

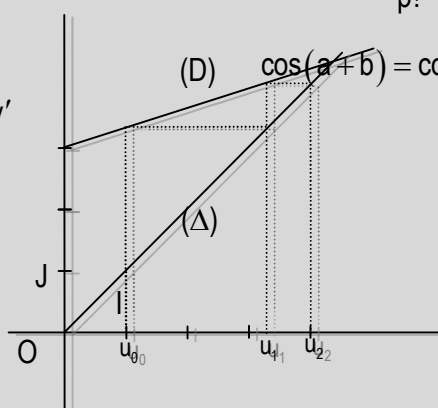
2008 / 2009

MATHEMATIQUES

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$



$$(D) \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

L'ASTUCE
PREMIERE
SE

COURS

DOCUMENT DU PROFESSEUR

Nom et Prénom(s) :

Etablissement :

SOMMAIRE

LE VOCABULAIRE DE LA LOGIQUE	2
------------------------------------	---

ANALYSE

CHAPITRE I : EQUATIONS ET INEQUATIONS	4
CHAPITRE II : FONCTIONS.....	11
CHAPITRE III : LIMITES, CONTINUITÉ ET EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE.....	18
CHAPITRE IV : DERIVATION.....	28
CHAPITRE V : REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS.....	36
CHAPITRE VI : ETUDE DE FONCTIONS.....	43

ALGÈBRE

CHAPITRE VII: DENOMBREMENT.....	45
CHAPITRE VIII : TRIGONOMETRIE.....	54
CHAPITRE IX : SUITES NUMÉRIQUES.....	66
CHAPITRE X : BARYCENTRE	74
CHAPITRE XI : SYSTÈMES LINÉAIRES \mathbb{R}^3	81
CHAPITRE XII : TRANSFORMATIONS DU PLAN	84

LE VOCABULAIRE DE LA LOGIQUE

Ce chapitre vise à donner à l'élève un raisonnement cohérent et logique. Il est conçu pour qu'on s'y reporte tout au long de l'année scolaire en cas de besoin.

1. Définition d'une proposition

Une proposition est un énoncé (mathématique) qui peut-être vrai ou faux.

2. Implication

Soit (P) et (Q) deux propositions

a) Vocabulaire et notation

Dire que (P) **implique** (Q) signifie que :

- Lorsque (P) est vraie alors (Q) est vraie
- Ou encore (Q) est une conséquence de (P)

On dit que (P) une **condition suffisante** pour que (Q) soit vérifiée

Pour signifier que (P) **implique** (Q) on note : $(P) \Rightarrow (Q)$

L'implication peut se traduire par la formulation usuelle suivante : **si (P) alors (Q)**

Exemples : **Si je suis vieux alors j'ai été jeune**

$$(P) \Rightarrow (Q)$$

Si le triangle ABC est équilatéral alors $mes\hat{A} = mes\hat{B} = mes\hat{C}$

$$(P) \Rightarrow (Q)$$

Remarques

Si (Q) n'est pas vérifiée alors (P) ne peut pas être vérifiée (puisque (P) implique (Q)).

On dit que (Q) est une **condition nécessaire** pour que (P) soit vérifiée.

Exemple : Si je n'ai pas été jeune alors je ne pas être vieux
Il est donc **nécessaire** d'être jeune pour prétendre devenir vieux

b) Implication réciproque

La réciproque de l'implication $(P) \Rightarrow (Q)$ est l'implication $(Q) \Rightarrow (P)$.

La réciproque de l'implication $(Q) \Rightarrow (P)$ est l'implication $(P) \Rightarrow (Q)$.

Les implications $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont des implications réciproques

Remarque Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse.

Exemple :

Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ est une implication vraie

$$(P) \Rightarrow (Q) \text{ est vraie}$$

Sa réciproque s'énonce

Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$; il est facile de voir que cette réciproque est fausse car $(-2)^2 = 4$ or $-2 \neq 2$

$$(Q) \Rightarrow (P) \text{ est fausse}$$

3. Equivalence

(P) et (Q) sont deux propositions. Lorsque les implications réciproques $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont vraies, on dit que **(P) et (Q) sont équivalentes** ou que (P) est vérifiée **si et seulement si** (Q) vérifiée.

On note : $(P) \Leftrightarrow (Q)$ on lit : « (P) est équivalente à (Q) »

Remarque

Dans ces conditions chacune des propositions est une **condition nécessaire et suffisante** pour que l'autre soit vérifiée.

Exemple $ABC \text{ est équilatéral} \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$

4. Quelques méthodes de démonstrations

a) Comment démontrer une égalité ?

Pour démontrer une égalité entre nombres, entre vecteurs, ..., on dispose au moins de quatre façons :

Ecrivons l'égalité à démontrer sous la forme $A = B$

- On transforme l'écriture de A jusqu'à obtenir B
- On transforme l'écriture de B jusqu'à obtenir A
- On transforme à la fois A et B puis on démontre que A et B sont égaux à C.
- On démontre que $A - B$ ou $B - A$ est nulle.

b) Notion de contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition n'est pas « toujours » vraie, il suffit d'exhiber un cas pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé un **contre-exemple**

c) Comment démontrer une implication ?

Pour démontrer une implication $(P) \Rightarrow (Q)$:

- On procède souvent par implications successives c'est-à-dire par étapes et de conséquence en conséquence.
- On peut aussi commencer par remplacer (Q) par une proposition (Q') qui lui est équivalente, puis on démontre que (P) implique (Q').

d) Comment démontrer une équivalence ?

Pour démontrer une équivalence on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- On démontre successivement deux implications $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$
- On procède par équivalences successives.

CHAPITRE I : EQUATIONS – INEQUATIONS

I. EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

- 1- Polynômes du second degré
- 2- Equations du second degré
 - a) Définition
 - b) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
- 3- Inéquations du second degré
 - a) Définition
 - b) Signe d'un polynôme du second degré

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

- 1- Equations irrationnelles du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$
- 2- Inéquations irrationnelles du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

CHAPITRE I : EQUATIONS – INEQUATIONS

I. EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

1- Polynômes du second degré

Activité 1

Soit P le polynôme du 2nd degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Vérifier que $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$.

Le nombre réel $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme du second degré P.

On le note $\Delta = b^2 - 4ac$

On obtient ainsi : $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

Activité 2

- 1) a) Calculer le discriminant de chacun des polynômes du second degré puis le réécrire si possible sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1.

$$P(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$R(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$Q(x) = -x^2 + 2x - 1$$

- b) Dans quel cas peut-on écrire le polynôme sous forme de produit de polynômes de 1^{er} degré ?
- 2) Quel doit être le signe du discriminant Δ pour qu'un polynôme du second degré puisse s'écrire sous la forme de produit de polynômes de degré 1 ?

Remarque

- Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$ alors le polynôme peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.
- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

Les zéros éventuels d'un polynôme du 2nd degré

Activité 3

On considère le polynôme du second degré $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ avec $a \neq 0$.

- 1) Si $\Delta > 0$
- Écrire P(x) sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieurs ou égaux à 1.
 - Déterminer les zéros de P(x).
- 2) Si $\Delta = 0$
- Donner l'expression de P(x).
 - Déterminer le(s) zéro(s) de P(x).
- 3) Si $\Delta < 0$, peut-on trouver des zéros pour P(x) ?

Retenons

On considère le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, P(x) admet deux zéros distincts $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

On les nommera x_1 et x_2 pour faire une distinction. Ainsi $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ admet un zéro double $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Dans ce cas $P(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'admet pas de zéro.

Exercice d'application

Déterminer dans chacun des cas ci-dessous les zéros éventuels du polynôme et le réécrire si possible sous forme d'un produit de polynôme de 1^{er} degré.

$$P(x) = 3x^2 - 15x + 12 ; K(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 ; S(x) = x^2 - 2x + 1$$

2- Equations du second Degré

a) Définition

On appelle équation du 2nd degré, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est le polynôme du second degré associé à cette équation.

Retenons

Résoudre une équation du 2nd degré revient à déterminer les zéros éventuels du polynôme de 2nd degré associé à cette équation.

Exemples de résolution

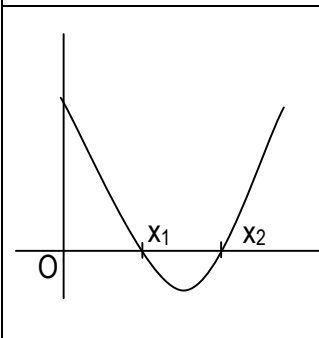
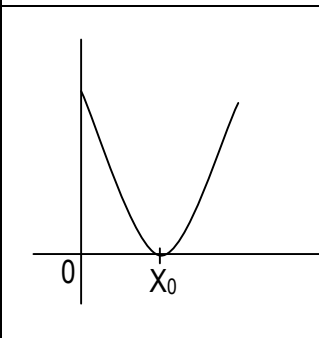
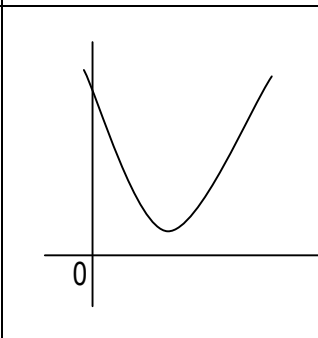
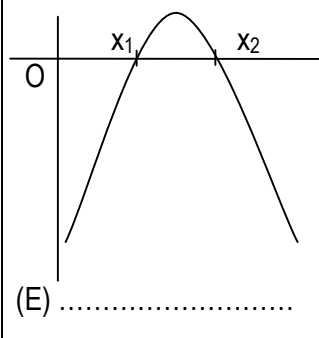
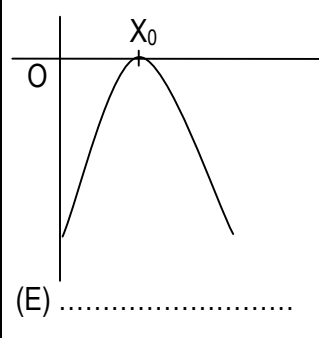
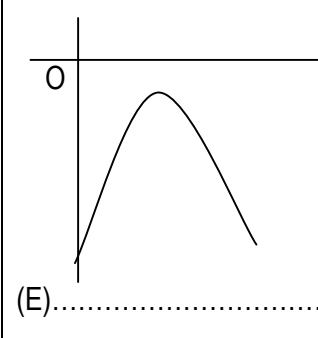
Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : 2x^2 - x - 1 = 0.$$

$$(E_2) : x^2 - 8x + 25 = 0.$$

$$(E_3) : x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Résolution d'une équation en utilisant une représentation graphique

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$
(E)	(E)	(E).....	
P(x)	
.....	

b) Somme et produit des solutions d'une équation du 2nd degré

Activité

Soit l'équation du 2nd degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ admettant pour discriminant $\Delta > 0$ et pour solution.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \text{ Montrer que : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Propriété 1

Si x_1 et x_2 sont les solutions d'une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

$$\text{alors } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque

Lorsque l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ est telle que a et c sont de signes contraires, le discriminant est positif. L'équation (E) admet alors deux solutions de signes contraires.

Exercice d'application

Soit l'équation (E) : $x^2 + x - 12 = 0$, sachant que 3 est une solution de l'équation (E). Déterminer rapidement sans calculer le discriminant l'autre solution.

Point méthode

Déterminer des nombres réels dont on connaît la somme S et le produit P , on peut procéder de la manière suivante :

- On vérifie que $S^2 - 4P \geq 0$
- Les nombres réels recherchés sont les solutions éventuelles de l'équation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice d'application

Détermine s'ils existent deux nombres réels dont la somme est 1 et le produit est -6.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Par la méthode du discriminant résous dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

1) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

3) $x^2 - 16x + 2(x - 4) = 0$

2) $9x^2 + 4x + 5 = 0$

4) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres réels s'ils existent, dont on connaît la somme S et le produit P .

1) $S = 28$; $P = 195$

3) $S = 15$; $P = -324$

2) $S = 2\sqrt{5}$; $P = 3$

4) $S = \frac{5}{6}$; $P = \frac{1}{6}$

Exercice 3

Déterminer les nombres x et y tels que

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Exercice 4

Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire dont l'aire est 50400 ha et le demi-périmètre est 45 km.

3- Inéquations du 2nd degré

a) Définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Toute inéquation de l'un des types ci-dessous est appelée inéquation du second degré.

$P(x) > 0$; $P(x) \geq 0$; $P(x) < 0$ et $P(x) \leq 0$

b) Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

1^{er} cas : $\Delta > 0$

Le polynôme admet deux zéros distincts notés x_1 et x_2 . Supposons que $x_1 < x_2$; on obtient le tableau :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
P(x)	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

2^e cas : $\Delta = 0$

Le polynôme admet un zéro double noté x_0 . on obtient le tableau :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P(x)	Signe de a	0	Signe de a

3^e cas : $\Delta < 0$

Le polynôme n'admet pas de zéro. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	Signe de a	

Remarque

Résoudre dans \mathbb{R} une telle inéquation revient à étudier le signe du polynôme $P(x)$

Exercice d'application

En utilisant le discriminant, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$(I_1) : 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$; $(I_2) : -x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 \leq 0$; $(I_3) : x^2 + x + 1 > 0$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit P un polynôme du 2nd degré défini par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

- 1) Montre que $\forall x \in]-\infty ; -3] \cup [-1 ; +\infty[; P(x) \geq 0$ et $\forall x \in [-3; -1]; P(x) \leq 0$.
- 2) On considère le polynôme $T(x) = 2x^2 - 9x - 5$.
- 3) a- Vérifie que 5 est un zéro de $T(x)$.
b- Soit $Q(x) = (x^2 - 2x)(2x^2 - 9x - 5)$, résous dans \mathbb{R} l'équation $Q(x) = 0$.

Exercice 2

En utilisant le discriminant, étudier le signe puis écris si possible sous la forme de produits de polynômes de 1^{er} degré chacun des polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 + 6x + 9 \quad ; \quad R(x) = -x^2 + x - 7 \quad ; \quad Q(x) = -x^2 + x - 5 \quad ; \quad T(x) = -2x^2 + 7x - 5$$

Exercice 3

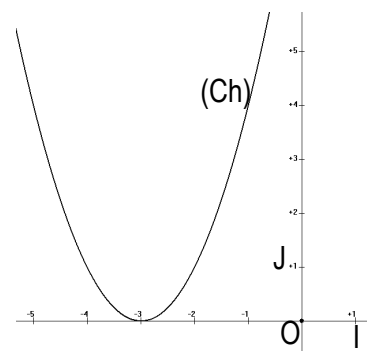
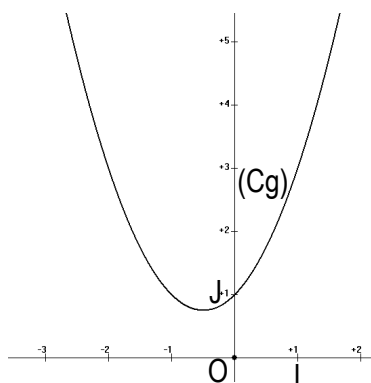
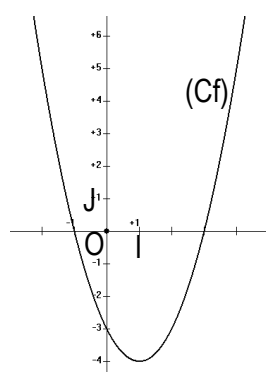
Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :

$$(I_1) : 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 ; (I_2) : -3x^2 + 5x - 4 > 0 \quad ; \quad (I_3) : 4x^2 - 4x + 1 < 0$$

Exercice 4

On considère les fonctions suivantes :

$f(x) : x^2 - 2x - 3$; $g(x) = x^2 + x + 1$; $h(x) = x^2 + 6x + 9$ de représentations graphiques respectives (Cf); (Cg) et (Ch).



Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : f(x) = 0 \quad ; \quad (I_1) : f(x) > 0 \quad ; \quad (I_2) : f(x) \leq 0 ;$$

$$(E_2) : g(x) = 0 \quad ; \quad (I_3) : g(x) > 0 \quad ; \quad (I_4) : g(x) < 0 ;$$

$$(E_3) : h(x) = 0 \quad ; \quad (I_5) : h(x) \geq 0 \quad ; \quad (I_6) : h(x) < 0 ;$$

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

1- Equations irrationnelles du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$

Méthode

L'équation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ a le même ensemble de solution que le système:

$$(\Sigma) \begin{cases} P(x) \geq 0 & (1) \text{ a pour ensemble de solution } S_1 \\ Q(x) \geq 0 & (2) \text{ a pour ensemble de solution } S_2 \\ P(x) = (Q(x))^2 & (3) \text{ a pour ensemble de solution } S_3 \end{cases}$$

L'ensemble de solution de l'équation est $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Exemple

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $(E_1) : \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$

Exercice d'application

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $(E) : \sqrt{-5x + 6} = 2 - x$.

2- Inéquations irrationnelles du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

Méthode

L'inéquation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} < Q(x)$ a le même ensemble de solution que le système:

$$(\Sigma) \begin{cases} P(x) \geq 0 & (1) \text{ a pour ensemble de solution } S_1 \\ Q(x) \geq 0 & (2) \text{ a pour ensemble de solution } S_2 \\ P(x) < (Q(x))^2 & (3) \text{ a pour ensemble de solution } S_3 \end{cases}$$

L'ensemble de solution de l'équation est $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Exemple

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation (E): $\sqrt{x^2 + x - 2} \leq x + 1$

Exercice d'application

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation (I): $\sqrt{3-x} \leq x-1$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x-3} = x+4$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x^2+5x+9} = x-3$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{-2x^2+3x+5} = x$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3-x^2} = x^2-1$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3x+1} \leq 4-x$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x-1} \leq -3$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-9} < x-9$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+x+1} < 2x-5$

CHAPITRE II : FONCTIONS

I. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

- 1- Restriction d'une fonction
- 2- Comparaison de deux fonctions
- 3- Maximum – minimum relatif d'une fonction

II. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

- 1- Sommes, produits et quotients de fonctions
- 2- Comparaison de fonctions

III. APPLICATIONS BIJECTIVES

- 1- Bijections
 - a) Définition
 - b) Propriété
- 2- Bijection réciproque
 - a) Définition
 - b) Propriété
- 3- Représentation graphique de la bijection réciproque

CHAPITRE II : FONCTIONS

I. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Restriction d'une fonction

Activité 1

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

- 1) Déterminer D_f et D_g , les ensembles de définition respectifs de f et g .
- 2) Montrer que pour tout $x \neq 1, f(x) = g(x)$.

On constate que
 On dit que.....

Définition

Soit f une fonction de A vers B . E une partie non vide de l'ensemble de définition de f . On appelle restriction à E de la fonction f , l'application g de E dans B définie par $g(x) = f(x)$.

On peut noter f_E la restriction à E de la fonction f . Pour tout x de E , $f_E(x) = f(x)$.

Exercices d'application

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |2x - 1|$. Quelle est la restriction de f à chacun des intervalles suivants : $]-\infty; \frac{1}{2}[$; $[\frac{1}{2}; +\infty[$

2. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

Montrer que la restriction de g à l'intervalle $]0; +\infty[$ est la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

2- Comparaison de deux fonctions

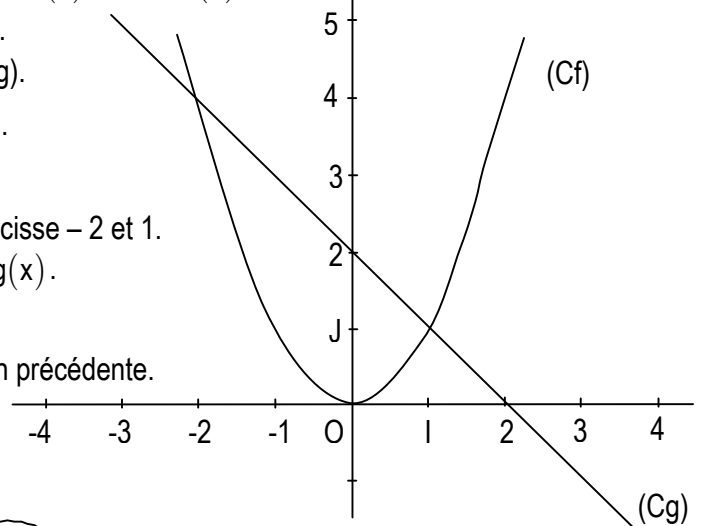
Activité 2

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ les courbes (C_f) et (C_g) de représentation graphiques respectives des fonctions f et g , définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x + 2$.

- 1) Donner la position de (C_f) relativement à (C_g) .
 - Sur $]-\infty; -2[$, (C_f) est au dessus de (C_g) .
 - Sur $]-2; 1[$, (C_f) est au dessous de (C_g) .
 - Sur $]1; +\infty[$, (C_f) est au dessus de (C_g) .
 - (C_g) et (C_f) se coupent aux points d'abscisse -2 et 1 .
- 2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

$$\forall x \in]-2; 1[; f(x) < g(x)$$

- 3) Retrouver par le calcul le résultat à la question précédente.



Définition

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies sur E .

- On dit que sur E , f est supérieure ou égale à g (respectivement strictement supérieure à g) lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \geq g(x)$ (respectivement $f(x) > g(x)$).

On note : sur E , $f \geq g$ (respectivement $f > g$).

- On dit que sur E , f est inférieure ou égale à g (respectivement strictement inférieure à g) lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \leq g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$).

On note : sur E , $f \leq g$ (respectivement $f < g$).

Remarque

f et g étant deux fonctions définies sur un ensemble E , comparer f et g sur E , c'est déterminer les intervalles contenus dans E sur lesquels $f \leq g$ et ceux sur lesquels $f \geq g$. Cela revient à étudier, sur l'ensemble E le signe de $f(x) - g(x)$.

Exercice d'application

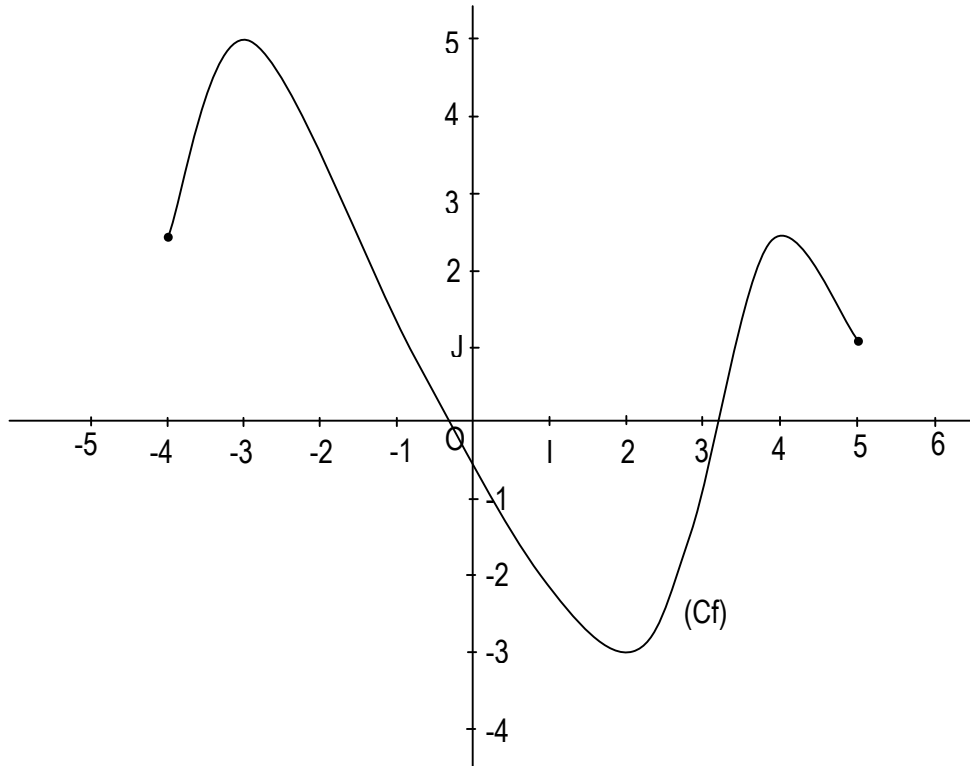
Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{x}$.

- 1) Déterminer les ensembles de définition respectives de f et g .
- 2) Comparer f et g sur les intervalles $]0;1[$; $[-1;0[$; $]-\infty;0[$; $[2;+\infty[$

3- Minimum, maximum relatif d'une fonction

Activité 3

Soit la représentation graphique de la fonction f ci-dessous.



Déterminer le maximum et le minimum relatif de la fonction f sur les intervalles suivants :

$$\left[-4; -\frac{1}{2}\right]; \left[-\frac{1}{2}; 5\right]$$

II. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

1- Sommes, produits et quotients de fonctions

Activité

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$

1. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g respectifs des fonctions f et g .
2. On considère la fonction s définie par $s(x) = f(x) + g(x)$
 - a) Déterminer D_s l'ensemble de définition de la fonction s .
 - b) Montrer que pour tout x élément de D_s ; $s(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x+2)(x-3)}$

On dit que la fonction s est la somme des fonctions f et g . On note $s = f + g$

3. On considère la fonction p définie par $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
 - a) Déterminer D_p l'ensemble de définition de la fonction p .
 - b) Montrer que pour tout x élément de D_p ; $p(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

On dit que la fonction p est le produit des fonctions f et g . On note $p = f \cdot g$

4. On considère la fonction q définie par $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 - a) Déterminer D_q l'ensemble de définition de la fonction q .
 - b) Montrer que pour tout x élément de D_q ; $q(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$

On dit que la fonction q est le quotient de fonction f par la fonction g . On note $q = \frac{f}{g}$

Définition

Soit f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g

	Notation	Ensemble de définition	Formule explicite
Somme	$f + g$	$D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit	fg	$D_f \cap D_g$	$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$D_f \cap D_g \setminus \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Remarque :

On définit aussi les fonctions suivantes :

- Produit d'une fonction par un nombre réel k : $(kf)(x) = k \cdot f(x)$ avec $D_{kf} = D_f$
- Puissance $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction : $(f^n)(x) = [f(x)]^n$ avec $D_{f^n} = D_f$
- Inverse d'une fonction : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$; avec $D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$

Exercice d'application

On considère les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ et $g(x) = x^2 - 1$.

- a) Préciser l'ensemble de définition de f , g , $f+g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$.
- b) Calculer explicitement $(f + g)(x)$; $(f \cdot g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

2- Composition de fonctions

Activité

On donne les fonctions f, g, h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x + 1$ et $h(x) = (2x + 1)^2$.

- 1) Calculer $g(1)$; $f(g(1))$ puis $h(1)$.
- 2) Calculer $g(-2)$; $f(g(-2))$ puis $h(-2)$.
- 3) Comparer $f(g(1))$ et $h(1)$ puis $f(g(-2))$ et $h(-2)$

Définition

Soit A, B et C des parties de l'ensemble des nombres réels ; f une fonction numérique de A vers B ayant D_f pour ensemble de définition. g une fonction numérique de B vers C ayant D_g pour ensemble de définition.

On appelle composée de f suivie de g , la fonction $x \mapsto g[f(x)]$. On la note $g \circ f$.

Son ensemble de définition $D_{g \circ f}$ est tel que : $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

On dit que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les composées de f et g .

Exercice d'application

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = x+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Déterminer les ensembles de définition D_f , D_g , $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$ respectifs des fonctions $f, g, g \circ f$ et $f \circ g$; puis calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

III. APPLICATIONS BIJECTIVES

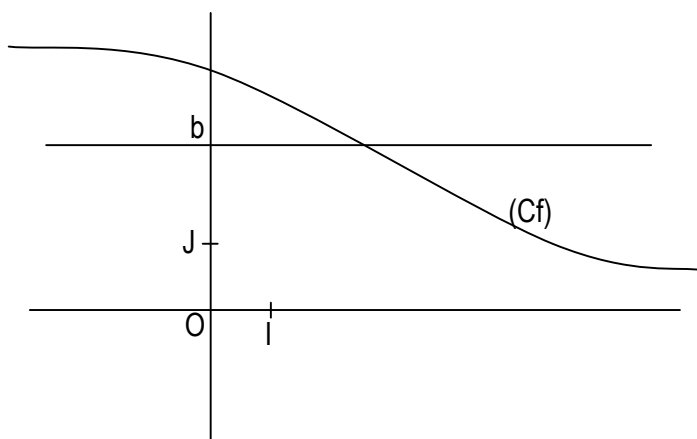
1- Bijection

a) Définition

On appelle bijection d'un ensemble A dans un ensemble B toute application f de A dans B telle que chaque élément de B . Soit l'image par f d'un élément de A et d'un seul.

b) Propriété

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B . f est une bijection si et seulement si pour tout élément b de B , l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique.



Toute droite d'équation $y = b$ coupe (Cf) en un unique point.

2- Bijection réciproque

a) Définition

Soit f une bijection d'un ensemble A dans un ensemble B .

On appelle bijection réciproque de f l'application de B dans A , notée f^{-1} qui, à toute élément de B associe son unique antécédent par f .

b) Propriété

- Si f est une bijection d'un ensemble A dans un ensemble B , et f^{-1} sa bijection réciproque, alors f est la bijection réciproque de f^{-1} .
- $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de A ; $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de B .

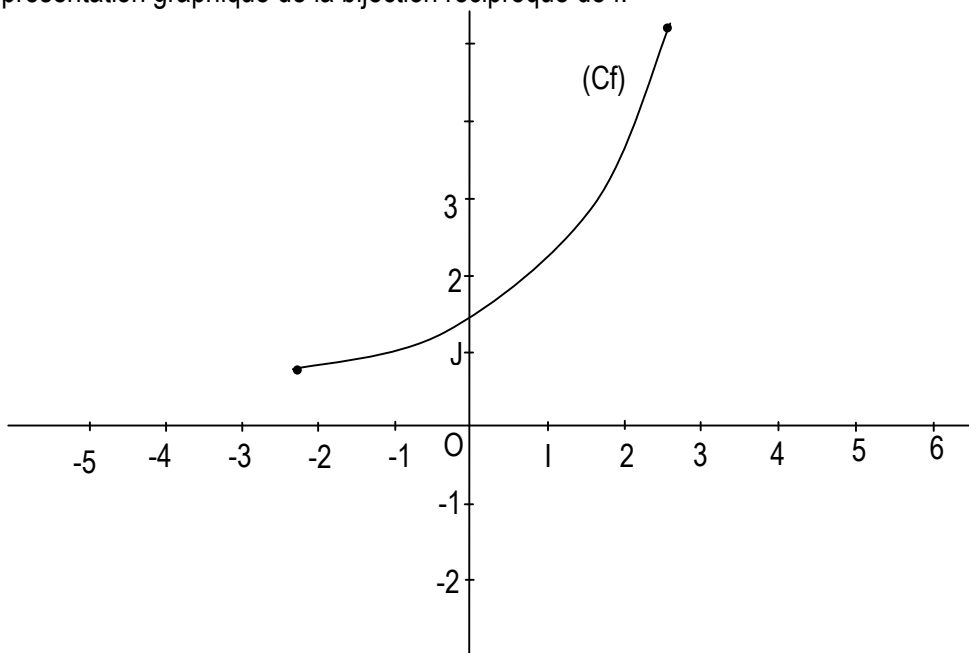
3- Représentation graphique de la bijection réciproque

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé les représentations graphiques de deux bijections réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ (la première bissectrice).

Exercice d'application

On donne ci-dessous (C_f) , la représentation graphique de la bijection f dans le repère orthonormé $(O; I; J)$. Construis la représentation graphique de la bijection réciproque de f .



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. Donner la restriction de f à chacun des intervalles $[-2; 0]$ et $[0; 2]$.

Exercice 2

On donne les fonctions $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

et

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}$$

$$x \mapsto 3x + 1$$

Montrer que f est la restriction de g à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g .
2. Déterminer la plus grande partie E de \mathbb{R} sur laquelle f et g ont la même restriction.

Exercice 4

Soit f et g , les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ et $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$.

- 1) Compare f et g sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}; +\infty[$.
- 2) Résoudre sur $]-\frac{1}{2}; 0]$, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 5

1. Comparer les fonctions polynômes f et g définies par $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = 4 - x^2$
2. Comparer les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par $f(x) = \frac{6-2x}{x-1}$ et $g(x) = 2x - 2$

Exercice 6

Trouver les ensembles de définition des fonctions $f + g$; $f \cdot g$; et $\frac{f}{g}$; puis donner leurs expressions explicites.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x-1}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x-1$; $x \mapsto \frac{3}{x^2-2x+1}$

Exercice 7

Trouver les ensembles de définition des fonctions f , g , $g \circ f$ et $f \circ g$ puis, calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans les cas suivants :

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - x - 2$; $x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice 8

f et g deux fonctions définies sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ et $g(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.

Déterminer les réels a , b et c tels que $f = g$.

I. LIMITES

- 1- Notion de limites
- 2- Notion de continuité
- 3- Continuité en a de fonctions élémentaires
 - a) Propriété
 - b) Critère de continuité

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE EN a

- 1- Présentation
- 2- Etude de limites en a

III. LIMITE INFINIE – LIMITE A L'INFINIE

- 1- Limite infinie en a et notion d'asymptote verticale
 - a) Limite infinie en a
 - b) Asymptote verticale
- 2- Limite à l'infini
 - a) Limite finie à l'infini et notion d'asymptote
 - Limite finie à l'infini
 - Asymptote horizontale
 - b) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

IV. CALCUL DE LIMITES

- 1- Limites et opérations
- 2- Limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles
 - a) Limites à l'infini des fonctions polynômes
 - b) Limites à l'infini des fonctions rationnelles.
- 3- Travaux dirigés

CHAPITRE III :

LIMITES, CONTINUITÉ ET EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

I. LIMITES

1- Notion de limites

Activité 1

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- Compléter à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)					X				

- Que deviennent les images $f(x)$ lorsque x prend dans D_f des valeurs suffisamment proches de 1.

Conclusion

On dit que 0,5 est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 ou que 0,5 est la limite de f en 1.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,5$

2- Notion de continuité

Activité 2

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$

- A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau ci-dessous.

x	3,9	3,99	3,999	3,9999	4	4,0001	4,001	4,01	4,1
f(x)									

- Que deviennent les images $f(x)$ lorsque x prend dans D_f des valeurs suffisamment proches de 4.

Conclusion :

La fonction f admet une limite en 4 égale à $\frac{3}{2}$; on a : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

On dit que la fonction f est continue en 4.

Propriété – définition

Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a , alors cette limite est égale à $f(a)$.

On dit que la fonction f est continue en a . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ est continue en a .

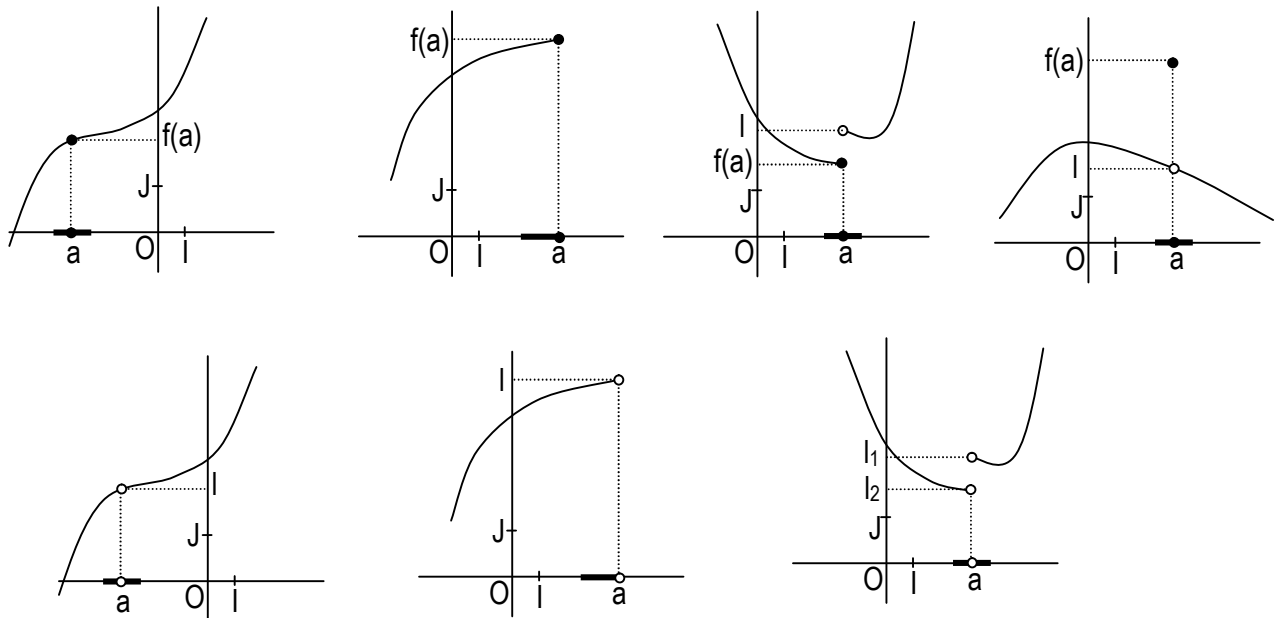
Remarque

- On démontre et nous admettons que : lorsqu'une fonction admet une limite en a , cette limite est unique.
- Pour qu'une fonction f soit continue en a , il est nécessaire qu'elle soit définie en a .

Illustration graphique

Dans chacun des cas de figures suivantes (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f . Dire si :

- La fonction f est définie en a
- La fonction f admet une limite en a
- La fonction f est continue en a .



3- Continuité en a de fonctions élémentaires

a) Propriété

Les fonctions suivantes sont continues en tout élément a de leur ensemble de définition.

- La fonction constante : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$)
- La fonction identité : $x \mapsto x$
- La fonction carrée : $x \mapsto x^2$
- La fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$
- La fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$
- La fonction cosinus : $x \mapsto \cos x$
- La fonction sinus : $x \mapsto \sin x$

b) Critère de continuité

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Exemples

- Les fonctions polynômes sont continues en tout élément de \mathbb{R} .
- Les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.
- La fonction tangente est une fonction définie en tout élément de son ensemble de définition.

Exercices d'application

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-4x + 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 7}{x - 5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} - 3x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$$

2. f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x^2 + 3$. Etudier la continuité de f en 2.

3. Soit la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , sans calculer la limite, justifier dans chaque cas que f est continue en a .

a) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$; $a = 1$

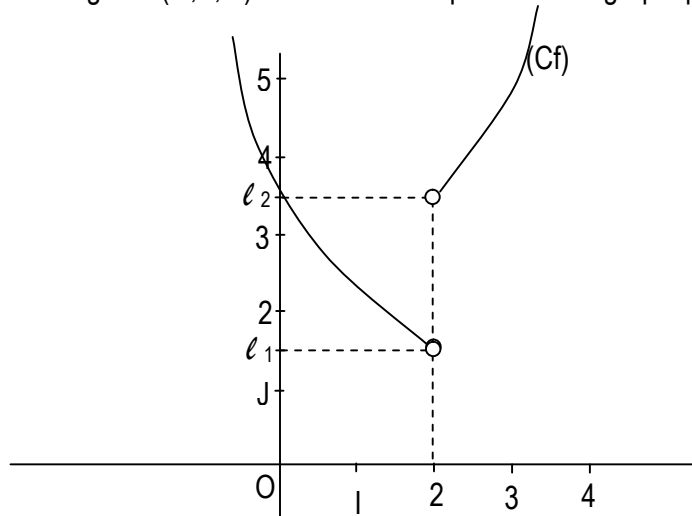
b) $f(x) = \sqrt{x} - \sin x$; $a = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $a = \frac{\pi}{4}$

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE

1- Présentation

Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On donne la représentation graphique (Cf) d'une fonction f (voir figure ci-dessous).



- 1) f est elle définie en 2 ?
- 2) Que deviennent les images f(x) lorsque x se rapproche de 2 par valeur plus petite que 2 ?

Conclusion

On dit que l_1 est la limite de f à gauche en 2 et on écrit : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = l_1$

- 3) Que deviennent les images f(x) lorsque x se rapproche de 2 par valeur plus grande que 2 ?

Conclusion

On dit que l_2 est la limite de f à droite en 2 et on écrit : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = l_2$

2- Etude de la limite en a

Propriété

a et l sont des nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.

- Dans le cas où f n'est pas définie en a.

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à l.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

- Dans le cas où f est définie en a.

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à f(a).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Exercice d'application

On donne la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x < 1, & f(x) = 3x - 1 \\ \text{pour } x \geq 1, & f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$$

- 1) Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 1 de f.
- 2) La fonction f admet-elle une limite en 1?

III. LIMITE INFINIE, LIMITE A L'INFINI

1- Limite infinie en a et notion d'asymptote verticale

a) Limite infinie en a

Activité 1

Soit la fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

- Donner l'ensemble de définition de f.
- A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant en calculant l'arrondi d'ordre 3 de f(x).

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)					X				

- Que deviennent les images f(x) lorsque x est proche de 2 ?

Conclusion

On dit que $+\infty$ est la limite de f(x) lorsque x tend vers 2 ou que $+\infty$ est la limite de f en 2.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

Propriété

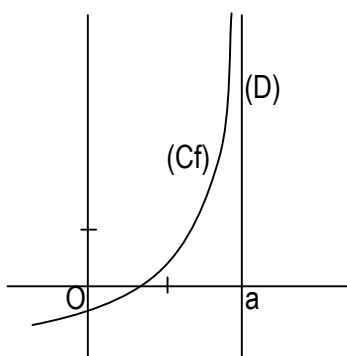
f est une fonction d'ensemble de définition D_f , a un nombre réel n'appartenant pas à D_f (on suppose qu'il existe un intervalle I de centre a tel que $I \setminus \{a\} \subset D_f$).

On a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

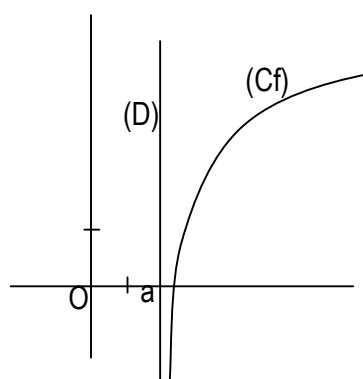
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

b) Asymptote verticale
Définition

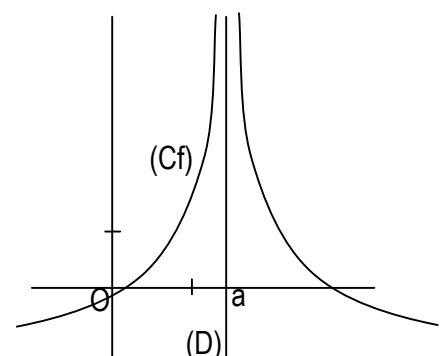
Lorsque la fonction f admet une limite infinie en a, on dit alors que sa représentation graphique admet une **asymptote verticale**, la droite d'équation $x = a$.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

2- Limite à l'infini

a) Limite finie à l'infini et notion asymptote horizontale.
- Limite finie à l'infini

Activité

On considère la fonction h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

1. A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau ci-dessous.

x	20	2.10 ³	2.10 ⁴	2.10 ⁸
f(x)				

2. Que deviennent les images f(x) lorsque x prend de grandes valeurs ?

Conclusion

On dit que 1 est la limite de h(x) lorsque x tend vers +∞ ou que 1 est la limite de h en +∞.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

- Asymptote horizontale

La fonction f admet une limite finie b en +∞ (respectivement en -∞) on dit que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote horizontale en +∞ (respectivement en -∞), la droite d'équation y = b.

Exercice d'application

Soit f une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J). Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en a et donner une interprétation graphique du résultat.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$; a = +∞.

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$; a = -3.

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$; a = 1.

b) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

On admet les résultats suivants dans le tableau ci-dessous

$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$	NB : les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite à l'infini
$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	

IV. CALCUL DE LIMITES

1- Opérations sur les limites

NB : Dans chaque cas a désigne un réel ou +∞ ou -∞ ; l' et l'' sont des réels.

• Limite d'une somme

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$				+∞	-∞	+∞
Et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$						

• Limite d'un produit

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$		> 0	> 0	< 0	< 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} (f.g)(x) =$									

• Limites inverses

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} =$					

Remarque : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} \quad (g \neq 0)$

Propriétés

Propriété 1

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que g(a) soit différent de zéro, est une fonction continue en a.

Propriété 2

Pour tout nombre réel a et pour tout nombre entier naturel n différent de zéro,

Si n est pair $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

Si n est impair $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

Propriété 3

- Pour tout nombre entier naturel n différent de zéro ; on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$$

- Pour tout nombre entier naturel n différent de zéro ; on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

2- Limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles.

a) Limites à l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction polynôme f est la limite à l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de f(x).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

b) Limites à l'infini des fonctions rationnelles
Propriété

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite à l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus haut degré de $p(x)$ et de $q(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$$

3- Travaux dirigés

(1) Calcul de limites en a d'une fonction non définie en a.

a) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x - 2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

b) Dans chacun des cas suivants étudier la limite de la fonction f en a (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite).

$$f(x) = \frac{9}{(x+1)^3}; \quad a = -1 \quad f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}; \quad a = 1 \quad f(x) = \frac{-2}{(x-3)^5}; \quad a = 3$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-5}; \quad a = 5 \quad f(x) = \frac{2x+13}{(x+7)^7}; \quad a = -7$$

(2) Calcul de limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles.

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) = 3x - 2 \quad f(x) = -2x^{2008} + x^{1000} - 1 \quad f(x) = (2x + 5)(-3x + 4)$$

$$f(x) = -3x^{1009} + x^{98} - 5 \quad f(x) = \frac{4x-5}{2x+3} \quad f(x) = \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{-2x^2 + x - 3} \quad f(x) = \frac{x^4 + 2}{2x^5 + x^2 - 1}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (2 - \sqrt{7}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

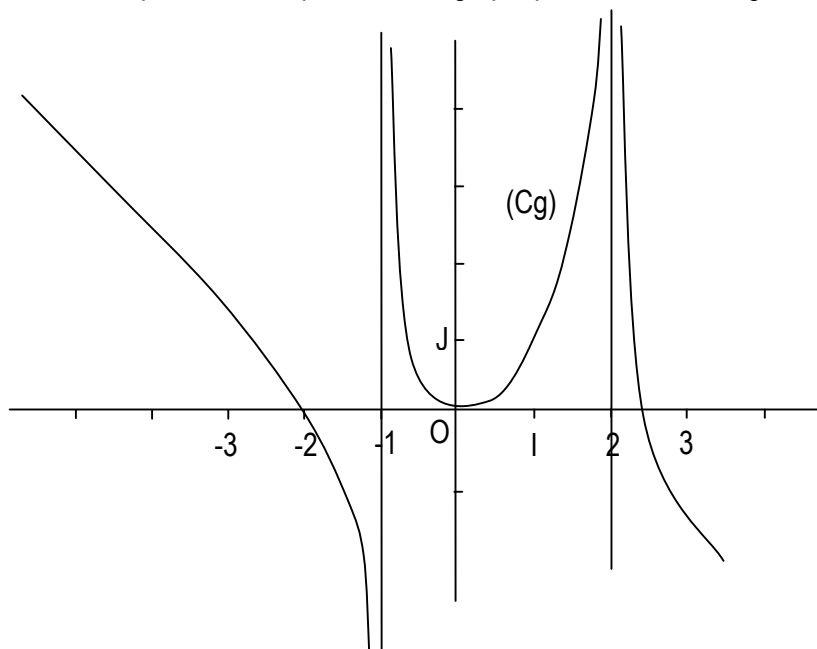
Exercice 2

On considère la fonction h définie par $h(x) = |x - 3|$.

- 1) Exprimer h(x) sans le symbole de la valeur absolue.
- 2) Calculer h(3).
- 3) Calculer la limite à gauche et à droite en 3 de la fonction h.
- 4) h admet-elle une limite en 3?

Exercice 3

La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction g .



- 1) déterminer graphiquement l'ensemble de définition de g .
- 2) donner les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g .
- 3) déterminer les limites à gauche et à droite en -1 et en 2 de la fonction g .

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 - 2x^3 + 5)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 - 2x^2 + x + 1)$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 2}{x - 3}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{4x - 5}$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x - 4}{x^2 + 2x - 1}$

Exercice 5

Dans chaque cas, calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en a , f admet-elle une limite en a ?

- 1) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$; $a = 3$; 2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $a = 1$; 3) $f(x) = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$; $a = -1$

Exercice 6

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , puis trouver les asymptotes verticales et horizontales éventuelles de la représentation graphique de f .

- a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$; b) $f(x) = \frac{7}{x-1}$; c) $f(x) = \frac{6-x}{3x-1}$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de f en a .

- 1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$; $a = 1$
- 2) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 3}$; $a = -3$
- 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 2} \\ f(-2) = 0 \end{cases}$, $a = -2$

Exercice 8

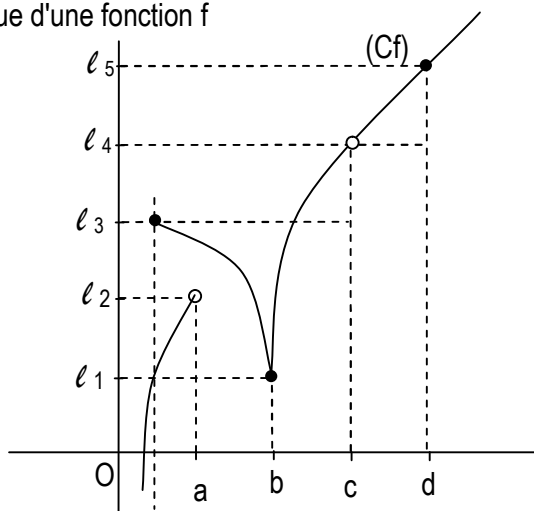
On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \neq \frac{2}{3}; f(x) = \frac{2-3x}{9x^2-4} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f . f est-elle continue en $\frac{2}{3}$?

Exercice 9

(Cf) est la représentation graphique d'une fonction f



A l'aide de ce graphique expliquer, pourquoi f est continue en b et d , f n'est pas continue en a et pourquoi on ne peut parler de continuité de f en c .

CHAPITRE IV : DERIVATION

I. DERIVATION EN a

- 1- Nombre dérivé d'une fonction en a
- 2- Interprétation graphique du nombre dérivé

II. DERIVATION ET OPERATIONS

- 1- Fonction dérivée
 - a) Dérivée de fonctions élémentaires
 - b) Dérivabilité et continuité en a
- 2- Opérations sur les fonctions dérivées
- 3- Dérivée de la fonction $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$

III. DERIVEE ET SENS DE VARIATION

- 1- Fonction dérivable sur un intervalle
- 2- Dérivée et sens de variation
- 3- Extrémum relatif d'une fonction

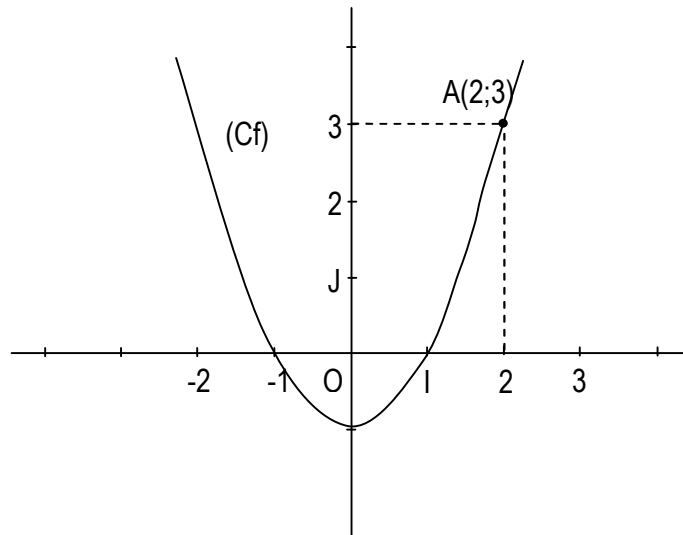
CHAPITRE IV : DERIVATION

I. DERIVATION EN a

1- Nombre dérivé d'une fonction en a

Activité 1

(Cf) est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O; I; J) de la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 1$. On considère les points A(2;3) et M(x;f(x)).



1) Calculer le coefficient directeur $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ de la droite (AM).

2) Calculer la limite de $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ quand x tend vers 2.

Conclusion :

Lorsque l'expression $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, d'une fonction f définie en a, admet une limite finie en a. On dit que f est dérivable en a.

3) Soit (T) la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$. Construire la droite (T) sans établir son équation.

Conclusion

Cette droite est la position limite de la droite (AM) lorsque l'abscisse de M tend vers 2. Elle est appelée tangente à (Cf) en A.

Définitions

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f , a un nombre réel appartenant à un intervalle ouvert contenu dans D_f .

- On appelle taux de variation de f en a, la fonction notée T_a et définie sur $D_f \setminus \{a\}$ par

$$T_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f en a, admet une limite en a. Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.

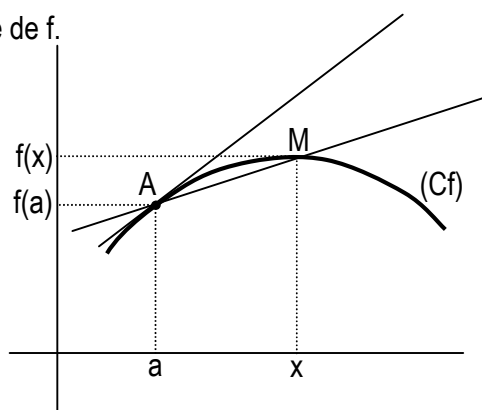
2- Interprétation graphique du nombre dérivé.

Définition

Le plan étant muni d'un repère, la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point $A(a;f(a))$ est appelée **tangente** en A à la représentation graphique de f.

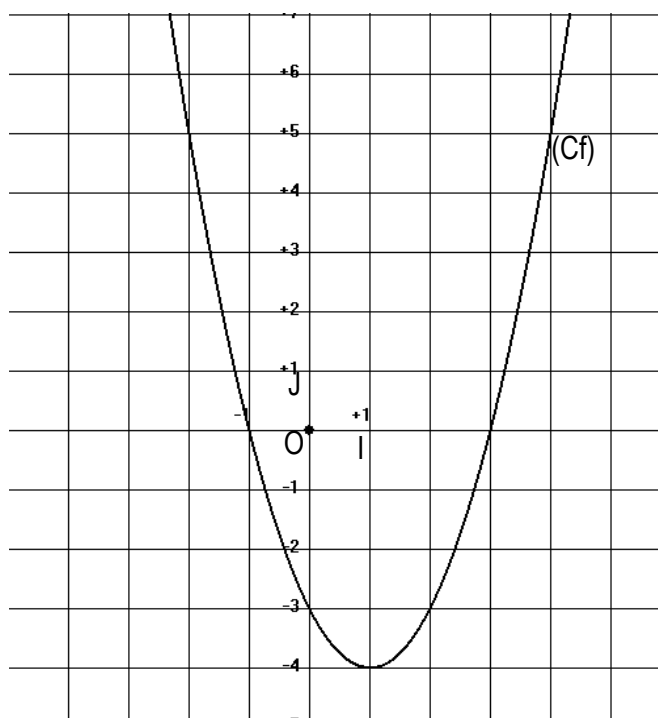
L'équation de la tangente en A à (Cf) est :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ et de représentation graphique (Cf) ci-dessous.



- 1) Calculer le nombre dérivé de f en chacun des nombres réels $0; 1; 2; \frac{5}{2}$.
- 2) Construire les tangentes à (Cf) respectivement au point d'abscisse $0; 1; 2; \frac{5}{2}$.
- 3) Donner une équation de ces tangentes.

II. DERIVATION ET OPERATIONS

1- Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df, D l'ensemble des éléments de Df pour lesquels f est dérivable.

- La fonction qui, à chaque élément x de D , fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f ou la dérivée de f .
On la note f'
- Si K est un intervalle ouvert inclus dans D , on dit que la fonction f est dérivable sur K .

a- Dérivée de fonctions élémentaires

Activité 1

Soit un nombre réel c et la fonction constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto c$

- 1) Soit a un nombre réel, donner l'expression du taux de variation de f en a .
- 2) Calculer la limite de ce taux de variation lorsque x tend vers a .
- 3) f est-elle dérivable en a ?

Conclusion

.....

.....

Activité 2

Soit f une fonction définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un nombre réel.
 $x \mapsto x^2$

- 1) Donner l'expression du taux de variation de f en a .
- 2) Calculer la limite de ce taux de variation lorsque x tend vers a .
- 3) f est-elle dérivable en a ?

Conclusion

.....

.....

Tableau des dérivées des fonctions de référence

$f(x)$	Ensemble de définition de f	f est dérivable en tout élément de	$f'(x)$
$c ; c \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	1
$x^n ; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos x$
$\cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin x$
$ax + b ; a \neq 0$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	a
$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

b- dérivabilité et continuité en a.

Propriété

Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Remarque

La réciproque de cette propriété est fautive. Par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 , cependant elle n'est pas dérivable en 0 .

2- Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonctions	Fonctions dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$u'v + uv'$
$a.u ; (a \in \mathbb{R})$	au'
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

3- Dérivée de la fonction $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$

Propriété

a, α et β sont des nombres réels.

f une fonction et g la fonction définie par $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$. Si f est dérivable en $a\alpha + \beta$, alors g est dérivable en a et on a : $g'(a) = \alpha f'(a\alpha + \beta)$.

Exercice d'application

1) Déterminer la fonction dérivée et l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1 \quad g(x) = \frac{2x+1}{3x-1} \quad h(x) = x \sin x \quad t(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$$

2) Pour les mêmes fonctions de la question 1, calculer le nombre dérivé en 2; -1 et 3.

III. DERIVEE ET SENS DE VARIATION

1- Fonction dérivable sur un intervalle

Définition

Une fonction est dérivable sur un intervalle K lorsqu'elle est dérivable en tout élément de cet intervalle.

Remarque

- Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

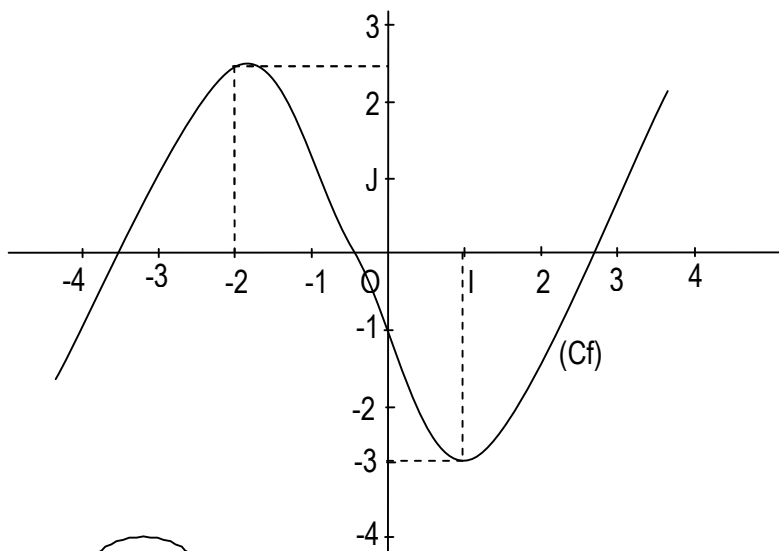
2- Dérivée et sens de variations

Activité

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \text{ et } (C_f) \text{ sa}$$

représentation graphique dans le repère $(O; I; J)$ donnée ci-dessous.



- 1) A l'aide de la courbe (Cf).
 - a- Donner le sens de variation de f et le tableau de variation de f.
 - b- Trouver les extrémums relatifs (minimum - Maximum de f).
- 2) a- Déterminer la fonction dérivée f' et f.
 - b- Montrer que $f'(x) = (x + 2)(x - 1)$.
 - c- Etudier le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.
- 3) Compléter le tableau suivant

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
Signe de f'(x)				
Sens de variation				

Remarque

- Lorsque f' est positive sur un intervalle alors f est croissante sur cet intervalle.
- Lorsque f' est négative sur un intervalle alors f est décroissante sur cet intervalle.

Propriété (on admet)

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f' est positive sur K si et seulement si f est croissante sur K
- f' est négative sur K si et seulement si f est décroissante sur K
- f' est nulle sur K si et seulement si f est constante sur K

3- Extrémum relatif d'une fonction

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K. x_0 un nombre réel appartenant à K.

$f(x_0)$ est un extrémum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercice d'application

On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
- 4) Etudier le signe de la fonction dérivée f'(x) suivant les valeurs de x.
- 5) En déduire le sens de variation de f.
- 6) Dresser son tableau de variation puis déterminer les extrêmes relatifs de f.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

En utilisant la définition du nombre dérivé, trouver dans chacun des cas suivants, le nombre dérivé en x_0 de la fonction f définie par :

a) $f(x) = 3x^2 - 5x$ en $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ en $x_0 = 3$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$

Exercice 2

On donne la fonction polynôme f définie par : $f(x) = 3x^2 + 5$

- 1) Démontrer que cette fonction est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1.
- 2) (Cf) est la représentation graphique de la fonction dans le plan muni du repère orthogonal (O; I; J). A est le point de (Cf) d'abscisse 1. Déterminer un vecteur directeur de la tangente en A à (Cf). tracer cette droite.

Exercice 3

Etudier la dérivabilité en 0 de chacune des fonctions f , g et h définie par :

$f(x) = |x^3|$; $g(x) = x|x|$; $h(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 4

f étant une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , déterminer sa dérivée dans chacun des cas suivants. Préciser l'ensemble des nombres réels où f est dérivable.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{4}x - 5$;

2) $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$

3) $f(x) = 2x - \cos x$

4) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{3x - 1}$

Exercice 5

On considère la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 2) Calculer la dérivée de g et donner son ensemble de dérivabilité.
- 3) Calculer les nombres dérivés de la fonction g en -2 et 3.
- 4) Etablir l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -2.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 5) Déterminer les extrémums relatifs de f .

Exercice 7

On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ est (C_f) .

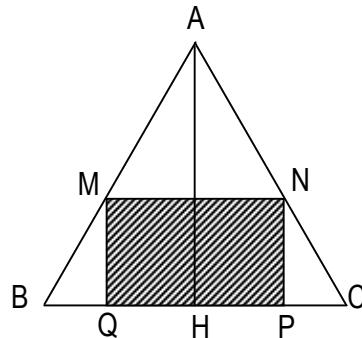
- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - a- Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b- Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2) Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- 3) On considère la droite (D) d'équation $y = x + 3$.
Etudier les positions relatives de (C_f) et de la droite (D) .
- 4) a- Démontrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$.
 - b- Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - c- En déduire le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 5) déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
- 6) Déterminer si possible les extrémums relatifs de f .

Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté a .

$MNPQ$ est un rectangle inscrit dans ABC comme l'indique la figure.

H est le pied de hauteur issue de A . on pose $BQ = x$.



- 1) Vérifier que $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- 2) Démontrer que $MQ = x\sqrt{3}$.
- 3) Exprimer l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de x .
- 4) Déterminer la position du point Q pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.
- 5) Calculer alors l'aire maximale du rectangle $MNPQ$.

I. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS ET TRANSFORMATION DU PLAN

- 1- Représentations graphiques de fonctions et translation
- 2- Représentations graphiques de fonctions et symétries

II. PROPRIETES GEOMETRIQUES DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS

- 1- Fonctions paires – fonctions impaires
 - a) Définition
 - b) Propriétés
- 2- Eléments de symétrie de la représentation graphique d'une fonction
 - a) Centre de symétrie
 - b) Axe de symétrie
- 3- Fonctions périodiques

CHAPITRE V : REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS

I. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS ET TRANSFORMATION DU PLAN

1- Représentations graphiques de fonctions et translation

Activité

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

1. $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ sont deux points du plan tel que $M' = t_{\vec{u}}(M)$. Exprimer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M et de \vec{u} .
2. On donne la représentation graphique (Cf) d'une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . (Cg) est l'image de (Cf) par la translation $t_{\vec{u}}$. Déterminer la fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui a (Cg) pour représentation graphique.

Propriété

Le plan est muni du repère (O, I, J) . Soit f une fonction de représentation graphique (Cf) . La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de (Cf) par la translation de vecteur $\alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$

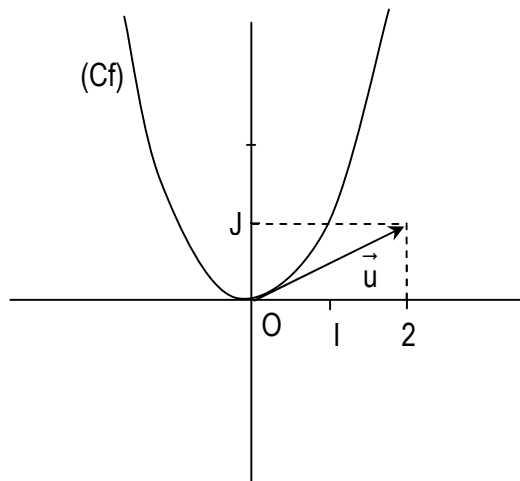
Remarque

- Si $\alpha = 0$, la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x) + \beta$ est l'image de (Cf) par la translation de vecteur $\beta\vec{OJ}$.
- Si $\beta = 0$, la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x - \alpha)$ est l'image de (Cf) par la translation de vecteur $\alpha\vec{OI}$.

Exercices d'application

Exercice 1

On suppose que (Cg) est l'image de (Cf) par la translation du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Construis (Cg) .



Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{-x+5}{x-2}$.

- 1) Vérifier que pour $x \neq 2$; $g(x) = \frac{3}{x-2} - 1$
- 2) Montrer que pour $x \neq 2$; $g(x) = f(x-2) - 1$
- 3) En déduire les coordonnées du vecteur \vec{u} de la translation qui transforme (C_f) en (C_g) .

3- Représentations graphiques de fonctions et symétries

Propriétés

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OI) .
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OJ) .
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à O .

Remarque : Fonction $x \mapsto |f(x)|$

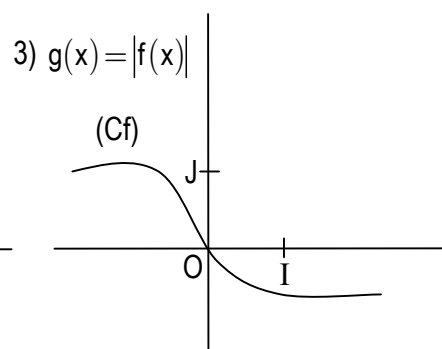
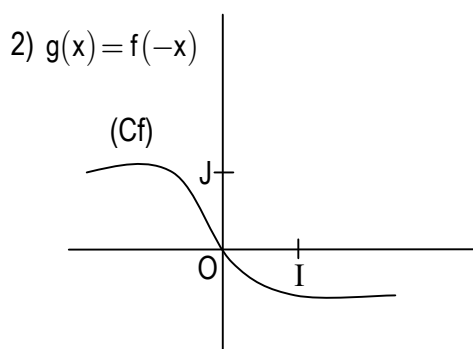
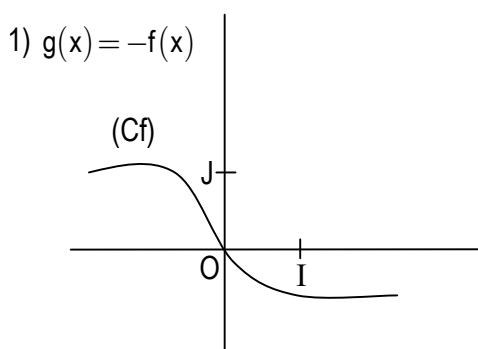
- Pour tout x élément de D_f , on a :
$$\begin{cases} |f(x)| = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Donc, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI) .

- f étant une fonction, les fonctions suivantes : $x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto -f(-x)$; $x \mapsto f(x-a)+b$; $x \mapsto |f(x)|$ sont appelées fonctions associées à f .

Exercice d'application

Soit (C_f) la représentation graphique de la fonction f . construis dans chacun des cas la représentation graphique de la fonction g .



II. PROPRIETES GEOMETRIQUES DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1- Fonctions paires, fonctions impaires

a) Définition

Une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , d'ensemble de définition D_f , est dite :

- Paire lorsque, pour tout x élément de D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- Impaire lorsque, pour tout x élément de D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Remarque

- La condition : « pour tout x élément de D_f ; $-x \in D_f$ » signifie que la partie de la droite (OI) qui représente D_f est un ensemble symétrique par rapport au point O.
- Etudier la parité d'une fonction, c'est chercher la preuve que cette fonction est : Soit paire, soit impaire, soit ni paire ni impaire.

Exercice d'application

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 3 ;$$

$$g(x) = 2x^3 - 5x ;$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

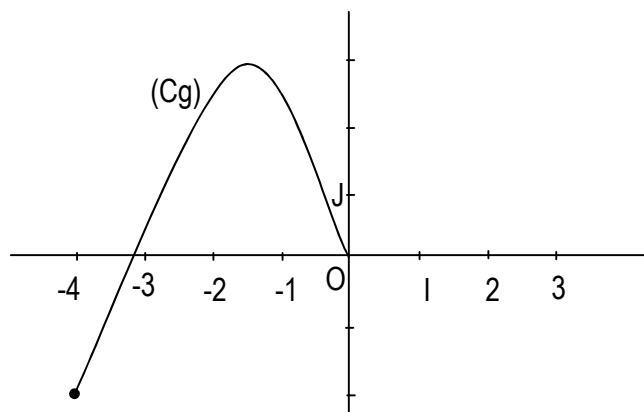
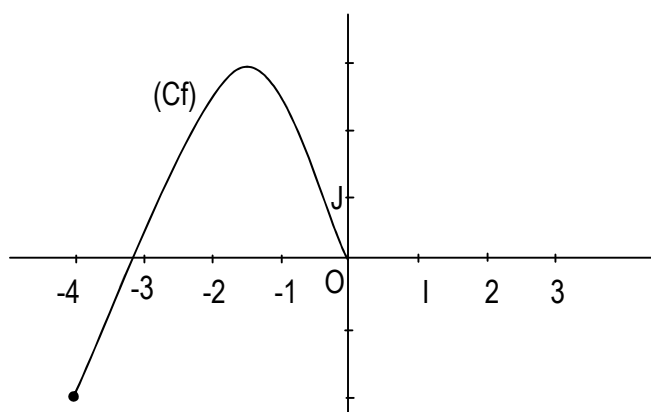
b) Propriétés

Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

- La représentation graphique d'une fonction f est symétrique par rapport à (OJ) si et seulement si la fonction f est paire.
- La représentation graphique d'une fonction f est symétrique par rapport à O si et seulement si la fonction f est impaire.

Exercice d'application

Les figures ci-dessous représentent une partie des représentations graphiques de deux fonctions f et g sur $[-4 ; 4]$. Sachant que f est paire et g impaire, tracer les courbes (Cf) et (Cg) sur $[-4 ; 4]$.



2- Éléments de symétrie de la représentation graphique d'une fonction

a) Centre de symétrie

Méthodes

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J) .

Pour démontrer que le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (C_f) on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1

- On détermine la fonction g définie par $g(x) = f(x + a) - b$
- On démontre que g est impaire
- Et on conclut que le point $\Omega(a;b)$ est centre de symétrie de (C_f) .

Méthode 2

- On vérifie que D_f est symétrique par rapport à a c'est-à-dire, pour tout nombre réel x , $(a - x) \in D_f \Leftrightarrow (a + x) \in D_f$
- Pour tout nombre réel x tel que : $(a - x) \in D_f$, on démontre que : $\frac{f(a - x) + f(a + x)}{2} = b$
- Et on conclut.

Exercice d'application

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$ et (C_g) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O; I; J)$. Montrer que le point $\Omega(-1; -4)$ est un centre de symétrie de (C_g) .

b) Axe de symétrie

Méthodes

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J) .

Pour démontrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de (C_f) on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1

- On détermine la fonction g définie par $g(x) = f(x + a)$
- On démontre que g est paire
- Et on conclut que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Méthode 2

- On vérifie que D_f est symétrique par rapport à a c'est-à-dire, pour tout nombre réel x , $(a - x) \in D_f \Leftrightarrow (a + x) \in D_f$
- Pour tout nombre réel x tel que : $(a - x) \in D_f$, on démontre que : $f(a - x) = f(a + x)$
- Et on conclut.

Exercice d'application

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x + 9$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; I ; J)$. Montrer que l'axe (Δ) d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie pour (C_f) .

3- Fonctions périodiques

Définition

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , D_f son ensemble de définition et T un nombre réel strictement positif.

On dit que la fonction f est périodique, de période T , lorsque : pour tout élément x de D_f ,
 $(x + T) \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$

Remarque

Lorsque f est une fonction périodique de période T et k un nombre entier naturel différent de zéro, le nombre réel kT est aussi une période de f .

Exercice d'application

Montrer que la fonction $f : x \rightarrow \cos x$ est périodique de période 2π .

On pose $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x) = x^2 - 4x + 3$ et $f(x) = x^2$, de représentation graphique respective (C_f) et (C_g) .

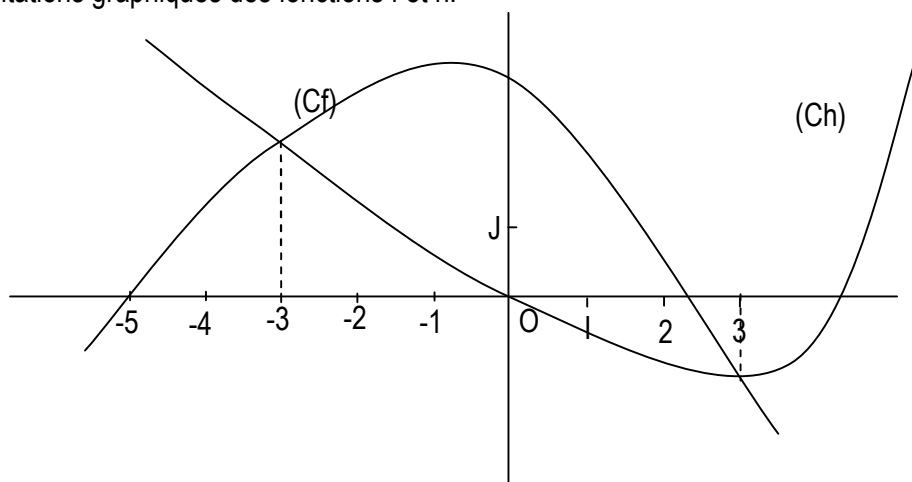
- 1) Vérifier que $g(x) = (x - 2)^2 - 1$
- 2) Exprimer $g(x)$ en fonction de f .
- 3) Préciser la transformation du plan permettant de construire (C_g) à partir de (C_f) .

Exercice 2

(C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques des fonctions f et h .

Résoudre graphiquement :

- a) $(E) : f(x) = h(x)$
- b) $(I_1) : f(x) \leq h(x)$



Exercice 3

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

- 1) Déterminer D_f et D_g , les ensembles de définition respectifs de f et g .
- 2) Déterminer les nombres réels a et b tels que $\forall x \in D_g, g(x) = \frac{b}{x-2} + a$.
- 3) Étudier la parité de f .
- 4) Soit (C_g) est la représentation graphique de g , montrer que (C_g) est l'image de (C_f) par une translation que l'on précisera.
- 5) Compléter le tableau de valeur suivant puis construire (C_f) sur $[-3 ; 3]$ dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)									

- 6) Construire (Cg).
 7) Démontrer que (Cg) admet le point A(2 ;2) comme centre de symétrie.

Exercice 4

Etudier la propriété de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = |x^3 + 1| ; \quad g(x) = \sqrt{x^4 + 2} ; \quad h(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} ; \quad m(x) = -x^3 + 6x .$$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 9x^2 - 30x + 24$ et (Cf) sa représentation graphique. Montrer que la droite (D) d'équation $x = \frac{5}{3}$ est un axe de symétrie pour (Cf).

Exercice 6

On considère la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x + 2}$. Démontrer que la représentation graphique de f admet comme axe de symétrie la droite (D) d'équation $x = 1$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et (Cf) sa représentation graphique.

- 1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 2) Montrer que le point $\Omega(-1; -2)$ est centre de symétrie de (Cf).

CHAPITRE VI : ETUDE DE FONCTIONS

1- Notion d'asymptote oblique

Définition

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit (Cf) la représentation graphique d'une fonction f. (D) la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

La droite (D) est une asymptote oblique à la courbe (Cf) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) signifie que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ (respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est-elle asymptote oblique à la représentation graphique (Cf) de f en $-\infty$? en $+\infty$?

a) $f(x) = -x + 2 + \frac{x}{x+2}$

b) $f(x) = -x + 2 + \frac{x}{x^2 + 3}$

2- Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on pourra suivre le plan suivant :

- Ensemble de définition
- Ensemble d'étude (dans le cas des fonctions paires ou impaires)
- Les limites et asymptotes éventuelles
- Dérivées et sens de variation
- Représentation graphique
- Eléments de symétrie

Exercice d'application

Etudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$g(x) = \cos x$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$k(x) = \tan x$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit les fonctions : $f : x \mapsto x^3 - x$ définie sur \mathbb{R} ; $g : x \mapsto \frac{-9x}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

- 1) a- Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.
b- Etudier la parité de f.
c- Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 2) a- Mettre $g(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-1}$; a et b étant des constantes que l'on calculera.
b- Etudier la limite de g quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$ et 1.
c- Etudier les variations de g.
- 3) a- Soit le polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$. Montrer que -2 est un zéro de P.
b- Trouver un polynôme Q tel que pour tout réel x: $P(x) = (x+2)Q(x)$
c- En déduire les points d'intersections des courbes (Cf) et (Cg) représentant les fonctions f et g.
- 4) a- Construire dans un même repère, les courbes (Cf) et (Cg)
b- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

On désigne par D_f l'ensemble de définition de f et par (C_f) sa représentation graphique.

- 1) a- Etudier le sens de variation de f .
b- Préciser l'asymptote verticale à (C_f) .
c- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 4$ est asymptote oblique à (C_f) .
d- Construire (C_f) .
- 2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes à (C_f) est un centre de symétrie pour (C_f) .

Exercice 3

PARTIE I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. L'unité est le centimètre. On considère la fonction polynôme U de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $u(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $u(x) = 0$.
- 2) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE II

Soit la fonction rationnelle h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $h(x) = \frac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ et de représentation graphique (Ch) .

- 1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h sous forme de réunion d'intervalles.
b- Calculer les limites aux bornes de D_h .
c- Justifier que la courbe (Ch) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.
- 2) a- Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x élément de D_h ; $h(x) = ax + b + \frac{c}{2 - x}$.
b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x - 1$ est une asymptote oblique à (Ch) .
- 3) a- Montrer que pour tout x élément de D_h , $h'(x) = \frac{U(x)}{(2 - x)^2}$.
b- Déduire de la partie I, le sens de variation de h .
c- Dresser le tableau de variation de h sur D_h .
- 4) Etudier la position relative de (Ch) et (D) .
- 5) Démontrer que le point $E(2 ; -5)$ est un centre de symétrie pour (Ch) .
- 6) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Ch) au point d'abscisse 0.
- 7) Construire (Ch) .

CHAPITRE VII : DENOMBREMENT

I. DENOMBREMENT DE PARTIES D'ENSEMBLES FINIS

- 1- Définition
- 2- Propriété

II. DENOMBREMENT DE LISTES

- 1- Produit cartésien de deux ensembles finis
 - a) Définition
 - b) Propriété
- 2- Produit cartésien de p ensembles finis
 - a) Définition
 - b) Propriété

III. DENOMBREMENT D'ARRANGEMENT ET DE PERMUTATION

- 1- Arrangement
 - a) Définition
 - b) Propriété
- 2- Permutation
 - a) Définition
 - b) Propriétés

IV. DENOMBREMENT DE COMBINAISON

- 1- Définition
- 2- Propriété

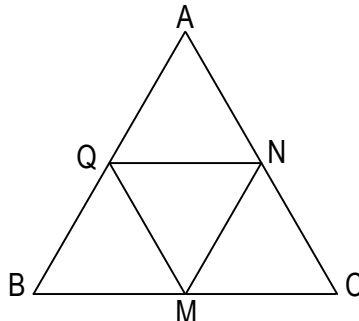
CHAPITRE VII : DENOMBREMENT

I. DENOMBREMENT DE PARTIES D'ENSEMBLES FINIS

Dénombrer, c'est compter.

Activité 1

En utilisant les points de la figure ci-dessous, déterminer le nombre de triangles possibles.

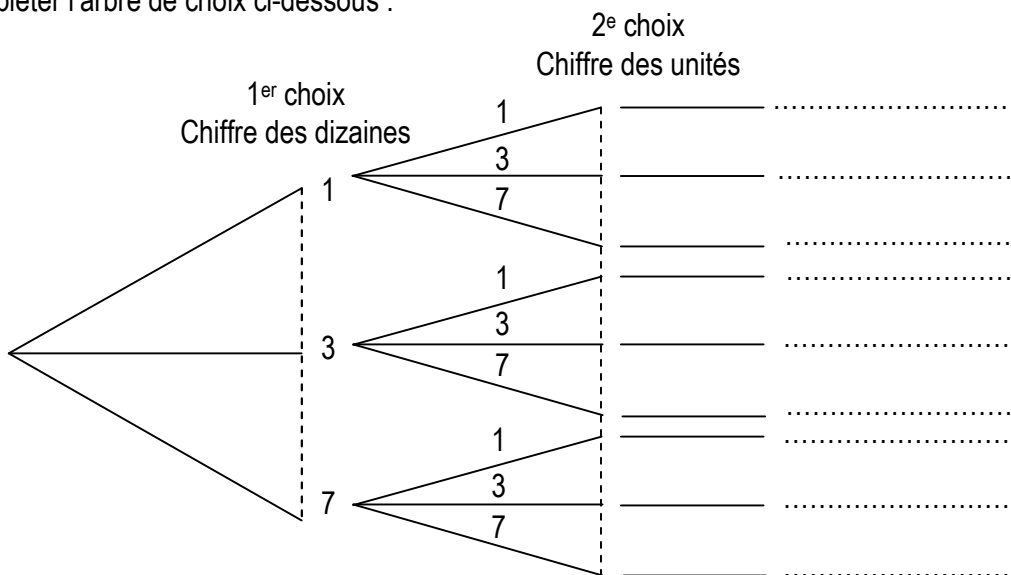


AQN, AQM, AQC, ABC, ABM, ABN, AMC, AMN, BMQ, BQC, BQN, BNM, BNC, CNM, CQN, CQM, MQN.
Il y a 17 triangles. La méthode utilisée est le **comptage**.

Activité 2

On désire former les nombres de deux chiffres avec les chiffres 1 ; 3 et 7. On désigne par M l'ensemble de ces nombres.

a) Compléter l'arbre de choix ci-dessous :



b) Il y a au total 9 nombres de deux chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 3 et 7. Le nombre d'éléments de l'ensemble M est appelé **cardinal** de M.

1- Définition

On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E, le nombre d'éléments de cet ensemble.

On le note : $\text{Card}(E)$ et on lit « cardinal de E ».

Remarque :

$\text{Card}(\Phi) = 0$ où Φ est l'ensemble vide.

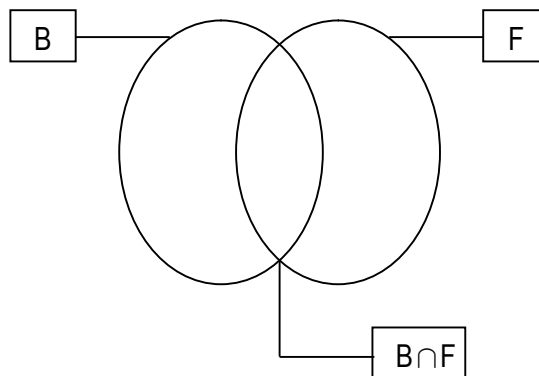
Activité 3

Dans une classe de 40 élèves tous les élèves pratiquent au moins l'un des deux sports proposés : Le basket et le football.

- 24 pratiquent le basket
- 26 pratiquent le football
- 10 pratiquent les deux sports

On désigne par B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket et F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football.

Compléter le diagramme suivant :



- 1) Déterminer le nombre d'élèves pratiquant uniquement le basket et ceux qui pratiquent uniquement le football.
- 2) a- Que représente l'ensemble $B \cup F$?
L'ensemble $B \cup F$ est l'ensemble des élèves pratiquant au moins l'un des deux sports ou bien l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket ou le football.
b- Déterminer $\text{Card}(B \cup F)$?
c- Calculer $\text{Card}(B) + \text{Card}(F) - \text{Card}(B \cap F)$.
d- comparer les deux résultats précédents.

Propriété

A et B étant deux parties non vides d'un ensemble fini.

On a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Activité 4

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Une fois immobilisés au sol, on lit les numéros des faces supérieures et on note la somme.

- 1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- 2) Donner le nombre de sommes paires.
- 3) Donner le nombre de sommes impaires.

		2 ^e dé					
		1	2	3	4	5	6
1 ^{er} dé	+						
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
6							

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Sur 1000 vélos sortant d'une usine, 100 ont au moins un défaut de chaîne, 80 ont au moins un défaut de guidon et 40 exactement les deux défauts.

- 1) Combien de vélos présentent au moins un des deux défauts ?
- 2) Combien de vélos présentent uniquement un défaut de guidon ?
- 3) Combien de vélos ne présentent aucun des deux défauts ?

Exercice 2

Klofié a 3 pantalons, 2 chemises et 2 paires de chaussures. Ses pantalons sont de couleurs respectives noire, bleue et grise. Ses chemises : blanche et rouge et ses paires de chaussures noire et marron. Trouver le nombre de façons différentes qu'a Klofié pour s'habiller (on pourra utiliser un arbre de choix).

Exercice 3

Le professeur de mathématiques choisi au hasard 3 élèves parmi 5 qui sont : GBAHI, KOFFI, ADAMA, TENIN et SAHOUA pour former une équipe de génie en herbe.

Combien d'équipe peut-il former ?

Exercice 4

Une urne contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On tire au hasard un jeton, on le remet dans l'urne et on retire au hasard un jeton. A l'aide d'un tableau à double entrée, dénombrer tous les résultats possibles.

Exercice 5

Un laboratoire veut tester l'efficacité d'un vaccin sur des souris. Certaines ont été vaccinées, d'autres pas. Toutes ont reçu le virus de la maladie considérée. Certaines ont développées la maladie, d'autres pas. Voici les informations :

- L'expérience est faite sur 160 souris au total.
- 90 souris ont été vaccinées
- 121 souris ont développé la maladie et parmi celles-ci 63 avaient été vaccinées

- 1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Souris ayant développée la maladie	Souris n'ayant pas développée la maladie	Total
Souris vaccinées			
Souris non vaccinées			
Total			

- 2) En arrondissant chaque résultat à l'entier le plus proche, calculé le pourcentage :
 - a- De souris ayant développées la maladie, parmi celles qui n'ont pas été vaccinées.
 - b- De souris ayant développées la maladie, parmi celles qui ont été vaccinées.
- 3) Que peut-on penser de l'efficacité de ce vaccin ?

Exercice 6

Une station de radio diffuse les mêmes publicités à 15 heures et à 16 heures. D'après un sondage, on estime qu'il y a 21400 auditeurs à 15 heures et 24800 à 16 heures.

Déterminer le nombre d'auditeurs ayant entendu ces publicités.

- a) Si les personnes qui écoutent la radio à 15 heures ne l'écoute plus à 16 heures.
- b) Si 4600 personnes écoutent la radio à 15 heures et à 16 heures.

II. DENOMBREMENT DE LISTES

1- Produit cartésien de deux ensembles finis

a) Définition

A et B étant deux ensembles finis non vides, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples dont le premier terme est élément de A et le second terme est élément de B.

On le note : $A \times B$ et On lit : « A croix B »

Exemple :

Le code d'ouverture d'un coffre fort est un couple composé d'un des chiffres 1 et 2 suivis des lettres a, b et c.

Soit E l'ensemble des chiffres et F l'ensemble des lettres.

L'ensemble des codes est représenté par le produit cartésien $E \times F$.

Représentons le produit cartésien $E \times F$ par le tableau ci-dessous.

E \ F	a	b	c
1	(1,a)	(1,b)	(1,c)
2	(2,a)	(2,b)	(2,c)

Ce tableau comporte 2 lignes et 3 colonnes soit au total 2×3 cases contenant chacune un élément de $E \times F$.

b) Propriété

A et B étant des ensembles finis non vides, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

Remarque

Lorsque $A \neq B$; on a $A \times B \neq B \times A$

2- Produit cartésien de P ensembles finis

a) Définition

Soit $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$; p ensembles finis non vides.

$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_p$ est appelé produit cartésien des ensembles finis $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$.

Un élément de ce produit cartésien est appelé p-liste ou p-uplet et est de la forme $a_1 a_2 a_3 \dots a_p$ ou

$(a_1; a_2; a_3; \dots; a_p)$ avec $a_1 \in E_1; a_2 \in E_2; a_3 \in E_3; \dots; a_p \in E_p$

En particulier : une 2-liste est un couple ; une 3-liste est un triplet.

b) Propriété

$E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ étant des ensembles finis non vides,

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$$

Remarque :

E étant un ensemble de n éléments, le produit cartésien $E \times E \times E \times \dots \times E$ (p ensembles égaux à E) est noté E^p on a donc : $\text{Card}(E^p) = n^p$

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p .

Exercice d'application

Une société de téléphonie mobile utilise les chiffres du système décimal pour proposer des numéros de 8 chiffres. Combien y a-t-il de numéros possibles?

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Un mot étant une suite de lettres ayant un sens ou non, combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les 6 voyelles de l'alphabet A, E, I, O, U et Y ?

Exercice 2

Une plaque d'immatriculation porte la lettre A suivie de 3 chiffres dont le 1^{er} est différent de 0. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Exercice 3

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement 3 boules, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 4

Pour ouvrir un coffre-fort, on doit composer un code secret de 4 chiffres sur un tableau informatique de 10 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

- 1) déterminer le nombre de codes possibles ?
- 2) combien y a-t-il de codes commençant par 2 ?
- 3) combien y a-t-il de codes ne contenant pas 0 ?

III. DENOMBREMENT D'ARRANGEMENT ET DE PERMUTATION

Activité

Avec le mot HECTOR, on forme les mots de 3 lettres (mots ayant un sens ou non).

- 1) Combien de mots de 3 lettres distinctes deux à deux peut-on former ?
- 2) Combien de mots de 6 lettres distinctes deux à deux peut-on former ?

1- Dénombrement d'arrangements

a) Définition

E étant un ensemble non vide de n éléments, p un nombre entier naturel tel que : $p \leq n$, on appelle arrangement de p éléments de E, toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

On dit aussi p-arrangement d'élément de E.

b) Propriété

Soit n et p des nombres entiers naturels tels que : $1 < p \leq n$. E un ensemble de n éléments.

Le nombre de p-arrangements d'éléments de E est : $n(n-1)(n-2)\dots(n-(p+1))$ et est noté A_n^p

On a ainsi : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-(p+1))$

Par convention $A_n^1 = n$ et $A_n^0 = 1$

Exercice d'application

8 sprinteurs prennent part à la finale de 100 mètres lors des jeux olympiques. Un podium est constitué des 3 premiers. Déterminer le nombre de podiums possibles en supposant qu'il n'y a pas d'ex aequo.

2- Permutations

a) Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

b) Propriétés

Propriété 1

E étant un ensemble non vide de n éléments, le nombre de permutations des éléments de E est $n!$

Et on lit « factorielle n ». On a : $n! = A_n^n = \underbrace{n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1}_{n \text{ facteurs}}$

Par convention : $0! = 1$

Propriété 2

n et p étant des nombres entiers naturels tels que : $1 < p \leq n$.

On a : $n! = n(n-1)!$ $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exercice d'application

5 élèves sont candidats à l'élection du bureau de la coopérative du Lycée. Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire, d'un secrétaire adjoint, d'un trésorier et d'un commissaire aux comptes. Combien de bureaux peut-on former sachant qu'il n'y a pas de cumul de poste ?

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On dispose de 5 cartons portant respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres à l'aide de ces cartons.

Exercice 2

Une urne contient cinq boules indiscernables aux touches numérotées 1, 2, 3, 4 et 5.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne et on note le nombre obtenu en alignant dans l'ordre les 3 boules tirées.

- 1) Détermine le nombre de résultats possibles.
- 2) A l'aide d'un arbre de choix, détermine le total des nombres commençant par le chiffre 3.
- 3) Combien obtient-on de nombres commençant par le chiffre 3 et contenant le nombre 5 ? cite ces nombres.

Exercice 3

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres à taper dans un certain ordre sur un tableau informatique de dix chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.

- 1) Combien de cartes magnétiques la banque peut elle distribuer à ses clients ?
- 2) On suppose pour la suite qu'aucun chiffre ne doit être répété dans la composition du code secret.
 - a- Détermine le nombre de cartes magnétiques que la banque peut distribuer à ses clients.
 - b- Détermine le nombre de cartes magnétiques possibles que la banque peut distribuer à ses clients si le code secret ne comporte que des chiffres pairs.
 - c- Déterminer le nombre de cartes magnétiques que la banque peut distribuer à ses clients si le code secret contient au plus 2 chiffres pairs.

IV. DENOMBREMENT DE COMBINAISONS

Activité

Le professeur de MATHÉMATIQUES choisit au hasard 3 élèves parmi 5 qui sont : GBAHI, WALTER, REINE, NICOLE et AGNES pour former une équipe de génie en herbe.

- 1) Citer les différentes équipes qu'il peut former et préciser le nombre.
- 2) Pour éviter un choix par complaisance, il organise un concours pour retenir les trois premiers.
 - a) Quel est le nombre de résultats possibles ?

- b) Quel est le nombre de résultats conduisant à la formation de l'équipe constituée de NICOLE, GBAHI et REINE.
 c) Dédurre des questions 2a et 2b le nombre d'équipes possibles.

1- Définition

E étant un ensemble non vide de n éléments, p un nombre entier naturel tel que : $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments. On dit aussi p-combinaison d'éléments de E.

2- Propriété

n et p étant des nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$. E un ensemble de n éléments.

Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est : $\frac{A_n^p}{p!}$

Notation : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Remarque

n et p étant des nombres naturels tels que : $p \leq n$, on démontre, mais nous admettons que : $C_n^n = 1$;

$$C_n^1 = n ; \quad C_n^{n-p} = C_n^p ; \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercice d'application

A l'oral d'un examen un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.
 Combien a-t-il de choix possibles de ces 8 questions ?

Tableau récapitulatif

Pour déterminer le nombre de tirages de P éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$). On peut utiliser le tableau suivant :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	Oui	Non	p-uplets de E	n^p
Tirages successifs sans remise	Oui	Oui	Arrangements de p éléments de E	A_n^p
Tirages simultanés	Non	Oui	Combinaisons de p éléments de E	C_n^p

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Une classe de 1^{ère} D est composée de 13 filles et 37 garçons.

Une délégation de 7 élèves de cette classe doit rencontrer le proviseur.

- 1) Combien y a-t-il de possibilités pour former cette délégation ?
- 2) Combien y a-t-il de possibilité si la délégation comporte 3 filles et 4 garçons ?
- 3) Dans cette classe, le professeur d'EPS veut constituer une équipe de football de 11garçons ou 11 filles. Combien d'équipes possibles peut-il constituer ?

Exercice 2

Un jury est composé de six membres pris dans une liste comportant dix hommes et sept femmes. Combien peut-on former de jurys comprenant :

- a) Seulement des hommes ?
- b) Quatre hommes et deux femmes ?
- c) Au plus deux femmes ?
- d) Au moins une femme ?

Exercice 3

Une urne contient 13 boules dont six blanches, quatre rouges et trois noires. Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

- A) On tire trois boules, l'une après l'autre sans remise et on observe les couleurs.
 - 1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - 2) Déterminer le nombre de tirages composés de boules de mêmes couleurs.
 - 3) Déterminer le nombre de tirages composés de boules de couleurs toutes différentes.
 - 4) Quel est le nombre de tirages composés de deux couleurs seulement ?

- B) On reprend l'expérience avec les mêmes boules de l'urne en tirant les trois boules simultanément.
 - 1) Combien de tirages possibles peut-on effectuer ?
 - 2) Parmi ces tirages, combien sont :
 - a) Composés de boules de même couleur ?
 - b) Composés de boules de couleurs toutes différentes ?
 - c) Composés de deux couleurs seulement ?

CHAPITRE VIII : TRIGONOMETRIE

I. MESURES D'UN ANGLE ORIENTE

- 1- Angles orientés
 - a) Représentant d'un angle orienté
 - b) Somme et différence d'angles orientés
- 2- Mesures d'un angle orienté.
- 3- Détermination de la mesure principale d'un angle orienté.
 - a) Première Méthode
 - b) Deuxième Méthode

II. FONCTIONS COSINUS, SINUS, TANGENTE

- 1- Cosinus, sinus, tangente d'un angle orienté
 - a) Définition
 - b) Propriété
- 2- Formules trigonométriques
 - a) Formules d'addition
 - b) Formules de duplication – formules de linéarisation.
- 3- Représentation graphique des fonctions cosinus, sinus et tangente.

III. RESOLUTION D'EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

- 1- Equations du type : $\cos x = a$; $\sin x = b$ et $\tan x = c$
 - a) Equation du type : $\cos x = a$
 - b) Equation du type : $\sin x = b$
 - c) Equation du type : $\tan x = c$
- 2- Equation du type : $a \cos x + b \sin x = c$
- 3- Résolution d'inéquations

CHAPITRE VIII : TRIGONOMETRIE

I. MESURES D'UN ANGLE ORIENTÉ

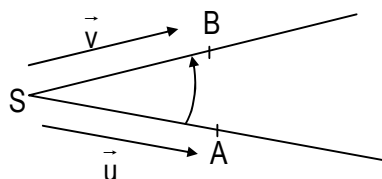
1- Angles orientés

a) Représentant d'un angle orienté

\vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs non nuls. S, A et B des points tels que : $\vec{SA} = \vec{u}$ et $\vec{SB} = \vec{v}$.

Le couple de demi-droite $([SA), [SB))$ de même origine S est un représentant de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$.

S est le sommet, [SA) le côté origine et [SB) le côté extrémité de ce représentant.



Notation

Tout angle orienté de mesure principale α est noté $\hat{\alpha}$

b) Somme et différence d'angles orientés

Définition

$(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ sont des angles orientés ; $([OX), [OY))$ un représentant de $(\hat{\alpha})$; $([OY), [OZ))$ le représentant de $(\hat{\beta})$ de côté origine [OY).

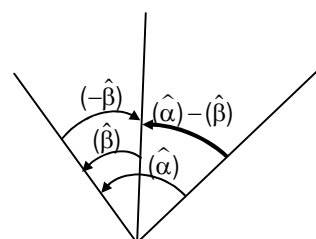
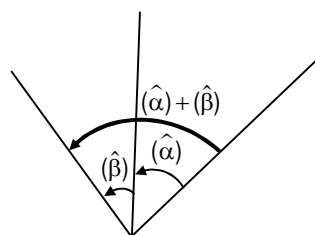
- On appelle somme des angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$, l'angle orienté $(\hat{\gamma})$ tel que : $(\hat{\gamma}) = (\widehat{OX, OZ})$

On note : $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta}) = (\hat{\gamma})$

Désignons par $(-\hat{\beta})$ l'opposé de l'angle orienté $(\hat{\beta})$.

- On appelle différence des angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$, l'angle orienté $(\hat{\alpha}) + (-\hat{\beta})$

On note : $(\hat{\alpha}) + (-\hat{\beta}) = (\hat{\alpha}) - (\hat{\beta})$.



De la définition, on déduit immédiatement l'égalité de Chasles.

Egalité de Chasles.

Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ; on a : $(\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) = (\widehat{u, w})$ ou encore $(\widehat{v, w}) = (\widehat{u, w}) - (\widehat{u, v})$

Exemples

$(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ sont deux angles orientés de mesures principales respectives α et β .

Dans chacun des cas suivants, construire un représentant de l'angle orienté $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

Donner $\text{Mes}((\hat{\alpha}) + (\hat{\beta}))$ et comparer à $\alpha + \beta$

(1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$

(2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\beta = \frac{3\pi}{4}$

Remarque

La mesure principale de la somme de deux angles orientés n'est pas toujours égale à la somme des mesures principales de ces angles orientés.

2- Mesures d'un angle orienté

Approche de la notion

Activité

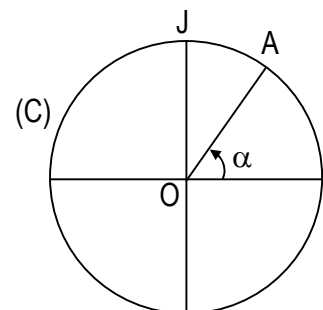
Soit $(\hat{\alpha})$ un angle orienté de mesure principale α et d'image A sur le cercle trigonométrique (C).

Considérons un point mobile M qui partant de I, se déplace sur le cercle trigonométrique (C).

A chaque déplacement de M, on associe un nombre réel égal à :

- La distance parcourue si le déplacement de M se fait dans le sens direct.
- L'opposé de la distance parcourue si le déplacement de M se fait dans le sens indirect.

Déterminer les nombres réels associés aux différents passages de M en A et compléter le tableau ci-dessous.



	Nombres réels associés	
	Sens direct	Sens indirect
1 ^{er} passage	α	$\alpha - 2\pi$
2 ^e passage	$\alpha + 2\pi$	$\alpha - 4\pi$
3 ^e passage	$\alpha + 4\pi$	$\alpha - 6\pi$
4 ^e passage	$\alpha + 6\pi$	$\alpha - 8\pi$

On montre ainsi que :

A tout angle orienté $(\hat{\alpha})$ de mesure principale α on peut associer une infinité de nombres réels :

$$\alpha - 8\pi ; \alpha - 6\pi ; \alpha - 4\pi ; \alpha - 2\pi ; \alpha + 2\pi ; \alpha + 4\pi ; \alpha + 6\pi$$

Ces nombres sont de la forme : $\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On remarque que, un seul d'entre eux, α est élément de l'intervalle $]-\pi; \pi]$. C'est pourquoi α est appelé la mesure principale de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

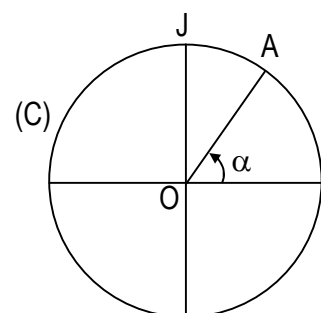
Définition

$(\hat{\alpha})$ est un angle orienté de mesure principale α .

Tout nombre réel de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) est appelé une mesure de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

Sur le cercle trigonométrique, l'image de α est appelé image de chacun des nombres réels

$\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; C'est aussi l'image de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$



Exemple

- $\frac{11\pi}{5}$; $-\frac{19\pi}{5}$; $-\frac{9\pi}{5}$ sont des mesures de l'angle orienté dont la mesure principale est $\frac{\pi}{5}$.
- -5π ; -3π ; $-\pi$; π ; 3π ; 11π ; 2009π sont des mesures de l'angle orienté dont la mesure principale est π .
- -6π ; -4π ; 0 ; 2π ; 8π ; 100π ; 2008π sont des mesures de l'angle orienté dont la mesure principale est 0 .

3- Détermination de la mesure principale associée à une mesure

a) Première méthode

Sachant que toute mesure x d'un angle orienté de mesure principale α avec $\alpha \in]-\pi; \pi]$ s'écrit :

$x = \alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), déterminer α consiste à :

- Ecrire $\alpha = x - k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- Déterminer k à l'aide des inégalités : $-\pi < x - k \cdot 2\pi \leq \pi$
- En déduire α en utilisant l'égalité $\alpha = x - k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Exemple :

On donne $x = \frac{97\pi}{4}$. Déterminons la mesure principale α de x .

b) deuxième méthode

Pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est x , on peut effectuer la division euclidienne de $|x|$ par 2π .

Exemple

Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est :

$$x = \frac{97\pi}{4}$$

$$x = \frac{335\pi}{3}$$

$$x = -\frac{106\pi}{5}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le plan est muni du repère (O, I, J) et B un point du cercle trigonométrique (C) .

- 1) Construire les points C, D, E, F du cercle (C) tels que :

$$\text{Mes}(\widehat{OB, OC}) = \frac{\pi}{3} ; \text{Mes}(\widehat{OB, OD}) = \frac{3\pi}{4} ; \text{Mes}(\widehat{OB, OE}) = \frac{7\pi}{6} ; \text{Mes}(\widehat{OB, OF}) = -\frac{3\pi}{4}.$$

- 2) Déterminer une mesure de chacun des angles

$$(\widehat{OC, OE}) ; (\widehat{OD, OF}) ; (\widehat{OE, OB}) ; (\widehat{OB, OC}) \text{ et } (\widehat{OF, OE}).$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale et une autre mesure de l'angle orienté dont une mesure est x et placer son point image sur le cercle trigonométrique :

a) $x = \frac{88\pi}{9}$

b) $x = -13\pi$

c) $x = 2008\pi$

d) $x = \frac{-356\pi}{7}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, vérifier que x et y sont des mesures du même angle orienté.

a) $x = \frac{65\pi}{3}$ et $y = \frac{101\pi}{3}$;

b) $x = \frac{-2\pi}{5}$ et $y = \frac{48\pi}{5}$;

c) $x = 31\pi$ et $y = -17\pi$

II. FONCTIONS COSINUS ; SINUS ; TANGENTE

1- Cosinus ; sinus ; tangente d'un angle orienté

a) Définition

x est un nombre réel et α la mesure principale de l'angle orienté dont x est une mesure.

- On appelle cosinus de x , le nombre réel $\cos \alpha$ et sinus de x , le nombre réel $\sin \alpha$
- On appelle tangente de x le nombre réel $\tan \alpha$

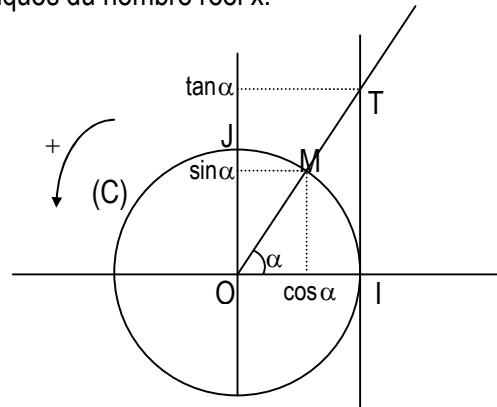
NB : $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sont les lignes trigonométriques du nombre réel x .

On note :
 $\cos x = \cos \alpha$
 $\sin x = \sin \alpha$
 $\tan x = \tan \alpha$

On a :
 $M(\cos x ; \sin \alpha)$
 $T(1 ; \tan \alpha)$

Condition d'existence de $\tan x$

$\tan x$ est un nombre réel $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



b) Propriétés

Propriété 1

- Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif k

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

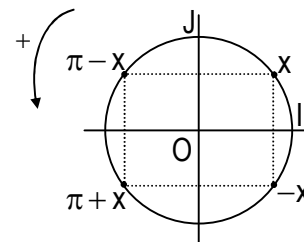
- Pour tout nombre réel x qui n'annule pas $\cos x$ et pour tout nombre entier relatif k

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

Propriété 2

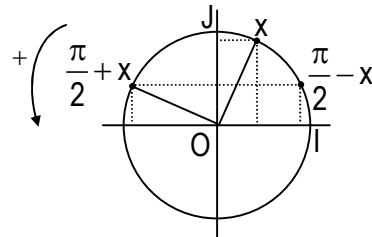
Pour tout nombre réel x

- $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$



Pour tout nombre réel x

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



Exercice d'application

- a) Démontrer que pour tout nombre réel x on a :

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

- b) Exprimer en fonction de $\cos x$:

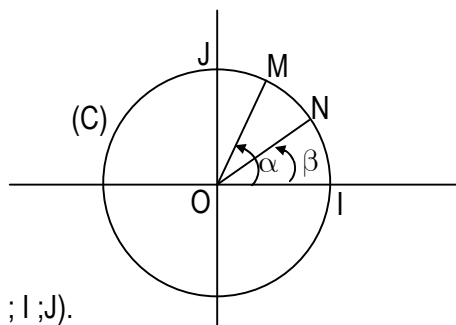
$$B = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$$

2- Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Activité

Soit la figure ci-contre.



1. Trouver les coordonnées de \vec{OM} et \vec{ON} dans le repère $(O ; I ; J)$.
2. Justifier que $\text{mes}(\widehat{OM, ON}) = \beta - \alpha$
3. a) Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$
b) En déduire l'expression de $\cos(\beta - \alpha)$ en fonction des lignes trigonométriques de α et β
4. En utilisant l'expression de 3.b) en déduire celle de $\cos(\beta + \alpha)$
5. a) Trouver l'expression de $\sin(\beta + \alpha)$, en tenant compte de l'égalité :

$$\sin(\beta + \alpha) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]$$
 b) En déduire l'expression de $\sin(\beta - \alpha)$.

Propriété

Pour tous nombres réels a et b.

- | | |
|---|---|
| (1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ | (3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ |
| (2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ | (4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ |

Exercice d'application

On pose $A = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos x$ et $B = \sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x$.

- 1) Démontrer que $A = 0$
- 2) Simplifier B.
- 3) a) Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
b) calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) Formules de duplication, formules de linéarisation

Activité

- 1) Sachant que $a + a = 2a$; calculer $\cos 2a$
- 2) En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, démontrer que :
 $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.
- 3) Exprimer $\sin 2a$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$.

Propriété

Pour tout nombre réel a on a :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ | (3) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ |
| (2) $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ | (4) $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ |

Exercice d'application

Sachant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Comparer les résultats obtenus avec les résultats de la question 3 de l'exercice précédent.

3- Représentations graphiques des fonctions cosinus, sinus et tangente.

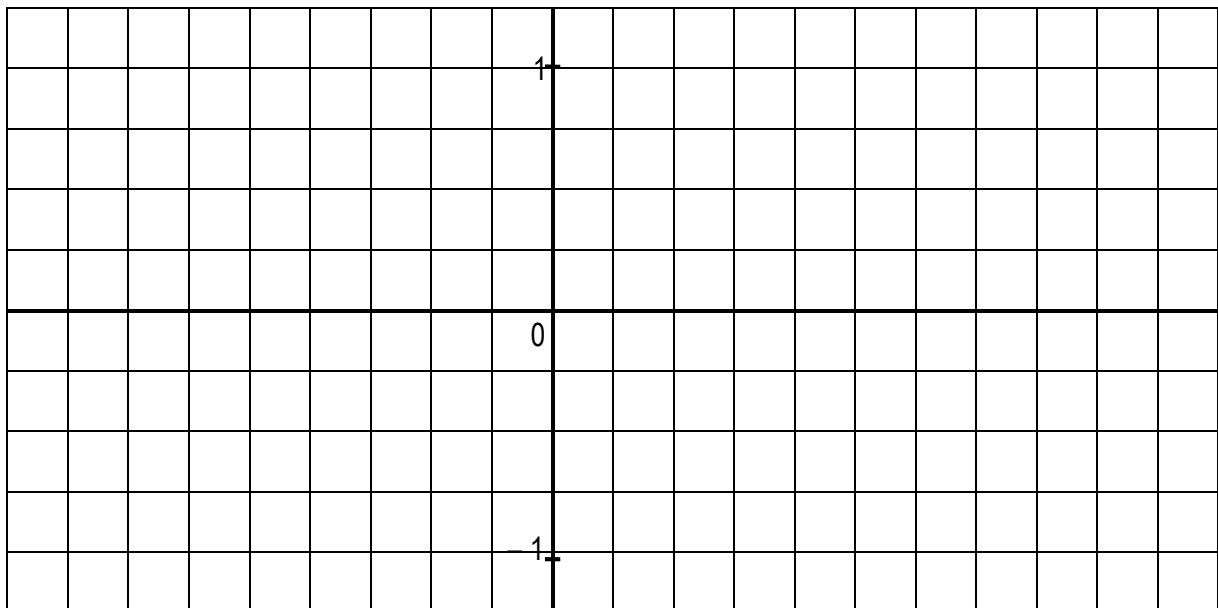
Activité

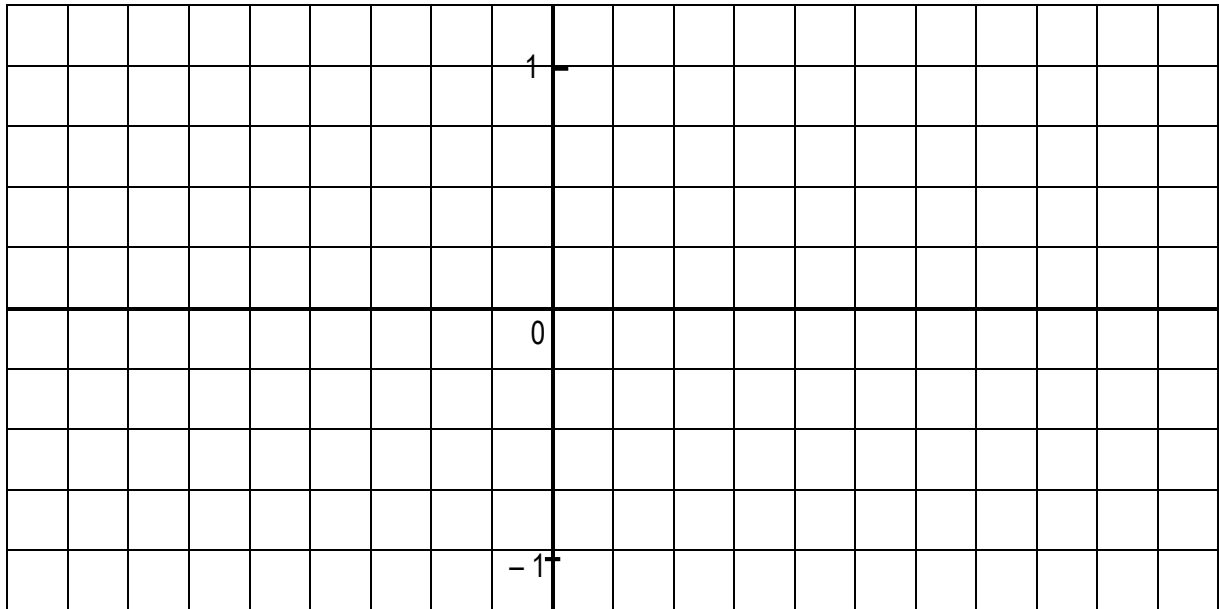
a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
cos x								
sin x								

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x									
sin x									

- b) Tracer dans les repères ci-dessous les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur $[-\pi; \pi]$.
- c) Les fonctions sinus et cosinus étant périodique de période 2π , en déduire les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sur $[-2\pi; 2\pi]$.





EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les nombres suivants :

1) $A = 2 \cos x + 3 \cos(\pi + x) + 5 \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$; $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5 \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin(\pi - x)$

2) $C = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 2 \sin(3\pi - x) + 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$;

$D = 3 \cos(-x + \pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$

Exercice 2

Démontrer que pour tout nombre réel x :

a) $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; b) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Exercice 3

1) En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

Exercice 4

On pose $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$

Calcule $A + B$ et $A - B$. En déduire A et B .

III. RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1- Equations du type : $\cos x = a$; $\sin x = b$ et $\tan x = c$

a) Equations du type : $\cos x = a$

Activité

On considère l'équation (E_1) dans \mathbb{R} : $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

1. Donner une solution de (E_1) .
2. Placer le point image de cette solution sur le cercle trigonométrique.
3. Citer des nombres réels solutions de (E_1) , autres que $\frac{\pi}{3}$ et représenter leurs points images sur le cercle trigonométrique.
4. Combien de points distincts du cercle trigonométrique sont images du nombre réel vérifiant (E_1) ?

Propriété

Pour tous nombres réels x et α on a :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$(E_2) : \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(E_3) : \cos x = -1,5$$

Réolvons l'équation (E_1)

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Les solutions de (E_1) sont les nombres réels x de la forme :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque

Pour résoudre l'équation : $\cos x = a$ on peut procéder comme suit :

- Si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $|a| \leq 1$
 - On recherche une solution particulière α ,
 - Toute solution de l'équation est de la forme : $\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $-\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exercice d'application

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(E_2) : \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$(E_3) : \cos x = -3$$

$$(E_4) : \cos x = -0,3$$

b) Equations du type : $\sin x = b$

Activité

On considère l'équation (E_2) dans \mathbb{R} : $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

1. Donner une solution de (E_2) et placer son point image sur le cercle trigonométrique.

2. Combien de points distincts du cercle trigonométrique sont images du nombre réel vérifiant (E_2) ?

Propriété

Pour tous nombres réels x et α on a :

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \quad (E_2) : \sin x = \frac{1}{2} \quad (E_3) : \cos x = -0,3 \quad (E_4) : \cos x = 2$$

Remarque

Pour résoudre l'équation : $\sin x = b$ on peut procéder comme suit :

- Si $|b| > 1$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $|b| \leq 1$
 - On recherche une solution particulière α ,
 - Toute solution de l'équation est de la forme : $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $\pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Exercice d'application

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (E_2) : \sin 3x = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \quad (E_3) : \sin x = 0,2 \quad (E_4) : \cos x = 4$$

c) Equations du type : $\tan x = c$

Activité

On considère l'équation (E) dans \mathbb{R} : $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

1. Donner une solution de (E) et placer son point image M sur le cercle trigonométrique.
2. Quelle est la forme de tout nombre réel solution de (E) et qui admet M pour point image ?

Propriété

Pour tous nombres réels x et α tels que $\tan x$ et $\tan \alpha$ sont définis on a :

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $(E_1) : \tan x = \sqrt{3}$

Remarque :

Pour tout nombre réel t , il existe un nombre réel $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan \alpha = t$

Exercice d'application

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes : $(E_1) : \tan x = -1$ $(E_2) : \tan x = -\sqrt{3}$

2- Résolution d'équations du type $a \cos x + b \sin x = c$

Exemples de résolution

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation : $(E_1) : \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$

On sait que $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } (E_1) &\Leftrightarrow \cos x + \tan \frac{\pi}{3} \sin x = 1 \\
&\Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin x = 1 \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_1) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation : $(E_2) : \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2$

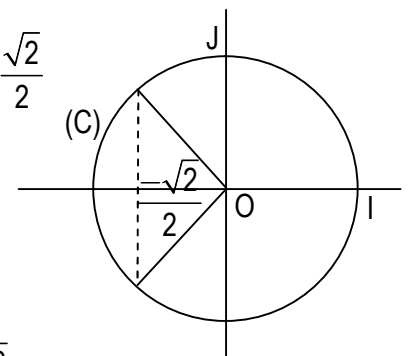
$$\begin{aligned}
(E_2) &\Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x \right) = 2 \\
&\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{Rédaction à continuer})
\end{aligned}$$

Exercice d'application

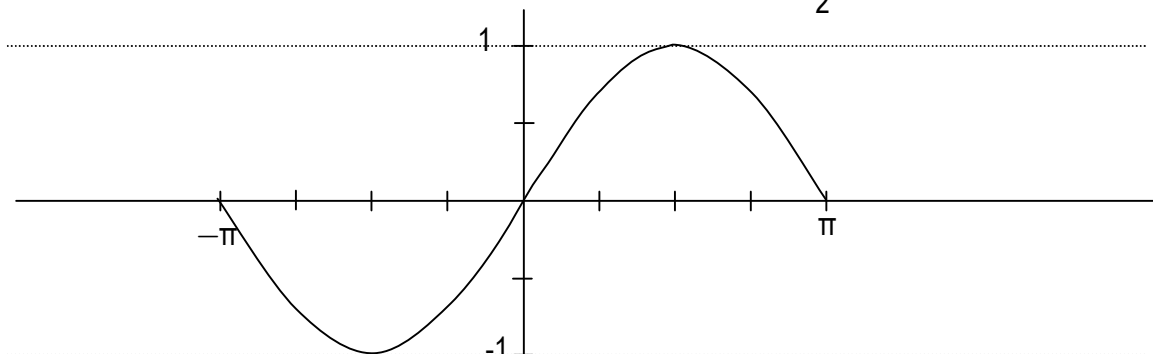
Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes : $(E_1) : \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$ $(E_2) : \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x = 1$

1- Résolution d'inéquations

Exemple 1 : Résoudre graphiquement dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Exemple 2 : Résoudre graphiquement dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(E_1) : \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 ;$$

$$(E_2) : \sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

$$(E_3) : 2 \cos^2 x - (2 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} = 0 ;$$

$$(E_4) : 2 \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$(E_5) : \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Exercice 2

1) Démontrer que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ (on remarquera que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$).

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 3

Résoudre l'équation suivante : $(E) : (\sqrt{2} - 1) \cos x + \sin x - 1 = 0$

Exercice 4

1) En utilisant le cercle trigonométrique résoudre graphiquement sur $[-\pi; \pi]$. $(I_1) : \cos x < \frac{1}{2}$;

$$(I_2) : \sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

2) En déduire dans $[-\pi; \pi]$ les solutions du système (S) $\left\{ \begin{array}{l} \cos x < \frac{1}{2} \\ \sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$

Exercice 5

1) a- construire la représentation graphique de la fonction cosinus sur $[-\pi; \pi]$.

b- Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions appartenant à $]-\pi; \pi]$ de l'équation :

$$\cos x \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

2) a- Construire la représentation graphique de la fonction sinus sur $[-\pi; \pi]$.

a- Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions appartenant à $]-\pi; \pi]$ de l'inéquation :

$$\sin x < \frac{1}{2}.$$

CHAPITRE IX: SUITES NUMERIQUES

I. GENERALITES

- 1- Définitions et notations
 - a) Définition
 - b) Notations et vocabulaire
- 2- Modes de détermination d'une suite numérique
 - a) Suite définie par une formule explicite
 - b) Suite définie par une formule de récurrence
- 3- Représentation graphique

II. SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

- 1- Suites arithmétiques
 - a) Définition
 - b) Propriété
 - c) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
- 2- Suites géométriques
 - a) Définition
 - b) Propriété
 - c) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

CHAPITRE IX: SUITES NUMERIQUES

I. GENERALITES

Activité 1

SERI a hérité de son père une parcelle de forêt qu'il décide de mettre en valeur en faisant un champ de cacao. La première année, il défriche deux hectares et, chacune des années suivantes, il défriche trois hectares de plus que l'année précédente.

- 1) Quelle est la superficie de sa plantation au bout de la :
 - a) Deuxième année
 - b) Troisième année ?
 - c) Quatrième année ?
- 2) Pour tout nombre entier naturel non nul n , on désigne par t_n la superficie de sa plantation à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.
 - a) Exprimer chacune des superficies t_2, t_3, t_4 et t_5 en fonction de la superficie précédente.
 - b) Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n .

1- Définition et notations

a) Définition

On appelle suite numérique toute fonction de \mathbb{N} (ou d'une partie de \mathbb{N}) vers \mathbb{R} .

b) Notations et vocabulaire

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto u(n)$

u est une suite numérique d'ensemble de définition E . On note cette suite $(u_n)_{n \in E}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la suite $(u_n)_{n \in E}$ est notée plus simplement (u_n) .

On note u_n l'image de n par u ; c'est le terme d'indice n . u_n est aussi appelé le terme général de la suite.

2- Modes de détermination d'une suite

Il y a deux procédés usuels pour définir une suite numérique.

a) Suite définie par une formule explicite

Une suite définie par une formule explicite est définie par une expression du type $u_n = f(n)$ (f est une fonction numérique à variable réelle) permettant de calculer u_n en fonction de n .

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n-1}{n^2+2}$. Calculer u_0, u_2 et u_{20}

b) Suite définie par une formule de récurrence

On peut définir une suite numérique par la donnée :

- De son premier terme défini par sa valeur numérique et son indice
- D'une formule explicitant le calcul d'un terme à partir du terme précédent ou des termes précédents.

Exemples

(1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 5 \end{cases}$$
. Calculer w_1, w_2 et w_4 .

(2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} v_1 = 6 \\ v_{n+1} = -2v_n \end{cases}$. Calculer v_2 , v_3 et v_5 .

3- Représentation graphique

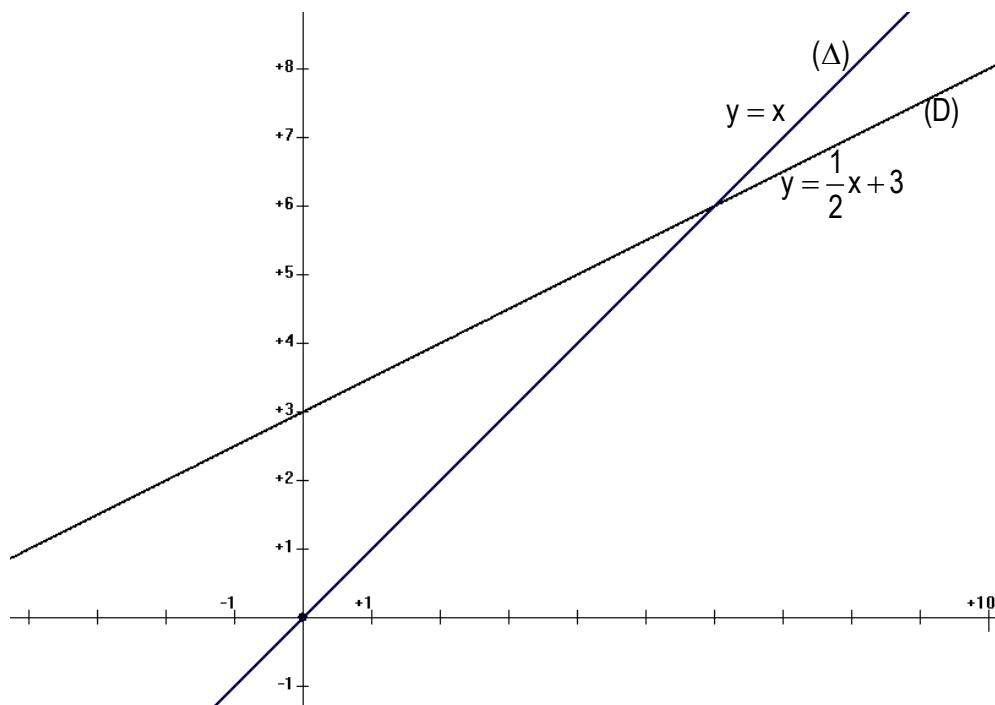
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Exemple 1

Soit (D) la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

Représenter sur l'axe (OI) les termes $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_4 à l'aide de (D) et de (Δ) .

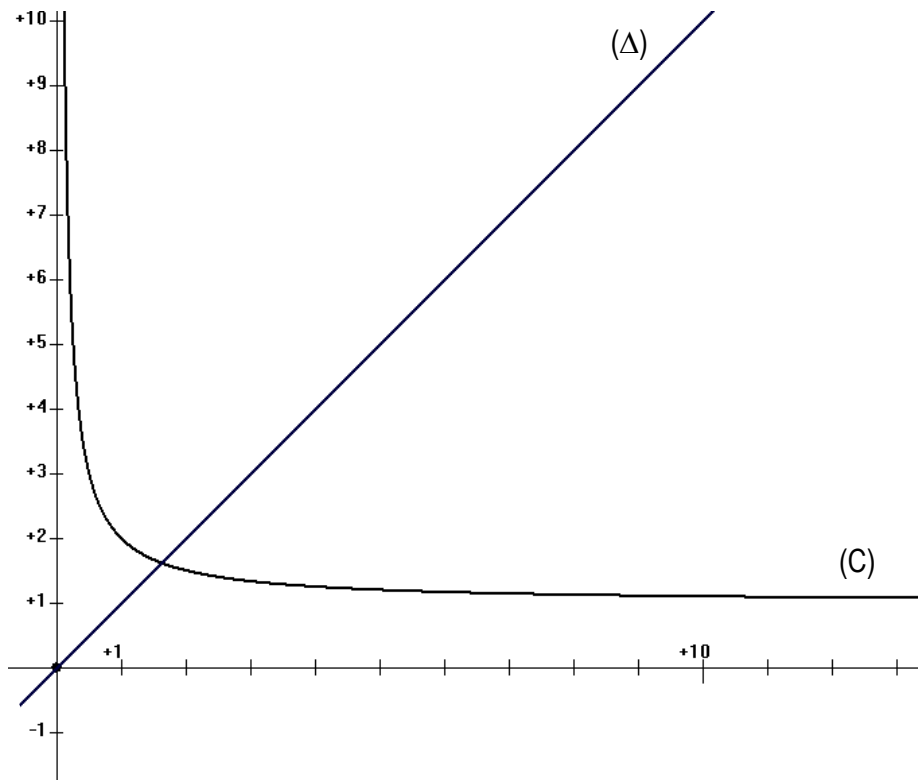


Exemple 2

Soit (C) la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \end{cases}$.

Représenter sur l'axe (OI) les termes $v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3$ et v_4 à l'aide de (C) et de (Δ) .



II. SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

1- Suites arithmétiques

Activité 2

On considère la suite (t_n) où t_n est la superficie de la population de M. SERI (voir activité 1) à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Donner la formule de récurrence de cette suite.
2. a) Exprimer t_2 , t_3 et t_4 en fonction de t_1
 - b) Conjecturer l'expression de t_n en fonction de t_1 et n .
 - c) Exprimer t_n en fonction de t_2 puis en fonction de t_3
 - d) Conjecturer une relation entre t_n et t_k avec $k \leq n$.

a) Définition

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

(u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout n élément de E ,

On a : $u_{n+1} = u_n + r$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite (u_n)

Exemple : la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} t_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*; t_{n+1} = t_n + 3 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2.

b) Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Pour tout nombre entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$.

Remarque

On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels n et k , on a :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

En particulier, si (u_n) a pour premier terme u_1 , le terme général est : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Exercice d'application

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2}{3}n + 3$.

Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 2

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_8 = -5$ et $u_{15} = 37$.

Déterminer la raison et le premier de cette suite.

Exercice 3

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison 5. On donne $u_{10} = 12$. Calculer u_6 et u_{25}

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{E}}$ une suite arithmétique.

La somme de termes consécutifs de cette suite arithmétique est égale :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}}{2}$$

$$\text{Autrement : } u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Exercice d'application

1. Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.
2. Déterminer la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2, dont le troisième terme est -1 .

2- Suites géométriques

Activité

ZADI ouvre un compte d'épargne (compte bloqué) à la CECP le 1^{er} mars 2000, pour sa fille en vue d'assurer ses études universitaires futures. Il dépose initialement un montant de 100 000 F CFA. La CECP verse sur le compte des intérêts égaux à 4% des sommes restées immobilisées douze mois.

1. Calculer l'avoir de sa fille le 1^{er} mars 2001 puis le 1^{er} mars 2002.
2. On désigne par v_0 le dépôt initial et par v_n l'avoir de sa fille après n années.
 - a) Exprimer v_1 en fonction de v_0 , puis v_2 en fonction de v_1 et v_3 en fonction de v_2 .
 - b) Conjecturer une relation entre v_{n+1} et v_n .
3.
 - a) Exprimer v_2 en fonction de v_0 puis v_3 en fonction de v_0
 - b) Conjecturer une relation entre v_n et v_0 .
 - c) Exprimer v_n en fonction de v_3 .
 - d) Conjecturer une relation entre v_n et v_k avec $k \leq n$.

a) Définition

Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

(v_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout n élément de E ,

On a : $v_{n+1} = qv_n$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite (v_n)

Exemple : la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 100000 \\ v_{n+1} = 1,04v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme v_0 .

b) Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q .

Pour tout nombre entier naturel n , on a : $v_n = v_0 \times q^n$.

Remarque

On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels n et k , on a : $v_n = v_k \times q^{(n-k)}$

En particulier, si (v_n) a pour premier terme v_1 , le terme général est : $v_n = v_1 \times q^{(n-1)}$.

Exercice d'application

Exercice 1

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = -5 \times 4^n$

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 2

Déterminer la raison d'une suite géométrique dont le 3^e terme est 729 et le 8^e terme est 3.

Quel est le 1^{er} terme de cette suite ?

Exercice 3

Soit la suite géométrique (u_n) de raison 2. On donne $u_{10} = 30$. Calculer u_6 et u_{20}

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite géométrique d'ensemble de définition E et de raison non nul q .

- Si $q \neq 1$, la somme de termes consécutifs de cette suite géométrique est :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \frac{(\text{raison})^{\text{nombre de terme}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

$$\text{Autrement : } v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \text{ pour } p \text{ et } n \text{ éléments de } E \text{ tels que } p < n.$$

- Si $q = 1$, la somme de termes consécutifs de cette suite géométrique est :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \text{nombre de termes}$$

Exercices d'application

Exercice 1

Calculer la somme des huit premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1.

Exercice 2

Calculer $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Calculer pour chacune des suites (u_n) ci-dessous les termes u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4 .

a) $u_n = \frac{1}{2n}$ pour $n > 0$

b) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \end{cases}$

- 1) Construire les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{3}{2}x$ et $y = x$.
- 2) Utiliser (D) et (Δ) pour représenter sur l'axe (OI) , les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice 3 :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Représenter sur l'axe (OI) , les termes d'indices 0 à 4 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n)^2 - 1 \end{cases}$

Exercice 4

- 1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r avec $r = 2$ et de premier terme u_1 telle que $u_{30} = 62$.
Calculer u_1 et s_{30}
- 2) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1 . Sachant que $u_1 = 3$, déterminer r et l'entier naturel n tel que $u_n = -15$ et $s_n = -60$.

Exercice 5 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 .

- 1) Déterminer q et s_5 sachant que $u_1 = 3$ et $u_5 = 48$.
- 2) Sachant que $u_1 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer u_{10} et s_{10} .

Exercice 6

En 2001, 4000 contrôles radar ont été effectués sur une route de Côte d'Ivoire. Il a été prévu d'augmenter le nombre de ces contrôles de 200 tous les ans.

- 1) Calculer le nombre de contrôles qui seront effectués en 2002, puis en 2003.
- 2) On désigne par c_n le nombre de contrôles effectués au bout de n années.
a- Exprimer c_n en fonction de n .

- b- Quel est le nombre total de contrôles pour l'année 2007 ?
- c- Au bout de combien d'années le nombre de contrôles atteindra t il 6000 ?
- 3) Quel est le nombre total de contrôles de l'année 2001 à l'année 2010 ?

Exercice 7

Monsieur Kouassi a une plantation de cacao de 4 hectares, il désire construire dans le futur une villa de 10 000 000 Fcfa. Il dispose dans son compte bancaire à la SGBCI-Soubré d'une somme de 1050000 Fcfa. Chaque année, la plantation lui rapporte la somme de 450000 FCFA qu'il verse sur son compte bancaire. On désigne par u_n la somme disponible dans le compte bancaire de Monsieur Kouassi au bout de n années.

- 1) Calculer la somme disponible dans le compte bancaire de Monsieur Kouassi au bout d'un an ; deux ans et au bout de trois ans ?
- 2) a- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme U_0 .
b- Ecrire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous forme explicite.
- 3) A partir de combien d'années, Monsieur Kouassi pourra t il construire sa villa ?
- 4) On pose $s = u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$ la somme des termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Calculer s .

Exercice 8

Lors du partage de l'héritage de son père, un élève de 1^{ère}D reçoit 200 000 Fcfa. Le 1^{er} janvier 2007, il a placé cette somme à intérêts composés au taux annuel de 7,5%.

- 1) De quelle somme disposera t il le 1^{er} janvier 2008 ?
- 2) On pose $u_0 = 200\ 000$. On désigne par u_n la somme dont il dispose le 1^{er} janvier de l'année 2007 + n et par u_{n+1} celle dont il disposera l'année suivante.
a- Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b- Exprimer pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
c- Calculer u_{12} .
- 3) Une publicité annonce : « Gagner de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100% en 12 ans ». Votre camarade hésite entre le placement de la publicité et le précédent. Aidez-le à choisir le meilleur placement.

Exercice 9

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Et soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n + 1$.

- 1) Prouver que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) a- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
b- En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction de n .
- 3) Déterminer en fonction de l'entier naturel n , les sommes s et s' telles que :
 $s = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $s' = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

CHAPITRE X : BARYCENTRE

I. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

- 1- Premières propriétés et définitions
 - a) Propriété
 - b) Définitions
- 2- Propriétés
 - a) Homogénéité
 - b) Ensemble des barycentres de deux points pondérés
 - c) Réduction de la somme $a\overline{MA} + b\overline{MB}$
- 3- Coordonnées du barycentre

II. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDERES

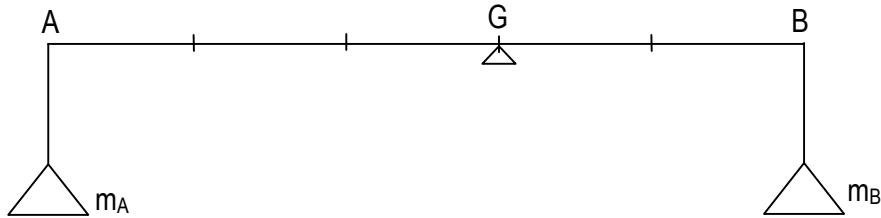
- 1- Propriétés et définitions
 - a) Propriété
 - b) Définitions
- 2- Propriétés
 - a) Homogénéité
 - b) Ensemble des barycentres de trois points pondérés non alignés.
 - c) Réduction de la somme $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}$
- 3- Coordonnées du barycentre
- 4- Barycentres partiels

CHAPITRE X : BARYCENTRE

I. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

Activité 1

Soit le système constitué par une tige AB de masse négligeable portant à ses extrémités deux masses m_A et m_B .



Trouver la relation d'équilibre des masses m_A et m_B autour d'un pointeau fixé en G.

$$m_A \times GA = m_B \times GB \text{ c'est-à-dire } m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

En physique on dit que G est le centre de gravité du système.

En mathématique on dit que G est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients m_A et m_B .

1- Premières propriétés et définition

a) Propriété

Soit A et B deux points du plan ; a et b deux nombres réels.

Si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

b) Définitions

Définition 1

On appelle point pondéré tout couple (A,a) où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé coefficient du point A.

Définition 2

Soit (A,a) et (B,b) deux points pondérés tels que : $a + b \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On note : $G = \text{bar}\{(A,a),(B,b)\}$ ou $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$

Exercices d'application

Exercice 1

Soit A, B et G trois points tels que $2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

Compléter.....= bar

Exercice 2

Ecrire en relation vectorielle traduisant que O est le barycentre des points pondérés (A,4) et (B,-7).

Exercice 3

Le système pondérés (A, 4), (C,- 4) admet-il un barycentre ?

2- Propriétés

a) Homogénéité Propriété

Le point G étant le barycentre des deux points pondérés (A, α) et (B, β) , si k est un nombre réel différent de 0, alors G est le barycentre de $(A, k\alpha)$; $(B, k\beta)$.

b) Ensemble des barycentres de deux points Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

Cas particuliers : $A = \text{bar}\{(A,1),(B,0)\}$

$$B = \text{bar}\{(A,0),(B,1)\}$$

c) Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Activité 2

On donne $G = \text{bar}\{(A,a);(B,b)\}$.

1) Démontrer que pour tout point M on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

2) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$

Propriétés

Si G est le barycentre des deux points pondérés (A, α) et (B, β) alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

(2) $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$

Exercices d'application

Exercice 1 :

Placer lorsqu'il existe le barycentre G des points pondérés $(A ; a)$ et $(B ; b)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $a = 3$; $b = 2$
- 2) $a = -2$; $b = -4$
- 3) $a = 3$; $b = -3$

Exercice 2

A, B et G sont des points tels que : $\overrightarrow{AG} = 7\overrightarrow{AB}$. Déterminer un couple (a,b) des nombres réels tels que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) .

3- Coordonnées du barycentre

Activité 3 : Le plan est muni d'un repère $(O;I;J)$.

Soit G le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B, b) tels que $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $G(x_G; y_G)$.

- 1) Ecrire le vecteur \overrightarrow{OG} en fonction des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .
- 2) En déduire les coordonnées du point G dans le repère $(O;I;J)$.

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O;I;J).

Si G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) alors $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère (O;I;J), on donne $M\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points pondérés (M,1) ; (N,-2).

II. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDERES

1- Propriété et Définition

a) Propriétés

Soit (A,a) ; (B,b) et (C,c) trois points pondérés.

Si $a + b + c \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Définition

Soit (A,a) ; (B,b) et (C,c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés (A,a) ; (B,b) et (C,c) l'unique point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On note : $G = \text{bar}\{(A,a),(B,b)\}$ ou $G = \text{bar}$

A	B	C
a	b	c

2- Propriétés

a) Homogénéité

G étant le barycentre des trois points pondérés (A,α) ; (B,β) et (C,γ), si k est un nombre réel différent de 0, alors G est le barycentre de (A,kα) ; (B,kβ) et (C,kγ).

Remarques

- Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
- L'isobarycentre de trois points A, B et C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice

On considère le triangle ABC tel que A', B' et C' soient les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

- 1) Démontrer que: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- 2) Que représente le point G pour les points A, B et C?

b) Ensemble des barycentres de trois points non alignés

Soit A, B et C trois points distincts du plan non alignés. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (A, B, C).

c) Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Activité 4

On donne $G = \text{bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$

1) Démontrer que pour tout point M on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$

2) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Propriété

Si G est le barycentre des trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

(2) $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$

Application

Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$ et $(C, 1)$.

3- Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.

Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et si G est le barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ)

alors $G \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}$

4- Barycentres partiels

Activité 5

Soit (A, a) ; (B, b) et (C, c) des points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Soit G_1 le barycentre de (A, a) et (B, b) et G le barycentre de (A, a) ; (B, b) et (C, c) .

Exprimer G comme barycentre des points G_1 et C affectés de coefficients à déterminer.

Propriété

Soit (A, a) ; (B, b) et (C, c) des points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$

Si $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ alors $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} = \text{bar}\{(H, a + b), (C, c)\}$

H est appelé barycentre partiel.

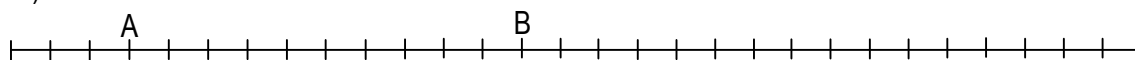
Exercice

Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$ et $(C, 1)$ en utilisant le théorème des barycentres partiels.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

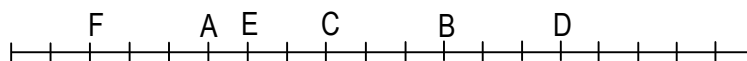
Exercice 1

Sur la figure ci-dessous, placer le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 2) et celui des points (A, -3) et (B, 13).



Exercice 2 :

Déterminer graphiquement les nombres a et b pour que C, D, E et F soient les barycentres de $\{(A,a);(B,b)\}$.



Exercice 3

On donne les points A et B. Trouver les nombres réels a et b pour que le point G soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants:

- 1) $2\overline{AG} = 3\overline{AB}$; $a + b = 6$
- 2) $3\overline{GA} - 2\overline{GB} = \vec{0}$; $a + b = -3$
- 3) $\overline{BG} = -\frac{2}{3}\overline{BA}$; $a + b = 1$
- 4) Pour tout point M du plan, $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 5\overline{MG}$; $a + b = -1$

Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère (O;I;J), on considère les points A et B de coordonnées A(2;7) et B(3;3). Calculer les coordonnées de :

- 1) G_1 : barycentre de (A, 2) et (B, 3).
- 2) G_2 : barycentre de O, A et B.
- 3) G_3 : barycentre de (O, 2), (A, -1) et (B, 3).

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On muni le plan du repère (A, B, C). Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

- 1) En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 2).
- 2) En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire le barycentre des points pondérés (A,1) ; (B, 2) et (C, 3).

Exercice 7

On considère un triangle ABC.

- 1) Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, 1) et (C, 2).
- 2) Exprimer le point C comme barycentre des points A, B et C.

Exercice 8

Soit ABCD un parallélogramme.

- 1) En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire les points G et G' définis par:
 $G = \text{bar} \{(A, -1); (B, 4); (C, 1); (D, 2)\}$
 $G' = \text{bar} \{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, 4)\}$
- 2) Démontrer que centre O du parallélogramme ABCD est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

Exercice 9

Soit A, B, C trois points non alignés.

- 1) Justifier qu'il existe un point I unique tel que $3\vec{IA} + \vec{IB} - 2\vec{IC} = \vec{0}$.
- 2) Construire le barycentre J des points pondérés (A, 3) ; (B, 1).
- 3) Exprimer \vec{IJ} à l'aide de \vec{IA} et \vec{IC} .
- 4) Dédire de la question 3) une relation entre les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IB} puis construire I.

Exercice 10

G est le centre de (A, 1) ; (B, -1) ; (C, 2) et (D, 3). On a donc $\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} + 3\vec{GD} = \vec{0}$.

- 1) Soit J le barycentre de (A, 1); (C, 2) et K le barycentre de (B, -1); (D, 3).
Montrer que $3\vec{GJ} + 2\vec{GK} = \vec{0}$.
Construire les points J, K et G.
- 2) Construire le barycentre L de (A, 1); (B, -1) et (C, 2).
Montrer que $2\vec{GL} + 3\vec{GD} = \vec{0}$
En déduire une nouvelle construction de G.

CHAPITRE XII : TRANSFORMATION DU PLAN

I. TRANSLATION

- 1- Propriété caractéristique
- 2- Autres propriétés

II. ROTATION

- 1- Rappels
- 2- Utilisation des rotations
 - a) Construction de figure
 - b) Démonstration de propriétés
 - c) Lieu géométrique
- 3- Composée de deux rotations de même centre

III. HOMOTHETIE

- 1- Propriété caractéristique
- 2- Autres propriétés
- 3- Utilisation des homothéties
 - a) Pour démontrer
 - b) Pour construire une figure
- 4- Pour déterminer un lieu géométrique
- 5- Composée de deux homothéties de même centre

CHAPITRE XII : TRANSFORMATION DU PLAN

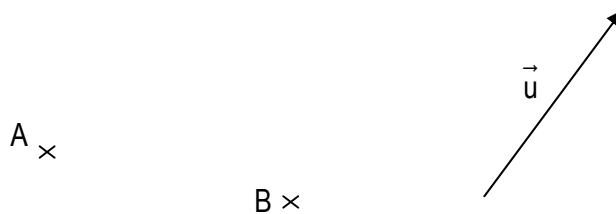
I. TRANSLATION

1- Propriété caractéristique

Rappel

Soit \vec{u} un vecteur non nul. A et B deux points distincts du plan.

- a) Construire A' et B' images respectives des points A et B par la translation de vecteur \vec{u}



- b) Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Réciproquement on démontre que toute application f du plan dans lui-même transformant un couple de points (A,B) en couple de points (A', B') tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ est une translation. D'où la propriété caractéristique

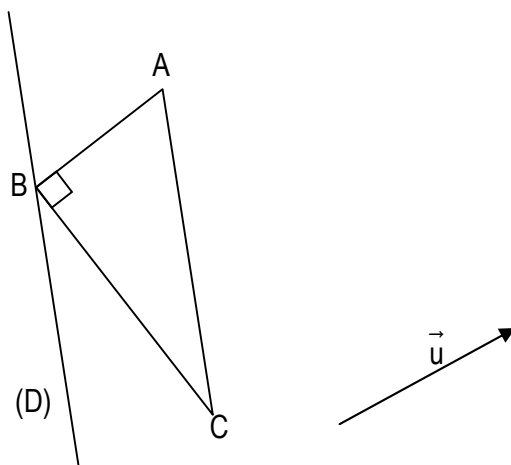
Propriété

Soit f une application du plan dans lui-même. f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

2- Autres propriétés

Activité

Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle rectangle en B et les droites (D) et (AC) sont parallèles ; \vec{u} est un vecteur du plan.



- a) Construire les images A', B' et C' respectives des points A, B et C par la translation de vecteur \vec{u} .
b) Construire l'image (D') de la droite (D) par la translation de vecteur \vec{u} .
c) En observant la figure ;

- Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?
- Quelle est la position relative des droites (D') et (A'B') ?

Propriété

Toute translation conserve :

- L'alignement des points
- Le parallélisme des droites
- L'orthogonalité des droites
- La mesure des angles
- Le barycentre des points pondérés
- Les longueurs
- Les aires

Retenons : Si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points sont invariants.

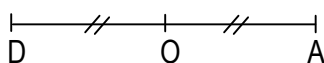
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de points invariants.

II. ROTATION

1- Rappels

Activité

Sur la figure ci-dessous, O est le milieu du segment [AD]. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



- Construire le point B image du point A par la rotation r.
- Construire le point C image du point B par la rotation r.
- Justifier que D est l'image de C par la rotation r.

Remarque

M' est l'image de M par la rotation r de centre O et d'angle α signifie que

$$\begin{cases} OM = OM' \\ \text{Mes}(\widehat{OM, OM'}) = \alpha \end{cases}$$

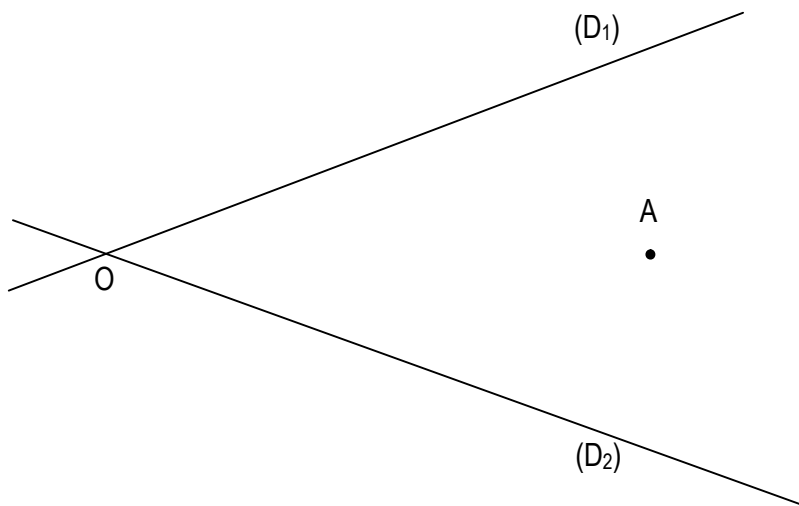
2- Utilisation des rotations

a) Construction de figure

Sur la figure ci-dessous, les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en O.

A est un point tel que $A \notin (D_1)$ et $A \notin (D_2)$.

Construire le triangle ABC équilatéral tels que $B \in (D_1)$ et $C \in (D_2)$.

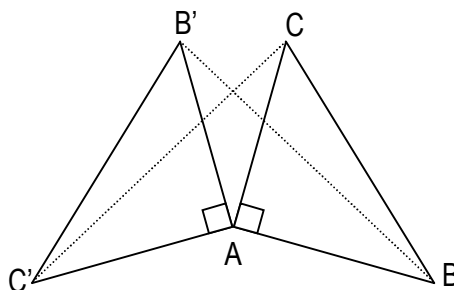


Programme de construction

- Construire (D'_1) l'image de la droite (D_1) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
- Désigner par C le point d'intersection des droites (D'_1) et (D_2)
- Construire le triangle ABC équilatéral tel que B appartienne à (D_1) . (on remarquera que B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$)

b) Démonstration de propriétés

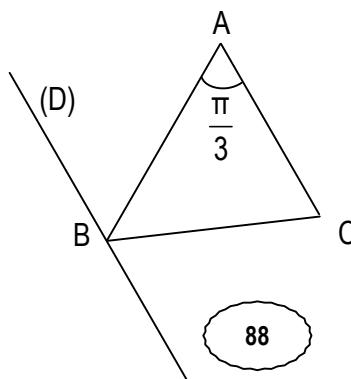
On considère deux triangles rectangles isocèles ABC et AB'C' comme sur la figure ci-dessous. Montrer que $BB' = CC'$ et que les droites (BB') et (CC') sont orthogonales.



Choisir la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en C et B' en C'.

c) Lieu géométrique

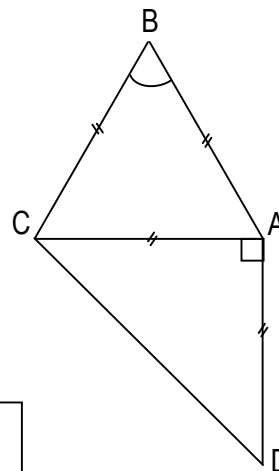
Dans le plan, (D) est une droite et A un point fixé n'appartenant pas à la droite (D). A chaque point de (D), on associe comme l'indique la figure ci-dessous, le point C tel que le triangle ABC soit équilatéral. Détermine le lieu géométrique des points C lorsque le point B décrit la droite (D).



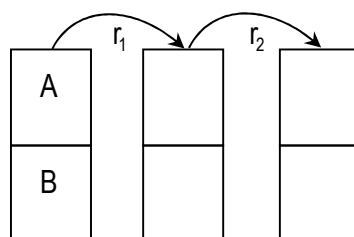
3- Composée de deux rotations de même centre

Activité :

Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle équilatéral et ACD est un triangle rectangle isocèle en A. soit r_1 la rotation de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre A d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.



a) Complète le tableau de correspondance suivant :



b) D'après le tableau ci-dessus, compléter :

$r_1(B) = \dots\dots\dots$; $r_2[r_1(B)] = \dots\dots\dots$

c) Déterminer la nature de la transformation du plan qui applique B sur D

d) Trouver les éléments caractéristiques de cette transformation

Propriété

La composée de deux rotations de même centre O et d'angles orientés $(\widehat{\alpha}_1)$ et $(\widehat{\alpha}_2)$, est une rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2)$.

Exercice d'application

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes : $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$

III. HOMOTHÉTIE

1- Propriété caractéristique

Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et de 1.

f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N',

on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

2- Autres propriétés

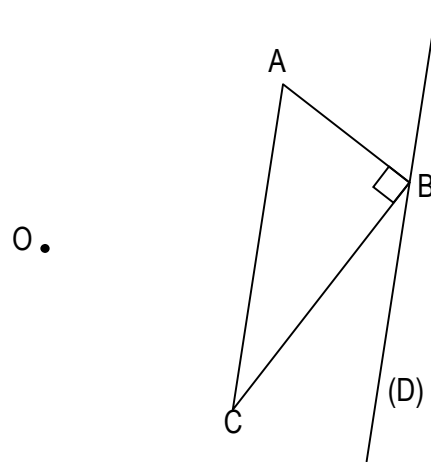
Activité

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en B et O est point du plan. On considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

a) Construire les points M, N et P images respectives des points A, B et C par l'homothétie h.

b) Comparer :

- Les mesures des angles \hat{A} et \hat{M} , \hat{B} et \hat{N} puis \hat{C} et \hat{P} .
- Les rapports $\frac{MN}{AB}$; $\frac{MP}{AC}$; $\frac{NP}{BC}$.



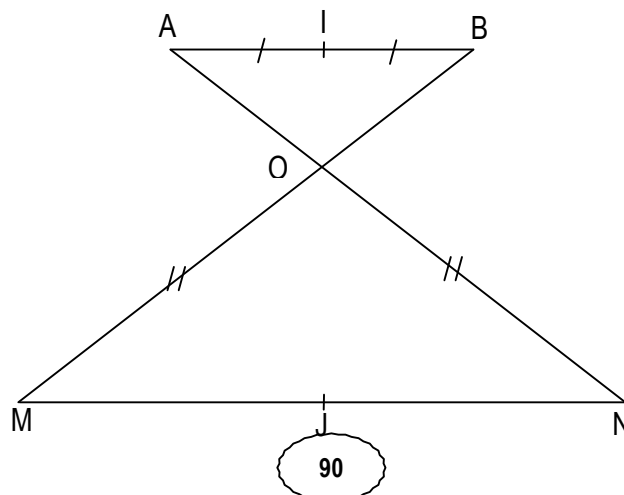
Propriété

- Les homothéties conservent l'alignement, le milieu d'un segment, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles orientés.
- Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$.
- Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 .
- L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une homothétie h de rapport k est le cercle de centre O' image de O par h et de rayon $|k|.r$

3- Utilisation des homothéties

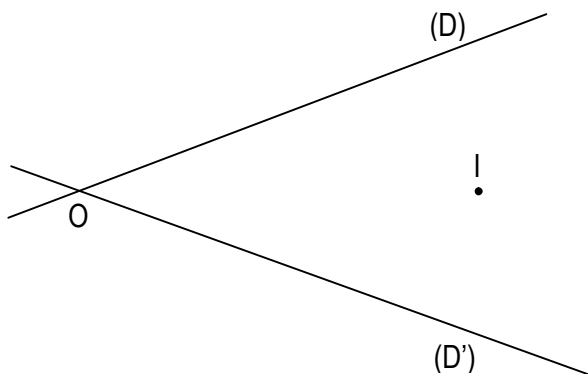
a) Pour démontrer

Sur la figure ci-dessous ABO est un triangle, I est le milieu du segment [AB], $M \in (OB)$ et $N \in (OA)$ tel que $(AB) \parallel (MN)$. On note J le milieu du segment [MN]. Justifier que les points O, I et J sont alignés.



b) Pour construire une figure

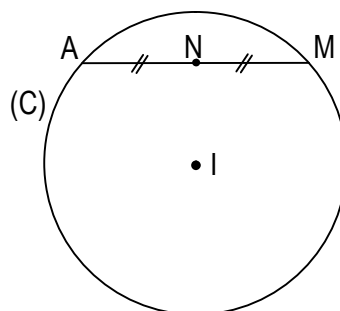
(D) et (D') sont deux sécantes en O et I un point n'appartenant ni à (D) ni à (D'). On se propose de construire un point M sur la droite (D) et un point N sur (D') de sorte que I soit le milieu du segment [MN].



4- Pour déterminer un lieu géométrique

(C) est un cercle fixé de centre I et de rayon 4 cm et A est un point fixé de (C). A partir de chaque point M du cercle (C), on construit le point N du milieu de [AM].

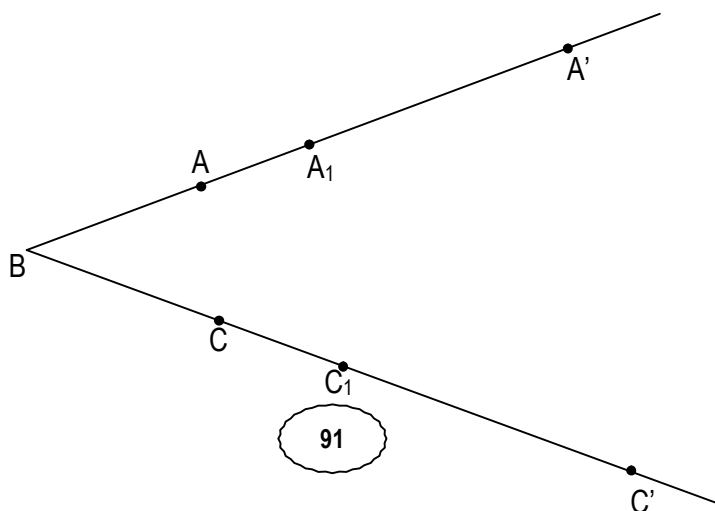
- a) Quel est le lieu géométrique du point N quand M décrit le cercle (C) ?
- b) Construire ce lieu.



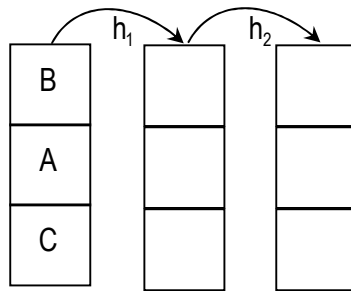
5- Composée de deux homothéties de même centre

Activité

On donne la figure ci-dessous. On considère les homothéties $h_1 \left(B; \frac{3}{2} \right)$ et $h_2 (B; 2)$.



a) Compléter de correspondance suivant :



b) D'après le tableau ci-dessous compléter

$$h_1(A) = \dots\dots\dots ; \quad h_2[h_1(A)] = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{BA'} = \dots\dots\dots \overrightarrow{BA} ; \quad \overrightarrow{BC'} = \dots\dots\dots \overrightarrow{BC}$$

c) Déterminer la nature de la transformation du plan qui applique A sur A' et C sur C'.

d) Trouver les éléments caractéristiques de cette transformation.

Propriété

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k'.
 h' o h est l'homothétie de centre O et de rapport k/k'.

Exercices d'application

Exercice 1

Soit h₁ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{2}{3}$ et h₂ l'homothétie de centre Ω et de rapport -3.

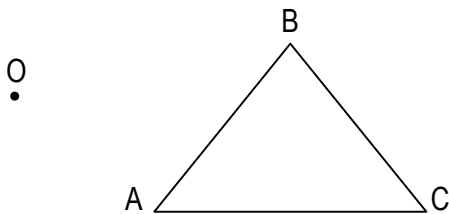
Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes : h₁ o h₂ et h₂ o h₁

Exercice 2

Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle et O un point du plan.

On considère les homothéties h₁(O; $\frac{5}{4}$) et h₂(O; 2).

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie h₁ o h₂.



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

(C) est un cercle de centre O et A est un point de (C). B est un point du plan tel que $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$.

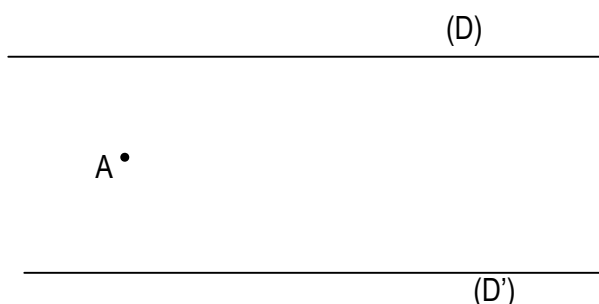
On note (D) la droite perpendiculaire à la droite (OA) passant par B.

Construire un point M sur (D) et un point N sur (C) de sorte que le quadrilatère OAMN soit un parallélogramme.

Exercice 2

Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites parallèles du plan, et A est un point n'appartenant ni à (D) ni à (D').

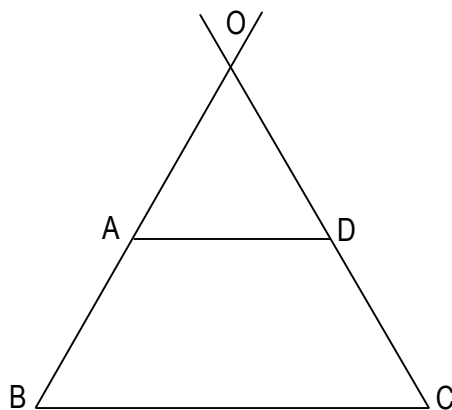
Construire un point M de (D) et un point M' de (D') tels que le triangle AMM' soit rectangle en A.



Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze de bases [AD] et [BC] tels que $AD = \frac{2}{3}BC$

- 1) Démontrer qu'il existe une homothétie h transformant A en B et D en C
- 2) Préciser ses éléments caractéristiques.
- 3) Démontrer qu'il existe une homothétie h' transformant A en C et D en B.
- 4) Préciser ses éléments caractéristiques.



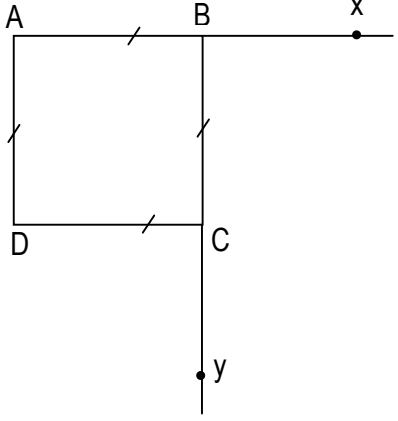
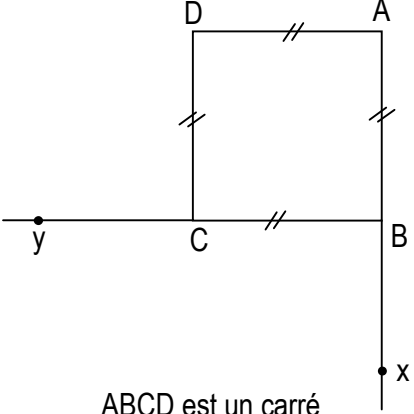
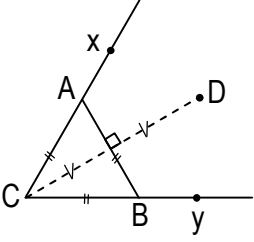
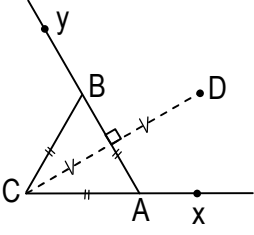
Exercice 4

Soit M, N et Q trois points deux à deux distincts du plan. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie h de centre M transformant N en Q.

- 1) $\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{MN} = \vec{0}$
- 2) $\overrightarrow{NQ} - 4\overrightarrow{NM} = \vec{0}$
- 3) $\overrightarrow{NQ} = 2\overrightarrow{NM}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, construire le centre de la rotation qui applique la demi-droite $[Ax)$ sur la demi-droite $[By)$. Préciser la mesure principale de son angle orienté, puis construire les images des points C et D par cette rotation.

 <p>ABCD est un carré</p>	 <p>ABCD est un carré</p>
 <p>ABC est un triangle équilatéral. D est le symétrique de C par rapport à (AB)</p>	 <p>ABC est un triangle équilatéral. D est symétrique de C par rapport à (AB)</p>