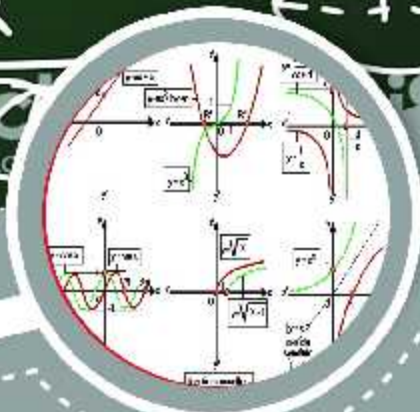
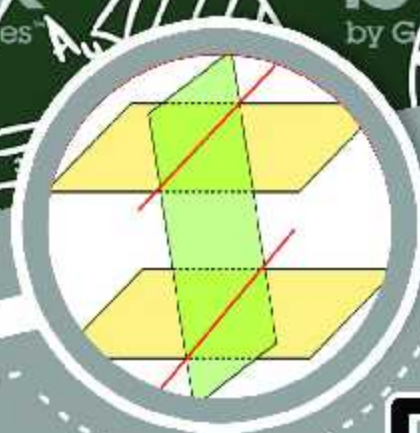
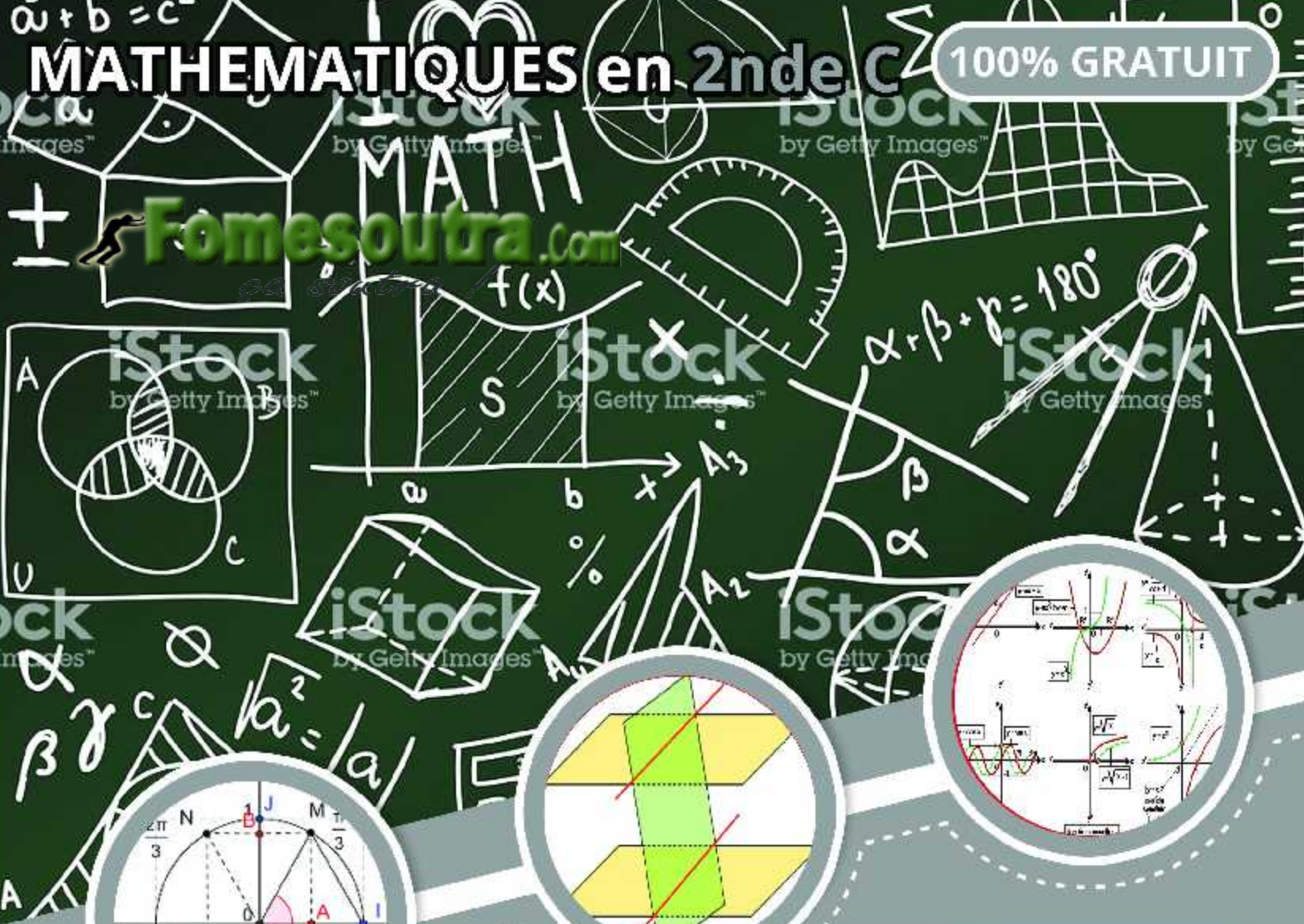


# MATHEMATIQUES en 2nde C

100% GRATUIT

Fomesoutra.com



## COURS

Cours détaillés et illustrés selon l'Aproche Par Compétence (APC)



## EXERCICES

Des exercices de savoir, savoir-faire, et savoir-etre après chaque leçon



## NOUVEAU PROGRAMME

Cours et exercices selon le nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp Les grandprofs de Maths

# AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est l'œuvre des enseignants du groupe WhatsApp dénommé « Grandprofs de maths(GPM) ». Ce groupe a vu le jour le 12-05-2017. Cette collection est la mise en pratique de l'un de ses objectifs majeurs. Rendu à sa deuxième édition, c'est le fruit de près de trois mois de travail organisé par les administrateurs dans des sous-groupes (13 ateliers).

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette collection n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, encore moins le cours de l'enseignant. Il vient juste en appui à ces documents. Dans le fond et la forme, chaque chapitre de cette collection est conforme au nouveau programme et respecte la structure de l'APC pour les classes de la 6<sup>ème</sup> en première.

Cette deuxième édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner aux administrateurs qui ont travaillé inlassablement pour mener le projet à bon port. Il s'agit de : *M. Guela Kamdem Pierre*, *M. Pouokam Léopold Lucien*, *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* et le fondateur du groupe *M. Ntakendo Emmanuel*. A ce dernier, nous devons toutes les couvertures de cette deuxième édition. Un coup de chapeau est à donner à certains enseignants qui ont fait de la réussite de ce projet, un objectif à atteindre pendant les vacances : ce sont les chefs d'ateliers. Nous avons *M. Siyapdje Henri* (6<sup>ème</sup>), *M. Joseph Fogang* (5<sup>ème</sup>), *M. Ngongang Nivel* (4<sup>ème</sup>), *M. Jidas Tchouan* (3<sup>ème</sup>), *M. Simplicie Dongmo* (2<sup>nde</sup>A<sub>4</sub>), *M. Guela Kamdem Pierre* (2<sup>nde</sup>C), *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* (1<sup>ère</sup>A<sub>4</sub>), *M.*

*Nguefo Takongmo (1<sup>ère</sup>C), M. Jidas Tchouan (1<sup>ère</sup>D-TI), M. Bayiha André Ghislain (T<sup>le</sup>A4), M. Ouafeu Tokam Guy Paulin (T<sup>le</sup> C) et M. Nganmeni Konguep Hervé Battiston (T<sup>le</sup> D-TI).* Nous ne saurons terminer sans féliciter tous les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet et y ont consacré leur précieux temps non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 164 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours réalisés.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que des éventuelles coquilles que pourrait contenir chacun des documents de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants voulant intégrer ce groupe WhatsApp ou désirant prendre part à la 3<sup>ème</sup> édition qui débutera en Mai 2020 sont priés bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre (697 473 953 / 678 009 612), M. Pouokam Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749), M. Tachago Wabo Wilfried Anderson (699 494 671) et M. Ntakendo Emmanuel (676 519 464).*

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

# Projet Grandprofs de math(GPM)

2<sup>ème</sup> édition

Atelier 2<sup>nd</sup>e C

## Table des matières

### 1.Nombres réels

Page 6 - 13

*Deh Nkengni Rigobert*, Lycée de MENGUEME (AP), PLEG Maths,  
656782576/679767867.

### 2.Notion de groupe

Page 14 - 19

*Dgoumtsop Tindo Telesphore*, RT à l'ENS de Maroua, 676401806 / 694986113

### 3. Équations, Inéquations et Systèmes

Page 20 - 40

*Guela Kamdem pierre*, Lycée technique de Ngambé(AP), collège de la  
vallée, 678009612/697473953 (Chef d'atelier)

### 4. Généralités sur les fonctions

Page 41 - 52

*Ouafeu Tokam Guy Paulin*, CES bilingue d'AWAE, collège champs du lys,  
676093969/695652841 )

### 5. Étude de fonctions usuelles

Page 53 - 57

*Ouafeu Tokam Guy Paulin*, CES bilingue d'AWAE, collège champs du lys,  
676093969/695652841 )

### 6. Angles orientés et trigonométrie

Page 58 - 61

*Kogoui Nguimetsa Sylvain*, Lycée d'Ebebda, +237 96216943

### 7. Angles inscrits polygones réguliers

Page 62 - 69

*M. Ngassa Uriel*, Lycée Bilingue de Mbankomo,+237 74599084

### 8.Vecteurs du plan

Page 70 - 83

*Balla Adalbert Bienvenu*, Lycée de Mintom, 696114441/651595682

**9. Produit scalaire** **Page 84 - 91**

*Nchare Soufon Abdoulaye*, Lycée bilingue de Mbalngong/College les  
sapins, 679325893

**10. Droites et Cercles du plan** **Page 92 - 100**

*Wilfried Tsopmo*, Lycée de Mouda (extrême nord).

**11. Transformations planes** **Page 101 - 106**

+237 6 97 84 79 58

**12. Statistiques** **Page 107 - 112**

*Nkadjou Louis*, CPB les AIGLONS. 675968983

**13. Géométrie dans l'espace** **Page 113 - 119**

*Emmanuel Ndiapa*, LYCÉE BILINGUE DE MANENGOLE ; 654142454

## MODULE 1 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

**Chapitre** : Calcul dans  $\mathbb{R}$

**Leçon 1** : Opérations dans  $\mathbb{R}$

**Objectif pédagogique** : Découvrir les propriétés des nombres et les utiliser pour lire ou écrire, interpréter les informations comportant des chiffres. Pour réagit verbalement sur des informations comportant des chiffres.

**Motivation** : Chaque jour nous sommes appelés à utiliser les nombres pour : Déterminer un nombre entier de carreaux suffisant pour le revêtement total d'une surface. Déterminer les dates de coïncidence de deux marchés périodiques, les dimensions d'un terrain. Situer deux objets en mouvement rectiligne par rapport à un autre fixe. Partager des biens... Lire et interpréter un texte comportant des nombres : recette de cuisine ; prix des articles ; budget d'un État ... Informer autrui d'un rabais, d'une hausse, d'une donnée météorologique ... **Cette leçon donne des outils pour pouvoir le faire aisément.**

**Prérequis** :

- Défini les ensembles suivant tout en donnant cinq nombres appartenant à chacun des ensembles :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$  ;  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ .
- Ranger par ordre croissant les ensembles de la question 1.
- Effectué les opérations suivantes en donnant le résultat sous la forme irréductible(A) et sous la forme  $a + b\sqrt{2}$  :  $A = \frac{6}{5} + \frac{13}{7} \div 3$  ;  $B = \sqrt{200} - 23\sqrt{0,0036} + \sqrt{121}$ .

### I. 1. $\mathbb{R}$ et ses sous-ensembles.

**Situation problème** : Amina, est en classe de CM2, son frère Tamo en 5<sup>ème</sup>, leur grand sœur Ariane en classe de Première. Un jour leur maman enseignante de mathématiques pose la question suivante : « citer 5 nombres ».

- Amina : 12 ; 0 ; 15 ; 17,5 ;  $\frac{3}{5}$ .
- Tamo : -7 ; 1267 ; -37,5 ;  $\frac{15}{7}$  ; 36.
- Ariane : 15,3434 ;  $\frac{19}{10}$  ;  $\sqrt{5}$  ;  $\pi$  ; -17.

Leur maman dit : « vous avez tous raison sauf mais il faut classer ces nombres » Aidez les enfants à classer les nombres en groupe d'entier naturel, d'entier relatif, de décimal relatif, de rationnel, irrationnel et réel.

**Activité 1** :

On considère la partie décimale du nombre suivant :  $x = 0,108108108$ .

- Quel est sa période ? quelle est la longueur de sa période ? quel est le 12<sup>ème</sup> chiffre de cette partie, le 100<sup>ème</sup> chiffre.
- Justifie que  $1000x - x$  est un entier naturel.
- En déduire la forme fractionnaire irréductible de  $x$ .

**Activité 2** : ( $\sqrt{2}$  est irrationnel)

- Supposons que  $\sqrt{2}$  soit rationnel et l'on peut supposer que la fraction  $\frac{p}{q}$  est irréductible. Vérifier alors l'égalité  $p^2 = 2q^2$ .

2. Compléter le tableau suivant :

$p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	21	12	31	51	57	11
$p^2$															

En déduire que  $p$  est pair. On pose  $p = 2n$  ( $n$  entier).

3. Montrer que :  $q^2 = 2n^2$ . En déduire que  $q$  est pair.

4. Les questions 1) 2) et 3) conduisent à une contradiction. Laquelle ? conclure alors.

### Résumé 1 :

**D1** :  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels, 0 est le plus petit entier naturel, il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres.

**D2** :  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs, 0 est à la fois positif et négatif.

**D3** :  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des nombres décimaux relatifs. Un nombre décimal se reconnaît par sa partie décimale finie. Un nombre décimal sous forme fractionnaire irréductible : le dénominateur n'est qu'un produit de 2 et/ou de 5 (le dénominateur est un produit de puissance de 2 et 5)

**Exemple** : 0,25 ; 23,457 ; -9,76 ;  $\frac{73}{2}$  ;  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{7}{20}$  sont des nombres décimaux. **Par contre** : 0,32323232... ;  $\frac{4}{37}$  n'est pas un nombre décimal sous forme fractionnaire.  $\frac{17}{30}$  n'est pas décimal car  $30 = 2 \times 5 \times 3$  n'est pas seulement multiple de 2 et 5.  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , n'appartiennent pas à l'ensemble  $\mathbb{D}$ .

**D4** :  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres rationnels. Un nombre rationnel se reconnaît par sa partie décimale infinie et périodique (à partir d'un certain rang éventuellement).

**Exemple** : 0,32323232... ; 0,108108108... ; 24,324324324... Mais  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\pi$ , ne sont pas des nombres rationnels.

**Remarque** : On a :  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q}$ . Tous les nombres non rationnels sont dit irrationnel et donc appartiennent à un plus grand ensemble : l'ensemble des nombres réels noté  $\mathbb{R}$ .

## I.2. Opérations dans $\mathbb{R}$

### Activité 3:

1. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{2 + \frac{3}{7} + \frac{-12}{9}}{\frac{15}{2} + \frac{7}{13} \times 4}$$

$$B = \frac{43}{441} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7}\right)^2$$

2. Montrer que  $C = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{7,2}$  et  $D = \sqrt{\sqrt{13} + 1} \times \sqrt{\sqrt{13} - 1} = 2\sqrt{3}$ .

3. Ecrire sous la forme d'un quotient sans racine au dénominateur les nombre suivant :

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

$$J = \frac{1 - \sqrt{7}}{2 + \sqrt{11}}$$

### Résumé 3 :

OPERATIONS AVEC DES PRODUITS	
Signe -	$a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$ $(-a) \times (-b) = ab$
Produit nul	Dire qu'un produit est nul signifie qu'au moins l'un de ses facteurs est nul $a \times b = 0$ signifie que $a = 0$ ou $b = 0$
Simplification	Si $ac = bc$ (et $c \neq 0$ ), alors $a = b$
Produits remarquables	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

OPERATIONS AVEC DES QUOTIENTS	
Signe -	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
Simplification	$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (si $k \neq 0$ )
égalité	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se traduit par : $ad = bc$
Addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
Multiplication	$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
Division	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

## OPERATIONS AVEC LES RACINES

Notation $\sqrt{a}$	Soit $a$ un nombre réel positif. $\sqrt{a}$ est le seul nombre positif dont le carré est égal à $a$ .
Règles de calcul.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour tout réels positifs <math>a</math> et <math>b</math>, on a : <math>\sqrt{a^2} = a = (\sqrt{a})^2</math> et <math>\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n</math> (<math>n</math> entier, <math>n \geq 1</math>)</li> <li>• <math>\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}</math> et <math>\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}</math> (avec <math>b \neq 0</math>)</li> <li>• <math>\sqrt{a^2} = \begin{cases} -a &amp; \text{si } a \leq 0 \\ a &amp; \text{si } a \geq 0 \end{cases}</math></li> <li>• <math>\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}</math></li> <li>• <math>\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}</math></li> </ul>
Equation $x^2 = a$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>a &gt; 0</math>, deux solutions : <math>\sqrt{a}</math> et <math>-\sqrt{a}</math></li> <li>• Si <math>a = 0</math>, une solution : <math>0</math> ;</li> <li>• Si <math>a &lt; 0</math>, aucune solution.</li> </ul>

### Exercices

#### EXERCICE 1 :

1- Un père partage 12.000 F entre ses quatre enfants : les trois premiers reçoivent respectivement  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{6}$  du total. Combien reste-t-il pour le dernier ?

2- Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible, la fraction :  $a = \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - 1}{\frac{5}{3} - \frac{11}{8} + \frac{7}{12}}$ .

#### EXERCICE 2 :

1) Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible, si cela est possible, les nombres suivants :

$$a = 12,23; \quad b = 25,1212121 \dots; \quad c = 321,34252365 \dots$$

2) Montrer, à l'aide du raisonnement par l'absurde, que  $\sqrt{3}$  est un nombre irrationnel.

#### EXERCICE 3 :

Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous la forme la plus réduite :

$$A = \left(\frac{4}{8} - \frac{11}{24}\right) \times \left(2 - \frac{4}{3}\right) \quad B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} \quad C = \frac{2\sqrt{6} - 5}{3\sqrt{6} - 1} \quad E = \left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

**MODULE 1 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS****Chapitre** : Calcul dans  $\mathbb{R}$ **Leçon 2** : Ordre et valeur absolue

**Objectif pédagogique** : Découvrir les propriétés des nombres et les utiliser pour lire ou écrire, interpréter les informations comportant des chiffres. Pour réagit verbalement sur des informations comportant des chiffres.

**Motivation** : Chaque jour nous sommes appelées à utiliser les nombres pour : Déterminer un nombre entier de carreaux suffisant pour le revêtement total d'une surface. Déterminer les dates de coïncidence de deux marchés périodiques, les dimensions d'un terrain. Situer deux objets en mouvement rectiligne par rapport à un autre fixe. Partager des biens... Lire et interpréter un texte comportant des nombres : recette de cuisine ; prix des articles ; budget d'un État ... Informer autrui d'un rabais, d'une hausse, d'une donnée météorologique ... **Cette leçon donne des outils pour pouvoir le faire aisément.**

**Prérequis** :

1. Complété par  $<$ ;  $>$  :  $\frac{1}{2} \dots \frac{1}{3}$ ;  $\sqrt{13} \dots 2\sqrt{3}$   $3 \dots \sqrt{7}$   $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{10})$
2. Déterminer les solutions des inéquations suivantes :  $3x + 1 \leq 23$ ;  $-3x + 4 \geq 5x - 17$ .

**II. 1. Ordre : intervalles et comparaisons.****Situation problème** :

Oscar est à l'agence de voyage de Mbalmayo (88km) pour s'y rendre en Yaoundé. Ces amis Alain et innocent doivent se rendre à Douala (237 km) pour les grandes vacances. A la gare de Mvan ils constatent que les tarifs pratiqué par deux agences, pour des véhicules identiques sont les suivants :

<b>Agence A</b>	<b>Agence B</b>
<b>Forfait: 1500F</b>	<b>Forfait: 1200F</b>
<b>plus 440F/Km</b>	<b>Plus 530F/Km</b>

1. Quel agence propose le meilleur service ?
2. Oscar est à 30 km de Yaoundé(Mvan), Alain et son frère sont à 300 km de Douala. Quelle distance separe Oscar et Alain ?

**Activité 1** :

1. Ranger par ordre croissant les nombres suivant :  $\frac{8}{7}$ ;  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{7}{8}$ ;  $\frac{8}{6}$ ;  $\frac{8}{5}$  et  $\frac{6}{8}$ .
2. Donner un encadrement d'amplitude 3 de  $A = 12 + \sqrt{3}$  on donne :  $1,7321 \leq \sqrt{3} \leq 1,7322$ .
3. Traduit les inégalités suivants sous forme d'intervalles :  $x \leq 12$ ;  $23 < x$ ,  $\sqrt{5} \geq -x$ ;  $-4 \leq x \leq 1$ .
4. Sur une droite graduée placé les points d'abscisses suivantes :  $A(-17)$ ;  $B(-3)$ ;  $C(-2,45)$ ;  $D(0)$ ;  $E(1,33)$ ;  $F(6)$ ;  $H(28)$ . Calculer la distance de A à H ; B à D ; C à F.

**Résumé 1** :

Les intervalles correspondent aux parties sans trou de la droite numérique. De façon plus rigoureuse ( si  $a < b$ ).

Intervalle	Représentation	Description : ensemble des réels $x$ vérifiant.
Intervalle $[a, b]$ (fermé)		$a \leq x \leq b$
Intervalle $]a, b[$ (ouvert)		$a < x < b$
Intervalle $[a, b[$		$a \leq x < b$
Intervalle $[a; +\infty[$		$a \leq x$
Intervalle $] - \infty; b[$		$x < b$

**Remarque :**

**R1 :** L'ensemble des nombres strictement positif est l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**R2 :**  $\mathbb{R}$  est l'intervalle  $] - \infty; +\infty[$ .

**R3 :** Pour les intervalles  $[a; b]$ ;  $[a; b[$ ;  $]a; b]$ ;  $]a; b[$ , le centre est  $\frac{a+b}{2}$ , l'amplitude est  $b - a$ , le rayon est  $\frac{b-a}{2}$ .

**R4 :**  $\{a\} = [a; a]$ .

**R5 :** L'intersection et la réunion de deux intervalles.

- L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles.
- La réunion de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un ou l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

**Exemple :** Soit  $I = [2; 6]$  et  $J = [-3; 9]$ . Déterminer les intervalles  $K = I \cup J$  et  $Q = I \cap J$ .

COMPARAISON DE DEUX NOMBRES REELS A ET B.	
<b>AVEC LA DIFFERENCE</b>	$A - B < 0$ signifie $A < B$ . $A - B > 0$ signifie $A > B$
<b>AVEC UN INTERMEDIAIRE</b>	$A < C < B$ signifie $A < B$
<b>AVEC LEURS CARREES</b>	Si A et B sont négatifs alors $A^2 < B^2$ signifie $A > B$ .
	Si A et B sont positifs alors $A^2 < B^2$ signifie $A < B$ .

OPERATION SUR UNE INEGALITE	
<b>Sommes et différence</b>	Si $a < b$ alors $a + c < b + c$ ou $a - c < b - c$
<b>Produit et quotients</b>	Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$ ou $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
	Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$ ou $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
<b>Avec deux produits</b>	Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ alors $a + c \leq b + d$
	a, b, e et d des nombres positifs : Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ alors $ac \leq bd$

RANGEMENT ET COMPARAISON de $a$ ; $a^2$ et $a^3$			
RANGEMENT	$0 \leq a < b$	$a^2 < b^2$	Les carrés et les racines carrées de deux nombres positifs sont rangés dans le <b>même ordre</b> que ces deux nombres.
		$\sqrt{a} < \sqrt{b}$	
	$0 \leq a < b$	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	Les <b>inverses</b> de deux nombres strictement positifs sont rangés dans l' <b>ordre contraire</b> de ces deux nombres.
COMPARAISON de $a$ ; $a^2$ et $a^3$	Lorsque : $0 \leq a \leq 1$	$a^3 \leq a^2 \leq a$	Une démonstration se fera par l'enseignant pour mieux comprendre.
	Lorsque : $1 \leq a$	$a \leq a^2 \leq a^3$	

## II. 2. Valeur absolue.

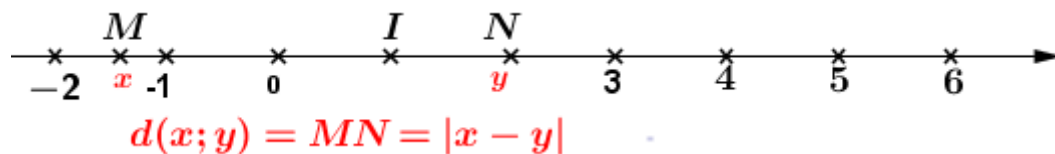
### Activité 2:

Soit la droite réelle munie du repère (O, I).

- Placer les points A, B, C et D d'abscisses respectives :  $-7, \sqrt{6}$ ;  $\frac{17}{23}$  et  $-15,6$ .
- Calculer la distance de A à D ; D à A ; et de D à B.

### Résumé 2:

On appelle **distance** ou **écart** entre 2 réels  $x$  et  $y$ , la distance sur la droite numérique entre les points d'abscisses  $x$  et  $y$  ; on la note  $d(x; y)$ .



### Propriété de la distance

**P1** :  $d(x; y) = d(y; x)$ .

**P2** :  $d(0; x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$

**P3** :  $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$  (inégalité triangulaire)

PROPRIETES DE LA VALEUR ABSOLUE.	
$ x  = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$	<b>Exemple</b> : Pour calculer $ 5\sqrt{3} - 2\sqrt{19} $ il faut d'abord déterminer le signe de $5\sqrt{3} - 2\sqrt{19}$ . On a $(5\sqrt{3})^2 = 75$ et $(2\sqrt{19})^2 = 76$ ainsi $2\sqrt{19} \geq 5\sqrt{3}$ . <b>Conclusion</b> : $ 5\sqrt{3} - 2\sqrt{19}  = 2\sqrt{19} - 5\sqrt{3}$
$ x  = 0$ signifie que $x = 0$	<b>Exemple</b> : $ -6 + 7x  = 0$ signifie que $-6 + 7x = 0$
$\sqrt{x^2} =  x $	<b>Exemple</b> : Déterminer la valeur exacte de $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$ . On a : $(3 - 2\sqrt{5})^2 = 29 - 12\sqrt{5}$ . Donc $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} =  3 - 2\sqrt{5} $
$ y  =  x $ signifie $x = y$ ou $x = -y$	<b>Exemple</b> : $ 2x + 1  =  3x - 5 $ signifie que $2x + 1 = 3x - 5$ ou $2x + 1 = -3x + 5$
$ x  =  -x $	<b>Exemple</b> : pour $x = -\sqrt{13}$ ; $ \sqrt{13}  = \sqrt{13}$ et $ -(\sqrt{13})  = \sqrt{13}$
$ xy  =  x  y $ et $\left \frac{x}{y}\right  = \frac{ x }{ y }$ ( $y \neq 0$ ).	<b>Exemple</b> : $ 2x(x^2 - 2x + 6)  =  2x  x^2 - 2x + 6 $
$ x + y  \leq  x  +  y $	<b>Exemple</b> : avec $x = -3$ et $y = 5$ on a : $ x + y  = 2$ ; $ x  +  y  = 8$

**MODULE 1 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS**

**Chapitre** : Calcul dans  $\mathbb{R}$

**Leçon 3** : Puissances, Calculs approchés, Ecriture scientifique.

**Objectif pédagogique** : Découvrir les propriétés des nombres et les utiliser pour lire ou écrire, interpréter les informations comportant des chiffres. Pour réagit verbalement sur des informations comportant des chiffres.

**Motivation** : Chaque jour nous sommes appelées à utiliser les nombres pour : Déterminer un nombre entier de carreaux suffisant pour le revêtement total d'une surface. Déterminer les dates de coïncidence de deux marchés périodiques, les dimensions d'un terrain. Situer deux objets en mouvement rectiligne par rapport à un autre fixe. Partager des biens... Lire et interpréter un texte comportant des nombres : recette de cuisine ; prix des articles ; budget d'un État ... Informer autrui d'un rabais, d'une hausse, d'une donnée météorologique ... **Cette leçon donne des outils pour pouvoir le faire aisément.**

**III. 1. PUISSANCES.**

**Activité :**

1. Montrer que le nombre suivant est un entier naturel :  $A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} \times \frac{12^5}{8^2 \times 15}$ .
2. Simplifier les écritures suivantes :  $B = \frac{64 \times 28^{-3}}{0,49}$ ,  $C = \frac{(-2)^7 (-6)^5 (-3)^{10}}{(18)^4 (-12)^3}$  et  $D = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{-9}{2}\right)^3$

**Résumé :**

<b>OPERATIONS AVEC DES PUISSANCES</b>	
Notation $a^n$	<p><math>a</math> est un entier relatif et <math>n</math> un entier naturel.</p> <p><math>a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}</math> (<math>n</math> facteurs égaux à <math>a</math>). <math>a^0 = 1</math> et <math>a^n = \frac{1}{a^{-n}}</math> (<math>a \neq 0</math>).</p>
Règles de calcul	<p>Pour tout réels non nuls <math>a</math> et <math>b</math> et pour tous entiers relatifs <math>m</math> et <math>n</math>.</p> <p>On a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}</math></li> <li>• <math>a^m \times a^n = a^{m+n}</math> ;</li> <li>• <math>(a^m)^n = a^{m \times n}</math> ;</li> <li>• <math>(a \times b)^n = a^n \times b^n</math> ;</li> <li>• <math>\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}</math> ; <math>\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}</math></li> <li>• <math>(a + b)^n \neq a^n + b^n</math></li> <li>• <math>a^n + b^m \neq a^{n+m}</math></li> <li>• <math>(-a)^n = \begin{cases} a^n &amp; \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n &amp; \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}</math></li> </ul>
Puissance et racine	<p>Soit <math>n</math> un entier et <math>a</math> un nombre réel positif.</p> <p><math>\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = (a^n)</math>    <math>\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{(a^n)^2 \times a} = (a^n)\sqrt{a}</math></p>

**Exemple** : Simplifier l'écriture suivant :  $D = \frac{5^7 \times (2^{-3})^5 \times 10^4}{(5^2)^5 \times (2^{-5})^2}$

### III. 2. Calcul approché

#### Activité 4 :

Compléter le tableau suivant :

Valeur	$\frac{22}{7}$	$\frac{15\pi}{4}$	$3\sqrt{2} - \sqrt{11}$	$\tan(10^\circ)$
Écriture décimale				
Troncature à 4 décimales				
Valeurs approchées à $10^{-4}$ par défaut				
Valeurs approchées à $10^{-4}$ par excès				
Valeur arrondies à $10^{-2}$ près.				

#### Résumé 4

Valeurs approchées d'un nombre.

Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif.

**D1** :  $a$  est une valeur approchée de  $x$  à la précision  $\alpha$  signifie que :  $|x - a| < \alpha$ .

**D2** :  $a$  est une valeur approchée par défaut de  $x$  à la précision  $\alpha$  signifie que :  $a < x < a + \alpha$

**D3** :  $a$  est une valeur approchée par excès de  $x$  à la précision  $\alpha$  signifie que :  $a - \alpha < x < a$

**D4** : le nombre  $\alpha$  est appelé **incertitude absolue**, et le nombre  $|x - a|$  est appelé **erreur absolue**.

**D5** : pour l'intervalle suivant  $m < x < n$  avec  $m$  et  $n$  de même signe, la **valeur approchée est**  $a = \frac{m+n}{2}$ , la **précision est**  $\alpha = \frac{n-m}{2}$ . Ainsi on a :  $\left| x - \frac{m+n}{2} \right| < \frac{n-m}{2}$ .

**D6** : Tout nombre  $m$  s'écrivant sous la forme  $m = a \times 10^n$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $1 \leq |a| < 10$ , est une écriture scientifique de  $m$ .

**Exemple :**

1. Donner l'écriture scientifique de  $A = \frac{1,092 \times 10^{-4} (-14 \times 7^{-34})^5}{(0,035)^{-23}}$ .

2. On plonge une pyramide dans un bassin rempli d'eau. Cette pyramide a une base rectangle de longueur  $L \approx 32,4$  cm et de largeur  $l \approx 23,7$  cm, avec des valeurs approchées à  $10^{-1}$  près.

a) Calculer un encadrement de  $L \times l$ , puis  $\frac{1}{l \times L}$ .

b) En déduire un encadrement de la hauteur  $h$  de la pyramide.

# Cours sur la notion de groupe

Classe 2<sup>nd</sup>e C

- **MODULE 17 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS.**
- **CHAPITRE IV : NOTION DE GROUPE.**
- **Date et nombre de périodes : ...**

## *Compétences exigées :*

1. Montrer qu'une loi de composition est interne.
2. Montrer qu'une loi de composition interne :
  - est associative ;
  - est commutative ;
  - admet un élément neutre.
3. Montrer qu'un élément admet un symétrique par rapport à une loi.
4. Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe.
5. Utiliser les propriétés de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  pour montrer que  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}^*, \times)$  sont des groupes commutatifs.

## *Motivation :*

Nous savons résoudre les équations de degré 1, 2, 3 et 4. Qu'en est-t-il des équations de degré supérieur ou égal à 5 ?

## *Pré-requis :*

Notions élémentaires d'ensembles,

Ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$

Notions d'appartenance aux ensembles,

Addition, soustraction, multiplication et Division.

## *Situation problème :*

Lors de ses multiples révisions, Teleshore, élève en classe de seconde C a constaté que certains ensembles de nombres sont symétriques par rapport à zéro. Il se demande s'il est le premier à faire ce constat et aussi il se demande quelles autres propriétés peuvent avoir

les ensembles. Finalement, il se demande quel nom donne t'on à un ensemble vérifiant un certain nombre de propriétés en mathématiques ?

**Activité d'apprentissage :**

1. (a) Complète par  $\in$  ou  $\notin$  :

$2 \in \mathbb{N}$  et  $7 \in \mathbb{N}$  ; On a  $2 - 7 \dots \mathbb{N}$  ; Quels que soient les nombres entiers naturels  $a$  et  $b$ , on a :  $a + b \dots \mathbb{N}$  ; on dit que " + " est une loi de composition interne sur  $\mathbb{N}$  ; " - " n'est pas une LCI sur  $\mathbb{N}$

$2 \in \mathbb{Z}$  et  $7 \in \mathbb{Z}$  ; On a  $2 - 7 \dots \mathbb{Z}$  ; Quels que soient les nombres entiers relatifs  $a$  et  $b$ , on a :  $a - b \dots \mathbb{Z}$ . Conclure

Quels que soient les nombres réels  $a$  et  $b$ , on a :  $a + b \dots \mathbb{R}$ ,  $a - b \dots \mathbb{R}$  et  $a \times b \dots \mathbb{R}$ . Conclure.

- (b) Complète : Pour tout réel  $x$ , on a :

$$x + 0 = \dots + x = \dots ;$$

$$x \times 1 = \dots \times x = \dots ;$$

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $x + 0 = x$  le fait d'ajouter 0 ne change rien

De même, pour tout nombre réel  $x$ ,  $x \times 1 = x$  le fait de multiplier par 1 ne change rien.

0 et 1 sont appelés respectivement élément neutre pour l'addition et pour la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .

- (c) Complète : Pour tout réel  $a$ , on a :

$$a + (-a) = (-a) + \dots = \dots$$

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ alors } a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times \dots = \dots$$

On dit que  $a$  admet un symétrique pour + dans  $\mathbb{R}$ , ce symétrique est  $-a$ .

De même  $a$  admet un symétrique pour  $\times$  dans  $\mathbb{R}$  et ce symétrique est  $\frac{1}{a}$ .

**Note :** Un ensemble dont tous les éléments admettent un symétrique pour la loi + est un ensemble symétrique par rapport à 0.

2. (a) Effectuer les opérations suivantes :  $3+5$  puis  $5+3$ . Comparer les résultats obtenus. Effectuer ensuite les opérations suivantes :  $3-5$  puis  $5-3$ . Comparer les résultats obtenus.

On dit que la loi + est commutative. La loi - n'est pas commutative.

- (b) Effectuer les opérations suivantes :  $(8 + 4) + 2$  puis  $8 + (4 + 2)$ . Comparer les résultats obtenus.

Effectuer ensuite les opérations suivantes :  $(8 \div 4) \div 2$  puis  $8 \div (4 \div 2)$ . Comparer les résultats obtenus.

On dit que la loi + est associative. La loi  $\div$  n'est pas associative.

**Résumé :**

**(1) Structures**

Un ensemble est une collection d'éléments. un élément appartient ou pas à un ensemble. Un ensemble seul ne comporte aucune organisation, aucune structure. Les éléments sont en

vac. Si nous voulons organiser ("structurer") un ensemble, il faut ajouter des contraintes. On parle donc de structures algébriques : c'est à dire que l'ensemble est muni d'une ou de plusieurs lois. Une loi est une opération comme  $+$  dans l'ensemble des entiers naturels.

Plus la ou les lois associées à un ensemble auront des propriétés remarquables, plus la structure obtenue sera intéressante.

## (2) LCI et Magma note :l'enseignant pourra aussi préciser aux élèves les notations **truc**( $\tau$ ), **rond** ( $\circ$ ) et **antitruc** ( $\perp$ )

Considérons un ensemble  $G$  quelconque non vide (fini ou infini), définissons une opération  $*$  dans  $G$  agissant sur deux éléments (distincts ou non) de  $G$ . Si l'on obtient toujours un élément de  $G$ , on dira que la loi  $*$  est une **loi de composition interne (LCI)** ou que l'ensemble  $G$  est stable pour la loi  $*$ .

**Définition** (formelle) Soit  $G$  un ensemble non vide, on appelle loi de composition interne sur  $G$ , toute application de  $G \times G \rightarrow G$ .

**Exemple** :  $G = \{1, 2, 3\}$

$+$  n'est pas une LCI dans  $G$ , en effet  $3 + 2 = 5$  et  $5 \notin G$

Si nous prenons  $G = \mathbb{N}$

$+$  est une LCI dans  $\mathbb{N}$ , en effet  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \in \mathbb{N}$

**Définition** : On appelle magma tout couple  $(G, *)$  où  $G$  est un ensemble et  $*$  une loi de composition interne dans  $G$ .

**Remarque** : Le magma est la structure algébrique la plus faible que l'on puisse construire. Aucune propriété particulière n'est requise sur la loi  $*$ .

**Exemples** : (à prouver par les élèves par des contres exemples)

Dans  $\mathbb{Q}$ ,  $+$  est une LCI

Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\times$  est une LCI

Dans  $\mathbb{N}$ ,  $-$  n'est pas une LCI

Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\div$  n'est pas une LCI

## (3) commutativité

**Définition** :

Soit  $(G, *)$  un magma, on dit que  $*$  est commutative si pour tout  $x, y \in G$ , on a :

$$x * y = y * x$$

**Exemple** :

Dans  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$  et dans  $\mathbb{R}$  l'addition et la multiplication sont commutatives.

La soustraction quant à elle n'est pas commutative.

## (4) élément neutre, magma unifère.

**Définition** : (Formelle)

Soit  $(G, *)$  un magma. S'il existe un élément  $e$  de  $G$  tel que pour tout élément  $x$  de  $G$  :

$$x * e = e * x = x$$

On dit que  $e$  est élément neutre pour  $*$ .

On doit vérifier à la fois  $x * e$  et  $e * x$  parce que  $*$  n'est pas forcément commutative.

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma. Si  $*$  possède un élément neutre, on dit que  $(G, *)$  est un magma unifère.

**Exemples :**

0 est l'élément neutre pour  $+$  dans  $\mathbb{R}$

1 est l'élément neutre pour  $\times$  dans  $\mathbb{R}$

### (5) Associativité, monoïde

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma, on dit que  $*$  est associative si pour tout  $x, y, z \in G$ , on a :  
 $x * (y * z) = (x * y) * z$ .

**Exemple :**

Dans  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$  et dans  $\mathbb{R}$  l'addition et la multiplication sont associatives.

L'addition de vecteurs est associative.

**Définition :**

On dit que le couple  $(G, *)$  est un monoïde si c'est un magma unifère associatif.

### (6) Symétrique, élément simplifiable.

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma unifère, on dit qu'un élément  $x$  de  $G$  admet un symétrique pour  $*$  s'il existe un élément  $x'$  de  $G$  tel que :

$x * x' = x' * x = e$  où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

**Vocabulaire :** On dit aussi que  $x$  et  $x'$  sont symétriques ; ou encore que  $x$  est symétrisable.

**Exemple :** Dans  $\mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$  et dans  $\mathbb{R}$ , pour tout nombre  $x$ , son symétrique pour l'addition est appelé opposé et se note  $-x$ .

Dans  $\mathbb{R}$ , tout élément à l'exception de 0 admet un symétrique appelé inverse pour la loi  $\times$ .

Dans  $\mathbb{N}$ , le seul élément symétrisable pour l'addition est 0.

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma, on dit qu'un élément  $s$  de  $G$  est simplifiable ou régulier à gauche si pour tout  $x, y \in G$ , on a :

$$s * x = s * y \implies x = y$$

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma, on dit qu'un élément  $s$  de  $G$  est simplifiable ou régulier à droite si pour tout  $x, y \in G$ , on a :

$$x * s = y * s \implies x = y$$

**Définition :**

Soit  $(G, *)$  un magma, on dit qu'un élément  $s$  de  $G$  est simplifiable s'il est simplifiable à gauche et à droite.

**Théorème :**

Tout élément admettant un symétrique est simplifiable.

**preuve**(évident par composition)

**Théorème :**

Soit  $(G, *)$  un monoïde. Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$ . Si  $a$  est symétrisable, alors l'équation  $a * x = b$  admet une unique solution qui est  $a^{-1} * b$ .

Attention l'équation  $x * a = b$  admet pour solution  $b * a^{-1}$ . Ces solutions sont identiques si la loi est commutative.

**preuve**(évident par composition)

**Généralisation :**

*Un groupe est donc un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre et, tout élément de l'ensemble admet un élément symétrique pour la loi de composition interne.*

Si en plus de toutes ces propriétés, la loi de composition interne est commutative, on dira que le groupe est commutatif ou abélien.

**Exercice d'application :**

1. Soit  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on définit une loi  $*$  dans  $G$  par :

pour tout  $a, b \in G$ ,  $a * b = a + b + ab$ .

(a) Démontrer que  $*$  est une loi de composition interne dans  $G$ .

(b) Démontrer que  $*$  est commutative et associative dans  $G$ .

(c) Déterminer l'élément neutre de  $G$  pour  $*$

(d) Démontrer que tout élément  $a$  de  $G$  a pour symétrique  $-\frac{a}{1+a}$  pour la loi  $*$

(e) En déduire les symétriques respectifs de  $-2$ ;  $\frac{1}{2}$  et  $1$ .

(f) Justifier que  $(G, *)$  est un groupe abélien.

2. Montrer que  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}^*, \times)$  sont des groupes commutatifs ou abéliens.

**Réponses à la situation problème :**

Telesphore n'est pas le premier à faire ce constat, en effet cette propriété vient de la notion de symétrique car un ensemble dont tous les éléments admettent un symétrique pour la loi  $+$  est un ensemble symétrique par rapport à  $0$ ; et la notion de symétrique a été longtemps étudiée.

En réalité, ce qu'a découvert Telesphore est une propriété de structure, intuitivement, il a muni ses ensembles de la loi  $+$ ; nous pouvons donc dire que si on muni un ensemble d'une LCI, on obtient un magma qui peut être commutatif, admettre un élément neutre, être associatif, avoir des éléments simplifiables.

Un ensemble muni d'une LCI est appelé **magma**, il est appelé **magma unifère** s'il possède un élément neutre, un ensemble est appelé **monoïde** s'il est un magma unifère associatif, un ensemble est appelé **groupe** s'il est muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre et, tout élément de l'ensemble admet un élément symétrique pour la loi de composition interne, et enfin un ensemble est appelé **groupe abélien** s'il est un groupe commutatif.

# FICHE PEDAGOGIQUE DE PREPARATION D'UNE LEÇON

<b>Etablissement :</b> COVAL		<b>Nom de l'enseignant :</b> GUELA KAMDËM Pierre	
		<b>Grade :</b> PLËG	
		<b>Matricule :</b>	
<b>Effectif:</b>	<b>Garçons :</b>	<b>Date :</b>	
	<b>Filles :</b>	<b>Classe :</b> 2 <sup>nd</sup> C	
<b>Discipline :</b> Mathématiques		<b>Lieu de déroulement de la leçon :</b> 2 <sup>nd</sup> S	
<b>Période :</b> ..... - .....		<b>Durée :</b> 110 min	<b>Séquence :</b>
<b>Module N° :</b> 17	<b>Titre du module :</b> RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS		
<b>Famille de situation :</b>	Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres		
<b>Titre du chapitre :</b>	EQUATION ET INEQUATIONS.		
<b>Ordre dans la progression</b>	Chapitre N°...		
<b>Titre de la leçon :</b>	Équations et inéquations dont la résolution se ramène à celle d'équations et inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ (leçon 1)		
<b>Motivation :</b>	La résolution de nombreux problèmes dans la vie se ramène à la résolution des équations ou inéquations de premier degré dans $\mathbb{R}$ . Cette leçon donne des techniques pour pouvoir le faire aisément.		
<b>Compétence attendue :</b>	Résoudre des équations, des inéquations se ramenant à celles de premier degré, rationnelle et avec valeur absolue		
<b>Matériel didactique :</b>	Craie, marqueur ; tableau ; support de cours, règle graduée		
<b>Démarche pédagogique :</b>	Méthode situation-problème ; questionnement ; présentation du matériel ; suivre les explications		
<b>Connaissance des prérequis :</b>	résoudre les équations et inéquations suivantes: $2x = 1$ ; $5x - 3 = 7$ ; $\frac{2}{5}x - 5 = 3x - \frac{4}{3}$ ; $3x - 5 \geq 2 + x$ ; $5x + 4 < 11x - 7$		
<b>Médiagraphie :</b>	Internet, livre au programme , livre programme, cours du professeur		

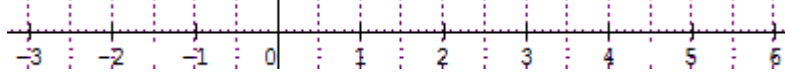
Étapes	Activités d'enseignement/Apprentissage		Consignes ou organisation de la classe	Résultat attendu	Timing
	Activité de l'enseignant	Activités de l'apprenant			
Intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Ecrire le titre du module au tableau ;</li> <li>* Ecrire le titre de la séquence du cours, le cas échéant de la séance.</li> </ul>	Noter		Titres	3 min
Position du (des) problème (s)	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Proposer une situation problème contextualisée ;</li> <li>* Donner les consignes,</li> <li>* Accorder du temps de travail ;</li> <li>* Circuler entre les groupes pour aider les élèves.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Situation problème</i></p> <p><b>Votre père a oublié le code de sa carte bancaire. Aidez-le à le retrouver sachant que ce nombre est l'unique nombre entier pair vérifiant l'inégalité</b></p> $ x - 4563.5  < 1.5.$	Manipuler, chercher, découvrir, pratiquer pour mieux comprendre (auto-construction des savoirs)	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Travail individuel ou en groupe organisé (recommandé) ;</li> <li>* Un représentant du groupe exposera la production le moment venu.</li> </ul>	Identification et énoncé le problème posé	10 min
Recherche et planification des actions à mener	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Donner la parole tour à tour au représentant de chaque groupe ;</li> <li>* Retenir uniquement les actions ciblées</li> </ul>	Tour à tour chaque groupe expose et argumente	Ordre, discipline et respect de l'opinion des autres	Identification des actions à mener	
Énoncé des compétences à développer	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Énoncer les compétences à développer chez les apprenants</li> </ul>	Noter		Énoncé des compétences	
Installation des ressources (une	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Conduire les activités suivant la méthode active</li> </ul>	Participer et répondre aux	Travailler en groupe de	Installation des	40 min

ou plusieurs séances)

**Activité :**

A- On se propose de résoudre :  $|x - 2| = 3$  et  $|x - 2| \leq 3$

a)  $|x - 2|$  représente la distance de  $x$  à 2. Soit la droite graduée ci-dessous :



Déterminer deux nombres réels  $x$  et  $y$  tels que la distance de 2 à  $x$  ou à  $y$  soit égale 3.

b) recopie et complète :

$|x - 2| = 3$  équivaut à  $x - 2 = 3$  ou  $x - 3 = \dots$  d'où  $x = \dots$  ou  $x = \dots$  .

comparer le résultat à la question a).

c) Déterminer trois nombres réels  $x, y$  et  $z$  tels que que la distance de 2 à chacun de ces nombres soit inférieure ou égale 3.

d) déterminer graphiquement la plus petite et la plus grande valeur de  $x$  telles que la distance de 2 à  $x$  soit inférieure ou égale 3.

e) en déduire la solution de l'inéquation  $|x - 2| \leq 3$

f) Recopie et complète :

$|x - 2| \leq 3$  équivaut à  $\dots < x - 2 < 3$

$\dots < x < \dots$

$s = ]\dots; \dots [$ . Comparer le résultat à f).

B-1) On se propose de déterminer le signe de  $S(x) = 5x - 10$  et

$P(x) = -2x - 8$

a) Résoudre les équations  $S(x) = 0$  et  $P(x) = 0$

b) En choisissant trois nombres dans chacun des intervalles ci-dessous et en remplaçant dans  $S(x)$  et  $P(x)$ , recopier et compléter les tableaux ci-dessous par les signes + ou - :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$S(x) = 5x - 10$	...	0	...

$x$	$-\infty$	-4	$+\infty$
$P(x) = -2x - 8$	...	0	...

2) On se propose de résoudre : (E) :  $\frac{5x+3}{-2x+4} = 6$  et (I) :  $\frac{5x+3}{-2x+4} \geq 6$

a) Déterminer la condition d'existence de  $\frac{5x+3}{-2x+4}$

b) Annuler le second terme de (E) en ajoutant  $-6$  de chaque côté de l'égalité puis réduire le côté gauche de l'égalité au même dénominateur.

c) En déduire la valeur de  $x$  qui annule le numérateur. Cette valeur

sollicitations de l'enseignant

quatre (04) élèves (Tenir compte de l'effectif de la classe)

ressources

est la solution de (E) si elle est différente de la valeur qui annule le dénominateur.

d) Recopier et compléter le tableau de signe ci-dessous et en déduire la solution de (I)

$x$	$-\infty$	$\frac{17}{21}$	$2$	$+\infty$
$17x-21$	...	0	...	...
$-2x+4$	...	...	0	...
$\frac{17x-21}{-2x+4}$	...	0	...	...

## Résumé

### Résumé :

- Le tableau de signe du polynôme  $P(x) = ax + b$  est donné par le tableau ci-dessous

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$P(x) = ax + b$	signe de $-a$	0	signe de $a$

- Equations et inéquations du type  $\frac{ax+b}{cx+d} = e$  ( $\frac{ax+b}{cx+d} \geq e$ )  
 -Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de  $x$  pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de  $x$  qui annulent le dénominateur.  
 -Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.  
 - On déduit enfin l'ensemble solution après avoir établi le tableau de signe s'il s'agit d'une inéquation. S'il s'agit d'une équation, la solution est la valeur qui annule le numérateur.

- Equations ou inéquations du type

$$|ax + b| = c \quad (|ax + b| < c, |ax + b| > c)$$

- $|ax + b| = c$  est équivalente à :  $ax + b = c$  ou  $ax + b = -c$

**Remarque:** 1- Si  $c$  est négatif alors  $S = \emptyset$

$$2- \text{ Si } c = 0 \text{ alors } S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

- $|ax + b| < c$  est équivalente à  $-c < ax + b < c$

Par la suite, on a :  $-c - b < ax < c - b$

$$\text{Et après, } \frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$$

$$\text{Enfin, } S = \left] \frac{-c-b}{a}; \frac{c-b}{a} \right[$$

**Remarque :** 1- Si l'inégalité est large ( $|ax + b| \leq c$ ) alors

Note le résumé

Travail individuel

Institutionnaliser la technique découverte.

20 min

	$S = \left[ \frac{-c-b}{a}; \frac{c-b}{a} \right].$ <p>2- Si <math>c</math> est négatif alors <math>s = \emptyset</math>  3-Si <math>c = 0</math> alors <math> ax + b  \leq 0</math> a pour solution  <math>s = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}</math> tandis que <math> ax + b  &lt; 0</math> a pour solution <math>s = \emptyset</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• , <math> ax + b  &gt; c</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Si <math>c</math> est négatif alors <math>s = \mathbb{R}</math></li> <li>2) Si <math>c = 0</math>, <math> ax + b  \geq 0</math> a pour solution <math>s = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}</math></li> <li>3) Sinon <math> ax + b  &gt; c</math> equivaut à <math>ax + b &gt; c</math> ou <math>ax + b &lt; -c</math>, d'où l'ensemble solution est la réunion de deux intervalles.</li> </ol> </li> </ul>				
Exercices d'applications	<p><b>Exercice1 :</b> situation problème</p> <p><b>Exercice2 :</b> Résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les équations et inéquations suivantes :</p> <p>a) <math>\frac{5x-6}{x-2} = 0</math>, b) <math>\frac{-2x+5}{3x-2} = 3</math>, c) <math>\frac{10x-4}{4x-2} \leq 0</math>, d) <math>\frac{4x-7}{-2x-5} &gt; 5</math>, e) <math>\frac{5x-1}{3x-2} \geq -2</math>, f) <math> 2x - 5  = 10</math>, g) <math> -4x - 8  = 0</math>, h) <math> 2x - 5  = -3</math>, i) <math> 5x + 4  \leq 6</math>, j) <math> 3x - 4  &lt; 2</math>, k) <math> 2x - 1  \leq 0</math>, l) <math> 3x + 2  &lt; 0</math>, m) <math> 5x + 3  &gt; 2</math>, n) <math> 3x - 4  &gt; -2</math>, o) <math> -3x - 1  &gt; 0</math>, p) <math> 6x - 18  \geq 0</math>, q) <math>-2x + 5 \geq 0</math></p>	Copie et traite.	Travail individuel	Recherche des solutions aux Problèmes de même famille	30 min
Conclusion	<p><b>Devoir :</b>  <b>Utiliser le livre de l'élève</b></p>	Note les devoirs à faire à la maison	Travail individuel	Remplissage du cahier de texte, résumé de la séance, devoirs, annonce de la prochaine leçon	5 min

# FICHE PEDAGOGIQUE DE PREPARATION D'UNE LEÇON

<b>Etablissement :</b> COVAL		<b>Nom de l'enseignant :</b> GUELA KAMDËM Pierre	
		<b>Grade :</b> PLËG	
		<b>Matricule :</b>	
<b>Effectif:</b>	<b>Garçons :</b>	<b>Date :</b>	
	<b>Filles :</b>	<b>Classe :</b> 2 <sup>nd</sup> C	
<b>Discipline :</b> Mathématiques		<b>Lieu de déroulement de la leçon :</b> 2 <sup>nd</sup> S	
<b>Période :</b> ..... - .....		<b>Durée :</b> 110 min	<b>Séquence :</b>
<b>Module N° :</b> 17	<b>Titre du module :</b> RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS		
<b>Famille de situation :</b>	Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres		
<b>Titre du chapitre :</b>	EQUATION ET INEQUATIONS.		
<b>Ordre dans la progression</b>	Chapitre N°...		
<b>Titre de la leçon :</b>	Résolution des problèmes se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ (leçon 2)		
<b>Motivation :</b>	De nombreux problèmes dans la vie se ramène aux équations ou inéquations de premier degré dans $\mathbb{R}$ . Cette leçon donne des techniques pour effectuer une mise en équation ou en inéquation.		
<b>Compétence attendue :</b>	Résoudre des problèmes dont la résolution se ramènent à celle d'équations et inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$		
<b>Matériel didactique :</b>	Craie, marqueur ; tableau ; support de cours		
<b>Démarche pédagogique :</b>	Méthode situation-problème ; questionnement; présentation du matériel ; suivre les explications		
<b>Connaissance des prérequis :</b>	Utilise ton brouillon pour résoudre les équations et inéquations suivantes: $\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}x = 6$ ; $-4y + 2 \geq 10$ $2x + 5 = 1 + 2x$ ; $-3w + 2 < 5w + 4$		
<b>Médiagraphie :</b>	Internet, livre au programme , livre programme, cours du professeur		

Étapes	Activités d'enseignement/Apprentissage		Consignes ou organisation de la classe	Résultat attendu	Timing
	Activité de l'enseignant	Activités de l'apprenant			
Intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Ecrire le titre du module au tableau ;</li> <li>✿ Ecrire le titre de la séquence du cours, le cas échéant de la séance.</li> </ul>	Noter		Titres	3 min
Position du (des) problème (s)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Proposer une situation problème contextualisée ;</li> <li>✿ Donner les consignes,</li> <li>✿ Accorder du temps de travail ;</li> <li>✿ Circuler entre les groupes pour aider les élèves.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Situation problème</i></p> <p><b>Une mère de soixante-quatre ans a une fille de 14 ans. Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère ?</b></p>	Manipuler, chercher, découvrir, pratiquer pour mieux comprendre (auto-construction des savoirs)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Travail individuel ou en groupe organisé (recommandé) ;</li> <li>✿ Un représentant du groupe exposera la production le moment venu.</li> </ul>	Identification et énoncé le problème posé	10 min
Recherche et planification des actions à mener	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Donner la parole tour à tour au représentant de chaque groupe ;</li> <li>✿ Retenir uniquement les actions ciblées</li> </ul>	Tour à tour chaque groupe expose et argumente	Ordre, discipline et respect de l'opinion des autres	Identification des actions à mener	
Énoncé des	✿ Énoncer les compétences à	Noter		Énoncé des	

compétences à développer	développer chez les apprenants			compétences	
Installation des ressources (une ou plusieurs séances)	<p>✳️ <b>Conduire les activités suivant la méthode active</b></p> <p><b>Activité :</b></p> <p>Dans une classe de 2<sup>nd</sup>C, le cinquième des élèves est née en 2003, le quart en 2002, le tiers en 2004, le sixième en 2005 et le reste soit 3 élèves en 2001. On désigne par <math>x</math> le nombre d'élève de cette classe.</p> <p>1) Exprimer en fonction de <math>x</math> le nombre d'élève née en 2002, 2003, 2004 et 2005. 2) En déduire l'effectif total de cette classe. En déduire le nombre d'élève née en 2002, 2003, 2004 et 2005.</p>	Participer et répondre aux sollicitations de l'enseignant	Travailler en groupe de quatre (04) élèves (Tenir compte de l'effectif de la classe)	Installation des ressources	40 min
Résumé	<p><b>Résumé :</b></p> <p>La résolution d'un problème du premier degré se fait en cinq étapes :</p> <p>1) Choix de l'inconnue 2) Mise en équation ou inéquation du problème 3) Résolution de l'équation ou de l'inéquation 4) Vérification du résultat 5) Interprétation du résultat et conclusion</p>	Note le résumé	Travail individuel	Institutionnaliser la technique découverte.	20 min
Exercices d'applications	<p><b>Exercice 1 :</b> situation problème</p> <p><b>Exercice 2 :</b></p> <p>Un théâtre propose deux tarifs pour la prochaine saison :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tarif A: 19€ la place «plein tarif» ;</li> <li>• Tarif B : 75 € l'abonnement pour la saison qui permet de voir chaque spectacle pour 6 €.</li> </ul> <p>À partir de combien de places achetées Pierre a-t-il intérêt à choisir le tarif B plutôt que le tarif A ?</p>	Copie et traite.	Travail individuel	Recherche des solutions aux Problèmes de même famille	30 min
Conclusion	<p><b>Devoir :</b></p> <p><b>Exercice 1 :</b> Dans un service de pédiatrie qui compte 24 personnes, il y a 2 fois plus de femmes que d'hommes. Quel est le nombre d'hommes dans ce service ?</p> <p><b>Exercice 2 :</b> Un gâteau nécessite les ingrédients suivants : 3 fois plus de farine que de sucre, trois fois plus de sucre que de beurre, et deux fois plus de chocolat que de sucre. Calculer le poids de chaque ingrédient pour un gâteau de 750 g.</p> <p><b>Exercice 3 :</b></p> <p>Quel nombre doit-on placer à l'intérieur du triangle pour obtenir 10 à l'arrivée ?</p>	Note les devoirs à faire à la maison	Travail individuel	Remplissage du cahier de texte, résumé de la séance, devoirs, annonce de la prochaine leçon	5 min
<b>Utiliser le livre de l'élève pour compléter la liste des devoirs à faire à la maison.</b>					

# FICHE PEDAGOGIQUE DE PREPARATION D'UNE LEÇON

<b>Etablissement :</b> COVAL		<b>Nom de l'enseignant :</b> GUELA KAMDËM Pierre	
		<b>Grade :</b> PLEG	
		<b>Matricule :</b>	
<b>Effectif:</b>	<b>Garçons :</b>	<b>Date :</b>	
	<b>Filles :</b>	<b>Classe :</b> 2 <sup>nd</sup> C	
<b>Discipline :</b> Mathématiques		<b>Lieu de déroulement de la leçon :</b> 2 <sup>nd</sup> S	
<b>Période :</b> ..... - .....		<b>Durée :</b> 110 min	<b>Séquence :</b>
<b>Module N° :</b> 17	<b>Titre du module :</b> RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS		
<b>Famille de situation :</b>	Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres		
<b>Titre du chapitre :</b>	EQUATION ET INEQUATIONS.		
<b>Ordre dans la progression</b>	Chapitre N°...		
<b>Titre de la leçon :</b>	Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Leçon 3)		
<b>Motivation :</b>	De nombreux problèmes dans la vie se modélisent par un système de deux équations à deux inconnues dans $\mathbb{R}$ . Cette leçon donne des techniques pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.		
<b>Compétence attendue :</b>	Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en utilisant la méthode par substitution ou par combinaison linéaire; Vérifier qu'un couple de réels est solution ou pas d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .		
<b>Matériel didactique :</b>	Craie, marqueur ; tableau ; support de cours		
<b>Démarche pédagogique :</b>	Méthode situation-problème ; questionnement; présentation du matériel ; suivre les explications		
<b>Connaissance des prérequis :</b>	Utilise ton brouillon pour résoudre les équations suivantes: $3x + 5 = 6$ ; $-5y + 2 = 11$ $2(x - 3) + 5 = 1 + 2(x - 1)$ ; $-5w + 2 = 5(w - 2) + 3$		
<b>Médiagraphie :</b>	Internet, livre au programme, livre programme, cours du professeur		

Etapas	Activités d'enseignement/Apprentissage		Consignes ou organisation de la classe	Résultat attendu	Timing	
	Activité de l'enseignant	Activités de l'apprenant				
Intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Ecrire le titre du module au tableau ;</li> <li>✦ Ecrire le titre de la séquence du cours, le cas échéant de la séance.</li> </ul>		Noter	Titres	3 min	
Position du (des) problème (s)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Proposer une situation problème contextualisée ;</li> <li>✦ Donner les consignes,</li> <li>✦ Accorder du temps de travail ;</li> <li>✦ Circuler entre les groupes pour aider les élèves.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Situation problème</i></p> <p><b>Paul achète 3 cahiers et 7 crayons à 875 F. dans la même boutique, jean achète 4 cahiers et 3 crayons à ensemble 850 ; Quel est le prix d'un cahier ? quel est le prix d'un crayon ?</b></p>		Manipuler, chercher, découvrir, pratiquer pour mieux comprendre (auto-construction des savoirs)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Travail individuel ou en groupe organisé (recommandé) ;</li> <li>✦ Un représentant du groupe exposera la production le moment venu.</li> </ul>	Identification et énoncé le problème posé	10 min
Recherche et planification des actions à mener	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Donner la parole tour à tour au représentant de chaque groupe ;</li> <li>✦ Retenir uniquement les actions ciblées</li> </ul>		Tour à tour chaque groupe expose et argumente	Ordre, discipline et respect de l'opinion des autres	Identification des actions à mener	
Enoncé des compétences à développer	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Enoncer les compétences à développer chez les apprenants</li> </ul>		Noter		Enoncé des compétences	
Installation des ressources	<ul style="list-style-type: none"> <li>✦ Conduire les activités suivant la méthode active</li> </ul>		Participer et répondre aux sollicitations	Travailler en groupe de quatre (04)	Installation des ressources	40 min

<p>(une ou plusieurs séances)</p>	<p><b>Activité 1 :</b> On considère le système (S) <math>\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}</math></p> <p>Dans chacune des équations, remplacer <math>x</math> par 2 et <math>y</math> par -3 respectivement. Que remarques-tu ? On dit que <math>(2; -3)</math> est la solution de (S).</p> <p><b>Activité 2 :</b></p> <p>On considère le système <math>\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x - 5y = 57 \end{cases}</math>.</p> <p><b>Justin</b> remarque : « Je sais résoudre une équation du premier degré à une inconnue donc si je peux écrire une inconnue en fonction de l'autre, je pourrai obtenir une équation du premier degré à une inconnue. ».</p> <p><b>a.</b> Écris toutes les possibilités qu'a Justin pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre.</p> <p><b>b.</b> En utilisant une des expressions trouvées, comment doit s'y prendre Justin pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue ?</p> <p><b>c.</b> Choisis une des expressions que tu as trouvées à la question <b>a.</b> et détermine une des deux inconnues.</p> <p><b>d.</b> Utilise maintenant la valeur déterminée à la question précédente pour trouver la valeur de la deuxième inconnue.</p> <p><b>e.</b> Teste le couple de valeurs <math>(x ; y)</math> trouvé et conclus.</p> <p><b>Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par substitution.</b></p> <p><b>Activités :</b></p> <p>On considère le système suivant : <math>\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ -3x - 7y = 25 \end{cases}</math>.</p> <p><b>a.</b> Résous ce système en utilisant la méthode par substitution.</p> <p><b>b.</b> Hakim remarque qu'en additionnant les deux premiers membres des équations, on réussit à « éliminer les termes en <math>x</math> » dans le calcul.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Qu'obtiens-tu en additionnant les premiers membres de ces équations ?</li> <li>• Dédus-en une équation d'inconnue <math>y</math> et résous-la.</li> </ul> <p><b>c.</b> Hakim se dit maintenant que pour trouver <math>x</math>, il suffirait de pouvoir « éliminer <math>y</math> » !</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comment devraient être les coefficients de <math>y</math> dans les deux équations pour « éliminer les termes en <math>y</math> » de la même façon qu'à la question précédente ?</li> <li>• Que peux-tu faire à chacune des équations pour <math>y</math> parvenir ?</li> <li>• Transforme les équations pour obtenir une équation du premier degré d'inconnue <math>x</math> en procédant de la même façon qu'à la question <b>b.</b></li> <li>• Résous cette équation.</li> </ul> <p><b>d.</b> Teste le couple trouvé et conclus.</p> <p><b>e.</b> Compare la méthode utilisée dans la question <b>a.</b> et celle que tu viens de mettre en œuvre dans les questions <b>b.</b> et <b>c.</b>.</p> <p><b>Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par combinaisons</b></p>	<p>de l'enseignant</p>	<p>élèves (Tenir compte de l'effectif de la classe)</p>		
<p>Résumé</p>	<p><b>Résumé :</b></p> <p>➤ Un système d'équations linéaires de deux équations à deux inconnues, est une</p>	<p>Note le résumé</p>	<p>Travail individuel</p>	<p>Institutionnaliser la technique découverte.</p>	<p>20 min</p>

	<p>expression de la forme (S) <math>\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}</math> où <math>a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Un couple <math>(x; y)</math> est solution est solution de (S) s'il vérifie simultanément les deux équations.</li> <li>➤ pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on peut utiliser la méthode par substitution ou par combinaison linéaire.</li> <li>➤ (S) peut admettre un unique couple solution, une infinité de solution ou aucune solution (dans ce cas, on écrit, <math>S = \emptyset</math>).</li> </ul>				
Exercices d'applications	<p><b>Exercice1 :</b> résoudre les systèmes suivants :</p> $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0.5x - y = 6 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$ <p><b>Exercice2 :</b> situation problème</p> <p>On désigne par x le prix d'un cahier et par y celui d'un crayon.</p> <p>a) Exprimer en fonction de x et y le prix d'achat total de Paul.</p> <p>b) Exprimer en fonction de x et y le prix d'achat total de Jean.</p> <p>c) En déduire par une méthode de ton choix la valeur de x et de y puis conclure.</p> <p><b>Exercice3 :</b></p> <p>Une salle de spectacle propose deux sortes de spectacles : pièces de théâtre ou concert. Toutes les places sont au même prix mais le tarif n'est pas le même s'il s'agit d'une pièce de théâtre ou s'il s'agit d'un concert.</p> <p>Alexandre réserve 2 places pour une pièce de théâtre et 4 places pour un concert, il paie 170 €.</p> <p>Bérénice réserve 3 places pour une pièce de théâtre et 2 places pour un concert, elle paie 135 €.</p> <p>Quels sont les tarifs respectifs pour une pièce de théâtre ou pour un concert ?</p>	Copie et traite.	Travail individuel	Recherche des solutions aux Problèmes de même famille	30 min
Conclusion	<p><b>Devoir :</b></p> <p><b>Utiliser le livre de l'élève</b></p>	Note les devoirs à faire à la maison	Travail individuel	Remplissage du cahier de texte, résumé de la séance, devoirs, annonce de la prochaine leçon	5 min

# FICHE PEDAGOGIQUE DE PREPARATION D'UNE LEÇON

<b>Etablissement :</b> COVAL		<b>Nom de l'enseignant :</b> GUELA KAMDËM Pierre	
		<b>Grade :</b> PLËG	
		<b>Matricule :</b>	
<b>Effectif:</b>	<b>Garçons :</b>	<b>Date :</b>	
	<b>Filles :</b>	<b>Classe :</b> 2 <sup>nd</sup> C	
<b>Discipline :</b> Mathématiques		<b>Lieu de déroulement de la leçon :</b> 2 <sup>nd</sup> S	
<b>Période :</b> ..... - .....		<b>Durée :</b> 110 min	<b>Séquence :</b>
<b>Module N° :</b> 17	<b>Titre du module :</b> RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS		
<b>Famille de situation :</b>	Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres		
<b>Titre du chapitre :</b>	EQUATION ET INEQUATIONS.		
<b>Ordre dans la progression</b>	Chapitre N°...		
<b>Titre de la leçon :</b>	Résolution graphique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et résolution des inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ( <b>Leçon 4</b> )		
<b>Motivation :</b>	De nombreux problèmes dans la vie se modélisent par un système de deux équations à deux inconnues dans $\mathbb{R}$ . Cette leçon donne des techniques pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.		
<b>Compétence attendue :</b>	Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires et des inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$		
<b>Matériel didactique :</b>	Craie, marqueur ; tableau ; support de cours, matériel de géométrie.		
<b>Démarche pédagogique :</b>	Méthode situation-problème ; questionnement; présentation du matériel ; suivre les explications		
<b>Connaissance des prérequis :</b>	Utilise ton brouillon pour : 1) résoudre les inéquations suivantes : $3x + 2 < 1$ , $-2x + 5 \leq 2$ 2) représenter graphiquement les droites dont voici les équations cartésiennes : (D1) : $2x + 3y - 5 = 0$ , (D2) : $y = 4x + 2$ , (D3) : $x = 3$ et (D4) : $y = -2$		
<b>Médiagraphie :</b>	Internet, livre au programme, livre programme, cours du professeur		

Etapas	Activités d'enseignement/Apprentissage		Consignes ou organisation de la classe	Résultat attendu	Timing																
	Activité de l'enseignant	Activités de l'apprenant																			
Intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Ecrire le titre du module au tableau ;</li> <li>✿ Ecrire le titre de la séquence du cours, le cas échéant de la séance.</li> </ul>		Noter	Titres	3 min																
Position du (des) problème (s)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Proposer une situation problème contextualisée ;</li> <li>✿ Donner les consignes,</li> <li>✿ Accorder du temps de travail ;</li> <li>✿ Circuler entre les groupes pour aider les élèves.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Situation problème</i></p> <p>La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, <math>M_1</math> et <math>M_2</math>. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 FCFA pour <math>M_1</math> et de 200 FCFA pour <math>M_2</math>.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>M_1</math></th> <th><math>M_2</math></th> <th>Temps libre</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sciage</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>Assemblage</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>22</td> </tr> <tr> <td>Sablage</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>12</td> </tr> </tbody> </table> <p>La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.</p>			$M_1$	$M_2$	Temps libre	Sciage	1	2	20	Assemblage	2	1	22	Sablage	1	1	12	Manipuler, chercher, découvrir, pratiquer pour mieux comprendre (auto-construction des savoirs)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Travail individuel ou en groupe organisé (recommandé) ;</li> <li>✿ Un représentant du groupe exposera la production le moment venu.</li> </ul>	10 min
	$M_1$	$M_2$	Temps libre																		
Sciage	1	2	20																		
Assemblage	2	1	22																		
Sablage	1	1	12																		

Recherche et planification des actions à mener	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Donner la parole tour à tour au représentant de chaque groupe ;</li> <li>✿ Retenir uniquement les actions ciblées</li> </ul>	Tour à tour chaque groupe expose et argumente	Ordre, discipline et respect de l'opinion des autres	Identification des actions à mener	
Énoncé des compétences à développer	✿ Énoncer les compétences à développer chez les apprenants	Noter		Énoncé des compétences	
Installation des ressources (une ou plusieurs séances)	<p>✿ Conduire les activités suivant la méthode active</p> <p><b>Activité :</b> on se propose de résoudre graphiquement :</p> $(S2) \begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 2 \leq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases} \quad (S3) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ <p>(I) <math>x + y - 2 &lt; 0</math>.</p> <p>a) a-1) résoudre par combinaison linéaire (S3). a-2) Représenter dans un repère orthonormé les droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives : <math>x + y - 2 = 0</math>, <math>2x - y + 2 = 0</math> et <math>y + 2 = 0</math>. Chaque droite divise le plan en deux parties. a-3) déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites (D1) et (D2) puis comparer ces coordonnées à la solution de (S3) déterminée en a-1).</p> <p>b) Choisir par ses coordonnées un point dans le demi-plan contenant le point (0,0), reporte les coordonnées dans l'inéquation : <math>x + y - 2 &lt; 0</math>. L'inégalité obtenue est-elle juste ? si oui, hachurer le demi-plan contenant (0,0) et délimité par la droite (D1), sinon hachurer le demi-plan opposé. La partie hachurée est la solution de l'inéquation <math>x + y - 2 &lt; 0</math>.</p> <p>c) Effectuer les mêmes opérations pour les inéquations <math>2x + 5y - 10 \leq 0</math> et <math>y + 2 \geq 0</math>. Le domaine du plan hachuré trois fois représente l'ensemble solution de (S2).</p> <p>d) Quel couple <math>(x; y)</math> de point de la zone solution de (S2) rend maximal l'expression <math>p = x + 2y</math>. <math>x</math> et <math>y</math> étant des nombres entiers naturels.</p>	Participer et répondre aux sollicitations de l'enseignant	Travailler en groupe de quatre (04) élèves (Tenir compte de l'effectif de la classe)	Installation des ressources	40 min

Résumé	<p><b>Résumé :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Pour résoudre graphiquement un système d'équation de la forme : <math>\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}</math>, on trace dans un repère orthonormée les droites d'équations : <math>ax + by = c</math> et <math>a'x + b'y = c'</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Si les deux droites sont sécantes, alors les coordonnées du point d'intersection représentent l'ensemble solution.</li> <li>2. Si les deux droites sont parallèles, alors le système n'admet pas de solution.</li> <li>3. Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solution qui est l'ensemble de tous les points se trouvant sur l'une des droites.</li> </ol> </li> <li>➤ Pour résoudre graphiquement une inéquation de 1<sup>er</sup> degré dans <math>\mathbb{R} \times \mathbb{R}</math> (<math>ax + by + c &gt; 0</math>), on représente d'abord dans un repère orthonormé la droite d'équation <math>ax + by + c = 0</math>, cette droite divise le plan en deux demi-plans. On hachure ensuite le demi-plan contenant un point dont les coordonnées rendent vraies l'inéquation. Cette partie hachurée est la solution de l'inéquation</li> <li>➤ Pour résoudre graphiquement un système d'inéquation de premier degré dans <math>\mathbb{R} \times \mathbb{R}</math>, on résout chaque inéquation. <ol style="list-style-type: none"> <li>1. S'il existe une partie du plan hachurée autant de fois que le nombre d'inéquations constituant le système, cette partie est la solution du système</li> <li>2. Sinon le système d'inéquation n'admet pas de solution.</li> </ol> </li> </ul>	Note le résumé	Travail individuel	Institutionnaliser la technique découverte.	20 min
Exercices d'applications	<p><b>Exercice1 :</b> résoudre graphiquement les systèmes suivants :</p> $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases}, \begin{cases} 0.5x - y = 6 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y \geq 0.5 \\ x + 2y < 5 \\ 2x - 3y \geq -4 \end{cases}$ <p><b>Exercice2 :</b> situation problème</p> <p>Posons <math>x</math> le nombre de bureaux du modèle <math>M_1</math> et <math>y</math> le nombre de bureaux du modèle <math>M_2</math>. Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage.</li> <li>b) Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier d'assemblage.</li> <li>c) Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sablage.</li> <li>d) En déduire que l compagnie fera un profit positif si et seulement si <math>x</math> et <math>y</math> sont solution du système : <math display="block">\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}</math></li> <li>e) Soit <math>P</math> le profit de l'entreprise, exprimer <math>P</math> en fonction de <math>x</math> et <math>y</math> puis en déduire <math>x</math> et <math>y</math> pour que le profit soit maximal.</li> </ol>	Copie et traite.	Travail individuel	Recherche des solutions aux Problèmes de même famille	30 min
Conclusion	<p><b>Devoir :</b></p> <p><b>Utiliser le livre de l'élève</b></p>	Note les devoirs à faire à la maison	Travail individuel	Remplissage du cahier de texte, résumé de la séance, devoirs, annonce de la prochaine leçon	5 min

# FICHE PEDAGOGIQUE DE PREPARATION D'UNE LEÇON

<b>Etablissement :</b> COVAL		<b>Nom de l'enseignant :</b> GUELA KAMDËM Pierre	
		<b>Grade :</b> PLËG	
		<b>Matricule :</b>	
<b>Effectif:</b>	<b>Garçons :</b>	<b>Date :</b>	
	<b>Filles :</b>	<b>Classe :</b> 2 <sup>nd</sup> C	
<b>Discipline :</b> Mathématiques		<b>Lieu de déroulement de la leçon :</b> 2 <sup>nd</sup> S	
<b>Période :</b> ..... - .....		<b>Durée :</b> 110 min	<b>Séquence :</b>
<b>Module N° :</b> 17	<b>Titre du module :</b> RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS		
<b>Famille de situation :</b>	Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres		
<b>Titre du chapitre :</b>	EQUATION ET INEQUATIONS.		
<b>Ordre dans la progression</b>	Chapitre N°...		
<b>Titre de la leçon :</b>	Equations et inéquations de second degré dans $\mathbb{R}$ (Leçon 5)		
<b>Motivation :</b>	La résolution de nombreux problèmes de la vie se ramène à la résolution des équations et inéquations de second degré, cette leçon donne les outils pour mener à bien cette opération.		
<b>Compétence attendue :</b>	Mettre sous la forme canonique un polynôme de second degré, factoriser un polynôme de second degré et résoudre une équation et une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$ .		
<b>Matériel didactique :</b>	Craie, marqueur ; tableau ; support de cours		
<b>Démarche pédagogique :</b>	Méthode situation-problème ; questionnement; présentation du matériel ; suivre les explications		
<b>Connaissance des prérequis :</b>	Factorise : $(2x + 1)(5x - 7) = 0$ , $25x^2 - 64 = 0$ , $8x^2 - 98 = 0$		
<b>Médiagraphie :</b>	Internet, livre au programme, livre programme, cours du professeur		

Étapes	Activités d'enseignement/Apprentissage		Consignes ou organisation de la classe	Résultat attendu	Timing
	Activité de l'enseignant	Activités de l'apprenant			
Intermédiaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Ecrire le titre du module au tableau ;</li> <li>✿ Ecrire le titre de la séquence du cours, le cas échéant de la séance.</li> </ul>	Noter		Titres	3 min
Position du (des) problème (s)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Proposer une situation problème contextualisée ;</li> <li>✿ Donner les consignes,</li> <li>✿ Accorder du temps de travail ;</li> <li>✿ Circuler entre les groupes pour aider les élèves.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Situation problème</i></p> <p>Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre vaut 116m et l'aire 705m<sup>2</sup>.</p> <p><b>Indication</b> Soient <math>x</math> la longueur et <math>y</math> la largeur, interpréter les deux données avoir deux équations, puis résoudre par substitution le système trouvé.</p>	Manipuler, chercher, découvrir, pratiquer pour mieux comprendre (auto-construction des savoirs)	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Travail individuel ou en groupe organisé (recommandé) ;</li> <li>✿ Un représentant du groupe exposera la production le moment venu.</li> </ul>	Identification et énoncé le problème posé	10 min
Recherche et planification des actions à mener	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Donner la parole tour à tour au représentant de chaque groupe ;</li> <li>✿ Retenir uniquement les actions ciblées</li> </ul>	Tour à tour chaque groupe expose et argumente	Ordre, discipline et respect de l'opinion des autres	Identification des actions à mener	
Énoncé des compétences à développer	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Énoncer les compétences à développer chez les apprenants</li> </ul>	Noter		Énoncé des compétences	
Installation des ressources	<ul style="list-style-type: none"> <li>✿ Conduire les activités suivant la méthode active</li> </ul> <p><b>Activité :</b></p>	Participer et répondre aux sollicitations de	Travailler en groupe de quatre (04)	Installation des ressources	40 min

(une ou plusieurs séances)

1) Démontrer que :  $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$  ;  $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

2) En suivant le même modèle, recopier et compléter :

$x^2 - 8x = (\dots + \dots)^2 - \dots$  ;  $x^2 + 5x = (\dots + \dots)^2 - \dots$

On appelle cette égalité, le début du développement d'un carré.

On considère le polynôme suivant :  $p(x) = 3x^2 + 7x - 10$ . Recopier et compléter :

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 7x - 10 \\ &= 3(x^2 + \dots x + \dots) \\ &= 3[(x + \dots)^2 - \dots + \dots] && \text{Utiliser 2)} \\ &= 3[(x + \dots)^2 - \dots] \end{aligned}$$

Cette dernière égalité s'appelle la forme canonique de  $p(x)$

3) En déduire la forme factorisée de  $p(x)$ .

4) Résoudre l'équation  $p(x) = 0$ .

5) Soit le polynôme  $k(x) = 3x^2 + 5x - 8$ , après avoir mis sous la forme canonique et factorisé  $k(x)$ , résoudre l'équation  $k(x)=0$

**Activité 2 :**

On considère les polynômes suivants :  $T(x) = 2x^2 + 2x - 12$ ,  $R(x) = -4x^2 + 3x + 1$ ,  $F(x) = 3x^2 - 24x + 48$ ,  $S(x) = -2x^2 + 2x - 5$  et  $V(x) = -4x^2 + 16x - 16$

1) Calculer  $T(-3)$  et  $V(2)$ . On dit que -3 et 2 sont les solutions des équations  $T(x) = 0$  et  $V(x) = 0$  respectivement

2) Mettre ces polynômes sous la forme factorisée.

3) En choisissant trois nombres dans chacun des intervalles ci-dessous et en remplaçant dans  $T(x)$ ,  $R(x)$ ,  $F(x)$ ,  $S(x)$  et  $V(x)$ , recopier et compléter les tableaux ci-dessous par les signes + ou - :

$x$	$-\infty$	$-3$		$2$	$+\infty$
$T(x)=2x^2+2x-12$	...	0	...	0	...

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		$1$	$+\infty$
$R(x)=-4x^2+3x+1$	...	0	...	0	...

$x$	$-\infty$		$4$	$+\infty$
$F(x)=3x^2-24x+48$	...		0	...

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$S(x)$	...	

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$V(x)$	...	0	...

l'enseignant

élèves  
(Tenir compte de l'effectif de la classe)

4) En déduire les solutions des inéquations  $T(x) < 0 (> 0; \leq 0; \geq 0)$ . De même pour  $R(x), F(x), S(x)$  et  $V(x)$ .

Résumé

**Résumé :**

- On appelle trinôme de second degré, tout polynôme de la forme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , où  $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .
- On appelle équation de second degré, toute équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  où  $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .
- Un nombre "s" est solution de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  si et seulement si "s" vérifie l'égalité  $as^2 + bs + c = 0$
- On appelle forme canonique de  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , l'expression de  $P(x)$  sous la forme  $P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$

- Si  $b^2 - 4ac < 0$  alors  $P(x)$  n'est pas factorisable et son tableau de signe est donné par :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\dots$	

Signe de a

- Si  $b^2 - 4ac > 0$  alors  $P(x)$  est factorisable, l'équation  $P(x) = 0$  admet deux solutions  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ . Le tableau de signe de  $p(x)$  est donné par :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\dots$	$\emptyset$	$\dots$	$\dots$

signe de a

signe contraire de a

Note le résumé

Travail individuel

Institutionnaliser la technique découverte.

20 min

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>b^2 - 4ac \geq 0</math> alors <math>P(x)</math> est factorisable, l'équation <math>P(x) = 0</math> admet une solutions <math>x_0</math>, Le tableau de signe de <math>p(x)</math> est donné</li> </ul> <p>par :</p> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>x_0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>ax^2 + bx + c</math></td> <td style="padding: 5px;">...</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">...</td> </tr> </table> <p style="margin-top: 10px;">signe de a</p> </div> <p>➤ Pour résoudre une inéquation de second degré, on dresse d'abord le tableau de signe du polynôme associé puis on en déduit la solution de l'inéquation.</p>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	...	0	...				
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$										
$ax^2 + bx + c$	...	0	...										
<b>Exercices d'applications</b>	<p><b>Exercice1 :</b> 1) déterminer la forme canonique, puis factorise si possible chacun des polynômes suivants :  <math>T(x) = 3x^2 - 3x - 18</math>, <math>R(x) = -2x^2 + 5x + 12</math>, <math>F(x) = 3x^2 - 24x + 45</math>,  <math>S(x) = -3x^2 + 5x - 7</math> et <math>V(x) = -6x^2 + 60x - 150</math>.</p> <p>2) résoudre dans <math>\mathbb{R}</math> les inéquations <math>T(x) &lt; 0 (&gt; 0; \leq 0; \geq 0)</math>. De même pour <math>R(x), F(x), S(x)</math> et <math>V(x)</math>.</p> <p><b>Exercice2 :</b> situation problème</p>	<b>Copie et traite.</b>	<b>Travail individuel</b>	<b>Recherche des solutions aux Problèmes de même famille</b>	<b>30 min</b>								
<b>Conclusion</b>	<p><b>Devoir :</b>  <b>Utiliser le livre de l'élève</b></p>	<b>Note les devoirs à faire à la maison</b>	<b>Travail individuel</b>	<b>Remplissage du cahier de texte, résumé de la séance, devoirs, annonce de la prochaine leçon</b>	<b>5 min</b>								

<b>Classe: 2nde C</b>		
<b>Module : 17</b>	<b>Chapitre 4: Généralités sur les fonctions</b>	<b>Nombre de périodes : 4</b> <b>Prof: OUAFEU PAULIN</b>

## Leçon 1 : Fonction et application

### Objectifs pédagogiques :

- Définir une fonction ;
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ;
- Déterminer par calcul les images directes et réciproques d'un nombre par une fonction ;
- Justifier que deux fonctions sont égales sur un intervalle.

### Motivation :

Certains appareils électroniques tels la calculatrice, l'ordinateur donnent des résultats aux grandeurs lorsqu'on entre un nombre. C'est l'exemple du prix de plusieurs objets connaissant leur nombre dans un supermarché, également la touche  $x^2$  de la calculatrice. Toutes ces grandeurs associées à un nombre feront l'objet de cette leçon. Nous verrons comment déterminer leurs expressions et les représenter.

### Contrôle de pré requis :

Soit  $f$  l'application affine définie par  $f(x) = -3x + 4$

- 1) Calculer  $f(0)$  et  $f(-2)$
- 2) Déterminer  $x$  tel que  $f(x) = 1$

### Situation problème :

Un système automatique de calcul d'impôts utilise des correspondances qui à partir du nombre d'articles donne le montant de l'impôt à payer. En fonction du type d'article, ce système dispose des correspondances définies par  $f(x) = 5x + 4$  ;  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  ;  $h(x) = \sqrt{x-3}$ . Déterminer l'impôt à verser lorsque une entreprise vend 5 articles de chaque type. A partir de combien d'articles les correspondances  $f, g$  et  $h$  sont-elles appliquées ?

### Activité d'apprentissage :

Soit les correspondances définies par  $f(x) = 5x + 4$  ;  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  ;  $h(x) = \sqrt{x-1}$  ;  
 $t(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

1)a/ Calculer  $f(4)$ ;  $g(2)$ ;  $h(5)$ ;

b/ Que représente  $f(4)$ ;  $g(2)$  et  $h(5)$  pour les nombres 4 ; 2 et 5.

2) Peut-on calculer  $g(1)$ ,  $h(2)$ ;  $t(-1)$  et  $t(1)$ ? Justifier ;

3) a/ Donner la condition d'existence de  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $t$ ;

b/ Traduire ces conditions en intervalles. Comment appelle t'on ces ensembles ?

4)a/ Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $h(a) = 5$  et  $g(b) = 2$ ;

b/ Que représentent  $a$  pour 5 et  $b$  pour 2?

5)a/ Pour  $x \neq 1$  et  $x \neq -1$ , simplifier  $t(x)$ ;

b/ Avec quelle condition,  $t(x) = g(x)$ ?

c/ En déduire le plus grand ensemble sur lequel  $t(x) = g(x)$ .

### Résumé :

#### 1) Définition :

Une fonction est une correspondance qui à un élément  $x$  d'un ensemble A associe au plus un élément  $y$  d'un ensemble B. On la note à l'aide des lettres  $f, g, h, t, F$ , etc...

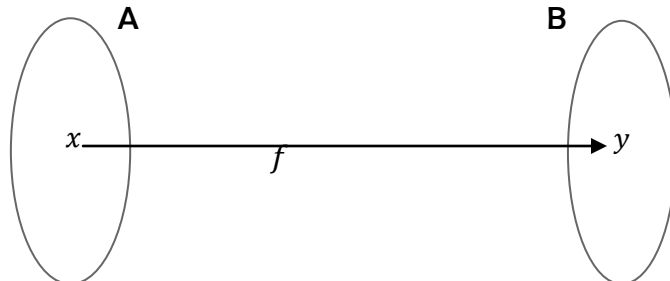
A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée.

On note  $f: A \longrightarrow B$

$x \longmapsto y$ . Avec  $y = f(x)$

$f(x)$  est l'image directe de  $x$  par  $f$ ,  $x$  est un antécédent ou une image réciproque de  $y$  par  $f$ . On note  $x \in f^{-1}(y)$ .

Représentation schématique



**Remarque :** Une fonction est une application si tous les éléments de l'ensemble de départ ont exactement une image directe

**Exemple :**  $f: [-2; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ , Déterminons l'image directe de 5 et un antécédent de 3

$$x \longmapsto \sqrt{x+2}$$

L'image directe de 3 par  $f$  est  $f(5) = \sqrt{5+2} = \sqrt{7}$

Soit  $x$  un antécédent de 3 par  $f$ , on a  $f(x) = 3$ , d'où  $\sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow x+2 = 9$

D'où  $x = 7 \in [-2; +\infty[$ . Donc  $f^{-1}(3) = \{7\}$

## 2) Ensemble de définition:

Soit  $f: A \longrightarrow B$  une fonction, on appelle ensemble de définition ou domaine de définition de  $f$ , noté  $Df$ , l'ensemble des éléments  $x$  de l'ensemble de départ  $A$  pour lesquels on peut déterminer l'image directe c'est à dire  $x \in Df$  si et seulement si  $f(x)$  existe.

**NB:** L'ensemble de définition se détermine à partir de la condition d'existence.

**Remarque:**

**R<sub>1</sub> :**  $\sqrt{f(x)}$  existe si et seulement si  $f(x) \geq 0$ ;

**R<sub>2</sub> :**  $\frac{1}{f(x)}$  existe si et seulement si  $f(x) \neq 0$ ;

**R<sub>3</sub> :** Tout polynôme existe pour tout réel  $x$ .

**Exemple :** Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 5 ; g(x) = \sqrt{-5x+7} ; h(x) = \frac{3x+1}{x^2-4} ; q(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x-4}$$

## 3) Fonctions égales

Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont égales sur un ensemble  $K$  si et seulement si

-  $f$  et  $g$  sont définies sur  $K$ , c'est à dire  $K$  est inclus dans les ensembles de définition de  $f$  et  $g$ .

-  $\forall x \in K, f(x) = g(x)$

**Exemple :**

On donne  $f(x) = |-x+3| + |2x+1|$  et  $g(x) = 3x-2$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel  $f$  et  $g$  sont égales.

On doit d'abord écrire  $f(x)$  sans symbole valeur absolue à l'aide d'un tableau de signe

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$
$-x + 3$	+		0	-
$ -x + 3 $	$-x+3$		$-x + 3$	$x-3$
$2x + 1$	-	0		+
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$		$2x + 1$	$2x + 1$
$f(x)$	$-3x + 2$		$x + 4$	$3x - 2$

On a donc  $f(x) = \begin{cases} -3x + 2 \text{ si } x \in ]-\infty; -\frac{1}{2}] \\ x + 4 \text{ si } [-\frac{1}{2}; 3] \\ 3x - 2 \text{ si } x \in [3; +\infty[ \end{cases}$ , on dit alors que  $f$  est une **fonction affine par intervalle**

**intervalle**

Ainsi il s'en suit que  $\forall x \in [3; +\infty[, f(x) = g(x) = 3x - 2$ , Donc  $f = g$  sur  $[3; +\infty[$

**NB :** Toute fonction dont l'expression dans chaque intervalle est affine (sous la forme  $ax + b$ ) est appelé fonction affine par intervalles.

### Exercices application :

#### Exercice 1:

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = |2x - 3| - 2|3 - x| + |x + 1|$

Montrer que  $g$  est une fonction affine par intervalle

#### Exercice 2:

Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{-x+10} + \frac{3}{x-7}}{\sqrt{x-4}}$

#### Exercice 3:

Répondre par vrai ou faux

- 1) Un nombre peut avoir deux images directes par une fonction;
- 2) Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction;
- 3) L'ensemble de départ est toujours l'ensemble de définition;
- 4) Deux nombres peuvent avoir la même image directe par une fonction;
- 5) Pour une application; l'ensemble de définition est différent de l'ensemble de départ.

## Leçon 2 : Représentation graphique d'une fonction

### Objectifs pédagogiques :

-Représenter graphiquement les fonctions définies par  $x^2$  ;  $x^3$  ;  $\sqrt{x}$  ;  $\frac{1}{x}$  ;  $ax^2$  ;  $\frac{a}{x}$  ;  $ax^3$  sur un intervalle borné

-Déterminer graphiquement l'image directe et l'image réciproque d'un intervalle borné par une fonction.

### Motivation :

Plusieurs phénomènes liés aux fonctions et qui varient sont interprétés avec des courbes graphiques. C'est le cas du battement du cœur à l'hôpital, de la courbe d'évolution du chômage dans un pays. Dans cette leçon nous verrons comment représenter une telle courbe connaissant l'expression de la fonction.

### Contrôle de pré requis :

- 1) Qu'est ce qu'un repère orthonormé ?
- 2) Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation  $y = 2x + 3$
- 3) Compléter le tableau ci-dessous

$x$				
$-3x^2$				

- 4) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par  $x^2 + 2$  ;  $1 - \sqrt{x}$  ;  $\frac{1}{x-5}$

### Situation problème :

La courbe d'évolution du prix d'un article (en millième de franc) en fonction de l'évolution de la taxe (en centaine de francs) sur le marché international est représenté par

**Prix**



**Taxes**

Déterminer le prix quand la taxe était de 100F ; Quel était la taxe quand l'article coutait 2000F

**Activité d'apprentissage :**

- 1) Soit les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies par  $f(x) = x^2; g(x) = x^3; h(x) = \frac{1}{x}$   
 a/ Déterminer leur ensemble de définition  
 b/ Compléter les tables de valeurs ci-dessous:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

$x$	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

$x$	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3
$h(x)$										

- 2) Pour chaque tableau, placer dans un repère orthonormé les point  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  où  $y$  prends respectivement les valeurs  $f(x); g(x)$  et  $h(x)$ .  
 3) Dans chaque repère, Relier les points M par une courbe.  
 4) Déterminer graphiquement, sur la courbe de  $f$ , le point A dont l'abscisse est 2; en déduire son ordonnée. Que représente cette ordonnée pour 2?  
 5) Déterminer graphiquement, à l'aide de la courbe de  $g$ , le point B dont l'ordonnée est 8; en déduire son abscisse. Que représente cette abscisse pour 8?  
 6) En déduire l'image directe par  $f$  de l'intervalle  $[0; 2]$  et l'image réciproque par  $g$  de l'intervalle  $[0; 8]$

**Résumé :**

**1) Courbe représentative d'une fonction :**

Pour tracer la courbe d'une fonction  $f$  connaissant son domaine, on peut faire une table des valeurs qui contient quelques nombres représentatifs du domaine et leurs images directes, puis placer les points M d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$ . Puis les relier par une courbe. On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$ .

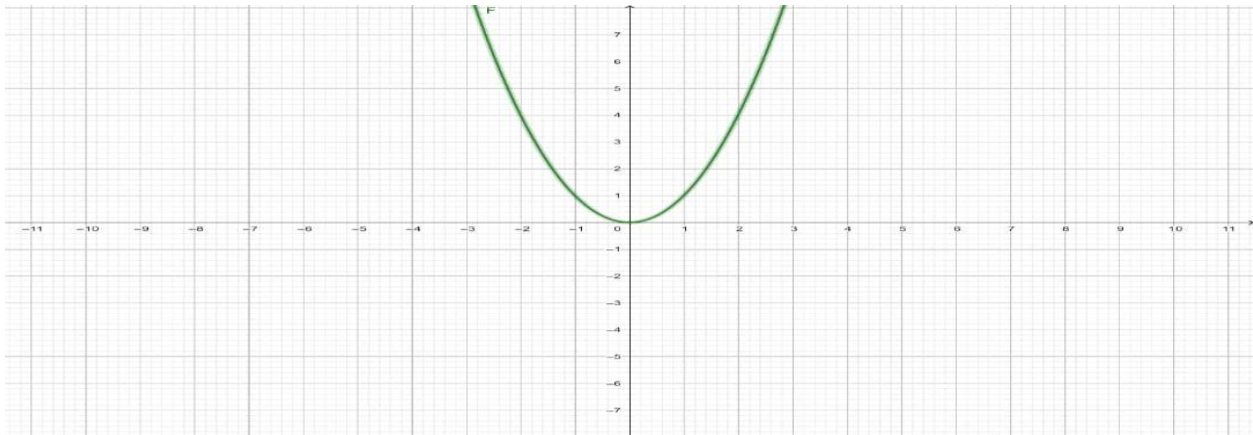
On note  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_f)$  si et seulement si  $y = f(x)$

**a) Fonction carré:  $f(x) = x^2$**

Table des valeurs

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Courbe représentative:

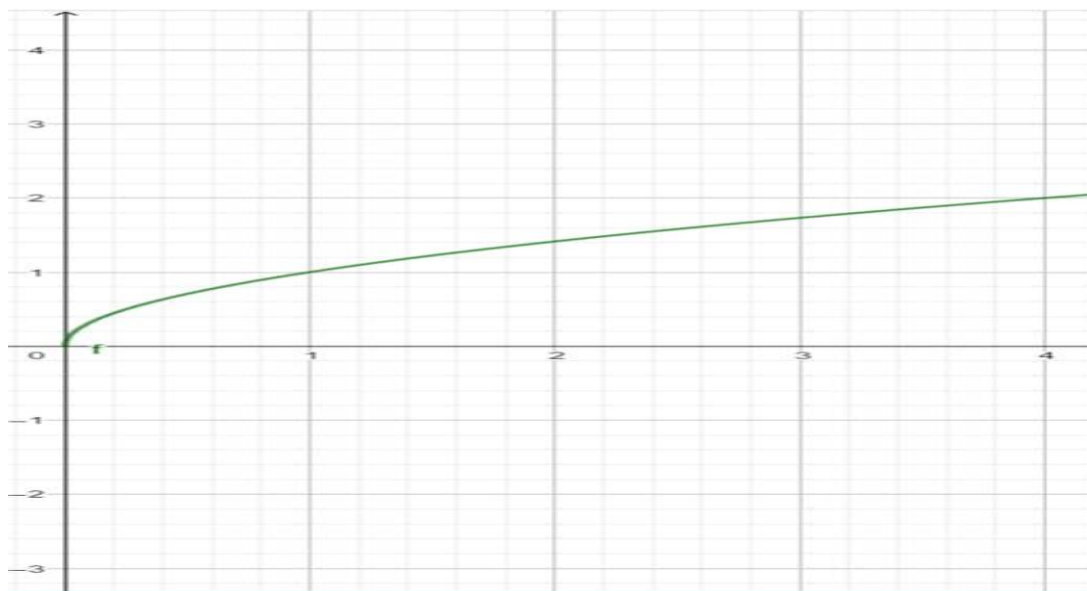


**b) Fonction racine:  $f(x) = \sqrt{x}$**

Table des valeurs:

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	1,4	1,7	2

Courbe représentative:

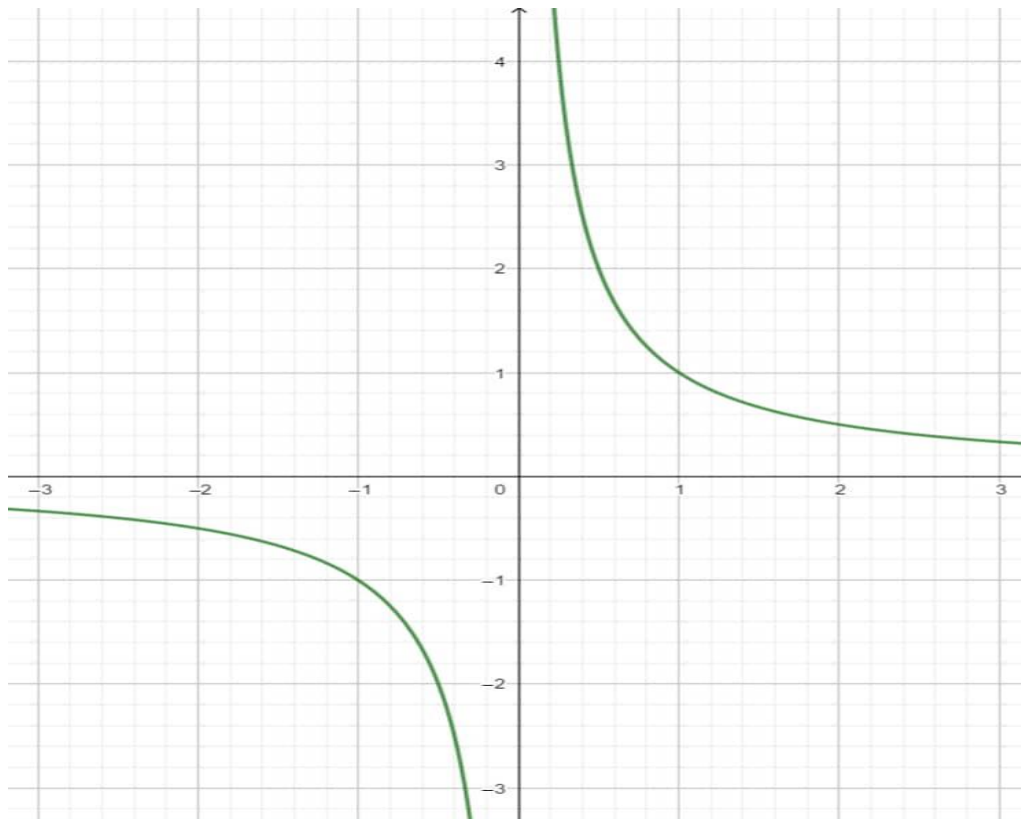


c) **Fonction inverse:**  $f(x) = \frac{1}{x}$

Table des valeurs:

$x$	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3
$h(x)$	-0,3	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	0,3

Courbe représentative

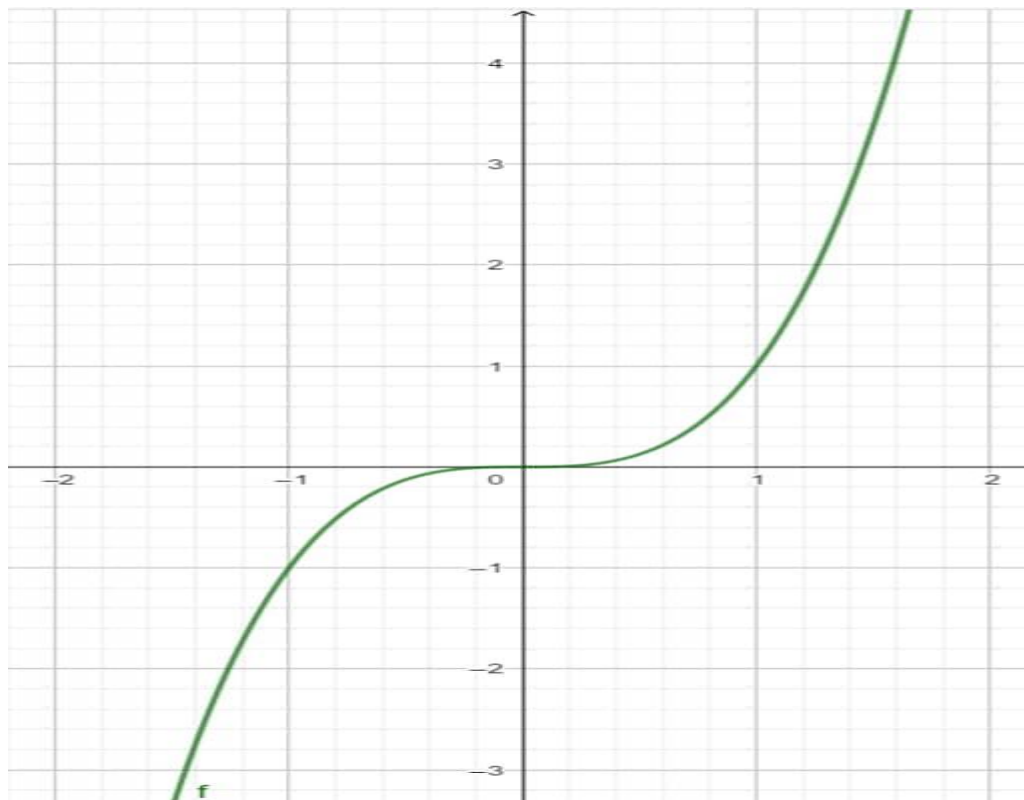


d) **Fonction cube:**  $f(x) = x^3$

Table des valeurs :

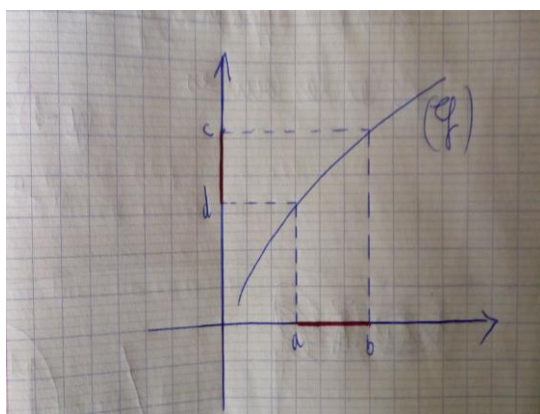
$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

Courbe représentative :



## 2) Image directe et réciproque d'un intervalle borné par une fonction

Pour déterminer l'image directe d'un intervalle borné par une fonction, on délimite d'abord la courbe correspondant à cet intervalle, puis l'on détermine le **maximum** (ordonnée du point le plus haut de cette partie de courbe), ainsi que le **minimum** (ordonnée du point le plus bas de cette partie de la courbe); puis à l'aide du maximum et du minimum on donne le résultat.



L'image directe de  $[a; b]$  est

$$f([a; b]) = [c; d]$$

L'image réciproque de  $[c; d]$  est

$$f^{-1}([c; d]) = [a; b]$$

### 3) Comparaison de deux fonctions à partir des représentations graphiques

Deux fonctions sont égales en un réel  $x_0$  si leurs courbes représentatives se rencontrent au point d'abscisse  $x_0$ .

Une fonction  $f$  est supérieure ou égale à une fonction  $g$  sur un intervalle  $K$  si la courbe de  $f$  est au-dessus de celle de  $g$  sur  $K$ .

Une fonction est positive sur un intervalle  $K$  si sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses sur  $K$ ; et négative sur  $K$  si elle est en dessous.

#### Exercices application :

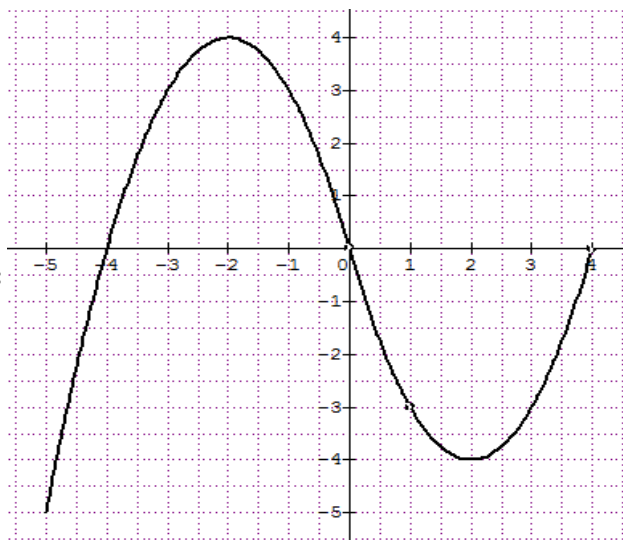
**Exercice 1 :** Représenter chaque fonction ci-dessous sur l'intervalle  $K$

$$f(x) = 3x^2 \quad K = [-1; 1] \quad ; \quad g(x) = \frac{3}{x} \quad K = \left[\frac{1}{3}; 6\right] \quad ; \quad h(x) = \sqrt{2x} \quad K = [0; 3]$$

#### Exercice 2 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction numérique à variable réelle  $h$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Par lecture graphique :

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $h$ .
- 2) Déterminer :  $h(3)$ ,  $h(-1)$
- 3) Déterminer le maximum et le minimum de  $h$ .
- 4) Déterminer les antécédents de 3;
- 5) Donner les solutions des équations et inéquations :  
 $h(x) = -2$ ,  $h(x) = 0$ ,  $h(x) \geq 3$
- 6) Donner l'image directe de  $[-3; 2]$
- 7) Donner l'image réciproque de  $[0; 3]$
- 8) Donner le tableau de signes de  $h$ .



#### Exercice 3 :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = |2x - 3| - 2|3 - x|$ .

- a) Écrire  $g(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
- b) En déduire la nature de  $g$ .
- c) Construire la représentation graphique de  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

### Exercice 4 :

1. a) Montrer que  $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$

b) En déduire la résolution de l'équation  $x^3 - 3x + 2 = 0$

2. On considère les fonctions  $p$  et  $q$  définies par  $p(x) = x^3$  et  $q(x) = 3x - 2$

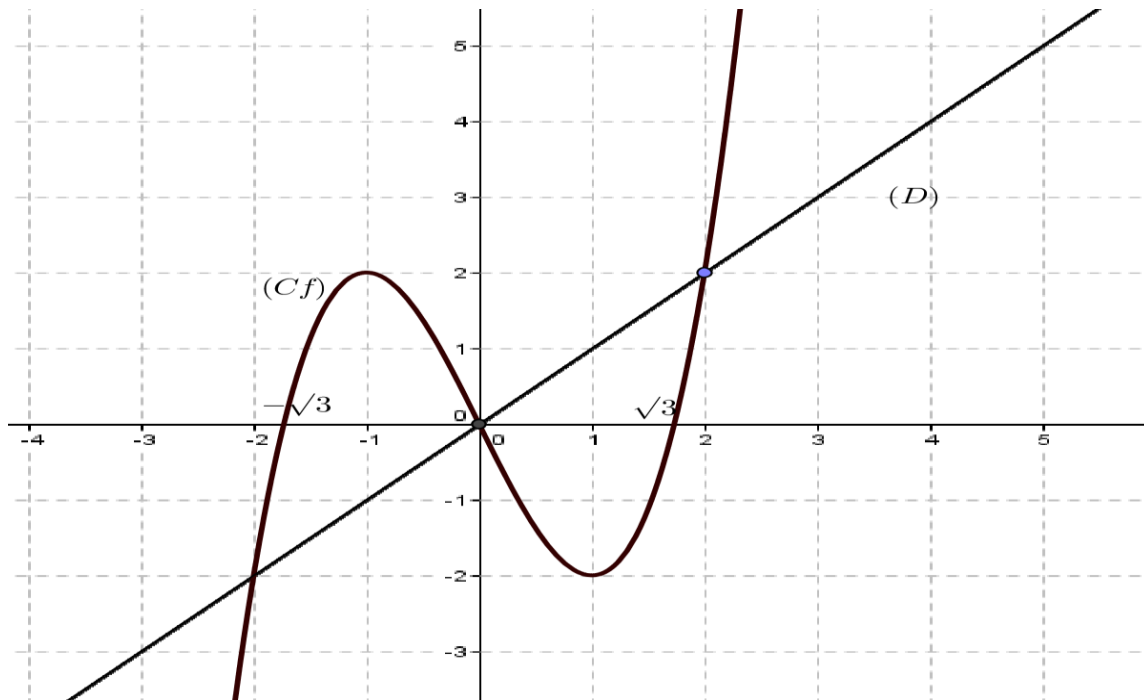
a) Tracer soigneusement les représentations graphiques  $C_p$  et  $C_q$  de  $p$  et  $q$  sur l'intervalle  $[-2; 2]$

b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de  $C_p$  et  $C_q$

c) Justifier que l'on pouvait déterminer ces points par calcul à l'aide de la question 1.b)

### Exercice 5 :

Soit les représentations graphiques ci-dessous



1) Déterminer l'équation cartésienne  $y$  de  $(D)$

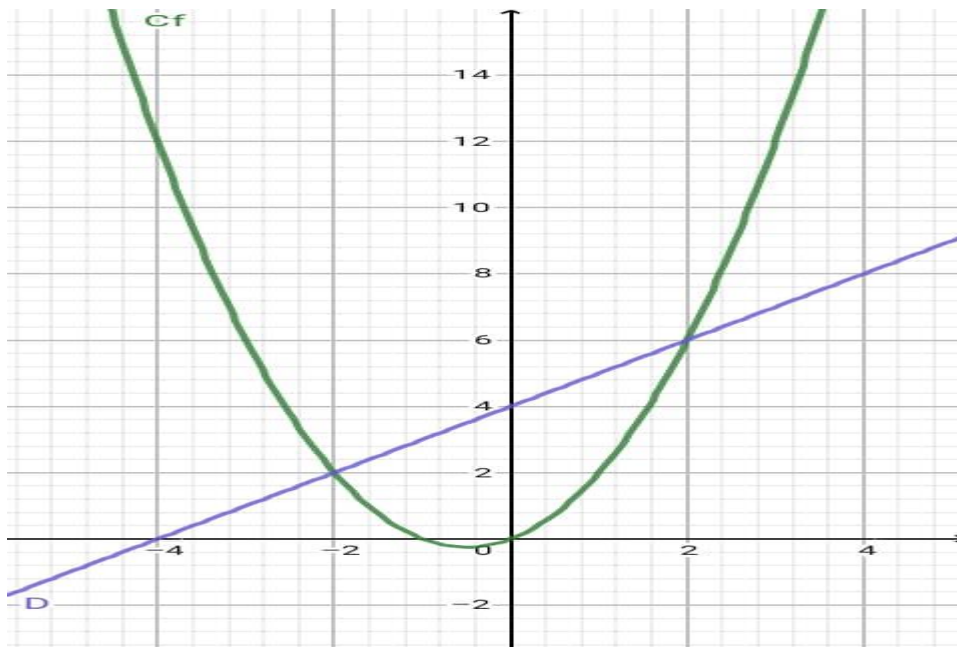
2) Résoudre graphiquement  $f(x) = y$ ;  $f(x) > y$ ;  $f(x) = 0$

3) Déterminer l'image directe de  $[-1; 2]$

## Exercice 6: Evaluation des compétences

### Situation :

Une entreprise fabrique du sucre en poudre, le cout de fabrication de  $x$  kilogrammes de sucre est exprimé à l'aide de la fonction C, définie par :  $c(x) = x^2 + x$ , exprimée en centaine de franc CFA et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous, la droite (D) représentant une autre fonction cout que le directeur de l'entreprise voudrait expérimenter et dont il n'a pas encore l'expression. À la sortie de l'usine, le sac de 50 kilogrammes est vendu à 30000F. Un grossiste veut acheter un stock de sucre placé au dépôt depuis plusieurs jours, le comptable évalue le cout de production de ce stock à 100000F.



### Taches :

- 1) Déterminer le bénéfice réalisé sur 5 kg de sucre.
- 2) Déterminer le prix de vente du stock que désire le client.
- 3) Déterminer le prix de vente lorsque que les deux couts de production sont égaux.

<b>Module 17: Relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres réels.</b>	
<b>Chapitre 6: Etude des fonctions usuelles</b>	
<b>Durée: 110min</b>	<b>Prof: OUAFEU PAULIN</b>

**Objectifs pédagogiques:**

- Déterminer le taux d'accroissement d'une fonction;
- Déterminer le sens de variation d'une fonction usuelle;
- Dresser le tableau de variation d'une fonction usuelle.

**Motivation:**

Certaines grandeurs telles le coût de production d'un bien matériel, la balance commerciale d'un pays sont exprimées par des fonctions usuelles. La connaissance de leur sens de variation permet de prévoir l'évolution de ces grandeurs en croissance, décroissance ou constance. Cette leçon nous permettra de savoir comment étudier une fonction usuelle.

**Contrôle des pré requis :**

1) Soit l'expression  $K = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

a- Donner la condition d'existence de  $K$ ;

b-Simplifier  $K$ ;

2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a$  soit strictement inférieur à  $b$ ;

a- Si  $a$  et  $b$  sont du même signe, donner le signe de  $a + b$ ;

b- Quel est le signe de  $a - b$ ?

3) Soit l'expression  $f(x) = x^3 + 5$ , exprimer de façon simplifiée l'expression  $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$  pour  $a$  et  $b$  deux réels distincts.

### Situation problème :

Le service comptable d'une entreprise de fabrication de jouets utilise une estimation du coût de production en centaines de francs de  $x$  jouets par l'expression  $f(x) = x^2 + 4x$ . Comment varient ce coût lorsque le nombre de jouets fabriqués augmente?

### Activité d'apprentissage:

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 4x$ ;

1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ ;

2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On pose  $T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$  avec  $a \neq b$ .

a- Montrer que  $T = a + b - 4$ ;

b- Supposons que  $a > 2, b > 2$ , déduire le signe de  $T$ ;

c- Supposons que  $a < 2, b < 2$ , déduire le signe de  $T$ ;

d- En supposant que  $a > b > 2$ , comparer  $f(a)$  et  $f(b)$ ;

e- En supposant que  $a < b < 2$ , comparer  $f(a)$  et  $f(b)$ ;

3) a- Les valeurs de  $f(x)$  pour  $x > 2$  augmentent- elles ou diminuent-elles quand les valeurs de  $x$  augmentent ?

b- Les valeurs de  $f(x)$  pour  $x < 2$  augmentent- elles ou diminuent- elles quand les valeurs de  $x$  augmentent ?

### Résumé :

#### 1) Taux d'accroissement :

Soit  $f$  une fonction numérique, on appelle taux d'accroissement de  $f$  le nombre réel défini par

$T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ ,  $a$  et  $b$  étant deux réels distincts du domaine de  $f$ .

## 2) Sens de variation d'une fonction :

### a) Fonction croissante

Une fonction  $f$  est croissante sur un intervalle  $K$  si son taux d'accroissement est supérieur ou égal à zéro sur  $K$ ; elle est strictement croissante quand le taux est strictement supérieur à zéro. Sa variation est représentée par la flèche orientée vers le haut et de gauche vers la droite.

**Exemple:** Montrons que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0; 4]$

Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts de l'intervalle  $[0; 4]$ .

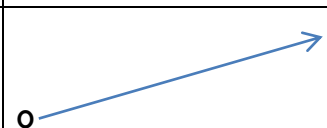
$$\text{On pose } T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a-b}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Nous remarquons que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

Par conséquent,  $T = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$  est strictement positif. Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 4]$

Son tableau de variation par exemple sur  $[0; 4]$  est

$x$	0	4
$f(x)$		2



### b) Fonction décroissante

Une fonction  $f$  est décroissante sur un intervalle  $K$  si son taux d'accroissement est inférieur ou égale à zéro sur  $K$ . elle est strictement décroissante quand le taux est strictement inférieure à zéro. Sa variation est représentée par la flèche orientée vers le bas et de gauche vers la droite.

**Exemple:** Montrons que la fonction  $f$  définie par  $g(x) = \frac{2}{x}$  est strictement décroissante sur  $[-2; -1]$

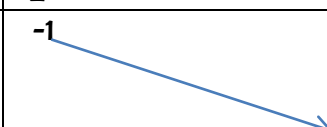
Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts de l'intervalle  $[-2; -1]$ .

$$\text{On pose } T = \frac{g(a)-g(b)}{a-b} = \frac{\frac{2}{a}-\frac{2}{b}}{a-b} = \frac{-2}{ab} < 0 \text{ car } a < 0 \text{ et } b < 0. \text{ D'ou } T < 0$$

Donc  $g$  est strictement décroissante sur  $[-2; -1]$

Son tableau de variation par exemple sur  $[-2; -1]$  est

$x$	-2	-1
$g(x)$	-1	-2



### C) Fonction constante:

Une fonction  $f$  est constante sur un intervalle  $K$  si son taux d'accroissement est égal à zéro sur  $K$ . Sa variation est représentée par la flèche horizontale orientée vers la droite.


Exemple:

Montrons que la fonction  $h$  définie par  $h(x) = 3$  est constante sur  $[-5 ; 10]$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts de l'intervalle  $[-5 ; 10]$ , On pose  $T = \frac{h(a)-h(b)}{a-b} = \frac{3-3}{a-b} = 0$ , par conséquent  $h$  est constante

Son tableau de variation par exemple sur  $[-5 ; 10]$  est

$x$	-5	10
$h(x)$	3	3



### d) Cas d'une fonction affine:

Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = ax + b$ . Pour deux réels quelconque  $p$  et  $q$ , son taux d'accroissement est  $T = \frac{(ap+b)-(aq+b)}{p-q} = a$ . On en déduit alors que:

Si  $a > 0$  alors  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  ;

Si  $a < 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  ;

Si  $a = 0$  alors  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$  ;

Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -3x + 5$  ;

Le coefficient directeur est  $a = -3 < 0$ ; d'où  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 6x$  ;

Le coefficient directeur est  $a = 6 > 0$ ; d'où  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercices d'application :

Exercice 1:

Soit  $g(x) = x^3 + 5x - 1$  ;

1) Déterminer le domaine de définition de  $g$  ;

2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  ;

a/ Montrer que le taux d'accroissement de  $g$  est  $T = a^2 + b^2 + ab + 5$  ;

b/ On suppose que  $a < b$  ;

i) Montrer que si  $a < 0$  et  $b < 0$  alors  $b^2 < ab < a^2$  ;

ii) Montrer que si  $a > 0$  et  $b > 0$  alors  $a^2 < ab < b^2$  ;

c/ En déduire le signe de T et le sens de variation de g sur IR

3) Sans faire de calcul, comparer  $g(100)$  et  $g(200)$ .

4) Dresser le tableau de variation de g sur  $[-2 ; 13]$ .

### Exercice 2:

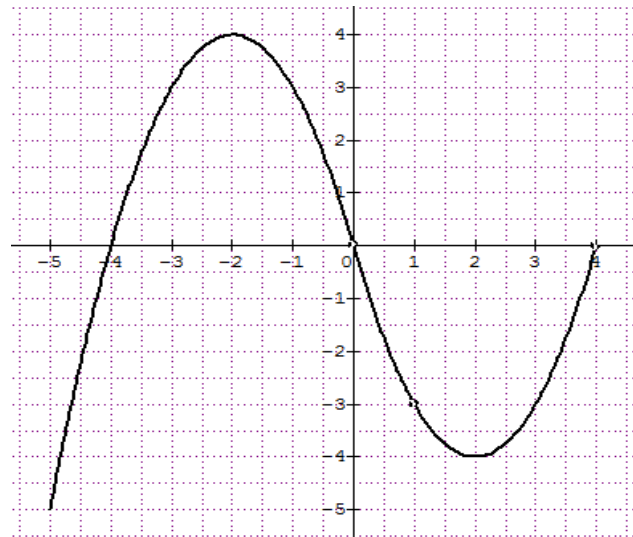
On se propose de résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E):  $x^2 - x - 6 = 0$

- 1) Justifier que pour  $x \neq 0$ , cette équation est équivalente à l'équation  $(E_0): x - 1 = \frac{6}{x}$
- 2) On pose  $f(x) = x - 1$ 
  - a) Quel est le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  ?;
  - b) Justifier que  $f$  est une fonction croissante sur  $D_f$  ;
  - c) Déduire le tableau de variations de  $f$  ;
- 3) On pose  $g(x) = \frac{6}{x}$ 
  - a) Déterminer le domaine de définition  $D_g$  de  $g$  ;
  - b) Quel est le sens de variation de  $g$  ?
  - c) Calculer les images par  $g$  des nombres  $-2 ; -1 ; 1$  et  $2$  ;
- 4) Construire dans le même repère les courbes (C f) de  $f$  et (C g) de  $g$  ;
- 5) En déduire l'ensemble solution de l'équation  $(E_0)$  : .

### Exercice 3:

Soit la représentation graphique d'une fonction  $f$  ci-dessous

- 1) comparer  $f(0,5)$  et  $f(1 ; 5)$
- 2) Comparer  $f(-3)$  et  $f(-3 ; 5)$
- 3) Dresser le tableau de variation de sur  $[-5 ; 4]$



**MODULE : 3 CONFUGURATION DU PLAN**

**CHAPITRE : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE**

**LECON : 1 ANGLES ORIENTES**

**OBJECTIFS :**

- Orientation du plan
- Présentation d'un angle orienté
- Cercle trigonométrique
- Mesure d'un angle orienté
- Points images des angles associés à un réel donné

**Situation problème :**

Deux coureurs parcourent une piste d'athlétisme circulaire. Ayant pris un même point de départ, les deux parcours suivant le sens des déplacements des aiguilles d'une montre. L'un parcourt un angle de  $90^\circ$  et l'autre un angle de  $270^\circ$ . Les deux coureurs sont-ils dès lors à des positions diamétralement opposées sur la piste ? Justifier

**Activité d'apprentissage :**

A<sub>1</sub>) i- En considérant que  $180^\circ$  vaut  $\pi$  radian, déterminer en radian  $90^\circ$  et  $270^\circ$

ii- Trouve un angle en radian  $\alpha$  de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  tel que  $\frac{3\pi}{2} = \alpha + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

A<sub>2</sub>) a- Construis un triangle ABC dans le sens contraire du déplacement des aiguilles d'une montre tel que l'angle en A est  $60^\circ$ , l'angle en B est  $30^\circ$  et l'angle en C est  $90^\circ$ .

b- Détermine en radian :  $mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ,  $mes(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ ,  $mes(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$  et  $mes(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

A<sub>3</sub>) Soient les angles  $\frac{30\pi}{4}$  et  $350^\circ$

a- Trouve un angle  $\alpha$  de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  dans chacun des cas suivants :

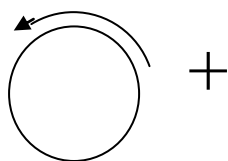
i-  $\frac{30\pi}{4} = \alpha + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

ii-  $350^\circ = \alpha + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

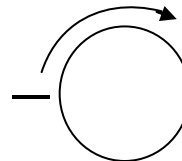
b- Que représente  $\alpha$  pour chacun de ces angles ?

**RESUME :**

Il existe deux façons et deux seulement de parcourir un cercle. On convient d'appeler **sens positif** ou **sens direct** le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre.



Sens positif ou sens direct



sens négatif ou sens indirect

Orienter un cercle c'est choisir le sens de parcours pour ce cercle. On dit qu'un plan est orienté si tous ses cercles sont orientés dans le même sens.

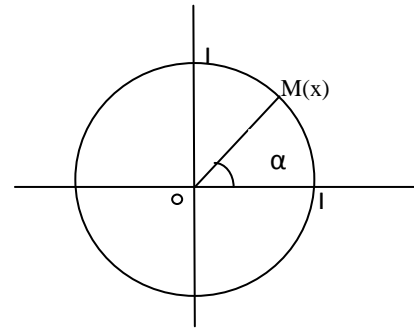
Une unité de longueur étant choisie, on appelle **cercle trigonométrie** du plan orienté tout cercle orienté dans le sens positif de rayon 1. Sa circonférence est  $2\pi$

Dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$  on a  $OI = OJ = 1$  et  $mes(\vec{OI}; \vec{OJ}) = \frac{\pi}{2}$

Soit  $X$  un angle.  $\alpha$  est **la mesure principale** de  $X$  si  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  et il existe un entier relatif  $k$  tel que  $X = \alpha + 2k\pi$

Pour tout réel  $x$ , il existe un unique réel  $\alpha$  de  $]-\pi; \pi]$  tel que  $x = \alpha + 2k\pi$ ,  $k$  étant un entier relatif et  $-\pi < \alpha \leq \pi$

Il existe un unique point  $M$  du cercle trigonométrique les que  $mes(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$ . Ce point est le **point image** du réel  $x$  sur le cercle trigonométrique



NB Deux angles orientés ont la même mesure s'ils ont la même mesure principale

**Exemple** : comparer  $\frac{7\pi}{3}$  et  $\frac{13\pi}{3}$

**Application** Trouver la mesure principale de  $-\frac{7\pi}{3}$  et  $\frac{2019\pi}{4}$  en utilisant la méthode par encadrement et par la division euclidienne puis placer leur image sur un cercle trigonométrique.

**Exercices** (dans le livre au programme)

## Leçon 2 : TRIGONOMETRIE

**OBJECTIFS**: cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

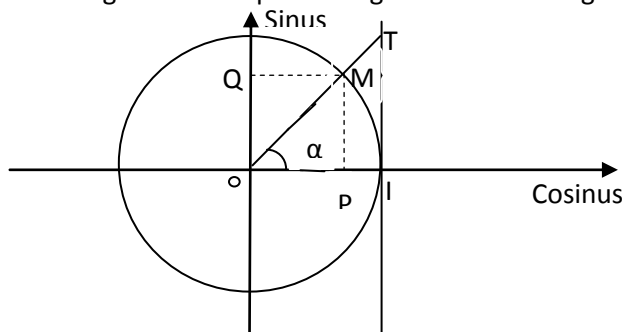
**SITUATION DE VIE**: votre camarade de classe vous demande de l'expliquer pourquoi en classe de troisième l'enseignant avait dit  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  avec  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Aides le a comprendre cela par une démonstration simple.

**ACTIVITE D'APPRENTISSAGE** : soit un repère orthonormé  $(O; I; J)$  d'unité 2 cm

- Trace un cercle trigonométrique de centre O
- Place le point M image respectives de l'angle  $\frac{\pi}{3}$
- Place les points P et Q projetés orthogonal respectifs des points M sur l'axe (OI) respectivement sur l'axe (OJ)
- Comparer les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{3}$  et  $\sin \frac{\pi}{3}$  respectivement avec  $\overline{OP}$  et  $\overline{OQ}$
- Compare  $\overline{IT}$  et  $\tan \frac{\pi}{3}$  où T est l'intersection de la tangente au cercle trigonométrique et la droite (OM) puis démontrer que  $\overline{IT} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$  et en déduire que  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  avec  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

### RETENONS :

Soit  $\alpha$  un angle et M son point image sur le cercle trigonométrique.



$$\text{Nous avons } \cos \alpha = \overline{OP}, \sin \alpha = \overline{OQ}, \tan \alpha = \overline{IT} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

En considérant le triangle OPM, nous avons  $OM^2 = OP^2 + OQ^2$  or  $OM = 1, OP = \cos \alpha, OQ = \sin \alpha$   
d'où  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

### APPLICATION :

- Démontrons sous la condition d'existence que  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- Démontrons que pour tout réel  $x$  on a  $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

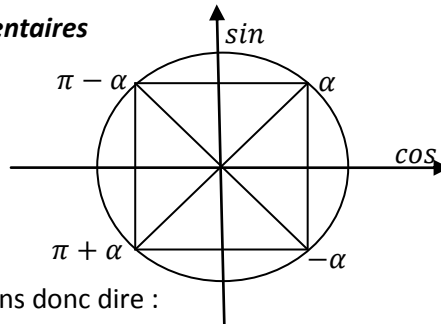
Propriétés :

- Si  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , alors  $\cos \alpha > 0, \sin \alpha > 0$  et  $\tan \alpha > 0$
- Si  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , alors  $\cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0$  et  $\tan \alpha < 0$

- iii- Si  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ , alors  $\cos\alpha < 0$ ,  $\sin\alpha < 0$  et  $\tan\alpha > 0$
- iv- Si  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , alors  $\cos\alpha > 0$ ,  $\sin\alpha < 0$  et  $\tan\alpha < 0$

**Angles opposés et angles supplémentaires**

Soit  $\alpha$  un angle nous avons :



A partir de cette figure, nous pouvons donc dire :

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

**APPLICATION :**

En remarquant que  $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ , calculer  $\cos\frac{4\pi}{3}$  et  $\sin\frac{4\pi}{3}$

**Exercices** : Dans le livre au programme.

➤ **Module 15 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES  
DU PLAN**

**Chapitre 8 : ANGLES INSCRITS ET POLYGONES REGULIERS.**

**Motivation** : l'envie de l'homme d'avoir des objets ou des bâtiments de forme particulières, haptiques et symétriques rend incontournable la maîtrise de la notion d'angles inscrits et de polygones réguliers dans les domaines de l'architecture, de l'art et bien d'autres.

**Leçon 1 : Angles inscrits.**

**Durée : 50min**

**Objectifs pédagogiques :**

Reconnaître un angle inscrit dans un cercle.

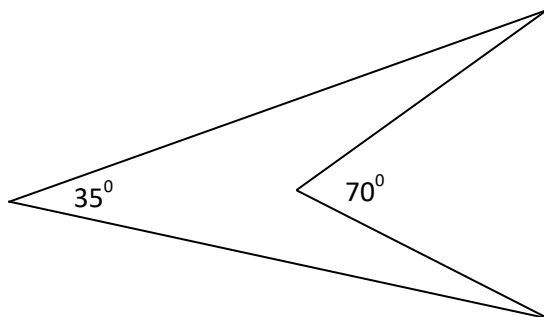
Déterminer la mesure d'un angle inscrit défini par une corde et un point.

Justifier qu'un quadrilatère est inscriptible.

Reconnaître un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente, puis déterminer sa mesure.

**Situation Problème :**

Pour confectionner le col (dit col « v ») d'un vêtement, Mr EBOGO utilise une pièce de tissu de forme triangulaire dont un angle au sommet mesure  $35^{\circ}$ . Mr EBOGO Souhaite couper un morceau sous forme triangulaire suivant la base de l'angle  $35^{\circ}$  de sorte que l'angle sommet ayant la même base avec le morceau de tissu initial soit  $70^{\circ}$  (c'est-à-dire le double de l'angle initial  $35^{\circ}$ ). Aide Mr EBOGO a réalisé son col.



**Prérequis :**

1) Combien d'angles contient un triangle ?

2) Donner la relation entre les mesures des angles d'un triangle.

**Activité d'apprentissage :**

Soit  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre O et de rayon 1.5cm.

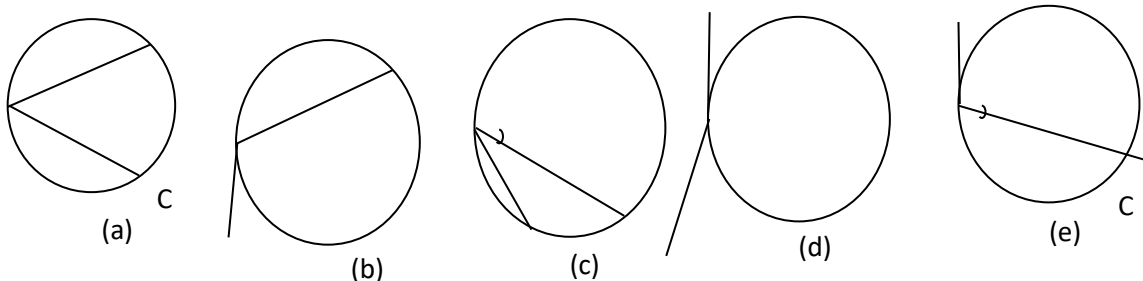
- 1) Construire  $(\mathcal{C})$  et place les points A, B et C sur  $(\mathcal{C})$  tel que le centre O soit dans le triangle ABC et que AB ne soit pas un diamètre de  $(\mathcal{C})$ .
- 2) Démontrer que les triangles ABO, ACO et BCO sont tous isocèles.
- 3) a) Donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{AOB})$  et  $\text{mes}(\widehat{ABO})$ .  
 b) Donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{AOC})$  et  $\text{mes}(\widehat{CAO})$ .  
 c) Donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{COB})$  et  $\text{mes}(\widehat{BCO})$ .  
 d) Donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{ABC})$ ,  $\text{mes}(\widehat{ACB})$  et  $\text{mes}(\widehat{BAC})$ .  
 e) Donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{ABO})$ ,  $\text{mes}(\widehat{BCO})$  et  $\text{mes}(\widehat{CAO})$ .
- 4) En utilisant la question 3), donner une relation entre  $\text{mes}(\widehat{ACB})$  et  $\text{mes}(\widehat{AOB})$ .

**Résumé :**

**Définition :** angle inscrit

Dans un cercle, un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle.

1. Dans l'activité précédente, les angles  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{BCA}$  et  $\widehat{ABC}$  sont les angles inscrits.



2. Les angles sur les figures (a) et (c) sont inscrits par contre les angles sur les figures (b),

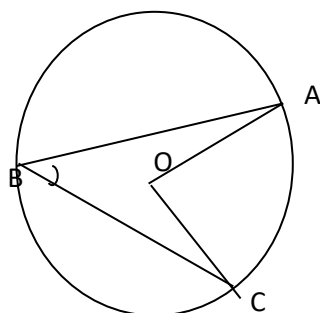
(d) et (e) ne sont pas inscrits

**Définition :** angle au centre

Dans un cercle, un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre d'un cercle.

**Exemple 2:** Dans l'activité précédente, les angles  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{BOA}$ ,  $\widehat{AOC}$ , et sont les angles au centre.

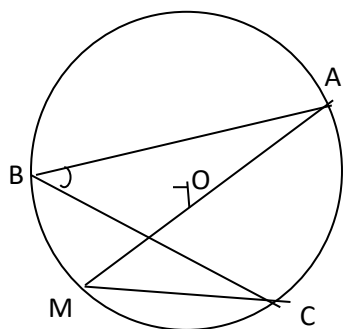
**Propriété 1:** Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.



$$\text{mes}(\widehat{COA}) = 2\text{mes}(\widehat{CBA})$$

**Exemple 3:** Dans l'activité précédente, on a  $\text{mes}(\widehat{BOA}) = 2\text{mes}(\widehat{BCA})$ .

**Propriété 2:** Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



$$\text{mes}(\widehat{CMA}) = \text{mes}(\widehat{CBA})$$

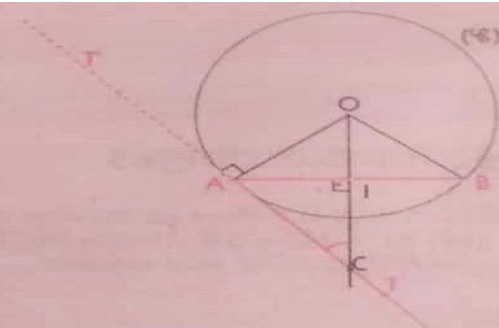
**Propriété 3 :** Deux angles inscrits qui interceptent les arcs de même longueur ont la même mesure.

**Propriété 4 :**

Soit  $[AB]$  une corde d'un cercle  $(\mathcal{C})$ , qui n'est pas un diamètre,  $[AT]$  la demi-tangente en  $A$  à  $(\mathcal{C})$  contenue dans le demi-plan de frontière  $(AB)$  ne contenant pas  $O$ ,  $[AT']$  l'autre demi-tangente en  $A$ .

$$\text{On a : } \text{mes} \widehat{TAB} = \frac{1}{2} \text{mes} \widehat{AOB}$$

$$\text{et } \text{mes} \widehat{T'AB} = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{mes} \widehat{AOB}.$$

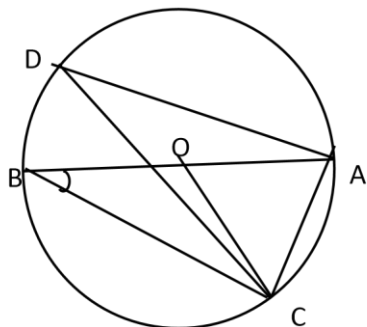


**Exercice d'application :**

- 1) Soit ABC un triangle équilatéral et O son centre de gravité. Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{BOA}$ .
- 2) Soit PQR un triangle dont  $\text{mes}(\widehat{PQR})=45^\circ$  et  $\text{mes}(\widehat{PRQ})=80^\circ$  ; soit I le centre du cercle circonscrit du triangle PQR. Détermine  $\text{mes}(\widehat{QIR})$ .

**Devoirs :**

A- On considère la figure ci-dessous :



- 1- Donner la nature du triangle ABC
- 2- Recopier et compléter les tableaux ci-dessous

Angles	$\widehat{ABC}$	$\widehat{ADC}$	$\widehat{BAC}$	$\widehat{AOC}$	$\widehat{ACB}$
Mesures	$30^\circ$				

- 3- Donner la nature du triangle AOC.

B- Quatre exercices du livre sur le chapitre.

## Leçon 2 : Polygones réguliers et Quadrilatère inscriptibles

Durée : 50 min

### Objectifs pédagogiques

Quadrilatère croisé et convexe inscriptibles dans un cercle.  
Construction des polygones réguliers

### Situation problème :

Le supporter camerounais des lions indomptables Ali veut réaliser le drapeau de son pays, mais il a un problème de réaliser l'étoile d'or au cœur du drapeau. Aide Ali à réaliser cette étoile.

### Prérequis :

Trace un cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre O et de rayon 2cm.

Place deux points A et B sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ) tel que  $\text{mes}(\widehat{AOB})=49^\circ$ .

Place un point C sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ) tel que les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{BC}$  ont la même longueur.

### Activité d'apprentissage :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2cm.

- 1) Construire ce triangle et place un point D symétrie de A par rapport à l'axe (BC).
- 2) Construire les points E, F et G respectivement symétrie centrale par rapport à B des points A, C et D.
- 3) Montre que les points A, C, D, E, F et G appartiennent au cercle de centre B et de rayon 2cm.
- 4) Sur la figure ci-dessus, donne 9 figures géométriques ayant 3 côtés de même longueur et les angles aux sommets de même mesure ; une figure géométrique ayant 6 côtés de même longueur et les angles aux sommets de même mesure.

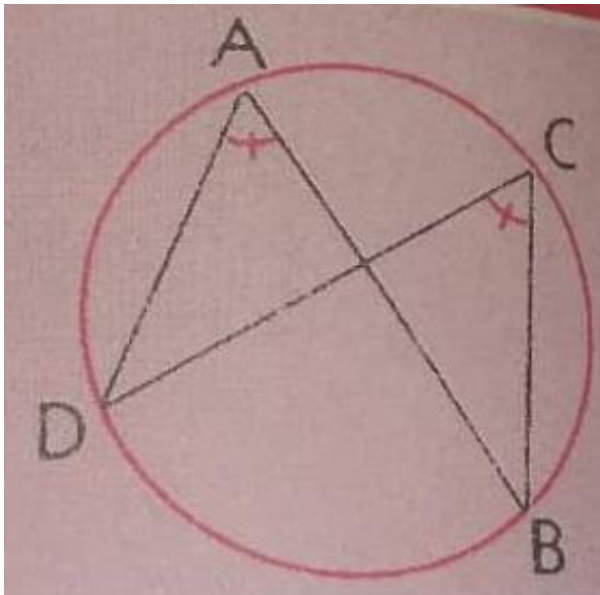
### Résumé :

#### Définitions :

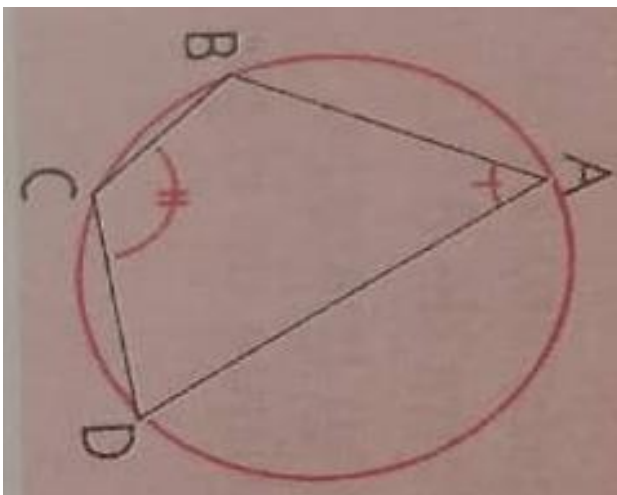
Un polygone régulier est un polygone qui a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

Un polygone est dit inscriptible s'il existe un cercle passant par tous ces sommets. Et lorsque ce cercle existe, il est unique.

**Théorème 1** : Un quadrilatère croisé est inscriptible si et seulement si deux de ces angles opposés ont même mesure.



**Théorème 2** : Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.



**Propriété 1**: Si un polygone est régulier, alors il est inscriptible dans un cercle. Le centre du cercle est appelé **centre du polygone**.

**Propriété 2**: Si un polygone est régulier, alors la mesure de chaque angle au centre interceptant un côté du polygone est égale à :  $\frac{360^\circ}{n}$  où n est le nombre de côté du polygone.

Le tableau récapitulatif ci-dessous nous donne les noms des quelques polygones réguliers ainsi que leur nombre de côtés.

Nombre de côtés	Polygones réguliers
3	Triangle équilatéral
4	Carré
5	Pentagone régulier
6	Hexagone régulier
7	Heptagone régulier
8	Octogone régulier
9	Ennéagone régulier
10	Décagone régulier
12	Dodécagone régulier

**Exercice d'application :**

- 1) a) Construire un Octogone régulier ABCDEFGH.  
b) En déduire un carré et 2 rectangles.
- 2) a) Construire un décagone régulier ABCDEFGHIJ.  
b) En déduire deux pentagones réguliers.  
c) En vous servant de la question a) réalisez une étoile.

**Devoirs** : Cinq exercices dans le livre sur le chapitre.



**MODULE 19 : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN**

**CHAPITRE 1 : VECTEURS DU PLAN**

**LECON 1 : OPERATIONS SUR LES VECTEURS**

Du ...../..... au ...../.....

**COMPETENCES EXIGEES**

- ✓ Description d'un vecteur géométrique ;
- ✓ Détermination du type de vecteur (déterminer si un vecteur est nul ou encore si deux vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents (égaux) ou opposés) ;
- ✓ Détermination de l'addition et de la résultante de deux vecteurs ;
- ✓ Description d'une combinaison linéaire de vecteurs.

**Motivation**

Les vecteurs jouent un rôle essentiel, non seulement en mathématiques et en informatique mais en mécanique du point (étude des mouvements d'un point matériel) et en physique. La trajectoire des planètes se modélise dans un langage vectoriel. Imaginons que nous ayons un point O qui ne bouge pas et un objet qui bouge (désignons l'objet par A) à côté de ce point O. Le physicien veut savoir comment il bouge. Il va s'intéresser dans un premier temps à la distance entre le point O et l'objet A mais aussi dans un second temps la direction de la droite (OA) et le sens dans lesquels sont donnés les points O et A. Du coup, il va parler du vecteur  $\vec{OA}$  et l'étudier

**Prérequis**

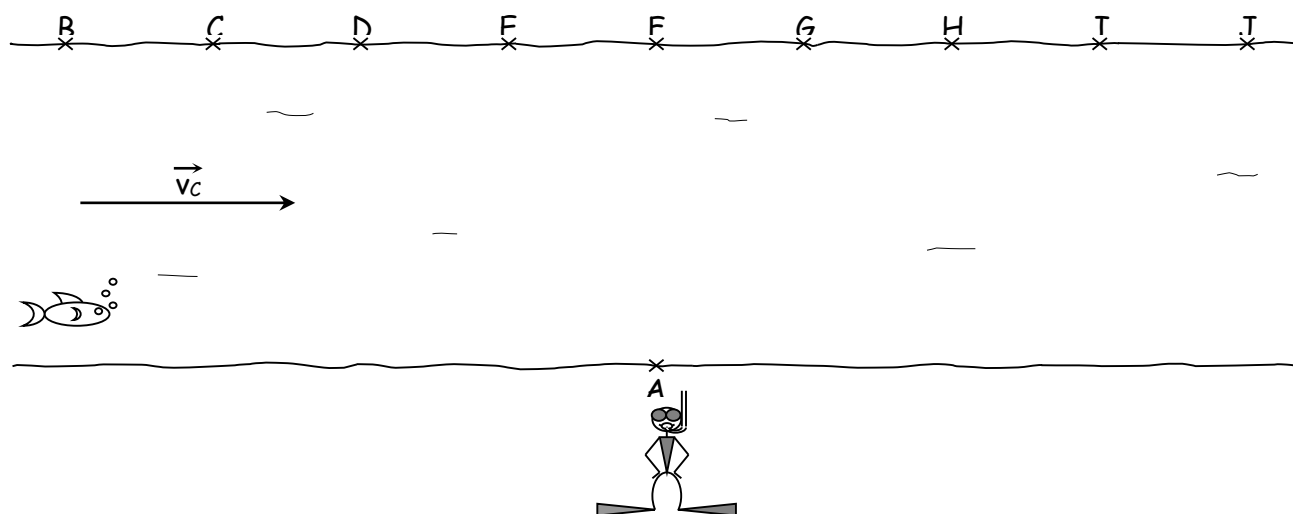
Construire un représentant du vecteur  $k\vec{u}$  connaissant  $\vec{u}$  et k.

Utiliser une égalité vectorielle pour justifier: le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points.

Définir la colinéarité de deux vecteurs

**Situation problème : traversée d'un fleuve à la nage**

Un nageur veut traverser un fleuve.

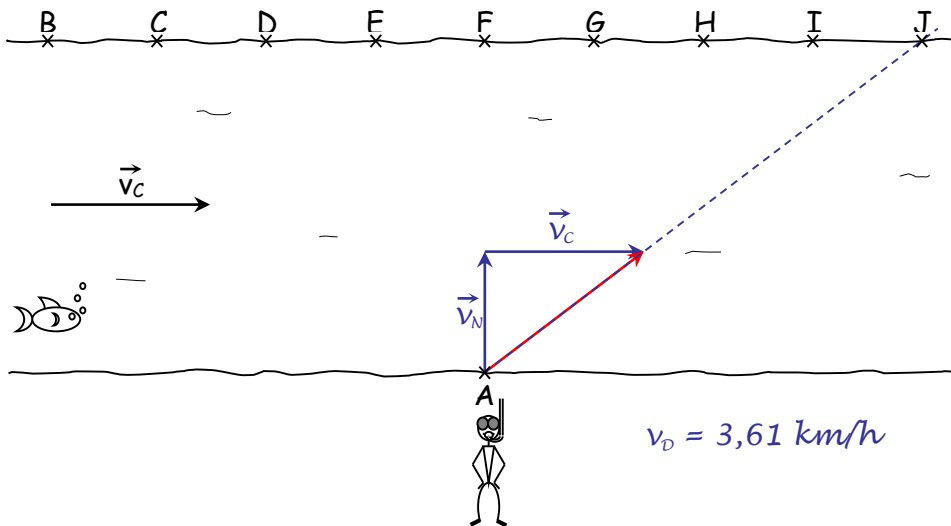


Il part du point A et nage perpendiculairement à la rive, à une vitesse  $V_N$  de 2 km/h. La vitesse du courant est de 3 km/h. Elle est représentée par le vecteur  $\vec{V}_C$  sur le schéma ci-dessus.

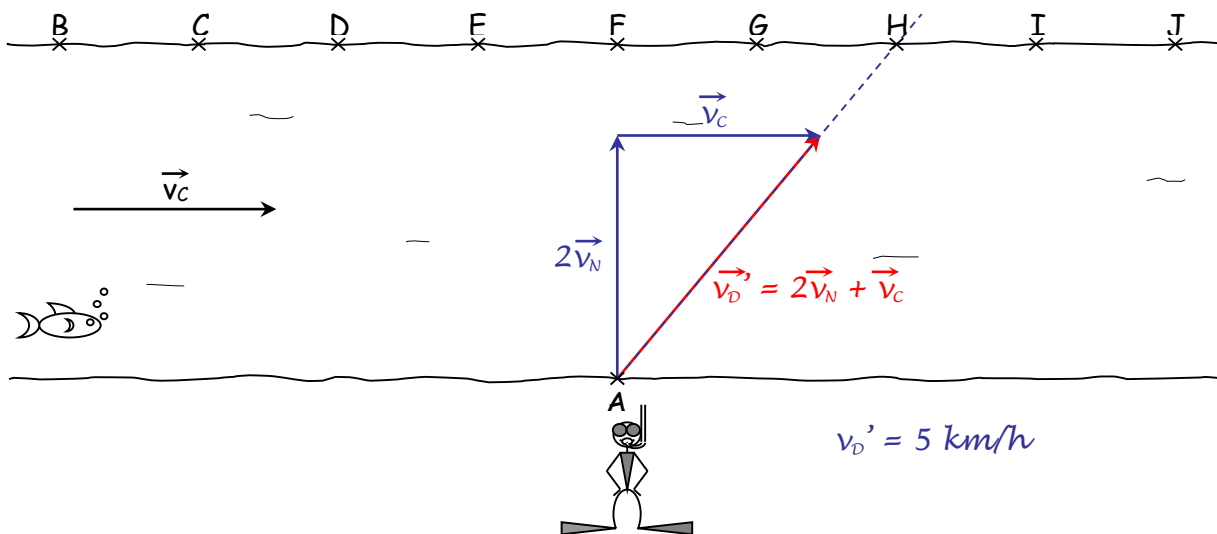
- 1) En quel point arrive le nageur ?
- 2) Si le nageur double sa vitesse, où atteint-il l'autre rive ?

**Solution de la situation problème : la traversée d'un fleuve à la nage**

1)



2) Si le nageur double sa vitesse, où atteint-il l'autre rive ?



**ACTIVITES D'APPRENTISSAGE**

**Activité 1 :**

Construire les points B, D, F, H, J, M, Q, S et U vérifiant les égalités suivantes :

$$\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{GH} = \frac{5}{3} \vec{v}$$

$$\vec{PQ} = -\frac{1}{3} \vec{PN}$$

$$\vec{CD} = \vec{w} - \vec{v}$$

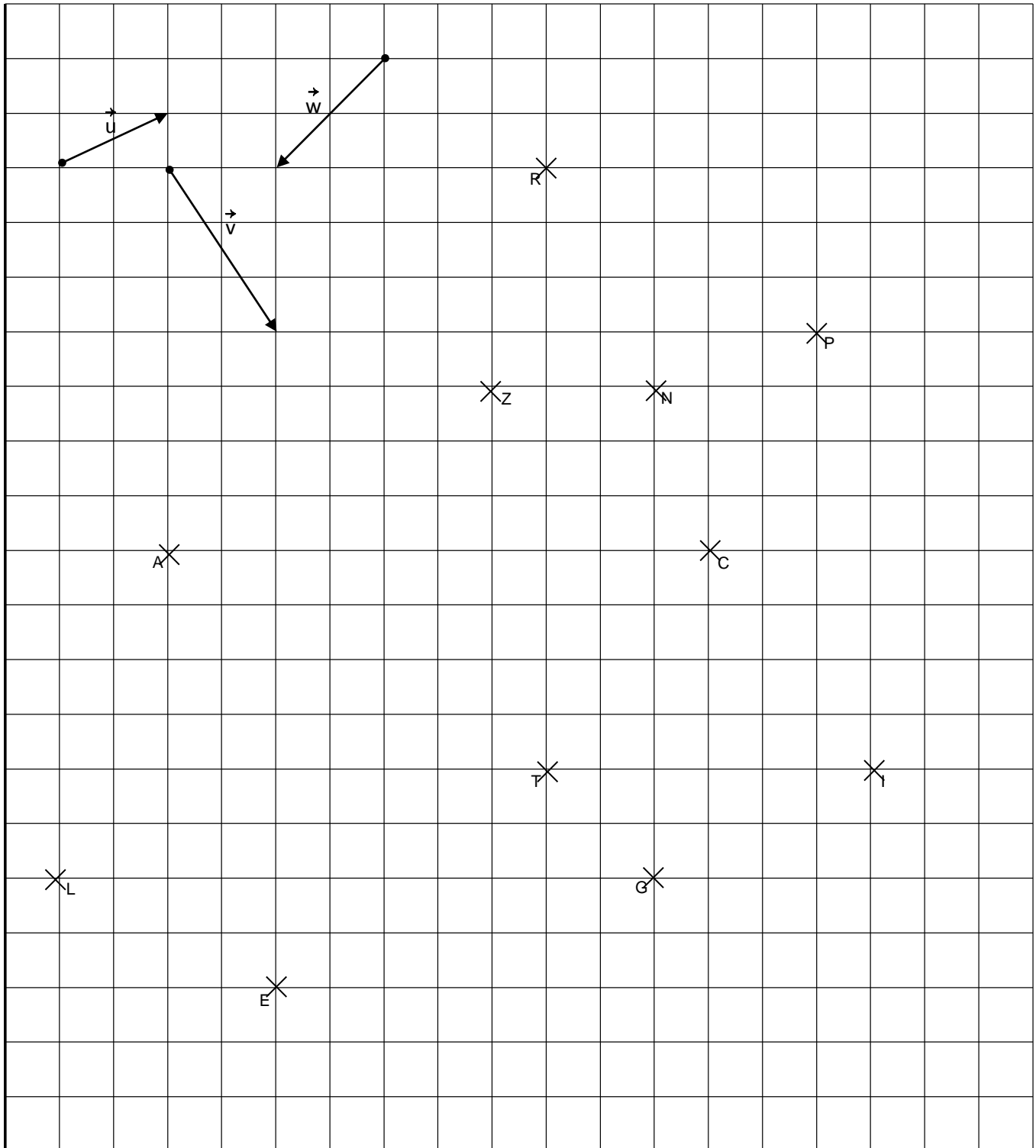
$$\vec{IJ} = -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{RS} = \vec{NP} + \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{EF} = 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{LM} = \vec{AZ} + 2\vec{NZ}$$

$$\vec{TU} = 2\vec{u} + \vec{RN}$$



**Activité 2**

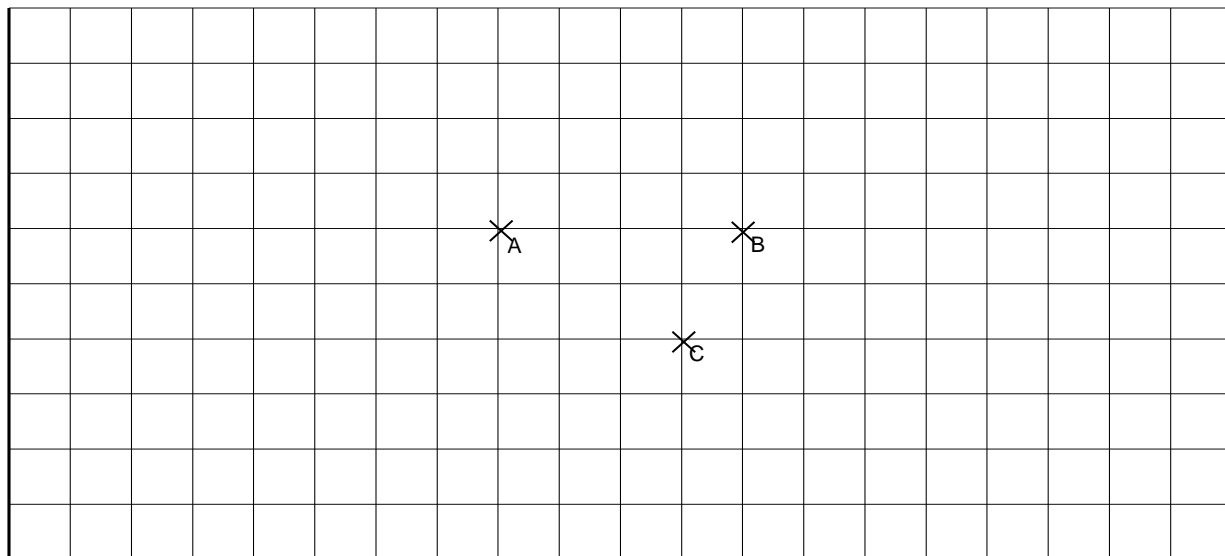
1. Placer les points D, E et F définis par :

- $\vec{AE} = -2 \vec{AC} + 3 \vec{AB} + 5 \vec{BC} + \vec{CB} + 2 \vec{CA}$
- $\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} + 3 \vec{BC} - 2 \vec{AC}$

•  $\vec{AD} = 2\vec{BC} + \vec{CA} - 3\vec{BA} + \frac{8}{3}\vec{CA} + \frac{9}{4}\vec{AB}$

2. Exprimer les deux premières expressions en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

3. Montrer que EBCF est un parallélogramme.



**Activité 3**

Ecrire les vecteurs suivants en fonction de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  :

$\vec{BP} =$

$\vec{OC} =$

$\vec{EP} =$

$\vec{MA} =$

$\vec{CQ} =$

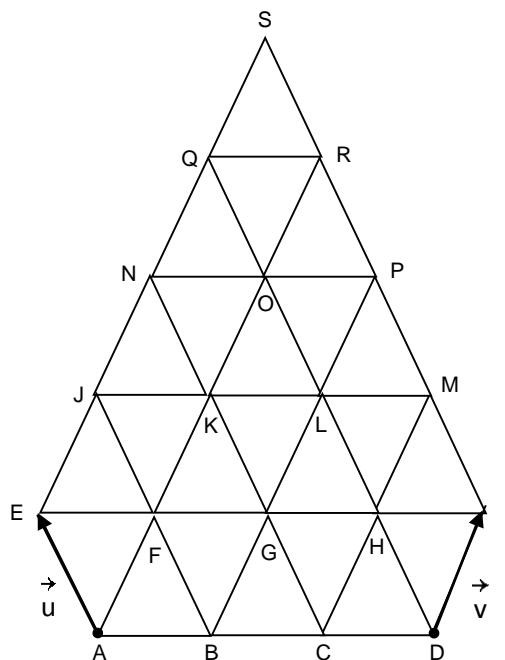
$\vec{SL} + \vec{FK} =$

$\vec{NI} + \vec{PK} =$

$\vec{BF} - \frac{1}{2}\vec{EN} =$

$\vec{DI} - \vec{RO} =$

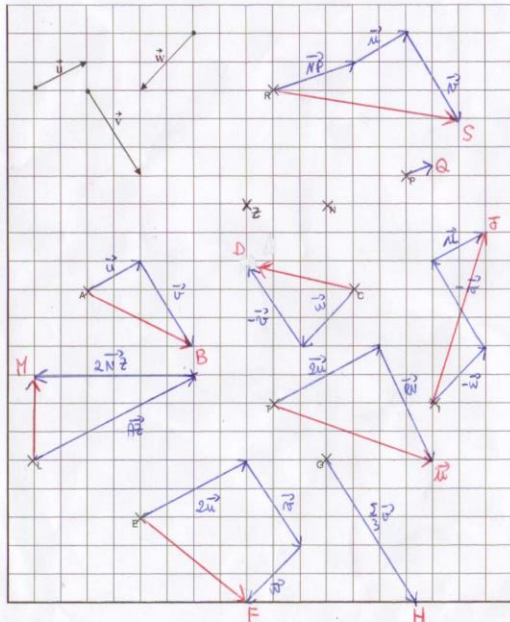
$\vec{GD} + 2\vec{RJ} =$



### Solution des activités d'apprentissage

**Activité 1** Construire les points B, D, F, H, J, M, Q, S et U vérifiant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{u} + \vec{v} & \vec{GH} &= \frac{5}{3}\vec{v} & \vec{PQ} &= -\frac{1}{3}\vec{PN} \\ \vec{CD} &= \vec{w} - \vec{v} & \vec{IJ} &= -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u} & \vec{RS} &= \vec{NP} + \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{EF} &= 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} & \vec{LM} &= \vec{AZ} + 2\vec{NZ} & \vec{TU} &= 2\vec{u} + \vec{RN} \end{aligned}$$



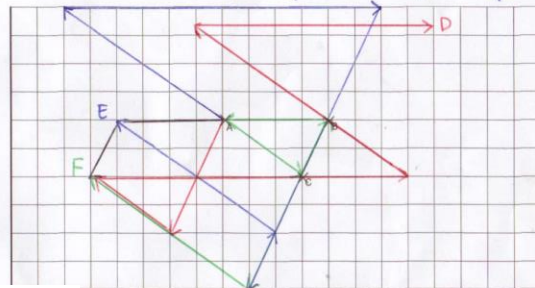
### Activité 2

1. Placer les points D, E et F définis par :

$$\times \vec{AE} = -2\vec{AC} + 3\vec{AB} + 5\vec{BC} + \vec{CB} + 2\vec{CA} = 3\vec{AB} + 4\vec{BC} - 4\vec{AC} = -\vec{AB} = \vec{BA}$$

$$\times \vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} + 3\vec{BC} - 2\vec{AC} = -\vec{AB} + 2\vec{BC} - \vec{AC} = -3\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\times \vec{AD} = 2\vec{BC} + \vec{CA} - 3\vec{BA} + \frac{8}{3}\vec{CA} + \frac{9}{4}\vec{AB} = \frac{9}{4}\vec{AB} + 2\vec{BC} - \frac{11}{3}\vec{AC} = \frac{13}{4}\vec{AB} - \frac{5}{3}\vec{AC}$$



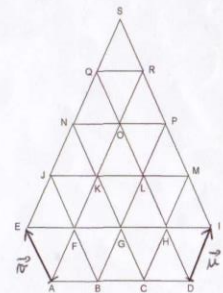
### Activité 3

ier les expressions précédentes en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$

3. Montrer que EBCF est un parallélogramme  $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{EC}$

Exercice n°3: Ecrire les vecteurs suivants en fonction de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= 3\vec{u} \\ \vec{OC} &= -2\vec{u} - 2\vec{v} \\ \vec{EP} &= 4\vec{u} - 2\vec{v} \\ \vec{MA} &= -4\vec{u} + 2\vec{v} \\ \vec{CQ} &= \vec{u} + 3\vec{v} \\ \vec{SL} + \vec{FK} &= -2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{u} = -\vec{u} - 2\vec{v} \\ \vec{NI} + \vec{PK} &= 2\vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{u} + \vec{v} = -3\vec{v} \\ \vec{BF} - \frac{1}{2}\vec{EN} &= \vec{u} - \frac{1}{2}(2\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{DI} - \vec{RO} &= \vec{u} - (-\vec{u}) = 2\vec{u} \\ \vec{GD} + 2\vec{RJ} &= \vec{u} - 2\vec{v} + 2(-3\vec{u} + \vec{v}) = -5\vec{u} \end{aligned}$$

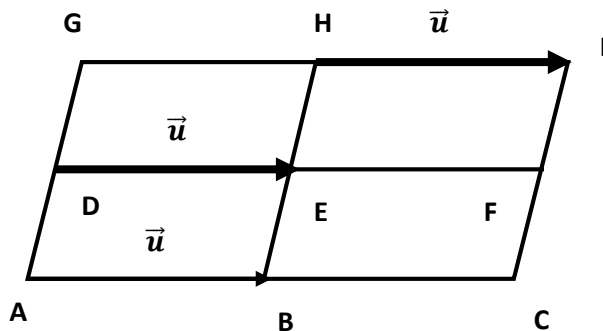


## LE COURS

### 1. REPRESENTATION DES VECTEURS DU PLAN

#### 1.1 Définition

On ne saurait donner une définition rigoureuse d'un vecteur du plan. A notre niveau, disons juste qu'un vecteur est un **déplacement** : Pour préciser ce déplacement, c'est à dire pour définir une **translation**, il faut choisir une **direction de droite** (inclinaison), un **sens** et une **longueur**. Ces trois choix déterminent **le vecteur de la translation**. Un vecteur est représenté par une "flèche" que l'on peut tracer n'importe où. **Un vecteur n'a pas d'emplacement précis** (n'a pas de point d'attache), c'est un objet "baladeur".



Le déplacement de A vers B est le même que celui de D vers E ou de H vers I. On appelle ce déplacement un **vecteur** défini par :

- une direction : celle de la droite (AB);
- un sens : celui de A vers B ;
- une norme : qui est égale à la longueur AB.

**Attention !**

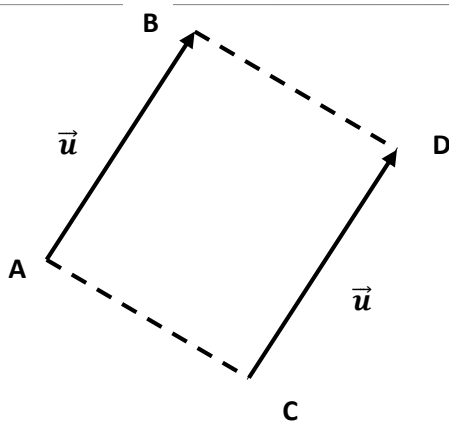
**Il ne faut pas confondre sens et direction : par exemple  $\overrightarrow{IH}$  et  $\overrightarrow{AB}$  ont la même direction (car les droites (AB) et (IH) sont parallèles) mais n'ont pas le même sens.**

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{HI}$  sont donc les représentants d'un même vecteur car ils ont même sens, même direction et même norme : on peut donc désigner ce vecteur par un nom unique, par exemple  $\vec{d}$ .

La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est égale à la longueur AB. Pour désigner la norme de  $\vec{d}$ , on utilise  $\|\vec{d}\|$ . On a  $\|\vec{d}\| = AB = DE = HI$

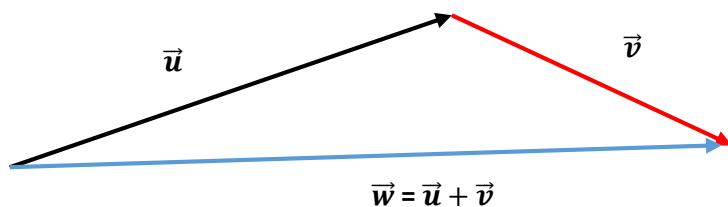
**Remarque**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$  si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



**1.2. Addition et soustraction de vecteurs**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs quelconques du plan. La somme  $\vec{u} + \vec{v}$  de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs « bout à bout » de sorte que le point terminal de  $\vec{u}$  coïncide avec le point initial de  $\vec{v}$ . Le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$  relie le point initial de  $\vec{u}$  au point terminal de  $\vec{v}$ .



**Propriété : Relation de CHASLES**

Quelque soient les points A, B et C, alors  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**Remarque**

**La relation de CHASLES peut s'utiliser dans les deux sens. Cette égalité n'est surtout pas vraie pour les normes de vecteurs**

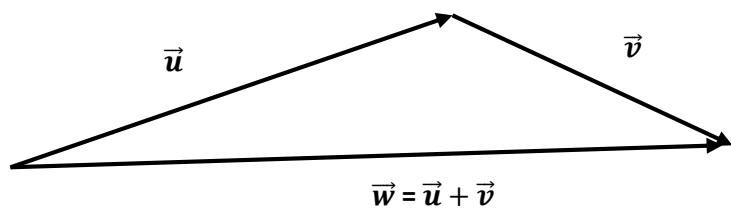
**Propriété : Inégalité triangulaire**

Quelque soient les points A, B et C, alors,  $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$

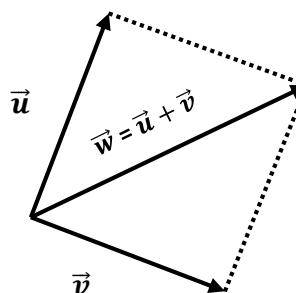
**CONSTRUCTIONS :**

Il y a deux façons d'obtenir la somme de deux vecteurs :

1) en les représentant bout à bout :



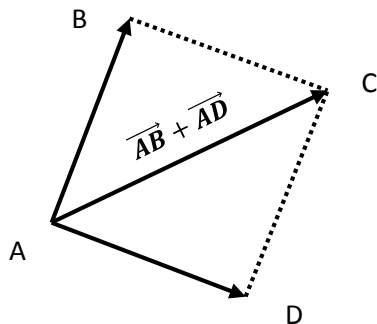
2) en les représentant à partir de la même origine :



**Propriété : Vecteurs et parallélogramme**

Pour quatre points ABCD non alignés :

- ❖ Si ABCD est un parallélogramme, alors on a :  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$
- ❖ Si on a :  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ , alors ABCD est un parallélogramme.



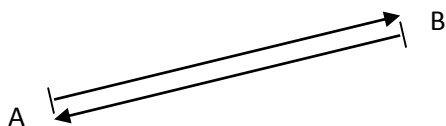
**CAS PARTICULIERS :**

Je pars de A, je vais en B et je retourne en A : la relation de CHASLES le confirme :  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$   
 Que peut-on dire de ce vecteur ? Quelle est sa norme ? Quelle est sa direction ? Quel est son sens ?

**a)** On appelle ce vecteur de norme nulle le **vecteur nul** et on le note  $\vec{0}$

Plus généralement si on considère un vecteur  $\vec{u}$  on peut toujours trouver un vecteur de même direction, de même norme et de sens opposé : quand on l'ajoute à  $\vec{u}$  on obtient le vecteur nul.

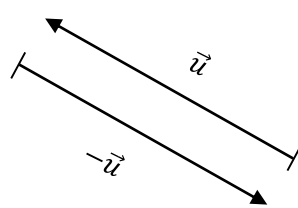
**b) Vecteurs opposés** (même direction, même longueur, sens contraires) :



D'après la relation de CHASLES on a :

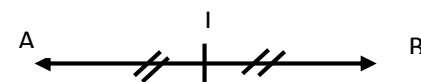
$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

**NOTATION**



$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

**PROPRIÉTÉ : Vecteur et milieu**



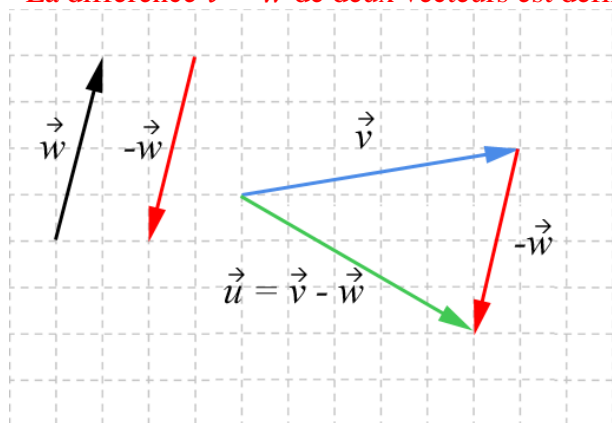
- Si le point I est le milieu du segment [AB] alors on a :  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  et  $\vec{AI} = \vec{IB}$
- Si on a :  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  ou bien :  $\vec{AI} = \vec{IB}$  alors le point I est le milieu du segment [AB].

c) **Somme de vecteurs égaux** :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AB}$  ;  $u \rightarrow + u \rightarrow + u \rightarrow = 3 u \rightarrow$  (Les additions de vecteurs se rédigent comme les additions de nombres)

❖ **Les quatre propriétés de l'addition**

- i) L'addition de vecteurs est **commutative**. Cela signifie que, si  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs, alors  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- ii) L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Cela veut dire que, si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs, alors  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- iii) L'addition a un **élément neutre** : le vecteur nul. En effet :  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- iv) Enfin, si  $\vec{v}$  est un vecteur, alors  $-\vec{v}$  est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que  $\vec{v}$ , mais de sens opposé. Donc  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

La différence  $\vec{v} - \vec{w}$  de deux vecteurs est définie comme  $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

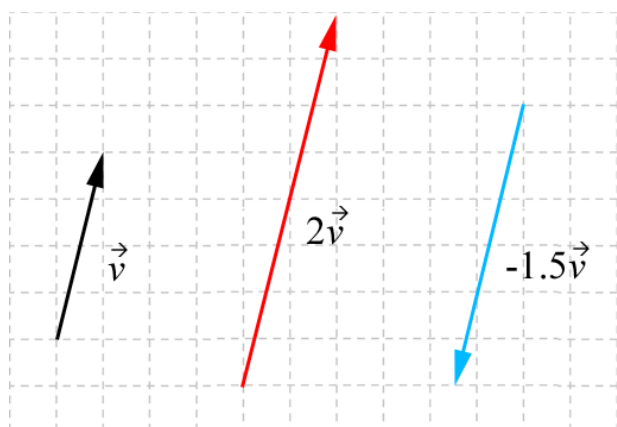


**1.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire**

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Si  $\lambda$  est un scalaire et  $\vec{v}$  un vecteur, alors le produit  $\lambda \vec{v}$  est défini comme suit :

- Si  $\lambda > 0$ , alors le produit  $\lambda \vec{v}$  est le vecteur dont l'intensité a  $\lambda$  fois l'intensité de  $\vec{v}$  et dont le sens est le même que  $\vec{v}$ .
- Si  $\lambda < 0$ , alors le produit  $\lambda \vec{v}$  est le vecteur dont l'intensité a  $|\lambda|$  fois l'intensité de  $\vec{v}$  et dont le sens est l'opposé de celui de  $\vec{v}$ .
- Si  $\lambda = 0$  ou si  $\vec{v} = \vec{0}$ , alors le produit  $\lambda \vec{v}$  est le vecteur nul.



❖ **Propriétés du produit**

$$\lambda (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$

$$(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$$

$$\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda\mu) \vec{v}$$

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

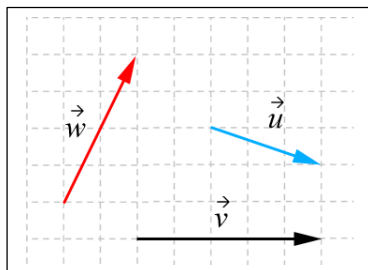
$$0\vec{v} = \vec{0}$$

### EXERCICES D'APPLICATION

#### Exercice 1 :

Utilisez les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, les vecteurs suivants :

- a.  $\vec{v} + \vec{w}$
- b.  $\vec{u} + \vec{v}$
- c.  $3\vec{v}$
- d.  $4\vec{w}$
- e.  $\vec{v} - \vec{w}$
- f.  $\vec{u} - \vec{v}$
- g.  $3(\vec{v} + \vec{u}) - 2\vec{w}$
- h.  $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$



#### Exercice 2 :

- a. Que vaut  $\vec{x}$ , sachant que  $\vec{x} + \vec{b} = \vec{f}$
- b. Que vaut  $\vec{x}$ , sachant que  $\vec{x} + \vec{d} = \vec{e}$
- c. Exprimez  $\vec{c}$  par rapport à  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  et  $\vec{f}$
- d. Exprimez  $\vec{g}$  par rapport à  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  et  $\vec{k}$
- e. Exprimez  $\vec{e}$  par rapport à  $\vec{d}$ ,  $\vec{g}$  et  $\vec{h}$
- f. Exprimez  $\vec{e}$  par rapport à  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  et  $\vec{d}$

#### Exercice 3 :

Soient  $A, B, C, D$  et  $E$  cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes, en utilisant les relations de Chasles :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} \quad ; \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\vec{d} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} \quad ; \quad \vec{e} = 87\overrightarrow{AC} + 82\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD}$$

#### Exercice 4 :

Soient trois points  $A, B$  et  $C$  non alignés. Soit le point  $G$  défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Démontrez que pour tout point  $M$  du plan, on a la relation  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

## 2. COMBINAISON LINEAIRE DE VECTEURS

### 2.1 Définition

Nous avons remarqué que  $\vec{v}$  et  $\lambda\vec{v}$  avaient la même direction. Inversement, si deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la même direction, alors on peut imaginer qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ . Par exemple, s'ils

ont le même sens, alors le vecteur  $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$  a le même sens que  $\vec{v}$  la même direction que  $\vec{v}$  la même norme que  $\vec{v}$  donc,  $\vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$  ce qui confirme notre supposition.

**On dit que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction** (deux vecteurs colinéaires partageant la même ligne. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur).

**Théorème :**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

**Attention**

*Vous ferez bien attention à parler de vecteurs colinéaires et non pas de vecteurs parallèles ! Deux droites peuvent être parallèles si elles ont tous leurs points ou aucun point en commun. On ne peut pas dire la même chose des vecteurs car les vecteurs n'ont pas de points ! Ce sont des déplacements, pas des ensembles de points comme les droites.*

*Mais montrer que deux vecteurs sont colinéaires, nous aide à montrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.*

**EXERCICES D'APPLICATION**

**Exercice 1 :**

Soit ABCD un carré. On a :  $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{DA}$  et  $\vec{v} = \vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ . Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Exercice 2 :**

Dans le parallélogramme ABCD, on définit les relations vectorielles suivantes :

$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$  ;  $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{DA}$ . Montrer que les points C, E et F sont alignés.

**LECON 2 : BASES DU PLAN**

Du ...../..... au ...../.....

**COMPETENCES EXIGEES**

- ✓ Démontrer qu'un couple de vecteurs est une base du plan ;
- ✓ Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base ;
- ✓ Déterminer la norme d'un vecteur ;
- ✓ Calculer le déterminant de deux vecteurs relativement à une base.

**Prérequis**

Tracer un repère orthogonal, orthonormé (ou orthonormal).

Placer dans un repère orthogonal un point de coordonnées données.

Déterminer graphiquement les coordonnées d'un point.

Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  connaissant les coordonnées de A et B.



2) Le niveau maximal d'exposition est un niveau déterminé par la loi et les règlements, à partir duquel on estime qu'une exposition prolongée peut endommager l'audition. En France, ce niveau est de 80 dB. Placer ce niveau sur la droite graduée précédente.

3) Le seuil de la douleur est 120 dB. Placez ce seuil sur la droite graduée. Hachurez la partie de droite qui correspond à un niveau sonore supérieur à ce seuil.

**Activité 2 :**

Déterminer si les couples de vecteurs ci-dessous sont colinéaires :

- a)  $\vec{u}(-2; -10)$  et  $\vec{v}(4; 20)$
- b)  $\vec{u}(-6; 9)$  et  $\vec{v}(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$
- c)  $\vec{u}(-\frac{4}{3}; 4)$  et  $\vec{v}(3; -9)$
- d)  $\vec{u}(0; 5)$  et  $\vec{v}(-5; 0)$

**Activité 3 :**

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points :  $A(3; -5)$  ;  $B(-2; 0)$  ;  $C(147; 13)$  ;  $D(-53; 187)$

Etablir que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles

**Activité 4 :**

Soit le vecteur  $\vec{v}$  ayant comme point initial  $P$  et comme point terminal  $Q$ . Écrivez  $\vec{v}$  sous la forme  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$  et sous la forme  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- a)  $P(0; 0)$  ;  $Q(3; 4)$       b)  $P(3; 2)$  ;  $Q(5; 6)$
- c)  $P(-2; -1)$  ;  $Q(6; -2)$       d)  $P(-3; 7)$  ;  $Q(0; 0)$

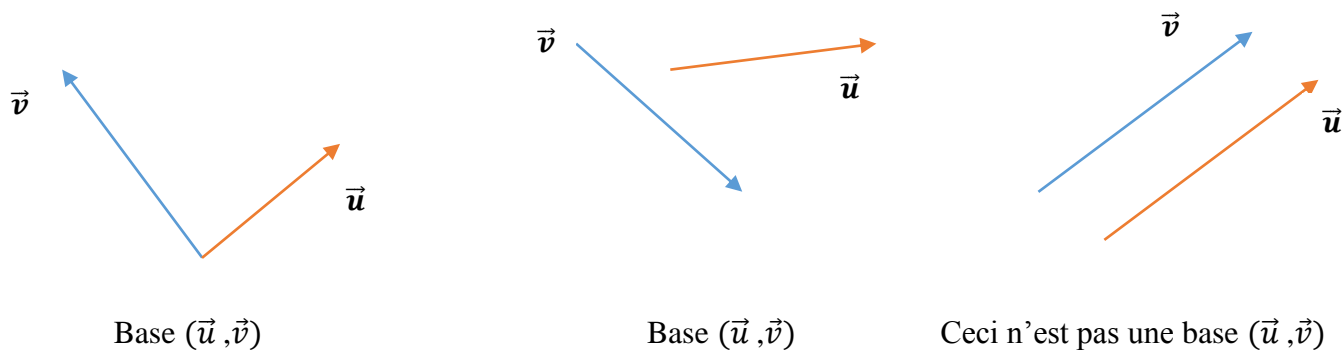


**1. BASE DU PLAN VECTORIEL**

**1.1 Définition**

Deux vecteurs forment une **base** du plan vectoriel si, et seulement si, ils ne sont pas colinéaires.

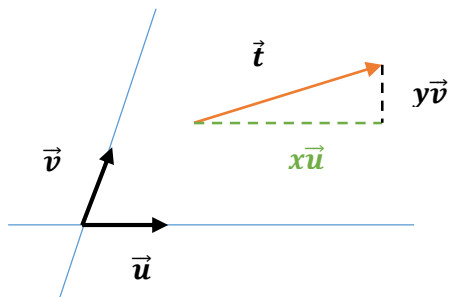
**Exemple :**



**1.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base**

**Théorème :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires : ils forment une base du plan vectoriel. Alors on peut exprimer n'importe quel vecteur  $\vec{t}$  sous la forme  $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$  avec  $x$  et  $y$  des réels. Les nombres  $x$  et  $y$  sont appelés les COORDONNÉES de  $\vec{t}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$



**Attention**

*Il est important d'exprimer chaque vecteur d'un problème donné en fonction de deux vecteurs de base intelligemment choisis.*

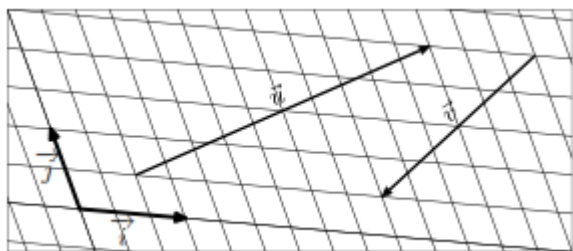
**❖ Propriétés**

Soient  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  deux vecteurs et  $\lambda$  un scalaire. Alors :

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}; \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}; \quad \lambda\vec{v} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

**Exercice d'application**

Dans le plan, on considère les deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  non-colinéaires représentés ci-dessous :

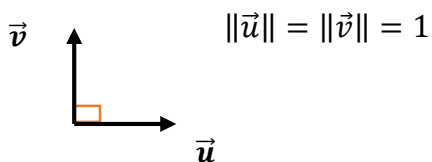


La représentation des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont également représentés ci-dessus.

- 1) Dans la base vectorielle  $(\vec{i}; \vec{j})$ , donner les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur somme  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{t}$  réalisant l'égalité suivante :  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{t}$

**1.3 Base orthonormée**

Une base est **orthonormée** si et seulement si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.



### 1.3 Norme d'un vecteur

Si  $\vec{v}$  est un vecteur, on utilise le symbole  $\|\vec{v}\|$  pour représenter la norme de  $\vec{v}$ . Puisque  $\|\vec{v}\|$  sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :

Soit  $\vec{v}$  un vecteur et  $\lambda$  un scalaire, alors :

(a)  $\|\vec{v}\| \geq 0$

(b)  $\|\vec{v}\| = 0$  si et seulement si  $\vec{v} = \mathbf{0}$

(c)  $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

(d)  $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$

(e)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$  (inégalité du triangle)

Un vecteur  $\vec{v}$  pour lequel la norme  $\|\vec{v}\| = 1$  est qualifié de vecteur unité (ou unitaire).

Dans le plan muni d'une base orthonormée, on a :  $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

### 1.4 Déterminant de deux vecteurs

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de composantes  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$  dans une base  $(\vec{i}; \vec{j})$

Le déterminant de  $(\vec{u}; \vec{v})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  est le réel  $xy' - yx'$

**Notation :**  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

- Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,  $\det(\vec{u}; \vec{u}) = 0$
- Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = -\det(\vec{v}; \vec{u})$
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

## COURS SUR LE PRODUIT SCALAIRE

- MODULE 3 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN
- Chapitre 2 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN
- Date et nombre de périodes

### Compétences exigées

- ✓ Présenter le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs normes.
- ✓ Présenter le produit scalaire de deux vecteurs à partir des projetés orthogonaux.
- ✓ Calculer la norme d'un vecteur en utilisant le produit scalaire.
- ✓ Manipuler les règles de calcul avec le produit scalaire.
- ✓ Déterminer l'expression du produit scalaire ou d'une norme dans une base orthonormée.
- ✓ Justifier en prenant un repère orthonormé convenable que deux droites sont perpendiculaires ou non.
- ✓ Caractériser un triangle rectangle par des relations métriques ;
- ✓ Calculer la mesure d'un angle d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés ;
- ✓ Calculer la longueur d'une médiane d'un triangle.
- ✓ Calculer l'aire d'un triangle ou le rayon de son cercle circonscrit.

### Motivation :

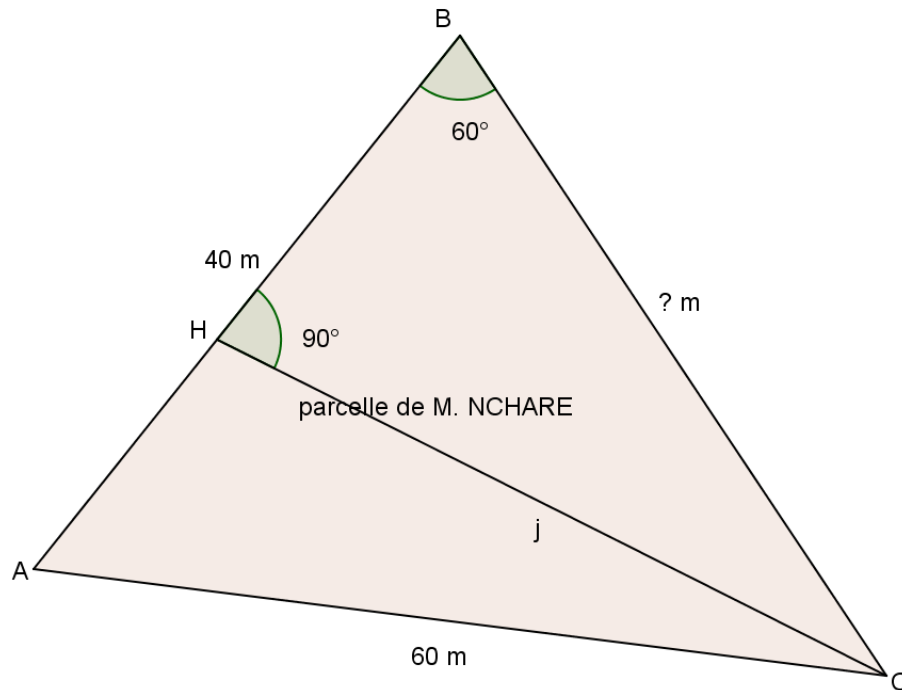
- En mathématiques, le calcul vectoriel est un outil performant qui simplifie l'étude des questions qui intéressent la géométrie. Pour cela, on a défini une opération entre les vecteurs appelée produit scalaire. La connaissance de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  peut permettre le calcul de distances et d'angles et les problèmes d'orthogonalité.
- En physique, On peut utiliser le produit scalaire pour calculer la résultante de deux forces, déterminer le travail d'une force

### Pré-requis :

coordonnées d'un vecteur et multiplication d'un vecteur par un nombre réel , propriété de Pythagore, lignes trigonométriques des angles

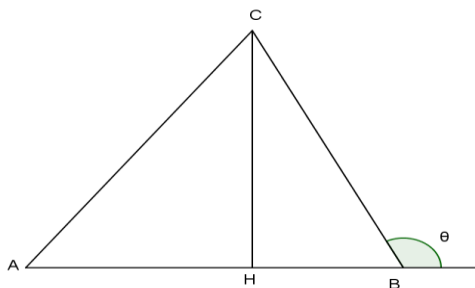
### Situation problème

M. NCHARE dispose d'un terrain triangulaire tel que l'indique la figure 1. Il voudrait faire un enclos en utilisant une seule rangée de fils barbelés passant par les piquets A, B et C. Aide-le à déterminer le nombre de mètre de fils nécessaire



### Activité d'apprentissage

Observe la figure ci-contre. Le point  $H$  désigne le pied de la hauteur issue du point  $C$ .  $\theta$  est la mesure de l'angle formé par les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$



On pose  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$  et  $\Delta = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ .

On admet que  $\Delta = AC^2 - AB^2 - BC^2 = AH^2 - AB^2 - BH^2$  [1]

- 1) Démontrer à l'aide de [1] que  $\Delta = -2AB \times BH$  et que  $BH = BC \cos(\pi - \theta)$
- 2) En Dédire que  $\Delta = 2AB \times BC \times \cos(\theta)$
- 3) Etablir que  $AB \times BC \times \cos(\theta) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$
- 4) Calculer la longueur du segment  $[BC]$  de la figure 1 et en déduire la longueur du fil nécessaire

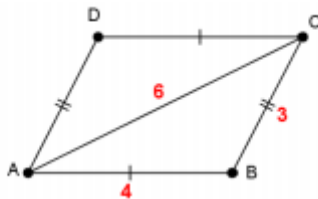
## LECON 1 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN

### I. Définitions

**Définition 1 :** On appelle produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

**Par convention**  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$

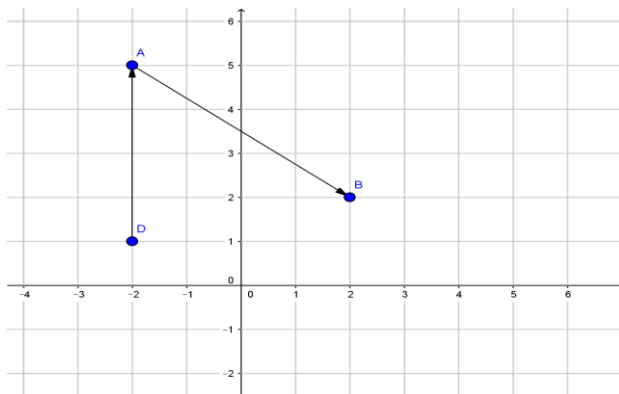
Exemple : Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  pour la figure suivante :



**Définition 2 :** Dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , de coordonnées respectives  $(x; y)$  et  $(x'; y')$  est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



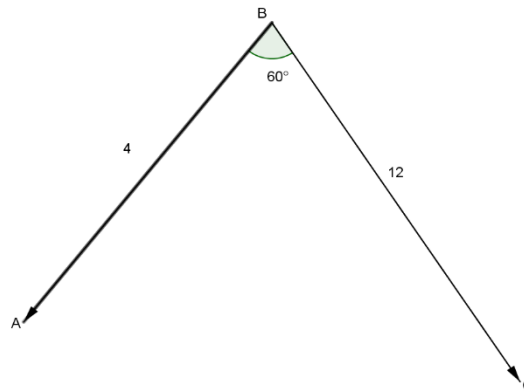
**Définition 3 :** Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$\|\vec{v}\| \times$$

**Exemple**

Calculer  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$



## II. Propriétés

### Propriété 1

- ✓ Le produit scalaire est commutatif ;  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ✓ Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition de deux vecteurs :  
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ✓ Le produit scalaire est distributif par rapport à la multiplication par un scalaire :  $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- ✓ Identités remarquables  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  ;  
 $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$   $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v}^2 - \vec{u}^2$

**Exemple** ABCD est un rectangle de centre O tel que  $AB = 4\text{cm}$  et  $BC = 3\text{cm}$ . Montrer que  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 7$

### Propriété 2

- ✓ Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors :  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- ✓ Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- ✓ les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux équivaut à dire que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

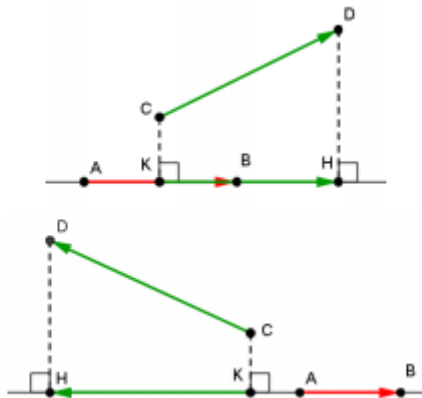
**Exemple** ABCD est un carré de coté  $a$ , les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC]. Démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires

## III. Projection

**Propriété** Soit deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ . On appelle K et H les projections orthogonales respectives de C et D sur la droite (AB), on a alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times KH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{KH}$  sont de même sens.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = - AB \times KH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{KH}$  sont de sens contraires

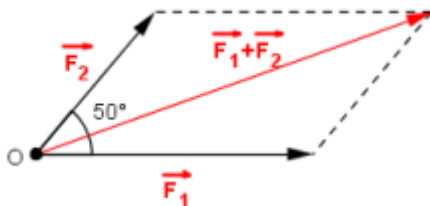


Exemple  $ABCD$  est un carré de coté 3 et  $CBE$  est un triangle rectangle en  $B$  tel que  $BE = 2$ .

- 1) Faire la figure
- 2) Calculer  $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB}$

#### EXERCICE D'APPLICATION

Un point  $O$  est soumis à deux forces  $\overrightarrow{F_1}$  et  $\overrightarrow{F_2}$  formant un angle de  $50^\circ$ . Les intensités des deux forces  $\overrightarrow{F_1}$  et  $\overrightarrow{F_2}$  sont respectivement  $300\text{ N}$  et  $200\text{ N}$  tel que l'indique la figure. Calculer l'intensité de la force résultante.



## LECON 2 APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

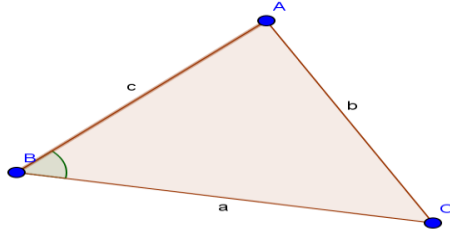
### Relations métriques dans un triangle

#### I. Relation d'Al Kashi

Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle soit une généralisation du théorème de Pythagore.

**Théorème :** Dans un triangle quelconque  $ABC$  en prenant les notations  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $BC = a$ , on a :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}$$



Preuve On part de la relation :  $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$

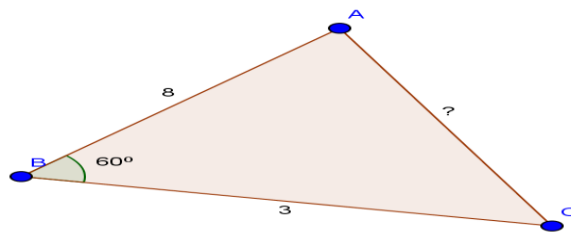
$$= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2$$

$$= \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}^2$$

$$= BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos \hat{B}$$

Ce qui devient en utilisant les notations de la figure :  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}$

Exemple : Soit le triangle ci-dessous. Déterminer la longueur  $BC$  et les mesures en degrés des angles  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$



## II. Relation des sinus

La formule d'Al Kashi est efficace si l'on connaît deux distances et un angle ou 3 distances. Par contre si l'on ne connaît qu'une distance, la relation n'est pas utilisable. On utilise alors la relation des sinus.

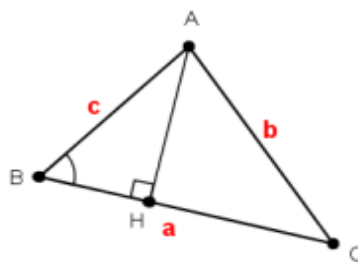
**Théorème :** Dans un triangle quelconque  $ABC$ , en prenant les notations  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $BC = a$ , en appelant  $\mathcal{S}$  l'aire du triangle  $ABC$  et  $R$  le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a les relations suivantes:

$$\mathcal{S} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2} = \frac{ab \sin \hat{C}}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$$

et

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{1}{2R}$$

Preuve: A l'aide de la figure ci-dessous,



On a alors :

$$\mathcal{S} = \frac{BC \times AH}{2}$$

Avec nos notations et comme  $\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c}$

$$\mathcal{S} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$$

En utilisant une permutation circulaire sur la surface du triangle, on obtient :

$$\frac{ac \sin \hat{B}}{2} = \frac{ab \sin \hat{C}}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$$

en multipliant par 2 et en divisant par  $abc$ , on a

$$\frac{ac \sin \hat{B}}{abc} = \frac{ab \sin \hat{C}}{abc} = \frac{bc \sin \hat{A}}{abc}$$

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$$

Exemple:  $ABC$  est un triangle tel que  $BC = 4\text{cm}$ ,  $\text{mes} \hat{B} = 75^\circ$   $\text{mes} \hat{C} = 45^\circ$

1. Faire la figure
2. Déterminer la valeur exacte des longueurs  $AB$  et  $AC$

3. Déterminer la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$

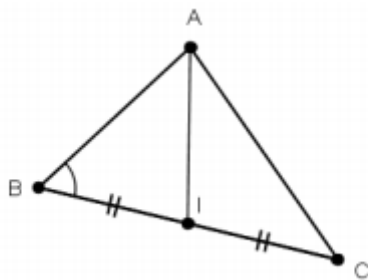
III. Théorème de la médiane

Ce théorème permet de connaître la longueur de la médiane à partir de trois longueurs du triangle

**Théorème :** Dans un triangle quelconque  $ABC$ , on appelle  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ , on a alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Preuve: Considérons la figure ci-contre



$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \vec{AI} \cdot \vec{IB} + IB^2 + AI^2 + 2 \times \vec{AI} \cdot \vec{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2 \times \vec{AI}(\vec{IB} + \vec{IC}) + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Comme  $I$  milieu de  $[BC]$ , on a  $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$  et  $IB = IC = \frac{BC}{2}$

$$\begin{aligned} &= 2AI^2 + 2 \left( \frac{BC}{2} \right)^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \end{aligned}$$

Exemple: l'unité est le millimètre.  $ABC$  est un triangle tel que  $BC = 32$ ,  $AC = 28$ ,  $AB = 20$ .  $I$  est le milieu du segment  $[BC]$  et  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[BC]$ .

1. Calculer à un degré près les mesures des angles  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$
2. Calculer  $IA$  et  $AH$

Classe : 2<sup>nd</sup>e c

Durée : 110 min

nombre de périodes : 3

**MODULE 3 :** CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN.

**CHAPITRE 9 :** DROITES ET CERCLES DANS LE PLAN.

**Leçon 1 :** Droites dans le plan.

**Objectifs de la leçon :**

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite dans le plan ainsi que son équation réduite.
- Déterminer un vecteur normal à une droite.
- Ecrire une représentation paramétrique d'une droite.
- Donner les positions relatives entre deux droites en utilisant leurs vecteurs normaux ou leurs coefficients directeurs ou leurs représentations paramétriques.
- Donner un point et un vecteur non nul d'une droite de représentation paramétrique connue.

**Prérequis :**

- calculer le déterminant de deux vecteurs
- calculer du produit scalaire de deux vecteurs

**Motivation :**

Dans les classes antérieures, nous reconnaissons les droites à partir de leurs représentations graphiques dans le plan. Existe-t-il une autre manière de reconnaître une droite dans le plan?

**Situation problème :**

### **1-1 utilisation d'un vecteur directeur d'une droite**

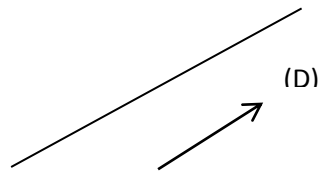
**Activité :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . on considère les droites  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}_1(2; 2)$ ,  $\vec{u}_2(1; 1)$ ,  $\vec{u}_3(3; -3)$ . Justifier que  $(D_1) // (D_2)$  et que  $(D_2) \perp (D_3)$ .

**Résumé :**

Le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$ .

- Pour tout point A et tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, il existe une et une seule droite passant par A et dirigée par  $\vec{u}$ .



- Pour construire la droite (D) passant par A et dirigée par  $\vec{u}(a, b)$ , on peut :
  - Placer le point A.
  - construire le point B tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
- Soient (D) et (D') deux droites du plan ayant respectivement pour vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ . alors on a :
  - (D) // (D') si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires. Ou encore (D) // (D') si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$ .
  - (D)  $\perp$  (D') si et seulement si  $\vec{u} \perp \vec{u}'$ .
- Soit (D) une droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . pour tout point M du plan, on a :
  - $M \in (D)$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

### Exercice d'application :

Soient (D1) et (D2) deux droites de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u} (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$  et  $\vec{u}' (\sqrt{2}/2 ; -\sqrt{3}/2)$ . Les (D1) et (D2) sont-elles perpendiculaires?

### 1-2 Vecteur normal

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

#### Activité :

(D) est la droite de vecteur directeur  $\vec{u} (1/2 ; 1/2)$  et un vecteur  $\vec{n} (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  du plan.

#### Résumé :

- On appelle vecteur normal à une droite (D) tout vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de (D).
- soient (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ . Alors on a :
  - (D) // (D') si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.
  - (D)  $\perp$  (D') si et seulement si  $\vec{n} \perp \vec{n}'$ .
- Pour tout point A et tout vecteur  $\vec{n}$  non nul, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

- Soit (D) une droite,  $\vec{n}$  un vecteur normal à (D) et A un point de (D). pour tout point M du plan on a :  
M ∈ (D) si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ .

### Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). dans chacun des cas suivants dire si (D1) de vecteur normal  $\vec{n}$  est perpendiculaire à (D2) de vecteur normal  $\vec{n}'$  :

- 1-  $\vec{n} (2 ; -3)$  et  $\vec{n}' (6 ; 4)$ ,
- 2-  $\vec{n} (5 ; -6)$  et  $\vec{n}' (1/6 ; -1/5)$ .

### **1-1 Equation cartésienne d'une droite**

#### Activité :

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). (D1) une droite du plan de vecteur directeur  $\vec{u}_1(2 ; 2)$ .

- 1- Soient M(x, y) et A (3 ; 4) deux points de la droite (D<sub>1</sub>). Calculer en fonction de x et y le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}_1$ .
- 2- On pose  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1) = 0$ . Comment appelle-t-on cette égalité?
- 3- Soient (D2) la droite passant par B (1 ; 2) et de vecteur normal  $\vec{n} (2 ; 3)$  et N (x, y) appartenant à (D2). Calculer en fonction  $\overrightarrow{BN} \cdot \vec{n}$  en fonction de x et y.
- 4- On pose  $\overrightarrow{BN} \cdot \vec{n} = 0$ . Que représente cette égalité ?

#### Résumé

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit (D) une droite du plan.

- Il existe des nombres réels a, b et c tels que pour tout point M (x, y) ;  
M ∈ (D) si et seulement si  $ax + by + c = 0$ .
- Soient a, b et c des nombres réels tels que : (a, b) ≠ (0, 0) ; l'ensemble des points M(x, y) tels que  $ax + by + c = 0$  est une droite dirigée par u (-b, a).
- Toute équation de (D) du type  $ax + by + c = 0$  est appelé équation cartésienne de (D) dans (O, I, J).
- Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite (D) dans un repère (O, I, J), on peut chercher à se ramener à l'un des deux cas suivants :
  - (D) est définie par un point A et un de ses vecteurs directeur u.  
Pour tout point M, on a :  $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ .
  - (D) est définie par un point et un de ses vecteurs normaux n.  
Pour tout point M,  $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} = 0$ .

La deuxième méthode ne doit être utilisée que si le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé puisque c'est uniquement dans ce cas que l'on connaît l'expression analytique du produit scalaire.

- Si  $b \neq 0$  une équation cartésienne d'une droite peut se mettre sous la forme  $y = mx + p$ . cette équation est appelée équation réduite de la droite. Un vecteur directeur de cette droite est  $\vec{u} (1 : m)$ .

**Remarque :** soit  $(D)$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  $\vec{n} (a : b)$  est orthogonal à  $\vec{u} (-b : a)$ . donc  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $(D)$ .

### Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . donner une équation cartésienne des droites :

- 1- Passant par le point  $C (-2 ; 0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u} (1 ; 2)$ .
- 2- Passant par le point  $F (-3 ; 5)$  et de vecteur normal  $\vec{n} (3 ; 2)$ .

### 1-3 Représentations paramétriques d'une droite

#### Activité :

Le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$ . on considère les points  $A (2 ; -3)$  et  $B (3 ; -5)$ .  $C$  et  $D$  deux points d'abscisses respectives  $-1$  et  $2/3$  dans le repère  $(A, B)$  de la droite  $(D)$ .

- 1- Exprimer les vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AD}$  en fonction du vecteur  $\vec{AB}$ .
- 2- Déduire les coordonnées de  $C$  et  $D$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

#### Résumé :

Le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$ .

- Soit  $a, b, x_0, y_0$  des nombres réels tels que :  $(a ; b) \neq (0, 0)$ . L'ensemble des points  $M (x, y)$  pour lesquels il existe un nombre réel  $t$  vérifiant 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$
 est la droite  $(D)$  passant par le point  $A (x_0, y_0)$  et dirigé par le vecteur  $u (a, b)$ .
- Soit  $(D)$  la droite passant par le point  $A (x_0, y_0)$  et dirigée par le vecteur  $u (a, b)$ . on dit que le système  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
- Les représentations paramétriques sont utilisées pour :
  - Démontrer qu'un point appartient ou non à une droite.

- Trouver une équation cartésienne d'une droite définie par une représentation paramétrique.
- Trouver une représentation paramétrique d'une droite définie par une équation cartésienne.

**Remarque :**

- ✓ Si M (x,y) est un point de (D), le nombre réel t vérifiant  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$  est unique ; c'est l'abscisse du point M dans le repère (A,  $\vec{u}$ ) de la droite (D). on dit que M est le point de paramètre t.
- ✓ Une droite (D) admet plusieurs représentations paramétriques. Chacune étant déterminée par le choix d'un point A sur (D) et d'un vecteur directeur de (D).

**Exercices d'application :**

le plan est muni d'un repère (O, I, J).

- 1- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point C(3 ; -1) et dirigée par  $\vec{u}(4 ; 1)$ .
- 2- Soit (D1) la droite de représentation paramétrique :
 
$$\begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = 7\alpha \end{cases} (\alpha \in R).$$

Parmi les points suivants : A(2 ; 1) ; B(3 ; 7) ; C(2 ; 1/3), quels sont ceux qui appartiennent à (D1).

**Leçon 2 :** Cercles dans le plan

**Objectifs de la leçon :**

- Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle à partir de l'un de ses diamètres ou un de ses rayons.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ .
- Déterminer par leurs coordonnées les éventuels points d'intersection d'un cercle et d'une droite du plan d'équations données.

**Prérequis :**

- Calculer la distance entre deux points dont on connaît les coordonnées.
- Calculer le produit scalaire.
- Forme canonique d'un polynôme du second degré.

**Motivation :** ?

### 1-1 équation cartésienne d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Activité 1

On considère le cercle (C) de centre I (-2 ; 3) et de rayon  $r = 2$  cm. Soit M ( x, y) un point du plan.

- 1- Calculer la distance IM en fonction de x et y.
- 2- Montrer que  $IM^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ . Que représente cette égalité ?

#### Activité 2

Soient A(-1 ; 2) ; B(3 ; -2) deux points du plan, (C) le cercle de diamètre [AB]. pour tout point M(x,y) de (C) on a  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ . écrire cette égalité en fonction de x ,y et dire ce qu'elle représente.

#### Résumé :

- Soit (C) un cercle ; il existe des nombres réels a,b,c tels que pour tout point M(x,y) :  $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ . Cette égalité est appelée équation cartésienne de (C).
- Soit a, b, c des nombres réels :  
L'ensemble des points M(x,y) tels que  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  est :
  - Soit l'ensemble vide,
  - Soit un point
  - Soit un cercle.
- Une équation cartésienne d'un cercle peut s'écrire :  
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  où (a,b) sont les coordonnées du centre du cercle et r son rayon.
- L'ensemble des points M du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre [AB].

#### **Exercice d'application :**

on considère les points A (2 ; -1) et B (5 ; 3).

- 1- Trouver une équation du cercle de centre A et de rayon 3.
- 2- Donner une équation du cercle de diamètre [AB].

### Leçon3 : Points d'intersection entre un cercle et une droite.

#### Activité :

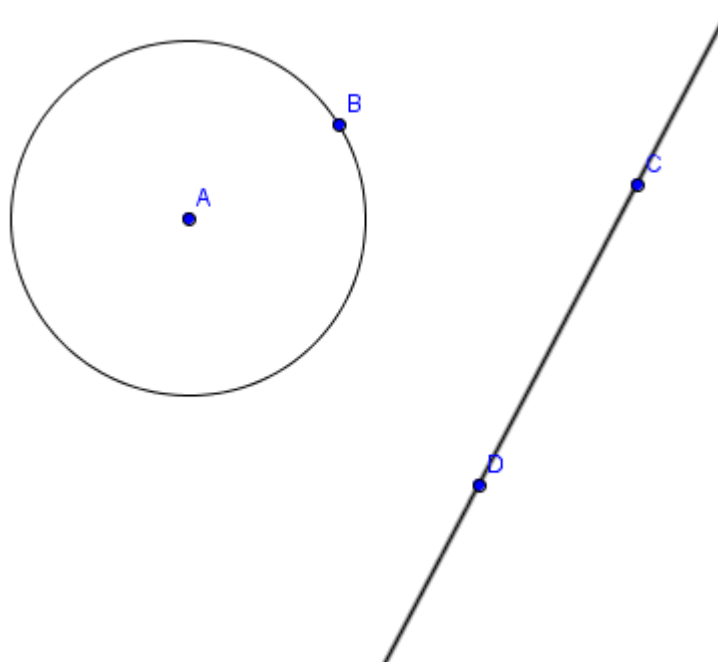
On donne les points  $A(3; -1)$ ,  $B(-1; -3)$  et la droite (D) dont une représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Soit (C) le cercle de diamètre [AB].

- 1- Donner une équation cartésienne de (C).
- 2- En remplaçant  $x$  et  $y$  dans l'équation de (C) par leurs expressions en fonction de  $t$ , calculer  $t$ .
- 3- Déduire la (ou les) valeur(s) de  $x$  et  $y$ .

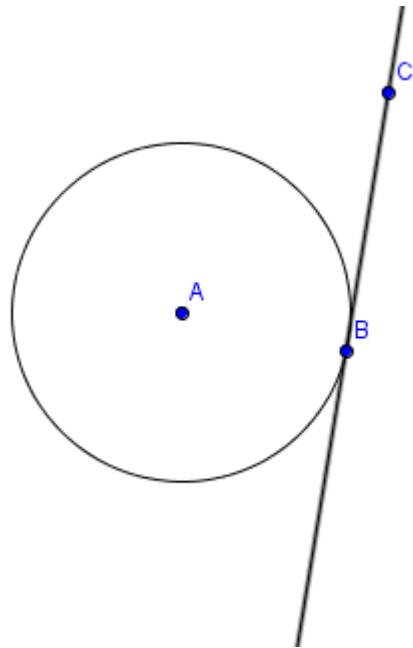
Les valeurs de  $x$  et  $y$  représentent les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection entre le cercle (C) et la droite (D).

#### Résumé :

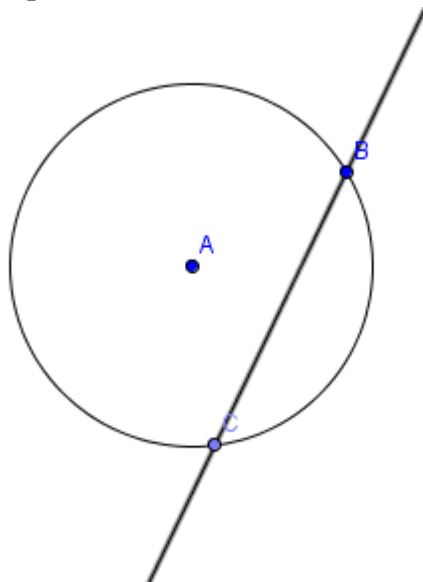
- Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection d'un cercle (C) et d'une droite (D) dont on connaît une représentation paramétrique :
  - on remplace  $x$  et  $y$  dans l'équation du cercle par leurs expressions en fonction du paramètre.
  - On détermine la valeur du paramètre et on déduit les coordonnées des points d'intersection.
- l'ensemble des points d'intersection entre un cercle et une droite est :
  - soit vide,



- 
- soit un singleton,



- 
- soit deux points .



-

### Exercice d'application :

On considère la droite (D) :  $5x + y - 6 = 0$ ; le cercle (C) de centre A(2 ;2) et de rayon  $\sqrt{2}$ . Déterminer les points d'intersection entre (C) et (D).

Devoirs : exercices 2 ;3 ;7 ;8 ;10 page 92.

Exercices :14 ;16 ;18 ;20 page 93. Exercices 30 ;36 ;37 page



# TRANSFORMATION DU PLAN

## Leçon 1 : TRANSLATION, SYMETRIE ET ROTATION

### I-TRANSLATION

**Définition:** On considère un vecteur  $\vec{u}$  du plan. La translation de vecteur  $\vec{u}$  est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

**Notation:** On note  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

**Propriétés:** a) Point invariant: Si le vecteur  $\vec{u}$  n'est pas nul, aucun point n'est invariant. Si  $\vec{u} = \vec{0}$ , tous les points sont invariants.

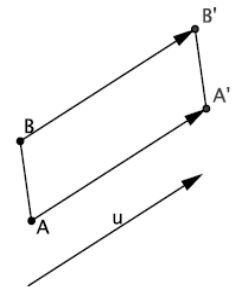
b)  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  équivaut à  $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$ ; c'est-à-dire que M est l'image de M' par la translation de vecteur  $-\vec{u}$ .

c) Si  $t_{\vec{u}}(A) = A'$  et  $t_{\vec{u}}(B) = B'$ , alors  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ , c'est-à-dire que  $ABB'A'$  est un parallélogramme.

Ainsi  $A'B' = AB$  et  $(A'B') \parallel (AB)$ ; ce qui signifie que la translation conserve les distances.

d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d); l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



#### 1) Expressions analytique

Soit  $\vec{u}(a,b)$  un vecteur du plan M(x,y) un point du plan on appelle translation du point M par rapport au vecteur  $\vec{u}$  le point M'(x';y') tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

La translation de vecteur  $\vec{u}(a,b)$  est notée  $t_{\vec{u}}$ . Si l'image de M(x,y) par  $t_{\vec{u}}$  est M'(x';y') on note  $t_{\vec{u}}(M)=M'$  alors  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Exemple A(2 ; -1) , B(-3 ; 0) et C(1 ; 1)

Donner les coordonnées du point D image de C par la translation du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

Solution

$$t_{\overrightarrow{AB}}(C)=D \text{ alors } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(-5 ; 1) \text{ alors } \begin{cases} x' = 1 - 5 \\ y' = 1 + 1 \end{cases} \text{ Donc } D(-4, 2)$$

### II- SYMETRIE

#### A) Symétrie centrale

**Définition:** On considère un point A du plan. La symétrie centrale de centre A est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que A est le milieu du segment [MM'].

On a alors  $\vec{AM}' = \vec{MA} = -\vec{AM}$ .

**Notation:** On note  $s_A$  la symétrie de centre A.

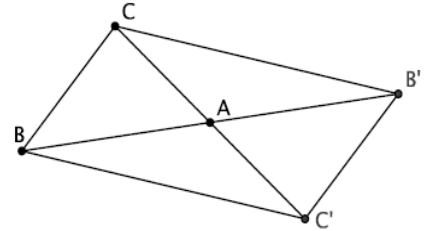
**Propriétés:** a) Point invariant: Le point A, centre de la symétrie, est l'unique point invariant.

b) Si  $s_A(M) = M'$  alors  $s_A(M') = M$ .

c) Si  $s_A(B) = B'$  et  $s_A(C) = C'$ , alors  $\vec{B'C'} = \vec{CB} = -\vec{BC}$ , c'est-à-dire que BCB'C' est un parallélogramme de centre A. Ainsi  $B'C' = BC$  et  $(B'C') \parallel (BC)$ ; ce qui signifie que la symétrie centrale conserve les distances.

d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d); l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



## 1) Expressions analytique

Soit  $M(x ; y)$ ,  $M'(x' ; y')$  et  $A(a ; b)$

$S_A(M) = M'$  équivaut à dire que A est le milieu du segment  $[[MM']]$

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = a \\ \frac{y+y'}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Exemple :  $A(2 ; -1)$ ,  $B(-3 ; 0)$

Donner les coordonnées du point C image de B par rapport à la symétrie de centre A

Solution

$$S_A(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2(2) - (-3) \\ y' = 2(-1) - 0 \end{cases} \text{ ainsi } C(7 ; -2)$$

## B) Symétrie orthogonale

**Définition:** On considère une droite  $\Delta$  du plan. La réflexion d'axe  $\Delta$  est la transformation du plan qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\Delta$  est la médiatrice de  $[MM']$ .

**Notation:** On note  $s_\Delta$  la symétrie d'axe  $\Delta$ .

**Propriétés:** a) Point invariant: Les points de la droite  $\Delta$ , axe de la symétrie, sont les points invariants.

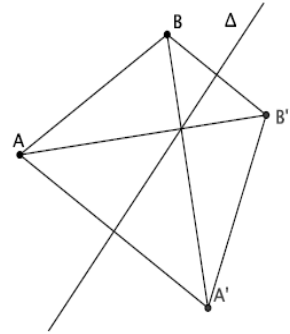
b) Si  $s_\Delta(M) = M'$  alors  $s_\Delta(M') = M$ .

c) Si  $s_\Delta(A) = A'$  et  $s_\Delta(B) = B'$ , alors les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  se coupent en un point de la droite  $\Delta$ . De plus, les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  sont parallèles et  $A'B' = AB$ , c'est-à-dire que  $ABB'A'$  est un trapèze isocèle. Ce qui signifie que la réflexion conserve les distances.

d) L'image d'une droite  $(d)$  est une droite  $(d')$ ; si  $(d)$  est parallèle à  $\Delta$ , alors  $(d')$  leur est parallèle; si  $(d)$  est perpendiculaire à  $\Delta$ , alors  $(d') = (d)$ .

e) L'image d'un cercle est un cercle de même rayon; si les deux cercles se coupent, alors les points d'intersection sont sur l'axe  $\Delta$ .

f) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



*Exercice d'application voir livre au programme*

## III- ROTATION

**Définition:** On considère un point  $A$  et un nombre réel  $\theta$ . La rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  est la transformation du plan qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $AM' = AM$  et  $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta [2\pi]$ .

**Notation:** On note  $\text{rot}(A; \theta)$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$ .

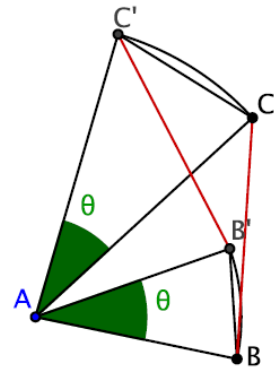
**Propriétés:** a) Point invariant: Le point  $A$ , centre de la rotation, est l'unique point invariant.

b) Si  $\text{rot}(A; \theta)(B) = B'$  et  $\text{rot}(A; \theta)(C) = C'$ , alors  $BC = B'C'$  et  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{B'C'}) = \theta$ ; ce qui signifie que la rotation conserve les distances.

c) L'image d'une droite  $(d)$  est une droite  $(d')$  telle que l'angle formée entre les deux droites égale  $\theta$ ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

d) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

e)  $\text{rot}(A; \pi) = s_A$ .



*Exercice d'application voir livre au programme*

## IV- PROPRIETES COMMUNES DES TRANSFORMATIONS CI-DESSUS

Conservation de l'alignement: L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre.

L'image d'une droite est une droite.

Conservation des distances: L'image d'un segment est un segment de même longueur.

L'image d'un cercle  $C$  est un cercle  $C'$  de même rayon. Si la droite  $(d)$  est tangente au cercle  $C$ , alors son image  $(d')$  est tangente à  $C'$ .

Conservation du parallélisme: Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Conservation de l'orthogonalité : Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires .

Conservation du centre de gravité: L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Conservation des aires: L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

Conservation des angles: L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

## Leçon 2 : HOMOTHÉTIE

### A Définition

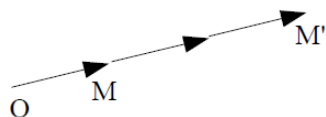
$O$  est un point,  $k$  est un réel non nul.

On appelle homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  la transformation qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$

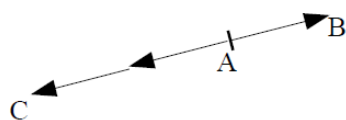
Si on note  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ , les énoncés suivants sont équivalents :

- $M'$  est l'image de  $M$  par  $h$
- $M' = h(M)$
- $\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$

#### Exemples



Le point  $M'$  est l'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 3, en effet  $\vec{OM}' = 3 \cdot \vec{OM}$ .



Le point  $C$  est l'image de  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $-2$ , en effet  $\vec{AC} = -2 \cdot \vec{AB}$ .

Le point  $B$  est l'image de  $C$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{-1}{2}$ , en effet  $\vec{AB} = \frac{-1}{2} \vec{AC}$ .



#### Conséquences immédiates

- les points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés (en effet  $\vec{OM}$  et  $\vec{OM}'$  sont colinéaires) et  $OM' = |k| OM$ .
- le point  $O$  est sa propre image, on dit qu'il est invariant.
- si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points alignés,  $A$  étant distinct de  $B$  et  $C$ , alors il existe une unique homothétie de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $C$ .
- une symétrie centrale de centre  $O$  est une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-1$ .
- une homothétie de rapport 1 laisse tous les points invariants.

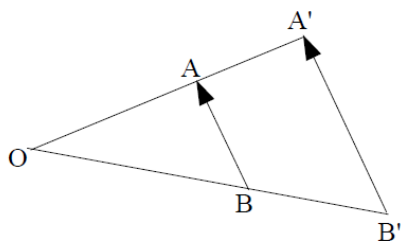
## B Propriétés

On considère une homothétie  $h$  de centre  $O$  et de rapport  $k$ .

### 1- Propriété fondamentale

Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques. Si  $A' = h(A)$  et  $B' = h(B)$ , alors  $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ .

**Démonstration**



Comme  $A' = h(A)$  on a  $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$  et comme  $B' = h(B)$  on a  $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ .

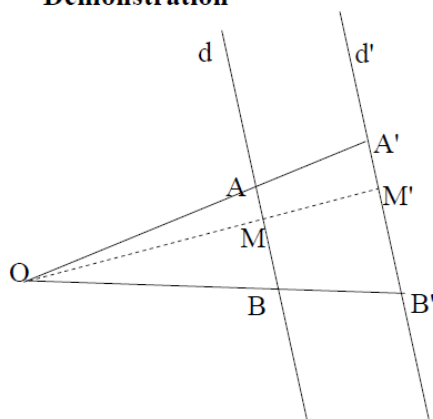
Alors  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$

### 2- Image d'une droite

Une homothétie transforme une droite  $d$  en une droite  $d'$  parallèle à  $d$ .

Si la droite  $d$  passe par le centre de l'homothétie, alors  $d' = d$ .

**Démonstration**



Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $d$ , et  $A'$  et  $B'$  leurs images par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ .

Comme  $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ , la droite  $d'$  passant par  $A'$  et  $B'$  est parallèle à  $d$ .

Soit  $M$  un point de  $d$ . Montrons que  $M' = h(M)$  est sur  $d'$ .

Il existe un réel  $x$  tel que  $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ .

D'autre part,  $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ .

Donc  $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot x \cdot \overrightarrow{AB} = x \cdot k \cdot \overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{A'B'}$

Cela montre que  $A'$ ,  $B'$  et  $M'$  sont alignés, donc que  $M'$  est sur  $d'$ .

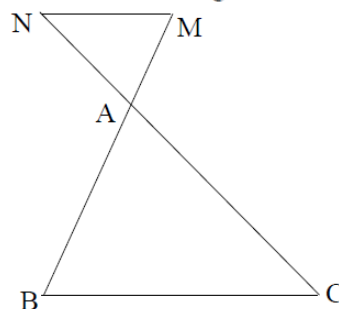
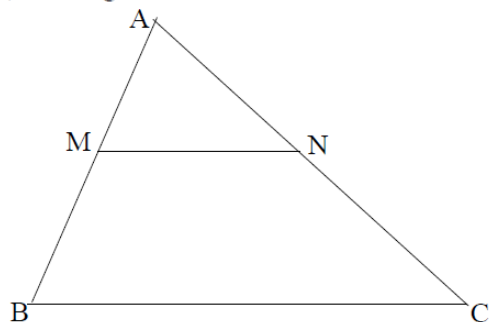
En prenant  $x$  dans  $[0;1]$ , cela montre aussi que le segment  $[A'B']$  est l'image du segment  $[AB]$ .

### 3- Triangles homothétiques

Soit  $ABC$  un triangle,  $M$  un point de  $(AB)$  et  $N$  un point de  $(AC)$ .

Si  $(MN)$  est parallèle à  $(BC)$ , alors l'homothétie de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $M$  transforme aussi  $C$  en  $N$ .

(les triangles  $AMN$  et  $ABC$  sont dits homothétiques, ils sont dans la configuration de Thalès)



Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $M$ .

Le point  $C$  se trouve à l'intersection des droites  $(AC)$  et  $(BC)$ . Son image par  $h$  sera donc à l'intersection des images de  $(AC)$  et  $(BC)$ .

L'image de  $(AC)$  est  $(AC)$  (droite passant par le centre de l'homothétie).

L'image de  $(BC)$  est une droite parallèle à  $(BC)$  passant par  $M$  image de  $B$ , c'est donc la droite  $(MN)$ .

L'image de  $C$  par  $h$  est donc l'intersection des droites  $(AC)$  et  $(MN)$ , c'est le point  $N$ .

#### 4- Image d'un cercle

Un homothétie  $h$  de rapport  $k$  transforme un cercle de centre  $I$  et de rayon  $R$  en un cercle de centre  $I'$  et de rayon  $R'$  avec  $I' = h(I)$  et  $R' = |k| R$ .

### C Effets de l'homothétie

---

#### 1- Distances, aires et volumes

Une homothétie de rapport  $k$  multiplie les distances par  $|k|$ , les aires par  $k^2$  et les volumes par  $|k|^3$ .

#### 2- Conservation de l'alignement

Si  $A, B$  et  $C$  sont trois points alignés, leurs images  $A', B'$  et  $C'$  par une homothétie sont aussi trois points alignés.

#### 3- Conservation du parallélisme

Si  $d_1$  et  $d_2$  sont deux droites parallèles, leurs images  $d_1'$  et  $d_2'$  par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

#### 5- Conservation des angles orientés

Dans le plan orienté, si  $A, B$  et  $C$  sont trois points distincts deux à deux, et si  $A', B'$  et  $C'$  sont leurs images respectives par une homothétie, alors  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

En particulier, les homothéties conservent les angles droits, donc l'orthogonalité.

## MODULE 2 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES

DURÉE : 10 heures

### Chapitre : STATISTIQUES

**MOTIVATION** : A la fin de chaque année dans les établissements et certains de nos entreprises, nous sommes souvent amenés à faire un bilan de travail qui nous donne les informations sur l'évolution de l'entreprise ou de l'établissement, en calculant les différents pourcentages et la variance. Cette leçon donne les techniques pour pouvoir le faire aisément.

#### LEÇON 1 : SÉRIES STATISTIQUES QUALITATIVES

Durée : 02 heures

Objectifs de la leçon :

- Collecter et ordonner les données d'une série à caractère qualitatif.
- Déterminer la fréquence et la mesure du secteur circulaire de chaque modalité.
- Déterminer le mode de la série.
- Représenter graphiquement une série qualitative par un diagramme circulaire (ou semi-circulaire) et par un diagramme à bandes.

Pré requis : regrouper les données dans un tableau statistique.

#### Situation problème :

Pendant les activités culturelles du lycée de mfou, les élèves organisent un concours des masters qui a mis en compétition des candidats suivants : Nestor (N), Mendou (M), André (A), Henri (H), Dany (D). Les élèves de la terminale D du lycée, désignés comme jury par le comité d'organisation, ont effectué un vote dont voici le dépouillement : D; N; H; H; H; A; D; M; N; D; D; N; N; D; D; A; D; H; H; N; D; A; A; H; D; A; N; D; N; A; H; H; N; D; A; M; M; D; M; M; N; N; D; H; D; A; A; M; D; D; D; N; M; M; D; D; M; N; D; H .

Quel est le caractère étudié dans cette compétition ?

Quel est le Master de ce concours ?

Quel est le nombre d'élèves de la terminale D du lycée de mfou ?

#### Activité d'apprentissage :

On\_ donne le tableau suivant :

Modalités	A	D	H	M	N	TOTAL
Effectifs	9	20	10	9	12	
Fréquences en %						
Mesure des angles en (°)						360°

1. Reproduire et compléter ce tableau
2. Représenter ce tableau par un diagramme à bandes puis par un diagramme circulaire.

3. Quel est le mode de cette série statistique ?

### **RESUME :**

Une série statistique qualitative est celle dont les modalités ne sont pas des nombres. Le caractère étudié dans ce cas ne peut être dénombré (quantifié), on dit qu'il est qualitatif.

Soit  $n_i$  l'effectif de la modalité  $\ll i \gg$ ,  $f_i$  la fréquence de la modalité  $\ll i \gg$ , et  $N$  l'effectif total de la série.

L'effectif total  $N$  de la série est donné par la somme des effectifs de chaque modalité.

La fréquence de la modalité  $\ll i \gg$  en pourcentage est donnée par :  $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$

La fréquence simple de la modalité  $\ll i \gg$  est donnée par :  $f_i = \frac{n_i}{N}$

La mesure en degré de l'angle au centre de la modalité  $\ll i \gg$  est donnée par :  $\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360$ .

Le mode d'une série statistique qualitative est la modalité qui a le plus grand effectif ou la plus grande fréquence ou le plus grand angle au centre ou la bande la plus élevée. Dans l'exemple ci-dessus, le mode est D.

## **LECON 2 : SERIES STATISTIQUES QUANTITATIVES DISCRETES**

Durée : 04 heures

Objectifs de la leçon :

- Collecter et ordonner les données d'une série à caractère quantitatif.
- Déterminer, calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion.
- Représenter graphiquement une série quantitative discrète par un diagramme en bâtons.
- Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Pré requis : - regrouper les données dans un tableau statistique.  
- calculer la moyenne, les fréquences et effectifs cumulés.

### **Situation problème :**

Une étude sur le nombre de frères de certaines élèves d'une classe de 2<sup>nd</sup>C a donné les résultats suivants :

1 ; 5 ; 7 ; 7 ; 1 ; 3 ; 0 ; 6 ; 1 ; 2 ; 3 ; 0 ; 1 ; 5 ; 2 ; 3 ; 7 ; 6 ; 3 ; 7 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 2 ; 5 ; 5 ; 6 ; 5 ; 4 ; 2 ; 0 ; 0 ; 5 ; 1 ; 6 ; 4 ; 0.

Quelle est la population étudiée dans cette série ?

Quel est le caractère étudié ?

Combien d'élèves compte cette classe ?

Quelle est la moyenne des frères des élèves de cette classe ?

### Activité d'apprentissage :

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Notes ( $x_i$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Effectifs ( $n_i$ )	6	5	5	5	5	6	4	4	
EEC									
ECD									
Fréquences en % ( $f_i$ )									100%
$(n_i x_i)$									
$n_i (x_i)^2$									
$n_i  x_i - \bar{x} $									

### RESUME :

#### 1- Notion et vocabulaire.

$x_i$  : La modalité de rang  $i$  Exemple :  $x_1=0$  et  $x_6=5$

$n_i$  : L'effectif de La modalité  $x_i$  Exemple :  $n_1=6$

$N$  : Effectif total  $N=\sum_{i=1}^p n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ , on lit : <<somme des  $n_i$ ,  $i$  allant de 1 à  $p$ >> Exemple :  $N=40$

#### 2- caractéristiques de position.

LE MODE : c'est la modalité qui correspond à l'effectif le plus élevé de la série statistique. Exemple : le mode de la série ci-dessous est 5.

NB : une série statistique peut être plurimodale, ie qu'elle peut avoir plusieurs modes.

La Moyenne de la série statistique  $(x_i, n_i)$  avec  $1 \leq i \leq p$  est le nombre  $\bar{x}$  défini par :  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i}{N}$

La Médiane : c'est le nombre réel  $Me$  tel que le nombre d'individus de modalité supérieure ou égale à  $Me$  et le nombre d'individus de modalité inférieure ou égale à  $Me$  soient tous deux au moins égaux à  $N/2$ .

NB : la médiane  $Me$  n'est pas forcément un nombre parmi les modalités. Elle peut être située entre deux modalités  $X_j$  et  $X_{j+1}$ . l'intervalle  $[X_j ; X_{j+1}]$  est alors appelé intervalle médian ; et tout nombre de cet intervalle est une médiane de la série.

Remarque : Graphiquement, la médiane  $Me$  est la modalité qui correspond au point de rencontre des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants de la série.

#### 3- caractéristiques de dispersion.

L'Ecart-moyen : c'est le nombre réel noté  $e_m$ , et défini par  $e_m = \frac{\sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|}{N}$

La Variance : c'est le nombre réel positif note  $V$  et défini par  $V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$  ou  $V = \frac{1}{N} [\sum_{i=1}^p n_i (x_i)^2] - \bar{x}^2$

(Formule de K O N I G)

L'Ecart-type est le nombre réel note  $\sigma$ , défini par  $\sigma = \sqrt{V}$ .

**NB :** L'Ecart-moyen et L'Ecart-type mesurent la dispersion (distance) autour de la moyenne. Lorsque cette distance est faible par rapport a la moyenne, on dit que la moyenne est représentative et les données ne sont pas dispersées.

### Exercice d'application

On lance deux des 60 Foix de suite et on note, pour chaque lancer la somme des points obtenus.

On obtient le tableau suivant :

points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

1- Calculer la moyenne, L'Ecart-moyen et L'Ecart-type de cette série statistique.

2- Construire les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissante et décroissants.

### **LECON 3 : SERIES STATISTIQUES QUANTITATIVES CONTINUES**

Durée : 04 heures

Objectifs de la leçon :

- Collecter et ordonner dans des intervalles les données d'une série à caractère quantitatif.
- Calculer l'amplitude, le centre d'une classe.
- Déterminer, calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion.
- Représenter graphiquement une série quantitative continue par un histogramme.

Pré requis : - regrouper les données dans un tableau statistique.

-calculer la moyenne, la variance L'Ecart-moyen et L'Ecart-type.

### **Situation problème** :

Voici les salaires mensuels, exprimés en milliers de francs CFA, des ouvriers d'un atelier de mécanique.

65    83    53    115    94    51    75    71    102    76    105  
81    83    77    58    95    90    64    100    108    68    53  
51    75    83    80    55    78    91    79    74    110    77  
90    92    84    88    85    64    71.

Regrouper ces données dans un tableau statistique dont les modalités sont les intervalles suivants : [50 ; 60[ ; [60 ; 70[ ; [70 ; 80[ ; [80 ; 90[ ; [90 ; 100[ ; [100 ; 110[ ; [110 ; 120[ .

### **Activité d'apprentissage** :

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en vous servant des informations de l'exercice ci-dessus.

$n_i$  : effectif ;  $f_i$  = fréquence ;  $a_i$  = amplitude ;  $c_i$  = centre.

Classes	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[	[110 ; 120[	Total
$n_i$								
$f_i$								100
ECC								
ECD								
$a_i$								
$c_i$								
$n_i c_i$								
$n_i (c_i)^2$								

## **RESUME :**

### **1- Notion et vocabulaire.**

Soit l'intervalle  $[a ; b[$  de la modalité  $i$  d'un tableau statistique ;  $a$  et  $b$  étant des nombres réels.

Le centre de cette classe notée  $c_i$  est défini par  $c_i = \frac{a+b}{2}$

L'amplitude notée  $a_i$  est définie par  $a_i = b - a$

### **2-caractéristiques de position.**

La classe modale : c'est la classe qui correspond à l'effectif le plus élevé de la série, si les amplitudes des classes sont identiques .

Le mode est le centre de la classe modale .

La Moyenne de la série statistique continue  $(x_i, n_i)$  avec  $1 \leq i \leq p$  est le nombre  $\bar{x}$  défini par :  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i c_i}{N}$  .

Exemple : Déterminer la classe modale, le mode et la moyenne de la série ci-dessus.

La médiane est le nombre des modalités qui correspond au point de rencontre des polygones des effectifs cumules croissant et décroissants.

### **3-caractéristiques de dispersion.**

L'Ecart-moyen : c'est le nombre réel noté  $e_m$ , et défini par  $e_m = \frac{\sum_{i=1}^p n_i |c_i - \bar{x}|}{N}$

La Variance : c'est le nombre réel positif note  $V$  et défini par  $V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (c_i - \bar{x})^2}{N}$  ou  $V = \frac{1}{N} [\sum_{i=1}^p n_i (c_i)^2] - \bar{x}^2$

(Formule de K O N I G)

L'Ecart-type est le nombre réel note  $\sigma$ , défini par  $\sigma = \sqrt{V}$ .

### **4-Représentation graphique.**

- On peut représenter une série statistique continue par un histogramme, qui est un ensemble de rectangles dont la base est l'amplitude de la classe correspondante.
- Si les amplitudes des classes sont identiques, La hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) de la classe correspondante.
- Si les amplitudes des classes ne sont pas identiques, La hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à la densité de la classe correspondante.

## Chapitre 14 :

## GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

**Introduction :** L'espace, noté généralement  $(E)$  est un ensemble infini de points admettant des sous-ensembles infinis appelés **droites** et **plans**.

**Leçon 1 :** POSITION RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS DE L'ESPACE.

**Objectifs pédagogiques :** être capable de déterminer

- > Les positions relatives d'une droite et d'un plan ;
- > Les positions relatives de deux plans ;
- > Les positions relatives de deux droites.

**MOTIVATION :**

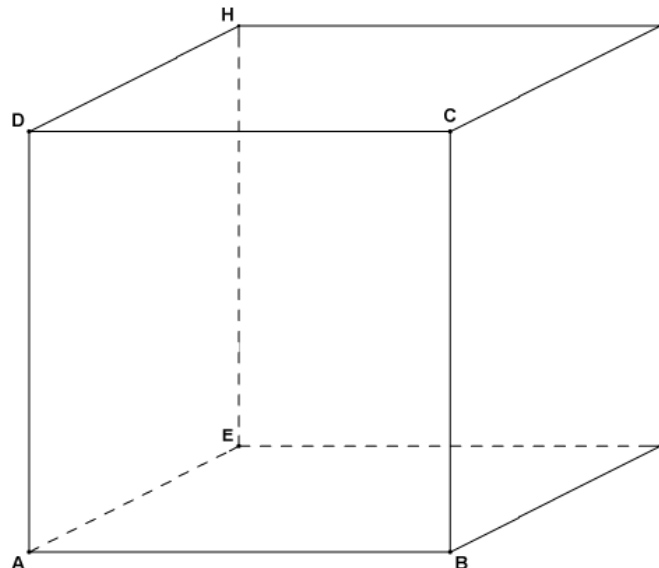
\* Un fil tendu entre deux poteaux électriques, l'arête rectiligne d'une règle ou d'une équerre donnent une idée de la notion physique de droites de l'espace.

\* La surface d'un tableau ou d'un mur, la face d'un solide de l'espace donnent une idée de la notion physique de plans de l'espace.

**SITUATION PROBLÈME :**

Votre petit frère Emmanuel a fabriqué à l'aide d'un calendrier, le cube ABCDEFGH comme l'indique la figure ci-contre ( [faire une figure](#) ).

- 1- Nomme quatre droites de ce cube ;
- 2- Nomme trois plans de ce cube ;
- 3- Quelle est la position relative du plan (ABC) et de la droite (GC) ?
- 4- Quelle est la position relative des plans (GCD) et (FBA) ?
- 5- Quelle est la position relative des droites (BC) et (EF) ?



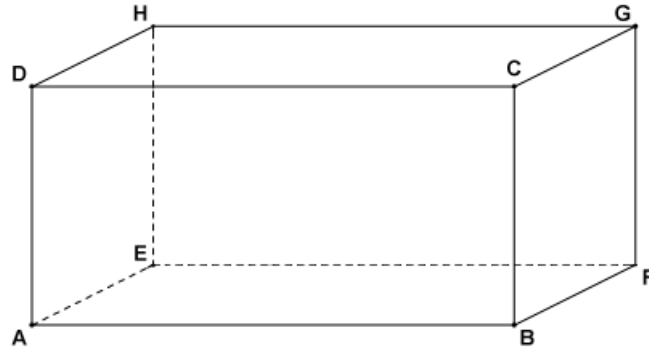
**PRE-REQUIS**

\* Combien de faces comportent le cube ci-dessus ?

\* Combien de droites comportent le cube ci-dessus ?

### ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On donne le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous tel-que  $AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = 6\text{cm}$  et  $BF = 4\text{cm}$  ( faire une figure ).



1- Dessine en vraie grandeur les faces BCGF,

puis les triangles DCB et ABC.

2- a) Cite quatre points du plan (DBF)

b) Cite quatre droites du plan (ABC)

3- Quelle est la nature du triangle DGC ? Calcule DG.

### RESUMES :

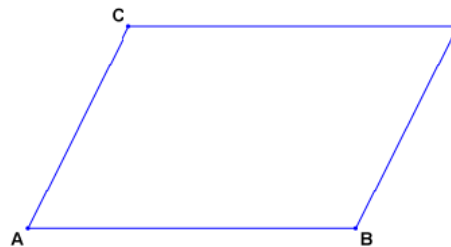
#### 1) Règles de bases de la géométrie de l'espace

**R1 :** Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une droite unique notée (AB). (Figure)

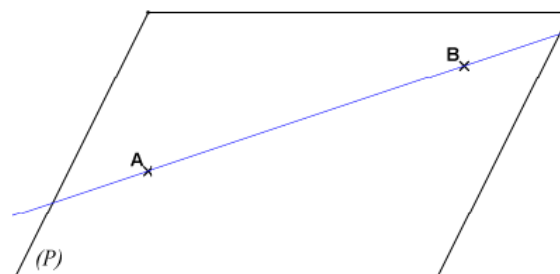


Droite(AB) de l'espace

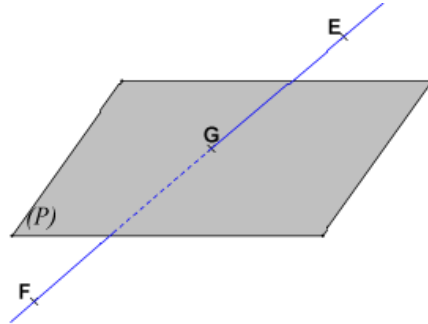
**R2 :** Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un plan unique notée (ABC). On convient de noter un plan par un parallélogramme ( Figure ).



**R3 :** Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P) alors (P) contient la droite (AB). (Figure \*).



**R4** : Tout plan (P) partage l'espace en deux régions (E1) et (E2) situées de part et d'autre de (P), de façon que toute droite ayant un point dans l'une des régions et un point dans l'autre région coupe (P) en un point. (Figure\*\*).



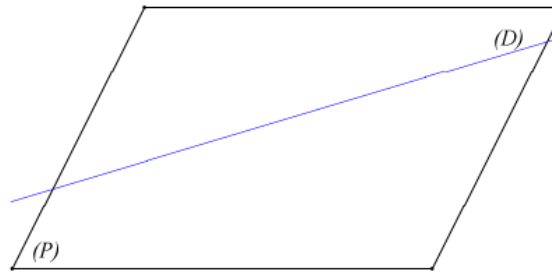
Les points E et F appartiennent respectivement aux régions (E1) et (E2).

**R5** : Les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.

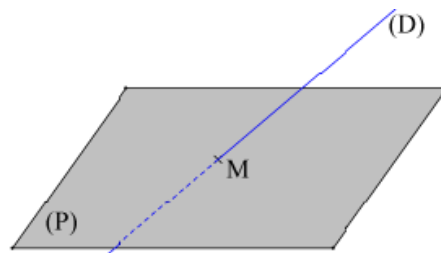
## 2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

**a. Propriétés** : Étant donné une droite (D) et un plan (P), les différentes positions relatives sont :

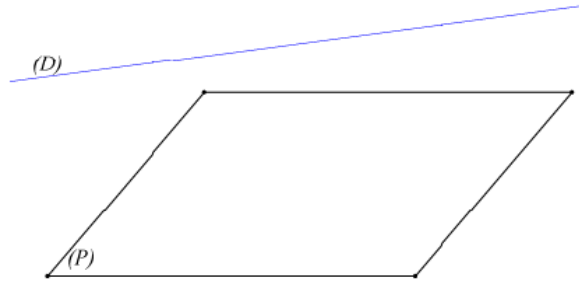
> (D) est incluse dans (P) :  $(D) \subset (P)$ . (Voir figure \*)



> L'intersection de (D) et de (P) est réduite à un point. (Figure \*\*)



> (D) et (P) sont disjoints.



### b. Définitions

- > On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) lorsque (D) est inclus dans (P) ou lorsque (D) et (P) sont disjoints.
- > On dit que le plan (P) est sécant à la droite (D) au point I lorsque l'intersection de (D) et de (P) est réduite au point I.

### 3) Positions relatives de deux plans

a. **Propriétés** : Étant donné deux plans (P) et (P'), les différentes positions relatives sont :

- > (P) et (P') sont confondus ;
- > L'intersection de (P) et (P') est une droite ;
- > (P) et (P') sont disjoints.

### b. Définitions

- > Deux plans confondus ou disjoints sont dits **parallèles**.
- > Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une **droite**.

### 4) Positions relatives de deux droites

a. **Propriétés** : Étant donné deux droites de l'espace (D) et (D'), les différentes positions relatives sont :

- > Les droites (D) et (D') sont **non coplanaires**
- > Si (D) et (D') sont **coplanaires** :
  - . (D) et (D') sont sécants dans un plan (P) ;
  - . (D) et (D') sont confondues ou strictement parallèles dans un plan (P).

**NB** : Deux droites **non coplanaires** sont **disjoints**.

### b. Définitions

> Deux droites de l'espace sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou bien lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.

> Deux droites de l'espace sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point.

**Remarque :** Deux droites disjointes ne sont pas nécessairement parallèles, elles peuvent être non coplanaires.

### DETERMINATION D'UN PLAN

> Il existe un seul plan contenant trois points non alignés.

> Il existe un seul plan contenant une droite et un point extérieur à cette droite.

> Il existe un seul plan contenant deux droites sécantes.

> Il existe un seul plan contenant deux droites strictement parallèles.

**CORRECTION SITUATION PROBLÈME.** " Le prof "

### Devoir à faire à la maison

Soit une pyramide régulière SABCD à la base le carré ABCD de centre O. Soit M un point de [SO]. Détermine l'intersection de la droite (AM) avec le plan (SBC).

**Leçon 2 :** ETUDE DU PARALLÉLISME

Objectifs pédagogiques : Être capable de montrer que :

> Deux droites de l'espace sont parallèles ;

> Une droite et un plan de l'espace sont parallèles ;

> Deux plans de l'espace sont parallèles.

**MOTIVATION :**

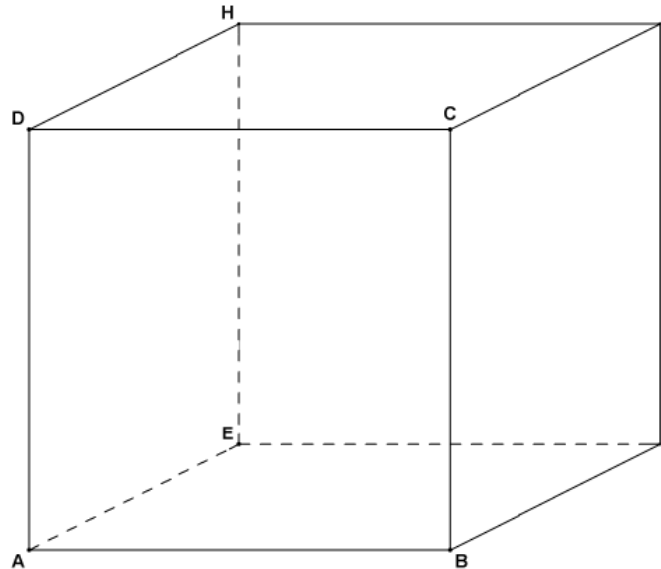
> Les poteaux électriques reliés par un câble sont régulièrement espacés. Elles donnent une idée de la notion physique de droites parallèles de l'espace.

> La surface d'un tableau et du mur opposé à cette surface donne ainsi une idée de la notion physique de plans de l'espace.

**SITUATION PROBLÈME :**

Votre petit frère Emmanuel a fabriqué à l'aide d'un calendrier, le cube ABCDEFGH ( [figure situation problème leçon 1](#) ).

- 1- Nomme toutes les droites parallèles à (BC) passant par A.
- 2- Nomme toutes les droites parallèles à (BC).
- 3- Nomme un plan parallèle à la droite (BC).
- 4- Nomme deux plans parallèles entre elles.



**PRE-REQUIS :**

Combien de droites sont parallèles à la droite (EF) ?

**ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :**

ABCDEFGH est un cube, I un point de [AB].

- 1- Que peux-tu dire des plans (ABC) et (EFG) ?
- 2- Que peux-tu dire des plans (ABC) et (ADE) ?
- 3- Que peux-tu dire des plans (IEG) et (ABC) ?

**RESUME :**

**1) Parallélisme de deux droites**

**Propriétés :**

- > Par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donné.
- > Si deux droites sont parallèles, tout plan coupant l'une coupe l'autre.
- > Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

**Conséquence :** Deux droites **coplanaires** respectivement parallèles à deux droites non parallèles sont **sécantes**.

**2) Parallélisme d'une droite et d'un plan**

**Propriétés :**

- > Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si, il existe dans (P) une droite parallèle à (D).
- > Si une droite (D) est parallèle à un plan (P), alors toute droite parallèle à (D) est parallèle à (P).

Remarque : Deux droites parallèles à un même plan (P) ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.

> Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

### 3) Parallélisme de deux plans

**Propriétés :**

> Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.

> Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

> Par un point donné de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné.

> Si deux plans sont parallèles :

- Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

- Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

- Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

**CORRECTION SITUATION PROBLÈME.** " Le prof "

#### Devoir

ABCDEFGH est un cube et I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG].

Démontre que les plans (IJK) et (EGB) sont parallèles.