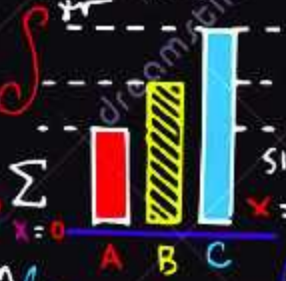


# MATHEMATIQUES en Tle D-TI

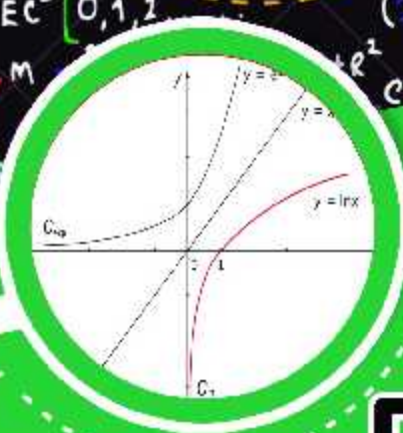
100% GRATUIT

Fomesoutra.com

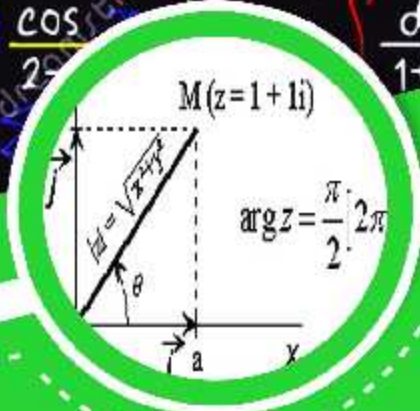


$$E(x) = \sum_{k=1}^n n e^{-p} p (x^k - p) (x = k^2) \sum_{x=1}^n n p x^1 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1$$
$$a^n = b^k \Rightarrow \log a^n = \log b^k$$
$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$



$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 8}{x^2}$$
$$\int_2^8 f(x) dx ?$$



**COURS**  
Cours détaillés et illustrés selon l'Aproche Par Compétence (APC)



**EXERCICES**  
Des exercices de savoir, savoir-faire, et savoir-etre après chaque leçon



**NOUVEAU PROGRAMME**  
Cours et exercices selon le nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp **Les grandprofs de Maths**

# AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est l'œuvre des enseignants du groupe WhatsApp dénommé « Grandprofs de maths(GPM) ». Ce groupe a vu le jour le 12-05-2017. Cette collection est la mise en pratique de l'un de ses objectifs majeurs. Rendu à sa deuxième édition, c'est le fruit de près de trois mois de travail organisé par les administrateurs dans des sous-groupes (13 ateliers).

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette collection n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, encore moins le cours de l'enseignant. Il vient juste en appui à ces documents. Dans le fond et la forme, chaque chapitre de cette collection est conforme au nouveau programme et respecte la structure de l'APC pour les classes de la 6<sup>ème</sup> en première.

Cette deuxième édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner aux administrateurs qui ont travaillé inlassablement pour mener le projet à bon port. Il s'agit de : *M. Guela Kamdem Pierre*, *M. Pouokam Léopold Lucien*, *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* et le fondateur du groupe *M. Ntakendo Emmanuel*. A ce dernier, nous devons toutes les couvertures de cette deuxième édition. Un coup de chapeau est à donner à certains enseignants qui ont fait de la réussite de ce projet, un objectif à atteindre pendant les vacances : ce sont les chefs d'ateliers. Nous avons *M. Siyapdje Henri* (6<sup>ème</sup>), *M. Joseph Fogang* (5<sup>ème</sup>), *M. Ngongang Nivel* (4<sup>ème</sup>), *M. Jidas Tchouan* (3<sup>ème</sup>), *M. Simplicie Dongmo* (2<sup>nde</sup>A<sub>4</sub>), *M. Guela Kamdem Pierre* (2<sup>nde</sup>C), *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* (1<sup>ère</sup>A<sub>4</sub>), *M.*

*Nguefo Takongmo (1<sup>ère</sup>C), M. Jidas Tchouan (1<sup>ère</sup>D-TI), M. Bayiha André Ghislain (T<sup>le</sup>A4), M. Ouafeu Tokam Guy Paulin (T<sup>le</sup> C) et M. Nganmeni Konguep Hervé Battiston (T<sup>le</sup> D-TI).* Nous ne saurons terminer sans féliciter tous les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet et y ont consacré leur précieux temps non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 164 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours réalisés.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que des éventuelles coquilles que pourrait contenir chacun des documents de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants voulant intégrer ce groupe WhatsApp ou désirant prendre part à la 3<sup>ème</sup> édition qui débutera en Mai 2020 sont priés bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre (697 473 953 / 678 009 612), M. Pouokam Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749), M. Tachago Wabo Wilfried Anderson (699 494 671) et M. Ntakendo Emmanuel (676 519 464).*

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

# Projet Grandprofs de math (GPM)

2<sup>ème</sup> édition

Atelier T<sup>le</sup>D-TI

## Table des matières

**1- Systèmes linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  Page 6 - 15**

*M. NGANMENI KONGUEP Hervé Battiston, Lycée Classique et*

*Moderne de MVOMEKA'A, 674565834\695042682*

*(Chef d'atelier)*

**2- Nombres complexes Page 16 - 29**

*M. NGANMENI KONGUEP Hervé Battiston, Lycée Classique et Moderne*

*de MVOMEKA'A, 674565834\695042682*

**3- Limites et continuités Page 30 - 45**

*M. NGNAZOKÉ Armand, Lycée Bilingue de Bocklé (Garoua 3e),*

*697818473*

**4- Dérivées, primitives et étude de fonctions Page 46 -73**

*M. NDJEHEMLE B. , Fondation Bilingue les Sapins,*

*696035926/676207145*

**5- Transformations du plan complexes Page 74 - 93**

*M. Gnontsoye Panghebeke Alain Solanger , Lycée Bilingue de*

*Mutengene/Collège INTAC, 675764637/ 696585343*

**6- Fonction logarithme népérien, Page 94 - 100**

*M. Oliver FONKOU Collège la perfection, DOUALA NDOGPASSI III*

*695817642*

**7- Fonction exponentielle népérien et fonction puissance**

**Page 101 – 108**

*M. TEDJOU KEMGOU Bienvenu* , Lycée bilingue de Fokoue,

**675507439**

**8- Suite numériques**

**Page 109 - 120**

*M. NGANMENI KONGUEP Hervé Battiston*, Lycée Classique et Moderne

de MVOMEKA'A, 674565834\695042682

**9- Intégrations**

**Page 121 - 128**

*M. DIYOU TCHAKOUNTE B. L.B.Edea*, 695143007

**10- Equations différentielles**

**Page 129 - 132**

*M. Ngatcha Gaétan*, lycée de Djeu, 698652878

**11- Statistiques**

**Page 133 - 137**

*M. Njoya Arouna*, Lycée Technique d'Afonoyoa, Collège la fraternité

Adana de Yaoundé, 696620438

**12- Probabilités**

**Page 138 - 160**

*M. Tamoka Tatang Figaro*, Lycée de Mokong-Mokolo, 676018754

**13- TD Global**

**Page 161 – 180**

*M. Kidjekow André*, Lycée de Gayak, 697567929

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>SYSTEMES LINEAIRES DANS <math>\mathbb{R}^2</math> et <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>2</b>
1.1	Généralités	2
1.1.1	Equation d'une droite et d'un plan	2
1.1.2	Interprétation d'un système dans $\mathbb{R}^3$	3
1.2	Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	3
1.2.1	Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$	4
1.2.1.1	Résolution d'un système linéaire de trois équations à deux inconnues	4
1.2.1.2	Système paramétrique dans $\mathbb{R}^2$	4
1.2.2	Résolution d'un système de deux équations dans $\mathbb{R}^3$	5
1.2.3	Système d'équation linéaire de $\mathbb{R}^3$ de la forme	6
1.2.4	Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ par substitution	7
1.2.5	Résolution d'un système de $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de GAUSS	8
1.3	Résolution des problèmes	8

# SYSTEMES LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$

## Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ☞ Résoudre un système linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- ☞ Interpréter graphiquement ou géométriquement le résultat obtenu.
- ☞ Résoudre un problème se ramenant à un système linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.1 Généralités

### 1.1.1 Equation d'une droite et d'un plan

- ☞ Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble solution.
- ☞ Dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , une droite a pour équation  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $c \in \mathbb{R}$ .
- ☞ Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un plan a pour équation  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $d \in \mathbb{R}$ .
- ☞ Le vecteur  $\vec{n}(a, b, c)$  est un **vecteur normal** du plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$
- ☞ Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , une droite est l'intersection de deux plans c'est à dire si  $ax + by + cz + d = 0$  et  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  sont les équations respectives de deux plans sécants, alors 
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
 est un système d'équation cartésienne de la droite d'intersection de ces deux plans.
- ☞ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , une droite passant par un point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a, b, c)$  est représentée paramétriquement par le système : 
$$\begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

### 1.1.2 Interprétation d'un système dans $\mathbb{R}^3$

- ♣ Résoudre un système de deux équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  revient à étudier la position relative de deux plans.
- ♣ Résoudre un système de trois équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  revient à déterminer les positions relatives de trois plans.

#### Propriété 1.1.1 :

- $P_1$ ) Si le système de trois équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  admet une unique solution, alors les trois plans sont sécants en un point.
- $P_2$ ) Si le système de trois équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  se réduit à un système de deux équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$ , alors les trois plans sont sécants suivant une droite définie par un système d'équations cartésiennes ou une représentation paramétrique.
- $P_3$ ) Si le système n'admet pas de solution, alors les trois plans n'ont aucun point commun. Pour étudier leur position relative, on utilise les vecteurs normaux de ses plans.

#### Remarque 1.1.1 :

Si  $\vec{n}(a, b, c)$  et  $\vec{n}'(a', b', c')$  sont les vecteurs normaux respectifs des plans

$(P_1) : ax + by + cz + d = 0$  et  $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ , alors :

- ♣ Si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ , les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires et donc les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont parallèles.
- ♣ Sinon (ie<sup>1</sup>  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  ou  $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$  ou  $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ), les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont sécants suivant une droite.

## 1.2 Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

### Activités :

1. **Problème de Newton** : Un triangle rectangle à pour périmètre 30 m et pour aire  $30 m^2$ . Quelles sont ses dimensions ?
2. Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25 F, 60 F et 80 F. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640 F.

Déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

---

1. c'est-à-dire

1.2.1 Résolution d'un système linéaire dans  $\mathbb{R}^2$

1.2.1.1 Résolution d'un système linéaire de trois équations à deux inconnues

Activité :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $(\Sigma) : \begin{cases} x - y = 0 & (L_1) \\ 2x - 3y = -2 & (L_2) \\ 7x + y = 16 & (L_3) \end{cases}$

Solution:

Résolvons le système  $(\Sigma)$ .

Pour cela, résolvons le système  $(S) : \begin{cases} x - y = 0 & (L_1) \\ 2x - 3y = -2 & (L_2) \end{cases}$   
 $-2(L_1) + (L_2) : -y = -2$  et  $-3(L_1) + (L_2) : -x = -2$ , donc  $x = 2$  et  $y = 2$ . De plus  $7(2) + (2) = 16$  et donc  $(2 ; 2)$  vérifie la troisième équation du système  $(\Sigma)$ . D'où  $S = \{(2; 2)\}$  ■

Méthode de résolution :

Pour résoudre un système de la forme  $(\star) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$  on procède comme suit :

☞ On forme un système  $(S)$  avec deux des trois équations que l'on résout.

- ♣ Si le système  $(S)$  n'admet pas de solution, alors le système  $(\star)$  n'admet pas de solution.
- ♣ Si le système  $(S)$  admet une solution, alors on contrôle si cette solution vérifie la troisième équation du système  $(\star)$ .
- ♡ Si tel est le cas, alors la solution du système  $(\star)$  est celle du système  $(S)$ .
- ♡ Sinon, le système  $(\star)$  admet pour solution l'ensemble vide  $(\phi)$ .

**Exercice d'application 1.1 :**  
 Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $(\Gamma) : \begin{cases} 30x + 15y = 11 & (E_1) \\ 2x + y = 4 & (E_2) \\ 28x + 14y = 19 & (E_3) \end{cases}$

Solution:

Résolvons le système  $(\Gamma)$ . Pour cela, résolvons le système  $(S') : \begin{cases} 30x + 15y = 11 & (E_1) \\ 2x + y = 4 & (E_2) \end{cases} \quad (E_1) - 15(E_2) : 0 = -49$  absurde, donc  $S = \phi$  ■

1.2.1.2 Système paramétrique dans  $\mathbb{R}^2$

Activité :

Résoudre suivants les valeurs du paramètre réel  $m$  le système suivant  $(S) : \begin{cases} -2x + m^2y = m \\ x - my = 1 - m \end{cases}$

**Solution:**

Résolvons suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  le système  $(S)$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} -2 & m^2 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = m(2-m), \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} m & m^2 \\ 1-m & -m \end{vmatrix} = -m^2(2-m) \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & m \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = m-2.$$

☞ Si  $m \neq 0$  et  $m \neq 2$ , alors  $\Delta_S \neq 0$ .

Donc  $x = \frac{-m^2(2-m)}{m(2-m)} = -m$  et  $y = \frac{m-2}{m(2-m)} = \frac{-1}{m}$ . D'où  $S = \{(-m; \frac{-1}{m}) \mid m \in \mathbb{R}\}$

☞ Si  $m = 0$ , alors  $\Delta_S = 0$  et  $\Delta_y \neq 0$ . Donc  $S = \emptyset$

☞ Si  $m = 2$ , alors  $\Delta_S = \Delta_x = \Delta_y = 0$ . Donc le système admet une infinité de solution

D'où  $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = -1\} = \{(2y - 1; y), y \in \mathbb{R}\}$ . ■

**Méthode de CRAMMER ou méthode des déterminants :**

Pour résoudre un système  $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  par la méthode de CRAMMER, on procède comme suit :

☞ On calcule  $\Delta_S = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$  et  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ .

☞ Si  $\Delta_S \neq 0$ , alors  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S}$ ,  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S}$  et  $S = \{(x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S})\}$ .

☞ Si  $\Delta_S = 0$  et  $\Delta_x = 0$  et  $\Delta_y = 0$ , alors le système admet une infinité de solution.

$(ax + by = c \Rightarrow x = \frac{c-by}{a})$  et  $S = \{(\frac{c-by}{a}; y), y \in \mathbb{R}\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ .

☞ Si  $(\Delta_S = 0$  et  $\Delta_x \neq 0)$  ou  $(\Delta_S = 0$  et  $\Delta_y \neq 0)$ , alors le système n'admet pas de solution :  $S = \emptyset$ .

**Exercice d'application 1.2 :**

Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  les systèmes suivants :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x + y = m \\ x - my = m^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\Gamma) : \begin{cases} mx - y = 5 \\ mx + (m-3)y = 1 \end{cases}$$

**1.2.2 Résolution d'un système de deux équations dans  $\mathbb{R}^3$**

**Activité :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système  $(S) : \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

Donner une interprétation géométrique du résultat

**Solution:**

En posant  $z = \lambda$ , le système  $(S)$  devient :  $\begin{cases} x + 2y - \lambda = 3 \\ 2x - y + \lambda = -1 \end{cases}$  ie  $\begin{cases} x + 2y = 3 + \lambda & (L_1) \\ 2x - y = -1 - \lambda & (L_2) \end{cases} \quad -2(L_1) +$

$(L_2) : -5y = -7 - 3\lambda$  ie  $y = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\lambda$  et par suite  $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda$ .  $S = \{(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda; \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\lambda; \lambda)\}$  **Interprétation**

géométrique :

Les plans  $(P_1) : x + 2y - z = 3$  et  $(P_2) : 2x - y + z = -1$  sont sécants suivant la droite  $(D)$  d'équation

$$\text{cartésienne } \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \quad \text{ou d'équation paramétrique } \begin{cases} x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Méthode :

Pour résoudre un système de deux équations dans  $\mathbb{R}^3$ , on procède comme suit :

☞ On fixe une des trois inconnues (par exemple  $z$ ) comme paramètre (en posant  $z = \lambda$ ).

☞ On est alors ramené à un système de deux équations à deux inconnues que l'on résout simplement.

**Exercice d'application 1.3 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes

$$(\Sigma) : \begin{cases} 3x - y - 5z = -2 \\ x - 3y + 4z = 4 \end{cases} \quad (\Gamma) : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

Donner une interprétation géométrique de chaque résultat.

### 1.2.3 Système d'équation linéaire de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c & (L_1) \\ a'y + b'z = c' & (L_2) \\ a''x + b''z = c'' & (L_3) \end{cases} \quad (\star)$$

Activité :

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R}^3 \text{ le système } (\Sigma) : \begin{cases} 2x - y = 3 & (L_1) \\ 3y + 2z = 5 & (L_2) \\ -2x - z = -5 & (L_3) \end{cases}$$

Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

**Solution:**

Résolvons le système  $(\Sigma)$

De  $(L_3)$ , on a  $z = -2x + 5$   $(L_4)$  ;  $(L_4)$  dans  $(L_2)$  donne  $-4x + 3y = -5$ .

On obtient le système  $(S) : \begin{cases} 2x - y = 3 & (L_1) \\ -4x + 3z = -5 & (L_5) \end{cases}$  et  $2(L_1) + (L_5) : y = 1$ .

Comme  $y = 1$ , alors  $2x - 1 = 3$  ie  $x = 2$  et par suite  $z = -2(2) + 5 = 1$ . Donc  $S = \{(2, 1, 1)\}$

Interprétation graphique :

Les plans  $(P_1) : 2x - y = 3$ ,  $(P_2) : 3y + 2z = 5$  et  $(P_3) : -2x - z = -5$  sont sécants au point  $A(2, 1, 1)$ . ■

Méthode :

Pour résoudre un système de la forme  $(\star)$ , on procède par substitution.

☞ On tire l'une des inconnues (par exemple  $z$ ) dans  $(L_3)$  et on remplace dans  $(L_2)$ .

☞ On obtient un système de deux équations à deux inconnues que l'on résout.

☞ On déduit ensuite celle de (★)

**Exercice d'application 1.4 :**

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R}^3 \text{ le système } (\eta) : \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$$

Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

### 1.2.4 Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ par substitution

#### Activité

Résoudre par substitution le système ci-dessous, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

$$(S) : \begin{cases} x - y + z = 2 & (L_1) \\ -x + y + z = -1 & (L_2) \\ -x + 2y - z = 1 & (L_3) \end{cases}$$

#### Solution:

De  $(L_1)$ , on a :  $x = y - z + 2$ ; en remplaçant  $x$  par sa valeur dans  $(L_2)$  et  $(L_3)$ , on a :  $\begin{cases} 2z = 1 \\ y = 3 \end{cases}$  ie

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \text{ et par suite, } x = \frac{9}{2}. \text{ Donc } S = \left\{ \left( \frac{9}{2}, 3, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

#### Interprétation géométrique :

Les plans  $(P_1) : x - y + z = 2$ ,  $(P_2) : -x + y + z = -1$  et  $(P_3) : -x + 2y - z = 1$  sont sécants au point  $A\left(\frac{9}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$ . ■

#### Méthode :

Pour résoudre par **substitution** un système de la forme  $\begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (L_2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (L_3) \end{cases} (*)$ , on

procède comme suit :

☞ On tire l'une des inconnues (par exemple  $x$ ) dans l'une des trois équations et on remplace dans les deux autres ;

☞ On obtient un système de deux équations à deux inconnues que l'on résout.

☞ On déduit ensuite celle de (\*)

#### Exercice d'application 1.5 :

Résoudre par substitution les systèmes ci-dessous, puis donner une interprétation géométrique de chaque résultat.

$$(\Sigma) : \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad (\Gamma) : \begin{cases} -3x + 2y - z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

### 1.2.5 Résolution d'un système de $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de GAUSS

#### Exercice d'application 1.6 :

Résoudre par la méthode du pivot de GAUSS les systèmes ci-dessous, puis donner une interprétation géométrique de chaque résultat.

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - z = 1 & (L_1) \\ -x + y + 2z = -2 & (L_2) \\ x + 2y + z = -1 & (L_3) \end{cases} \quad (\Sigma) : \begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \quad (\Gamma) : \begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + z = 7 \\ -3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

#### Solution:

Fixons  $(L_1)$  comme pivot et éliminons  $z$  dans  $(L_2)$  et  $(L_3)$ .

$2(L_1) + (L_2)$  donne  $3x + 3y = 0$  et  $(L_1) + (L_3)$  donne  $3x + 3y = 0$ .

Donc  $(S)$  est équivalent au système  $(S') : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

Résolvons le système  $(S')$ .

En posant  $z = \lambda$ ,  $(S')$  devient :  $\begin{cases} 2x + y = 1 + \lambda & (E_1) \\ x + y = 0 & (E_2) \end{cases}$

$(E_1) - (E_2)$  donne  $x = 1 + \lambda$  et par suite  $y = -1 - \lambda$ .

Donc  $S = \{(1 + \lambda, -1 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

#### Interprétation géométrique :

Les plans  $(P_1) : 2x + y - z = 1$ ,  $(P_2) : -x + y + 2z = -2$  et  $(P_3) : x + 2y + z = -1$  sont sécants suivants

la droite  $(D)$  d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Les systèmes  $(\Sigma)$  et  $(\Gamma)$  sont laisser comme *TAFAD*. ■

## 1.3 Résolution des problèmes

#### Exercice d'application 1.7 :

- Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que la somme de ces chiffres est égale à 6, le chiffre des unités est égale à la somme des chiffres des dizaines et des centaines. On note de plus que ce nombre lu à l'envers est égale au nombre cherché augmenté de 198.

#### 2. Problème d'Euler

Trois joueurs jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de

### 1.3. Résolution des problèmes

chacun des deux autres joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2400 F. Quels étaient les avoirs initiaux ?

#### Solution:

1. Soit  $xyz$  ce nombre où  $x$  désigne le chiffre des centaines,  $y$  le chiffre des dizaines et  $z$  le chiffre des unités. On a :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ z = x + y \\ zyx = xyz + 198 \end{cases} \quad \text{Or } xyz = 100x + 10y + z \text{ et } zyx = 100z + 10y + x, \text{ donc } (S) :$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ z - x - y = 0 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 198 \end{cases} \quad \text{ie } (S) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ z - x - y = 0 \\ 99x - 99z = -198 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (S) : \begin{cases} x + y + z = 6 & (L_1) \\ z - x - y = 0 & (L_2) \\ x - z = -2 & (L_3) \end{cases} \quad \text{donc } (S) : \begin{cases} 2z = 6 & (L_1) + (L_2) \\ z - x - y = 0 & (L_2) \\ y = -2 & (L_2) + (L_3) \end{cases}$$

$$\text{d'où } (S) : \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{et le nombre recherché est } \mathbf{123}$$

2. Désignons

- \* par  $x$  l'avoir initial du joueur  $A$ , perdant de la première partie ;
- \* par  $y$  l'avoir initial du joueur  $B$ , perdant de la deuxième partie ;
- \* par  $z$  l'avoir initial du joueur  $C$ , perdant de la troisième partie.

Le tableau suivant indique les avoirs respectifs des joueurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  à la fin de chaque partie :

	fin de la 1 <sup>re</sup> partie	fin de la 2 <sup>e</sup> partie	fin de la 3 <sup>e</sup> partie
Joueur $A$	$x - y - z$	$2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$	$2(2x - 2y - 2z) = 4x - 4y - 4z$
Joueur $B$	$2y$	$2y - (x - y - z) - 2z = -x + 3y - z$	$2(-x + 3y - z) = -2x + 6y - 2z$
Joueur $C$	$2z$	$4z$	$4z - (2x - 2y - 2z) - (-x + 3y - z) = -x - y + 7z$

$$\text{On obtient finalement le système : } \begin{cases} 4x - 4y - 4z = 2400 & (L_1) \\ -2x + 6y - 2z = 2400 & (L_2) \\ -x - y + 7z = 2400 & (L_3) \end{cases} \quad \text{ie } \begin{cases} x - y - z = 600 & (L_1) \\ -x + 3y - z = 1200 & (L_2) \\ -x - y + 7z = 2400 & (L_3) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les trois équations, on obtient :  $x + y + z = 7200$  ( $L_4$ )

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} 2x = 7800 & (L_1) + (L_4) \\ 4y = 8400 & (L_2) + (L_4) \\ 8z = 9600 & (L_3) + (L_4) \end{cases} \quad \text{ie } \begin{cases} x = 3900 \\ y = 2100 \\ z = 1200 \end{cases}$$

Les avoirs initiaux des joueurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  étaient respectivement de : **3900 F, 2100 F et 1200 F.** ■

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>NOMBRES COMPLEXES</b>	<b>2</b>
1.1	Etude algébrique . . . . .	2
1.1.1	Notion de nombre complexe . . . . .	2
1.1.1.1	Définition . . . . .	3
1.1.1.2	Notation et vocabulaire . . . . .	3
1.1.1.3	Propriétés . . . . .	3
1.1.2	Opérations dans $\mathbb{C}$ . . . . .	3
1.1.3	Conjugué et module d'un nombre complexe . . . . .	4
1.1.3.1	Conjugué d'un nombre complexe . . . . .	4
1.1.3.2	Module d'un nombre complexe . . . . .	4
1.1.4	Nombres complexes et représentation géométrique . . . . .	5
1.1.4.1	Ensemble de point . . . . .	7
1.2	Etude trigonométrique . . . . .	8
1.2.0.2	Argument d'un nombre complexe non nul . . . . .	8
1.2.0.3	Arguments d'un produit et d'un quotient . . . . .	9
1.2.1	Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul . . . . .	9
1.2.2	Formule de Moivre et formules d'Euler : duplication et linéarisation . . . . .	11
1.2.2.1	Formule de Moivre . . . . .	11
1.2.2.2	Formules d'Euler . . . . .	12
1.2.3	Racine $n$ - ièmes d'un nombre complexe . . . . .	12
1.3	Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$ . . . . .	13
1.3.1	Racines carrées d'un nombre complexe . . . . .	13
1.3.2	Equations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . . .	14
1.3.3	Equations se ramenant au second degré . . . . .	14

# NOMBRES COMPLEXES

## Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ☞ Savoir écrire un nombre complexe sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.
- ☞ Savoir résoudre les équations dans l'ensemble des nombres complexes.
- ☞ Savoir linéariser les expressions trigonométriques.
- ☞ Savoir faire le lien entre les aspects algébriques et trigonométriques des nombres complexes.

## 1.1 Etude algébrique

### 1.1.1 Notion de nombre complexe

**Activité :** Soit l'équation  $(E) : x^2 + 4x + 20 = 0$ .

1. Vérifier que :  $x^2 + 4x + 20 = (x + 2)^2 + 16$ .
2. L'équation  $(E)$  admet elle une solution dans  $\mathbb{R}$ ? Justifier votre réponse.
3. En supposant qu'il existe un nombre imaginaire  $i$  tel que  $i^2 = -1$  et en conservant les règles de calcul utiliser dans  $\mathbb{R}$ , démontrer que  $(E)$  admet 2 solutions que l'on exprimera en fonction de  $i$ .

**Solution:**

1. Vérifions que :  $x^2 + 4x + 20 = (x + 2)^2 + 16$ .  
 $(x + 2)^2 + 16 = x^2 + 4x + 4 + 16 = x^2 + 4x + 20$
2. Vérifions si  $(E)$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$ .  
 $x^2 + 4x + 20 = 0$  ssi<sup>1</sup>  $(x + 2)^2 + 16 = 0$  ie  $(x + 2)^2 = -16$  absurde.  
 Donc l'équation  $(E)$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$  car  $(x + 2)^2 \geq 0$ .
3. Démontrons que  $(E)$  admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de  $i$ .  
 $(x + 2)^2 = -16 = 16(-1)$  ssi  $(x + 2)^2 = (4i)^2$  ie  $x + 2 = 4i$  ou  $x + 2 = -4i$ .  
 Donc  $x = -2 + 4i$  ou  $x = -2 - 4i$  ■

1. si et seulement si

1.1.1.1 Définition

On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme  $a + ib$  tel que  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $i^2 = -1$ .

1.1.1.2 Notation et vocabulaire

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + ib$ .

☞ L'ensemble des nombre complexe est noté  $\mathbb{C}$ .

☞ L'écriture  $a + ib$  est appelé **forme algébrique** de  $z$ .

☞ Le nombre réel  $a$  est appelé **partie réelle** de  $z$  et est noté  $Re(z)$ .

☞ Le nombre réel  $b$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$  et est noté  $Im(z)$ .

☞ Si  $b = 0$ , alors  $z = a \in \mathbb{R}$ . Donc **tout nombre réel est un nombre complexe** ( $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ).

☞ Si  $a = 0$ , alors  $z = ib$  et le nombre complexe  $z$  est dit **imaginaire pur** ( $z \in i\mathbb{R}$ ).

1.1.1.3 Propriétés

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ .

☞  $z = z'$  ssi  $a = a'$  et  $b = b'$ .

☞  $z = 0$  ssi  $a = 0$  et  $b = 0$ .

1.1.2 Opérations dans  $\mathbb{C}$

☞ **Convention dans  $\mathbb{C}$**  : les règles de calcul dans  $\mathbb{C}$  sont les mêmes que ceux de  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 1.1.1 :**

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que  $z = a + ib$ ,  $z' = a' + ib'$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$P_1) \quad z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$P_2) \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$P_3) \quad \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \text{ avec } z \neq 0$$

$$P_4) \quad \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \text{ avec } z' \neq 0$$

$$P_5) \quad zz' = 0 \text{ ssi } z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

$$P_6) \quad (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$$

$$P_7) \quad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$$

$$P_8) \quad (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$$

$$P_9) \quad z^0 = 1 \text{ et } (z + z')^n = \sum_{k=0}^n c_n^k z^k z'^{n-k}$$

$$P_{10}) \quad z^{n+1} = z^n \times z \text{ et } z^{-n} = \frac{1}{z^n} \quad (z \neq 0)$$

**Exemple 1.1.1 :**

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 + i)(3 - 4i) - 2(1 + i); \quad z_2 = (1 - i\sqrt{2})^3 - 4i; \quad z_3 = (4 - i)(4 + i) - (1 + i)^2 \text{ et } z_4 = (2 + i)^4$$

**Solution:**

Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= (1+i)(3-4i) - 2(1+i) \\
 &= 3 - 4i + 3i - 4i^2 - 2 - 2i \\
 z_1 &= 5 - 3i \\
 z_2 &= (1 - i\sqrt{3})^2 - 4i \\
 &= 1^2 - 2\sqrt{3}i + (i\sqrt{3})^2 - 4i \\
 z_2 &= -2 - i(4 + 2\sqrt{3}) \\
 z_3 &= (4-i)(4+i) - (1+i)^2 \\
 &= 4^2 - i^2 - (1^2 + 2i + i^2) \\
 &= 16 + 1 - 2i \\
 z_3 &= 17 - 2i \\
 z_4 &= (2+i)^4 \\
 &= C_4^0 2^4 i^0 + C_4^1 2^3 i^1 + C_4^2 2^2 i^2 + C_4^3 2^1 i^3 + C_4^4 2^0 i^4 \\
 &= 16 + 4(8)(i) + 6(4)(-1) + 4(2)(-i) + 1 \\
 z_4 &= -7 + 24i
 \end{aligned}$$

■

### 1.1.3 Conjugué et module d'un nombre complexe

#### 1.1.3.1 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 1.1.1 :**

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + ib$ .

On appelle **conjugué** de  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  et défini par :  $\bar{z} = a - ib$ .

**Exemple 1.1.2 :**

$$\overline{1+i} = 1-i \quad ; \quad \overline{1-i\sqrt{3}} = 1+i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \bar{i} = -i$$

**Propriété 1.1.2 :**

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que  $z = a + ib$ ,  $z' = a' + ib'$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{array}{lll}
 P_1) \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' & P_2) \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' & P_3) \quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ avec } z \neq 0 \\
 P_4) \quad \overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \text{ avec } z' \neq 0 & P_5) \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n & P_6) \quad z\bar{z} = a^2 + b^2
 \end{array}$$

#### 1.1.3.2 Module d'un nombre complexe

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.

On appelle **module** de  $z$  le nombre réel positif noté  $|z|$  et définit par :  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Exemple 1.1.3 :**

Calculer le module des nombres complexes suivants :  $z_1 = 4 + 3i$  ;  $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_3 = 1 + i$

**Solution:**

Calculons le module des nombres complexes :

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \qquad |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \qquad |z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

**Propriété 1.1.3 :**

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$p_1) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad p_2) |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \qquad p_3) |zz'| = |z||z'| \qquad p_4) \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ avec } z \neq 0$$

$$p_5) \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ avec } z' \neq 0 \qquad p_6) |z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad p_7) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \qquad p_8) |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

**Exercice d'application 1.1 :**

1. Donner le module et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (4 + 3i)(1 - i) ; z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } z_3 = (2\sqrt{3} - 2i)^{77}.$$

2. On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes la suite de terme général  $z_n$  définie par :

$$\begin{cases} z_0 &= 1 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}i \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|z_n| < 1$ .

(b) On pose  $z_n = x_n + iy_n$  et  $U_n = z_n - i$  avec  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $U_0 = 1+i$ .

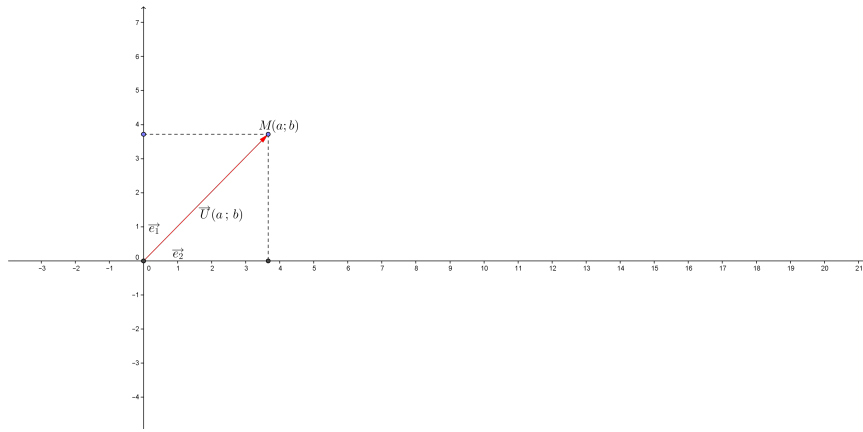
**1.1.4 Nombres complexes et représentation géométrique**

Le plan  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

Soient  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z = a + bi$ ,  $M(a; b)$  un point du plan, et  $\vec{U}(a; b)$  un vecteur du plan.

**Définition 1.1.2 :**

- ♣ Le point  $M(a; b)$  est appelé *point image* du nombre complexe  $z = a + bi$  et est noté  $M(z)$ .
- ♣ Le vecteur  $\vec{U}(a; b)$  est appelé *vecteur image* du nombre complexe  $z = a + bi$  et est noté  $\vec{U}(z)$ .
- ♣ Le nombre complexe  $z = a + bi$  est appelé *affixe* du point  $M(a; b)$  ou du vecteur  $\vec{U}(a; b)$ .
- ♣ L'axe  $(0; \vec{e}_1)$  est appelé *axe réel*.
- ♣ L'axe  $(0; \vec{e}_2)$  est appelé *axe imaginaire*.
- ♣ Le plan  $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est appelé *plan complexe*.



**Exercice d'application 1.2 :**

Placer les points  $A(1-i)$ ,  $B(3-4i)$ ,  $C(\frac{1}{2}-i)$ ,  $D(5+i)$ ,  $E(-2-5i)$  et  $F(-1+4i)$  dans le plan complexe.

**Propriété 1.1.4 :**

Soient  $(A_k; \alpha_k)$   $n$  points pondérées d'affixes respectifs  $z_k$   $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A, B$  et  $C$  trois points du plan.

$P_1)$  L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $z_B - z_A$ .

$P_2)$  Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs du plan, alors  $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$  et  $z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$ .

$P_3)$  Si  $G = \text{bar}\{(A_k; \alpha_k), k \in \{1; 2; \dots; n\}\}$ , alors  $z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$ . En particulier, l'affixe du milieu  $I$  de

$$[AB] \text{ est } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \text{ et l'affixe du centre de gravité du triangle } ABC \text{ est } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

**Exemple 1.1.4 :**

On donne  $A(1-i)$ ,  $B(3-4i)$ ,  $C(\frac{1}{2}-i)$ .

- Déterminer  $z_{\overrightarrow{AB}}$ ,  $z_{\overrightarrow{AC}}$ ,  $z_{\overrightarrow{BC}}$ ,  $z_{3\overrightarrow{AB}}$  et  $z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ .
- Déterminer l'affixe du milieu  $I$  du segment  $[AB]$ , l'affixe du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$  et l'affixe du point  $H = \text{bar}\{(A; -3), (B; 2), (C; 4)\}$ .
- Déterminer l'affixe du point  $D(x; y)$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

**Solution:**

- Déterminons  $z_{\overrightarrow{AB}}$ ,  $z_{\overrightarrow{AC}}$ ,  $z_{\overrightarrow{BC}}$ ,  $z_{3\overrightarrow{AB}}$  et  $z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ .

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (3-4i) - (1-i)$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = 2 - 3i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (\frac{1}{2}-i) - (1-i)$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = -\frac{1}{2}$$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = (\frac{1}{2}-i) - (3-4i)$$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{5}{2} + 3i$$

$$z_{3\overrightarrow{BC}} = 3z_{\overrightarrow{BC}} = 3(-\frac{5}{2} + 3i) = -\frac{15}{2} + 9i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}} = (2-3i) + (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - 3i.$$

- Déterminons l'affixe du milieu  $I$  du segment  $[AB]$ , l'affixe du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$  et l'affixe du point  $H = \text{bar}\{(A; -3), (B; 2), (C; 4)\}$ .

$$\begin{aligned}
 z_I &= \frac{z_A + z_B}{2} & z_G &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3} & z_H &= \frac{-3z_A + 2z_B + 4z_C}{-3 + 2 + 4} \\
 &= \frac{(1-i) + (3-4i)}{2} & &= \frac{(1-i) + (3-4i) + (\frac{1}{2}-i)}{3} & &= \frac{-3(1-i) + 2(3-4i) + 4(\frac{1}{2}-i)}{3} \\
 z_I &= 2 - \frac{5}{2}i & z_G &= \frac{3}{2} - 2i & z_H &= \frac{5}{3} - 3i
 \end{aligned}$$

3. Déterminons l'affixe du point  $D(x; y)$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

$ABCD$  est un parallélogramme si, et seulement si,  $z_{\overrightarrow{CD}} = z_{\overrightarrow{AB}}$  ie  $z_D - z_C = z_B - z_A$ .

Donc  $z_D = z_C + z_B - z_A = (\frac{1}{2} - i) + (3 - 4i) - (1 - i) = \frac{5}{2} - 4i$ . ■

1.1.4.1 Ensemble de point

Propriété 1.1.5 :

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$  tels que  $z = a + bi$  et  $z' = a' + b'i$ .

- $P_1)$   $z = z'$  si et seulement si  $a = a'$  et  $b = b'$ .
- $P_2)$   $z = 0$  si et seulement si  $a = 0$  et  $b = 0$ .
- $P_3)$   $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .
- $P_4)$   $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $z = -\bar{z}$

Exemple 1.1.5 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O; I; J)$ . Soient  $z = x + yi, Z, Z' \in \mathbb{C}$  définis pour

tout  $z \neq 2i$  par :  $Z = \frac{z+1}{z-2i}$  et  $Z' = \frac{z-i}{z-2i}$ .

- 1) On pose  $Z = X + Yi$ . Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- 2) En déduire l'ensemble (D) des points du plan tel que  $Z \in \mathbb{R}$ .
- 3) Déterminer l'ensemble (C) des points du plan tel que  $Z' \in i\mathbb{R}$ .

Solution:

1) Exprimons  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

$$\begin{aligned}
 X + iY &= \frac{(x + iy) + 1}{(x + iy) - 2i} \\
 &= \frac{(x + 1) + iy}{x + i(y - 2)} \\
 &= \frac{((x + 1) + iy)(x - i(y - 2))}{(x + i(y - 2))(x - i(y - 2))} \\
 &= \frac{x(x + 1) - i(x + 1)(y - 2) + ixy + y(y - 2)}{x^2 + (y - 2)^2} \\
 X + iY &= \frac{x^2 + x + y^2 - 2y + i(2x - y + 2)}{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{x^2 + x + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x - y + 2}{x^2 + (y - 2)^2}
 \end{aligned}$$

Donc  $X = \frac{x^2 + x + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2}$  et  $Y = \frac{2x - y + 2}{x^2 + (y - 2)^2}$

2) Déduisons l'ensemble (D) des points du plan tel que  $Z \in \mathbb{R}$ .

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0$  ie  $\frac{2x - y + 2}{x^2 + (y - 2)^2} = 0$ , donc l'ensemble (D) est la droite d'équation  $2x - y + 2 = 0$  privé du point  $A(0; 2)$ .

## 1.2. Etude trigonométrique

3) Déterminons l'ensemble (C) des points du plan tel que  $Z' \in i\mathbb{R}$ .

$$Z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\bar{Z} \text{ ie}$$

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z-2i} &= -\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+2i} \\ (z-i)(\bar{z}-2i) &= -(\bar{z}+i)(z+2i) \\ z\bar{z}-2iz-i\bar{z}-2 &= -z\bar{z}-2i\bar{z}-iz+2 \\ 2z\bar{z}-i(z-\bar{z})-4 &= 0 \\ 2(x^2+y^2)-i(2iy)-4 &= 0 \\ x^2+y^2+y-2 &= 0 \\ x^2+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2 &= 0 \\ x^2+(y+\frac{1}{2})^2 &= \frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble (C) est le cercle de centre  $\Omega(0; -\frac{1}{2})$  et de rayon  $\frac{3}{2}$  privé du point  $A(0; 2)$ . ■

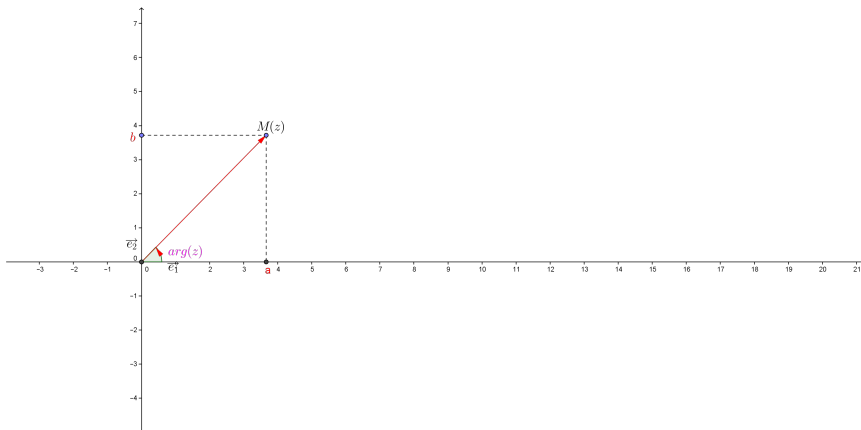
## 1.2 Etude trigonométrique

### 1.2.0.2 Argument d'un nombre complexe non nul

#### Définition 1.2.1 :

Soient  $z$  un nombre complexe non nul et  $M$  son point image dans le plan complexe.

On appelle *argument de  $z$*  et on note  $\arg(z)$  toute mesure (en radian) de l'angle orienté  $(\vec{e}_1; \overrightarrow{OM})$



#### Remarque 1.2.1 :

- 1) 0 n'a pas d'argument et  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 2)  $z$  est un réel strictement positif ssi  $\arg(z) = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 3)  $z$  est un réel strictement négatif ssi  $\arg(z) = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 4)  $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

1.2.0.3 Arguments d'un produit et d'un quotient

**Propriété 1.2.1 :**

Pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  et pour tout entier relatif  $n$ , on a :

$$P_1) \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_2) \arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_3) \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_4) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Propriété 1.2.2 :**

Pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  et pour tout entier relatif  $n$ , on a :

$$P_1) zz' \text{ est le nombre complexe de module } |z| \times |z'| \text{ et dont un argument est } \arg(z) + \arg(z').$$

$$P_2) z^n \text{ est le nombre complexe de module } |z|^n \text{ et dont un argument est } n\arg(z).$$

$$P_3) \frac{1}{z} \text{ est le nombre complexe de module } \frac{1}{|z|} \text{ et dont un argument est } -\arg(z).$$

$$P_4) \frac{z}{z'} \text{ est le nombre complexe de module } \frac{|z|}{|z'|} \text{ et dont un argument est } \arg(z) - \arg(z').$$

$$P_5) z = z' \text{ si et seulement si } |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.2.1 Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit  $z$  un nombre complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\alpha$ .

♣ On appelle **forme trigonométrique de  $z$**  l'écriture  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

♣ On appelle **forme polaire de  $z$**  l'écriture  $z = [r; \alpha]$ .

♣ On appelle **forme exponentielle de  $z$**  l'écriture  $z = re^{i\alpha}$

**Remarque 1.2.2 :**

La forme polaire d'un nombre complexe est très souvent confondu avec sa forme trigonométrique.

**Exemple 1.2.1 :**

Soit  $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = 1 + i$

1. Déterminer le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$ .
2. En déduire la forme trigonométrique et exponentielle de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1^{15} z_2^4$  et  $\frac{z_1^7}{z_2^6}$ .
3. Ecrire  $z_1 z_2$  sous forme algébrique, puis en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

**Solution:**

1. Déterminons le module de  $z_1$  et  $z_2$  :

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \qquad |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Déterminons un argument de  $z_1$  et  $z_2$  :

Soit  $\theta$  un argument de  $z_1$  et  $\alpha$  celui de  $z_2$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

2. Déduisons la forme trigonométrique et exponentielle de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1^{15} z_2^4$  et  $\frac{z_1^7}{z_2^6}$ .

Déterminons le module de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1^{15} z_2^4$  et  $\frac{z_1^7}{z_2^6}$ .

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| \times |z_2| & \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & |z_1^{15} z_2^4| &= |z_1|^{15} \times |z_2|^4 & \left| \frac{z_1^7}{z_2^6} \right| &= \frac{|z_1|^7}{|z_2|^6} \\ &= 1 \times \sqrt{2} & &= \frac{1}{\sqrt{2}} & &= (1)^{15} \times (\sqrt{2})^4 & &= \frac{1^7}{(\sqrt{2})^6} \\ |z_1 z_2| &= \sqrt{2} & \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{\sqrt{2}}{2} & |z_1^{15} z_2^4| &= 4 & \left| \frac{z_1^7}{z_2^6} \right| &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Déterminons un argument de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1^{15} z_2^4$  et  $\frac{z_1^7}{z_2^6}$ .

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) & \arg(z_1^{15} z_2^4) &= 15\arg(z_1) + 4\arg(z_2) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} & &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} & &= 15\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \arg(z_1 z_2) &= \frac{7\pi}{12} & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{\pi}{12} & \arg(z_1^{15} z_2^4) &= 6\pi \\ \arg\left(\frac{z_1^7}{z_2^6}\right) &= 7\arg(z_1) - 6\arg(z_2) = 7\left(\frac{\pi}{3}\right) - 6\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } z_1 z_2 = \left[\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12}\right], \quad \frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{12}\right], \quad z_1^{15} z_2^4 = [4; 6\pi] \quad \text{et} \quad \frac{z_1^7}{z_2^6} = \left[\frac{1}{8}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{\pi}{12}}, \quad z_1^{15} z_2^4 = 4 e^{i 6\pi} \quad \text{et} \quad \frac{z_1^7}{z_2^6} = \frac{1}{8} e^{i \frac{5\pi}{6}}.$$

3. Ecrivons  $z_1 z_2$  sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 z_2 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Déduisons les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

$$\text{On a : } z_1 z_2 = \left[\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12}\right] \text{ et } z_1 z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \text{ donc } \left[\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12}\right] = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{D'où } \sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \text{ et } \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ie } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ et}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \quad \blacksquare$$

**Exercice d'application 1.3 :**

Soit  $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$  et  $z_2 = 1 + i$ .

1. Déterminer le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$ .
2. En déduire la forme trigonométrique et exponentielle de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_1 z_2^{10}$ ,  $z_1^{21} z_2$ ,  $\frac{z_1^9}{z_2}$  et  $\frac{z_1^{105}}{z_2^{2016}}$ .
3. Ecrire  $z_1 z_2$  sous forme algébrique, puis en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### 1.2.2 Formule de Moivre et formules d'Euler : duplication et linéarisation

#### 1.2.2.1 Formule de Moivre

Pour tout nombre réel  $\alpha$  et pour tout entier relatif  $n$ , on a :  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n \alpha + i \sin n \alpha$

**Remarque 1.2.3 :**

1. La formule de Moivre permet à déterminer les formules de duplications (expression de  $\cos(n\alpha)$  et  $\sin(n\alpha)$  en fonction de  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  à l'aide du binôme de NEWTON) .
2. Elle sert également à calculer la puissance  $n - ièmes$  d'un nombre complexe non nul.

**Exemple 1.2.2 :**

1. Exprimer  $\cos(3\alpha)$  et  $\sin(3\alpha)$  en fonction de  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$ .
2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe  $(1 + i)^{2020}$ .

**Solution:**

1. Exprimons  $\cos(3\alpha)$  et  $\sin(3\alpha)$  en fonction de  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3(\cos(\alpha))^2(i \sin(\alpha)) + 3(\cos(\alpha))(i \sin(\alpha))^2 + (i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3i(\cos(\alpha))^2(\sin(\alpha)) - 3\cos(\alpha)(\sin(\alpha))^2 - i(\sin(\alpha))^3 \\ \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha))^3 - 3\cos(\alpha)(\sin(\alpha))^2 + i(3(\cos(\alpha))^2(\sin(\alpha)) - (\sin(\alpha))^3) \end{aligned}$$

Donc  $\cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3\cos(\alpha)(\sin(\alpha))^2$  et  $\sin(3\alpha) = 3(\cos(\alpha))^2(\sin(\alpha)) - (\sin(\alpha))^3$

2. Ecrivons sous forme algébrique le nombre complexe  $(1 + i)^{2020}$ .

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ (1 + i)^{2020} &= (\sqrt{2})^{2020}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2020} \\ &= 2^{1010}\left(\cos\left(2020 \times \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(2020 \times \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{1010}\left(\cos(505\pi) + i \sin(505\pi)\right) \\ &= 2^{1010}(-1) \\ (1 + i)^{2020} &= -2^{1010} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exercice d'application 1.4 :**

1. Exprimer  $\cos(4\alpha)$  et  $\sin(4\alpha)$  en fonction de  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$ .
2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^{2019}$ .

### 1.2.2.2 Formules d'Euler

**Propriété 1.2.3 :**

Pour tout nombre réel  $\alpha$ , on a :  $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$  et  $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

**Remarque 1.2.4 :**

1. Les formules d'Euler permettent de linéariser  $\cos^n \alpha$  et  $\sin^n \alpha$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 1.2.3 :**

Linéariser  $\cos^4 x$  et  $\sin^5 x$

**Solution:**

Linéarisons  $\cos^4 x$  et  $\sin^5 x$ .

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{2^4} [(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6] \\ &= \frac{1}{2^4} (2\cos(4x) + 4(2\cos(2x)) + 6) \\ \cos^4 x &= \frac{1}{2^3} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3) = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\ \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)^5 (e^{ix} - e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{2^5 i} [(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})] \\ &= \frac{1}{2^5 i} (2i\sin(5x) - 5(2i\sin(3x)) + 10(2i\sin x)) \\ \sin^5 x &= \frac{1}{2^4} (\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x) = \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exercice d'application 1.5 :**

Linéariser  $\cos^5 x$  et  $\sin^4 x$ .

### 1.2.3 Racine $n$ -ièmes d'un nombre complexe

**Définition 1.2.2 :**

Soit  $Z$  un nombre complexe non nul et  $n$  un entier naturel ( $n \geq 2$ ).

On appelle racine  $n$ -ièmes de  $Z$  tout nombre complexe  $z$  tel que :  $Z = z^n$

**Propriété 1.2.4 :**

Soit  $re^{i\alpha}$  un nombre complexe non nul et  $n$  un entier naturel ( $n \geq 2$ ).

### 1.3. Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$

$P_1$ )  $re^{i\alpha}$  admet  $n$  racines  $n$ -ièmes telles que :  $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$  ( $k \in \{0; 1 \dots; n-1\}$ ).

$P_2$ ) Les images de ces  $n$  racines sont les sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt[n]{r}$ .

#### Remarque 1.2.5 :

La somme des  $n$  racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

#### Exemple 1.2.4 :

Déterminer les racines cubiques de  $1 + i\sqrt{3}$ .

#### Solution:

Cherchons  $z = [r; \theta]$  tel que :  $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$  ie  $[r^3; 3\theta] = [2; \frac{\pi}{3}]$ .

$$\text{On a : } z^3 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

Donc  $1 + i\sqrt{3}$  admet trois racines cubiques qui sont :  $z_0 = [\sqrt[3]{2}; \frac{\pi}{9}] = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{9}}$ ,  $z_1 = [\sqrt[3]{2}; \frac{7\pi}{9}] = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{7\pi}{9}}$   
et  $z_2 = [\sqrt[3]{2}; \frac{13\pi}{9}] = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{13\pi}{9}}$ . ■

#### Exercice d'application 1.6 :

1. Déterminer les racines carrées de  $\sqrt{3} + i$ .
2. Déterminer les racines quatrième de 1.
3. Déterminer les racines sixième de  $1 + i$

### 1.3 Résolution d'équation dans $\mathbb{C}$

#### 1.3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Il s'agira ici de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.

Nous savons qu'une racine carrée d'un nombre complexe  $z_0 = \alpha + i\beta$  est un nombre complexe  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = z_0$ .

$$\text{On a : } z^2 = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & (\text{égalité des modules}) & (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha & (\text{égalité des parties réelles}) & (2) \\ 2xy = \beta & (\text{égalité des parties imaginaires}) & (3) \end{cases}$$

#### Remarque 1.3.1 :

☞ La résolution du système formé par les équations (1) et (2) fourniront les valeurs de  $x$ ,  $y$  et l'équation (3) donne le signe de  $x$  et  $y$ .

☞ Les racines carrées d'un nombre complexe non nul sont deux nombres complexes opposés.

1.3.2 Equations du second degré dans  $\mathbb{C}$

Soit l'équation  $(E) : az^2 + bz + c = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres complexes ( $a \neq 0$ ).

Pour résoudre l'équation  $(E)$ , on procède comme suit :

☞ On calcul le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  ;

♣ si  $\Delta = 0$ , alors l'équation  $(E)$  admet une unique solution  $x_0 = \frac{-b}{2a}$

♣ si  $\Delta \neq 0$ , alors on détermine les racines carrées  $\delta$  et  $-\delta$  de  $\Delta$  et l'équation  $(E)$  admet deux solutions distinctes  $x_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$ .

**Exemple 1.3.1 :**

- Déterminer les racines carrées de  $-5 + 12i$  sous forme algébrique.
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $iz^2 - iz - 3 - i = 0$ ,

**Solution:**

- Déterminons les racines carrées de  $-5 + 12i$  sous forme algébrique.

Cherchons  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = -5 + 12i$ .

$$\text{On a : } z^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = 12 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \\ xy = 6 \end{cases} .$$

Comme  $x$  et  $y$  sont de même signe, alors  $z = 2 + 3i$  ou  $z = -2 - 3i$ .

- Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $iz^2 - iz - 3 - i = 0$ .

$$\Delta = (-i)^2 - 4(-i)(-3-i) = -5 + 12i = (2+3i)^2, \text{ donc } z_1 = \frac{i - (2+3i)}{2(i)} = -1 + i \text{ et } z_2 = \frac{i + (2+3i)}{2(i)} = 2 - i \blacksquare$$

**Exercice d'application 1.7 :**

- Déterminer les racines carrées de  $1 + i$  sous forme algébrique.
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations  $2z^2 + 3z - 2 = 0$ ,  $z^2 + z + 3 = 0$  et  $z^2 + 2(1 + i)z + 2 = 0$ .

1.3.3 Equations se ramenant au second degré

Pour résoudre certaines équations de degré strictement supérieur à 2, il faut au moins une hypothèse supplémentaire.

**Exemple 1.3.2 :**

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$  (on montrera que cette équation admet une racine réelle). On donne  $-45 - 28i = (2 - 7i)^2$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$  (on montrera que cette équation admet une racine imaginaire pure).

**Solution:**

- Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$ .

Montrons que l'équation  $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$  admet une racine réelle.

$z = a$  est racine de l'équation  $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$  si, et seulement si,  
 $a^3 - (6 + 3i)a^2 + (21 + 19i)a - 26(1 + i) = 0$  ie  $a^3 - 6a^2 + 21a - 26 + i(-3a^2 + 19a - 26) = 0$  donc  

$$\begin{cases} -3a^2 + 19a - 26 = 0 \\ a^3 - 6a^2 + 21a - 26 = 0 \end{cases}$$
. La première équation du système fourni  $a = \frac{13}{3}$  ou  $a = 2$  mais seul  
 $a = 2$  est solution de la seconde équation du système. Donc  $a = 2$  et par suite  $z = 2$ .

☞ Déterminons toutes les solutions de l'équation  $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$ .

Après division euclidienne, on obtient :

$$z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = (z - 2)(z^2 - (4 + 3i)z + 13(1 + i)).$$

Ainsi,  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 - (4 + 3i)z + 13(1 + i)) = 0$  ie  $z = 2$  ou  
 $z^2 - (4 + 3i)z + 13(1 + i) = 0$ .

☞ Résolvons l'équation  $z^2 - (4 + 3i)z + 13(1 + i) = 0$ .

$$\Delta = [-(4 + 3i)]^2 - 4(1)[13(1 + i)] = -45 - 28i = (2 - 7i)^2, \text{ donc } z_1 = \frac{4 + 3i - 2 + 7i}{2} = 1 + 5i \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{4 + 3i + 2 - 7i}{2} = 3 - 2i. \text{ D'où } S_{\mathbb{C}} = \{2; 3 - 2i; 1 + 5i\}.$$

2) Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$ .

☞ Montrons que l'équation  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$  admet une racine imaginaire pure.

Posons  $z = ib$

$z$  est racine de l'équation  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$  si, et seulement si,

$$(ib)^3 - (1 - i)(ib)^2 + (1 - i)(ib) + i = 0 \text{ ie } b^2 + b + i(-b^3 - b^2 + b + 1) = 0 \text{ donc } \begin{cases} b^2 + b = 0 \\ -b^3 - b^2 + b + 1 = 0 \end{cases}$$

La première équation du système fourni  $b = 0$  ou  $b = -1$  mais seul  $b = -1$  est solution de la seconde équation du système. Donc  $b = -1$  et par suite  $z = -i$  est la solution imaginaire cherchée.

☞ Déterminons toutes les solutions de l'équation  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$ .

Pour cela, déterminons les nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que :

$$z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = (z + i)(az^2 + bz + c) \text{ ie } z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = az^3 + (b + ia)z^2 + (c + ib)z + ic.$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a = 1 \\ b + ia = -(1 - i) \\ c + ib = 1 - i \\ c = 1 \end{cases} \text{ donc } a = 1, b = -1 \text{ et } c = 1.$$

Ainsi,  $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0 \Leftrightarrow (z + i)(z^2 - z + 1) = 0$  ie  $z = -i$  ou  $z^2 - z + 1 = 0$ .

☞ Résolvons l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$ .

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 = (i\sqrt{3})^2, \text{ donc } z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}. \text{ D'où } S_{\mathbb{C}} = \{-i; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\}. \blacksquare$$

### Exercice d'application 1.8 :

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i) = 0$  (on montrera que cette équation admet une racine réelle).
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$  (on montrera que cette équation admet une racine imaginaire pure).

# CHAPITRE 3

## LIMITES ET CONTINUITÉ

### Plan du Chapitre :

<b>I- Limites</b> .....	3
<b>Motivations</b> .....	3
<b>1- Limites et inégalités : comparaison de limites.</b> .....	3
• Objectifs pédagogiques. ....	3
• Pré-requis. ....	3
a- Activité. ....	3
b- Définitions et propriétés. ....	4
c- Exercice d'application. ....	6
T.A.F .....	6
<b>2- Forme indéterminée.</b> .....	6
• Objectif pédagogique. ....	6
• Pré-requis. ....	6
a- Activité 1 : application au nombre dérivée. ....	7
b- Activité 2 : Utilisation de la factorisation. ....	7
c- Activité 3 : Utilisation de l'expression conjuguée. ....	7
d- Activité 4 : Utilisation du changement de variable. ....	7
e- Méthode : lever une forme indéterminée. ....	8
T.A.F .....	8
<b>II- Continuité</b> .....	9
<b>Motivations</b> .....	10
• Objectifs pédagogiques. ....	10
<b>1- Continuité-Prolongement par continuité.</b> .....	10
• Pré-requis. ....	10
a- Activité. ....	10
b- Définitions et propriétés. ....	11
c- Exercice d'application. ....	13
T.A.F .....	13
<b>2- Calcul approché des zéros d'une fonction continue.</b> .....	14
• Pré-requis. ....	14
a- Activité. ....	14
b- Propriétés. ....	15
c- Exercice d'application. ....	15
T.A.F .....	15

# Première partie

## LIMITES

## • Motivations :

Déterminer des limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque  $x$  tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . On peut ainsi mettre en évidence la présence éventuelle d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

## 1.1 Limites et inégalités : comparaison de limites.

### • Objectifs pédagogiques :

- 1 Calculer les limites des fonctions à base des limites de référence, des propriétés de comparaison et des propriétés de composition.
- 2 Utiliser la monotonie d'une fonction dans un intervalle pour déterminer sa limite.

### • Pré-requis :

Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 6}{2x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{5x + 1}); \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$$
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - x + 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^5 - 4x^3 - 1}{x^2 - x + 6}.$$

### a- Activité

Soient  $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + x}$ ;  $g : x \mapsto \frac{x + \sin x}{2x + 1}$ ;  $h : x \mapsto \frac{4 \sin x + 3x}{x - 1}$

1- a) Démontrer que pour tout  $x \geq 0$  :  $f(x) \geq x$ .

Ind :  $x + 1 \geq x \Rightarrow x(x + 1) \geq x^2 \Rightarrow 2x^2 + x \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + x} \geq x$ . (car  $\frac{1}{2x+1}$  positif)

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$  puis faire une conjecture de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2- a) Démontrer que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{x - 1}{2x + 1} \leq g(x) \leq \frac{x + 1}{2x + 1}.$$

Ind :  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2x+1} \leq \frac{\sin x}{2x+1} \leq \frac{x+1}{2x+1}$ .

b) Calculer les limites en  $+\infty$  des fonctions qui encadrent  $g(x)$  puis faire une conjecture de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

3- a) Vérifier que pour tout  $x > 1$ ,

$$h(x) = \frac{4 \sin x + 3}{x - 1} + 3.$$

Ind : Développer  $h(x)$  défini en 3 - a).

b) Montrer que  $|h(x) - 3| \leq \frac{7}{x-1}$ .

Ind :  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x-1} \leq \frac{4 \sin x + 3}{x-1} \leq \frac{7}{x-1} \Rightarrow \frac{-1}{x-1} \leq h(x) - 3 \leq \frac{7}{x-1} \Rightarrow |h(x) - 3| \leq \frac{7}{x-1}$ .

c) En utilisant 2-a), déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 3)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

Ind :  $|h(x) - 3| \leq \frac{7}{x-1} \Rightarrow \frac{-7}{x-1} \leq h(x) - 3 \leq \frac{7}{x-1} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 3) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ .

## b- Définitions et propriétés

### Définition 1. (Limite, limite à gauche-limite à droite : Rappels)

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle et  $a$  un nombre réel.

- Si pour des valeurs de  $x$  proches de  $a$ ,  $f(x)$  prend des valeurs proches d'un nombre réel  $l$ , on dit que  $l$  est la limite de  $f$  en  $a$ . On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .
- Si pour des valeurs de  $x$  proches de  $a$  et inférieures à  $a$ ,  $f(x)$  prend des valeurs proches d'un nombre réel  $l$ , on dit que  $l$  est la limite de  $f$  à gauche de  $a$ . On note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ .
- Si pour des valeurs de  $x$  proches de  $a$  et supérieures à  $a$ ,  $f(x)$  prend des valeurs proches d'un nombre réel  $l$ , on dit que  $l$  est la limite de  $f$  à droite de  $a$ . On note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .

### Propriété 1.

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l\right)$$

### Propriété 2. (Limite d'une fonction composée : Rappel)

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions telles que  $f = g \circ h$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \text{ et } \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g \circ h(x) = c.$$

(les lettres  $a, b$  et  $c$  désignent soit un réel, soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ )

### Cas particulier,

$$\text{Si } (f(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ (} b \geq 0 \text{ ou } b = +\infty)) \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b} \text{ (} = +\infty \text{ si } b = +\infty)$$

### Exemple 1.

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3}$$

On a

$$\frac{\sin(2x+3)}{2x+3} = g \circ f \text{ avec } f(x) = 2x+3 \text{ et } g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (2x+3) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3} = 1$$

### Théorème 1. (de comparaison)

$f$  et  $g$  sont deux fonctions admettant de limites en  $a$  où  $a$  est un élément de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

$$\text{Si } f \leq g \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

### Conséquence 1.

- $\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty;$
- $\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty;$
- $\text{Si } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ et si de plus } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$
- $\text{Si } |f(x) - l| \leq g(x) \text{ et si de plus } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$

## Définition 2. (Asymptotes)

Soient  $f$  une fonction de courbe  $C_f$ ;  $a$  et  $b$  des nombres réels.

- Dire que la droite  $x = a$  est **asymptote verticale** à  $C_f$  signifie que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .  
Attention : La limite à droite n'est pas forcément la même à gauche, et il y'a asymptote si au moins l'une des deux est infinie.
- Dire que la droite  $y = b$  est **asymptote horizontale** à  $C_f$  en  $+\infty$  signifie que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .
- Dire que la droite  $y = ax+b$  est **asymptote oblique** à  $C_f$  en  $+\infty$  signifie que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ .  
Remarque : Pour les asymptotes obliques et horizontales, on a les définitions identiques en  $-\infty$ .

## c- Exercice d'application :

- 1- Soit  $f(x) = -x + \sin x$ . Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2- Soit  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ . Etudier la limite de  $g$  en 0.

## Résolution :

- 1- Posons  $v(x) = -x+1$ . Comme, pour tout réel on a  $x$ ,  $\sin x \leq 1$ , on a, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \leq v(x)$ .  
Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
- 2- Posons  $u(x) = \frac{1}{x^2}$ . Comme, pour tout réel on a  $1 \leq \sqrt{1+x^2}$  on a, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) \leq u(x)$ .  
Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

## T.A.F :

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$$

## 2- Forme indéterminée

### • Motivations :

Lorsqu'un résultat de calcul de limites se présente sous la forme  $+\infty - \infty$ ;  $0 \times \infty$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $\frac{0}{0}$ , on ne peut conclure directement : une étude approfondie s'impose.

### • Objectifs pédagogiques :

- ① Lever une forme indéterminée.

### • Pre-requis :

- Nombre dérivé d'une fonction  $f$  dérivable en  $a$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

- Quelques formules de trigonométrie.
- Identités remarquables, factorisation et forme conjuguée.

## a- Activité 1 : (Application au nombre dérivée)

Soit à déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 - 3}{x^{12} + x^{10} - 2}$$

On pose  $u(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 3$  et  $v(x) = x^{12} + x^{10} - 2$

(1) Vérifier que

$$\forall x \neq 1, \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{u(x) - u(1)}{x - 1}}{\frac{v(x) - v(1)}{x - 1}}$$

(2) En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 - 3}{x^{12} + x^{10} - 2}$$

(3) En vous inspirant de (1) et (2), calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{1+x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \sin x - \sqrt{2}}$$

## b- Activité 2 : (Utilisation de la factorisation)

Soit à déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+4}$

On pose  $u(x) = \sqrt{x} - x$  et  $v(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+4}$

1- Montrer que  $u(x) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

2- Montrer que

$$v(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{4}{x}}$$

3- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$

## c- Activité 3 : (Utilisation de l'expression conjuguée)

Soit à déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$

On pose  $u(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

1- Déterminer la forme conjuguée de  $u(x)$ .

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$ .

## d- Activité 4 : (Utilisation du changement d'écriture)

Soit à calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

1- En prenant  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ , montrer que

$$\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

2- Vérifier que

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

3- En posant  $X = \frac{x}{2}$ , montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin^2 X}{X^2}$$

4- En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

### e- Méthode :

Dans un calcul de limites, on a une « forme indéterminée » lorsqu'on ne peut pas conclure directement. Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction :

- Soit en factorisant par le terme dominant (cas des fonctions polynômes et rationnelles en  $+\infty$  ou  $-\infty$ )
- Soit en utilisant la quantité conjuguée (cas des fonctions racines carrées)
- Soit en revenant à la définition du nombre dérivé (cas des fonctions sous la forme d'un taux d'accroissement)

#### T.A.F

1- Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{|-2x + 3|}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

2- Démontrer que :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1.$$

3- En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x}}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$$

4- Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x + \sin x| \leq 2$$

En déduire les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$$

# Deuxième partie

## Continuité

## • Motivations :

La notion de continuité permet notamment de résoudre des équations du type  $f(x) = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ,  $f$  fonction continue) ou donner une valeur approchée de ses solutions.

## • Objectifs pédagogiques :

- ❶ Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle ;
- ❷ Rechercher un prolongement par continuité ;
- ❸ Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- ❹ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et de bijection pour résoudre des équations.

## 1.2 Continuité-prolongement par continuité.

### • Pré-requis :

- Limite à gauche-limite à droite.
- Limite de la composée de deux fonctions.
- Lire sur un graphique si une fonction est continue en un point.
- Déterminer, par lecture graphique, l'image directe, l'image réciproque d'un nombre ou d'un intervalle.
- Lire sur un graphique si une fonction est injective, surjective ou bijective.

### a- Activité

I- Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in ]-\infty; 1[, & f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \\ \text{pour } x \in ]1; +\infty[, & f(x) = x^2 + 1 \end{cases}$$

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

II- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

2- On considère la fonction  $g$  définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}^*, & h(x) = g(x) \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction  $g$  est-elle continue en 0 ?

3- Etudier la continuité de  $f + g$ ;  $f \times g$ ;  $g \circ f$ ;  $\frac{1}{f}$  en 0.

## b- Définitions et propriétés

### Définition 3. (Fonction continue)

- Une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert contenant un réel  $a$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  ouvert est continue sur  $I$  lorsque  $f$  est continue en tout réel  $a$  appartenant à  $I$ .
- Une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $[a; b]$  est continue sur  $[a; b]$  lorsque :
  - $f$  est continue sur  $]a; b[$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

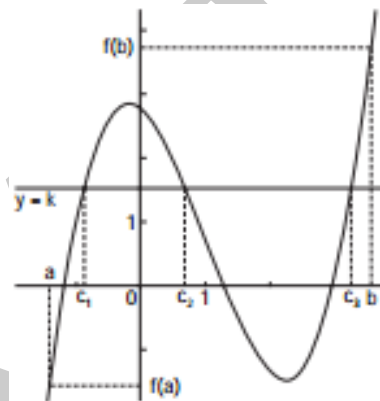
### Propriété 3. (Propriété fondamentale des fonctions continues)

Soit un intervalle  $I$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .

#### Interprétation graphique :

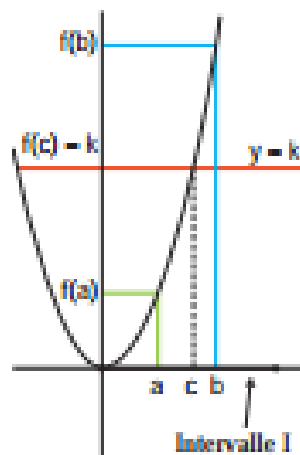
La droite d'équation  $y = k$  coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction  $f$  en un point dont l'abscisse est comprise entre  $a$  et  $b$ .



#### Interprétation en termes d'équation :

Soit un intervalle  $I$ ,  $(a, b) \in I^2$  et  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une solution unique comprise entre  $a$  et  $b$ .



#### Propriété 4.

$\alpha$  et  $\beta$  sont des éléments de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .  $f$  une fonction admettant une limite à droite de  $\alpha$  et à gauche de  $\beta$ .

- (i) Si  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[\alpha; \beta]$  alors  $f([\alpha; \beta]) = [f(\alpha); f(\beta)]$
- (ii) Si  $f$  est continue et strictement croissante sur  $] \alpha; \beta [$  alors  $f(] \alpha; \beta [) = [ \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x); \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) [$ .
- (iii) Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[\alpha; \beta]$  alors  $f([\alpha; \beta]) = [f(\beta); f(\alpha)]$ .
- (iv) Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $] \alpha; \beta [$  alors  $f(] \alpha; \beta [) = [ \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x); \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) [$

#### Propriété 5.

$a$  et  $b$  sont des nombres réels tels que  $a < b$ ,  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ ; (E) l'équation  $f(x) = 0$ .

- (i) Si  $(f(a).f(b) < 0)$  alors l'équation (E) admet au moins une solution dans  $[a; b]$ .
- (ii) Si  $(f(a).f(b) < 0)$  et  $f$  strictement monotone alors l'équation (E) admet une unique solution dans  $[a; b]$ .

#### Propriété 6. (Composée de deux fonctions continues)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ , telle que  $f(I) \subset J$  et  $g$  une fonction continue sur  $J$ . La fonction  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

#### Propriété 7.

- Toute fonction polynôme (à coefficients réels) est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Toute fonction rationnelle (à coefficients réels) est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

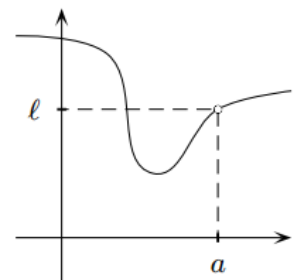
#### Définition 4. (Prolongement par continuité)

Soient  $a$  et  $l$  deux nombres réels,  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  ne contenant pas  $a$ . La fonction  $g$  définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in D_f, & g(x) = f(x) \\ g(a) = l \text{ ou } l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité de  $f$  en  $a$** .

$f$  n'est pas défini en  $a$  mais  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  existe. On voit qu'on pourrait rajouter un point en  $a$  avec la valeur  $f(a) = l$ , qui **prolongerait  $f$  en la rendant continue en  $a$** .



#### T.A.F

I. Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$$

- 1- Calculer la limite en 1 de la fonction  $f$ .
- 2- En déduire une fonction  $g$ , prolongement par continuité de  $f$  en 1.

II. Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x - 1} - 2.$$

- 1- Etudier la continuité de  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
  - 2- Justifier que :  $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq -2$ .
  - 3- Démontrer que tout élément  $\beta$  de  $[-2; +\infty[$  a un antécédent  $\alpha$  dans  $[1; +\infty[$ ; en déduire l'image par  $f$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
- III. Démontrer que la fonction

$$x \mapsto \tan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### c- Exercice d'application

- I. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-2; 3]$  par  $g(x) = 2x - 4$ .  
Démontrer qu'il existe  $\alpha \in [-2; 3]$  tel que  $f(\alpha) = -4$

### Résolution

$g$  est continue sur  $[-2; 3]$ , et  $f([-2; 3]) = [-8; 2]$ . De plus,  $-4 \in [-8; 2]$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in [-2; 3]$  tel que  $f(\alpha) = -4$ .

### Exercice résolu

Soit

$$\begin{aligned} f : [2; +\infty[ &\longrightarrow [-3; +\infty[ \\ x &\longmapsto x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

On veut montrer que  $\forall b \in [-3; +\infty[$  l'équation  $f(x) = b$  admet une unique solution dans  $[2; +\infty[$ .

- 1- Montrer que  $f(x) = b$  équivaut à  $(E) : x^2 - 4x + 1 - b = 0$
- 2- Calculer  $\Delta$  le discriminant de  $(E)$ .
- 3- Discuter suivant le signe de  $\Delta$  le nombre de solutions de  $(E)$ .
- 4- Conclure.
- 5- En déduire la fonction réciproque  $f^{-1}$ .

### Résolution

Soit  $b \in [-3; +\infty[$ , on a :

1-

$$\begin{aligned} f(x) = b &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = b \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 - b = 0 \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4(1 - b) \\ &= 4(3 + b) \end{aligned}$$

3- Si  $\Delta \leq 0$ , alors  $b < -3$ , donc il n'y a aucune solution car  $b \notin [-3; +\infty[$

Si  $\Delta = 0$ , alors (E) devient  $x^2 - 4x + 4 = 0$  et donc il existe une unique solution  $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$ .

Si  $\Delta \geq 0$ , alors on a deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4(3+b)}}{2} = 2 - \sqrt{3+b} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{4(3+b)}}{2} = 2 + \sqrt{3+b}$$

Par ailleurs,  $x_1 < 2$ , donc  $x_1 \notin [2; +\infty[$

4- Ainsi, l'équation  $f(x) = b$  admet une unique solution dans  $[2; +\infty[$  qui est  $x_2 = 2 + \sqrt{3+b}$ .

5-

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-3; +\infty[ &\longrightarrow [2; +\infty[ \\ x &\longmapsto 2 + \sqrt{3+x} \end{aligned}$$

### 1.3 Calcul approché des zéros d'une fonction continue.

#### a- Activité 1(Utilisation de la méthode de balayage)

1- Démontrer que l'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  admet une solution  $x_0 \in ]-1; 0[$

On veut déterminer un encadrement de  $x_0$  d'amplitude 0,01.

2- A l'ordre 1, calculer de proche en proche les images de  $f$  jusqu'à obtenir un changement de signe.

3- Répéter le processus à l'ordre 2.

#### Résolution

I.1- Soit  $f(x) = x^3 + x + 1$ ,  $f$  est continue sur  $[-1; 0]$ .  $f(-1) = -1$ ;  $f(0) = 1$ , donc  $f(-1) \times f(0) < 0$ .

Donc, l'équation (E) admet au moins une solution  $x_0$  dans  $[-1; 0]$

2-

$x$	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5
$f(x)$	-	-	-	+	+

3-

$x$	-0.69	-0.68	-0.67	-0.66	-0.65
$f(x)$	-	+	+	+	+

Donc,

$$-0.69 < x_0 < -0.68$$

#### b- Activité 2(Utilisation de la méthode de dichotomie)

On considère l'équation  $f$  définie par  $f(x) = \cos x - x$

1- Montrer que  $f(x) = 0$  admet une solution  $x_0 \in ]0; \frac{\pi}{3}[$ .

On veut déterminer une valeur approchée de  $x_0$  à 0,1 près par la méthode de dichotomie.

2- Calculer  $f(\frac{\pi}{6})$  l'image du milieu de l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{3}[$

3- Calculer  $f(0) \times f(\frac{\pi}{6})$  d'une part et  $f(\frac{\pi}{6}) \times f(\frac{\pi}{3})$  d'autre part et donner des deux intervalles celui qui contient  $x_0$ .

4- Continuer le procédé jusqu'à déterminer  $x_0$  à 0,1 près.

## Résolution

1- On a  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - x = 0$ .  $f$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$ ,  $f(0) = 1$ , et  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} < 0$ .  
 $f$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$  et  $f(0) \times f(\frac{\pi}{3}) < 0$ . Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $x_0$  dans  $]0; \frac{\pi}{3}[$

2- D'après ce qui précède, on a :  $0 < x_0 < \frac{\pi}{3}$ .

On a :

$$\frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}; \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\pi}{6} < x_0 < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\pi}{6} < x_0 < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{5\pi}{24}; \quad f\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) - \frac{5\pi}{24} > 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{5\pi}{24}\right) > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{5\pi}{24} < x_0 < \frac{\pi}{4}$$

Or,

$$0,65 < \frac{5\pi}{24} < x_0 < \frac{\pi}{4} < 0,79$$

Ainsi, 0,7 est la valeur approchée de  $x_0$  à 0,1 près.

## b-Propriétés

On utilise la méthode par dichotomie pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation du type  $f(x) = 0$  sur  $[a; b]$  avec une précision donnée.

- On détermine à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique sur l'intervalle  $[a; b]$ .
- On calcule  $f(c)$ ,  $c$  étant le milieu de l'intervalle  $[a; b]$ .
- Si  $f(a) \times f(c) < 0$ , la solution de l'équation est dans  $]a; c[$ , sinon elle est dans  $]c; b[$ .
- On continue en testant le milieu du nouvel interval et ce jusqu'au moment où l'on obtient la précision donnée.

## III- TRAVAUX DIRIGÉS

### Exercice 1. Calcul élémentaires en $+\infty$

Calculer la limite des fonctions suivantes en  $+\infty$  :

a.  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

b.  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

c.  $k(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

d.  $k(x) = \frac{x^2 + 1}{\sin \frac{1}{x}}$

### Exercice 2. Limite des formes indéterminées en $+\infty$

Calculer les limites suivantes.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} \right)$$

$$d. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x + 1})$$

### Exercice 3. Limite des formes indéterminées en un nombre fini

Calculer les limites suivantes.

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

### Exercice 4. Règle de l'Hôpital

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel  $a$  telles que  $f(a) = g(a) = 0$  et  $g'(a) \neq 0$ .

$$1. \text{ Montrer que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

On pourra considérer le taux d'accroissement des fonctions  $f$  et  $g$  en  $x = a$ .

$$2. \text{ Application : Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)}.$$

### Etude générale de fonctions

$$\text{Exercice 5. Fonctions } f : x \mapsto \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

$$1. \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

2. (a) Montrer que sa dérivée est définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}.$$

(b) Résoudre l'équation :

$$X^2 + 4X - 1 = 0,$$

puis en déduire le signe de  $f'(x)$  ainsi que les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de  $f$ .

$$\text{Exercice 6. Fonctions } f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - 2x \text{ et } g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x; \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. Montrer que  $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ .

En déduire le sens de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

3. Montrer que  $f'(x) = g(x) - 2$ .

En déduire le signe de  $f'(x)$  puis les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 1]$ , puis déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 7.** Prolongement par continuité de  $f : x \mapsto \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2}$  en 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{D} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 4[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue en 0 ?

2. La fonction  $f$  est-elle continue en 2 ?

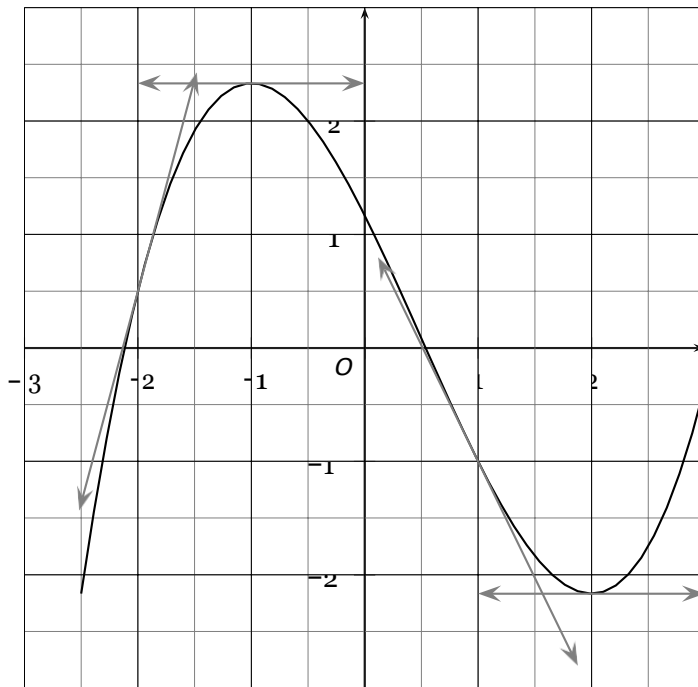
# DERIVEES-PRIMITIVES-ETUDE DE FONCTIONS

## Leçon1 : DERIVATION

### Objectifs :

- Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point, sur un intervalle
- Donner une interprétation géométrique, cinématique et numérique de la dérivabilité d'une fonction en un point
- Définir les notions de fonction dérivée et de fonctions dérivées successives
- Déterminer les dérivées des fonctions élémentaires, les dérivées des fonctions composées et effectuer les opérations sur les dérivées
- Donner quelques applications de la dérivée

### Activité :



On a représenté ci-dessus la fonction  $f$  définie sur  $[-2.5; 3]$  par :  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}$

1. Déterminer par le calcul les images de  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  et  $2$ , puis vérifier la cohérence sur le graphique.
2. Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = -1$  et  $f(x) = 0$
3. Donner le tableau de signe de  $f(x)$  sur  $[-2.5; 3]$
4. Compléter alors le tableau suivant :

x	-2	-1	1	2
f(x)				
f'(x)				

5. Donner une équation des tangentes  $T_{-2}$ ,  $T_{-1}$ ,  $T_1$  et  $T_2$ , aux points de la courbe d'abscisses respectives :  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  et  $2$ .
6. Résoudre graphiquement l'équation  $f'(x) = 0$
7. Donner le signe de  $f'(x)$  sur  $[2.5; 3]$ , puis faire un tableau commun où apparaissent les variations de  $f$  et le signe de  $f'(x)$ .

## I- DEFINITION

Le mot « **dérivé** » vient du latin « **derivare** » qui signifiait « **détourner un cours d'eau** ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

**Définition 1 :** Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et si  $a \in I$ .

Lorsqu'il existe un nombre réel  $d$  tel que, pour tout réel  $h$  proche de  $0$ , on ait:  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = d$

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et que  $d = f'(a)$  est **le nombre dérivé de  $f$  en  $a$** .

**Définition 2 :** Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et si  $a \in I$ .

Lorsqu'il existe un nombre réel  $d$  tel que, pour tout réel  $x \in I$  et proche de  $a$ , on ait:  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = d$

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et que  $d = f'(a)$  est **le nombre dérivé de  $f$  en  $a$** .

**Définition 3 : Fonction dérivable sur un intervalle  $I$**

On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  lorsqu'elle est dérivable en tout point de  $I$ . L'ensemble  $D$  où  $f$  est dérivable est appelé **ensemble de dérivabilité**

**Théorèmes :**

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$
- Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  est continue sur cet intervalle

NB : La réciproque de ce théorème est fautive

**Notations :**

- La fonction qui à tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée **fonction dérivée de  $f$  et se note  $f'$** .
- Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole  $\Delta$  ; ils notent ainsi  $\Delta x = x - a$  et  $\Delta y = f(x) - f(a)$

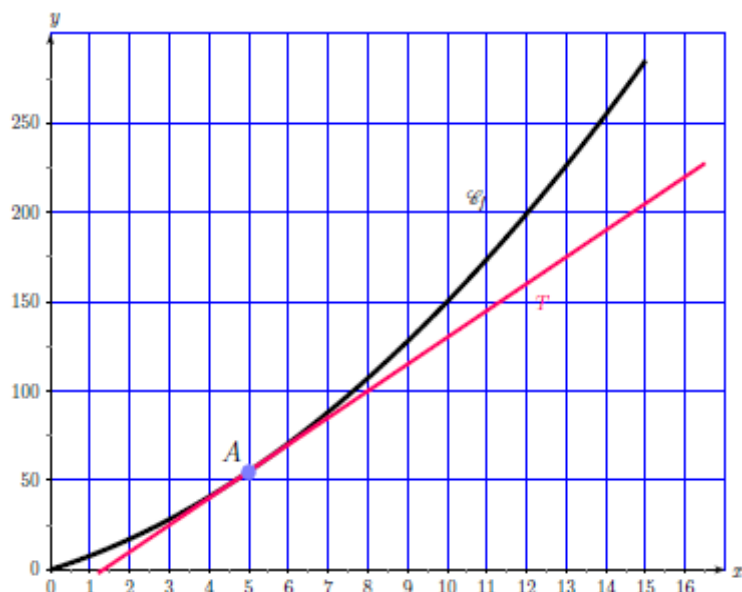
Pour une variation très petite, on note alors  $dx$  et  $dy$ . On obtient alors **la notation**

**différentielle** de la dérivée :  $\frac{dx}{dy}$

Historiquement, la notation  $f'(x)$  est due à **Newton** et la notation différentielle  $\frac{dx}{dy}$  provient de **Leibniz**.

## II- INTERPRETATIONS DU NOMBRE DERIVE

### Activité :



Un surfeur est resté 15 secondes dans un tube. Pour obtenir la fonction donnant la position du surfeur à chaque instant, on a considéré lors de l'étude du mouvement du surfeur par vidéo qu'il était en accélération constante de l'entrée à la sortie du tube.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 15]$  par

$f(x) = 0,8x^2 + 7x$  et  $C_f$  sa courbe représentative. (Voir graphique).

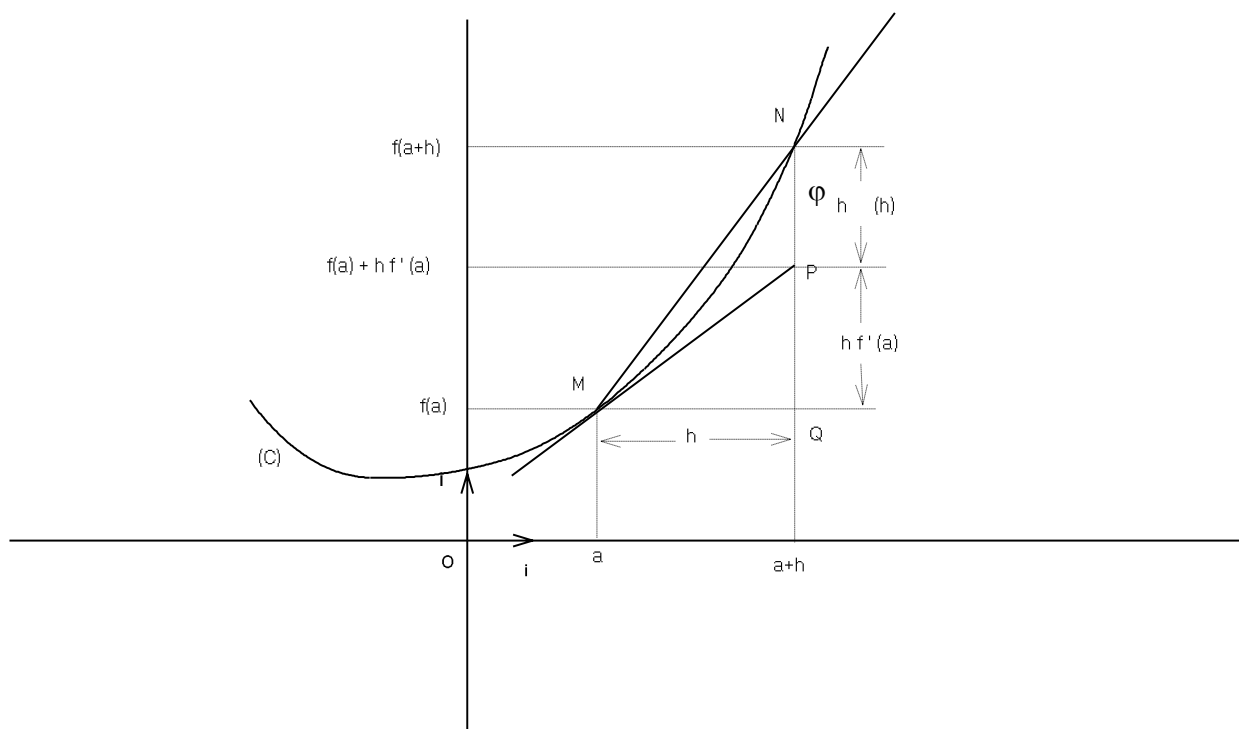
1. Que représente, sur ce graphique, la droite  $T$  pour la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse 5 ?
2. Déterminer, graphiquement, le nombre dérivé  $f'(5)$  de la fonction  $f$  au point  $A$  d'abscisse  $x = 5$ .  
Le nombre dérivé  $f'(5)$  au point  $A$  d'abscisse  $x = 5$  correspond à la vitesse du surfeur dans le tube au bout de 5 s.
3. Tracer les tangentes  $T_1$  et  $T_2$  respectivement aux points d'abscisse  $x = 0$  et  $x = 15$
4. Déterminer alors, graphiquement, la vitesse du surfeur à l'entrée et à la sortie du tube, c'est dire pour  $x = 0$  et pour  $x = 15$ .
5. En déduire les nombres dérivés  $f'(0)$  et  $f'(15)$  aux points d'abscisses  $x = 0$  et  $x = 15$ .
6. compléter le tableau suivant.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f'(x)$															
$2 \times 0,8 x + 7$															

7. Comparer les deux dernières lignes du tableau.
8. Quelle conjecture peut-on faire à partir de la comparaison ?
9. Écrire dans ce cas la fonction  $f'(x)$  en fonction de  $x$  ( sous la forme  $f'(x) = ax + \beta$ )

On retiendra que la fonction  $f'$  qui, à tout  $x$  de  $[0 ; 15]$ , associe  $f'(x) = 1,6 x + 7$  est appelée fonction dérivée de la fonction  $f$  ( $f(x) = 0,8x^2 + 7x$ )

## Retenons :



$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . La courbe  $(C)$  ci-dessus est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$M$  et  $N$  sont deux points de  $(C)$  d'abscisses respectives  $a \in I$  et  $x = a + h \in I$  où  $h \in \mathbb{R}^*$ .

### 1- Interprétation graphique

La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  ; alors la tangente  $(MP)$  à la courbe  $(C)$  en  $M$  d'abscisse  $a$  existe. Elle a pour coefficient directeur  $m = f'(a)$ . Son équation est donc de la forme:  $y = mx + p$ , où  $m = f'(a)$  et son ordonnée à l'origine  $p$  est à calculer.

On écrit généralement **(Ta)** :  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

### 2- Interprétation numérique

La fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , alors **une bonne approximation affine**, lorsque  $a + h$  est voisin de  $a$  est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Exemple : soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Déterminons une approximation affine de  $\sqrt{4.03}$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , et  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Posons  $a=4$  et  $h=0.03$

$$f'(4) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(4.03) \approx f(4) + 0.03 \times \frac{1}{4} \approx 2.0075$$

On obtient donc  $\sqrt{4.03} \approx 2.0075$ , à comparer à la valeur donnée par la calculatrice 2.007486. la précision est donc de  $10^{-4}$

### 3- Interprétation cinématique

Si on appelle  $x(t)$  la loi horaire d'un mouvement, alors  $x'(t)$  représente **la vitesse instantanée à l'instant  $t$** . De même si on appelle  $v(t)$  la vitesse instantanée à l'instant  $t$ , alors  $v'(t)$  représente **l'accélération à l'instant**

t. En Physique on écrit alors  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  et  $a = \frac{dv}{dt}$

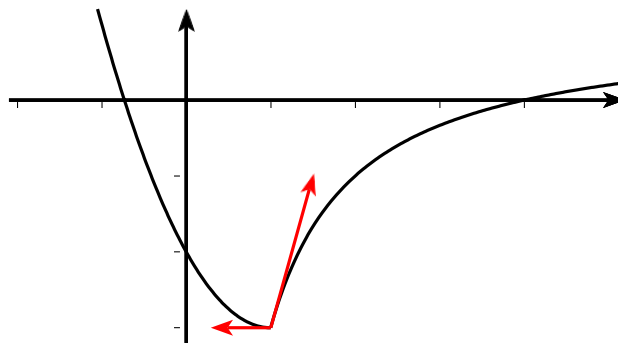
#### 4- Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

Activité :

Soit la fonction par morceaux définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-4}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

TAF : étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

- 1- Etudier de la continuité de f en à gauche et à droite de 1, puis déduire que f est continue en 1
- 2- Déterminer le nombre dérivé de f à gauche et à droite de 1, puis déduire que f n'est pas dérivable en 1
- 3- Montrer qu'au point d'abscisse 1, la courbe de la fonction f admet deux demi-tangentes représentées sur le graphe ci-dessous



- 4- Comment appelle t-on le point de rencontre de ces deux demi- tangentes ?

Retenons :

Soit f une fonction définie en  $x_0$

✓ On dit que f est **dérivable à gauche en  $x_0$**  si

f est définie sur un intervalle de la forme  $]a; x_0]$  et  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  a une limite finie à gauche en  $x_0$ .

Cette limite est appelée **nombre dérivé de f à gauche en  $x_0$**  et notée  $f'_g(x_0)$ .

Alors la courbe de la fonction f admet une **tangente à gauche** au point d'abscisse  $x_0$  d'équation

$$(Tg): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

✓ On dit que f est **dérivable à droite en  $x_0$**  si

f est définie sur un intervalle de la forme  $[x_0; a[$  et  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  a une limite finie à droite en  $x_0$ .

Cette limite est appelée **nombre dérivé de f à droite en  $x_0$**  et notée  $f'_d(x_0)$ .

Alors la courbe de la fonction f admet une **tangente à droite** au point d'abscisse  $x_0$  d'équation

$$(Td): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

✓ On dit que f est **dérivable en  $x_0$**  si

f est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

✓ On dit que la courbe de la fonction  $f$  admet **un point anguleux en  $x_0$**  si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et  $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$

✓ On dit que la courbe de la fonction  $f$  admet en  $x_0$  **une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées** si  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  a une limite infinie à gauche ou à droite en  $x_0$ .

### III- CALCUL DES FONCTIONS DERIVEES

#### 1- Dérivée des fonctions usuelles

Fonction $f$	Ensemble de définition de $f$	Dérivée $f'$	Ensemble de définition de $f'$
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

## 2- Opérations sur les fonctions dérivées

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

$u + v$ est dérivable sur $I$	$(u + v)' = u' + v'$
$ku$ est dérivable sur $I$ , où $k$ est une constante	$(ku)' = ku'$
$uv$ est dérivable sur $I$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur $I$ , où $u$ ne s'annule pas sur $I$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$ , où $v$ ne s'annule pas sur $I$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## 3- Dérivée de fonctions composées

Si  $u$  est dérivable en  $x$  de  $I$  et  $g$  dérivable en  $u(x)$ ,  
alors  $f = g \circ u$  est dérivable en  $x$  et  $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$ .

Exemple:

Écrire chacune des fonctions qui suivent comme composée de deux fonctions et en déduire la dérivée :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$g(x) = (2x^2 - x + 1)^6$$

Conséquences:

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Fonction	Dérivée	Dérivabilité
$f = u^n$ , $n$ est un entier naturel, $n \geq 1$	$f' = nu^{n-1} \times u'$	dérivable sur l'intervalle $I$
$f = \mathbf{Error!}$ avec $u(x) \neq 0$	$f' = -\mathbf{Error!} \times u' = -\mathbf{Error!}$	dérivable pour les $x$ de $I$ où $u(x) \neq 0$
$f = \sqrt{u}$ , avec $u(x) > 0$	$f' = \mathbf{Error!} \times u' = \mathbf{Error!}$	dérivable pour les $x$ de $I$ où $u(x) > 0$
$f = \mathbf{Error!}$ avec $u(x) \neq 0$	$f' = \mathbf{Error!} \times u' = -\mathbf{Error!}$	dérivable pour les $x$ de $I$ où $u(x) \neq 0$
$e^u$	$u'e^u$	Dérivable pour tout $x$ où $u$ est dérivable
$f = \ln(u)$ , avec $u > 0$	$\frac{u'}{u}$	Dérivable en tout $x$ où $u$ est dérivable et strictement positive
$f = \sin(u)$	$u' \cos(u)$	Dérivable en tout $x$ où $u$ est dérivable
$f = \cos(u)$	$-u' \sin(u)$	Dérivable en tout $x$ où $u$ est dérivable

Exemple :

- $f$  est définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^3}$ .  $f$  est de la forme  $u^n$  avec  $u(x) = (x^2-1)$  et  $n = -3$   
donc  $f(x) = (x^2-1)^{-3}$ .  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et pour tout  $x > 1$  :  
$$f'(x) = -3 \times 2x(x^2-1)^{-4} = \frac{-6x}{(x^2-1)^4}.$$
- $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^3} + 7$ .  $f$  est de la forme  $e^u$  avec  $u(x) = -x^3 + 7$ .  
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = -3x^2e^{-x^3+7}$ .

Remarque : soit  $f$  une fonction bijective sur un intervalle ouvert  $I$  ; sa bijection réciproque  $f^{-1}$  définie de  $f(I) \rightarrow I$  est dérivable, et sa dérivée est donnée par  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie de  $] -1; +\infty[$  vers  $] -\infty; 1[$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

- 1- Démontrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$
- 2- Déterminer de deux façons différentes la dérivée la fonction réciproque  $f^{-1}$

#### 4- Dérivées successives

Définition :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  ;

Sa dérivée  $f'$  est appelée **dérivée première** ou **dérivée d'ordre 1** et notée  $f^{(1)}$

Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , alors sa dérivée  $f''$  est appelée **dérivée seconde** ou **dérivée d'ordre 2** et notée  $f^{(2)}$

Si  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , alors sa dérivée est appelée **dérivée n-ième** ou **dérivée d'ordre n** et notée  $f^{(n)}$

Exemple :

$n$  est un entier naturel,  $f$  est la fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x-a}$ ,  $a$  étant un réel.

Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

Propriétés :

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$

- ✓ Si  $\forall x \in I, f''(x) < 0$ , alors la courbe de  $f$  est en dessous de la tangente en tout point de  $I$  ; on dit que  $f$  est **concave**
- ✓ Si  $\forall x \in I, f''(x) > 0$ , alors la courbe de  $f$  est au dessus de la tangente en tout point de  $I$  ; on dit que  $f$  est **convexe**
- ✓ Si  $\forall x \in I, f''(x) = 0$ , et  $f''$  change de signe en  $x_0$ , alors la courbe de  $f$  admet en  $x_0$  un **point d'inflexion**.  
En ce point, la courbe de la fonction  $f$  change **de concavité**

Exemple :

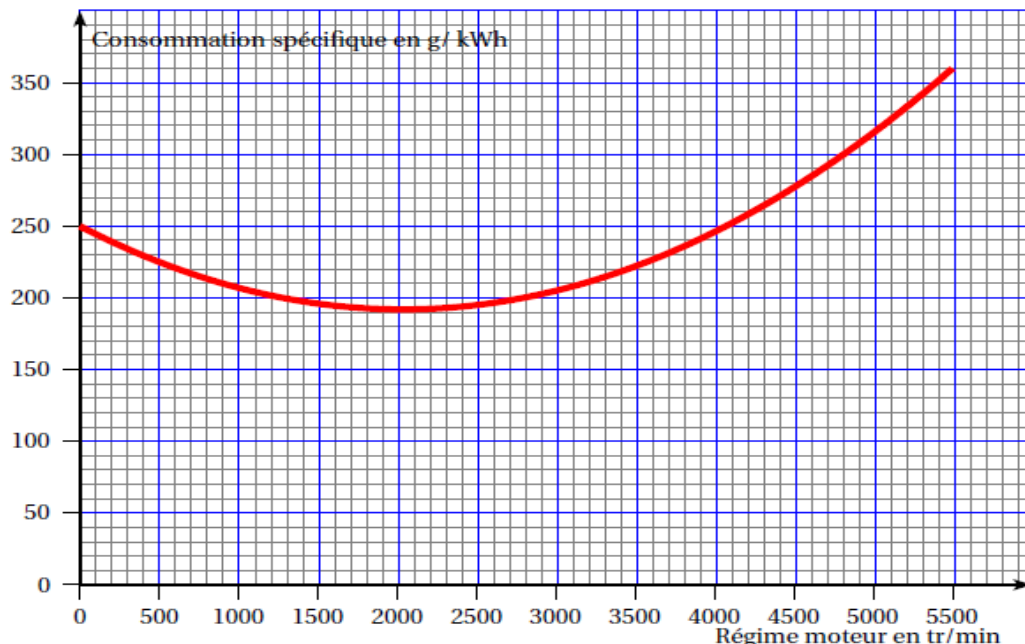
Démontrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$  admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

## IV- APPLICATIONS DE LA DERIVEE

### 1- Dérivée et sens de variation

Activité :

Le couple, la puissance et la consommation spécifique d'une voiture sont donnés par le graphique ci-dessous en fonction du régime du moteur.



La consommation spécifique représente la masse de carburant nécessaire au moteur pour produire 1kWh d'énergie mécanique. Cette consommation est décrite par la fonction  $f$  définie sur  $[800 ; 4\ 700]$  par :

$$f(x) = 0,000014 x^2 - 0,057 x + 250$$

L'objet de cette activité est de déterminer précisément la valeur  $m$  du régime du moteur qui correspond à une consommation spécifique minimale de ce véhicule.

1. Lisez sur le graphique une valeur approximative de cette consommation spécifique minimale.
2. Compléter le tableau de variation de la fonction  $f$ .

$x$	..... $m$ .....
$f(x)$	..... .....

3. La fonction  $f'$  définie sur  $[800 ; 4\ 700]$  par  $f'(x) = 0,000028x - 0,057$  permet d'obtenir le nombre dérivé de la fonction  $f$  en tout point de sa courbe représentative. Vérifiez que, pour tout  $x < m$ ,  $f'(x) < 0$ .
4. Quel est le signe de  $f'(x)$  pour  $x > m$  ?
5. Quelle est la valeur de  $f'(m)$  ? Justifiez votre réponse.
6. Résolvez l'équation  $f'(x) = 0$  et déduisez-en la valeur du minimum  $m$ .

## Retenons :

On peut obtenir le sens de variation d'une fonction  $f$ , dérivable sur un intervalle  $I$  :

- soit à partir d'une somme de fonctions de même sens de variation;
- soit à partir de composées de fonctions;
- soit en utilisant le théorème fondamental suivant (admis) :

### Théorème

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

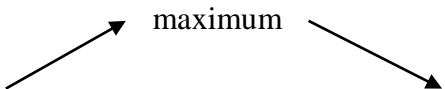
Si la dérivée est positive sur  $I$ , alors  $f$  est **croissante** sur  $I$ .

Si la dérivée est négative sur  $I$ , alors  $f$  est **décroissante** sur  $I$ .

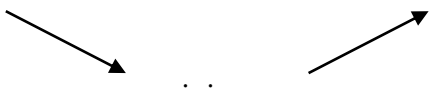
Si la dérivée est nulle en toute valeur de  $I$ , alors la fonction  $f$  est **constante** sur  $I$ .

Lorsque **la dérivée d'une fonction s'annule, en changeant de signe**, la fonction  $f$  admet **un extremum**.  
En effet deux types de tableaux de variation peuvent se rencontrer :

Cas d'un maximum

valeurs de $x$	$a$	$c$	$b$
signe de $f'(x)$	-	;0	+
variations de $f$			

Cas d'un minimum

valeurs de $x$	$a$	$c$	$b$
signe de $f'(x)$	-	;0	+
variations de $f$			

## 2- Dérivée et encadrement :

### Inégalité des accroissements finis :

$a$  et  $b$  sont deux réels et  $f$  la fonction définie de  $]a; b[ \rightarrow IR$  ; si

- ✓  $f$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a; b]$
- ✓  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a; b[$ ,
- ✓  $m$  et  $M$  sont deux réels tels que  $\forall x \in ]a; b[$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors  
$$\mathbf{m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)}$$

### Corollaire de l'inégalité des accroissements finis :

$a$  et  $b$  sont deux réels et  $f$  la fonction définie de  $]a; b[ \rightarrow IR$  ; si

- ✓  $f$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a; b]$

- ✓  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a; b[$ ,
- ✓  $M$  est un réel positif tel que  $\forall x \in ]a; b[, |f'(x)| \leq M$ , alors  
 $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Exemple :

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction cosinus sur l'intervalle  $[0; x]$ . En déduire que  $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$ .

### 3- Dérivée et équations différentielles :

**Activité :**

On note  $f(t) = \cos t$  ;  $g(t) = \sin t$  ; et  $h(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

1. Calculer les dérivées secondes de  $f$ ,  $g$  et  $h$
2. Donner une relation entre chaque fonction et leur dérivée seconde
3. Trouver une autre fonction vérifiant cette propriété
4. Existe-t-il une fonction  $k$  définie par  $k(t) = A \cos t$ , où  $A$  est une constante réelle, telle que  $k(0) = 2$  ?
5. Trouver une fonction égale à sa dérivée

**Retenons :**

On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction ; dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

# Leçon2 : ETUDE DE FONCTIONS

## Objectifs :

- Définir quelques généralités sur les fonctions
- Donner le plan d'étude d'une fonction selon sa nature
- Etude de quelques fonctions (exposée par les apprenants)

## I- QUELQUES GENERALITES SUR LES FONCTIONS

### 1- Eléments de symétrie

(C) est la courbe représentative d'une fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### ✓ **Changement de repère :**

Le point A a pour coordonnées  $(a;b)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ; alors  $\vec{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$

Un point M du plan a pour coordonnées  $(x,y)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(X,Y)$  dans le repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  ; vectoriellement, cela signifie que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{AM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ .

La relation de Chasles sur les vecteurs permet alors d'obtenir les formules de changement de repère :

De  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$  , on trouve, 
$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

Ce changement de repère conduit à une équation de la courbe (C) dans le nouveau repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  :

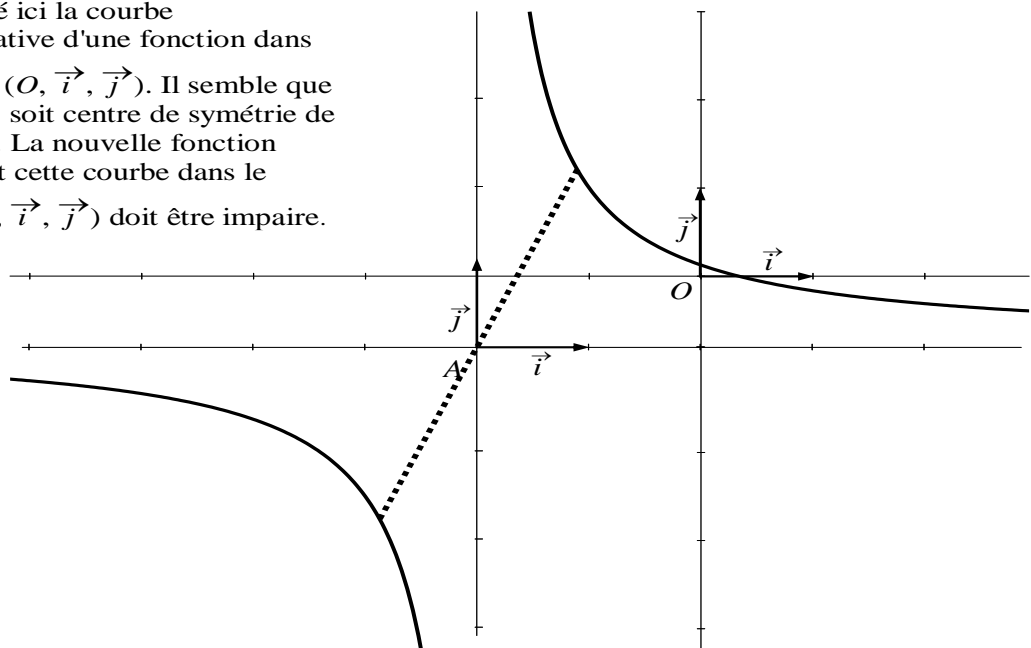
$$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x) \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow Y = g(X) \text{ dans le repère } (A, \vec{i}, \vec{j}) \text{ en ayant utilisé les formules de changement de repère}$$

Remarque : Si  $g$  est paire alors l'axe  $(A, \vec{j})$  est **axe de symétrie** de (C)

Si  $g$  est impaire alors le point A est **centre de symétrie** de (C)

On a tracé ici la courbe représentative d'une fonction dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Il semble que le point A soit centre de symétrie de la courbe. La nouvelle fonction exprimant cette courbe dans le repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  doit être impaire.



### ✓ Axe de symétrie

Pour démontrer que la droite d'équation  $x = a$  est axe de symétrie de la courbe (C), on procède comme suit :

Méthode 1 : par le changement de repère

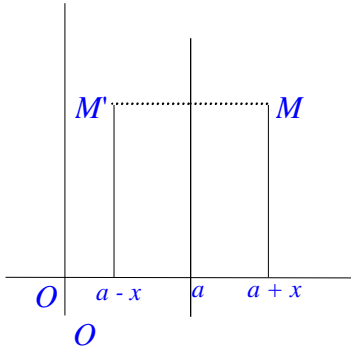
$\Omega$  est le point de coordonnées  $(a;0)$  dans  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On montre que dans le repère  $(\Omega, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , la courbe (C)

est la courbe représentative **d'une fonction paire**.

Méthode 2

On montre que :

Si  $a + x$  est dans  $D_f$  alors  $a - x$  est aussi dans  $D_f$  et  $f(a + x) = f(a - x)$



Ou encore on montre que :

Si  $2a - x$  est dans  $D_f$  alors  $f(2a - x) = f(x)$

Exemple :

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \text{Error!}$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que la droite d'équation  $x = \text{Error!}$  est un axe de symétrie de (C).

### ✓ Centre de symétrie

Pour démontrer que le point  $\Omega(a;b)$  est un centre de symétrie de la courbe (C), on procède comme suit :

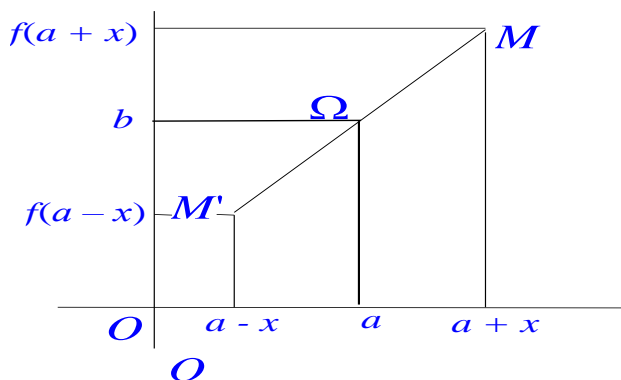
Méthode 1 : par le changement de repère

On montre que dans le repère  $(\Omega, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , la courbe (C) est la courbe représentative **d'une fonction impaire**.

Méthode 2

On montre que :

si  $a + x$  est dans  $D_f$  alors  $a - x$  est aussi dans  $D_f$  et  $\text{Error!} = b$



Exemple :

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que le point  $\Omega(-1;-2)$  est un centre de symétrie de  $(C)$

## 2- Branches infinies d'une représentation graphique

Soit  $f$  une fonction et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

On dit que  $(C_f)$  admet une **branche infinie** lorsque :

- ✓ En l'infini,  $f$  admet une limite finie ou infinie
- ✓ En un nombre  $x_0$ ,  $f$  admet une limite infinie

### a. Asymptotes

Le plan est muni du repère  $(O,I,J)$  ;  $(C)$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est **asymptote verticale à  $(C)$**

On dit que  $(C)$  admet en  $a$  une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Exemple : Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{1-x^2}$

Montrer que les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = -1$  sont asymptotes verticales à  $(C_f)$

- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ , alors la droite d'équation  $y = b$  est **asymptote horizontale à  $(C)$  en  $\infty$**

On dit que  $(C)$  admet en  $\infty$  une asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Exemple : Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2+x+1}$

Montrer que la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote horizontale à  $(C_g)$

- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est **asymptote oblique à  $(C)$  en  $\infty$**

$\infty$

Exemple : Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-3}$

Montrer que la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote oblique à  $(C_h)$

- $f$  et  $g$  sont deux fonctions de courbes représentatives respectives  $(C_f)$  et  $(C_g)$

Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , alors  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont des **courbes asymptotes en  $\infty$**

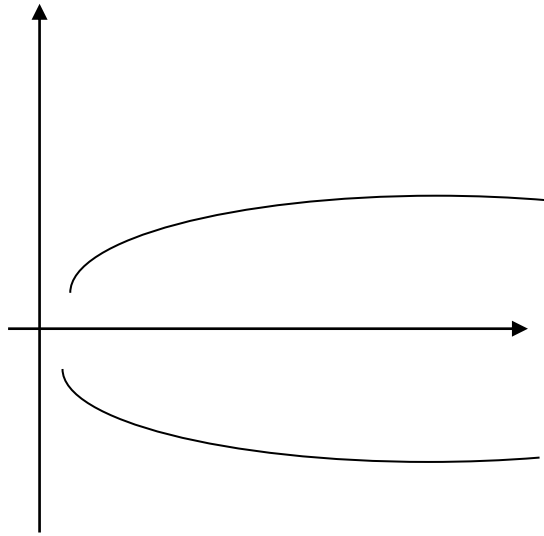
Exemple : Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x) = \frac{x^2-x+5}{x-3}$  et  $g(x) = \frac{x^2}{x-3}$

Montrer que les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont asymptotes en  $\infty$

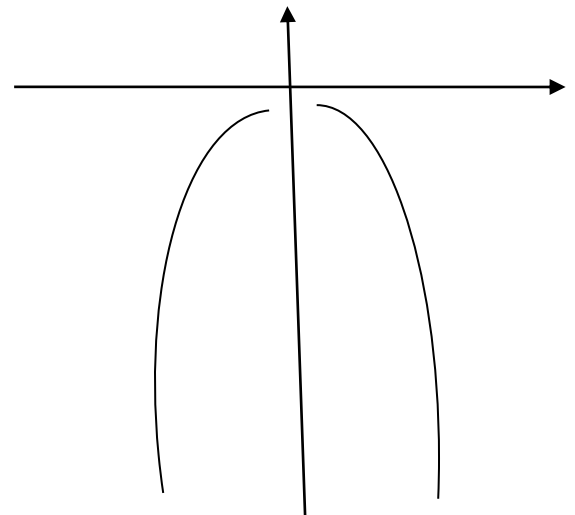
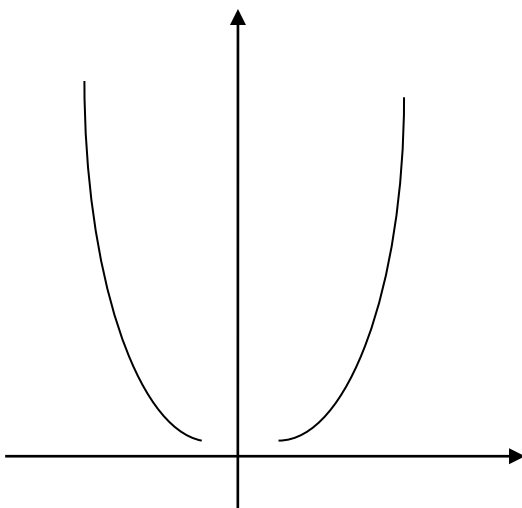
### b. Branches paraboliques et directions asymptotiques

Le plan est muni du repère  $(O,I,J)$  ;  $(C)$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$ .

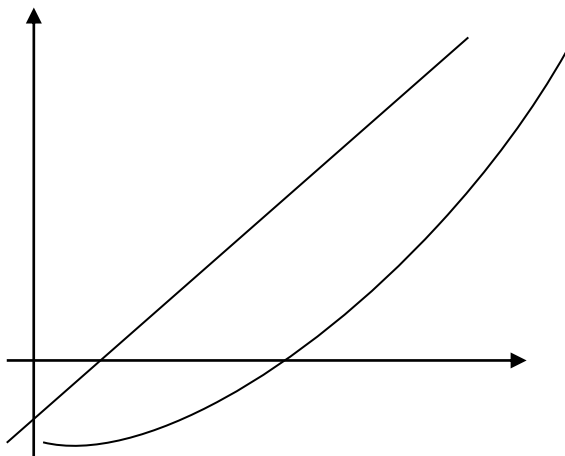
- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , alors  $(C)$  admet une **branche parabolique** de direction celle de la droite (OI)



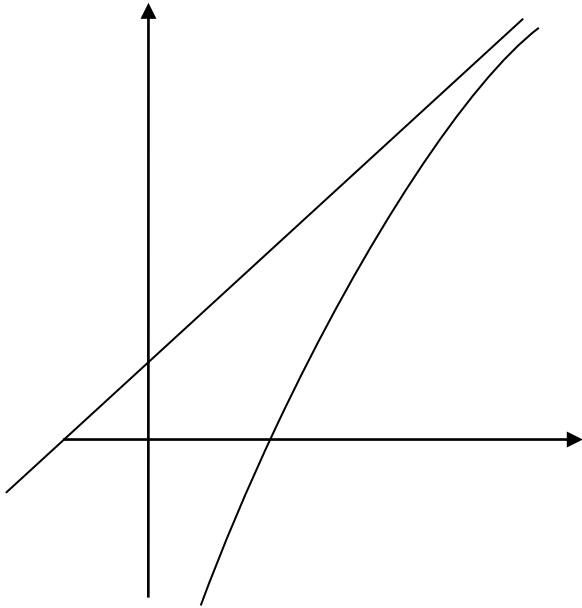
- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ , alors  $(C)$  admet en  $\infty$  une **branche parabolique** de direction celle de la droite (OJ)



- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \neq 0$  et Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$ , alors  $(C)$  admet en  $\infty$  une **branche parabolique** de direction celle de la droite d'équation  $y = ax$



➤ Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \neq 0$  et Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$ , alors (C) admet en  $\infty$  une **asymptote oblique** d'équation  $y = ax + b$



Exemple : Etudier en  $+\infty$  les branches infinies des fonctions f ,g et h définies par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} ; g(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 2} ; h(x) = x^3 + 2x - 1$$

### 3- Périodicité :

#### a. Définition

Une fonction f est dite **périodique** de période T (T étant un réel), lorsque

$$\forall x \in Df, (x + T) \in Df \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

Exemple : les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$  ; la fonction tangeant est périodique de période  $\pi$

#### b. Propriétés

P1) Si T est une période de la fonction f, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, nT$  est période de T.

Conséquence : on réduit l'intervalle d'étude d'une fonction périodique de période T à un intervalle d'amplitude  $|T|$  ; et l'on complète la courbe sur le Df par les translations de vecteurs  $T\vec{i}$ .

P2) Si  $f(x) = \cos(ax + b)$  ou  $f(x) = \sin(ax + b)$  alors  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  ;

$$\text{Si } f(x) = \tan(ax + b), \text{ alors } T = \frac{\pi}{|a|}$$

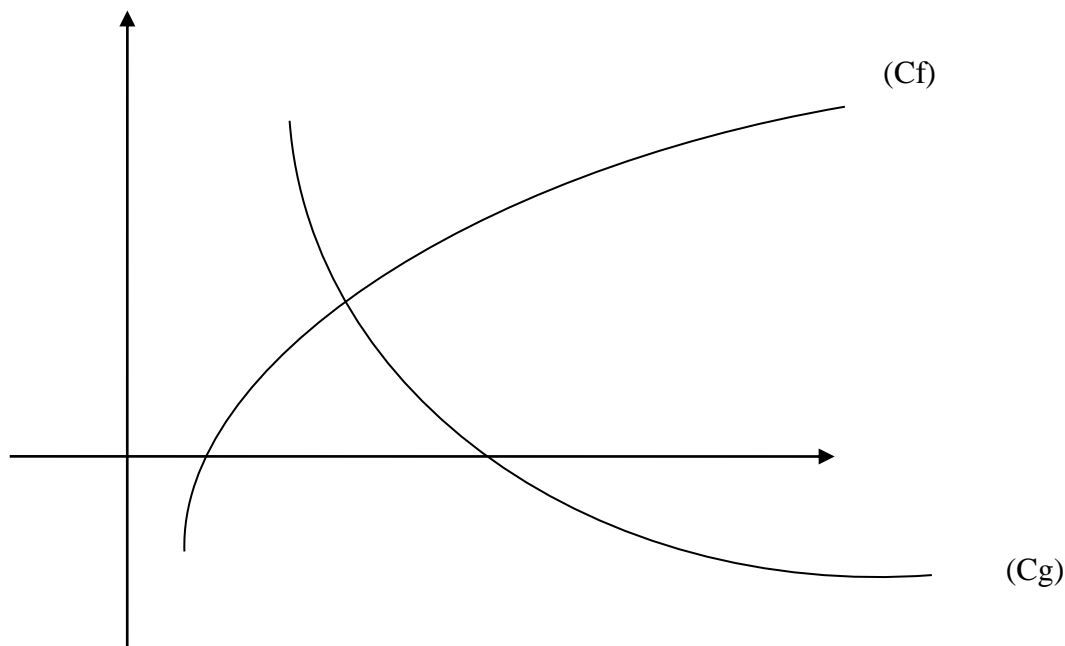
Exemple : Montrer que la fonction h définie par  $h(x) = 1 + \cos(2x - 1)$  est périodique de période  $\pi$

### 4- Positions relatives de deux courbes :

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de R.

On veut étudier la position relative de la courbe représentative Cf de f et de la courbe représentative Cg de g ou encore, on veut savoir pour chaque réel x de I, si le point M de Cf d'abscisse x est au-dessus ou en dessous du

point N de Cg de même abscisse x.



La technique est la suivante :

On étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ , avec les résultats suivants :

- Si pour tout réel  $x$  d'un intervalle  $J$  contenu dans  $I$ , on a  $f(x) - g(x) > 0$ , Cf est **strictement au-dessus** de Cg sur l'intervalle  $J$ .
- Si pour tout réel  $x$  d'un intervalle  $J$  contenu dans  $I$ , on a  $f(x) - g(x) < 0$ , Cf est **strictement en-dessous** de Cg sur l'intervalle  $J$ .
- si pour un réel  $x_0$  de  $I$ , on a  $f(x_0) - g(x_0) = 0$ , Cf et Cg se coupent en leur point d'abscisse  $x_0$ .

Exemple : Etudier les positions relatives des courbes des fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = x^3$

## II- PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$

2- Restreindre le domaine d'étude :

a. Si  $f$  est **paire ou impaire**, alors  $De = Df \cap \mathbb{R}^+$  ou  $De = Df \cap \mathbb{R}^-$

b. Si  $f$  est **périodique de période T**, alors  $De = Df \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$

c. Si  $f$  est **périodique de période T et paire ou impaire**, alors  $De = Df \cap \left[0; \frac{T}{2}\right]$  ou  $De = Df \cap \left[-\frac{T}{2}; 0\right]$

3- Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition et donner une interprétation géométrique des résultats (Etude des asymptotes et branches infinies éventuelles)

4- Etudier la dérivabilité de  $f$  sur son domaine, calculer la dérivée et étudier son signe sur son domaine.

5- Dresser le tableau de variations de  $f$

6- Déterminer les points particuliers :

- Points d'intersection avec les axes
- Extrema

- Point d'inflexion
- Points anguleux...

7- Représentation graphique de  $f$  dans un repère

### III- QUELQUES QUESTIONS LORS D'UNE ETUDE DE FONCTION

#### 1- Déterminer ou expliquer l'ensemble de définition de la fonction $f$

Les fonctions polynômes, exponentielles et trigonométriques sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction inverse n'est pas définie en 0 et la fonction racine carrée est définie sur  $[0;+\infty[$

La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0;+\infty[$

Pour certaines fonctions, on peut réduire l'étude à un autre intervalle

- **Si  $f$  est paire**, on étudie  $f$  sur  $D \cap \mathbb{R}_+$ , et on complète la courbe par symétrie par rapport à  $(Oy)$
- **Si  $f$  est impaire**, on étudie  $f$  sur  $D \cap \mathbb{R}_+$ , et on complète la courbe par symétrie par rapport au point  $O$
- **Si  $C_f$  admet un axe de symétrie  $(\Delta)$  d'équation  $x = a$** , on étudie  $f$  sur  $[a;+\infty[ \cap D$ , et on complète par Symétrie par rapport à  $(\Delta)$ . (2 méthodes pour les axes ou centres de symétrie, on doit connaître en particulier le changement de repère)
- **Si  $C_f$  admet un centre de symétrie  $\Omega(a;b)$** , on étudie  $f$  sur  $[a;+\infty[ \cap D$ , et on complète par symétrie par rapport au point  $\Omega$ .
- **Si  $f$  est périodique de période  $T$** , on étudie  $f$  sur  $D \cap I$  où  $I$  est un intervalle de longueur  $T$ .

Lorsque  $f$  est, de plus, paire ou impaire, on prendra pour  $I$  l'intervalle de centre  $O$ ,  $[-\text{Error!};\text{Error!}]$ , de manière à ne considérer par la suite que l'intervalle d'étude  $D \cap [0;\text{Error!}]$  et on complétera par symétrie.

#### 2- Détermination des limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition de $f$ .

**La limite peut être évidente.**

Si la fonction est définie en un point où l'on cherche la limite, cette dernière est égale à la valeur en ce point.

**La limite peut ne pas être évidente.**

On utilise une des nombreuses méthodes pour tenter de lever l'indétermination. Dans tous les cas, on tente de se ramener à l'une des limites classiques (celles du formulaire)

On peut alors effectuer des changements de variables pour se rapprocher d'une limite connue ou plus simple.

On peut également déterminer une limite par comparaison et non pas directement

On en déduit d'éventuelles asymptotes à la courbe : horizontales, verticales, obliques.

Possibilité de démontrer des asymptotes autres qu'affines : paraboliques, cubiques, ...). Cette détermination peut être facilitée en recherchant une autre écriture de  $f(x)$ .

On peut alors rechercher la position relative de la courbe par rapport à ses asymptotes. et plus encore des calculs de distances ou mesures algébriques entre une courbe et sa courbe asymptote.

### **3- Etude du sens de variation de la fonction**

#### ➤ **Méthode utilisant la fonction dérivée** (la plus utilisée) :

On définit l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable. Les théorèmes généraux assurent l'existence d'intervalles sur lesquels la fonction est dérivable. Lorsque certaines valeurs de l'ensemble de définition ne figurent pas dans ces intervalles, on détermine si la fonction est dérivable en un point, on utilise pour cela la limite du taux d'accroissement, il faut qu'elle existe et qu'elle soit finie.

Vous devez connaître l'interprétation d'une fonction non dérivable en un point (graphiquement Présence d'une tangente verticale ou deux demi-tangentes différentes). Les contre-exemples classiques sont donnés par la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée.

On détermine la dérivée de la fonction et on étudie son signe. Cette recherche est parfois évidente : somme de termes positifs, ... On utilise parfois le signe du trinôme : il est important de maîtriser cette technique On peut réutiliser un signe obtenu dans une première partie de l'exercice (fonction auxiliaire) La factorisation est parfois obligatoire : factorisation de trinôme ou plus généralement de polynômes (racine évidente puis factorisation par  $(x - a)$  puis ...)

On en déduit le sens de variation de  $f$ . On dresse le tableau de variation de  $f$  (avec les limites et les valeurs exactes aux bornes des flèches)

D'autres méthodes sont possibles : somme de deux fonctions croissantes ; composées de fonctions dont on connaît les variations

#### ➤ **Utilisation de la dérivée**

La dérivée en un point permet de construire des approximations affines pour obtenir des valeurs approchées sans utiliser la calculatrice.

On peut mettre en évidence une tangente particulière ; une tangente peut être déterminée par un point et un vecteur directeur, on un point et son coefficient directeur (égal au nombre dérivé), ou une équation. On peut effectuer des interprétations (la dérivée d'une quantité est l'expression instantanée d'une autre quantité - loi horaire en mécanique)

Recherche des lieux dont la tangente possède tel coefficient directeur. Il est parfois possible de rechercher des dérivées successives

#### ➤ **Utilisation des variations**

Détermination des extrema éventuels (après les avoir justifié) qu'il soit local ou global

Images d'intervalles, détermination du signe d'une fonction

Lors de la résolution d'équations liées à la fonction, utiliser ses variations pour justifier l'existence de solutions et donner un encadrement. On justifie pour cela la nature bijective d'une fonction (dérivable + monotone + intervalles). Certaines fonctions bijectives et leurs réciproques sont à connaître : puissances et racines  $n$ -ième, exponentielle et logarithme. On peut alors obtenir une valeur approchée ou un meilleur encadrement en utilisant la calculatrice.

#### ➤ **Construction de la courbe représentative d'une fonction**

On se sert des questions précédentes pour le tracé de la courbe. On doit tenir compte du repère indiqué dans l'énoncé, sinon on le choisira judicieusement. La calculatrice graphique permet de détecter des erreurs éventuelles.

On peut également se servir de tangentes remarquables pour le tracé de la courbe. On peut alors contrôler certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie et vérifier les résultats précédents.

➤ **Résolution graphique d'équations**

Il peut ensuite apparaître des questions résolues graphiquement : étude, suivant les valeurs d'un paramètre, du nombre de solutions d'équations, d'inéquations, ...

On peut également demander de construire la courbe représentative d'une fonction associée à la première:  $-f(x)$ ,  $f(-x)$ , ...

➤ **Détermination de primitives de fonctions**

Soit directement, soit en calculant la dérivée d'une autre fonction. Il faut connaître la différence entre une primitive sur un intervalle, toutes les primitives et la primitive telle que ...

➤ **Calcul d'aires de domaines (en unité d'aire ou en une autre unité)**

Vous devez parfois transformer le domaine en un autre domaine isométrique (par une transformation classique). Il est alors peut-être plus facile de déterminer l'aire de la nouvelle surface.

#### **IV- EXEMPLES D'ETUDE DE FONCTION**

##### **1- Exemple1 : les fonctions circulaires**

###### a) La fonction cosinus

La fonction cosinus est définie sur  $\mathbb{R}$

Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$  : la fonction cosinus est périodique, de période  $2\pi$ , il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , soit  $[-\pi; \pi]$  par exemple.

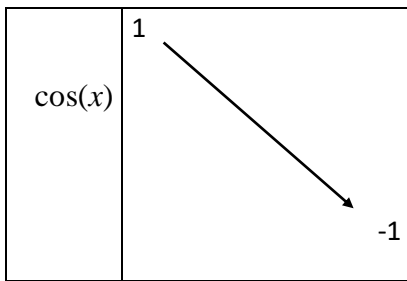
$\cos(-x) = \cos(x)$  : la fonction cosinus est paire et il suffit alors d'étudier la fonction sur  $[0; \pi]$ .

$|\cos(x)| \leq 1$  : la fonction cosinus est bornée sur  $\mathbb{R}$

La fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,  $\cos'(x) = -\sin(x)$

On en déduit le tableau de variation de la fonction cosinus sur  $[0; \pi]$  :

$x$	0		$\pi$
$\cos'(x)$	0	-	0



Comme la fonction cosinus est dérivable en 0 et  $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h - 0} = 0 \text{ et donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

b) La fonction sinus

La fonction sinus est définie sur IR

Pour tout réel  $x$  ?  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  : la fonction sinus est périodique, de période  $2\pi$ , il suffit donc d'étudier la fonction sinus sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , soit  $[-\pi; \pi]$  par exemple.

$\sin(-x) = -\sin(x)$  : la fonction sinus est impaire et il suffit alors d'étudier la fonction sur  $[0; \pi]$ .

$|\sin(x)| \leq 1$  : la fonction sinus est bornée sur IR

La fonction sinus est dérivable sur IR et, pour tout réel  $x$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$

On en déduit le tableau de variation de la fonction sinus sur  $[0; \pi]$  :

	0	<b>Error!</b>	$\pi$
$x$			
$\sin'(x)$	+	0	-
$\sin(x)$	0	1	0

Comme la fonction sinus est dérivable en 0 et  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h - 0} = 1 \text{ et donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Représentation graphique

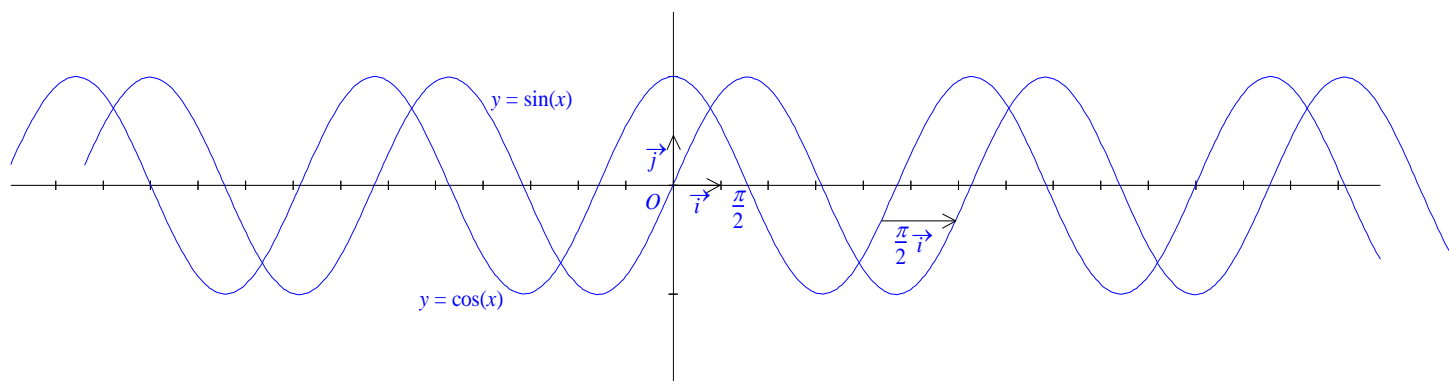
Pour tracer les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, on utilise :

La parité ( symétrie par rapport à l'origine pour la fonction sinus, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus )

La périodicité ( invariance de la courbe par les translations de vecteur  $k \times 2\pi i; \vec{\phantom{x}}$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ces courbes s'appellent des sinusoides.

Comme, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ , la courbe représentative de la fonction sinus se déduit de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur  $\vec{i}$ .



### c) La fonction tangente

La fonction tangente est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\tan(x + \pi) = \tan(x)$  : la fonction tangente est périodique, de période  $\pi$ , il suffit donc d'étudier la fonction tangente sur un intervalle de longueur  $\pi$ , soit  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par exemple.

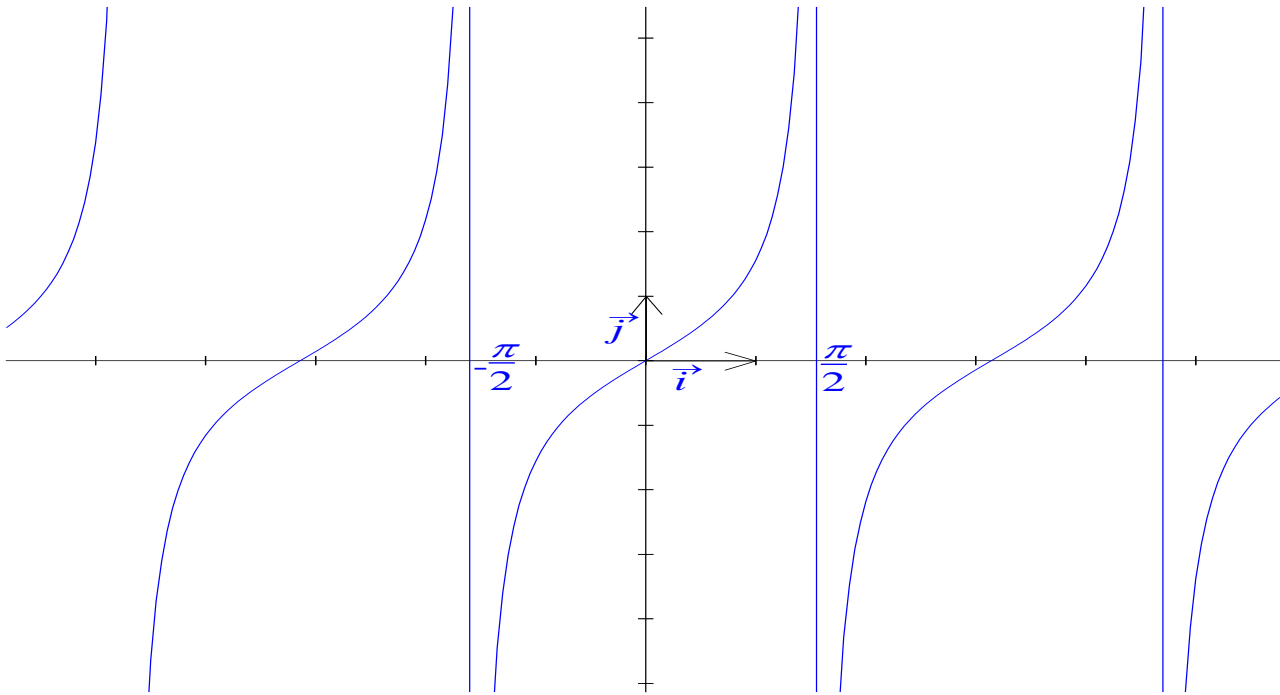
$\tan(-x) = -\tan(x)$  : la fonction tangente est impaire et il suffit alors d'étudier la fonction sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$ .

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme  $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$  et, pour tout réel  $x$  de cet intervalle,  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ .

On en déduit le tableau de variation de la fonction tangente sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  :

$x$	$0$ $\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	1 +
$\tan(x)$	

On remarque que les droites d'équations  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction tangente.



## 2- Exemple2 : Exposés par les apprenants

Etudier les variations et représenter graphiquement les fonctions ci-dessous :

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x + 3|}, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2};$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 2}{x^2 - 2x - 2}$$

# Leçon3 : PRIMITIVES

## Objectifs :

- Définir la notion de primitive
- Déterminer les primitives de fonctions élémentaires
- Opérations et détermination des primitives de fonctions composées
- Donner les méthodes pratiques de détermination des primitives d'une fonction

Dans cette leçon, les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

## I- PRESENTATION

### 1- Activités

1- On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies par :  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$  ;  $g(x) = -x^2 + 3x + 5$  et  $h(x) = -2x + 3$

- a) Déterminer la dérivée des fonctions  $f$  et  $g$
- b) Que constatez vous ?

2- Dans chacun des cas suivants, déterminer une fonction  $F$  dont la dérivée est la fonction  $f$

- a)  $f: x \rightarrow 1$
- b)  $f: x \rightarrow 3x^2$
- c)  $f: x \rightarrow \cos x$

### 2- Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $K$ . On appelle **primitive de  $f$  sur  $K$**  toute fonction  $F$  dérivable sur  $K$  et telle que :  $\forall x \in K, F'(x) = f(x)$

Exemple : Une primitive de la fonction  $f: x \rightarrow \sin x$  est la fonction  $F: x \rightarrow -\cos x$  ou  $F: x \rightarrow -\cos x + 2$

Remarque : La fonction  $F: x \rightarrow -\cos x$  est une primitive de la fonction  $f: x \rightarrow \sin x$

La fonction  $F: x \rightarrow -\cos x + c, (c \in \mathbb{R})$  est aussi primitive de la fonction  $f: x \rightarrow \sin x$

Donc une fonction continue admet une infinité de primitives, toutes égales à une constante près. Pour cela, on ne dit pas « **la primitive de  $f$**  » mais on dit « **une primitive de  $f$**  ».

### 3- Propriétés

**P1)** Toute fonction continue sur un intervalle  $K$  admet **au moins une primitive sur  $K$** .

**P2)** Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $K$ , alors toute autre primitive de  $f$  sur  $K$  est de la forme :  $x \rightarrow F(x) + c, (c \in \mathbb{R})$

**P3)** Si  $f$  est une fonction admettant une primitive sur un intervalle  $K$ , alors il existe **un et une seule primitive**

de  $f$  qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .

Exemple : Déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f: x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$  qui prend la valeur  $\frac{3}{2}$  en 2.

## II- CALCUL DES PRIMITIVES

### 1- Primitive de fonctions usuelles

fonction $f$ définie par	primitive $F$ de $f$ définie par , $k \in \mathbb{R}$	Sur l'intervalle $I$
$f(x) = c$ où $c$ est une constante	$F(x) = cx + k$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ , $n \in \mathbb{V}^*$	$F(x) = \text{Error!} + k$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \text{Error!}$ , $n \in \mathbb{V}$ et $n \geq 2$	$F(x) = \text{Error! Error!} + k$	$I = ]-\infty; 0[$ ou $I = ]0; +\infty[$
$f(x) = \text{Error!}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$I = ]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \text{Error!}$	$F(x) = \tan(x) + k$	$I = ]-\text{Error!} + n\pi ; \text{Error!} + n\pi[$ , $n \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \text{Error!}$	$F(x) = \ln(x) + k$	$I = ]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$I = \mathbb{R}$

### 2- Primitives et opérations

$u$  et  $v$  sont deux fonctions

fonction $f$	primitives de $f$ sur $I$ ( $k \in \mathbb{R}$ )
$Cu'$ où $C \in \mathbb{R}$	$Cu + k$
$u' + v'$	$u + v + k$
$u' \times u^n$ où $n \in \mathbb{V}$ et $n \geq 2$	<b>Error!</b> $u^{n+1} + k$
<b>Error!</b> où $n \in \mathbb{V}$ , $n \geq 2$ et $u$ ne s'annule pas sur $I$	<b>Error! Error!</b> $+ k$
<b>Error!</b> où $u$ est strictement positive sur $I$	$2\sqrt{u} + k$
$u' \times (v' \circ u)$ où $v \circ u$ est dérivable sur $I$	$v \circ u + k$
<b>Error!</b> où $u$ strictement positive sur $I$	$\ln(u(x)) + k$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v} + k$
$u'e^u$	$e^u$
$u' \cos u$	$\sin u + k$
$u' \sin u$	$-\cos u + k$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(\tan^2 u)$	$\tan u + k$

Exemple 1 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1-  $f: x \rightarrow x^2 - 2x + 3$

2-  $g: x \rightarrow -\frac{1}{x^2} + 2x$

3-  $h: x \rightarrow 2\sin x - 1$

$$4- i: x \rightarrow 2x + 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Exemple2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$$f: x \rightarrow 2x(x^2 + 3)^3$$

$$2- g: x \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$3- h: x \rightarrow \cos x \sin^3 x$$

$$4- i: x \rightarrow \frac{3x^2}{(x^3+1)^3}$$

Exemple3 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$$f: x \rightarrow \frac{x^4+2x^2-1}{x^2}$$

$$2- g: x \rightarrow (x + 1)(2x - 3)^2$$

$$3- h: x \rightarrow \sqrt{x + 1}$$

$$4- i: x \rightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-3}$$

Exemple4 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$$f: x \rightarrow \frac{x}{(x^2+1)^3}$$

$$2- g: x \rightarrow (x^2 + 1)(x^3 + 3x -)^4$$

$$3- h: x \rightarrow \sin x \cos^2 x$$

$$4- i: x \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Exemple5 :

f est une fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4x^3-3x}{(2x-1)^2}$

$$1- \text{Ecrire } f \text{ sous la forme } f(x) = ax + b + \frac{c}{(2x-1)^2}$$

2- Déterminer les primitives de f sur  $[1; +\infty[$

3- En déduire la primitive de f qui s'annule en 1

Exemple6 :

$$1- \text{Linéariser la fonction } f: x \rightarrow \sin^2 x \cos^4 x$$

2- Déterminer alors toutes les primitives de f sur IR

Exemple7 :

Soit  $f: x \rightarrow \sin^2 x \cos^3 x$

- 1- Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x (\sin^2 x - \sin^4 x)$
- 2- Déterminer alors toutes les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- 3- En déduire la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur  $-\sqrt{2}$  en  $-\pi$

## CHAPITRE 5 : TRANSFORMATIONS DU PLAN COMPLEXES-GPM

**OPO** : A la fin de cette leçon, je dois être capable de :

- Utiliser les nombres complexes pour :
  - Démontrer que les droites sont parallèles et perpendiculaires
  - Démontrer que les points sont alignés
  - Déterminer la nature d'un triangle
- De décrire l'écriture complexe d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation ou d'une similitude directe

### 1- Nombre complexe et configuration du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . A, B, C et D sont des points d'affixes respectives  $Z_A, Z_B, Z_C, Z_D$ .

Nous savons que :

$$\text{Mes}(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \arg(Z_B - Z_A) + 2k\pi$$

(Interprétation géométrique de l'argument

Donc

$$\begin{aligned} \text{Mes}(\widehat{AB, CD}) &= \text{Mes}(\widehat{AB, \vec{i}}) + \text{Mes}(\widehat{\vec{i}, CD}) \\ &= \text{Mes}(\widehat{\vec{i}, CD}) - \text{Mes}(\widehat{\vec{i}, AB}) \\ &= \arg(Z_D - Z_C) - \arg(Z_B - Z_A) + 2k\pi \\ &= \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Mes } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) + 2k\pi$$

## Conséquences

### C<sub>1</sub> : droites parallèles

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \text{Mes } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg} \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{Donc } (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

En particulier

$$A, B, \text{ et } C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

### C<sub>2</sub> : droites perpendiculaires

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \text{Mes } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg} \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Donc } (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

En particulier

$$ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

$$ABC \text{ rectangle et isocèle en } A \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$$

### C3: triangle equilateral

$$ABC \text{ equilateral} \Leftrightarrow \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

#### Exemple

A, B, C et D sont des points du plan complexe d'affixe respective  $Z_A=i$ ,  
 $Z_B = -2-3i$ ,  $Z_C = 1+3i$ ,  $Z_D = 3+2i$

- 1- Montré que les points A, B et C sont alignés
- 2- Justifier la nature du triangle ACD
- 3- Déterminer l'affixe du point E tel que le triangle ACE soit équilatérale direct
- 4- Montré que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires
- 5- a- interpréter géométriquement  $\arg\left(\frac{z+2+3i}{z-3-2i}\right)$  ou  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2-3i; 3+2i\}$   
b- en déduire et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que

$\frac{z+2+3i}{z-3-2i}$  Soit un imaginaire pur

#### Résolution

- 1- Montrons que A, B et C sont alignés

A, B, C alignés ssi  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -\frac{1}{2} \text{ Donc A, B, C sont alignés}$$

2- Justifions la nature de ACD

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = i \text{ alors ACD est un triangle rectangle isolé en C}$$

3- Déterminons l'affixe du point E tel que ACE soit équilatéral direct

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_E - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{or } e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_E - Z_C = \frac{Z_A - Z_C}{e^{i\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow Z_E = \frac{Z_A - Z_C}{e^{i\frac{\pi}{3}}} + Z_C$$

$$Z_E = \frac{1-2\sqrt{3}}{2} + i \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

4- Montrons que les droites (BC) et (CD) sont  $\perp$

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_C} = i \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{1}{3} i \in \mathbb{R}^* \quad \text{donc (BC) } \perp \text{ (CD)}$$

5a- interprétation géométrique

$$\text{Arg}\left(\frac{z+2+3i}{z-3-2i}\right) = \arg\left(\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_D}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BM})$$

$$\text{b- } \frac{z+2+3i}{z-3-2i} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z+2+3i}{z-3-2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$  M appartient donc au cercle de diamètre  $[BD]$  privé des points B et D

## 2. Nombres complexes et application d'un plan

## ❖ Notions d'écriture complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$f$  est une application du plan qui transforme le point  $M(z)$  en  $M'$  d'affixe  $Z = f(z)$

i.e.  $Z$  est une fonction de  $z$

L'égalité  $Z = f(z)$  caractérise entièrement l'application du plan  $f$ . on appelle écriture complexe  $Z$ .

### Exemple

Soit  $F$  une application du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = z^2 + 2z$

L'écriture complexe de  $F$  est  $z' = z^2 + 2z$

Déterminons l'image du point  $A(1+2i)$  par  $F$  soit  $A' = F(A)$  alors

$$\begin{aligned}z_{A'} &= z_A^2 + 2z_A \\ &= (1 + 2i)^2 + 2(1+2i) \\ &= -1+8i\end{aligned}$$

Donc  $A' = F(A)$  est le point d'affixe  $-1+8i$

Déterminons les points ayant pour image le point  $B$  d'affixe  $-2$

On cherche les points  $M(z)$  tels que  $F(M) = B$

$$\text{On a } F(M) = B \Leftrightarrow z_A = z^2 + 2z$$

$$\Leftrightarrow -2 = z^2 + 2z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = -4 = (2i)^2$$

$$\text{Donc } z = \frac{-2-2i}{2} \text{ ou } z = \frac{-2+2i}{2}$$

$$= -1-i \quad \text{ou} \quad = -1+i$$

Alors les points ayant pour image B d'affixe -2 sont B (-1, -i) et B' (-1+i)

## a. Translation

### Rappel

Une application du plan qui transforme M en M' est une translation de vecteur  $\vec{u}$

$$\text{ssi } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Soit t une translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe b

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'

$$M' = t(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}}$$

$$z' - z = b$$

$$z' = z + b$$

### Propriété

Une application du plan est une translation de vecteur d'affixe b ssi son écriture complexe est du type  $z' = z + b$

### Exemple

1- L'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe  $1+2i$  est

$$z' = z + 1+2i$$

2- L'application du plan d'écriture complexe  $z' = z + i$  est une translation de vecteur d'affixe i

## b. Homothétie

## Rappel

Une application du plan qui transforme  $M$  en  $M'$  est une homothétie de centre  $\Omega$

et de rapport  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) ssi  $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

Soit  $h$  une homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et de rapport  $k$

Soit  $M$  d'affixe  $z$  et  $M'$  d'affixe  $z'$

$$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = k z_{\overrightarrow{\Omega M}}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_{\Omega} = k (z_M - z_{\Omega})$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k (z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' = kz + \omega(1-k)$$

## Propriété

L'écriture complexe de l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et de rapport  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )

est  $z' - \omega = k(z - \omega)$  ou encore  $z' = kz + \omega(1-k)$

Réciproquement

Toute application du plan dont l'écriture complexe est de la forme  $z' = kz + b$

avec  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$  est une homothétie de rapport  $k$  et de centre  $\Omega$

d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-k}$

## Exemples

L'écriture complexe de l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $1+i$  et de rapport  $2$  est

$$Z' - 1 - i = 2(Z - (1+i))$$

$$Z' = 2Z - 2 - 2i + 1 + i \quad \text{i.e.} \quad z' = 2z - 1 - i$$

L'écriture du plan d'écriture complexe  $z' = -3z+3-2i$  est une homothétie de rapport  $k= -3$  et de centre d'affixe  $\omega = \frac{3-2i}{1+3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$

## C. rotation

### Rappel

Une rotation du plan qui transforme M en M' est une rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$

$$\text{ssi} \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases}$$

Soit r une rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et d'angle  $\theta$ . Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'

$$M' =_r (M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \Omega M' = \Omega M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z' - \omega) = (z - \omega) \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

Donc  $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$

Ou encore

$$Z' = e^{i\theta} z + \omega(1 - e^{i\theta})$$

Propriété

L'écriture complexe de la rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et d'angle  $\theta$  est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Réciproquement

Tout application du plan donc l'écriture complexe est de la forme  $z' = a z + b$  avec  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  tel que  $|a|=1$

Et  $b \in \mathbb{C}$  est une rotation d'angle  $\theta = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$

### Exemple

L'écriture complexe de la rotation  $r$  de centre d'affixe  $1+i$  et l'angle  $\frac{-\pi}{2}$  est :

$$Z' - (1+i) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - (1+i))$$

$$\text{Or } e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ = -i$$

$$\text{Donc } z' = -i(z - 1 - i) + 1 + i \quad \text{i.e. } z' = -iz + i - 1 + 1 + i$$

$$\text{I.e. } z' = -iz + 2i$$

L'application du plan d'écriture complexe

$Z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$  est une rotation car son écriture complexe est de type

$$Z' = az + b \text{ avec } a = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \text{ et } b=0 \quad \text{puis } |a| = 1$$

$\theta = \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$  et son centre est 0 origine du repère

### d. Similitude directe

## Définition

Soit  $\Omega$  un point  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $(k \in \mathbb{R})$

On appelle similitude directe de centre  $\Omega$  d'angle  $\theta$  et de rapport  $k$ , l'application du plan qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta. \end{cases}$$

## Remarque

R1. Toute rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $\Omega$  est similaire directement de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$

R2. Toute homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  est une similitude directe de centre  $\Omega$ , de rapport  $|k|=1$  et d'angle

$$\begin{cases} 0 \text{ si } k > 0 \\ \pi \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

R3. La composée d'une rotation de centre  $\Omega$  d'angle  $\theta$  par une homothétie de centre  $\Omega$  de rapport  $|k|$  est une similitude directe de centre  $\Omega$  et d'angle

$$\begin{cases} \theta \text{ si } k > 0 \\ \pi + \theta \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

Cette composée est une composée commutative c'est-à-dire  $ro \circ h = h \circ ro$

Exemple

$$\text{Soit } r_1 = R(\Omega, \frac{\pi}{3}) \quad h_1 = H(\Omega, -2)$$

$$r_2 = R(\Omega, \frac{5\pi}{3}) \quad h_2 = H(\Omega, 4)$$

$$r_2 \circ h_1 = S(\Omega, | -2 | \frac{\pi}{3}) \quad S(\Omega, 2, \frac{\pi}{3} + \pi)$$

$$S(\Omega, 2, \frac{4\pi}{3})$$

❖ Ecriture complexe d'une similitude directe

Soit S une similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  d'angle  $\theta$  et de rapport k positif

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'

$$M' = S(M) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\Omega M, \Omega M') = \theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (z' - \omega) = k(z - \omega) \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = k e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = k e^{i\theta} (z - \omega)$$

### Propriété

L'écriture complexe de la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  d'angle  $\theta$  et de rapport k.  $k \in \mathbb{R}$  est

$$z' - \omega = k e^{i\theta} (z - \omega)$$

Ou encore

$$z' = z k e^{i\theta} + \omega (1 - k e^{i\theta})$$

Réciproquement

Toute application du plan dont l'écriture complexe est de la forme  $z' = az + b$  avec  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$  est une similitude directe de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\theta = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe

$$\omega = \frac{b}{1-a}$$

### Exemples

L'écriture complexe de la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe de la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $2+i$  de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{-\pi}{3}$

$$z' - (2+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{-\pi}{3}} (z - (2+i))$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sqrt{2} e^{i\frac{-\pi}{3}} &= \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z' &= (1-i)(Z - (2+i)) + 2+i \\ &= (1-i)z - (1-i)(2+i) + 2+i \end{aligned}$$

$$Z' = (1-i)z - 1 + 2i$$

### Exemple

L'application du plan d'écriture complexe  $z' = 2iz + 1 + i$  est une similitude directe de rapport  $k = |2i| = 2$  et d'angle  $\theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  et de centre  $\Omega$

$$\text{d'affixe } \frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{4} = \frac{-1+3i}{5}$$

Notons  $f$  cette similitude directe. Soit  $A, B, C, D$  des points du plan tel que

$$f(A) = C \text{ et } f(B) = D$$

$$\text{On a } f(A) = C \iff z_C = 2i z_A + 1 + i; \quad (1)$$

$$. F(B) = D \quad \Leftrightarrow z_D = 2i z_B + 1 + i; \quad (2)$$

$$(1)-(2) \quad z_C - z_D = 2i(z_A - z_B)$$

$$\frac{z_C - z_D}{z_A - z_B} = 2i$$

$$\frac{(z_C - z_D)}{(z_A - z_B)} = 2 \text{ et } \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$CD = 2 AB \text{ et } \text{mes}(\Omega M, \Omega M') = \frac{\pi}{2}$$

## Propriété

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}_+^*$

Une application du plan qui transforme  $M$  en  $M'$  et  $N$  en  $N'$  est une similitude directe d'angle  $\theta$  et de rapport  $k$  ssi  $M'N' = k MN$  et

$$\text{mes}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta$$

Conséquence

Toute homothétie de rapport  $k$

- Multiplie les distances par  $k$ , les aires par  $k^2$  et les volumes par  $k^3$
- Conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le contact .....

## Propriété

Toute similitude directe (S) de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et de rapport  $k$  ( $k > 0$ ) est la composée commutative d'une rotation  $r$  de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et d'une homothétie  $h$  de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$ . on écrit alors  $S = roh = hor$

Cette égalité est appelée forme réduite ou forme canonique de la similitude

(S)

## Exemple

La réduction de la similitude directe  $f$  défini à l'exemple précédent est  $f = \text{roh}$  = hor avec  $r$  (rotation de centre  $\Omega$ , d'affixe  $\frac{-1+3i}{5}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

;  $h$  (homothétie de centre  $\Omega$ , d'affixe  $\frac{-1+3i}{5}$  et de rapport 2

## Exemples

I- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct,  $f$  est

l'application du plan d'écriture complexe  $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$

A et B sont des points d'affixe respective  $z_A = 3 e^{i\frac{\pi}{6}}$   $z_B = 3 e^{i\frac{-\pi}{6}}$

C =  $f(A)$  et D =  $f(B)$

- 1- Justifie la nature de  $f$  et donne ses éléments caractéristiques
- 2- Ecrire  $z_C$  et  $z_D$  sous forme exponentielle puis placé les points A B C et D sur une figure
- 3- Calculer  $\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right)$  et en déduire la nature des triangles(BDC) et (ABC)

II- Dans la plan complexe muni d'un repère orthonormé on donne les points A B C et P d'affixe respective  $z_A = \frac{1}{2} + 6i$ ;  $z_P = \frac{3}{2} - 6i$ ;  $z_C = -$

$$3 - \frac{1}{4}i;$$

$z_P = 3 + 2i$  et le vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$

- 1- Soit Q l'image de B par la translation de vecteur  $\vec{w}$ . Déterminer l'affixe de Q
- 2- Soit R l'image de P par l'homothétie de centre C et de rapport  $-\frac{1}{3}$ . Déterminer l'affixe de R
- 3- Soit S l'image de P par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Déterminer l'affixe de S

- 4- A) placez les points P, Q, R et S dans un repère  
 B) démontrons que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme  
 C) calculer  $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$  et en déduire la nature exacte de PQRS  
 D) justifier que les points P Q R S appartiennent à un même cercle ( $\Gamma$ )  
 donc on précisera le rayon et l'affixe du centre

III) on considère des plans complexes munis d'un repère orthonormé direct. Le polynôme complexe définie dans  $\mathbb{C}$  par

$$p(z) = z^3 - 3(4-i)z^2 + 9(5-4i)z + 135i$$

1-A- démontrer que P admet une racine imaginaire pur  $z_0$  que l'on déterminera

B- déterminer les nombres complexes a et b tel que

$$P(z) = (z + 3i)(z^2 + az + b)$$

c- résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  on notera  $z_0$  la racine imaginaire pur  
 $z_1$  et  $z_2$  sont les autres racines telles que les autres partie imaginaire  $I_m(z_1) = 0$ .

On considère les points A, B et C d'affixe respectif  $z_0, z_1$  et  $z_2$

A- Placez les points A B et C dans le repère et justifier la nature du triangle ABC

Soit R la rotation qui transforme A en B et c en C

. i. Précisez les éléments caractéristiques de z

.ii. Déterminez son écriture complexe

B- Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en C

.i . Déterminer son angle et son rapport

.ii. Déterminer son écriture complexe

C- Soit  $S'$  la similitude directe qui transforme A en B et B en C

.i. déterminer son écriture complexe

.ii. En déduire l'affixe de son centre

.iii. Déterminer son rapport et son angle

D- Soit  $f = S'OS$

a- Ecrire l'écriture complexe  $f$

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

## Résolution

a- La solution  $z_0 = -3i$

b- D'où  $P(z) = (z+3i)(z^2 - 12z + 45)$

c- Résolvons l'équation  $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z+3i)(z^2 - 12z + 45) = 0$$

$$P(z) = 0 \text{ sont alors } z = -3i, z_2 = 6 + 3i, z_3 = 6 - 3i$$

A- Plaçons le point A, B et C dans le repère et justifions la nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{6+3i - 6+3i}{3i - 6+3i} = -i$$

On a donc un triangle rectangle isolé en C

Précisons les éléments caractéristiques

$$R(A) = B \quad \text{on a } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i \frac{-\pi}{2}} \Rightarrow \text{mes}(CA, CB) = \frac{-\pi}{2}$$

$$R(C) = C$$

R est donc la rotation de centre C et de d'angle  $\frac{-\pi}{2}$

Ecrivons l'écriture complexe

$$Z' - z_C = e^{i\frac{-\pi}{2}}(z - z_C)$$

$$Z' = -iz + 3i + 9$$

Deuxième méthode

L'écriture complexe de R est de la forme  $z' = az + b$

$$R(C) = C \Rightarrow z_C = az_C + b$$

$$6 - 3i = a(6 - 3i) + b$$

$$R(A) = B \Rightarrow z_C = az_A + b$$

$$6 + 3i = a(-3i) + b$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} 6 - 3i = a(6 - 3i) + b & (1) \\ 6 + 3i = a(-3i) + b & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 6a = -6i$$

$$\Rightarrow a = -i$$

$$\text{Dans (2) } -i(-3i) + b = 6 + 3i$$

$$-3 + b = 6 + 3i$$

$$.b = 9 + 3i$$

L'écriture complexe de R est donc  $z' = -iz + 9 + 3i$

(B) soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en C

$$S(B) = C$$

Déterminons l'angle et le rayon de S

Posons  $k$  son rapport et  $\theta$  son angle alors on a :

$$S(B) = C \Rightarrow \begin{cases} AC = k AB \\ \text{mes}(AB, AC) = \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{AC}{AB} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \\ \text{mes}(AB, AC) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta \end{cases}$$

$$\text{Donc } k = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$= \frac{6-3i+3i}{6+3i+3i}$$

$$= \left(\frac{1}{1+i}\right)$$

$$K = \left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1-i}{2}\right)$$

$$= \arg(1-i) - \arg 2$$

$$= \frac{-\pi}{4} + 0 \text{ or } \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \text{ et } \arg 2 = 0 + 2k\pi$$

Ecriture complexe de  $S$

Elle est de la forme

$$Z' - z_A = k e^{i\frac{-\pi}{4}} (Z - z_A)$$

$$Z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)Z + 3i \left(\frac{1-i}{2}\right) - 3i$$

$$Z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)Z + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

(D) soit  $S'$  la similitude directe

$$S' = B \text{ et } S'(B) = C$$

Déterminons l'écriture complexe de  $S'$

Cette écriture est de la forme  $z' = az + b$  avec  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$

$$S'(A) = B \Rightarrow z_B = a z_A + b$$

$$\Rightarrow 6 + 3i = -3ia + b$$

$$\Rightarrow -3ia + b = 6 + 3i \quad (1)$$

$$S'(B) = C \Rightarrow z_C = a z_B + b$$

$$6 - 3i = a(b + 3i) + b$$

$$.a(6 + 3i) + b = 6 - 3i \quad (2)$$

On obtien le systeme

$$\begin{cases} -3ia + b = 6 + 3i \\ a(6 + 3i) + b = 6 - 3i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3ia - b = -6 - 3i \\ a(6 + 3i) + b = 6 - 3i \end{cases} \quad (-1)$$

$$.a = \frac{-6i}{6+6i} \Rightarrow a = \frac{-1-i}{2}$$

Dans (2) on a  $-3ia + b = 6 + 3i$

$$.b = 6 + 3i + 3ia$$

$$= 6 + 3i + 3i \left( \frac{-1-i}{2} \right)$$

$$.b = \frac{15}{2} + \frac{3i}{2}$$

L'écriture complexe de  $S'$  est

$$Z' = \left( \frac{-1-i}{2} \right) z + \frac{15}{2} + \frac{3i}{2}$$

(e) écriture complexe de  $f = S'OS$

$$S: Z' = \left( \frac{+1-i}{2} \right) z + \frac{3}{2} - \frac{3i}{2}$$

$$S: Z' = \left(\frac{-1-i}{2}\right)z + \frac{15}{2} + \frac{3i}{2}$$

L'écriture complexe de f est

$$\begin{aligned} Z' &= \left(\frac{-1-i}{2}\right) \left(\left(\frac{-1-i}{2}\right)z + \frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right) + \frac{15}{2} + \frac{3i}{2} \\ &= \left(\frac{-1-i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right)z + \left(\frac{-1-i}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right) + \frac{15}{2} + \frac{3i}{2} \\ Z' &= \frac{-1}{2}z + \frac{9}{2} + \frac{3i}{2} \end{aligned}$$

GPM Tle D

# FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

NB : tous les devoirs de maison sont tirés de CIAM TLE D édition n°13

## Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

Connaitre la définition, les propriétés et les limites classiques de la fonction logarithme népérien ;

Savoir résoudre les équations ou inéquations faisant appel aux fonctions logarithme népérien ;

Justifier la dérivabilité de  $\ln U$  et calculer sa dérivée ;

Etudier et représenter la fonction  $\ln U$  et certaines autres fonctions.

### Activité :

1. Montrer que la fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$  admet des primitives sur  $]0; +\infty[$ .

2. Combien de ces primitives s'annulent en 1 ?

### Solution:

1. La fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  donc elle admet des primitives sur  $]0; +\infty[$ .

2. Une seule de ces primitives s'annule en 1 car il existe une seule primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui prend la valeur  $y_0 = 0$  en  $x_0 = 1$ .

## I-Définition et propriétés

### 1. Définition

On appelle fonction **logarithme népérien** la primitive sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  notée **ln** et prenant la valeur 0 en 1.

### Conséquence :

- Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x \mapsto \ln x$   
 $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$  où  $e$  est la base du logarithme népérien.

### Remarque

pour tout  $x \in ]0; 1[$ ;  $\ln x < 0$  et pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ;  $\ln x > 0$ .

### 2. Propriétés

P<sub>1</sub>) *Domaine de définition* : Soit  $u$  une fonction définie sur son domaine

$\ln(u(x))$  existe si et seulement si  $u(x) > 0$

$\ln|u(x)|$  existe si et seulement si  $u(x) \neq 0$

P<sub>2</sub>) Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et pour tout nombre rationnel  $r$ , on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad ; \quad \ln(a^r) = r \ln a$$
$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad \ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b \quad ; \quad \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b \quad ; \quad \ln e^a = a = e^{\ln a}$$

### Exercice d'application

1) Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = \ln(x+4)$  b)  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$  c)  $h(x) = \ln(|x^2 - 9|)$  d)  $k(x) = \frac{-3x+2}{x+2} + \ln(x+1)$ .

2) Ecris plus simplement :  $A = 2\ln 3 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 9$  ;  $B = \ln(0,01) + \ln(100) - \ln(0,0001)$  ;

$$C = 3\ln 2 - \ln 16 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ln 32$$

3) Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $2^n \geq 10^9$

## II- Equations et inéquations comportant $\ln$

### 1. Méthode

pour résoudre les équations (resp les inéquations) comportant  $\ln$ , on procède comme suite :

- On détermine l'ensemble de validité (contrainte sur l'inconnue)
- On transforme l'équation (respectivement l'inéquation) sous la forme  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$  (resp  $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$ )
- On résout l'équation (resp l'inéquation) et on détermine l'ensemble solution en tenant compte de l'ensemble de validité.

**NB :** On pourra faire un changement de variable dans certains cas en posant par exemple  $X = \ln x$

### 2. Applique toi

i) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

(a)  $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) = 3\ln 2$

(b)  $\ln(x - 3)(x - 1) = 3\ln 2$

(c)  $\ln(2x^2 + 5x - 2) \leq 0$

(d)  $(\ln(x + 1))^2 - \ln(x + 1) - 6 > 0$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  :

$$(S) : \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

**Devoir : 4, 8, 10 et 11 p 102 CIAM**

## III- Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$

### 1. limites de références

Les limites classiques ou limites de références sont admises.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Pour tout nombre réel  $\alpha$  strictement positif, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

### Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \ln x)$  ; 2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$  ; 3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 2\ln x - 3)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \frac{1}{x}$

### 2. Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$

$$f(x) = \ln x$$

**Domaine de définition :**  $D_f = ]0 ; +\infty[$

**Limites :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

### Dérivée et sens de variations

$\ln$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ . Donc la fonction  $\ln$  est strictement croissante.

### Tableau de variation

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

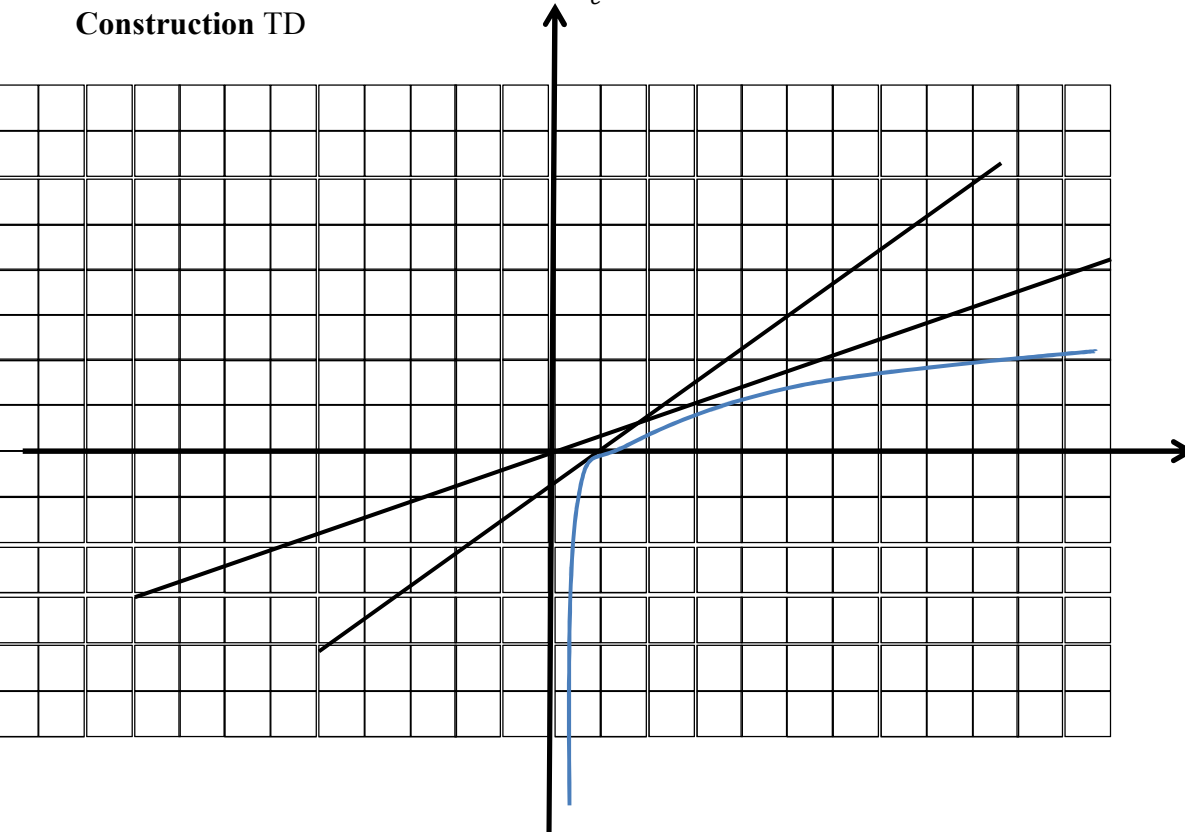
**Branches infinies :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc la courbe admet une branche parabolique de direction (OI) et la droite  $x=0$  est une asymptote verticale de la courbe de  $f$ .

**Point d'intersection avec les axes :**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$   
 Courbe représentative : On a  $f(e) = \ln e = 1$  et  $e \approx 2,72$

**Equations des tangentes aux points  $I(1; 0)$  et  $A(e; 1)$**

$(T_I) : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$        $(T_A) : y = \ln'(e)(x-e) + \ln e$   
 $y = x - 1$        $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$   
 $\quad \quad \quad = \frac{1}{e}x$

**Construction TD**



## IV- Dérivée et primitive

### 1. Dérivée

#### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $\ln u$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

**NB :**  $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

#### Exercice d'application

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = \ln x + \ln(x - 4)$  ; b)  $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$  ; c)  $h(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$  ; d)  $k(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$

## 2. Primitive

### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $\frac{u'}{u}$  admet pour primitive sur  $I$  la fonction  $\ln|u| + k$ ,  $k$  étant un nombre réel.

### Exercice d'application

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ; b)  $g(x) = \frac{1}{2x-1}$  ; c)  $h(x) = \frac{\cos x}{-\sin x}$  d)  $k(x) = \frac{x+3}{x+2}$  ; e)  $k(x) = \frac{2x+1}{x^2x+1}$

**Devoir : 13, 17, 22 et 26 p 103**

## V-fonctions comportant $\ln$

### TRAVAUX DIRIGES N°32 page 104

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$

1. Etudier les variations de  $f$ .

2. On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Démontrer que  $(C)$  admet un centre de symétrie dont-on précisera les coordonnées.

3. Construire  $(C)$ .

### Solution

1. Etudions les variations de  $f$ .

- **Domaine de définition de  $f$**   
 $f$  existe ssi  $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- **Limites aux bornes**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{1-x} + \frac{\ln|1-x|}{1-x} \right) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1-x} + \frac{\ln|1-x|}{1-x} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = +\infty$$

- **Dérivée et sens de variations**

$$f'(x) = \left( \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} \right)' = \frac{\left(1 + \frac{-1}{1-x}\right)(1-x) - (-1)(x + \ln|1-x|)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x-1+(x+\ln|1-x|)}{(1-x)^2} = \frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$$

$(1-x)^2 > 0$  donc le signe de  $f'$  dépend de celui de  $\ln|1-x|$

Or  $\ln|1-x| \geq 0 \Rightarrow \ln|1-x| \geq \ln 1 \Rightarrow |1-x| \geq 1$

$$\begin{cases} 1-x \geq 1 \\ 1-x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-1$	0	$+\infty$	$-2$	$-1$

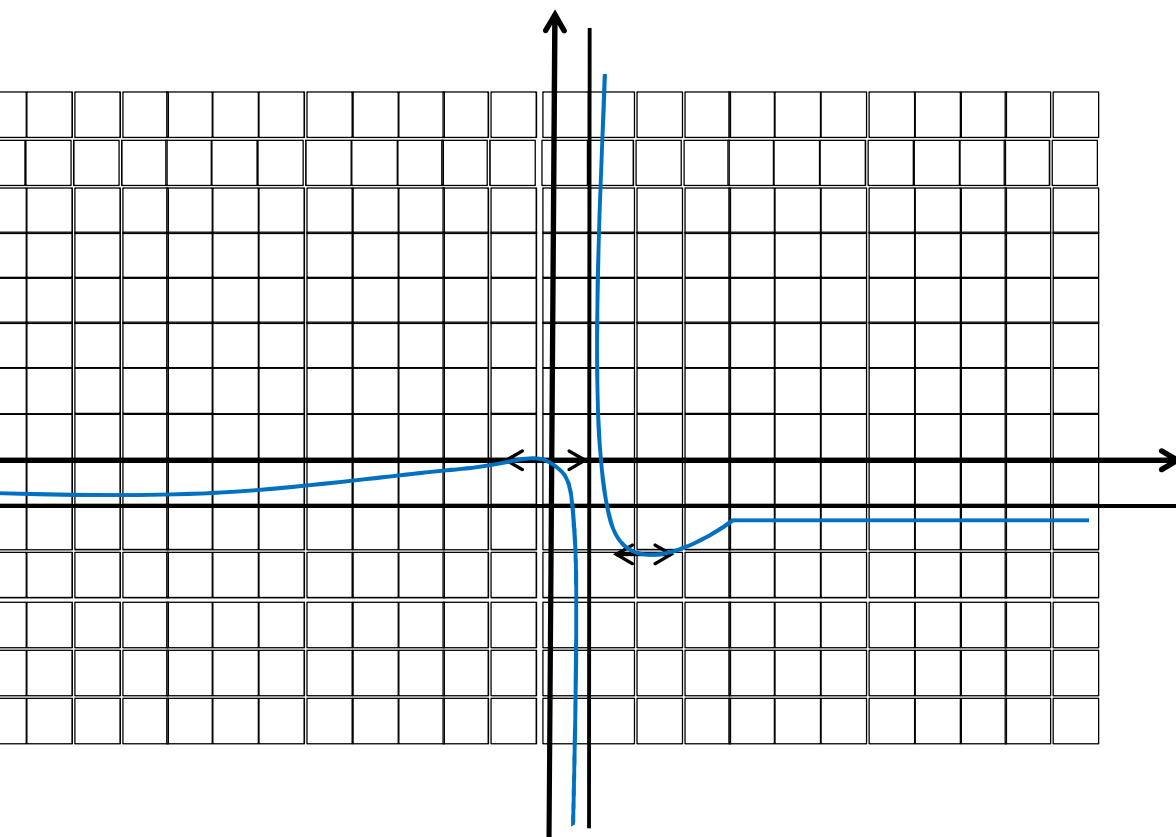
2. Démontrons que (C) admet un centre de symétrie dont-on précisera les coordonnées.  
 Les droites d'équations  $x=1$  et  $y=-1$  sont asymptotes à (C) et leur intersection est le point  $A(1; -1)$ .  
 Vérifions que A est centre de symétrie.

Pour tout nombre réel  $x$  du Df,  $1-x \in Df$ ,  $1+x \in Df$  et

$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{1-x+\ln|x|}{x} + \frac{1+x+\ln|x|}{-x} = \frac{1-x+\ln|x|-1-x-\ln|x|}{x} = \frac{-2x}{x} = -2 = 2(-1)$$

Donc le point  $A(1; -1)$  est centre de symétrie de (C).

3. construction.



Devoir : 34 , 35 et 36 p 104(on pourra traiter comme travaux dirigés)

## VI-Logarithme de base a

### 1. Définition et propriétés

Définition :

Soit  $a \in ]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . On appelle **logarithme de base a** la fonction notée  $\log_a$  et définit

par :  $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

**Remarque :**

**R1) Si  $a = e$ , alors  $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$**

**R2) Si  $a = 10$ , alors  $\log_{10} = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log x$  (logarithme décimal)**

**Propriété :**

Le logarithme de base  $a$  possède les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien.

Pour tout réel  $a$  strictement positif,  $\forall x \in ]0; +\infty[$  et  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

**P1.  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$       P2.  $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$       P3.  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$**

**P4.  $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$       P5.  $\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \text{ si } a \in ]1; +\infty[ \\ x > y \text{ si } a \in ]0; 1[ \end{cases}$**

**Exercice d'application :**

1. Ecris plus simplement :  $A = 2\log_5(3) - \log_5(7) + \frac{1}{2}\log_5(9)$  et  $B = \log_3(0,003) + \log_3(300)$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

(a)  $\log_2(2x - 5) = 0$

(b)  $\log_7(3x - 2) + \log_7(x + 3) = \log_7(2x + 1)$

(c)  $\log_4(x - 2) \leq 3$

(d)  $(\log_2(x + 1))^2 - \log_2(x + 1) - 6 > 0$

## 2. Etude de la fonction $x \mapsto \log_a(x)$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$

$\log_a : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Limites**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} -\infty & \text{si } a \in ]1; +\infty[ \\ +\infty & \text{si } a \in ]0; 1[ \end{cases}$$

$x \rightarrow 0^+$                        $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in ]1; +\infty[ \\ -\infty & \text{si } a \in ]0; 1[ \end{cases}$$

$x \rightarrow +\infty$                        $x \rightarrow +\infty$

**Dérivée**

$\log_a(x)$  est dérivable sur son domaine de définition et  $(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

le signe de  $(\log_a(x))'$  dépend de  $\ln a$ .

si  $a \in ]0; 1[$ ,  $\ln a < 0 \Rightarrow (\log_a(x))' < 0$  donc  $\log_a(x)$  est décroissante.

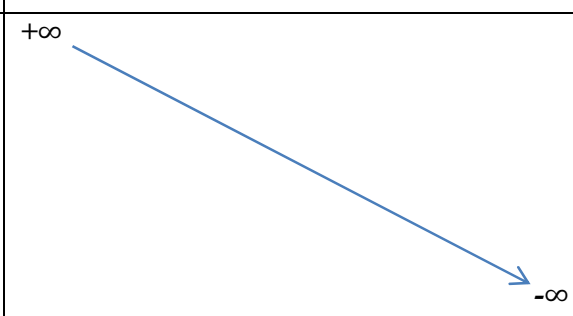
si  $a \in ]1; +\infty[$ ,  $\ln a > 0 \Rightarrow (\log_a(x))' > 0$  donc  $\log_a(x)$  est croissante

**Tableau de variation**

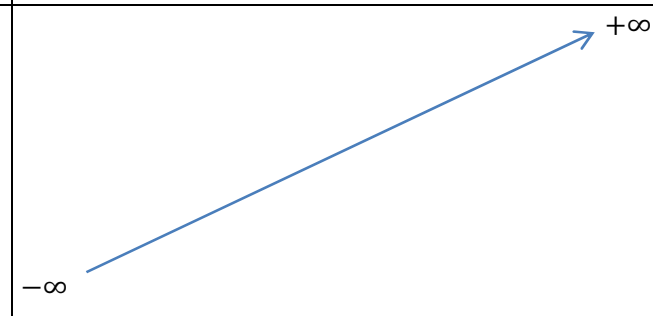
Cas  $a \in ]0; 1[$

Cas  $a \in ]1; +\infty[$

$x$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$



$x$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



**TD** Construire les courbes des fonctions  $\log_{\frac{1}{2}}(x)$  et  $\log_2(x)$

Classe : Tle D	Séquence :	Date :	Durée :
<b>CHAP7 : FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES ET PUISSANCES</b>		Objectif pédagogique : <b>étudier et représenter une fonction exponentielles népériennes et puissances</b>	

**LECON 1 : FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES**

**1.1) Activité**

Soit la fonction f définie par  $f(x) = e^x$  (exponentielle x) tel que  $e^1 = 2,718$

1) En utilisant la calculatrice, Compléter le tableau de valeurs de la f ci-dessous a 0,1 près

x	-5	-2	-1	0	1	2
$f(x) = e^x$						

2) ue

peut-on dire du signe de f(x) pour  $x < 0$  puis pour  $x > 0$  ? en déduire le signe de f(x)

3) A partir du tableau de valeur ci-dessus Construire une partie de la courbe de f ci-dessus sur  $[-5; 2]$  ainsi que la tangente en  $x=1$

4) En déduire le signe de la dérivée f' sur  $[-5; 2]$  puis dresser le tableau de variation de f sur  $[-5; 2]$

5) Etablir le tableau de signe de f

**1.2) Définition et propriétés**

**a) Définition**

La fonction logarithme népérien est continu et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et l'image de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par la fonction ln est égale a  $\mathbb{R}$ , donc la fonction ln réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$

**La fonction exponentielle** note **exp** est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Par conséquence, la fonction **exp** est définie sur  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et **exp(x)>0**

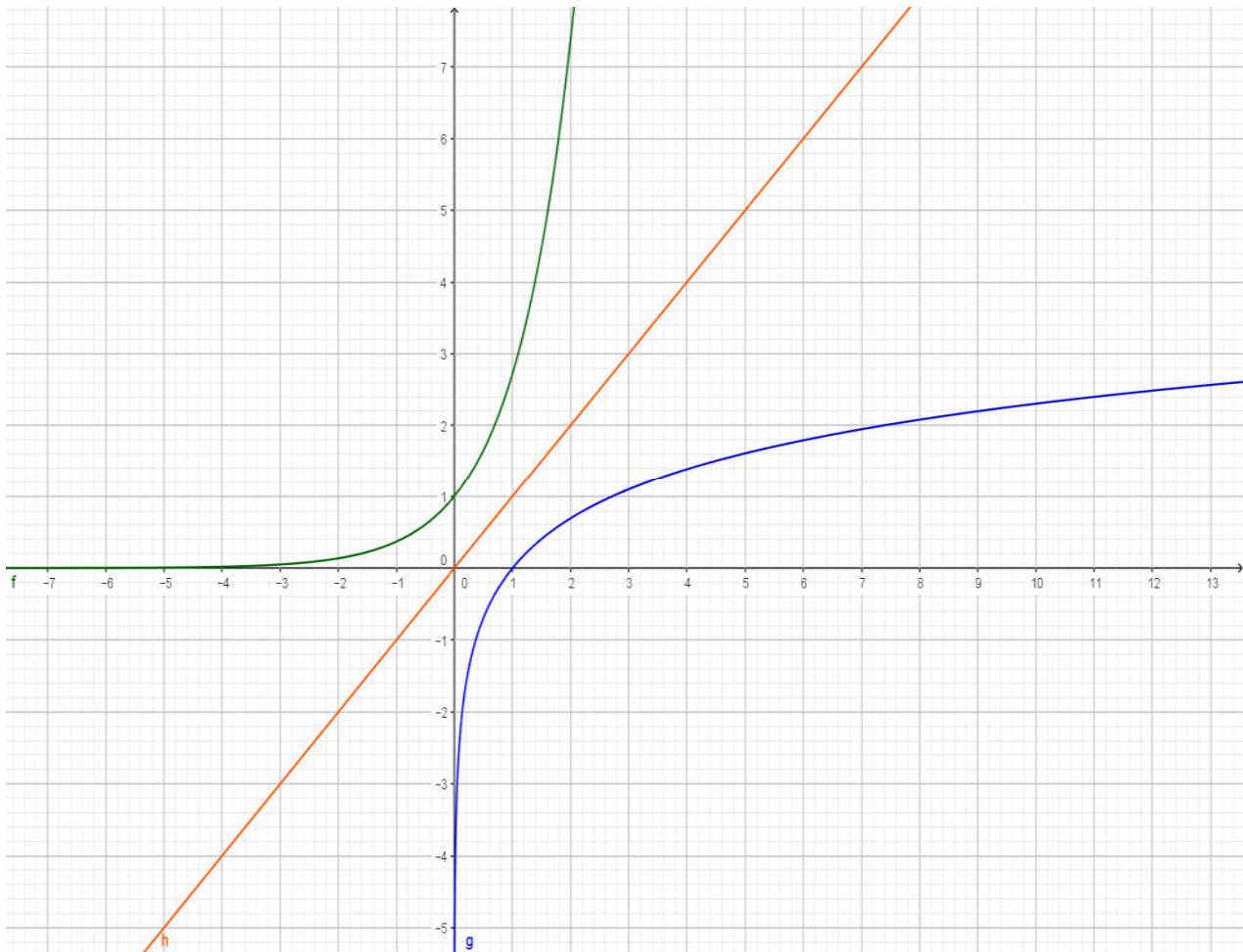
**Notations** :  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on pose  $e^x = \exp(x)$ .

**Proposition** :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln e^x = x \Rightarrow e^x = (\ln)^{-1}(x) \Leftrightarrow e^x = \exp(x)$ . On convient d'étendre cette égalité à tout nombre réel x

**Conséquence immédiates**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*_+, y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- $\forall y \in \mathbb{R}^*_+; e^{\ln(y)} = y$
- de  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$ , on a:  $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions **ln** et **exp** sont symétrique par rapport a la première bissectrice. (Tracer la courbe des deux fonctions dans le

même repère)



**b) Propriétés fondamentale**

- Pour tous nombres réels a et b, on a :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$

**Démonstration**

Soient a et b deux nombres réels. Posons  $A = e^a$  et  $B = e^b$

$$A = e^x \Rightarrow \ln A = a \text{ et } B = e^b \Rightarrow \ln B = b \text{ alors } a + b = \ln A + \ln B = \ln(A \times B)$$

$$\ln(AB) = a + b \text{ donc } A \times B = e^{a+b} \text{ soit } e^a \times e^b = e^{a+b}$$

**c) Propriétés**

**P1)**  $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

**P2)**  $\forall a \in \mathbb{R}, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

**P3)**  $e^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times e^{a_3} \times \dots \times e^{a_n}$

**P4)**  $e^{pa} = (e^a)^p$

**P5)**  $e^a = e^b \Rightarrow a = b$

**P6)**  $e^a \leq e^b \Rightarrow a \leq b$

**d) Exercice d'application**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équation et inéquations suivantes :

- a)  $e^{-3x+1} = 1$
- b)  $e^{2x} - 3e^x = -2$
- c)  $e^{-x} - 12e^x - 1 = 0$
- d)  $2e^{2x+1} - 3e^{x+1} - 4e^x \geq 0$
- e)  $\frac{2e^{x+1}}{e^{x-2}} \leq 0$
- f) resoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systemes suivants

$$\begin{cases} 2e^x - 3e^y = -7 \\ -e^x + 2e^y = +5 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) - \ln(2) = 0 \\ \frac{e^x}{e^5} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$

### 1.3) Etude de la fonction exponentielle

#### a) Définition

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $(\ln)'(x) \neq 0$  donc la fonction  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(\ln \circ \exp)(x) = x \Rightarrow (\ln \circ \exp)'(x) = 1$ , on sait que  $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$  donc on a :  $(\exp)'(x) \times (\ln)'(\exp) = 1 \Rightarrow (\exp)'(x) \times \frac{1}{\exp(x)} = 1$  donc  $(\exp)'(x) = \exp(x)$ .

Donc la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$  ;

$$(\exp)'(x) = \exp(x)$$

#### b) Conséquence immédiate

La fonction exponentielle est dérivable en « 0 » et on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = (\exp)'(0) = 1$

Donc on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

#### c) Les limites

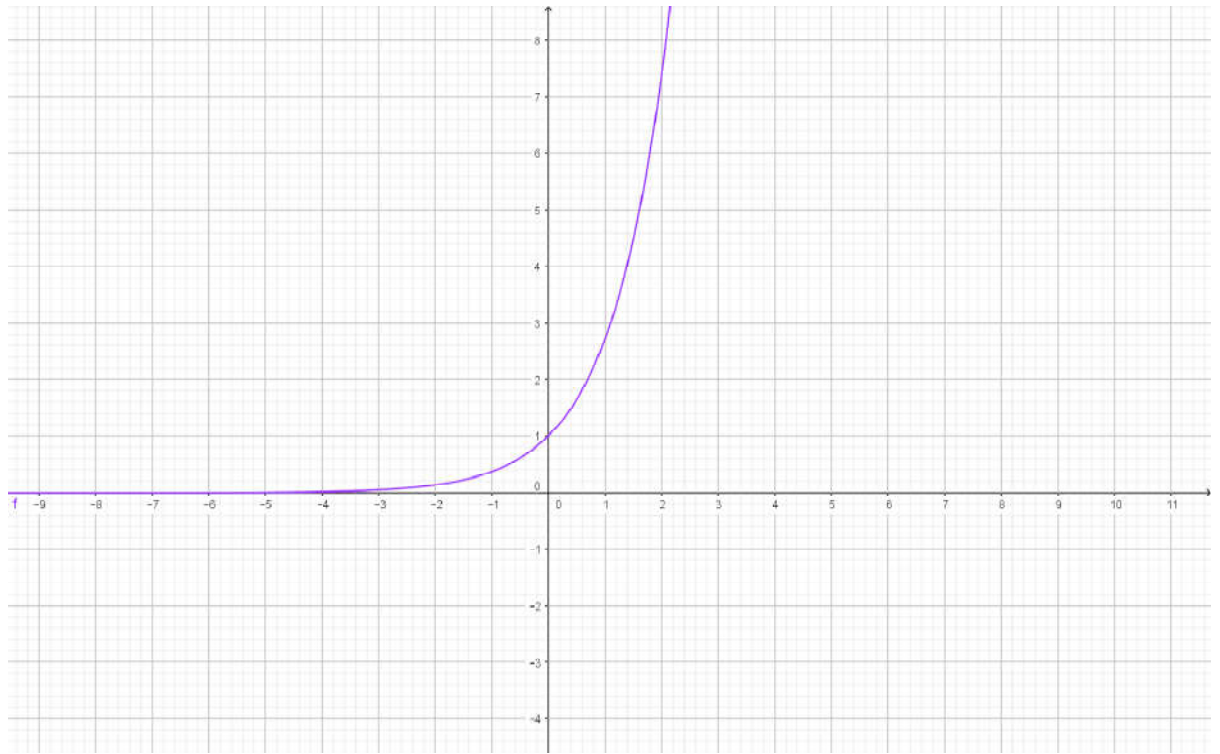
De  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ car on a : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} f^{-1}(x) = a$$

#### d) Tableau de variation

la fonction  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$(\exp)'(x)$	$+$	$+$	$+$	
$\text{Exp}(x)$	$0$	$1$	$e$	$+\infty$



e) Exercice : calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x$

**Solution :**

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times e^{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - \frac{\ln x}{x})} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc la courbe de la fonction exponentielle admet en  $+\infty$  **une branche parabolique** de direction celle de (OJ).

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} ; \quad \text{Posons } X = -x \text{ alors}$$

$$\begin{cases} X \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases} \text{ on obtien ; } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

f) Exercice d'application

1- Calculer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$

2- Calculer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  des fonctions suivantes : a)  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} - x$  ; b)  $g(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x + 1}$

### 1.4) Fonction $e^{u(x)}$

a) Dérivée de  $e^{u(x)}$

Si  $u(x)$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $K$ , alors  $e^{u(x)}$  est dérivable sur  $K$  et on a :  $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$

**Exemple :** calculer la dérivée de la fonction  $f: x \rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Posons  $u: x \rightarrow u(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = e^{u(x)}$ ;  $u(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

**b) Primitive de  $u'(x)e^{u(x)}$**

Si  $u(x)$  est une fonction dérivable sur  $K$ , alors une primitive de  $u'e^u$  sur  $K$  est la fonction  $e^{u(x)} + K$  avec  $K \in \mathbb{R}^*$

**Exemple :**  $f: x \rightarrow f(x) = xe^{-x^2+1}$ . Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

Posons  $u(x) = -x^2 + 1$ ;  $u'(x) = -2x \rightarrow x = -\frac{1}{2}u'(x)$ , la fonction  $f$  est sous la forme

$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ , alors la fonction  $F: x \rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$

**c) Exercice d'application**

1- Calculer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 1 - e^x)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + e^{(1-\frac{1}{x})}$  ; c)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^x}{3 - e^x}$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x+1}$  ; e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \ln(1 + e^x)$

2- Soit :  $f(x) = 1 + \ln(1 + e^x)$ ,

a) Montrer que  $f(x) = x + 1 + \ln(1 + e^{-x})$

b) Justifier que la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $+\infty$

c) Calculer  $f'(x)$  et donner son sens de variation

3- Déterminer les primitives des fonctions suivantes :  $f(x) = xe^{x^2-1}$  ;  $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  ;  $h(x) = (1 +$

$\cos x)e^{x + \sin x}$  ;  $k(x) = 3x - \frac{1}{1+x} + e^x$

4- Etudier et représenter la fonction  $f(x) = (x - 1)e^x$

**LECON 2 : FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE A, FONCTIONS PUISSANCES**

**I) FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE A**

**a) Définition**

Soit  $a$  un nombre réel positif et différent de 1. la fonction  $\begin{cases} \exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow a^x = e^{x \cdot \ln a} \end{cases}$  est appelée **fonction exponentielle de base a**

**b) Etude de la fonction exponentielle de base a**

$f(x) = e^x$  est le fonction exponentielle de base a , on a  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

**i) Domain de définition**

$D_f = \mathbb{R}$  ;

**ii) Limites aux bornes de  $D_f$**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in ]1; +\infty[ \\ +\infty & \text{si } a \in ]0; 1[ \end{cases} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in ]1; +\infty[ \\ 0 & \text{si } a \in ]0; 1[ \end{cases}$$

**iii) sens de variation**

f est dérivable sur IR et  $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \ln a \times e^{x \cdot \ln a}$

- si  $a \in ]1; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  donc f est strictement croissante.
- Si  $a \in ]0; 1[$ ,  $f'(x) < 0$  donc f est strictement décroissante

**iv) tableau de variations**

si  $a \in ]1; +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

si  $a \in ]0; 1[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

**v) branche infinies**

pour  $a \in ]1; +\infty[$

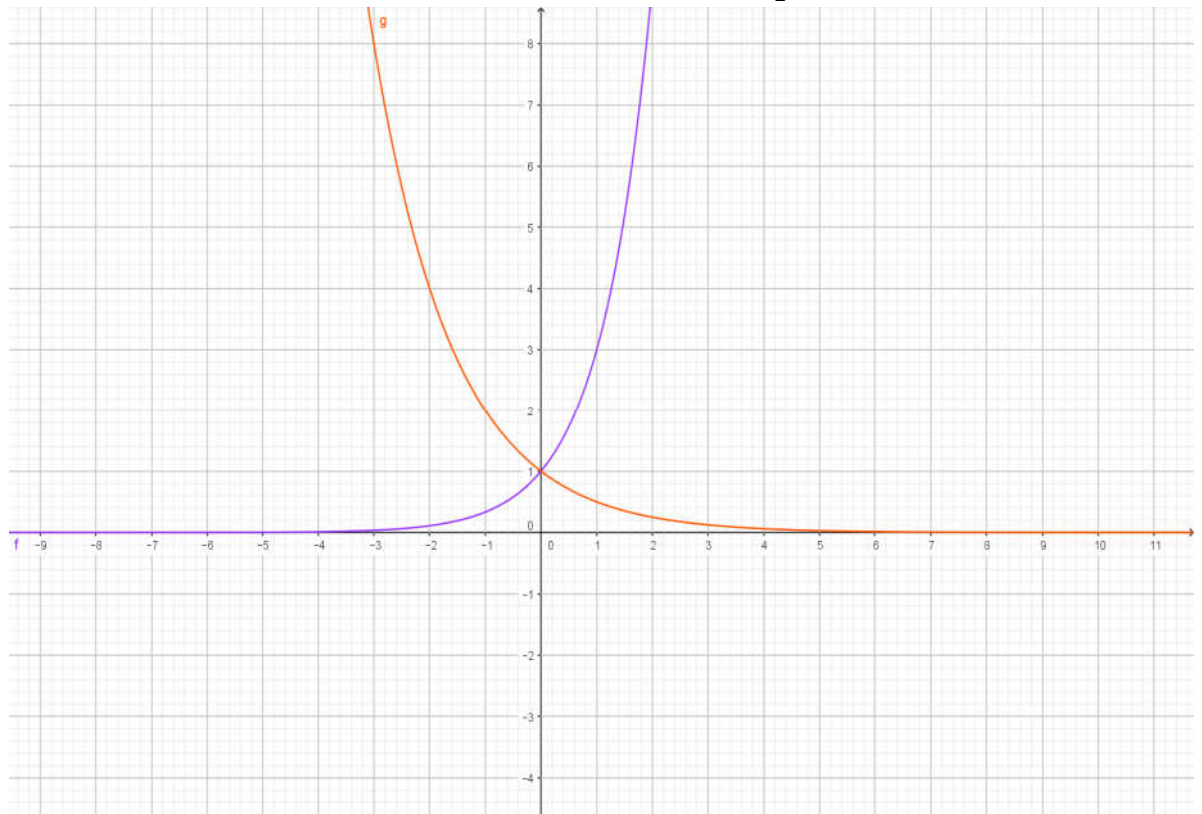
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \cdot \ln a}}{x}$ ; posons  $X = x \ln a \rightarrow x = \frac{X}{\ln a}$  on a  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ X \rightarrow +\infty \end{cases}$  ce qui implique

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\frac{X}{\ln a}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} \times \ln a = +\infty$ ; donc  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction (OJ) en

$+\infty$

Pour  $a \in ]0; 1[$ ,  $C_f$  admet la droite (D) d'équation  $y = 0$  comme asymptote horizontal

c) **Exemple**; étudier et représenter la fonction  $f(x) = 3^x$  et  $g(x) = (\frac{1}{2})^x$  définie sur IR



## II) FONCTION PUISSANCES

### a) Définition

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . on appelle *fonction puissance*  $\alpha$ , la fonction notée  $f_\alpha$  définie par

$$\begin{aligned} & ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f_\alpha &= x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{aligned}$$

**consequence** :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , x^\alpha$

### b) Propriétés ( $x > 0$ )

P1)  $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

P2)  $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

P3)  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$

### c) Etude de la fonction puissance ( $x \rightarrow x^\alpha$ )

#### i) Domain de définition

$$D_f = ]0; +\infty[$$

#### ii) Limites au bornes du $D_f$

- Si  $\alpha = 0$  alors  $f_\alpha = 1$
- Si  $\alpha < 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$
- Si  $\alpha > 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

#### iii) Dérivée et sens de variation

Soit  $x \in ]0; +\infty[$ , alors  $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$

la dérivée est donnée par  $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

- Si  $\alpha < 0$ , alors  $f'_\alpha(x) < 0$ , alors  $f_\alpha(x)$  est décroissante
- Si  $\alpha > 0$ , alors  $f'_\alpha(x) > 0$ , alors  $f_\alpha(x)$  est croissante

#### iv) Tableau de variation

\*si  $\alpha < 0$

\* si  $\alpha > 0$

$x$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	-	
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	0

$x$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	+	
$f_\alpha(x)$	0	$+\infty$

### d) Croissance comparées

Considérons les fonctions suivantes :  $x \rightarrow \ln x$  ;  $x \rightarrow x^\alpha$  ;  $x \rightarrow e^x$  avec  $\alpha$  un réel positif

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$  ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$  ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$  ; (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

**Note** : Ces limites traduisent le fait que la fonction  $e^x$  croit plus vite que la fonction  $x^\alpha$  qui croit plus que la fonction  $\ln x$

**e) Exemples de calculs de limite**

Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \rightarrow \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$

**Solution:**

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)}$  , or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)} = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = +\infty$

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>RECURRENCE ET SUITES NUMERIQUES</b>	<b>2</b>
1.1	Raisonnement par récurrence . . . . .	2
1.1.1	Bon à savoir : (notation somatiques et produits) . . . . .	2
1.1.2	Principe du raisonnement par récurrence . . . . .	3
1.2	Généralités sur les suites numériques . . . . .	5
1.3	Etude d'une suite numérique . . . . .	5
1.3.1	Suite minorée, suite majorée et suite bornée . . . . .	5
1.3.2	Sens de variation d'une suite numérique . . . . .	6
1.3.3	Notion de convergence . . . . .	7
1.3.4	Suites adjacentes et suites périodiques . . . . .	8
1.3.4.1	Définitions . . . . .	8
1.3.4.2	Propriétés . . . . .	9
1.4	Suites arithmétiques et suites géométriques . . . . .	9
1.4.1	Suites arithmétiques . . . . .	9
1.4.1.1	Définition . . . . .	9
1.4.1.2	Détermination d'une suite arithmétique par une formule explicite . . . . .	9
1.4.1.3	Convergence d'une suite arithmétique . . . . .	9
1.4.1.4	Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique . . . . .	9
1.4.1.5	Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique . . . . .	10
1.4.2	Suites géométriques . . . . .	11
1.4.2.1	Définition . . . . .	11
1.4.2.2	Détermination d'une suite géométrique par une formule explicite . . . . .	11
1.4.2.3	Convergence d'une suite géométrique . . . . .	11
1.4.2.4	Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique . . . . .	11
1.4.2.5	Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique . . . . .	12

# RECURRENCE ET SUITES

## NUMERIQUES

### Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ☞ Savoir utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés.
- ☞ Savoir étudier le sens de variation d'une suite numérique.
- ☞ Savoir étudier la convergence d'une suite numérique.
- ☞ Savoir approcher la limite d'une suite par un nombre réel.
- ☞ Utiliser les théorèmes de comparaisons pour calculer la limite d'une suite numérique.

### 1.1 Raisonnement par récurrence

#### 1.1.1 Bon à savoir : (notation somatiques et produits)

**Note :** Soit  $p$  et  $n$  des entiers naturels tels que :  $p \leq n$  et  $f$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note :

☞  $\sum_{i=p}^n f(i)$  la somme des nombres  $f(i)$  lorsque  $i$  varie de  $p$  à  $n$ . C'est-à-dire :

$$\sum_{i=p}^n f(i) = f(p) + f(p+1) + f(p+2) + \dots + f(n-1) + f(n).$$

☞  $\prod_{i=p}^n f(i)$  le produit des nombres  $f(i)$  lorsque  $i$  varie de  $p$  à  $n$ . C'est-à-dire :

$$\prod_{i=p}^n f(i) = f(p) \times f(p+1) \times f(p+2) \times \dots \times f(n-1) \times f(n).$$

**Exemple 1.1.1 :**

$$1) \sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n; \sum_{i=1}^n n = n + n + n + \dots + n = n^2; \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^n (2k^2 + 1) = (2 \cdot 1^2 + 1) + (2 \cdot 2^2 + 1) + (2 \cdot 3^2 + 1) + \dots + (2 \cdot n^2 + 1)$$

$$2) \prod_{i=1}^n 1 = 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 = 1; \prod_{i=1}^n 2 = 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2 = 2^n; \prod_{i=1}^n a = a \times a \times a \times \dots \times a \times a = a^n$$

**Remarque 1.1.1 :**

- ♣  $i$  est une variable muette donc elle peut être remplacé par n'importe quel autre lettre de l'alphabet autre que  $n$ .
- ♣  $\sum_{i=p}^n f(i) = \sum_{j=p}^n f(j)$  et  $\sum_{i=p}^n f(i) = (\sum_{i=p}^{n-1} f(i)) + f(n)$ .
- ♣ **Linéarité de la somme :**  $\sum_{i=p}^n (f(i) + g(i)) = \sum_{i=p}^n f(i) + \sum_{i=p}^n g(i)$  et  $\sum_{i=p}^n (\alpha f(i)) = \alpha (\sum_{i=p}^n f(i))$ . Ou encore :  $\sum_{i=p}^n (\alpha f(i) + \beta g(i)) = \alpha (\sum_{i=p}^n f(i)) + \beta (\sum_{i=p}^n g(i))$

**Exercice d'application 1.1 :**

- 1) En remarquant que :  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ , calculer  $\sum_{k=1}^{n+1} k$ ;  $\sum_{k=1}^{n-1} k$ ;  $\sum_{k=3}^n k$ ;  $\sum_{k=3}^{n-2} k$  et  $\sum_{k=1}^n (2k+3)$
- 2) On pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)^2$ .
  - a) Calculer  $S_n$  pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5$
  - b) Exprimer  $S_{n+1}$  et  $S_{n+2}$  en fonction de  $n$  et de  $S_n$ .
  - c) On admet que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Déterminer l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ , puis celle de  $S_{n+1}$  et  $S_{n+2}$  en fonction de  $n$ .

**Exercice d'application 1.2 : (Suites télescopiques)** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels

- 1) Simplifier  $S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k)$ .
- 2-a) Déterminer  $\alpha, \beta, \lambda$  et  $\eta$  pour que :  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1}$  et  $\frac{1}{k^2-1} = \frac{\lambda}{k-1} + \frac{\eta}{k+1}$ .
- 2-b) En déduire l'expression en fonction de  $n$  de :  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  et  $V_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}$ .

**Activité :**

1. Ecrire chacune des expressions suivantes en utilisant le symbole  $\sum$

☞  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

☞  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

☞  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$

2. Expliciter chacune des expressions suivantes :

☞  $\sum_{k=1}^n k^3$

☞  $\sum_{k=0}^n (n-k)^2$

☞  $\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k+2}$

**1.1.2 Principe du raisonnement par récurrence**

Soit  $P(n)$  une proposition qui dépend de l'entier naturel  $n$ , à partir d'une valeur donnée  $n_0$  de  $n$ . Pour faire une démonstration par récurrence, la démarche pratique est la suivante :

## 1.1. Raisonement par récurrence

---

☞ On vérifie que  $P(n_0)$  est vraie ;

☞ On fixe arbitrairement un entier  $n \geq n_0$  et on suppose que  $P(n)$  est vrai (ceci s'appelle l'**hypothèse de récurrence**) ;

☞ On démontre (à partir de cette hypothèse) que  $P(n+1)$  est vraie ;

☞ On conclut que  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ .

### Exercice d'application 1.2 :

Démontrer par récurrence que :

1. pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. pour tout  $x > -1$  et pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$
3.  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$
4. pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$

### Solution:

1. Soit  $P(n)$  la propriété définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Pour  $n = 1$ , on a :  $1 = 1$  et donc  $P(1)$  est vraie.

Soit  $n \geq 1$ , supposons que  $P(n)$  est vraie (ie  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ) et montrons que  $P(n+1)$  l'est aussi (ie  $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ).

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2. Soit  $Q(n)$  la propriété définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Pour  $n = 0$ , on a :  $(1+x)^0 = 1$  et  $1+0x = 1$  et  $1 \geq 1$ , donc  $Q(0)$  est vraie.

Soit  $n > 0$ , supposons que  $Q(n)$  est vraie (ie  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ) et montrons que  $Q(n+1)$  l'est aussi (ie  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ ).

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(n+1)$  et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :  $(1+x)^n \geq 1+nx$  et par suite,  $(1+x)^n(n+1) \geq (1+nx)(1+x)$  car  $1+x > 0$ .

Mais  $(1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = (1+(n+1)x) + nx^2 \geq 1+(n+1)x$  car  $nx^2 \geq 0$ .

Donc  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ ; d'où  $Q(n+1)$  est vraie.

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Le reste est laissé comme TAFAD ■

## 1.2 Généralités sur les suites numériques

### Définition 1.2.1 :

On appelle *suite numérique* toute fonction d'une partie  $E$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$ .

En général, une suite numérique  $(U_n)$  est déterminée par :

→ une formule explicite permettant de calculer  $U_n$  en fonction de  $n$  ;

#### Exemple 1.2.1 :

$$U_n = n + 3 + \frac{4n}{n^2 - 2}$$

→ une formule de récurrence où le premier terme est donné et chaque terme est fonction du précédent ie

$$\begin{cases} U_p &= a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} &= f(U_n) \end{cases} \quad \text{où } U_p \text{ est le premier terme de la suite et } p \text{ est son indice.}$$

#### Exemple 1.2.2 :

$$\begin{cases} U_1 &= 6 \\ U_{n+1} &= \frac{2U_n - 5}{U_n + 1} \end{cases}$$

## 1.3 Etude d'une suite numérique

Activité : Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{4u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$
 pour tout entier naturel  $n$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Utiliser la fonction  $f : x \mapsto \frac{4x}{1+x}$  et la droite  $(D) : y = x$  pour placer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur l'axe des abscisses.
3. Conjecturer la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet-elle un minorant ? Un majorant ? Est-elle bornée ?

### 1.3.1 Suite minorée, suite majorée et suite bornée

#### Définition 1.3.1 :

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite numérique.

→  $(U_n)_{n \in E}$  est *minorée* s'il existe un nombre réel  $m$  tel que pour tout  $n \in E$ ,  $U_n \geq m$ .

On dit que  $m$  est un *minorant* de  $(U_n)_{n \in E}$ .

→  $(U_n)_{n \in E}$  est *majorée* s'il existe un nombre réel  $M$  tel que pour tout  $n \in E$ ,  $U_n \leq M$ .

On dit que  $M$  est un *majorant* de  $(U_n)_{n \in E}$ .

→  $(U_n)_{n \in E}$  est *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée ie qu'il existe deux nombres réels  $m$  et  $M$  tel que pour tout  $n \in E$ ,  $m \leq U_n \leq M$ .

**Remarque 1.3.1 :**

- $(U_n)_{n \in E}$  est bornée s'il existe un nombre réel strictement positif  $k$  tel que :  
pour tout  $n \in E$ ,  $|U_n| \leq k$ .
- Une suite est positive si elle est minorée par 0.
- Une suite est négative si elle est majorée par 0.

**Exemple 1.3.1 :**

On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_{n+1} &= \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes positifs.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$ .
3. Conclure

**Solution:**

1. Montrons que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à terme positif.

Soit  $P(n)$  la propriété définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq 0$ .

$U_0 = 0 \geq 0$ , donc  $P(0)$  est vraie.

Soit  $n \geq 0$ , supposons que  $P(n)$  est vraie (ie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq 0$ ) et montrons que  $P(n+1)$  l'est aussi (ie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} \geq 0$ ).

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq 0$  par hypothèse de récurrence, alors  $2U_n + 3 \geq 0$  et  $U_n + 4 \geq 0$ , donc  $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \geq 0$ . D'où  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à terme positif.

2. Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$ .

Soit  $Q(n)$  la propriété définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$ .

$U_0 = 0 < 1$ , donc  $Q(0)$  est vraie.

Soit  $n \geq 0$ , supposons que  $Q(n)$  est vraie (ie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$ ) et montrons que  $Q(n+1)$  l'est aussi (ie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} < 1$ ).

$U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} = 2 - \frac{5}{U_n + 4}$  or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$  par hypothèse de récurrence, donc  $U_n + 4 < 5$ . Ainsi  $\frac{1}{U_n + 4} > \frac{1}{5}$ , ensuite,  $\frac{-5}{U_n + 4} < -1$  et enfin  $U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4} < 1$ .  
Donc  $Q(n+1)$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 1$ .

3. La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car elle est minorée par 0 et majorée par 1 d'après les deux questions précédentes. ■

### 1.3.2 Sens de variation d'une suite numérique

**Propriété 1.3.1 :**

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite numérique.

- ☞ Si pour tout  $n \in E$ ,  $U_n \leq U_{n+1}$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est *croissante*.
- ☞ Si pour tout  $n \in E$ ,  $U_{n+1} \leq U_n$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est *décroissante*.
- ☞ Si pour tout  $n \in E$ ,  $U_n = U_{n+1}$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est *constante ou stationnaire*.

**Remarque 1.3.2 :**

1. Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique  $(U_n)_{n \in E}$ , on étudie le signe de  $U_{n+1} - U_n$ 
  - Si  $U_{n+1} - U_n \geq 0$ , alors la suite est croissante ;
  - si  $U_{n+1} - U_n \leq 0$ , alors la suite est décroissante ;
  - si  $U_{n+1} - U_n = 0$ , alors la suite est constante ou stationnaire.
2. Si la suite  $(U_n)_{n \in E}$  est à terme positive (ie pour tout  $n \in E$ ,  $U_n \geq 0$ ), alors on compare  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  et 1
  - si  $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ , alors la suite est croissante ;
  - si  $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ , alors la suite est décroissante ;
  - si  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ , alors la suite est constante ou stationnaire.
3. Si la suite  $(U_n)_{n \in E}$  est définie sous forme explicite, ie  $U_n = f(n)$  ou  $f$  est une fonction numérique, alors le sens de variation de la suite  $(U_n)_{n \in E}$  est le même que celui de la fonction  $f$ .

**Exemple 1.3.2 :**

Etudier le sens de variation des suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :  $U_n = \frac{n}{n+1}$  et  $V_n = \frac{3n-2}{n+1}$

**Solution:**

La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes positives (car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq 0$ ) et  $U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ \text{Donc } \frac{U_{n+1}}{U_n} &> 1 \text{ car } (n^2 + 2n) + 1 > n^2 + 2n. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

$V_n = f(n)$  avec  $f$  qui est la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$

On a :  $f'(x) = \frac{-5}{(x+1)^2} < 0$ , donc  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ . D'où  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. ■

**1.3.3 Notion de convergence**

**Définition 1.3.2 :**

- ☞ Une suite est *convergente* si elle a une limite finie.
- ☞ Une suite est *divergente* si elle a une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite (ie qu'elle n'est pas convergente).

**Propriété 1.3.2 :**

- ☞ Toute suite croissante et majorée converge.
- ☞ Toute suite décroissante et minorée converge.
- ☞ Toute suite monotone et bornée converge.
- ☞ Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique définie par une formule explicite (ie  $U_n = f(n)$ , où  $f$  est une fonction numérique.)  
Si  $f$  a une limite en  $+\infty$ , alors  $U_n$  a une limite et on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- ☞ Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique définie par une formule de récurrence (ie  $U_{n+1} = f(U_n)$ , où  $f$  est une fonction numérique).  
Si la fonction  $f$  est **continue** et la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge**, alors la limite  $l$  de la suite est solution de l'équation  $f(l) = l$ .
- ☞ Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites numériques.
  - ✓ Si  $U_n < V_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .
  - ✓ Si  $U_n \leq V_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ .
  - ✓ Si  $U_n \leq V_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ .
  - ✓ Si  $V_n \leq U_n \leq W_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ .

**Exercice d'application 1.3 :**

1. Soit la suite  $u$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 &= -2 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1 \end{cases}$$
  - (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite  $u$ .
  - (b) Montrer par récurrence que la suite  $u$  est croissante et majorée par 6, puis conclure.
  - (c) Déterminer la limite de la suite  $u$ .
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par 
$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{3v_n + 4}{v_n + 3} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$
  - (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  est à termes positifs.
  - (b) Montrer que si la suite  $(v_n)$  admet une limite  $l$ , alors  $l = 2$ .

**1.3.4 Suites adjacentes et suites périodiques**

**1.3.4.1 Définitions**

- ☞ Deux suites numériques  $(U_n)_{n \in E}$  et  $(V_n)_{n \in E}$  sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - V_n = 0$ .
- ☞  $(U_n)_{n \in E}$  est dite **périodique** s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $U_{n+p} = U_n$ .  
 $p$  est appelée la période de la suite  $U_n$

**Exemple 1.3.3 :**

- ☞  $U_n = (-1)^n$  est périodique de période 2 car  $U_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n = U_n$ .
- ☞  $V_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  est périodique de période 4 car  $V_{n+4} = \sin\left(\frac{(n+4)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) = V_n$ .

### 1.3.4.2 Propriétés

☞ Deux suites numériques adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

☞ Soit  $(U_n)_{n \in E}$  et  $(V_n)_{n \in E}$  deux suites numériques adjacentes tel que  $(U_n)_{n \in E}$  est croissante et  $(V_n)_{n \in E}$  est décroissante.

Alors tout terme de la suite  $(V_n)_{n \in E}$  est un majorant de la suite  $(U_n)_{n \in E}$ .

## 1.4 Suites arithmétiques et suites géométriques

### 1.4.1 Suites arithmétiques

#### 1.4.1.1 Définition

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite numérique.

$(U_n)_{n \in E}$  est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre réel  $r$  tel que, pour tout  $n \in E$ ,  $U_{n+1} = U_n + r$ .

Le nombre réel  $r$  est appelé **raison** de la suite  $(U_n)_{n \in E}$

#### Remarque 1.4.1 :

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

☞ Si  $r > 0$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est croissante.

☞ Si  $r < 0$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est décroissante.

☞ Si  $r = 0$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  est constante ou stationnaire.

☞ La raison d'une suite arithmétique est obtenu en calculant  $U_{n+1} - U_n$ .

#### 1.4.1.2 Détermination d'une suite arithmétique par une formule explicite

#### Propriété 1.4.1 :

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite arithmétique de premier terme  $U_p$  et de raison  $r$ .

Alors pour tout  $n \in E$ , on a :  $U_n = U_p + (n - p)r$  (★).

#### 1.4.1.3 Convergence d'une suite arithmétique

#### Propriété 1.4.2 :

L'expression (★) du terme général en fonction de  $n$  montre que :

☞ Si  $r = 0$ , alors la suite est stationnaire et converge donc vers  $U_p$ .

☞ Si  $r \neq 0$ , alors la suite est divergente.

#### 1.4.1.4 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite arithmétique de premier terme  $U_p$  et de raison  $r$ .

#### Propriété 1.4.3 :

☞ Le nombre de terme de la suite  $(U_n)_{n \in E}$  est :

$$n - p + 1 = \text{indice du dernier terme} - \text{indice du premier terme} + 1$$

☞ La somme des  $(n - p + 1)$  premiers termes de la suite arithmétique  $(U_n)_{n \in E}$  est :

$$S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n = (n - p + 1) \frac{U_p + U_n}{2} = \frac{(n - p + 1)(2U_p + (n - p)r)}{2}.$$

**Remarque 1.4.2 :**

☞ si  $p = 0$ , alors  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n + 1) \frac{U_0 + U_n}{2} = \frac{(n + 1)(2U_0 + nr)}{2}$ .

☞  $S_n = \text{nombre de terme} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

**Exemple 1.4.1 :**

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_1 &= 2000 \\ U_{n+1} &= U_n + 100 \end{cases}.$$

1. Montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. Etudier la monotonie de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Solution:**

1. Montrons que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

$U_{n+1} - U_n = 100$ , donc  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r = 100$ .

2. Etudions la monotonie de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r = 100 > 0$ , donc elle est croissante.

3. Exprimons  $U_n$  en fonction de  $n$ .

$$U_n = U_1 + (n - 1)r = 2000 + (n - 1)(100) = 1900 + 100n.$$

4. Calculons  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

$$S_n = (n - 1 + 1) \frac{U_1 + U_n}{2} = \frac{n(2000 + 1900 + 100n)}{2} = 1950n + 50n^2 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty. \quad \blacksquare$$

#### 1.4.1.5 Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

**Propriété 1.4.4 :**

Si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors  $y = \frac{x + z}{2}$ .

**Exemple 1.4.2 :**

$x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer ses trois nombres sachant que leur somme est 9, leur produit est 15 et  $x < z$ .

**Solution:**

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y + z &= 9 \quad (L_1) \\ xyz &= 15 \quad (L_2) \end{cases}$$

Mais  $y = \frac{x + z}{2}$  ie  $x + z - 2y = 0$  ( $L_3$ ), donc  $(L_1) - (L_3) : 3y = 9$  ie  $y = 3$ .

En remplaçant  $y$  par sa valeur dans  $(L_1)$  et  $(L_2)$ , on a : 
$$\begin{cases} x + z &= 6 \quad (L'_1) \\ xz &= 5 \quad (L'_2) \end{cases}, \text{ donc } x \text{ et } z \text{ sont solutions}$$

de l'équation  $t^2 - 6t + 5 = 0$ . Ainsi,  $x = 1$  et  $z = 5$  car  $x < z$ . Donc  $x = 1, y = 3$  et  $z = 5$ .  $\blacksquare$

### 1.4.2 Suites géométriques

#### 1.4.2.1 Définition

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite numérique.

$(U_n)_{n \in E}$  est une suite **géométrique** s'il existe un nombre réel  $q$  tel que, pour tout  $n \in E$ ,  $U_{n+1} = qU_n$

Le nombre réel  $q$  est appelé **raison** de la suite  $(U_n)_{n \in E}$ .

#### Remarque 1.4.3 :

☞ La raison d'une suite géométrique est obtenu en calculant  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ .

#### 1.4.2.2 Détermination d'une suite géométrique par une formule explicite

#### Propriété 1.4.5 :

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite géométrique de premier terme  $U_p$  et de raison  $q$ .

Alors pour tout  $n \in E$ , on a :  $U_n = U_p q^{n-p}$ .

#### 1.4.2.3 Convergence d'une suite géométrique

#### Propriété 1.4.6 :

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite géométrique de raison  $q$ .

☞ Si  $q = 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$  et  $(U_n)_{n \in E}$  converge.

☞ Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  et  $(U_n)_{n \in E}$  converge.

☞ Si  $q < -1$ , alors  $(U_n)_{n \in E}$  n'admet pas de limite donc elle diverge

☞ Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  et la suite  $(U_n)_{n \in E}$  diverge.

#### 1.4.2.4 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit  $(U_n)_{n \in E}$  une suite géométrique de premier terme  $U_p$  et de raison  $q$ .

#### Propriété 1.4.7 :

☞ La somme des  $(n - p + 1)$  premiers termes de la suite arithmétique  $(U_n)_{n \in E}$  est :

$$S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n = U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

☞  $S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de terme}}}{1 - \text{raison}}$ .

#### Exemple 1.4.3 :

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} U_0 &= 3 \\ U_{n+1} &= 2U_n \end{cases}$ .

1. Montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3. Calculer  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Solution:**

1. Montrons que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2, \text{ donc } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } q = 2.$$

2. Exprimons  $U_n$  en fonction de  $n$ .

$$U_n = U_0 q^n = 3 \times 2^n.$$

3. Calculons  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3(2^{n+1} - 1) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ car } q = 2 > 1. \quad \blacksquare$$

1.4.2.5 Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

**Propriété 1.4.8 :**

Si  $x, y$  et  $z$  sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors  $y^2 = xz$ .

**Exemple 1.4.4 :**

$x, y$  et  $z$  sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Calculer ses trois nombres sachant que leur somme est 93 et leur produit est 3375.

**Solution:**

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y + z = 93 & (L_1) \\ xyz = 3375 & (L_2) \end{cases}$$

Mais  $y^2 = xz$ , par suite  $y^3 = xyz = 3375$  et donc  $y = \sqrt[3]{3375} = 15$ .

$$\text{En remplaçant } y \text{ par sa valeur dans } (L_1) \text{ et } (L_2), \text{ on a : } \begin{cases} x + z = 78 & (L'_1) \\ xz = 225 & (L'_2) \end{cases}.$$

Donc  $x$  et  $z$  sont solutions de l'équation  $t^2 - 78t + 225 = 0$ .

Ainsi,  $(x = 3 \text{ et } z = 75)$  ou  $(x = 75 \text{ et } z = 3)$ . D'où  $(x = 3, y = 15 \text{ et } z = 75)$  ou  $(x = 75, y = 15 \text{ et } z = 3)$ .  $\blacksquare$

**Exercice d'application 1.4 :**

1.  $x, y$  et  $z$  sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

(a) Montrer que  $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

(b) Déterminer  $x, y$  et  $z$  sachant que leur somme est 91 et la somme de leurs carrés est 4459.

2. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}.$$

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < U_n < 1$ .

(b) Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, puis conclure.

On pose  $V_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

(i) Montrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(ii) Déterminer  $V_n$  en fonction de  $n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

(iii) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

(iii) Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^n U_k$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$ .

## 0.1 Chap 9 : Calculs intégrals

### Objectifs

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Calculer l'intégrale d'une fonction dont il connaît la primitive ;
- Faire la différence entre une intégrale et une primitive ;
- Connaître les techniques d'intégration (intégration par partie, changement de variable affine) ;
- Déterminer l'aire d'un domaine compris entre deux courbes dont il connaît les équations, le volume de quelques solides usuels ;
- utiliser les propriétés d'une intégrale pour l'étude d'une fonction.

### 9.1- Préliminaire.

#### Définition

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $K$ .  $a, b \in K$ .

On appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  le nombre réel  $F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $K$ .

On note  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

#### Exemple

Calculons  $\int_{\frac{\pi}{6}}^0 \sin x dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^0 = -\cos 0 - (-\cos \frac{\pi}{6}) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

#### Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$  se lit "somme ou intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$ ".
- $[F(x)]_a^b$  se lit " $F(x)$  pris entre  $a$  et  $b$ ".
- $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intégrale.

#### Remarques

$R_1$ ) Dans l'écriture  $\int_a^b f(x)dx$ , on peut remplacer  $x$  par toute autre lettre (sauf par  $a$  et  $b$ ).

$R_2$ )  $F(b) - F(a)$  est indépendant de  $F$ .

#### Propriétés

$P_1$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ .  $a, b \in K$ .

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$P_2$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ .  $a \in K$ .

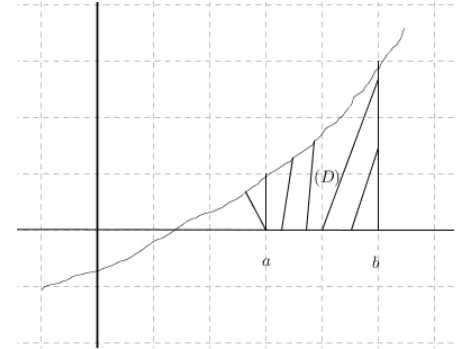
La fonction de  $K$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $\int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $K$  qui s'annule en  $a$ .

#### Exemple

Déterminer  $\int_1^x \frac{1}{t} dt$  où  $x \in ]0; +\infty[$ .

### Interprétation graphique de l'intégrale

Ici,  $D$  est le domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisse, et les droites d'équation :  $x = a$ ;  $x = b$



### Propriété

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur intervalle  $K$ ,  $a, b$  deux éléments de  $K$  tels que  $a < b$ .  $(O, I, J)$  est un repère orthogonal. L'aire du domaine  $D$  du plan délimité par  $(C_f)$ ,  $(OI)$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est donnée par la formule :

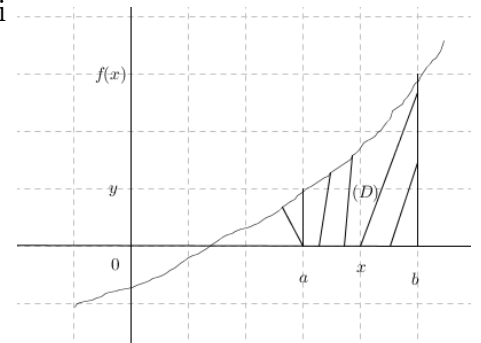
$$\mathcal{A}(D) = \left( \int_a^b f(x) dx \right) U_a \text{ où } U_a = \text{Unité d'aire et } U_a = \|\vec{OI}\| \times \|\vec{OJ}\|$$

### Remarque

(1) Si  $f$  est positif sur  $[a; b]$ , alors Le domaine  $(D)$  est aussi

$$\text{l'ensemble des points } M(x; y) \text{ tels que } (D) : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

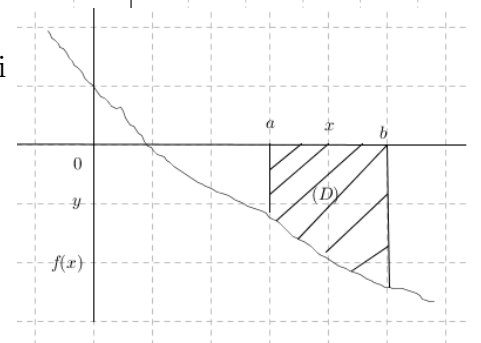
$$\text{i.e } \mathcal{A}(D) = \left( \int_a^b f(x) dx \right) U_a$$



(2) Si  $f$  est négative sur  $[a; b]$ , alors Le domaine  $(D)$  est aussi

$$\text{l'ensemble des points } M(x; y) \text{ tels que } (D) : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{i.e } \mathcal{A}(D) = \left( - \int_a^b f(x) dx \right) U_a$$



Propriété

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $K$ , et  $a, b \in K$  avec ( $a < b$ ).

Si  $f \leq g$  sur  $[a; b]$  alors l'aire du domaine du plan délimité par  $(C_f)$ ,  $(C_g)$  et les droites d'équations

$x = a$  et  $x = b$  est :

$$(D) : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{i.e } \mathcal{A}(D) = \left( \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) Ua$$

Exemple

$(O, I, J)$  est un repère orthogonal. (Unité sur les axes :  $2cm$  en abscisse et  $3cm$  en ordonnée).

Calculer l'aire du domaine du plan défini par :  $(D) : \begin{cases} \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^3 \leq y \leq x^2 \end{cases}$

Solution

$$\mathcal{A}(D) = \left( \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} (x^2 - x^3) dx \right) Ua = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \times 2cm \times 3cm =$$

9.2 Propriétés

$f, g$  sont deux fonctions continue sur  $K$ . soient  $a, b, c \in K$ .

$$P_1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exemple : Calculer  $\int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx$ .

$$\text{On a } \int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx =$$

$P_2$ )  $U$  et  $V$  sont deux fonctions dérivables sur  $K$ ,  $a, b \in K$ .

$$\int_a^b (UV')(x)dx = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx \text{ (Formule d'intégration par parties.)}$$

Exemple : Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ .

On a  $U(x) = x \Rightarrow U'(x) = 1$

$V'(x) = \cos x \Rightarrow V(x) = \sin x$ .

$$\text{Ainsi, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Donc } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$P_3$ ) Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta)(x)dx = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du \text{ avec } u = \alpha x + \beta.$$

Exemple : Calculer  $\int_0^{-1} \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$

$P_4$ ) On suppose que  $K$  est symétrique par rapport à  $O$ .

- Si  $f$  est paire,  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

- Si  $f$  est impaire,  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Exemple : Calculer  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{25} x dx$

En posant  $f(x) = \sin^{25} x$ , on a  $f(-x) = -f(x)$  donc  $f$  est impaire. Donc  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{25} x dx = 0$

$P_5$ ) Si  $f$  est périodique de période  $p$  et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- $\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$

### 9.3- Propriétés de comparaison

$P_1$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ ,  $a, b \in K$  avec  $(a \leq b)$

• Si  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

• Si  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq 0$  alors  $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ .

$P_2$ )  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $K$ ,  $a, b \in K$  avec  $(a \leq b)$ .

Si  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

$P_3$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ ,  $a, b \in K$  avec  $(a \leq b)$ .  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

$P_4$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ ,  $a, b \in K$  avec  $(a \leq b)$ . Si  $m$  et  $M$  sont deux nombres réels tels que :

$\forall x \in [a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

Cette inégalité est appelée **inégalité de la Moyenne**

$P_4$ ) Soit  $f$  continue sur  $K$ , S'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$\forall x \in K$ ,  $|f(x)| \leq M$  alors  $\forall a, b \in K$ ,  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a|$ .

Cette inégalité est aussi appelée **inégalité de la Moyenne**

Exemple Déterminer un encadrement de  $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$ .

On a  $x \in [2; 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_2^4 \frac{1}{x} dx \leq 1$ .

Définition

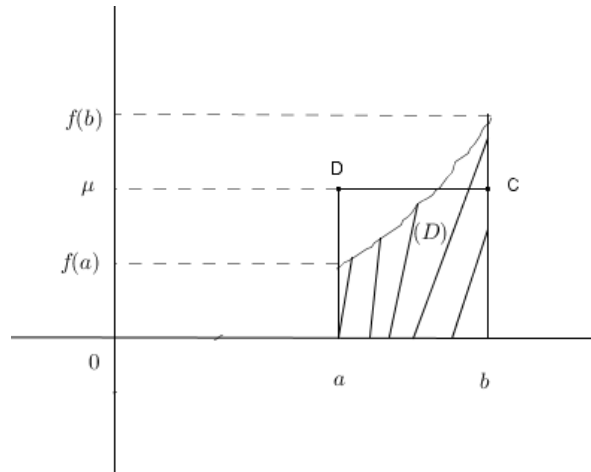
Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ , ( $a < b$ ).

On appelle **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a; b]$  le nombre  $\mu$  défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation graphique

$f$  continue sur  $[a, b]$ . Il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in [a, b] m \leq f(x) \leq M$ . On suppose que  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ .



$\mu$  est la hauteur du rectangle  $ABCD$ , de base  $b - a$ , dont l'aire est égale à celle de la surface hachurée.  $\mathcal{A}(ABCD) = \mu \times (b - a)$ ;  $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx$ .

Or  $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(\mathcal{D})$  Donc  $\mu \times (b - a) = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

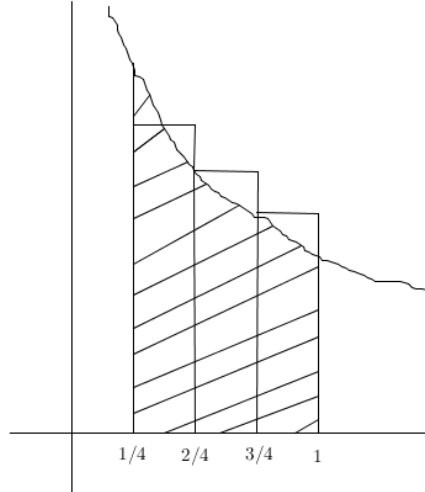
Exemple Calculer la valeur moyenne de  $f : x \mapsto \cos x$  sur  $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$

On a  $\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \Rightarrow \mu = \frac{6}{\pi} (\sqrt{2} - 1)$ .

### 9.4- Calcul approché d'une intégrale

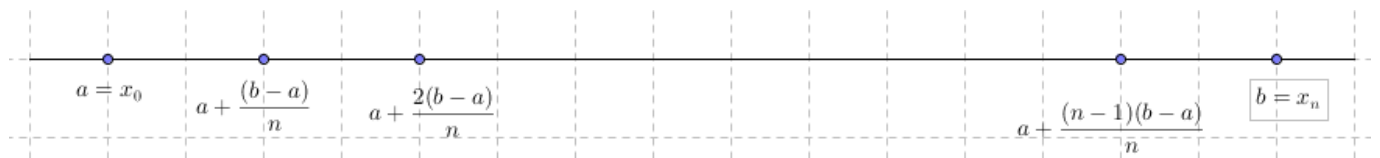
$f$  continue sur  $[a; b]$ . On se propose de déterminer une valeur approchée de  $\int_a^b f(x)dx$ .

Exemple Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ . Déterminons une valeur approchée de  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x} dx$ .



#### Méthode des rectangles

On partage  $[a, b]$  en  $n$  ( $n > 1$ ) Intervalles de même amplitude  $\frac{b-a}{n}$  et d'extrémités  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$



On pose

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \left( f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \end{aligned}$$

où  $k$  est le  $k$ ième intervalle; Et on pose aussi :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{n} \left( f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) + f(b) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \end{aligned}$$

$S_n$  et  $T_n$  sont des valeurs approchées de  $\int_a^b f(x)dx$ . on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f(x)dx.$$

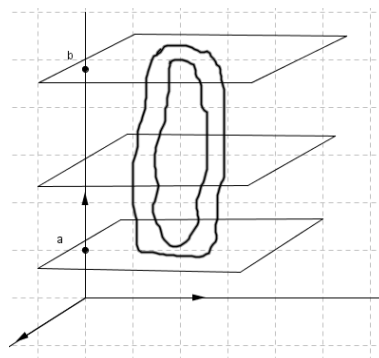
- Si  $f$  est décroissante, alors  $T_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n$ .
- Si  $f$  est croissante, alors  $S_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq T_n$ .
- Si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  et s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$ .

**9.5- Calculs de Volumes**

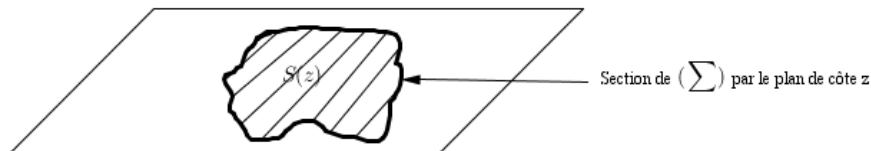
$(O, I, J, K)$  est un repère orthonormé.  $UV = OI \times OJ \times OK$ .

Soient  $(\Sigma)$  un solide délimité par les plans d'équations  $z = a, z = b$  ( $a < b$ ).

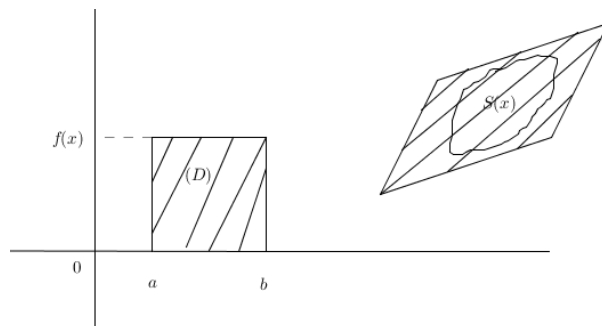
$S$  la section qui à tout élément  $z$  de  $[a, b]$  associe l'aire  $S(z)$  de la section de  $(\Sigma)$  par le plan de cote  $z$ .



Si  $S$  est continue sur  $[a, b]$ , alors le volume de  $(\Sigma)$  est  $\left( \int_a^b S(z)dz \right) UV$



Application



$(D)$  est la partie du plan délimitée par  $(C_f)$ ,  $(OI)$  et les droites d'équation  $x = a; x = b$  ( $a < b$ ).

La rotation de  $(D)$  autour de la droite  $(OI)$  engendre le volume. Et la formule de volume est donnée

par :  $V = \left( \int_a^b \pi(f(x))^2 \right) UV$

# CHAPITRE 10: EQUATIONS DIFFERENTIELLES - GPM

---

## Objectif

- Résoudre les équations différentielles du premier ordre et second ordre à coefficient constant sans second membre
- Résoudre les équations différentielles du premier ordre et second ordre à coefficient constant avec second membre

## Motivation

L'application des lois de la physique a un système conduit très souvent à une équation différentielle : C'est le cas pour le mouvement de l'atmosphère et de l'océan ( pour les prévisions météo et climat), pour les calculs des trajectoires( des satellites, des avions ....)

Ce chapitre aidera les apprenants à comprendre l'évolution de certains phénomènes au cours du temps.

## Activité d'apprentissage

Considérons les fonctions  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = 2x - 2$ .

1. Calculer les dérivées première et seconde de  $f$  et démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $5f''(x) - 4f'(x) - f(x) = 0$ .
2. Calculer la dérivée  $g'(x)$  de  $g$  et démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $g'(x) + g(x) = 2x$ .
3. Les équations établies en 1) et 2) montrent les relation entre une fonction et ses dérivées. Comment appelle t'on de telles équations ? Justifier votre réponse.
4. Pouvez - vous proposer une solution pour chacune de ces équations
5. Peut-on trouver d'autres solutions pour chacune de ces equations ?

## 1- Notion et vocabulaire d'équation différentielle

- Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.
- Cette fonction inconnue est souvent notée  $y$  et ses dérivées successives  $y', y'', \dots$

**Exemple :**  $y' - 3y = 5$

Le plus souvent, la variable sera notée  $x$  ou  $t$ .

- L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée intervenant dans cette équation.

**Exemple :**  $5y'' - 4y' - y = 0$  est une équation différentielle d'ordre 2.

- Résoudre ou intégrer une équation différentielle d'ordre  $n$  sur un intervalle ouvert  $I$  revient à trouver toutes les fonctions solutions de cette équation.
- Une fonction  $f$  est solution d'une équation différentielle ou encore d'une intégrale d'ordre  $n$  sur un intervalle  $I$  lorsque la fonction  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$   $f$  vérifie cette équation sur  $I$ .  
Par exemple,  $f(x) = e^x$  est une solution de l'équation différentielle :  $5y'' - 4y' - y = 0$ .
- La courbe d'une solution d'une équation différentielle est une courbe intégrale.
- Dans cette leçon, nous nous limiterons à étudier les équations différentielles linéaires à coefficient réel constant d'ordre au plus égale à deux (2).

## 2- Equations différentielles du type $y' + ay = 0$ ( $a \in \mathbb{R}$ )

Les équations du type  $y' + ay = 0$  sont appelées les équations différentielles linéaires du 1<sup>er</sup> ordre à coefficient constant sans second membre (ou homogène).

Les solutions de cette équation sont des fonctions.

Une fonction  $f$  est solution de l'équation  $y' + ay = 0$  sur  $I$  lorsque  $f$  est dérivable sur  $I$  et quel que soit  $x \in I$ ,  $f' + af = 0$ .

Les solutions de cette équation différentielle sont des fonctions  $f_k$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = ke^{-ax}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  quelconque.

**Exemple 1:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle sans second membre (E)  $y' + 6y = 0$

**Solution bien détaillée**

(E) est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = 6$  donc ses solutions sont les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et définies par  $f(x) = ke^{-6x}$  (avec  $k \in \mathbb{R}$ ).

**Exemple 2:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle sans second membre (E)  $y' - 2y = 0$

Déterminer la solution de cette équation dont la courbe passe par le point  $A(0,1)$ .

**Solution bien détaillée**

(E) est de la forme  $y' + ay = 0$  avec  $a = -2$  donc ses solutions sont les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et définies par  $f(x) = ke^{2x}$  (avec  $k \in \mathbb{R}$ ).

On a :  $f(0)=1 \Leftrightarrow ke^0=1 \Leftrightarrow k=1$

D'où la solution de cette équation dont la courbe passe par  $A(0,1)$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x}$ .

## 3- Equation différentielle de type $y'' + ay' + by = 0$ , $a, b \in \mathbb{R}$

- Les équations différentielles du type  $y'' + ay' + by = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  sont appelées équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre.
- L'équation  $r^2 + ar + b = 0$  est appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ .
- Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + ay' + by = 0$  revient à résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation caractéristique associée  $r^2 + ar + b = 0$ .

Les fonctions solutions de (E) sont les fonctions  $f$  du tableau suivant :

Si $r^2 + ar + b = 0$ admet	Alors les solutions de (E) sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par
<b>2 solutions réelles <math>r_1</math> et <math>r_2</math></b>	$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ $A, B \in \mathbb{R}$
<b>Une solution réelle <math>r_0</math></b>	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$ $A, B \in \mathbb{R}$
<b>Deux solutions complexes conjuguées <math>\alpha + i\beta</math> et <math>\alpha - i\beta</math></b>	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$ $A, B \in \mathbb{R}$

**Exemple 1:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E)  $y'' - y' - 2y = 0$

L'équation caractéristique est :  $r^2 - r - 2 = 0$

$$(r - 2)(r + 1) = 0$$

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$   $A, B \in \mathbb{R}$

**Exemple 2:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E)  $y'' - 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est :  $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$(r - 2)^2 = 0$$

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = (Ax + B)e^{2x}$   $A, B \in \mathbb{R}$

**Exemple 3:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E)  $y'' - 2y' + 5y = 0$

L'équation caractéristique est :  $r^2 - 2r + 5 = 0$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées :  $1 + 2i$  et  $1 - 2i$

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$   $A, B \in \mathbb{R}$

**Propriété :** Pour tout triplet  $(x_0, y_0, z_0)$  de réels, étant donnée l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est une équation différentielle du second degré d'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  alors il existe une solution vérifiant  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = z_0$

**Exemple:** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E)  $y'' + 4y' + 7y = 0$  avec condition initiale  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

L'équation caractéristique est :  $r^2 + 4r + 7 = 0$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées :  $-2 + i\sqrt{3}$  et  $-2 - 2i\sqrt{3}$

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x)e^{-2x}$   $A, B \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0$  nous donne  $A = 0$  et  $f'(0) = 1$  donne  $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . D'où  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}x e^{-2x}$ .

#### 4- Equation différentielle avec second membre

- Les équations différentielles avec second membre sont des équations du type  $y'' + ay' + by = g$  (2<sup>nd</sup> degré) et  $f' + af = g$  (1<sup>er</sup> degré) où  $g$  est une fonction donnée ( $a, b$  deux constantes réelles).
- Les équations différentielles  $y'' + ay' + by = 0$  et  $f' + af = 0$  sont les équations différentielles sans second membre respective associées.

- Désignons par (E) l'équation avec second membre et (E') l'équation sans second membre associée. Pour résoudre l'équation (E) :
  - On détermine une solution  $g$  solution particulière de (E)). Dans ce cas toutes les indications seront données à l'énoncé pour permettre de trouver une telle solution
  - On montre alors qu'une fonction  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $f - g$  est solution de (E')
  - On résout alors l'équation (E')
  - Soit  $h$  la forme générale des solutions de (E')
  - Les solutions de (E) sont des fonctions  $f$  égale à  $g + h$  ( $f$  est la solution générale).

### Exercice

On considère l'équation différentielle : (E) :  $y' - 3y = \sin x$

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$ , l'équation sans second membre associé :

$$(E_0): y' - 3y = 0$$

2. Déterminer des réels  $a$  et  $b$  de sorte que la fonction  $p$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$p(x) = a \cos x + b \sin x \text{ soit solution de (E) sur } \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que  $f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $f - p$  est une solution de (E<sub>0</sub>) sur  $\mathbb{R}$ .

4. En déduire les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution

1. Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sans second membre associé :

$$(E_0): y' - 3y = 0 \text{ sont de la forme : } y(x) = C e^{3x}$$

2. La fonction  $p$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$p'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

La fonction  $p$  est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel  $x$  :

$$-a \sin x + b \cos x - 3a \cos x - 3b \sin x = \sin x$$

$$(-a - 3b) \sin x + (b - 3a) \cos x = \sin x$$

Par identification on a :

$$-a - 3b = 1 \text{ et } -3a + b = 0 \text{ donc } a = -\frac{1}{10} \text{ et } b = -\frac{3}{10}.$$

$$\text{D'où } p(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$f$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$

$$f' - 3f = \sin x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } p' - 3p = \sin x \text{ donc}$$

$$f' - 3f = p' - 3p$$

$$(f - p)' - 3(f - p) = 0$$

$f - p$  solution de (E<sub>0</sub>) sur  $\mathbb{R}$

4. Poursuivons nos équivalences :  $f(x) - p(x) = C e^{3x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = p(x) + C e^{3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x + C e^{3x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**EXERCICES D'APPLICATIONS** (Fiche TD sur les équations différentielles)

## CHAPITRE SERIE STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

O.P.O : A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Exploiter et regrouper les résultats d'une enquête portant sur deux variables ;
- Construire un tableau à double entrée, puis les tableaux marginaux d'une série double, Interpréter un tableau à double entrée ;
- Construire le nuage des points d'une série double ;
- Calculer les paramètres d'une série double;
- Reconnaître l'opportunité d'un ajustement linéaire à partir du nuage de point, déterminer une équation de la droite de régression ;
- Utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour évaluer le lien entre deux caractères étudiés.

### I- ORGANISATION DES DONNEES-NUAGE DES POINTS

#### 1) Organisation des données

##### Activité 1

Une enquête menée sur un échantillon de 30 adhérents du club de sport FEDERAL DU NOUN a permis de collecter les données suivantes relatives au Poids(en Kg) et à la taille(en cm) de chaque adhérent :

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Poids (X)	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille (Y)	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	171

N°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Poids (X)	62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
Taille (Y)	174	174	171	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

- a) Dresser la liste des modalités  $x_i$  du caractère X, puis la liste des modalités  $y_i$  du caractère Y
- b) Compléter le tableau à double entrée suivant par les effectifs de chacun des couples  $(x_i ; y_i)$  et les totaux

X(x <sub>i</sub> ) \ Y(y <sub>j</sub> )	59	62	65	68	71	74	77	Total
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	6
174	0	2	3	0	3	2	0	10
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	2
Total	1	4	6	7	5	5	2	30

- c) Quel est le nombre d'adhérents ayant un poids de 68kg et une taille de 171cm ?
- d) Dresser le tableau des effectifs de chaque caractère

#### Solution

- a) Modalités  $x_i$  du caractère X : 59; 62; 65; 68; 71 ; 74 et 77  
 Modalités  $y_i$  du caractère Y : 165 ; 168 ; 171 ; 174 ; 177 et 180
- b) Déjà
- c) 4 adhérents
- d) Les totaux obtenus dans la dernière ligne du tableau à double entrée de b) permettent de ressortir :

D'une part le tableau des effectifs du caractère X.

Poids ( $x_i$ )	59	62	65	68	71	74	77
effectif ( $n_i$ )	1	4	6	7	5	5	2

D'autre part le tableau des effectifs du caractère Y.

Taille ( $y_j$ )	165	168	171	174	177	180
effectif ( $n_j$ )	5	3	6	10	4	2

NB : Ces deux tableaux sont appelés *séries marginales* de la série double (X ; Y)

### Résumé

Les résultats d'une enquête portant sur l'étude de deux caractères de chaque individu d'une population constituent une série statistique appelée *série double* ou *série statistique à deux caractères*.

Si on désigne par X et Y les caractères étudiés alors:

- Les *différentes modalités de la série double* sont les couples  $(x_i ; y_j)$  ou  $x_i$  est une modalité du caractère X et  $y_j$  celle du caractère Y. L'**effectif** de la modalité  $(x_i ; y_j)$  est noté  $n_{ij}$  et la *série statistique double* est notée  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$
- Les séries statistiques simples  $(x_i ; n_i)$  et  $(y_j ; n_j)$  ou  $n_i$  et  $n_j$  sont les effectifs respectifs des modalités  $x_i$  et  $y_j$ , sont appelées *séries marginales* de la série double  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$

Pour mieux exploiter une les séries  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$ , on peut regrouper dans un tableau à double entrée aux marges duquel figurent les séries simples  $(x_i ; n_i)$  et  $(y_j ; n_j)$ . Ceci justifie leurs dénomination de *séries marginales*

$x_i$					
$y_j$					
	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	total
$y_1$	$n_{11}$	$n_{12}$		$n_{1p}$	
$y_2$	$n_{21}$	$n_{22}$		$n_{2p}$	
.					
.					
.					
$y_q$	$n_{q1}$	$n_{q2}$		$n_{qp}$	
<b>Total</b>					<b>N</b>

- 2) Nuage des points d'une série double

**Définition : Nuage de point**

Soit  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$  ou  $(x_i ; y_j)$  une série statistique à deux caractères X et Y.

L'ensemble des points  $M_{ij} (x_i ; y_j)$  est appelé nuage de points associé à la série.

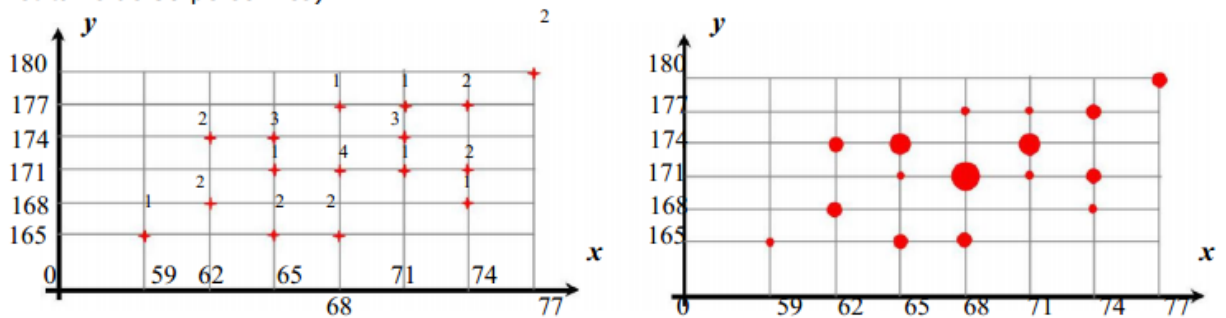
Lorsque les couples  $(x_i ; y_j)$  n'ont pas tous pour effectif 1, il existe deux modes de représentation :

Représentation par points pondérés : On indique à côté de chaque point  $M_{ij} (x_i ; y_j)$  l'effectif  $n_{ij}$

Représentation par tache : chaque point  $M_{ij} (x_i ; y_j)$  est représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif

**Exemple :**

Les graphiques ci-dessous illustrent les deux modes de représentation du nuage de points de la série statistique  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$  de l'exemple 1 de l'activité 1 (poids et taille de 30 personnes)



**Définition : Point moyen**

Soit  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$  ou  $(x_i ; y_j)$  une série statistique à deux caractères X et Y.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série le point G de coordonnées  $(\bar{x} ; \bar{y})$  où :

- $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les moyennes des séries marginales de la série  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \text{ lorsque la série est du type } (x_i ; y_j)$$

**Exemple :**

Point moyen G de la série  $(x_i ; y_j ; n_{ij})$  des poids et tailles donnée à l'exemple 1 de l'activité 1 :

On rappelle les séries marginales :

Poids ( $x_i$ )	59	62	65	68	71	74	77
effectif ( $n_i$ )	1	4	6	7	5	5	2

Alors  $\bar{x} = \frac{59 \times 1 + 62 \times 4 + 65 \times 6 + 68 \times 7 + 71 \times 5 + 74 \times 5 + 77 \times 2}{30} = 68,4$

Taille ( $y_j$ )	165	168	171	174	177	180
effectif ( $n_j$ )	5	3	6	10	4	2

Alors  $\bar{y} = \frac{165 \times 5 + 168 \times 3 + 171 \times 6 + 174 \times 10 + 177 \times 4 + 180 \times 2}{30} = 172,1$

Alors :  $G(68,4 ; 172,1)$

II- AJUSTEMENT LINEAIRE D'UNE SERIE DOUBLE

Soit  $(x_i ; y_j)$  une série statistique à deux caractères quantitatifs X et Y étudiés sur une population d'effectif total N.

Pour étudier la dispersion de chaque caractère X et Y, on peut calculer leurs variances :

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\bar{x})^2 \text{ et } V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^2 - (\bar{y})^2$$

Mais il est utile d'introduire une quantité qui fasse intervenir à la fois les valeurs de X et de Y.

**Définition :**

On appelle covariance de la série double  $(x_i ; y_j)$  le nombre noté  $\text{Cov}(X, Y)$  tel que :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}.$$

La seconde expression est plus commode pour les calculs.

**Définition :**

Le coefficient de corrélation linéaire est le nombre réel noté  $r$  qui est défini par :

$$r = \frac{\text{Cov}(x;y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ ou } \sigma_x \text{ et } \sigma_y \text{ représentent respectivement l'écart type de } x \text{ et de } y$$

Lorsque les points du nuage semblent alignés autour d'une droite, on dit qu'on peut ajuster ce nuage à cette droite : Ce type d'ajustement est appelé *ajustement linéaire*. Les relations entre  $x$  et  $y$  sont de la forme  $y = ax + b$  ou  $x = ay + b$ .

Cette relation permet d'exprimer la valeur d'un caractère en fonction de l'autre. Il existe deux méthodes pour déterminer cette droite à savoir la méthode des Moindres carrés et celle de Mayer

**1) Méthode des moindres carrés**

La droite de régression de  $y$  en  $x$  est donnée par

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(x;y)}{V_x} \text{ Et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

La droite de régression de  $x$  en  $y$  est donnée par

$$x = ay + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(x;y)}{V_y} \text{ Et } b = \bar{x} - a\bar{y}$$

Exercice d'application

Afin d'orienter ses investissements, une chaîne d'hôtels réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Une analyse établit un lien entre le taux d'occupation (en %) et le montant de publicité (en milliers de fcfa) .

Frais de publicité ( $x_i$ )	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation ( $y_j$ )	52	45	67	55	76	48	32	72

- Déterminer les coordonnées du point moyen
- Déterminer la covariance du couple  $(x ; y)$  ; puis son coefficient de corrélation ainsi que son interprétation
- Déterminer par la méthode de moindres carrés une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$
- Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation des chambres de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4000000fcfa ?

Solution (Excellence Page 337)

## 2) Méthode de Mayer

Pour déterminer la droite de Mayer :

○ On partage de la série statistique initiale en deux séries d'effectifs égaux si l'effectif total est pair, sinon on met le couple du milieu soit dans le 1<sup>er</sup> soit dans le 2<sup>ème</sup> groupe ;

er On détermine les points moyens  $G_1$  et  $G_2$  de chaque groupe ;

& La droite de Mayer est la droite passant par les points  $G_1$  et  $G_2$ .

### Exercice d'application

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dette des pays du tiers monde entre 1978 et 1992 (en milliers de dollars).

Années	1978	1982	1986	1990	1992
Rang de l'année ( $x_i$ )	0	4	8	12	14
Dettes ( $y_i$ )	383	753	1089	1346	1510

- Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  de cette série
- Écrire une équation de la droite de Mayer de cette série. (les coefficients seront donnés à  $10^1$  près).
- Quelle est l'estimation à 1 milliard près du montant prévisible de cette dette dans les pays du tiers monde en l'an 2005 ?

### Solution

- Par définition le couple de coordonnées du point moyen est :  $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{0 + 4 + 8 + 12 + 14}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$

$$\text{avec } \bar{y} = \frac{383 + 753 + 1089 + 1346 + 1510}{5} = \frac{5081}{5} = 1016,2.$$

Conclusion :  $G(7,6 ; 1016,2)$ .

- Partageons cette série en deux séries : la première d'effectif 3 et la seconde d'effectif 2.

Série1 :

Années	1978	1982	1986
Rang de l'année ( $x_i$ )	0	4	8
Dettes ( $y_i$ )	383	753	1089

Série2 :

Années	1990	1992
Rang de l'année ( $x_i$ )	12	14
Dettes ( $y_i$ )	1346	1510

Soit  $G_1$  le point moyen de la série1 et  $G_2$  celui de la série2, la droite de Mayer est la droite  $(G_1G_2)$ .

$$X_1 = \frac{0 + 4 + 8}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{383 + 753 + 1089}{3} = \frac{2225}{3} \approx 741,7 \quad \text{donc } G_1(4 ; 741,7).$$

$$X_2 = \frac{12 + 14}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1346 + 1510}{2} = \frac{2856}{2} = 1428 \quad \text{donc } G_2(13 ; 1428).$$

Déterminons une équation cartésienne de la droite  $(G_1G_2)$ .

La droite  $(G_1G_2)$  admet une équation cartésienne de la forme  $y = ax + b$  avec :

$$a = \frac{Y_{G_2} - Y_{G_1}}{X_{G_2} - X_{G_1}} = \frac{1428 - 741,7}{13 - 4} = \frac{686,3}{9} \approx 76,3 ;$$

$$G_1 \in (G_1G_2) \text{ donc } Y_{G_1} = aX_{G_1} + b ; \text{ d'où } b = Y_{G_1} - aX_{G_1} \approx 741,7 - 76,3 \times 4 = 436,5.$$

Conclusion : Une équation cartésienne de la droite de Mayer est :  $y = 76,3x + 436,5$ .

- D'après ce qui précède, une estimation  $y$ , en milliards de dollars, de la dette des pays du tiers monde au cours de l'année de rang  $x$  est :  **$y = 76,3x + 436,5$** .

En 2005,  $x = 2005 - 1978 = 27$  ; d'où  $y = 76,3 \times 27 + 436,5 = 2496,6$ .

Conclusion : En 2005, la dette dans les pays du tiers monde est estimée à 2497 milliards de dollars.

---

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>PROBABILITÉS</b>	<b>2</b>
1.1	Analyse Combinatoire . . . . .	2
1.1.1	p-listes ou p-uplets . . . . .	2
1.1.2	Arrangements . . . . .	3
1.1.3	Permutations . . . . .	3
1.1.4	Combinaisons . . . . .	4
1.2	Calculs de Probabilités . . . . .	5
1.2.1	Vocabulaire aléatoire . . . . .	5
1.2.2	Probabilité d'un évènement . . . . .	7
1.2.3	Schéma de Bernoulli . . . . .	10
1.2.4	Probabilités conditionnelles . . . . .	11
1.3	Variables aléatoires . . . . .	15
1.3.1	Définitions et vocabulaires . . . . .	15
1.3.2	Caractéristique d'une variable aléatoire . . . . .	17
1.3.3	Loi Binômiale . . . . .	18

# PROBABILITÉS

---

**Pré-requis** : Dénombrement classe de première

## **Leçon I : QUELQUES RAPPELS SUR LE DENOMBREMENT**

### 1.1 Analyse Combinatoire

Dans la suite,  $\Omega$  est un ensemble comportant  $n$  éléments distincts.

#### 1.1.1 p-listes ou p-uplets

On appelle **p-uplets** de l'ensemble  $\Omega$ , toute disposition ordonnée, avec répétition de  $p$  éléments d'entre les  $n$  éléments. Le nombre de **p-uplets** de  $\Omega$  est  $n^p$

**Exemple 1.1.1.** *Pour verrouiller son téléphone androïde, Florence doit former un code à 05 chiffres.*

- 1) *combien de codes peut-elle former ?*
- 2) *combien de codes constituer uniquement de chiffres impairs peut-elle former ?*
- 3) *Combien de codes ne commençant pas par zéro peut-elle former ?*
- 4) *Combien de codes peut-elle former sachant que le premier chiffre est impair et le dernier est pair ?*

**Solution :**

- 1) *Un code est un 5-uplets car c'est une disposition ordonnée avec répétition, D'où on a  $10^5$  codes possibles.*
- 2) *Le nombre de codes qu'on peut former est  $5^5$  codes.*

- 3) Le nombre de codes ne commençant pas par zéro que l'on peut former est  $9 \times 10^4$  codes.
- 4) Le nombre de codes quelle peut former sachant que le premier est un nombre impair et le dernier un nombre pair  $5 \times 5 \times 10^3$  codes.

### 1.1.2 Arrangements

On appelle **Arrangement** de  $p$  objets choisis parmi les  $n$  éléments que comporte  $\Omega$ , toute suite ordonnée sans répétition de  $p$  objets de ces éléments. On note le nombre d'arrangement de  $p$  objets choisis parmi  $n$ ,  $A_n^p$  et défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Exemple 1.1.2.** De combien de façon peut-on ranger 03 voitures dans un parking de 04 places numérotées de 1 à 4 ?

**Solution :** Un rangement peut-être vue comme une disposition ordonnée sans répétition, Ainsi nous  $A_4^3$  façons de ranger.

**Exemple 1.1.3.** Combien de mots à 05 lettres distincts ayant un sens ou non peut-on former avec les lettres de l'alphabet ?

### 1.1.3 Permutations

On appelle **Permutation** des éléments de  $\Omega$ , toute disposition ordonnée et sans répétition de l'ensemble des  $n$  éléments. Le nombre de permutation de  $n$  éléments est  $A_n^n = n!$ .

**Exemple 1.1.4.** De combien de façon peut-on ranger les 06 classes de terminales du lycée ?

Le nombre de façons est le nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments soit 6! façons.

**Exemple 1.1.5.** De combien de façon peut-on classer les 07 terminales D du lycée telles que la terminale  $D_3$  soit à la première place ?

### 1.1.4 Combinaisons

On appelle **Combinaison** de  $p$  éléments choisis parmi les  $n$  éléments de  $\Omega$ , toute disposition non ordonnée et sans répétition de  $p$  éléments choisis parmi les  $n$  éléments de l'ensemble  $\Omega$ . Le nombre de combinaisons de  $p$  objets pris parmi  $n$  est noté  $C_n^p$  et défini par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{n!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Exemple 1.1.6.** *On désire former une équipe de football dans une classe contenant 30 élèves. Combien d'équipes peut-on former ?*

**Exemple 1.1.7.** *Une urne contient 12 boules dont 05 rouges et 07 blanches. On tire simultanément 04 boules de l'urne.*

- 1) *De combien de façon peut-on effectuer ce tirage ?*
- 2) *De combien de façon peut-on obtenir les boules de mêmes couleurs ?*
- 3) *De combien de façon peut-on obtenir 02 boules rouges et 02 boules blanches ?*
- 4) *De combien de façon peut-on obtenir au moins une boule blanche ?*

**Solution :**

- 1) *Le nombre de façon que l'on peut effectuer ce tirage est le nombre de combinaison de 4 objets pris parmi 12 soit  $C_{12}^4$ .*
- 2) *Pour obtenir les boules de mêmes couleurs, on a  $C_5^4 + C_7^4$  tirages possibles.*
- 3) *Le nombre de façon d'obtenir 02 boules rouges et 02 boules blanches est  $C_5^2 \times C_7^2$*
- 4) *Le nombre de façon d'obtenir au moins une boule blanche est  $C_{12}^4 - C_5^4$ .*

**Propriétés 1.1.1.** *Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq p \leq n$ .*

- 1)  $C_n^p = C_n^{n-p}$ .
- 2)  $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ .
- 3)  $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$  on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^0$$

**Leçon II : CALCULS DE PROBABILITES**

**Objectifs :** A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Reconnaître et déterminer la probabilité d'un évènement.
- Reconnaître un schéma ou une épreuve de Bernoulli.
- Reconnaître et déterminer une probabilité conditionnelle.

## 1.2 Calculs de Probabilités

### 1.2.1 Vocabulaire aléatoire

**Activité :**

Une expérience consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à noter le nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé.

1. a) Peut-on dire à l'avance quel nombre va apparaître sur la face supérieure ? pourquoi ?  
Comment peut-on appeler une telle expérience ?  
b) Citer 2 expériences aléatoires dans la vie courante.
2. Déterminer l'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles.
3. On pose  $A$  : «obtenir un nombre premier» ;  $B$  : «obtenir un multiple de 3» ;  
 $C$  : «obtenir un nombre supérieur ou égal à 7 ». Donner l'ensemble des résultats favorables pour  $A, B$  et  $C$ .

**Solution :**

1. a) Non, car ça relève du hasard. Une telle expérience est dite aléatoire.  
b) Nous avons :
  - lancer d'une pièce de monnaie équilibré à deux faces : Pile (P) ou face (F).
  - le tirage au sort à l'issue d'une promotion.
2. L'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  et on l'appelle «univers des possibles » associé à l'expérience aléatoire.
3. Nous avons  $A = \{2; 3; 5\}$  ;  $B = \{3; 6\}$  et  $C = \{\} = \emptyset$ .
  - **Expérience aléatoire**

**Définition 1.2.1.** On appelle **expérience aléatoire**, toute expérience ayant plusieurs issues et dont on ne peut pas prévoir avec certitude laquelle de ces issues sera réalisée.

**Définition 1.2.2.** Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle **évènement** toute partie de  $\Omega$ .

Un évènement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience.

**Exemple 1.2.1.** On lance un dé et on observe le numéro de la face supérieure. « obtenir un nombre pair » est l'évènement  $A = \{2; 4; 6\}$  donc si on lance le dé et on obtient le numéro 2 ou 4 ou 6 alors l'évènement  $A$  est réalisé.

**Remarque 1.2.1.** 1) Un résultat obtenu à l'issue d'une expérience aléatoire est appelé **une éventualité** liée à cette expérience.

2) **L'univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles formé de toutes les éventualités de l'expérience.

3) Toute partie de l'univers associée à une expérience aléatoire est appelée **évènement**.

4) Un évènement  $B$  est **réalisé** si le résultat obtenu à l'issue de l'expérience est une de ses éventualités.

5) **L'évènement certain** d'une expérience aléatoire est l'univers.

6) **L'évènement impossible** est l'évènement qui n'est jamais réalisé dans l'expérience. On le note  $\emptyset$ .

7) Un **évènement élémentaire** est un évènement formé d'une unique éventualité de l'épreuve.

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements

8) L'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois  $A$  et  $B$  est noté  $A \cap B$ .

9) L'ensemble des éventualités qui réalisent  $A$  ou  $B$  est noté  $A \cup B$ .

10) Les évènements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$ .

11) Les évènements  $A$  et  $B$  sont dits **contraires** si  $A$  est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalisent pas  $B$ . On note  $A = \bar{B}$  ou  $A = C_{\Omega}^B$ .

12) Deux évènements sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'est pas liée ou conditionnée par celle de l'autre.

**Exercice 1.1.** On lance un dé parfait et on observe le numéro de la face supérieure. L'univers associé à cette expérience est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . On considère les événements suivants :

$A$  : « obtenir un nombre pair »

$B$  : « obtenir un nombre premier »

$A$  : « obtenir le chiffre 6 »

Déterminer les événements suivantes :  $A, B, C, A \cup B, A \cap B, B \cap C$  et  $\bar{A}$ .

**Solution :**

Lorsqu'on lance un dé et on observe le numéro de la face supérieure, " obtenir un nombre pair " est l'évènement  $A = \{2; 4; 6\}$ . De même, nous avons  $B = \{2; 3; 5\}$ ,  $C = \{6\}$ ,  
 $A \cup B = \{2; 4; 6\} \cup \{2; 3; 5\} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ ,  $A \cap B = \{2; 4; 6\} \cap \{2; 3; 5\} = \{2\}$ ,  $B \cap C = \emptyset$  et  
 $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$

**Exercice 1.2.** Une Urne contient 5 boules indiscernables au toucher dont 2 boules blanches et 3 boules rouges. Une expérience consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne.

1) Déterminer l'univers  $\Omega$

2) Déterminer les événements suivants :  $D$  : « obtenir 2 boules de même couleur »,  $E$  : « obtenir 2 boules de couleurs différentes ».

**Solution :**

1) L'univers  $\Omega = \{B_1B_2; B_1R_3; B_1R_4; B_1R_5; B_2R_3; B_2R_4; B_2R_5; R_3R_4; R_3R_5; R_4R_5\}$

2) L'évènement  $D$  : « obtenir 2 boules de même couleur » est  $D = \{B_1B_2; R_3R_4; R_3R_5; R_4R_5\}$   
 et  $E$  : " obtenir 2 boules de couleur différente est  $E = \{B_1R_3; B_1R_4; B_1R_5; B_2R_3; B_2R_4; B_2R_5\}$ .

## 1.2.2 Probabilité d'un évènement

**Activité :**

On lance un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on relève le nombre sur la face supérieure du dé.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles.

Avec l'univers  $\Omega$  lié à cette épreuve, on constitue une population statistique d'effectif total  $card\Omega$  et on assimile un évènement  $A$  à une modalité dont l'effectif est  $cardA$ .

2. a) Déterminer la fréquence de réalisation de l'évènement  $A$  : " obtenir un nombre premier " Cette fréquence est la probabilité de l'évènement  $A$ . Elle est notée  $P(A)$ .  
On considère les évènements suivants :  $B$  : " le numéro obtenu est supérieur à 4 ",  
 $C$  : " le numéro obtenu est un diviseur de 10 ".  
b) Calculer  $P(B)$ ;  $P(C)$ ;  $P(B \cap C)$ ;  $P(B \cup C)$ ;  $P(\overline{B})$ ;  $P(\Omega)$  et  $P(\emptyset)$ .

**Solution :**

la face supérieure du dé.

1. Puisque le dé est parfaitement équilibré un résultat peut être soit le chiffre 1, soit 2, soit 3, soit 4, soit 5, soit 6. Nous avons au total 6 résultats possibles. L'univers  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
2. a) La fréquence de réalisation de l'évènement  $A$  est  $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ , soit  $\frac{3}{6}$   
b) Puisque les numéros supérieurs à 4 sont 4,5 et 6, alors  $P(B) = \frac{3}{6}$ .  
Les diviseurs de 10 sont 1, 2 et 5, ainsi  $P(C) = \frac{3}{6}$ .  
L'évènement  $B \cap C$  est l'évènement " le numéro obtenu est supérieur à 4 et est un diviseur de 10", Soit  $B \cap C = \{5\}$ , d'où  $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$ . De même  $P(B \cup C) = \frac{5}{6}$ ,  
 $P(\overline{B}) = \frac{3}{6}$ ,  $P(\Omega) = 1$  et  $P(\emptyset) = 0$ .

**Définition 1.2.3.** Soit  $\Omega$  l'univers des évènements associés à une expérience aléatoire. On appelle **Probabilité** sur  $\Omega$  toute application  $P$  de l'ensemble des parties de  $\Omega$  vers l'intervalle  $[0,1]$  vérifiant :

- 1)  $P(\Omega) = 1$ .
- 2)  $P(\emptyset) = 0$ .

**Définition 1.2.4.** On considère une expérience aléatoire dont l'univers  $\Omega$  est fini. On suppose que tous les évènements élémentaires ont la même chance d'être réalisé. La fréquence d'un évènement  $A$  ne dépend que de l'effectif des éventualités qui le réalise, cette fréquence notée  $P(A)$  est encore appelée " probabilité de la réalisation de  $A$  ". On a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

**Remarque 1.2.2.** On reconnaît qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : **parfaitement équilibré, non pipé ou non truqué, indiscernable au toucher, au hasard, ...**

**Propriétés 1.2.1.** Soit  $P$  une probabilité définie sur l'ensemble des parties de  $\Omega$ .

- Pour tout évènement  $A$  de  $\Omega$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- Pour tous évènements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  et Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- La probabilité d'un évènement  $A$  notée  $P(A)$ , est la somme des probabilités des évènements élémentaires contenus dans  $A$ . ie si  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$  Alors  $P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_r\})$ .
- Pour tous évènements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ , si  $A \subseteq B$  alors  $P(A) \leq P(B)$ .
- Pour tous évènements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

**Exemple 1.2.2.** Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules noires.

**I-** On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.

- 1) Quel est le nombre de tirages possible ?
- 2) Calculer les probabilités des évènements  $A, B$  et  $C$ .

$A$  : «obtenir des boules tricolores»,  $B$  : «obtenir exactement deux boules blanche»  
et  $C$  : «obtenir au moins une boule rouge».

**II-** Répondre aux questions précédentes sachant qu'on tire simultanément trois boules de cette urne.

**Solution :**

**I-** On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.

- 1) Le nombre de tirages est le 3-uplets d'un ensemble à 10 éléments. Soit  $10^3$  ie 1000 tirages possibles.
- 2) Calculons les probabilités des évènements  $A, B$  et  $C$ .

Nous avons :  $P(A) = \frac{5 \times 3 \times 2}{10^3}$ ,  $P(B) = \frac{3^2 \times 7}{10^3}$ , et  $P(C) = \frac{10^3 - 8^3}{10^3}$

**II-** Répondre aux questions précédentes sachant qu'on tire simultanément trois boules de cette urne. (Voir T.D.)

**Exemple 1.2.3.** On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tiré. La probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle au numéro qui y apparaît. Calculer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

**Solution :** Soit  $P_i, i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  la probabilité d'apparition de la face "i". Puisque la probabilité d'apparition de la face "i" est proportionnelle à "i", Alors pour tout  $i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   $P_i = k \times i, k$  un réel non nul. Ainsi  $P_1 = k; P_2 = 2k; P_3 = 3k; P_4 = 4k; P_5 = 5k; P_6 = 6k, k \in \mathbb{R}^*$ . Comme  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$ , Ainsi on a  $k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$  et  $k = \frac{1}{21}$ . D'où  $P_1 = \frac{1}{21}, P_2 = \frac{2}{21}, P_3 = \frac{3}{21}, P_4 = \frac{4}{21}, P_5 = \frac{5}{21}$  et  $P_6 = \frac{6}{21}$ .

**Exercice 1.3.** On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tiré. La probabilité d'apparition d'une face est inversement proportionnelle au numéro qui y apparaît.

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face du dé. (Voir T.D.)

### 1.2.3 Schéma de Bernoulli

**Définition 1.2.5.** 1) Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux éventualités : Le "**succès**" et "**l'échec**". La probabilité de "**succès**" est notée **p** et celle de "**l'échec**" est notée **q=1-p**. Comme exemple : lancé d'une pièce de monnaie  
2) Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter plusieurs fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli.

**Propriétés 1.2.2.** Soit un schéma de Bernoulli à  $n$  épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est  $p$ . La probabilité d'obtenir exactement  $k$  succès ( $0 \leq k \leq n$ ) au cours de ces  $n$  épreuves est :  $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$ .

**Exemple 1.2.4.** Les récentes statistiques au Cameroun montrent qu'il naît en moyenne 55 filles pour 48 garçons.

1. Un enfant va naître. Quelle est la probabilité :
  - a) Qu'il soit un garçon ?
  - b) Qu'il soit une fille ?
2. Dans une famille de 5 enfants, quelle est la probabilité :
  - a) Qu'il ait 2 filles et 3 garçons ?
  - b) Qu'il ait 4 garçons ?

**Solution :**

1. Un enfant va naître.

a) La probabilité qu'il soit un garçon est  $\frac{48}{103}$ .

b) La probabilité qu'il soit une fille est  $\frac{55}{103}$ .

2. Dans une famille de 5 enfants,

a) La probabilité qu'il ait 2 filles et 3 garçons est  $C_5^2 \left(\frac{55}{103}\right)^2 \left(\frac{48}{103}\right)^3$ .

b) La probabilité qu'il ait 4 garçons est  $C_5^4 \left(\frac{55}{103}\right)^1 \left(\frac{48}{103}\right)^4$ .

**Exercice 1.4.** On lance 08 fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir la face " pile " est  $P(p) = \frac{3}{4}$  et celle de la face " face " est  $P(f) = \frac{1}{4}$ .

Déterminer la probabilité d'obtenir **05** fois la face " pile ".

**Solution :** lorsqu'on lance une pièce, nous avons deux éventualités "pile" ou "face". Comme nous répétons plusieurs fois l'épreuves, nous avons un schéma de Bernouilli. Donc la probabilité d'obtenir **05** fois la face " pile " est  $C_8^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^3$ .

### 1.2.4 Probabilités conditionnelles

#### Activité :

Le tableau ci-dessous donne la situation d'aptitude des élèves d'une classe de terminale "D" dans un collège de la place.

	Garçons	Filles	Totaux
Sportifs	24	16	40
Non sportifs	12	8	20
Totaux	36	24	60

- On choisit au hasard un élève dans cette classe. Calculer la probabilité des évènements suivants :  $A$  : « l'élève est un sportif »,  $B$  : « l'élève est une fille et est sportif »,  $C$  : « l'élève est un garçon et n'est pas sportif ».
- On suppose que l'élève est sportif. Calculer la probabilité qu'il soit une fille.
- On suppose que l'élève est un garçon. Calculer la probabilité qu'il soit non sportif.

**Solution :**

1. On choisit au hasard un élève dans cette classe, donc tous les élèves ont les mêmes chance d'être choisis. Il y a équiprobabilité. On a :  $P(A) = \frac{40}{60}$  ;  $P(B) = \frac{16}{40}$  et  $P(C) = \frac{12}{20}$ .
2. Puisque nous avons 40 sportifs dont 16 filles, la probabilité qu'il soit une fille est  $\frac{16}{40}$ .
3. La probabilité qu'il soit non sportif est  $\frac{12}{36}$ . En effet, nous avons au total 32 garçons dont 12 non sportifs.

**Définition 1.2.6.** Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire et  $P$  une probabilité définie sur l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Soient  $B$  et  $A$  deux évènements tel que  $P(B) \neq 0$ . L'évènement noté  $A/B$  est l'ensemble des éventualités pour lesquelles  $A$  est réalisé sachant que  $B$  est déjà réalisé. On l'appelle l'évènement  $A$  conditionné par  $B$  et on lit "  $A$  sachant  $B$  ". On appelle **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant que  $B$  est réalisé, le réel noté  $P(A/B)$  ou  $P_B(A)$  et défini par :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Proposition 1.2.1.**
- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ce qui équivaut à  $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$ .
  - Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $P(A/B) = P(A)$  ce qui équivaut à  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .
  - Si  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  est une partition de l'univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire, alors pour tout évènement  $A$  ; On a

$$P(A) = P(A/E_1) \times P(E_1) + P(A/E_2) \times P(E_2) + \dots + P(A/E_n) \times P(E_n).$$

C'est le théorème des probabilités totales connu sous le nom de " **théorème de Bayes** ".

**Exemple 1.2.5.** Une urne contient 05 boules indiscernables au toucher dont 03 rouges et 02 noires. On tire successivement sans remise et au hasard 02 boules de l'urne et on note leur couleur dans l'ordre des tirages effectués.

- 1) Calculer la probabilité des évènements suivants :  $A$  : " Tirer une boule noir en 1<sup>er</sup> et une boule rouge en second ",  $B$  : " Tirer une boule rouge en second ".
- 2) Sachant que la deuxième boule est rouge, quelle est la probabilité que la première soit noir.

**Solution :**

1) Nous avons :  $P(A) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} = \frac{3}{10}$  et  $P(B) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} + \frac{A_3^2}{A_5^2} = \frac{3}{5}$ .

2) Désignons par  $C$  l'évènement : «la première est noir», la probabilité que la première soit noir sachant que la deuxième boule est rouge est  $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$ .

**Exemple 1.2.6.** Un atelier de montage reçoit des pièces provenant soit de l'usine  $A$ , soit de l'usine  $B$ . Les proportions sont 0,45 pour  $A$  et 0,55 pour  $B$ . Parmi les pièces provenant de  $A$ , il y a 0,03 qui sont défectueuses et parmi celles provenant de  $B$ , il y a 0,05 qui sont défectueuses.

- 1) Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse dans l'ensemble des pièces reçues.
- 2) Sachant qu'une pièce choisie au hasard est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de  $A$ .

**Solution :** (voir **Travaux Dirigés**)

**UTILISATION DE L'ARBRE DE CHOIX**

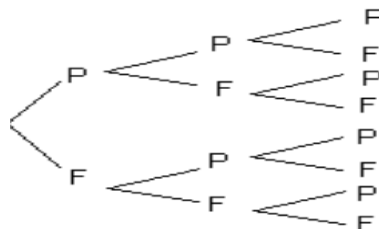
**Exemple 1.2.7.** On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.

- 1) Donner la liste des résultats possibles en notant  $P$  pour Pile et  $F$  pour Face.
- 2) Donner la probabilité des évènements suivants :  $A \ll$  le tirage ne comporte que des Piles  $\gg$  et  $B \ll$  le tirage comporte au moins une fois Face  $\gg$

**Solution :**

1) À l'aide de l'arbre de choix ci-dessous, nous pouvons lister les éléments de  $\Omega$  :

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}. \text{ D'où } \text{Card}\Omega = 8.$$



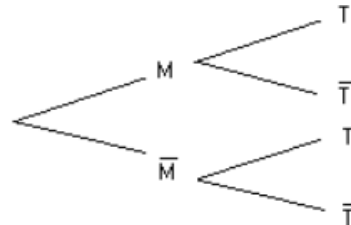
- 2) Les tirages étant équiprobables, nous avons  $P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{8}$ . Nous remarquons que  $B = \bar{A}$ , donc  $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ .

**Exemple 1.2.8.** Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité qu'il achète un téléviseur est 0,6.

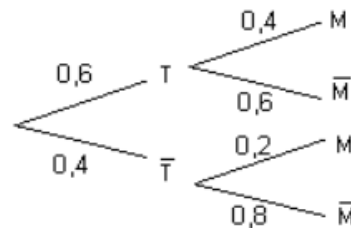
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est 0,4.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

- 1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
- 3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
- 4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



**Solution :** Désignons par  $T$  l'évènement « le client achète un téléviseur » et par  $M$  l'évènement « le client achète un magnétoscope ». Ainsi, nous avons  $P(T) = 0,6$  et  $P(M) = P(\bar{T}) = 1 - 0,6 = 0,4$ ;  $P_T(M) = 0,4$  et  $P_T(\bar{M}) = 1 - 0,4 = 0,6$ ;  $P_{\bar{T}}(M) = 0,2$  Donc  $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = 1 - 0,2 = 0,8$ . Ce que nous pouvons traduire par l'arbre de probabilité ci-dessous :



- 1) La probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope est  $P(T \cap M)$ .

$$\text{On a : } P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} \iff P(T \cap M) = P_T(M) \times P(M) = 0,6 \times 0,4 = 0,24.$$

2) La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope est :

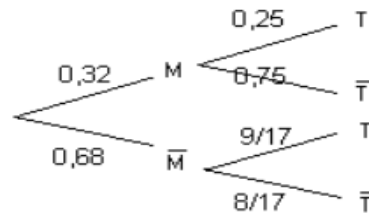
$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(T \cap M) + P(\bar{T} \cap M) \\
 &= P(T) \times P_T(M) + P_{\bar{T}} \times P_{\bar{T}}(M) \\
 &= 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,2 \\
 &= 0,32
 \end{aligned}$$

3) Le client achète un magnétoscope.

La probabilité qu'il achète un téléviseur est  $P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0,24}{0,32} = 0,75$

4) Complétons l'arbre de probabilité. Puisque  $P(M) = 0,32$  alors  $P(\bar{M}) = 1 - 0,32 = 0,68$ . Ensuite  $P_M(T) = 0,75$  alors  $P_M(\bar{T}) = 1 - 0,75 = 0,25$ .

De plus  $P_{\bar{M}}(T) = \frac{P(\bar{M} \cap T)}{P(\bar{M})} = \frac{P(T) \times P_{\bar{T}}(\bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0,6 \times 0,6}{0,68} = \frac{9}{17}$  et  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - \frac{9}{17} = \frac{8}{17}$ . Donc on a l'arbre de probabilité suivant :



## Leçon : III VARIABLES ALEATOIRES

**Objectifs :** A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Reconnaître une variable aléatoire et ses caractéristiques.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Inculquer aux élèves les notions de jeu et règle de jeu,...

## 1.3 Variables aléatoires

### 1.3.1 Définitions et vocabulaires

#### Activité :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée (on suppose que la pièce s'immobilise au sol sur une face). On gagne  $200F$  pour chaque apparition de "pile", noté  $P$

lors des trois lancers et perd  $300F$  pour chaque apparition de " face ", noté  $F$  lors des trois lancers.

1. Déterminer  $\Omega$ , l'ensemble des résultats possibles à l'issue des trois lancers.
2. a) Soit  $X$  l'application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à chaque éventualité associe le gain (algébrique) correspondant. Quelles sont les valeurs possibles prises par  $X$  ?
- b) On note  $[X = x_i]$  pour désigner l'évènement : " obtenir un gain égal à  $x_i$  "

Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeurs prises par $X : (x_i)$	...	...	...	...
Probabilité d'obtenir $x_i$	...	...	...	...
$P([X = x_i]) = p_i$				

**Solution :**

1. Déterminons l'ensemble  $\Omega$ . On a  $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPF; FFP; FPP; FFF\}$ .
2. a) Les valeurs possibles de  $X$  sont :  $-900; -400; 100$  et  $600$ .
- b) On a le tableau suivant :

Valeurs prises par $X : (x_i)$	$-900$	$-400$	$100$	$600$
$P([X = x_i]) = p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ce tableau permet d'avoir la loi de probabilité de  $X$ .

**Définition 1.3.1.** On appelle **variable aléatoire**  $X$  sur un univers  $\Omega$ , toute application de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble de toutes les valeurs prises par  $X$  notée  $X(\Omega)$  est appelée univers image de  $\Omega$  par  $X$ . L'évènement de  $\Omega$  noté  $[X = k]$  est l'ensemble des éléments  $w \in \Omega$  tels que  $X(w) = k$ . L'évènement de  $\Omega$  noté  $[X < k]$  est l'ensemble des éléments  $w \in \Omega$  tels que  $X(w) < k$ . La loi de probabilité de  $X$  est l'application qui, à tout  $x_i$  de  $X(\Omega)$  associe  $P([X = x_i])$ .

**Remarque 1.3.1.** Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau.

$x_i$	$x_1$	...	$x_n$
$P([X = x_i]) = p_i$	$P([X = x_1])$	...	$P([X = x_n])$

- Il faut aussi toujours s'assurer que  $\sum_1^n p_i = 1$ .

**Exercice 1.5.** On lance deux dés non pipés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on relève les numéros qui s'affichent sur les faces supérieures des dés. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe la somme des nombres obtenus.

- 1) Déterminer  $X(\Omega)$ .
- 2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

**Exercice 1.6.** On lance cinq fois de suite et de façon indépendante un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par  $X$  la variable aléatoire qui, à ces cinq lancers associe le nombre de multiple de trois obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

### Solution :

Lorsque nous lançons un dé soit on obtient un multiple de 3 soit on ne l'obtient pas d'où nous avons épreuve de Bernouilli et comme l'épreuve est répété 5 fois nous avons un schéma de Bernouilli. Ainsi lorsque l'on lance cinq fois de suite un dé, on peut soit obtenir 0 fois un multiple de 3, soit 1 fois, soit 2, soit 3, soit 4, soit 5 fois. ainsi On a :  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Donc

$$P_0 = C_5^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}, P_1 = C_5^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}, P_2 = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243},$$

$$P_3 = C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}, P_4 = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}, P_5 = C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}$$

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P([X = x_i])$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

### 1.3.2 Caractéristique d'une variable aléatoire

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire et  $P$  une probabilité définie sur l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  avec  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

#### • Espérance mathématique

On appelle l'Espérance mathématique (ou moyenne) le réel noté

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

#### • Variance et Ecart-type

On appelle Variance de  $X$  le nombre réel noté

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i = E(X^2) - (E(X))^2$$

et l'écart-type est le réel noté

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Exercice 1.7.** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de l'exercice 1.6 ci-dessus.

On a :

- $E(X) = 0 \times \frac{32}{243} + 1 \times \frac{80}{243} + 2 \times \frac{80}{243} + 3 \times \frac{40}{243} + 4 \times \frac{10}{243} + 5 \times \frac{1}{243} = \frac{405}{243}$ .
  - $V(X) = (0^2 \times \frac{32}{243} + 1^2 \times \frac{80}{243} + 2^2 \times \frac{80}{243} + 3^2 \times \frac{40}{243} + 4^2 \times \frac{10}{243} + 5^2 \times \frac{1}{243}) - (\frac{405}{243})^2$ .
- D'où  $V(X) = \frac{945}{243} - \frac{164025}{59049} = \frac{65610}{59049} = 1,111$ .
- $\sigma = \sqrt{1,111} = 1,05$

### 1.3.3 Loi Binômiale

Soit un schéma de Bernoulli à  $n$  épreuves où la probabilité du succès est  $p$  et celle de l'échec  $1-p$ . On lui associe une variable aléatoire notée  $X$  où  $X$  désigne le nombre de succès ; l'univers image de  $X$  est  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$ . L'application qui à  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) associe  $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$  définit la loi de probabilité de  $X$ .

Cette loi est appelée **Loi binômiale** de paramètres  $n$  et  $p$ .

**Propriétés 1.3.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , on a :

- 1)  $E(X) = np$
- 2)  $V(X) = np(1-p)$

### FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS

**Exercice 1.8.** Une urne  $A$  contient 6 boules dont trois portent le numéro 1, deux portent le numéro 2 et une porte le numéro 3.

Une urne  $B$  contient 4 boules dont une porte le numéro 1, une porte le numéro 2 et deux portent le numéro 3.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne  $A$  et une boule de l'urne  $B$ . Quelle est la probabilité :

1. Pour qu'elles portent deux numéros différents ?
2. Pour que la somme des nombres marqués sur les deux boules soit paire ?

**Exercice 1.9.** Le programme d'un examen comporte 100 sujets dont 3, tirés au sort, sont proposés à chaque candidat. Un candidat n'ayant étudié que le quart de sujets du programme subit l'épreuve.

1. Combien de sujets ce candidat a-t-il étudié ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat ait étudiée :
  - (a) Les trois sujets ?
  - (b) Deux des trois sujets ?
  - (c) Aucun des trois sujets ?
  - (d) Au moins l'un des trois sujets ?

**Exercice 1.10.** Une urne contient six boules blanches et quatre boules noires.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **A** : « Tirer deux boules de la même couleur ».
  - (b) **B** : « Tirer deux boules de couleur différentes ».
  - (c) **C** : « Tirer au moins une boule blanche ».
2. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **D** : « Tirer dans l'ordre une boule blanche puis une boule noire ».
  - (b) **E** : « Tirer deux boules de couleurs différentes ».

**Exercice 1.11.** Une urne contient six boules dont 4 blanches et 2 boules noires. Le tirage d'une boule noire rapporte 20 francs et le tirage d'une boule blanche ne rapporte rien.

1. Au cours d'un premier jeu, on extrait au hasard et simultanément 3 boules de l'urne . Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **A** : « Ne rien gagner au cours du tirage effectué ».
  - (b) **B** : « Gagner 20 francs au cours du tirage effectué ».
  - (c) **C** : « Gagner 40 francs au cours du tirage effectué ».

2. Au cours d'un deuxième jeu, on extrait au hasard successivement avec remise 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **D** : « Ne rien gagner au cours des 4 tirages effectués ».
  - (b) **E** : « Gagner 20 francs au cours des 4 tirages effectués ».
3. Au cours d'un deuxième jeu, on extrait au hasard successivement sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **F** : « Ne rien gagner au cours des 3 tirages effectués ».
  - (b) **G** : « Gagner au plus 20 francs au cours des 3 tirages effectués ».

**Exercice 1.12.** Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois **plus probable** que l'apparition des autres chiffres.

1. Calculer la probabilité d'apparition de chaque chiffre.
2. On suppose que  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = \frac{1}{7}$  et  $P_5 = \frac{2}{7}$ . Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - (a) **A** : « Obtenir un numéro paire ».
  - (b) **B** : « Obtenir au moins un numéro impair ».

**Exercice 1.13.** Florence aime le chocolat mais elle doit suivre un régime pendant une année. Le 1<sup>er</sup> jour, elle ne mange pas le chocolat. Si un jour  $n$  donné ( $1 \leq n \leq 360$ ) Florence ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur 5 qu'elle n'en mange pas le lendemain. si ce même jour Florence mange du chocolat, il y a une chance sur 2 qu'elle n'en mange pas le lendemain.

Pour  $n \geq 1$ , on désigne par  $F_n$  l'évènement « Florence ne mange pas de chocolat le jour  $n$  ». On note  $P_n = P(F_n)$ .

1. (a) Calculer  $P(F_2/F_1)$  et  $P(F_2/\bar{F}_1)$ .  
 (b) Calculer  $P(F_{n+1}/F_n)$  et  $P(F_{n+1}/\bar{F}_n)$ .  
 (c) Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$   
 (d) Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer la limite de  $P_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
2. Son père lui promet que si elle ne mange pas de chocolat le jour  $n$ , elle gagne 200 francs et si elle mange, elle perd 100 francs. Cette expérience s'effectue pendant 10 jours.
  - (a) Déterminer l'ensemble des gains possibles.

- (b) Déterminer la probabilité d'obtention d'un gain.  
 (c) Déterminer le gain moyen.

**Exercice 1.14.** On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note  $P_k$  la probabilité d'apparition de la face numérotée  $k$  lorsqu'on lance le dé. Le dé est pipé de sorte que les nombres  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $P_6$  constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .

1. Prouver que  $P_1 = \frac{32}{63}$ . Puis en déduire  $P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $P_6$
2. Le dé est utilisé pour un jeu dont les solutions sont les suivantes :
  - L'apparition d'une face portant un numéro pair fait perdre 300FCFA.
  - L'apparition d'une face portant un numéro impair fait gagner 200FCFA.

Un joueur réalise trois lancers successifs. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur après ces trois lancers.

- (a) Calculer la probabilité des événements :  $(X = 100)$  et  $(X < 0)$   
 (b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .  
 (c) Calculer l'espérance mathématique de  $X$  et interpréter le résultat.

**Exercice 1.15.** Un tireur s'entraîne sur une cible circulaire comportant 3 zones délimitées par des cercles concentriques de rayons respectifs 10cm, 20cm et 30cm. On admet que le tireur atteint toujours sa cible, et que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire.

1. Faire un schéma de la cible à l'échelle  $\frac{1}{10}$ .
2. Soit  $P_1$  la probabilité d'atteindre la zone de rayon 10cm ;  $P_2$  et  $P_3$  les probabilités d'atteindre les deux autres zones, avec  $P_2 < P_3$ .
 

(a) Justifier que  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ .  
 (b) Montrer que  $P_1 = \frac{1}{9}$ .  
 (c) Déterminer les probabilité  $P_2$  et  $P_3$  d'atteindre les deux autres zones.
3. On suppose que le tireur tire cinq fois de suite sur la cible de manière indépendante. Déterminer la probabilité d'atteindre :
 

(a) Trois fois la zone de rayon 10cm.  
 (b) Au moins trois fois la zone de rayon 10cm .

**Exercice 1.16.** Un sondage effectué dans une société comprenant 120 employés dont 40%,, et 60%,, de manœuvres. On sait que 50%,, de cadre parlent anglais et 25%,, de manœuvre savent parler anglais.

1. On interroge un individu au hasard, calculer la probabilité des évènements suivants :  
 $A$  : «l'individu interrogé est un cadre » ;  $B$  : «l'individu interrogé est un cadre sachant qu'il parle anglais » et  $C$  : «l'individu interrogé parle anglais ».
2. On interroge de manière indépendante et au hasard 5 personnes de cette société. Soit  $X$  la variable aléatoire réelle associée au nombre de personnes interrogées parlant anglais.
  - (a) Déterminer  $X(\Omega)$ .
  - (b) Donner la loi de probabilité de  $X$
  - (c) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de la variable  $X$ .

**Exercice 1.17.** Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1. Démontrer la probabilité de tomber malade est  $\frac{5}{48}$ .
2. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?
3. Le vaccin est-il efficace ?

**Exercice 1.18.** Une urne contient 7 boules : Une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge, il gagne 100 frs, si elle est jaune, il perd 500 frs, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 800 frs, sinon il perd 400 frs.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
  - (a) Établir la loi de probabilité de  $X$ .
  - (b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ , puis donner une interprétation.

3. *Les conditions du jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de  $X$  soit nulle.*

Fiche de travaux dirigés N<sup>o</sup>1Partie I : Systèmes d'équations linéaires dans  $\mathbb{R}^3$ 

## Exercice 1

Déterminer un polynôme  $Q$  de degré trois vérifiant les conditions :  $Q(1) = -9$ ,  $Q(2) = -9$ ,  $Q(3) = 5$ ,  $Q(4) = 45$ .

## Exercice 2

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en utilisant la méthode du pivot de Gauss le système ( $S$ ) suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 13 \\ -x + 2y + z = -4 \\ 3x - y + 2z = 17 \end{cases}$$

2. Déduire de ce qui précède la résolution dans  $\mathbb{R}^3$  de :

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{6}{y-1} + \sqrt{z+3} = 13 \\ -x^2 - \frac{4}{y-1} + \sqrt{z+3} = -4 \\ 3x^2 + \frac{2}{y-1} + 2\sqrt{z+3} = 17 \end{cases}$$

3.  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les dimensions d'un parallélépipède rectangle vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{4}{y-1} - 8\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = -24 \\ 3x^2 - \frac{1}{y-1} + 5\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = 48 \\ -2x^2 + \frac{3}{y-1} + \frac{z^2+1}{z} = -13 \end{cases}$$

En utilisant un changement de variable, résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss.

Déterminer  $x$ ,  $y$  et  $z$  sachant que  $x \in \mathbb{N}$ ;  $y \in \mathbb{N}$ ;  $z \in \mathbb{N}^*$  et  $y \neq 1$ , ensuite calculer le volume de ce parallélépipède.

## Exercice 3

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} 437x + 354y + 191z = 139035 \\ x - y - 15 = 0 \\ x + y + z = 385 \end{cases}$$

2) Une station d'essence affiche les prix suivants à la pompe par litre :

- Pétrole : 191F cfa
- Gasol : 354F cfa
- Essence super : 437F cfa

Pour un montant total de 139035F cfa, une entrepreneur remplit trois bidons. L'un avec le pétrole, l'autre avec le gasol et le dernier avec le super. Le bidon de gasol contient 15 litres de plus que celui du pétrole. La capacité totale des trois bidons est de 385 litres.

Déterminer la capacité de chaque bidon.

## Exercice 4

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} 26x + 11y + 36z = 1263600 \\ 26x + 11y = 36z \\ x + y + z = 46350 \end{cases}$$

2) Un capital de 46350F est scindé en trois parties  $x$ ;  $y$ ;  $z$  placées à des taux différents devant une année. Ces taux sont respectivement 6, 5%; 2, 75% et 9%. Le montant des intérêts acquis à l'issue de l'année est 3159F. Les intérêts acquis par les parts  $x$  et  $y$  sont égaux à ceux acquis par la part  $z$ .

Déterminer le montant de chacune des parts.

## Partie II : Les Nombres complexes

## Exercice 1

1. On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$ .

- Calculer  $P(4)$
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$  tel que :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm$ .

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 1 - i\sqrt{3}.$$

- Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur un figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

- b. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.
3. Soit  $K$  le point d'affixe  $k = -\sqrt{3} + i$ .  
On appelle  $F$  l'image de  $K$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$  et  $G$  l'image de  $K$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OB}$ .
- Quelles sont les affixes respectives de  $F$  et de  $G$ ?
  - Montrere que les droites  $[OC]$  et  $[OF]$  sont perpendiculaires.
4. Soit  $H$  le quatrième sommet du parallélogramme  $COFH$ .
- Montrer que le quadrilatère  $COFH$  est un carré.  
Calculer l'affixe du point  $H$ .  
Le triangle  $AGH$  est-il équilatéral?

### Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ , l'unité de longueur étant le centimètre, les points  $A, B, C, D$  ont pour affixes  $3 + i, 7 - i, -1 - 7i, 8 - 4i$  respectivement.

- placer les points  $A, B, C, D$ .
  - Quelle est la nature du triangle  $ABC$ ?
- Démontrer que  $A, B, C, D$  sont sur un même cercle.  
On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre  $I$ .
- A tout point  $M$  d'affixe  $z$ , avec  $z$  non nul, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{10}{z}$ .
  - Écrire, sous forme algébrique les affixes  $a', b', c'$  des points  $A', B', C'$  (respectivement associés à  $A, B, C$ ). Placer les points  $A', B', C'$ .
  - Vérifier que :  $\frac{c'-a'}{b'-a'} = 2$ .
  - En déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$
  - Que peut-on en déduire pour les points  $A', B', C'$ ?

### Exercice 3

- Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .
  - Calculer  $P(-1)$ .
  - Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :  $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$ .

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . (Unité graphique : 2cm) On désigne par  $A, B, C$  et  $G$  les points du plan d'affixes respectives :  $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3}$  et  $z_G = 3$ .
- Réaliser une figure et placer les points  $A, B, C$  et  $G$ .
  - Calculer les distances  $AB, BC$  et  $AC$ . En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
  - Calculer un argument du nombre complexe  $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ . En déduire la nature du triangle  $GAC$ .
3. Soit  $[D]$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = +12 \quad (1)$$

- Montrer que  $G$  est le barycentre du système de points pondérés  $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$
- Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation
 
$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \quad (2)$$
- Vérifier que le point  $A$  appartient à l'ensemble  $[D]$ .
- Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$ .
- En déduire l'ensemble  $[D]$  et le tracer.

### Exercice 4

On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ .

- Calculer  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$  puis montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait  $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .
- Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$  et  $z_D = \overline{z_C}$ , puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
- On note  $E$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ . Montrer que  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \exp(-\frac{i\pi}{3})$  puis déterminer la nature du triangle  $BEC$ .

### Exercice 5 : Partie A

1.  $z_1$  et  $z_2$  sont des nombres complexes. Résoudre le système d'équations suivants :
- $$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$$
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct de centre  $O$ , d'unité graphique  $4\text{ cm}$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $z_A = -\sqrt{3} + i$ ,  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ .

Donner les écritures de  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.

Placer les points  $A$  et  $B$ .

3. Calculer le module et l'argument de  $\frac{z_A}{z_B}$ .

En déduire la nature du triangle  $ABO$  et une mesure de l'angle  $(\vec{OA}; \vec{OB})$ .

4. Déterminer l'affixe du point  $C$  tel que  $ACBO$  soit un losange. Placer le point  $C$ . Calculer l'aire du triangle  $ABC$  en  $\text{cm}^2$ .

### Partie B

Soit  $f$  la transformation qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \exp\left(-\frac{\pi}{6}\right)z.$$

- Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
- Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , images par  $f$  de  $A$ ,  $B$  et  $C$  ?
- Quelles est l'aire du triangle  $A'B'C'$  en  $\text{cm}^2$  ?

### Exercice 6

Soit les nombres complexes :  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ,  $z_2 = 2 + 2i$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$ .

- Écrire  $Z$  sous forme algébrique.
- Donner les modules et arguments de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $Z$ .
- En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
- Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prend  $2\text{ cm}$  comme unité graphique. On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $Z$ . Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Écrire sous forme algébrique le nombre complexe  $Z^{2007}$ .

### Exercice 7

Soit le polynôme  $P(Z) = 3Z^3 - 4Z + \lambda$  où  $Z$  désigne un nombre complexe et  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $(E) : P(Z) = 0$ .

- 1-a) Montrer que si  $(E)$  admet une solution complexe  $Z_0$  alors  $\overline{Z_0}$  est aussi une solution de  $(E)$ .

- b) En déduire que  $(E)$  admet au moins une solution réelle. (on ne demande pas de la déterminer)

2-a) Déterminer  $\lambda$  pour que l'équation  $(E)$  admette comme solution réelle  $\sqrt{2}$ .

- b) Résoudre l'équation  $(E)$  pour  $\lambda = 0$ .

3-a) On donne  $\lambda = 8$ , vérifier que  $Z_1 = 1 + i$  est une solution de  $(E)$ .

- b) Résoudre alors l'équation  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .

c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de  $(E)$ .

### Exercice 8

Soit  $P$  le polynôme défini par :  $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$ .

- Déterminer les racines carrées de  $\omega = -2i$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_0) : z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$ .
- Montrer que  $P(z) = [z^2 - (3 + 3i)z + 5i][z - (3 + 2i)]$  et en Déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(E)$  :  $z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i = 0$ .

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ . Unité de longueur sur les axes :  $2\text{ cm}$ .

- Placer les points  $M$ ,  $P$  et  $Q$  d'affixes respectives  $2 + i$ ,  $1 + 2i$  et  $3 + 2i$ .
- Justifier que le triangle  $MPQ$  est isocèle rectangle en  $M$ .
- a. Justifier que la symétrique du point  $Q$  par rapport au point  $M$  est le point  $S$  d'affixe  $z_S = 1$ .
- b. Déterminer l'affixe du point  $R$  image du point  $S$  par la translation de vecteur  $\vec{PQ}$ .
- c. Quelle est la nature du quadrilatère  $PQRS$ ? Justifier clairement votre réponse.

### Exercice 9

Soit  $z$  un nombre complexe distinct de  $1 + i$ . Soient  $Z = \frac{z+2i}{z-1-i}$ ,  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $1 + i$  et  $-2i$ .

- Exprimer  $Re(Z)$  et  $Im(Z)$  en fonction de  $x = Re(z)$  et de  $y = Im(z)$ .
- Déterminer et construire l'ensemble :
  - $(\Gamma)$  des points  $M(z)$  du plan tels que  $Z$  soit imaginaire pur ou nul.
  - $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que  $|Z| = 1$ .

### Exercice 10

On considère les nombres complexes  $\alpha = 2 - 2i$ ,  $\beta = -\sqrt{3} - i$  et  $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^3}$ .

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. Dédire de la question (1.) le module et un argument de  $\lambda$ .
3. a. Calculer  $\beta^2$  et  $\alpha^3$  puis mettre  $\lambda$  sous la forme algébrique.
- b. De ce qui précède, déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{13\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{13\pi}{12}$  (On pourra remarquer que  $\frac{13\pi}{12} = \frac{37\pi}{12} - 2\pi$ ).

### Exercice 11

- 1) Mettre sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :
  - a)  $(\sqrt{3} - i)^7$ ; b)  $(1 + i)^6(1 - i)^5$ ; c)  $\frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1-i\sqrt{3})^{12}}$
- 2.a) Linéariser  $\cos^3 \theta \sin^2 \theta$
- b) Exprimer  $\cos 5x$  en fonction de  $\cos x$
- 3.a) Calculer les racines carrées du nombre complexe  $-3 + 4i$
- b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$
- 4) Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $(\sqrt{3} + i)^n$  est un réel

### Exercice 12

On considère dans le plan complexe les points  $O$  d'affixe 0,  $A$  d'affixe 1,  $B$  d'affixe  $-1$ .  
A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z \neq 1$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ .

- 1) Montrer que  $|z| = 1$
- 2) Montrer que  $\frac{z'-1}{z'+1}$  est réel
- 3) Montrer que  $\frac{z'-1}{z'+1}$  est imaginaire pur

### Exercice 13

$\bar{z}$  désigne le nombre complexe conjugué de  $z$ . On appelle  $Z$  le nombre complexe défini par :  $Z = z^2 - 2\bar{z} + 1$ .

1. On pose  $e = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.  
Calculer en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réelle  $X$  et la partie imaginaire  $Y$  du nombre complexe  $Z$ .
2. Déterminer, puis représenter dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  est telle que  $Z$  soit un nombre réel.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $Z = 0$ .

4. Soit  $A, B, C$  les images respectives des nombres complexes :  $1$ ;  $-1 + 2i$ ;  $-1 - 2i$ .  
Placer les points  $A, B, C$  dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal et montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle.

### Exercice 14

1. Soit  $z$  un nombre complexe,  $z \neq 0$ , et  $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} z^p$ .  
Exprimer  $S_n$  en fonction de  $z$  et de  $n$ .
2. Soit :
 
$$\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta \\ \Sigma_2 = 0 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta \end{cases}$$

Calculer  $\Sigma_1 + i\Sigma_2$ . En déduire  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

## Partie III : Les Similitudes

### Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $O, \vec{u}, \vec{v}$ . (Unité 1cm).  
On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit  $A$  le point d'affixe 3, et  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . On note  $B, C, D, E$  et  $F$  les images respectives des points  $A, B, C, D$  et  $E$  par la rotation  $r$ .  
Monter que  $B$  a pour affixe  $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
2. Associer à chacun des points  $C, D, E$  et  $F$  l'une des affixes de l'ensemble suivant  $\{-3, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$
3.
  - a. Déterminer  $r(F)$ .
  - b. Quelle est la nature du polygone  $ABCDEF$ ?
4. Soit  $s$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Soit  $s'$  la similitude directe de centre  $E$  transformant  $F$  en  $C$ .
  - a. Déterminer l'angle et le rapport de  $s'$ . En déduire l'angle et le rapport de  $s'os$ .
  - b. Quelle est l'image du point  $D$  par  $s'os$ .
  - c. Déterminer l'écriture complexe de  $s'os$ .
5. Soit  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $C$ .
  - a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer  $s(A')$  puis l'image de  $A'$  par  $s'os$ .

- b. Calculer l'affixe du point  $A'$ . Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de  $s'os$ .

### Exercice 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points  $A$  d'affixe 2,  $E$  d'affixe  $1 + i$ ,  $F$  d'affixe  $2 + i$  et  $G$  d'affixe  $3 + i$ . La figure sera complétée au fur et à mesure.

- Calculer les longueurs des côtés des triangles  $OAG$  et  $OEF$ . En déduire que ces triangles sont semblables.
- Montrer que  $OEF$  est l'image de  $OAG$  par une similitude indirecte  $s$ , en déterminant l'écriture complexe de  $s$ .
- Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . On pose  $A' = h(A)$  et  $G' = h(G)$ , et on appelle  $I$  le milieu de  $[EA']$ . On note  $\sigma$  la symétrie orthogonale d'axe  $(OI)$ . Montrer que  $s = \sigma h$

### Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On prendra  $2cm$  pour unité graphique.

Soit  $A$  le point d'affixe  $i$  et  $B$  le point d'affixe 2.

- Déterminer l'affixe du point  $B_1$  image de  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .
  - Déterminer l'affixe du point  $B'$  image de  $B_1$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
Place les points  $A$ ,  $B$  et  $B'$ .
- On appelle  $f$  la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = (1 + i)z + 1$ .
  - Montrer que  $B$  a pour image  $B'$  par  $f$ .
  - Montrer que  $A$  est le seul point invariant par  $f$ .
  - Établir que pour tout nombre complexe  $z$  distinct de  $i$ ,  $\frac{z'-z}{i-z} = -i$ .  
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.  
En déduire une méthode de construction de  $M'$  à partir de  $M$ , pour  $M$  distinct de  $A$ .
- Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble  $\Sigma_1$  des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie  $|z - 2| = \sqrt{2}$ .

- b. Démontrer que  $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$ .

En déduire que si le point  $M$  appartient à  $\Sigma_1$ , alors son image  $M'$  par  $f$  appartient à un cercle  $\Sigma_2$ , dont on précisera le centre et le rayon.

- c. Tracer  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sur la même figure que  $A$ ,  $B$  et  $B'$ .

### Exercice 4

Le plan  $\mathbb{P}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique  $3cm$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  telles que :  $a = 3$ ,  $b = 1 + \frac{2}{3}i$ ,  $c = 3i$  et  $d = -\frac{1}{3}i$ .

- Représenter les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$
- Déterminer l'angle  $\theta$  et le rapport  $k$  de la similitude directe  $s$  transformant  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .
- Donner l'écriture complexe de  $s$ . En déduire l'affixe du centre  $I$  de  $s$ .
- Soit  $M$  le point de coordonnées  $M(x; y)$  et  $M'(x'; y')$  son image par  $s$ .

$$\text{Monter que : } \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

- On construit une suite  $(M_n)$  de points du plan en posant
 
$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = (M_n) \end{cases}, \text{ pour tout entier naturel } n$$

Pour tout entier naturel, on note  $z_n$  l'affixe du point  $M_n$  et on pose  $r_n = |z_n - 1|$ .

Montrer que  $r_n$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

### Exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  $\varphi$  est l'application du plan complexe dans lui-même qui au point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y \end{cases}$$

- Déterminez l'écriture complexe de  $\varphi$ . Déterminez-en que  $\varphi$  est une similitude plane directe.

Dans la suite de l'exercice,  $f$  désigne la transformation du plan d'écriture complexe

$$z' = (1 + i)z - 1$$

- Précisez les éléments caractéristiques de  $f$ .

- 
3. a.  $(\Sigma)$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 1 = 0$ .  
Montrez que  $(\Sigma)$  est un cercle que vous caractérisiez.
- b. Déterminez l'image par  $f$  du cercle  $(\Sigma)$ .
4. Déterminez l'image par  $f$  de la droite  $(\Delta)$  d'équation cartésienne  $3x - 2y - 1 = 0$ .

Fiche de travaux dirigés  $N^{02}$ 

## Partie II : Dérivation, primitives et étude des fonctions

## Partie I : Limites et continuité

## Exercice 1

Étudiez les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{3x}$ ;  
 5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{7}}{x-2}$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|-2}{x^2-4}$

## Exercice 2

Étudiez les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{-\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$   
 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ ;  
 8) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{\sin x}{x}$ .  
 Étudiez les limites de  $f$  en 0, -1, en  $+\infty$ , en  $-\infty$ .  
 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}}$ .

## Exercice 3

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

## Exercice 4

Soit la fonction numérique  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ .

- Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- On considère la fonction  $g : x \mapsto (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ 
  - Justifier que :  $\forall x \in D_f, g(x) = 2 \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ .
  - En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

## Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- 1)  $\sin^2 x \sin(x^2)$ ; 2)  $\frac{4 - \cos^2 x}{1 - \sin x}$ ; 3)  $\sin x \cos^4 x$ ; 4)  $\sin^3 x$ ;  
 5)  $\cos(\sqrt{3x^2})$ ; 6)  $\sqrt{\cos x}$ ; 7)  $\sin(3x^2)$ ; 8)  $x\sqrt{1 - 2x - x^2}$   
 9)  $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$ ; 10)  $(4x^2 - 2x + 2)\sqrt{3-x}$ ; 11)  $\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ ; 12)  $\frac{(x-3)^4}{(x+2)^6}$ .

## Exercice 2

Dans chacun des cas suivants : Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .

- 1)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$ ; 2)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$ ; 3)  $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{4(1-x)}$ ; 4)  $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$ ;  
 5)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}$ ; 6)  $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{(1-x)^2}$

## Exercice 3

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction sin est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que l'on a :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ . (Rappel : on pourra utiliser la démonstration par récurrence)

## Exercice 4

Soit  $f$  la fonction qui, à tout réel  $x$  de l'intervalle  $I = [0, 1]$ , associe le nombre réel  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

- Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  sur  $I$ . Quel est l'ensemble de définition de  $f^{-1}$  ?
- La fonction  $f^{-1}$  est-elle dérivable sur  $I$  ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée  $(f^{-1})'$ .

## Exercice 5

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 - 3x - 4$ .

- Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

- 3) En déduire le signe de  $g(x)$ .
- 4) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ . Déterminer la dérivée  $f'(x)$  de  $f$ .
- 5) Démontrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $g(x)$  sur  $]1; +\infty[$ .
- 6) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Dresser le tableau de variation de  $f$ . Donner une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .
- 7) Montrer que la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- 8) Déterminer une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 2.

### Exercice 6

- 1) Trouvez la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + 2x - 7$ , telle que  $F(1) = -7$ .
- 2) Trouvez la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \cos 5x - 3 \sin 6x$  telle que  $F(\frac{\pi}{6}) = 1$ .
- 3) Trouvez la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $]2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3x}{(x^2-4)^2}$ , telle que  $F(4) = 0$ .

### Exercice 7

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 2$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Déterminer les images par  $f$  de  $[-1; 3[; [2; +\infty[, \mathbb{R}$
3. Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{7}{4}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .
- 4.a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[0; 2]$ .
- b) Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de la solution de cette équation qui est dans  $[0; 2]$ .
5. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $] - \infty; -\frac{1}{2}[$ .  
Montrer que  $g$  est une bijection de  $] - \infty; -\frac{1}{2}[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
Puis, dresser le tableau de variation de la bijection réciproque  $g^{-1}$ .

### Exercice 8

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $] - \infty; 1]$  par  $g(x) = \sqrt{1-x}$ .

1. Démontrer que pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , on a :  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2}$  (où  $g'$  est la fonction dérivée de  $g$ )
2. En appliquant les inégalités des accroissements finis, déduire de 1) que pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , on a :  $1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$

### Exercice 9/PARTIE A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ . On précisera les limites aux bornes du domaine de définition.
2. Montrer que  $f(x) \geq 0$  sur  $] - \infty; -1] \cup ]0; +\infty[$ .

### PARTIE B

Soit la fonction  $g$  définie sur  $D_g = ] - \infty; -1] \cup ]0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $] - \infty; -1] \cup ]0; +\infty[$ .
- b. Étudier alors les variations de la fonction  $g$  sur  $] - \infty; -1] \cup ]0; +\infty[$ .
2. a. Montrer que, pour tout  $x < -1$  :  $\frac{g(x)-g(-1)}{x-1} = \sqrt{\frac{x^2-x+2}{x(x+1)}}$ .
- b. En déduire que la fonction  $g$  n'est pas dérivable en  $-1$ .

- c. Donner une équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe ( $C$ ) au point d'abscisse  $-1$ .
3. a. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $D_g : g(x) - x = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x} + x}}$
- b. En déduire que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe ( $C$ ) en  $+\infty$ .
- c. Montrer de même que la droite ( $\Delta'$ ) d'équation  $y = -x$  est asymptote à la courbe ( $C$ ) en  $-\infty$ .
4. Construire dans un repère orthonormé la courbe ( $C$ ), les asymptotes ( $\Delta$ ), ( $\Delta'$ ) et la tangente ( $T$ ) à ( $C$ ) en  $-1$ .

### Exercice 10

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \sqrt{1+x}$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Déterminer les dérivées première et seconde de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. Vérifier que  $\forall x \in [0; a], \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ .
3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  sur  $[0; a]$ ; démontrer que :  $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$ .

## Fiche de travaux dirigés N°3

## Partie I : Fonctions logarithmes

## Exercice 1/Partie A

Prérequis : On rappelle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
2. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ .  
On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique  $2cm$ ).

1. Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$ .
  - a. Étudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b. Calculer  $u(1)$  et en déduire le signe de  $u(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. Etude de la fonction  $f$ .
  - a. Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
  - b. Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et construire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. Éléments graphiques et tracés.
  - a. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $(C)$ .
  - b. Déterminer la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
  - c. Tracer la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$ .

## Exercice 2

1. Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$ .
  - a. Étudier les variations de  $u$  sur  $]0; +\infty[$  et préciser ses limites en  $0$  et en  $+\infty$ .
  - b.
    - i. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique sur  $]0; +\infty[$ .  
On note  $\alpha$  cette solution.

ii. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

- c. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - d. Montrer l'égalité :  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$ .  
On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
    - a. Exprimer, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$ .
    - b. En déduire les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
  3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note :
    - $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$  (logarithme népérien);
    - $A$  le point de coordonnées  $(0; 2)$ ;
    - $M$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .
    - a. Montrer que la distance  $AM$  est donnée par  $AM = \sqrt{f(x)}$ .
    - b. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .
      - i. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  ont mêmes variations sur  $]0; +\infty[$ .
      - ii. Montrer que la distance  $AM$  est minimale en un point de  $\Gamma$ , noté  $P$ , dont on précisera les coordonnées.
      - iii. Montrer que  $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2 - x - \frac{4\ln x}{x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x$ .
  - a. Étudier le sens de variation de  $g$  et déterminer son maximum sur  $]0; +\infty[$ .
  - b. En déduire le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
2.
  - a. Calculer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  et donner son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  vérifiant  $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$ .
4. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2 - x$  est asymptote à  $(C)$  et étudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

- Déterminer les coordonnées du point  $A$  de  $(C)$  en lequel  $(C)$  admet une tangente  $(T)$  parallèle à la droite  $(\Delta)$ .
- Tracer les droites  $(\Delta)$  et  $(T)$ , puis la courbe  $(C)$ .

#### Exercice 4

Le plan  $\mathbb{P}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  et soit  $(C')$  celle de la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{x}$ .

- Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . En déduire que  $(C)$  a deux asymptotes que l'on déterminera.
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et étudier les variations de  $f$ .
- Soit  $I$  le point d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de  $I$ .
- Pour tout  $c$  de  $]0; +\infty[$ , on pose  $g(x) = 1 - x + 2\ln x$ .
  - Étudier les variations de la fonction  $g$ .
  - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique dans chacun des intervalles  $]0; 2[$  et  $]2; 4[$ . Soit  $\alpha$  la solution appartenant à  $]2; 4[$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
- Montrer que  $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$  et en déduire que  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en deux points.
  - Montrer que, pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :  $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$ .
- Tracer  $(C)$  et  $(C')$ .

#### Exercice 5

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$ .

On note  $C_g$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

- Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour  $C_g$ .
- Déterminer, à l'aide de la dérivée  $g'$ , le sens de variation de  $g$ . Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation  $g(x) = e$ .

- Calculer  $g(\frac{1}{e})$ . En déduire, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , le signe de  $g(x)$ .
- Tracer  $C_g$  en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3).

### Partie II : Fonctions exponentielles

#### Exercice 1/Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

- Étudier les variations de la fonction  $g$ .
- Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- En déduire que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $e^x - x > 0$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$  et  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal.

On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

- Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) \in [0; 1]$ .
- Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = x$ .
  - Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$
  - Étudier la position relative de la droite  $(D)$  et de la courbe  $(C)$  sur  $[0; 1]$ .
- Déterminer une primitive de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

#### Exercice 2/Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x(1 - x) + 1$ .

- Étudier le sens de variation de  $g$ .
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[1, 27; 1, 28]$ ; on note  $\alpha$  cette solution.
- Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $] -\infty; 0[$ .  
Justifier que  $g(x) > 0$  sur  $[0; \alpha[$  et  $g(x) < 0$  sur  $] \alpha; +\infty[$ .

#### Partie B

Dans cette partie il est question d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$ .

On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; unités graphiques :  $1\text{cm}$  sur l'axe des abscisses et  $2\text{cm}$  sur l'axe des ordonnées.

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.
- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - Démontrer que la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote pour  $C_f$ .
  - Étudier la position de  $C_f$  par rapport à  $(d)$ .
- Montrer que la fonction dérivée de  $f$  a même signe que la fonction  $g$  étudiée dans la **Partie A**.
  - Montrer qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $f(\alpha) = p\alpha + q$ .
  - Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- Tracer la courbe  $C_f$  dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse  $\alpha$ .

### Exercice 3

On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ . On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Vérifier que pour tout nombre réel  $x$  :  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .
- Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$ . En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Déterminer l'équation cartésienne réduite de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $A$  de la courbe d'abscisse 0.
- Dans cette question, on étudie les positions relatives de la courbe  $(C)$  et de la droite  $(T)$ . Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$ 
  - Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $\varphi'(x) = -\frac{1}{4}(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}})^2$
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$  et  $\varphi(0)$
  - Conclure en ce qui concerne les positions relatives de la courbe  $(C)$  et de la droite  $(T)$ .
- Tracer la tangente  $(T)$ , la courbe  $(C)$ , et ses asymptotes éventuelles dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ . On note  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe  $(C_g)$  à partir de  $(C)$  ?
- Démontrer que  $g$  est impaire. Quelle pro( $C_g$ ) ?
- Quel rôle joue le point  $A(0; \frac{1}{2})$  pour la courbe  $(C)$  ? Expliquer.

### Exercice 4

Dans tout cet exercice,  $f$  désigne la fonction de la variable réelle  $x$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+1)(e^{-2x} + 1)$ . On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  d'unités  $1cm$  sur les axes.

- Soit  $g$ , la fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{-2x} - 2x - 1$ . Étudier les variations de  $g$  et en déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  la dérivée de  $f$  s'écrit  $f'(x) = e^{-2x}g(x)$ .
- En déduire de 1) le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique du résultat.
  - Montrer que la droite  $(d) : y = x + 1$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$ .
  - Étudier les positions relatives de  $(d)$  et  $(C_f)$ .
  - Tracer  $(d)$  et  $(C_f)$  dans le repère.
- On désigne par  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; 0[$ .
  - Justifier que  $h$  est une bijection de  $] -\infty; 0[$  sur  $] -\infty; 2[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ , puis tracer sa courbe dans le même repère que  $(C_f)$  ( $h^{-1}$  désigne la bijection réciproque de  $h$ ).

### Exercice 5/Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - e^{2x-2}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra  $5cm$  comme unité sur les axes.

- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - Vérifier que pour tout réel  $x$  non nul on a :  $f(x) = x[1 - 2e^{-2} \times (\frac{e^{2x}}{2x})]$   
Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Déterminer  $f'$ . Étudier le signe de  $f'(x)$  et calculer la valeur exacte du maximum de  $f$ .
- Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ . Étudier la position relative de  $(C)$  et de  $(D)$ .

4. On note  $A$  le point de la courbe  $(C)$  d'abscisse 1.  
Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  en  $A$  à la courbe  $(C)$ .
5. a. On note  $I$  l'intervalle  $[0; 0, 5]$ .  
Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $I$  une unique solution qu'on notera  $\alpha$ .  
b. Déterminer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .
6. Construire la courbe  $(C)$ , l'asymptote  $(D)$  et la tangente  $(T)$ .

### Partie B

On définit dans  $\mathbb{R}$  la suite  $(U_n)$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$$

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{2x-2}$ .  
Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $g(x) = x$ . En déduire  $g(\alpha)$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $g'(x)$  sur  $I = [0; 0, 5]$  puis en déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ , on a  $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$ .
3. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $g(x) \in I$ .
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|U_n - \alpha|$
5. Démontrer par récurrence que  $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$
6. En déduire la limite de la suite  $U_n$ .
7. Déterminer un entier naturel  $p$  tel que  $|U_p - \alpha| \leq 10^{-5}$

Fiche de travaux dirigés  $N^04$ 

## Partie I : Calcul intégral

## Exercice 1

1. Calculer chacune des intégrales suivantes :

a.  $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 - \sin u] \cos^3 u du$ ; b.  $B = \int_{-1}^1 [|1 - e^{-2t+1}| + 1] dt$ ; c.  $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

d.  $D = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 1}} dx$ ; e.  $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \tan(2t) dt$ ; f.  $F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

2. a. Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ ,  $\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\frac{x^2}{4}}$

b. En déduire un encadrement de  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$

3. On pose  $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$ ,  $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx$  et  $J_2 = J_1 + J$

a. Calculer  $J_2$ .

b. Calculer  $J_1$ .

c. En déduire  $J$ .

4. Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

a. Calculer  $U_1$ .

b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c. En déduire la convergence de la suite  $(U_n)$ .

## Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ .

1. a. Montrer que  $u_0 + u_1 = 1$

b. Calculer  $u_1$ . En déduire  $u_0$ .

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ .

b. En déduire, que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$ .

4. Déterminer la limite de la suite  $u_n$ .

## Exercice 3

On considère la suite numérique  $(J_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :  $J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+tdt}$ .

1. Démontrer que la suite  $(J_n)$  est croissante.

2. Dans cette question, on définit la suite  $(I_n)$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :  $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t} dt$  :

a. Justifier que, pour tout  $t \geq 1$ , on a  $\sqrt{t+1} \leq t+1$ .

b. En déduire que  $J_n \leq I_n$ .

c. Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $(J_n)$  est majorée par un nombre réel (indépendant de  $n$ ).

d. Que peut-on en conclure pour la suite  $(J_n)$ .

## Exercice 4

1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$

a. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

b. Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ . Trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :  $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x dx$ . On donnera le résultat exact sous la forme  $p \ln 2 + q \ln 3$ , avec  $p$  et  $q$  rationnels.

## Exercice 5

Le but de cet exercice est d'étudier une fonction et tracer sa courbe représentative, d'étudier la position de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes et de calculer une aire.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2x \ln x - x$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .  
Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

Unités graphiques utilisées :  $2cm$  sur chaque axe.

### Partie A. Etude de la fonction $f$

- Etude des limites de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.
  - Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
  - Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Montrer que  $f'(x) = 2\ln x + 1$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Tracer la courbe  $(C)$  de  $f$ .
- Calculer les coordonnées du point  $A$ , intersection de la courbe  $(C)$  et de l'axe des abscisses. Placer ce point  $A$  sur le graphique.

### Partie B. Position de $(C)$ par rapport à l'une de ses tangentes

- Établir qu'une équation de la droite  $(\Delta)$ , tangente en  $A$  à la courbe  $(C)$  est :  $y = 2x - 2\sqrt{e}$ . Tracer  $(\Delta)$  sur le même repère que  $(C)$  de  $f$ .
- Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = f(x) - (2x - 22\sqrt{e})$ .
  - Calculer  $g'(x)$ .
  - A l'aide du tableau de variations de  $g$ , montrer que  $g(x) \geq 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie C. Calcul d'une aire

Soit  $H$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $H(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$ .

- Calculer  $H'(x)$ .
- Calculer la valeur exacte de  $\int_{\sqrt{e}}^e (2x \ln x - 3x + 2\sqrt{e}) dx$ .
- Cette intégrale correspond au calcul de l'aire d'un domaine plan.
  - Colorier ce domaine sur la figure.
  - Donner, en  $cm^2$ , une valeur approchée à  $10^{-2}$  près par défaut de cette aire.

### Exercice 6/Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 + (-x + 2)e^{-x}$ .

- Calculer  $g'(x)$  où  $g'$  désigne la fonction dérivée de  $g$  et étudier son signe selon les valeurs de  $x$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Préciser  $g(3)$ .
- En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + (x - 1)e^{-x}$ .

On note  $(C)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal. On prendra  $2cm$  pour une unité graphique.

- Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = g(x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .
- Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- Vérifier que  $f(x) = x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
  - Étudier la position relative de la courbe  $(C)$  et de la droite  $(\Delta)$ .  
On précisera les coordonnées de leur point d'intersection  $A$ .
- Donner le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- Tracer la courbe  $(C)$  ainsi que la droite  $(\Delta)$ .

### Partie C

- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = x + (ax + b)e^{-x}$  soit une primitive de  $f$ .
- Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine du plan compris entre la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$ .  
En donner une valeur arrondie à  $10^{-2}$  près.

### Exercice 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique  $2cm$ . On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = (-x + 4)e^{x-1}$  et  $g(x) = \ln(\frac{x+6}{2x+2})$ . Dans le repère choisi, on appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  et  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $g$ .

### Partie A

- Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Vérifier que la fonction dérivée de  $f$  est définie pour tout  $x$  positif par  $f'(x) = (-x + 3)e^{x-1}$ .

3. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations.  
On précisera  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f'(3)$ .
4. Tracer la courbe  $(C)$ .
5. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $F(x) = (ax + b)e^{x-1}$  soit une primitive de la fonction  $f$ .

### Partie B

On considère la fonction  $u$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $u(x) = \frac{x+6}{2x+2}$ .

1. Vérifier que, pour tout  $x$  positif,  $u(x)$  est strictement positif.
2.
  - a. Déterminer la limite de  $u(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - b. Étudier le sens de variation de  $u$ .  
Dresser le tableau de variations de  $u$  et retrouver le résultat de la question 1. de la partie B.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  et démontrer que la courbe  $(\Gamma)$  admet une asymptote  $(D)$  au voisinage de  $+\infty$  dont on donnera une équation.
4. Tracer la courbe  $(\Gamma)$  et la droite  $(D)$  sur le même graphique que celui de la partie A.
5. Soit  $G$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  
 $G(x) = (x + 6)\ln(x + 6) - (x + 1)\ln(2x + 2)$ .  
Démontrer que  $G$  est une primitive de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

### Partie C

1. Résoudre, à l'aide des représentations graphiques faites, l'inéquation  $g(x) \leq f(x)$ .
2. Calculer l'aire  $\mathbb{A}$  en  $cm^2$  du domaine du plan constitué des points  $M(x; y)$  tels que :  $2 \leq x \leq 3$  et  $g(x) \leq y \leq f(x)$ .  
Donner l'arrondi de  $\mathbb{A}$  à l'unité près.

## Partie II : Equations différentielles

### Exercice 1

On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $9y'' + 16y = 0$

1. Déterminez la solution générale de  $(E)$ .

2. Déterminez la solution particulière  $f$  de  $(E)$  vérifiant :  $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$  et  $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{8}{3}$ .  
Écrivez cette solution sous la forme :  $f(x) = A \cos(wx + \varphi)$  ;  $A$ ,  $w$  et  $\varphi$  étant des constantes réelles à déterminer.

### Exercice 2

1. On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $xy' = 1$ .
  - a. En utilisant la technique de l'intégration par parties, calculer  $\int \ln x dx$
  - b. Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
  - c. Déterminer la solution particulière de  $(E)$  avec comme conditions initiales  $y'(1) = \ln 2$  et  $y(\frac{1}{2}) = 0$
2. Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 5y = 0$  avec comme conditions initiales  $y(0) = 4$  et  $y'(0) = -1$ .

### Exercice 3

Considérons les équations différentielles  $(E_0)$  :  $y'' + 4y' + 4y = 0$  et  $(E)$  :  $y'' + 4y' + 4y = 4x - 8$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0)$ .
2. Déterminer la fonction affine qui est solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
3. Dans cette question,  $\varphi$  est la fonction définie par :  $\varphi(x) = x - 3$ .
  - a. Soit  $f$  une fonction numérique deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Prouver que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - \varphi$  est solution de  $(E_0)$ .
  - b. En déduire la solution générale de  $(E)$ .
4. Déterminer  $g$  la solution de  $(E)$  dont la courbe représentative  $(\Gamma)$  passe par  $A(0; 2)$  et  $\gamma$  admet une tangente  $(T)$  parallèle à la droite  $(D)$  d'équation  $2x + y - 5 = 0$ .

### Exercice 4

On considère les intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$ .

1.
  - a. Résoudre l'équation différentielles  $(E)$  :  $y'' - 4y' + 8y = 0$ .
  - b. Déterminer la solution de  $(E)$  dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse 0 une tangente d'équation cartésienne  $y = x + \frac{1}{4}$ .
2. Calculer  $I + J$ .
3. Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$ .

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$ .
  - En déduire le calcul de  $I - J$ .
4. Calculer alors  $I$  et  $J$ .

### Exercice 5

- Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$  vérifiant la condition initiale  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$ .
- Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = (x + 3)e^{-2x}$ .
  - Montrer que  $g$  est une solution de  $(E)$ .
  - Déterminer une primitive  $G$  de  $g$  en utilisant :
    - l'équation différentielle  $(E)$ .
    - une intégration par parties.
- Soit  $F$  la fonction définie par :  $F(x) = -\frac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + \frac{1}{4}$ .
  - Montrer que la restriction  $H$  de  $F$  à  $[0; +\infty[$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle à préciser.
  - Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $H^{-1}$ , fonction réciproque de  $H$ .

### Partie III : Suites numériques

#### Exercice 1

On considère la suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $U_0 = 7$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 5U_{n+1} - 2U_n = 6$ .

- Calculer les termes  $U_1$  et  $U_2$ .
- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 2$ .  
Établir que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une progression géométrique.
- Exprimer  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $n$ .
  - Exprimer  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

#### Exercice 2

Cet exercice comporte deux parties  $A$  et  $B$  indépendantes.

#### Partie A

On considère les suites  $(v_n)$  définie par :  $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$  et  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{1}{v_n - 3}$ .

- Démontrer que  $u$  est une suite arithmétique.
- Déterminer  $u_n$  puis  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- Étudier la convergence de chacune des suites  $u$  et  $v$ .

#### Partie B

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite numérique définie par :  $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}w_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$

- Déterminer  $w_2$  et  $w_3$ .
- Établir par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \leq 3$ .
- Établir que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
  - En déduire que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.
- On considère la suite numérique  $(\alpha_n)$  de terme général  $\alpha_n = n(3 - w_n)$ .
  - Établir que la suite  $(\alpha_n)$  est une suite géométrique convergente dont-on précisera le premier terme et la raison.
  - Exprimer  $(\alpha_n)$  puis  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

#### Exercice 3

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies respectivement par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases}$

et  $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$  ;

- On considère la suite  $(s_n)$  définie par  $s_n = u_n + v_n$ .  
Montrer par récurrence que la suite  $(s_n)$  est constante.
- On considère la suite  $(d_n)$  définie par  $s_n = v_n - u_n$ .  
Montrer que la suite  $(d_n)$  est une suite géométrique dont-on donnera la raison et le premier terme.
- En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ .
- Écrire  $u_n$  en fonction de  $s_n$  et de  $d_n$ , puis en fonction de  $n$ . Écrire  $v_n$  en fonction de  $s_n$  et de  $d_n$ , puis en fonction de  $n$ . En déduire la limite de  $u_n$  et celle de  $v_n$ .

**Exercice 4**

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel par les relations :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx; I_1 = \int_0^{e^x} \frac{1}{1+e^x} dx; \dots; I_n = \int_0^{e^{nx}} \frac{1}{1+e^x} dx$$

1. Calculer  $I_0 + I_1$  et  $I_1$ . En déduire la valeur de  $I_0$ .
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$  en fonction de  $n$ . En déduire les valeurs de  $I_2$  et  $I_3$ .
3. Comparer, pour  $x$  élément de  $[0, 1]$ , les nombres  $e^{nx}$  et  $e^{(n+1)x}$ .  
Sans calculer  $I_n$ , démontrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.
4. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ .  
En déduire un encadrement de  $(I_n)$  (à cet effet vous calculerez  $\int_0^1 e^{nx} dx$ ).  
Quelle est la limite de la suite  $(I_n)$  ?

**Exercice 5**

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$ 
  - a. Étudier les variations de  $f$ .
  - b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ .
  - c. Démontrer de même que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$ .
2. Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $U_n \geq \ln(n+1)$
  - b. Étudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .
3. Soit  $(V_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $V_n = U_n - \ln(n)$ .
  - a. Étudier le sens de variation de  $(V_n)$ .
  - b. En déduire que la suite  $(V_n)$  est convergente.
4. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on définit la suite  $(W_n)$  par  $W_n = \frac{U_n}{\ln(n)}$ .
  - a. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $1 \leq W_n \leq \frac{1}{\ln(n)}$
  - b. Déterminer la limite de la suite  $(W_n)$ .

**Exercice 6**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = (3e^x - x - 4)e^{3x}$ .

On admet qu'il existe un nombre réel  $a$  et un seul dans l'intervalle  $I = [0; 1]$  tel que  $h(a) = 0$ .

1. Justifier que, dans l'intervalle  $I$ , l'équation  $h(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $3e^x - x - 4 = 0$  puis à l'équation  $x = \ln\left(\frac{x+4}{3}\right)$ .
2. On considère la fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $I$  par  $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+4}{3}\right)$ .
  - a. Montrer que, pour tout  $x \in I$ ,  $\varphi(x) \in I$ .
  - b. Montrer que, pour tout  $x \in I$ ,  $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
  - c. Calculer  $\varphi(a)$
3. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .
  - a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|u_n - a|$ .
  - b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Préciser sa limite.
  - d. Déterminer un nombre entier naturel  $p$  tel que  $u_p$  soit une valeur approchée de  $a$  à  $10^{-4}$  près. Donner une valeur approchée de  $u_p$  à  $10^{-4}$ .

**Exercice 7**

On définit pour tout entier naturel  $n \geq 1$  l'intégral  $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$ .

1. Calculer  $I_1$ .
2. Établir que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$
4. Démontrer par récurrence que  $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$
5. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .
  - a. Calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et prouver que pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ .
  - b. En déduire que pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
6. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  puis celle de la suite  $(I_n)$ .
7. Justifier enfin que  $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

## Fiche de travaux dirigés N°5

## Partie I : Probabilités

Exercice 1

Un touriste européen veut visiter trois villes de l'ouest de la Côte d'Ivoire parmi les cinq suivantes : Danané, Man, Biankouma, Duékoué, Guiglo.

Combien d'itinéraires peut-il concevoir ?

Exercice 2

Une classe de 30 élèves qui décident de désigner un chef de classe, deux adjoints, deux responsables de l'entretien. Ces cinq élèves forment un comité. Cette classe est composée de 12 garçons internes, 12 garçons externes, 3 filles externes et 3 filles internes.

De combien de façons différentes peut-on composer le comité si l'on veut que :

- Le chef soit interne ?
- Les adjoints soient de sexe différents ?

Exercice 3

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

Calculer les probabilités des événements suivants :

- $A$  " la somme des numéros obtenus est égale à 6 "
- $B$  " la somme des numéros obtenus est impair "
- $C$  " la somme des numéros obtenus est pair "
- $D$  " la somme des numéros obtenus est supérieure à 8 "
- $E$  " la somme des numéros obtenus est inférieure à 4 "

Exercice 4

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois plus grande que l'apparition des autres numéros.

- Calculer les probabilité de l'apparition de chaque numéro.
- Calculer les probabilités des événements suivants :
  - Obtenir un nombre pair ;
  - Obtenir un nombre impair.

Exercice 5

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note  $a$  le résultat du premier lancer et  $b$  le résultat du second lancer.

On considère alors l'équation du second degré :  $x^2 + ax + b = 0$ .

Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou

confondues).

Exercice 6

Une urne contient trois boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule, deux fois de suite, lors de tirages avec remise.

a) Quels sont les événements élémentaires de cette expérience ? Combien y a-t-il ?

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

$R_1$  " Tirer une boule rouge au premier tirage "

$R_2$  " Tirer une boule rouge au second tirage "

$R_1 \cap R_2$  et  $R_1 \cup R_2$ .

Exercice 7

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$A$  " On obtient au moins une boule blanche "

$B$  " On obtient au moins deux boules noires "

$C$  " On obtient au moins une boule de chaque couleur "

2) Définir l'événement  $A \cap B$  par une phrase simple, puis calculer sa probabilité.

Exercice 8

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1) La seconde carte est tirée après remise de la première dans le jeu (tirages indépendants).

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

2) La seconde carte est tirée sans qu'on ait préalablement remis la première dans le jeu (tirage exhaustif).

a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

Exercice 9

On lance 100 fois une pièce en l'air et on note les côtés (pile  $P$  et face  $F$ ) obtenus successivement.

Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

## Partie II :Statistiques

### Exercice 1

Le tableau ci-dessous représente la population  $X$  des pays de la zone CEMAC et le nombre  $Y$  d'analphabètes de chacun de ces pays (tous exprimées en millions d'habitants).

a) Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , le nuage de points associé à cette série statistique.

(On prendra en abscisse 1cm, et en ordonnées 4cm, pour un million d'habitants).

b) Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  de cette série statistique.

c) Déterminer en utilisant la méthode de Mayer une équation cartésienne de la droite d'ajustement linéaire de ce nuage de points.

d) Donner une estimation du nombre d'analphabètes qu'aura le Tchad lorsque la population de ce pays atteindra 10,2 millions d'habitants.

### Exercice 2

Le tableau suivant donne l'âge  $X$  et la moyenne  $Y$  des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

$X$	36	42	48	54	60	69
$Y$	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

a) Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , le nuage de points associé à cette série statistique.

(On prendra en abscisse 0,1cm pour 1 an, et en ordonnées 0,5cm pour l'unité de tension artérielle).

b) Calculer la moyenne et la variance des série statistiques associées aux variables  $X$  et  $Y$ .

3 a) Trouver une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .

b) Trouver une équation de la droite de régression de  $X$  en  $Y$ .

c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables  $X$  et  $Y$ .

5) Donner une estimation de la tension maximale d'une personne âgé de 70ans.

### Exercice 3

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues. On tire deux boules simultanément et au hasard. On gagne 100FCFA par boule rouge tirée. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à la suite d'un tirage associe le gain obtenue.

1) Déterminer les gains possibles.

2) déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $X$ .