$.

3) Déterminer la nature degof^{-1}.

4) Donner l'image de A par gof^{-1}

5) soit M un point quelconque du plan,M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.

Quelle est la nature du quadrilatère ACM_1M_2

EXERCICE 6

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de $[AC]$ et k le milieu de $[AB]$.

$a)$Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = C$

b) Montrer que φ est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.

c)soit D le symétrique de B par rapport a I. Montrer que $\varphi(C) = A$

EXERCICE 7

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$1a)$Placer les pointsI,J,H,A,B,C,D d'affixes respectives :

$z_1 = 1$ $,z_H = 1 + i$ $,z_A = 2$ $,z_B = \frac{3}{2} + i$

$,z_C = 2i$ et $z_D = -1$.

2) soit E le symétrique de B par rapport à H.la perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite(OC) passant par D se coupent en F.placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$

3) Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques

B) On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe $z' = i\overline{z} + 2i$

1) Déterminer les images des points O, A et B par f

2a) Montrer que f est une isométrie

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) f est -elle une symétrie axiale ? sinon précisez la nature de f.

3) soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4) on pose $S = fot^{-1}$

a)Montrer que l'écriture complexe de S est

$$z' = i\bar{z} + 1 + i$$

b) Montrer que I et J sont invariant par S.En déduire la nature de S.

c)En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser puis caractériser alors f

EXERCICE 8

Le plan est rapporté à un repère$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on considère l'application f qui a tout point M associe le point le point M' tel que :

$$f:\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

1a) Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de z ou $\bar{z}$

b) l'application f est t'elle un déplacement ou un antidéplacement ? Justifiez votre réponse

c)Quel est l'ensemble, des points invariant par f, puis conclure.

d) Quelle est la nature de la transformation fof

e)Déterminer la droite D telle que $f = sot = tos$ ou t ,est la translation de vecteur $\vec{V}$ et s la symétrie orthogonale d'axe D.

f) vérifier que $\vec{V}$ est un vecteur directeur de D

EXERCICE 9(extrait devoir Tle C LPEE)

Partie A : *soit* $ABCD$ un carré direct de centre O et f une isométrie qui laisse invariant le carré $ABCD$.

1) Démontrer que $f(O) = O$.En déduire les natures possibles de f

2) Sachant que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = D$ préciser la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Déterminer toutes les isométries laissant invariant le carré $ABCD$ (prendre (Δ) *et* (Δ') pour médiatrices respectives de $[BC]$ et $[AB]$)

4) Etablir le tableau de composition de toutes ces isométries.

Partie B : Dans le repère directe$(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm, on donne les points $A(1\,;0)$,$B(-1\,;0)$, $C(0;-1)$ *et* $D(0;1))$ à tout point M on associe le nombre complexe z

1a) Démontrer qu'il existe une unique rotation T de centre C qui transforme A en B.

b) Déterminer l'écriture complexe de T et préciser son angle.

2) on pose $T(M) = M_1$; $T(M_1) = M_2$; $T(M_2) = M_3$

a)que peut-on dire des droites (MM_1) et (M_1M_2) pour M distinct de C ? Justifier votre réponse

b) quel est l'ensemble (C_1) des points M_1 du plan lorsque M decrit le cercle (C) de diamètre $[AB]$

3) Soit N un point d'affixe $z_N = iz - (1 + i)$.on note T_λ l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' barycentre des points pondérés$(M; \lambda)$,$(N; -\lambda)$, $(A, 1)$ et λ un nombre réel non nul.

a)Démontre que l'écriture complexe de T_λ est :

$$z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1$$

a)Démontrer que l'écriture complexe de T est

b) à quelle condition T_λ peux –elle est une isométrie

EXERCICE 10

Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.soit λ un réel strictement positif, on considère les points $A(\lambda;0)$,$B(\lambda,\lambda)$ et C(O,λ).on désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.on pose

F= $R'oSoR$.

1) quelle est la nature de F

2) Montrer que l'écriture complexe de F est

$z' = -z + 3\lambda - i\lambda$ En déduire son centre Ω

3) soit S' la symétrie orthogonale d'axe (AC) montre que $S'oF$ est un antidéplacement.

4) Déterminer l'écriture complexe de S' et en déduire que l'écriture complexe de $S'oF$ est :

$$z' = i\bar{z} + 2\lambda - 2i\lambda$$

5) Déterminer l'ensemble des points invariants par $S'oF$ puis caractérisez la transformation $S'oF$

6) Montrer que la droite (D) d'équation

$y = -x + 1$ Est globalement invariant par $S'oF$

EXERCICE 11

Dans le plan orienté, on considére un losange $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit f l'isométrie du plan définie par : $f(A) = B$,$f(B) = D$ et $f(D) = C$

1) Prouver que $f$est un antidéplacement.

2) Déterminer $fof(A)$ et $fof(B)$.

EXERCICE 12

Dans le plan orienté, on considere un rectangle $ABCD$ tel que: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I et J les milieux respectives des segments $[AB]$ et $[DC]$ et K le symétrique de I par rapport a (DC).

1) On pose $f = S_{(CI)}oS_{\overrightarrow{AB}}oS_{(IJ)}$

a)caractériser l'application : $S_{(CI)}oS_{(IJ)}$

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2) soit M un point de la demi-droite$[BA)$.la perpendiculaire a (CM) en C coupe (IJ) en N.

Montrer que$f(M) = N$. En déduire la nature du triangle CMN

3) on pose $g = t_{\overrightarrow{IK}}oS_{(IC)}$

a)Caractériser l'application :$goS_{(AJ)}$

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit h une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme(AB) en (IJ).

a)Montrer que h fixe le point I

b) Déterminer alors tous les isométries de h.

EXERCICE 12

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit les isométries suivantes

$f = S_{(CB)}oS_{(AD)}oS_{(AB)}$ et $g = S_{(CB)}oS_{(AD)}$.

1a) Déterminer la nature et les éléments caractérisques de g.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) soit R la rotation de centre C et d'angle$\frac{\pi}{3}$.

a)Construire le point, $E = R(A)$.

b) Quelle est la nature du triangle CAE?

c)Montrer que les points B, D et E $sont$ $alignés$.

3) soit I le milieu de $[EA]$.

a)Vérifier que $R = S_{(CI)} o S_{(OA)}$

b) Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de $h = S_{(CI)} o R o S_{(CI)}$

SUITES NUMÉRIQUES

Mathématicien Allemand. Karl Weierstrass est considéré comme le père de l'analyse moderne. Après des études secondaires brillantes, son père le force à étudier le droit à l'université de Bonn. Il ne fréquente guère les amphithéâtres et préfère s'adonner à l'escrime, aux mathématiques et à la boisson ... Tant et si bien qu'au bout de quatre ans il n'a toujours aucun diplôme. Son père consent à lui financer deux années supplémentaires afin qu'il décroche un poste d'enseignant dans le secondaire. Il rencontre alors Guddermann qui va le former aux mathématiques. Ce n'est qu'à 40 ans et alors qu'il enseigne dans le secondaire depuis une quinzaine d'année qu'il publie un article dans le fameux journal de Crelle sur les travaux qu'il a mené de façon isolée depuis plusieurs années. Il accède aussitôt à la célébrité et obtient rapidement un titre de docteur et une chaire à l'université de Berlin. Il s'est intéressé, entre autres aux fonctions analytiques et aux fonctions elliptiques. On lui doit le formalisme actuel en analyse.

« *Pour atteindre l'aube il faut obligatoirement passer par le chemin de la nuit* »

Suites numériques

Définition : une suite numérique est une application (fonction) de IN ou d'une partie de IN dans IR on la note U ou (U_n) ou encore $(U_n)_{n\epsilon IN}$

1-Notation $\sum$ et $\prod$

Définition : soit (u_n) la suite dans un ensemble muni d'une loi additive on définit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} S_0 = u_0 \\ \forall n\epsilon IN\ S_{n+1} = s_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Exemples : $\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Application : Simplifier $\forall n\epsilon IN^*$les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = (1 + 2 + 3 + \cdots + n + 1) - (0 + 1 + 3 \ldots + n)$$

En simplifiant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n+1} l = n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n + 1$$

$$= (n + 1)(n + 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = (n + 1)^2$$

Application 2

Montrer que pour tout n non nul :

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Et b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Posons :(k+1)²-k² = k²+2k+1-k²

$(k+1)^2-k^2 = 2k+1$

En appliquant la somme à cette égalité on a :

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2-k^2)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

Par suite :

$2^2-1^2+\cdots(n+1)^2-n^2=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

Soit encore :

$-1+(n+1)^2=2\sum_{k=1}^{n}k+n$

$$ensuite\ 2\sum_{k=1}^{n}k=(n^2+2n+1-n-1)$$

$$puis\ \ 2\sum_{k=1}^{n}k=n^2+n$$

$$finalement: \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Concernant : b) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On a : $(k+1)^3-k^3=k^3+3k^2+3k+1-k^3$

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

$$2^3-1^3+\cdots(n+1)^3-n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$-1+(n+1)^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=n^3+3n^2+3n-\frac{3n^2+3n}{2}-n$$

$$finalement: \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

« ***Tout ce qui n'est pas donne est perdu*** »

2- Notation Π

Définition : Soit (u_n) une suite à la valeur dans un ensemble muni d'une loi multiplicative on définit

$s_n=\prod_{k=0}^{n}u_n$ Par la relation de récurrence suivante $\begin{cases} P_0=U_0 \\ \forall n\epsilon IN\ P_{n+1}=P_n\times U_{n+1}\end{cases}$

Exemples :

$$\prod_{k=1}^{n}a=a\times a\times a\times \ldots.\times a=a^n$$

$$\prod_{k=1}^{n}2k=2\times1\times2\times2\times2\times3\ldots.\times2\times n$$

$$=2^n n!$$

Ecriture développée de n!

$$\forall n\epsilon IN, n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$$

$$A\ retenir\ 0!=1 \quad et \quad (n+1)!=n!\,(n+1)$$

3- Suites numériques

3.1-Le principe du raisonnement par récurrence

Historique : ce type de raisonnement a été inventé par le génialissime **Blaise Pascal** et amélioré par **Henri Poincaré** qui a donné à cette méthode très puissante de raisonnement un contexte indiscutable.

Méthode

On donne un nom par exemple $p((n)$ à la proposition (c'est-à-dire la formule) qu'on veut démontrer, ensuite pour montrer que la proposition est vraie pour tout entier $n\geq k$.On procède en trois étapes :

***Etape1 :** Initialisation, on montre que la proposition $p(k)$ est vraie (c'est-à-dire que $p(k)$ vraie pour $n=k$.

Etape2 : Hérédité, on suppose que la proposition $p(n)$ est vraie pour tout entier naturel fixé $n \geq k$ et on montre alors que la proposition $p(n+1)$ est aussi vraie.

*****Etape3 :** la conclusion on rédige alors, comme $p(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité $alors\ \ p(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Application1

Démontrer que $\forall n \epsilon\ \mathbb{N}^*\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

CORRECTION

Soit $p(n)$ la proposition" $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ "

- Initialisation : vérifions que $p(1)$ est vraie

On a d'une part : $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$

D'autre part $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

Donc $p(1)$ est vraie au rang initial.

- Hérédité : Soit $n\epsilon IN^*$ fixé, supposons que

$p(k)$ est vraie c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire :

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ **(But)**

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ En ajoutant $(n+1)^3$ à chaque membre d'égalité on obtient :

$$1^3 + 2^3 + \cdots n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

Or: $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

D'ou : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Finalement :$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

De ce fait, $p(n+1)$ est vraie, la proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : par initialisation et hérédité $\forall\ n\epsilon\ \mathbb{N}^*\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Application2 (inégalité de Bernoulli)

Démontrer que $\forall\ n\epsilon\ \mathbb{N}\ et\ \forall\ a > 0\ (1+a)^n \geq 1 + na$

CORRECTION

Soit $p(n)\ la\ proposition$ "$(1+a)^n \geq 1 + na$"

- Initialisation : vérifions que $p(0)$ est vraie

On a : $(1+a)^0 = 1\ \ et\ 1 + 0 \times a = 1$

Puis :$(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$

Donc $p(0) est\ vraie\ au\ rang\ initial$

- Hérédité : Soit $n\ \epsilon\mathbb{N}$ fixé, supposons que

$p(n)$ Soit vraie c'est-à-dire :

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire :$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ **(But)**

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$(1+a)^n \geq 1 + na\ \ ,\forall\ a > 0$ Implique que $1 + a > 0$. Ainsi en multipliant l'inégalité précédente par $(1+a)$ on obtient :

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2$$

Or :$1 + a + na + na^2 \geq 1 + a + na$

Car :$\forall a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0\ implique\ encore\ \ na^2 > 0$

Ainsi $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

De ce fait $p(n+1)$ est vraie, la proposition est héréditaire.

- Conclusion : par initialisation et hérédité pour tout n entier naturel et $a > 0$
$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Application3 : Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Démontrer que $\forall\, n \epsilon\, \mathbb{N}\;\; 3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8$

CORRECTION

Soit $p(n)$ la proposition "$3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8$"

- Initialisation : vérifions que $p(0)$ est vraie

On a :$3 \leq U_1 \leq U_0 \leq 8 \Leftrightarrow 3 \leq 5 \leq 8 \leq 8$

Donc $p(0)$ est vraie au rang initial.

- Hérédité : soit $n \epsilon IN\ fixe$ supposons que $p(n)$est vraie c'est-à-dire
$$3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8.$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire :$3 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 8$ (**But**).

NB : Nous proposerons deux démarches pour montrer que $p(n+1)$ est vraie.

1ère démarche : la fonction associée $f: x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ Par composée des fonctions croissantes.

D'après l'hypothèse de l'hérédité et en appliquant à f on a :

$3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8 \Leftrightarrow f(3) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(8)$

Par suite : $3 \leq \sqrt{10} \leq U_{n+2} \leq U_n \leq 5$

De ce fait, $p(n+1)$ est vraie la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et héréditaire $\forall\, n\, \epsilon\, IN\;\; 3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8$

2ème démarche : d'après l'hypothèse de récurrence on a : $3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8$

En multipliant par 3 toutes les inégalités on obtient : $9 \leq 3U_{n+1} \leq 3U_n \leq 24$

Ensuite : $10 \leq 3U_{n+1}+1 \leq 3U_n+1 \leq 25$

$$\sqrt{10} \leq \sqrt{3U_{n+1}+1} \leq \sqrt{3U_n+1} \leq 5$$

De ce fait : $p(n+1)$ est vraie, la proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : par initialisation et hérédité
$$\forall\, n\, \epsilon IN\;\; 3 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 8$$

Application 4

$\forall n \epsilon IN$ Démontrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

CORRECTION

Soit $p(n)$ la proposition "$3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7"

- Initialisation, vérifions que $p(0)$ est vraie

On a :$3^{2\times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 7.

Donc : $p(0)$ est vraie au rang initial.

- Hérédité, $\forall\, n \epsilon\, IN$ fixé, supposons que $p(n)$ soit vraie c'est-à-dire :
$$3^{2n} - 2^n = 7k \Longrightarrow 3^{2n} = 7k + 2^n$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire :$3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ *est divisinle par 7*

En introduisant l'hérédité on a :

$$3^{2n+2} - 2^n = 3^2(7k+2^n) - 2^n \times 2^2$$
$$= 9 \times 7k + 9 \times 2^n - 2^n \times 2^2$$
$$= 9 \times 7k + 2^n(9-2)$$

$= 9 \times 7k + 7 \times 2^n$

$= 7(9k + 2^n)$

Posons : $k' = 9k + 2^n$ avec$k' \epsilon \mathbb{Z}$.

Donc : $3^{2n+2} - 2^n = 7k'$

De ce fait,$p(n+1)$ est vraie, la proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : par initialisation et hérédité $\forall\ n\ \epsilon\ IN, 3^{2n} - 2^n\ est\ divisible\ par\ 7.$

3.2-Quand peut-on utiliser un raisonnement par récurrence ?

- Pour déterminer le terme général d'une Suite numérique ou établir une formule explicite de la somme.
- Pour démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée ou encore monotone (c'est à dire, croissante, décroissante ou constante)
- Pour prouver une inégalité non triviale (Inégalité de Bernoulli par exemple)
- Enfin le raisonnement par récurrence sous entends quelques démonstrations de questions ROC

4-Mode de définition d'une suite

Une suite est numérique est définie de différentes façons.

- **Suites définie par formule explicite du type** : $U_n = f(n)$

Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général U_n en fonction de n

Exemple :$U_n = 3n + 2$

Calculer $U_0\ et\ U_1$

- **Suites définie par formule de récurrence du type :** $U_{n+1} = f(U_n)$

Ce sont les suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence

Exemple : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Calculer $U_1,\ U_2\ et\ U_3$

Représenter graphiquement les 3 premiers termes de cette suite

- **Suites définies par somme**

Ce sont les suites définies par la somme de termes, d'une suite définie par formule explicite

Exemple : $U_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

5-Sens de variation d'une suite

Définition :

- On dit que la suite U est croissante sur IN, si pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad ou\ U_{n+1} \geq U_n$$

- On dit qu'une suite U est décroissante sur IN, si pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad ou\ U_{n+1} \leq U_n$$

- On dit que la suite U est constante sur IN, si pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} = U_n$$

- On dit que la suite U est stationnaire à partir du rang n_0 , si pour tout entier naturel n des que

$n \geq n_0$ Alors : $U_n = U_{n_0}$

- On dit que la suite U est à termes positif, si pour tout entier naturel n, on a:

$$U_n > 0 \ \ \forall n \epsilon IN$$

Remarquez si $U_n > 0$ pour tout entier naturel

- (U_n)est croissante équivaut à $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq$**1**
- (U_n) est décroissante équivaut a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

- ***En pratique pour étudier le sens de variation d'une suite U on étudier le signe de : $U_{n+1} - U_n$***

Théorème soit U la suite définie par $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0; +\infty[$ si f est strictement croissante alors U est strictement croissante, si f est strictement décroissante alors U est strictement décroissante

« ***Partagez vos connaissance c'est une manière d'atteindre l'immortalité*** »

Application 5

Etudions le sens de variation de la suite U définie par : $U_n = \frac{3n+2}{2n-1}$ $n \geq 1$

CORRECTION

Signe de $U_{n+1} - U_n$

$n \geq 1 \quad U_{n+1} - U_n = \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)-2} - \frac{3n+2}{2n-1}$

Brutalement $U_{n+1} - U_n = \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0$

Cela implique que $U_{n+1} - U_n < 0$

Conclusion : U est une suite décroissante pour tout n non nul

NB : Brutalement signifie qu'il y a des étapes manquantes dans la démarche pour aboutir Au résultat final

Autre démarche vu que la suite est du type $U_n = f(n)$

$$soit\ la\ fonction\ f : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-1}$$

f Est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme quotient $f'(x) = \frac{(3x+2)'(2x-1)-(2x-1)'(3x+2)}{(2x-1)^2}$

Par suite $f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$ $\forall x \geq 1$

$\forall x \geq 1$ $(2x-7)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-7}{(2x-7)^2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

Conclusion : f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ ainsi U est strictement décroissante

Application 6

Etudions le sens de variation de la suite (w_n)pour tout n entier naturel définie par :

$$w_n = \frac{1}{3^n}$$

CORRECTION

$$n \epsilon IN \quad 3^n > 0 \Longrightarrow \frac{1}{3^n} > 0 \Longrightarrow w_n > 0$$

Donc la suite (w_n) est positive

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3^n \times 3} \times 3^n = \frac{1}{3}$$

On sait que 3> 1 $\Leftrightarrow \frac{1}{3} < 1$ $ainsi$ $\frac{w_n}{w_{n+1}} < 1$

Conclusion : (w_n) est strictement décroissante

Application 7

Etudier le sens de variation de la suite U de terme général pour tout entier non nul

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$$

CORRECTION

Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

On a : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ et $U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$

$$U_{n+1} - U_n = (\frac{1^2}{1} + \cdots + \frac{2^n}{n}) - (\frac{1^2}{1} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1})$$

Apres simplification on obtient

$U_{n+1} - U_n = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ Or $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ >0

D'où $U_{n+1} - U_n > 0$ ou $U_{n+1} > U_n$

Conclusion : la suite U est strictement croissante

Application 8

On considère la suite U définie par tout entier naturel non nul par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1) calculer les 3 premiers termes de cette suite U

2) étudier le sens de variation de U

CORRECTION

$$U_1 = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{n+2} \quad ; U_3 = \frac{1}{n+3}$$

Signe de $U_{n+1} - U_n$

On a $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$

Et $U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n+2}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

En ajoutant $\frac{1}{n+1}$ à chaque membre on obtient

$$U_{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

Brutalement : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

Conclusion : U est strictement croissante

6 - Suites Bornées

- On dit qu'une suite numérique U est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel : $U_n \leq \boldsymbol{M}$ ou M est dit majorant de la suite U
- On dit qu'une suite numérique U est minorée s'il existe un réel m tel pour tout entier naturel : $U_n \geq \boldsymbol{m}$ Ou m est appelé minorant de la suite U
- La suite U est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée
  $\forall \boldsymbol{n \epsilon IN} \quad \boldsymbol{m} \leq U_n \leq \boldsymbol{M}$

Application 9

Montrer que la suite U définie par tout entier naturel n par $U_n = -n^2 + 3n + 7$ est majorée

CORRECTION

1^{ere} *Démarche*

On a $-n^2 + 3n + 7 = -(n^2 - 3n) + 7$

$$-n^2 + 3n + 7 = -\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - (\tfrac{3}{2})^2 + 7$$

$$-n^2 + 3n + 7 = -\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}$$

Pour tout entier naturel : $\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 > 0$

$ainsi \ -\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 < 0$

En ajoutant $\frac{37}{4}$ de part de d'autre de l'inégalité on obtient :

$$-\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{4} \leq \frac{37}{4}$$

D'où pour tout entier naturel n : $U_n \leq \frac{37}{4}$

Conclusion : la suite U est majorée par $\frac{37}{4}$

2eme démarche

La suite étant du type $U_n = f(n)$

Soit la fonction $f : x \longmapsto -x^2 + 3x + 7$

Vous étudierez les variations de f en dressant son tableau de variation .vous constaterez que f admet un maximum local en $\frac{3}{2}$

De ce fait $\forall\epsilon[0;+\infty[,\ f(x)\leq f(\frac{3}{2})$

Conclusion : f est majorée par $\frac{37}{4}$ ainsi $U_n\leq\frac{37}{4}$

Application 10

Montrer que la suite U définie pour tout entier naturel n par

$U_n=\frac{2+cosn}{3-sin\sqrt{n}}$ Est bornée

CORRECTION

On a d'une part $-1\leq cosn\leq 1$, n entier naturel

$$1\leq 2+cosn\leq 3\ \text{(A)}$$

On a d'autre part $-1\leq sin\sqrt{n}\leq 1$

$$par\ suite\ \frac{1}{4}\leq\frac{1}{3-sin\sqrt{n}}\leq\frac{1}{2}\ (B)$$

En multipliant membre a membre les inégalités (A) et (B) on obtient

$\frac{1}{4}\leq\frac{2+cosn}{3-sin\sqrt{n}}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq U_n\leq\frac{3}{2}$ La suite est bornée

Application 11

Soit U la suite pour tout n non nul définie par :

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\ \forall\in IN^*$$

Démontrer que : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq U_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

CORRECTION

$k\in[1;n]\ on\ a\ \ 1\leq k\leq n$

$$1+n^2\leq k+n\leq n+n^2\ \text{Or}\ 1+n^2>0$$

$$\sqrt{1+n^2}\leq\sqrt{k+n^2}\leq\sqrt{n+n^2}$$

Par suite $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Finalement : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq U_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Car $\sum_{k=1}^{n}1=n$

Conclusion la suite U est bornée

« ***Celui qui ne progresse pas chaque année sur un plan quelconque régresse et manque de discernement*** »

7- Convergence d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique

- La suite (U_n) est convergente

Lorsqu'elle admet une limite finie c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$.

- La suite est dite divergente

Lorsqu'elle n'est pas convergente.

- **Limite définies par une formule de Récurrence.**

Soit f une fonction continue sur intervalle K et (U_n) une suite à valeurs dans K, définie par la formule de récurrence $U_{n+1}=g(U_n)$ si (U_n) converge vers un réel l alors l est une solution dans k de l'équation $g(x)=x\ \ c'est\ à\ dire\ g(l)=l$

- **Limite d'une suite monotone**

Une suite décroissante et minorée est convergente.

Une suite croissante et majorée est convergente.

Une suite croissante et non majorée est divergente.

Une suite décroissante et non minorée est divergente.

Limite de a^n

Si $-1 < a < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

Si $a > 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

Application12

Etudier la convergence de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$1)U_n = \frac{1-n}{n^2+n+2} \quad 2)U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

CORRECTION

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-n}{n^2+n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} = 0$

Conclusion : la suite converge vers 0.

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ *expression conj*

Conclusion : la suite (U_n) converge vers 0.

Application13

Etudier la convergence de la suite (W_n) définie par $W_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2}$

CORRECTION

On a $\forall n \epsilon IN \ -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$

Par suite :$\frac{n^2-1}{n^2} \leq \frac{n^2+(-1)^n}{n^2} \leq \frac{n^2+1}{n}$

Donc : $\frac{n^2-1}{n^2} \leq W_n \leq \frac{n^2+1}{n^2}$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$ d'après le théorème de gendarme $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1.$

Conclusion : la suite converge vers 1

Application14

Soit la suite (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1)Etudier les variations de la suite(U_n).

2) Montrer que pour tout entier k> 1

$$\frac{1}{k^2} < \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

3) Montrer que pour tout entier naturel

Non nul on a : $U_n < 2 - \frac{1}{n}$ et en déduire que la suite converge.

CORRECTION

1) En étudiant le signe de $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n}$

On a $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

Et : $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Par suite :

$$U_{n+1} - U_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - (1 + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall \, n \epsilon IN^* \ (n+1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Ainsi : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : la suite est strictement croissante.

2) Soit k un entier tel que k> 1 on a :

$$\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

$$= \frac{(k-1) - k^2 + k(k-1)}{k^2(k-1)}$$

$$= -\frac{1}{k^2(k-1)}$$

Or $k > 1$ $\frac{1}{k^2(k-1)} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{k^2(k-1)} < 0$

De ce fait $\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} < \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

Autre démarche

Soit k un entier naturel tel que $k > 1$ on a :

$$0 < k-1 < k \Rightarrow k > k-1$$

En multipliant par k l'inégalité on obtient :

$$k^2 > k(k-1)$$

En inversant $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ par ailleurs $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

D'où : $\frac{1}{k^2} < \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

3) Soit $n \in IN$ et $k \in \{2; 3; \dots; n\}$ on a :

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

En simplifiant : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$

En ajoutant 1 de part et d'autre on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} + 1 < 2 - \frac{1}{n}$$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$

(U_n) Est croissante et majorée par 2, donc elle converge.

Application15 (page 187 $n^{-\circ}5$ T^{le}SE)

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 35} \end{cases}$$

1) Démontrer que $U_n \leq 7$
2) Démontrer que (U_n) est croissante
3) Déduire que la suite est convergente et Déterminer sa limite.

1) Soit $p(n)$ *la proposition* $"U_n \leq 7"$

- Initialisation vérifions que p(0) est vraie

On a : $U_0 \leq 7 \Leftrightarrow 0 \leq 7$

Donc p(0) est vraie au rang initial

- Hérédité pour tout n entier naturel fixe , supposons que p(n) est vraie c.-à-d.
$$U_n \leq 7$$
Montrons alors que p (n+1) est aussi vraie c-a-d : $U_{n+1} \leq 7$ $\boldsymbol{BUT}$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$U_n \leq 7$$
$$2U_n \leq 14$$
$$2U_n + 35 \leq 49$$
$$\sqrt{2U_n + 35} \leq \sqrt{49}$$

D'où $U_{n+1} \leq 7$

De ce fait , $p(n+1)$ *est* vraie donc la proposition est héréditaire

- **Conclusion** par initialisation et hérédité pour n entier naturel $U_n \leq 7$

2) Montrons que la suite U est croissante

Soit $p(n)$ sa proposition $"U_n \leq U_{n+1}"$

- Initialisation vérifions que $p(0)$ est vraie

On a : $U_0 \leq U_1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{35}$

Donc $p(0)$ *est vraie au rang initial*

- Hérédité pour tout entier naturel n fixe, supposons que $p(n)$ soit vraie c-a-d

$$U_n \leq U_{n+1}$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vrai c.-à-d.

$$U_{n+1} \leq U_{n+2} \ \boldsymbol{BUT}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$U_n \leq U_{n+1}$$
$$2U_n \leq 2U_{n+1}$$
$$2U_n + 35 \leq 2U_{n+1} + 35$$
$$\sqrt{2U_{n+} + 35} \leq \sqrt{2U_{n+1} + 35}$$

D'où $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

De ce fait, $p(n+1)$ *est* vraie donc la proposition est héréditaire

- **Conclusion** par initialisation et hérédité pour tout n entier naturel : $U_n \leq U_{n+1}$

3) la suite est croissante et majorée donc elle converge, si bien qu'elle admet une limite l tel que $l = \sqrt{2l+35}$

Par suite $l^2 + 2l + 35 = 0$ soit $l = 7$

8-Suites arithmétiques

Définition : on appelle suite arithmétique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = U_n + r$ où r est un réel appelé raison de la suite (U_n)

Exemple : $U_0 = 3 \overset{+2}{\curvearrowright} U_1 = 5 \overset{+2}{\curvearrowright} U_2 = 7 \overset{+2}{\curvearrowright} U_3 = 9$

En effet : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

(U_n) Est une suite arithmétique de raison 2

NB : si $r > 0$ *alors* (U_n) *est croissante et si*

$r < 0$ *alors la suite est décroissante.*

8.1- Formule explicite d'une suite arithmétique

Démonstration : soit (U_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0.

En appliquant la définition n fois, on obtient les égalités suivantes.

$$U_1 = U_0 + r$$

$$U_2 = U_1 + r$$

$$U_3 = U_2 + r$$

. . .

. . .

$$\underline{U_n = U_{n-1} + r}$$

En addition membre à membre, on obtient :

$$U_n = U_0 + nr$$

Si notre premier terme devient U_1 en appliquant encore la définition on a :

$$U_2 = U_1 + r$$

$$U_3 = U_2 + r$$

$$U_4 = U_3 + r$$

. . .

$$\underline{U_n = U_{n-1} + r}$$

En addition membre à membre ces n-1 égalités, on obtient :

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Et si notre premier terme est U_2, par un raisonnement analogue on obtiendra : $U_n = U_2 + (n-2)r$

Donc nous déduisons que pour tout entier n et k avec $n \geq k$ on a :

$$U_n = U_k + (n-k)r$$

Si le 1^{er} terme est U_0 on a : $U_n = U_0 + nr$; $k = 0$

Si le 1^{er} terme est U_1 on a : $U_n = U_1 + (n-1)r$; $k = 1$

8.2-Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

Posons : $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$$\underline{S = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 1}$$

En additionnant membre à membre les égalités on obtient : $2S = n + 1 + n + 1 \ldots + n + 1$

On a ici n fois (n+1).

Par suite $2S = n(n+1)$

Alors : $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Calculons S'

Posons : $S' = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ avec

$$U_n = U_0 + nr$$

On a: $S' = U_0 + U_0 + r + U_0 + 2r + \cdots U_0 + nr$

$$S' = (u_0 + u_0 + \cdots u_0) + (r + 2r + \cdots + nr)$$

$$= (n+1)U_0 + r(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= (n+1)U_0 + r(\frac{n(n+1)}{2})$$

$$= \frac{(n+1)(2U_0 + nr)}{2}$$

D'où $S' = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$

Application16 (1a page279 T^{le} SM)

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2} \end{cases}$

1) Exprimer (U_n) en fonction de n.
2) Calculer $\sum_{k=0}^{25} U_k$

CORRECTION

1) la suite (U_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme -3.

Formule explicite : $U_n = U_k + (n-k)r \quad n \geq k$

On a :$U_n = U_0 + n \times \frac{3}{2}$

D'où : $U_n = -3 + \frac{3n}{2}$

3) Posons : $S_n = \sum_{k=0}^{25} U_k$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{25}$$

Par suite :$S_n = -3 - 3 + \frac{3}{2} - 3 + \frac{3}{2} \times 2 + \cdots - 3 + \frac{3}{2} \times 25$

$$= (-3 - 3 - \cdots - 3) + \frac{3}{2}(1 + 2 + \cdots + 25)$$

$$= -3 \times 26 + \frac{3}{2}(\frac{25 \times 26}{2})$$

D'ou $S_n = 409{,}5$

9- Suite géométrique

Définition : on appelle suite géométrique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = qU_n$ où q est un réel appelé la raison de la suite(U_n)

Exple :$U_0 = 1 \curvearrowright^{\times 3} U_1 = 3 \curvearrowright^{\times 3} U_2 = 9 \curvearrowright^{\times 3} \ldots$

En effet : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$

9.1-Formule explicite d'une suite géométrique

Démonstration : soit (U_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 .

En appliquant n fois la définition on obtient ces égalités.

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

. .

. .

$$\underline{U_n = qU_{n-1}}$$

En faisant le produit membre à membre et en simplifiant on obtient :

$$U_n = q^n U_0$$

Si notre premier terme devient U_1 en appliquant toujours la définition :

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

$$U_4 = qU_3$$

. .

$$\underline{U_n = qU_{n-1}}$$

En faisant le produit membre à membre et en simplifiant on obtient :

$$U_n = q^{n-1}U_1$$

Si notre premier terme est U_2 par un raisonnement analogue on obtient :$U_n = q^{n-2}U_2$

On en déduit alors que pour tout entiers naturels n *et* k *avec* $n \geq k$ *on a* : $U_n = q^{n-k}U_k$

Si le 1er terme est U_0 *on a* $U_n = q^nU_0$; $k = 0$

Si le 1er terme est U_1 *on a* $U_n = q^{n-1}U_1$; $k = 1$

9.2-Calcul de la somme de n+1 termes d'une suite géométrique

Posons : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ *avec* $U_n = q^nU_0$

$$S = U_0 + qU_0 + q^2U_0 + \cdots + q^nU_0$$

Calculons :$-qS = -qU_0 - q^2U_0 - \cdots - q^{n+1}U_0$

Puis : $S - qS$

$$par\ suite \begin{cases} S = U_0 + qU_0 + \cdots + q^nU_0 \\ -qS = -qU_0 - q^2U_0 \ldots - q^{n+1}U_0 \end{cases}$$

En additionnant membre a membre les égalités suivantes et en simplifiant on obtient :

$$S(1-q) = U_0(1-q^{n+1})$$

D'où : $S = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Application17 (page 279 $n^0 1h$ *Tle SM*)

$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ \forall\ n \in IN\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n \end{cases}$$

1) Exprimer U_n *en fonction de* n
2) Exprimer $\sum_{n=3}^{10} U_n$

CORRECTION

La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier -3.

Formule explicite $\boldsymbol{U_n = q^{n-k}U_k}$

Le premier terme U_0 *donc* $k = 0$ $U_n = q^nU_0$

D'où : $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times -3$

Calculons : $S_n = \sum_{n=3}^{10} U_n$

$$S_n = U_3 + U_4 + \cdots + U_{10}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times -3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times -3 + \cdots \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times -3$$

$$= -3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right]$$

Dans la grande parenthèse nous avons une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, en appliquant la démonstration précédente on obtient brutalement : $S_n = -9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right]$

10- Suites adjacentes

Définition : deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacente si seulement si :

- L'une des suites est croissante
- L'autre des suites est décroissante et les suites $(U_n$- $V_n)$ ou $(V_n - U_n)$ converge vers 0.
-

Application 18 :(page 294 n42 $T^{le}C$ SM)

Soit (U_n) *et* (V_n) deux suites définies dans IN

par : $\begin{cases} 0 < U_0 < V_0 \\ \forall\ n \in IN\ \ U_{n+1} = \sqrt{U_nV_n}\ \ et\ V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \end{cases}$

1) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont strictement positives
2) a) calculer $U_{n+1}{}^2 - V^2{}_{n+1}$ et en déduire que $\forall\ n \in IN$ $(U_n) \leq (V_n)$

   b) Démontrer que (U_n) *est croissante* et que(V_n) *est décroissante* .

   c) Démontrer par deux méthodes différentes que $\boldsymbol{\forall\ n \in IN}$ **on a :**

   $$0 \leq U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - V_0)$$

CORRECTION

Soit $p(n)$ $les\ propositions''$ $U_n > 0\ \ et\ V_n > 0$"

- initialisation : Vérifions que $p(0)$ est vraie

On a : $U_0 > 0\ et\ V_0 > 0$ donc $p(0)$ est vraie au rang initial.

- Hérédité : $\forall\ n\ \epsilon\ IN$ fixé supposons que $p(n)$ est vraie c'est-à-dire

$$U_n > 0\ \ et\ V_n > 0.$$

Montrons alors que $p(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire $U_{n+1} > 0\ \ et\ \ V_{n+1} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{BUT}$

D'une part : $U_n > 0\ \ \forall\ n\ \epsilon IN\ V_n > 0$

En multipliant par V_n on obtient :

$$V_n U_n > 0 \times V_n$$

$$U_n V_n > 0 \Longrightarrow \sqrt{U_n V_n} > 0$$

D'où : $U_{n+1} > 0$

De ce fait, $p(n+1)$ est vraie la proposition est héréditaire

D'autre part : $V_n > 0$

En ajoutant U_n de part et d'autre on a :

$$V_n + U_n > 0 + U_n$$

$$\frac{V_n+U_n}{2} > \frac{U_n}{2}$$

$$\frac{V_n + U_n}{2} > \frac{U_n}{2}$$

Or: $U_n > 0 \ \Longrightarrow \frac{u_n}{2} > 0\ \ ainsi\ \ \frac{V_n+U_n}{2} > 0$

Donc : $V_{n+1} > 0$

De ce fait, $p(n+1)$ est vraie la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité $\forall\ n\ \epsilon\ IN \quad U_n > 0\ \ et\ \ V_n > 0$

2a) on a :

$$V_{n+1}{}^2 - U_{n+1}{}^2 = \left(\frac{U_n + V_n}{2}\right)^2 - (\sqrt{U_n V_n})^2$$

$$= \frac{U^2{}_n + 2U_nV_n + V^2{}_n}{4} - U_nV_n$$

$$V_{n+1}{}^2 - U_{n+1}{}^2 = \tfrac{1}{4}(U_n - V_n)^2$$

Déduction

$$\forall\ n\ \epsilon IN\ (U_n - V_n)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{(V_n - U_n)^2} \geq 0$$

$$V_n - U_n \geq 0$$

Donc :$U_n \leq V_n$

b) Montrons que $(\boldsymbol{U_n})$ est décroissante

D'après ce qui précède on a

$\forall\ n\epsilon\ IN\quad on\ a\quad ;\ U_n \leq V_n\ on\ sait\ que\ U_n > 0$

En multipliant de part et d'autre par U_n on obtient

$$U^2{}_n \leq U_nV_n$$

$$\sqrt{U^2{}_n} \leq \sqrt{U_nV_n}$$

$$U_n \leq U_{n+1}$$

Conclusion : la suite(U_n) croissante.

Montrer que la suite $(\boldsymbol{V_n}\ )$ est décroissante

On a : $U_n \leq V_n$

En ajoutant V_n de part et d'autre

$$V_n + U_n \leq 2V_n$$

Puis $\frac{V_n+U_n}{2} \leq V_n$

$$V_{n+1} \leq V_n$$

Conclusion : la suite V est décroissante.

1ere démarche intuitive

C) $\forall n \in IN\ on\ admet\ que\ \sqrt{V_n} - \sqrt{U_n} \leq \sqrt{V_n - U_n}$

En élevant au carre $(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n})^2 \leq (\sqrt{V_n - U_n})^2$

$ensuite$ $\quad \frac{1}{2}(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n})^2 \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

Par ailleurs $\quad \frac{1}{2}(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n})^2 = (V_{n+1} - U_{n+1})$

De ce fait $\quad (V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

Par suite $n \in \{1; 2; 3 \dots K-1\}$

$$(V_1 - U_1) \leq \frac{1}{2}(V_0 - U_0)$$

$$(V_2 - U_2) \leq \frac{1}{2}(V_1 - U_1)$$

$$(V_3 - U_3) \leq \frac{1}{2}(V_2 - U_2)$$

. . . .

. . . .

$$(V_k - U_k) \leq \frac{1}{2}(V_{k-1} - U_{k-1})$$

……………………………………………………………………………

En multipliant membre a membre ces n égalités et en simplifiant on obtient

On a $(V_k - U_k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$

Conclusion $\boldsymbol{\forall n \in IN : (V_n - U_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)}$

2eme démarche **consiste à faire un raisonnement par récurrence comme dans le guide pédagogue**

APPLICATION 19

On considère la suite U définie par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

1) montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique

2) déterminer le réel a pour que la suite V définit par $V_n = U_n + a \; pour \; n \; entier \; naturel$soi geometrique

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

CORRECTION

1) On a **:** $U_0 = 2 \qquad U_1 = 5 \qquad U_2 = 11$

Dans un 1er temps nous constatons $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$

Donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique

Dans un second temps $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$

Donc la suite (U_n) n'est pas géométrique

Conclusion : la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique une telle suite est dite arithmetico geometrique , suite hydrique.

2) La suite (V_n) est géometrique s'il existe un réel q tel que $V_{n+1} = qV_n$ n$\in IN$

$$V_{n+1} = qV_n \Leftrightarrow U_{n+1} + a = q(U_n + a)$$

$$\Leftrightarrow 2U_n + 1 + a = qU_n + qa$$

Par identification $\begin{cases} q = 2 \\ 1 + a = qa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

Donc V est une suite géométrique de raison 2 puis $V_n = U_n + 1 \; n \in IN$

3) par suite $V_n = 2^n \times V_0 = 2^n \times 3$

De plus puis $V_n = U_n + 1 \Leftrightarrow U_n = 2^n \times 3 - 1$

Exercices d'entrainement

Exercice1 :

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{1+U_n^2} \ pour\ n\ \epsilon IN \end{cases}$$

1) Montrer que cette suite est strictement positive
2) Donner son sens de variation
3) En déduire que cette suite est borné
4) En conclure que cette suite converge et déterminer sa limite

Exercice2 :(page 188 Tle SE)

Soit (W_n) la suite numérique définie par :

$W_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ Avec $n\ \epsilon IN^*$

1) Démontrer que $\forall\ n\ \epsilon IN^* \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$
2) En déduire que $2\sqrt{n-1} - 2 < W_n$

Déterminer sa limite.

Exercice 3 :

Etudier la convergence de la suite (U_n) définie sur IN^* par :

$$U_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Exercice 4 :(interro TC 2018 LPEE)

Soit $U_0 > 0\ et\ (U_n)$ la suite définie par :

$\forall\ n\epsilon\ IN\ \ U_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} U_k}$

Démontrer que$\forall\ n\ \epsilon\ IN\ \ U^2{}_{n+1} = U^2{}_n + U_n$

Exercice 5 :

Une suite arithmétique (U_n) a pour premier terme 7 et raison un réel r

a) Déterminer le réel r sachant que $U_3 = 22$
b) Exprimer $U_n\ en$ fonction de n

2) On considère la suite V définie par

$V_0 = -2$ Pour tout n entier naturel

Et $\quad 3V_{n+1} + 2V_n = -\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$

2a) calculer V_1, V_2 et V_3

3) soit la suite W définie pour tout entier naturel

$$W_n = V_n + \frac{1}{n+1}$$

a) Démontrer que W est une suite géométrique dont tu présideras la raison et son premier terme
b) On pose $T_n = U_n + W_n$

Calculer en fonction de n la somme

$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 ... + T_{n-1}$$

EXERCICE 6(extrait Devoir Tle C LPEE)

Démontrer sans passer par la récurrence pour tout n entier non nul

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

EXERCICE 7

Soit la suite U numérique définie par

$U_0 \in [0;1]\ et$ La relation de récurrence

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \quad \forall\ n \in IN$$

1) montrer que $\forall\ n \in IN$ on a : $0 \le U_n \le 1$

2) montrer que la suite U est convergente

On pose $U_0 = cos\varphi\ ,\ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$

3) Montrer $U_n = cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$

4) étudier la limite de la suite (U_n)

Exercice 8 (interro TC LPEE 2018)

On considère la suite U suivantes pour tout n non nul

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1) donner les deux premiers termes de la suite U

2) montrer que la suite U est positive

3) étudier la variation de U

4) démontrer que pour tout entier non nul :

$$U_{2n} \geq U_n + \frac{1}{2}$$

Exercice 9

Soit x un réel tel que $1 < x \leq 1$

1) Montrer que pour tout $k \in IN$

$$(1+x)^k \leq 1 + 2^k x$$

Soit (X_n) la suite definie pour tout n non nul par

$$x_n = \frac{n^3}{3^n}$$

2-a)Etablir l'égalité suivantes pour tout n non nul

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

En déduire que : $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$

c)Monter que pour tout $n \geq 16$

$$x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+16} x_{16} \quad puis\ en\ deuire\ \lim_{n \to +\infty} x_n$$

Exercice 10(Extrait Devoir Tle D LPEE)

On considère la suite U définie sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ 3U_{n+1} = 2U_n - \dfrac{n}{3^n} \end{cases}$$

1) calculer U_1 et U_2

2) Montrer que $\forall n \in IN$

$$U_n = \frac{n+1}{3^n}$$

2-b) Vérifier que pour tout $n \in IN$

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

3) *soit W la suite definie* Par :

$$W_n = 9U_{n+1} - 3U_n \ \ \forall \in IN$$

3-a)Montrer que W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le 1[er] terme

3-b) Exprimez $\sum_{k=0}^{n-1} W_k$ en fonction de n

4) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$

4-a)Montrer que $\forall n \in IN^*\ S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n}$

4-b) $\forall n \in IN^*$ Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}}$ *en fonction de n*

EXERCICE11

Soit la suite U : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$

Partie A

a)Montrer que la suite U est majorée par 4

b) Trouver le sens de variation de U

c)Montrer que pour tout entier naturel :

$$4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$$

En déduire $\forall n \geq 2 \quad 4 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

Quelle est la limite de U

PARTIE B

Soit V la suite définie par : $V_n = n^2(4 - U_n)$

a)Notons (W_n) *et* (T_n) les suites définies pour n non nul par :

$$W_n = \frac{n^2}{2^n} \quad et\ suite\ definie\ par\ T_n = \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

b) Calculer limite de T_n

c)Montrer que pour n> 0 on a : $T_n > \frac{1}{2}$

d) Montrer qu'il existe un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $T_n < \frac{3}{4}$

e)En déduire que pour $n \geq p \quad W_{n+1} < \frac{3}{4}U_n$

f) Montrer que $W_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} W_5$

PARTIE C

a)Soit la suite définie par : $S_n = \sum_{k=5}^{n-1} W_k$

Montrer que : $S_n \leq \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] W_5$

EXERCICE 12

Soit les suites U et V définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1} \end{cases}$ $et \quad V_n = \frac{1}{U_n}$

Calculer U_1 ,$U_2, V_1 et\ V_2$

2) montrer que la suite V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et son 1er terme

3) exprimer V_n en fonction de n puis en fonction de U_n

4) exprimer en fonction de n

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

5) étudier la convergence des suites V et U

EXERCICE 13(interro Tle C LPEE 2018)

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{2}{5} U_n \end{cases} \quad \forall n \in IN$

1) on suppose que la suite U converge, montrer alors que sa limite est $\frac{5}{3}$

2) on pose $V_n = U_n - \frac{5}{3}$

a)Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison le 1er terme

b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n en fonction de n

c) Etudier la convergence de (V_n)

On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

Et $\quad S'_n = U_0 + U_1 + .. + U_{n-1}$

d) Déterminer S_n en fonction de $V_0\ et\ n$ puis en déduire S'_n en fonction de $V_0\ et\ n$

EXERCICE 14(page 189 Tle SE nu 26)

On définit deux suites U et V pour tout entier naturel par $U_0 = 1 \quad et \quad V_0 = 12$

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{1}{3}(U_n + 2V_n) \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{4}(U_n + 3V_n) \end{cases}$$

1) On appelle W la suite definie pour tout entier naturel par $W_n = V_n - U_n$

a)Montrer que W est une suite géométrique a terme positifs, dont on précisera la raison et le 1er terme

b) Déterminer sa limite

2-a)Monter que la suite U est croissante

b) Montrer que la suite V est décroissante

c)Démontrer que pour tout entier naturel n : $\quad V_n \geq U_n$

d) Déduire que les suites U et V sont convergente

3) Montrer que les deux suites U et V ont la même limite

4) On appelle (T_n) la suite definie pour tout entier naturel par : $T_n = 3U_n + 8V_n$

a)Montrer que la suite (T_n) est constante et déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de l

EXERCICE 15

On considère les suites$(a_n)\ et\ (b_n)$ par $a_0 = 1$

Et $b_0 = 7$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(b_n + 2a_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

Soit D une droite munie d'un repère (o,i) pour tout n entier naturel ;on considère les points A_n et B_n d'abscisse respectives a_n et b_n

1) Placez les points $A_0, B_o, A_1, B_1, A_2 et\ B_2$

2) soit (U_n) la suite definie par $U_n = b_n - a_n$

a)Démontrer que la suite U est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme

b) Exprimez U_n $en\ fonction\ de\ n$

3) comparez a_n et b_n et étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) puis interpréter géométriquement ces résultats

4) Démontrer que les deux suites précédentes sont adjacentes

5) soit V la suite définit par :$V_n = b_n - a_n$

Pour tout n entier naturel

a)Démontrer que la suite V est constante et en déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont même milieu

6) justifie que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limites

b) interpréter le résultat

Lorsque quelque chose te semble insurmontable, c'est que tu doutes de toi

EXERCICE 16

Soit la suite U définie pour tout entier naturel n par : $U_n = 2^n - 3n + 4$ calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

EXERCICE 17(interro TleC 2018 LPEE)

On considère la suite (U_n) definie sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 1 + \sqrt{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n^2 + 2U_n + 4} \end{cases}$$

Calculer U_1 et U_2

On pose $V_n = (U_n - 1)^2 \quad \forall n \epsilon IN$

a)Montrer que la suite (V_n) est arithmétique

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c)Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

REMERCIEMENT

Pour ce projet, je remercie :

1. Mr Désiré Boucalt, proviseur du Lycée LPEE de 2017-2019

2. Mr Manga Gabriel, proviseur du Lycée Moderne de l'Estuaire de LALALA

3. Mr Souala Herman, proviseur de LPEE 2020

4. Au département de Mathématiques du Lycée LPEE

Un grand merci aussi à tous mes anciens élèves qui m'ont toujours encourager dans ce type d'initiative.