

Mathématiques



Corrigé

Auteurs

ARRICO Lucie
Professeur de lycée

AKé Djebri Antonin
Professeur de lycée



© Vallesse Éditions, Abidjan, 2021
ISBN : 978-2-38403-017-0

Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.

Leçon 1 Généralités sur les fonctions

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

La fonction f n'est pas une application car c n'a pas d'image.

La fonction g est une application car tous les éléments de l'ensemble de départ ont une image.

Exercice 2

Pour tout x élément de \mathbb{R} , $f(x) = |x - 4|$
 Pour tout x élément de $] -\infty ; 4]$, $x - 4 \leq 0$,
 donc $g(x) = -x + 4$.

Exercice 3

Pour tout x élément de \mathbb{R} , $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

$$x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= (x - 1)(x + 2).$$
 $f(x)$ existe si $x \neq 1$; $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2$

Pour tout x élément de $]1 ; +\infty[$, $g(x) = x + 2$.

Exercice 4

- $D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
- $D_{2f - \frac{1}{2}g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
- $D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
- $g(x) = 0$ si $x = 0$ ou $x = -1$.

Soit D l'ensemble des nombres réels x tels que $g(x) \neq 0$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$

Exercice 5

- $D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$,

$$(f \circ g)(x) = \frac{x + 1}{2x} + \frac{2x(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x + 1)(4x^2 + x - 1)}{2x(x - 1)}$$

- $D_{2f - \frac{1}{2}g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$,

$$(2f - \frac{1}{2}g)(x) = \frac{x + 1}{x} - \frac{x(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x + 1)(x - 1) - x^2(x + 1)}{x(x - 1)}$$

- $D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$,

$$(fg)(x) = \frac{x + 1}{2x} \times \frac{2x(x + 1)}{x - 1} = \frac{(x + 1)^2}{x(x - 1)}$$

- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + 1}{2x} \times \frac{x - 1}{2x(x + 1)} = \frac{x - 1}{4x^2}.$$

Exercice 6

$$f(x) - g(x) = (x + 1)^2 - 9 - (x - 2)(2x + 1)$$

$$f(x) - g(x) = (x - 2)(x + 4) - (x - 2)(2x + 1)$$

$$f(x) - g(x) = (x - 2)(x + 4 - 2x - 1)$$

$$f(x) - g(x) = (x - 2)(3 - x)$$

- $f(x) - g(x) \leq 0$ pour tout nombre réel x élément de $] -\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$. (\mathcal{C}_f) est au-dessous de (\mathcal{C}_g) sur $] -\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$.
- $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout nombre réel x élément de $[2 ; 3]$. (\mathcal{C}_f) est au-dessus de (\mathcal{C}_g) sur $[2 ; 3]$.

Exercice 7

Sur l'intervalle $[-3 ; -2]$, (\mathcal{C}_f) est au-dessous de (\mathcal{C}_g) donc $f(x) \leq g(x)$

Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, (\mathcal{C}_f) est au-dessus de (\mathcal{C}_g) donc $f(x) \geq g(x)$

Sur l'intervalle $[2 ; 5]$, (\mathcal{C}_f) est au-dessous de (\mathcal{C}_g) donc $f(x) \leq g(x)$

Sur l'intervalle $[5 ; 6]$, (\mathcal{C}_f) est au-dessus de (\mathcal{C}_g) donc $f(x) \geq g(x)$

Exercice 8

f et g sont définies sur \mathbb{R} , donc $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x+5) \\ &= (x+5)^2\end{aligned}$$

f et g sont définies sur \mathbb{R} , donc $f \circ g$ est définie sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 + 5\end{aligned}$$

Exercice 9

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$$

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}^*$$

Pour tout x élément de \mathbb{R}^* ,

$$(g \circ f)(x) = \frac{2(x+1) - 3}{x+1-1} = \frac{2x-1}{x}$$

Exercice 10

1. c ; 2. d ; 3. b ; 4. a.

| Colonne A | | Colonne B | |
|-----------|---|-----------|---|
| 1 | • | • | a |
| 2 | • | • | b |
| 3 | • | • | c |
| 4 | • | • | d |

Exercice 11

1. b ; 2. c ; 3. a ; 4. c.

Exercice 12

Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels.

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective

Exercice 13

Soit m un élément de \mathbb{Z} , il existe un n élément de \mathbb{Z} tel que $f(n) = m$ c'est-à-dire $m = n + 1$. Ce n vaut $m - 1$. Ainsi f est surjective.

Exercice 14

On a démontré dans l'exercice précédent que f est surjective.

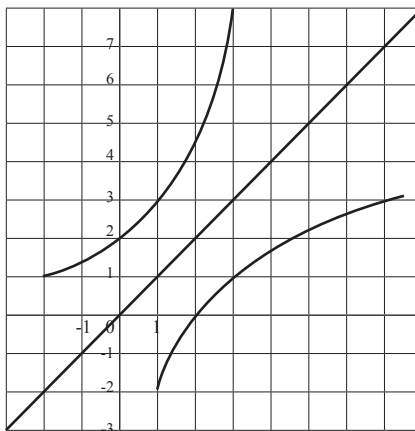
Soit n_1 et n_2 deux entiers relatifs.

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective.

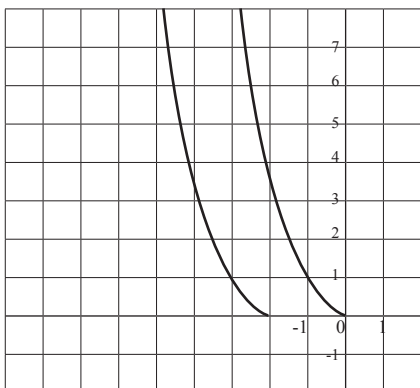
f est injective et surjective donc f est bijective.

Exercice 15

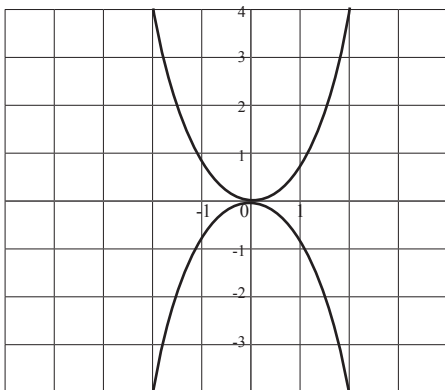
f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f .

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 16**

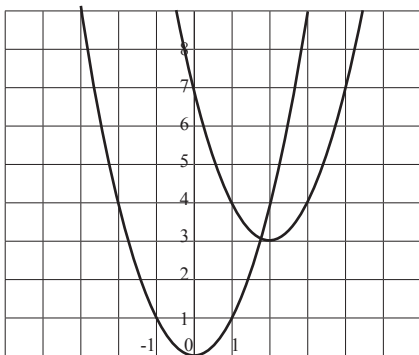
Exercice 17



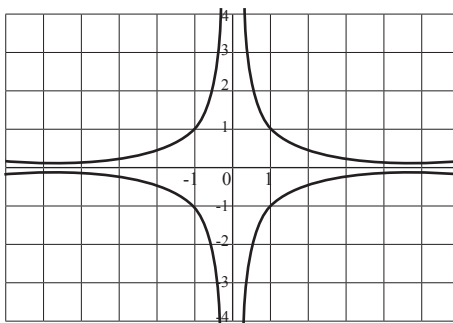
Exercice 18



Exercice 19



Exercice 20



Exercice 21

$$f(x) = 2x + 3, g(x) = \frac{x}{2x-1} \text{ et } h(x) = \sqrt{x+3}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, D_h = [-3; +\infty[$$

$$\text{et } D = \{x \in \mathbb{R}, h(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$\bullet x \in D_{f+g} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } x \in D_g$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{donc } D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\bullet x \in D_{g+h} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } x \in D_h$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } x \in [-3; +\infty[$$

$$\text{donc } D_{g+h} = \mathbb{R}[-3; \frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; +\infty[.$$

$$\bullet x \in D_{g-f} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } D_{g-f} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\bullet x \in D_{\frac{g}{h}} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } x \in D_h \text{ et } x \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } x \in [-3; +\infty[\text{ et } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$\text{donc } D_{\frac{g}{h}} =]-3; \frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; +\infty[.$$

$$2) \bullet \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, (f+g)(x) = 2x+5 + \frac{x}{2x-1}$$

$$\bullet \forall x \in]-3; \frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; +\infty[.$$

$$(g+h)(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{x+3}$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, (g-f)(x) = \frac{x}{2x-1} - 2x - 5.$$

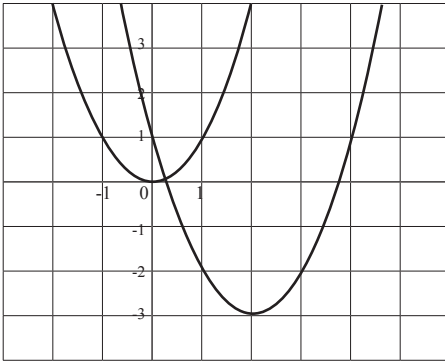
$$\bullet \forall x \in]-3; \frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}; +\infty[,$$

$$\left(\frac{g}{h} \right)(x) = \frac{x}{(2x-1)\sqrt{x+3}}.$$

Exercice 22

$$1) u(x) = x^2 \text{ et } f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 3.$$

$$2) f(x) = u(x-2) - 3 \text{ donc } (\mathcal{C}_f) = t_v(\mathcal{C}_u) \text{ avec } \vec{v} \left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right)$$



Exercice 23

sur $[-3; -1]$, $f \geq g$; sur $[-1; \frac{3}{2}]$, $f \leq g$

et sur $[\frac{3}{2}; 4]$, $f \geq g$.

Exercice 24

a. Étudions le signe de $f-g$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x^2 - 3x^2 + 3x + 5 = -2x^2 + 3x + 5 = -2(x+1)(x - \frac{5}{2}) = (x+1)(-2x+5)$$

| x | $-\infty$ | -1 | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|----------------|-----------|------|---------------|-----------|
| $(x+1)(-2x+5)$ | - | + | - | |

• Sur $] -\infty; -1[\cup] \frac{5}{2}; +\infty[$, $f < g$.

• Sur $] -1; \frac{5}{2}[$, $f > g$.

• $\forall x \in \left\{ \frac{5}{2}; -1 \right\}$, $f(x) = g(x)$.

b. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x(x+5)}{(x-1)(x+1)}$$

| x | $-\infty$ | -5 | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-------------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x(x+5)$ | + | - | - | + | + | |
| x^2-1 | + | + | - | - | + | |
| $f(x)-g(x)$ | + | - | + | - | + | |

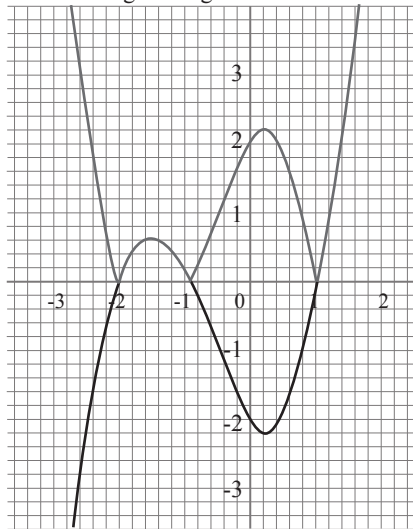
• $\forall x \in] -\infty; -5[\cup] -1; 0[\cup] 1; +\infty[$, $f(x) > g(x)$.

• $\forall x \in] -5; -1[\cup] 0; 1[$, $f(x) < g(x)$.

• $\forall x \in \{-5; -1; 0; 1\}$, $f(x) = g(x)$.

Exercice 25

La courbe de g est en gris.



Exercice 26

b. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow S_{]-1, 5/2[} = [0; 2]$

Exercice 27

1) Soit x et x' deux éléments de \mathbb{R} tels que $f(x) = f(x')$, on a :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{x'+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1} \Leftrightarrow xx' + x - x' - 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = -2x'$$

$$\Leftrightarrow x = x'$$

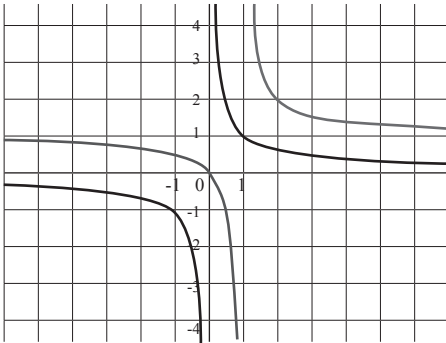
2) On a : x et x' et l'équation $f(x)=1$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} (c'est-à-dire 1 n'a pas d'antécédent par f), donc f n'est pas surjective.

IV.3. Exercices de renforcement

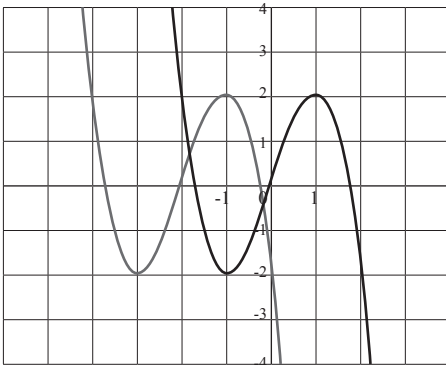
Exercice 28

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x-1} + 1 = f(x-1) + 1.$$

On a $(\mathcal{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathcal{C}_f)$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Exercice 29



$(\mathcal{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathcal{C}_f)$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 30

1) $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ et $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ on a

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, f(x) - g(x) = \frac{x-1}{2x-1} - \frac{x-3}{2x+1} = \frac{-6x+2}{(2x-1)(2x+1)}$$

| x | $-\infty - \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|----------------|-------------------------|---------------|---------------|-----------|
| $-6x+2$ | + | + | - | - |
| $(2x-1)(2x+1)$ | + | - | - | + |
| $f(x)-g(x)$ | + | - | + | - |

$$\forall x \in \left[-\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right], f(x) > g(x)$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, f(x) < g(x)$$

pour $x = \frac{1}{3}$, $f(x) = g(x)$.

2) $\forall x \in \left[-\infty; -\frac{1}{2} \right[$ on a $f(x) < g(x)$

donc $S_{\frac{1}{2}; +\infty[} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Exercice 31

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 3 \text{ et } g(x) = 4x^2 - 3x + 5$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 5x^2 - 2x + 3 > 4x^2 - 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty; -2 \right[\cup \left] 1; +\infty \right[.$$

| x | $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ |
|--------------|-----------|------|-----|-----------|
| $(x-1)(x+2)$ | + | - | + | + |

Exercice 32

• Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ tel que $f(x) = y$.

$$\frac{2-x}{2x-5} = y \Leftrightarrow x = \frac{2y+2}{2y+1} \text{ et } \frac{2y+2}{2y+1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}; f(x) = y$$

c'est à dire $f(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\})$ donc f est surjective.

• Soit x et x' deux réels de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ tel que

$$f(x) = f(x')$$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x-5} = \frac{2-x'}{2x'-5}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 10 - 2xx' + 5x = 4x'^2 - 10 - 2xx' + 5x'$$

$$\Leftrightarrow 5x - 4x = 5x' - 4x'$$

$$\Leftrightarrow x = x'$$

donc f est injective. Finalement f est une fonction bijective.

Exercice 33

1)
 $f \circ n$ est pas injective car $f(3) = \frac{3}{5} = f(\frac{1}{3})$ et $3 \neq \frac{1}{3}$.
 $f \circ n$ est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

Autre méthode : L'équation $f(x) = y$ est équivalente à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$.

Et $\Delta = 4 - 4y^2 > 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1; 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ donc $f \circ n$ est pas surjective.

2) Soit $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

La seule solution $x \in [-1, 1]$ est en effet

$$\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \in [-1, 1].$$

Pour $y = 0$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$. Donc pour $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$

défini par $h(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$ si $y \neq 0$ et $h(0) = 0$.
 Donc g est une bijection.

Autre méthode : $f'(x) = \frac{2 + 2x^2}{(1 + x^2)^2}$, donc f' est strictement positive sur $] -1, 1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

Donc la restriction de $f, g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, est une bijection.

Exercice 34

1) Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit $a, a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$.

Conclusion on a montré :

$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ donc f est injective.

2) Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.

3) Démontrons le sens (\Leftarrow)
 si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ f$.

Pour l'implication directe (\Rightarrow) :
 si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective. Si $h \circ f$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c' est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective. Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h .

IV.4. Situation complexe

Exercice 35

Nous allons exprimer l'aire $s(x)$ en fonction de x puis nous allons déterminer le maximum de $s(x)$.
 La longueur L du grillage :

$$2x + L = 40 \Leftrightarrow L = 40 - 2x$$

L'aire du jardin :

$$\begin{aligned} S(x) &= xL = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x \\ &= -2(x^2 - 20x) = -2[(x - 10)^2 - 10^2] \\ &= -200 - 2(x - 10)^2 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x - 10)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x - 10)^2 \leq 200$$

$$-2(x - 10)^2 \leq 200.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) \leq 200$ donc la valeur maximale de $S(x)$ est 200

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = 200 \Leftrightarrow x = 10.$$

$S(x)$ est maximale en 10.

Leçon 2 Dénombrement

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

| Propositions | V | F |
|--|---|---|
| Les ensembles $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{1; 2\}$ et \emptyset sont des ensembles finis. | x | |
| $\{1; 2\}$ et $\{2; 1\}$ représentent le même ensemble. | x | |
| Deux ensembles ayant le même cardinal sont égaux. | | x |
| Le cardinal de l'ensemble vide est 1. | | x |
| Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$. | x | |

Exercice 2

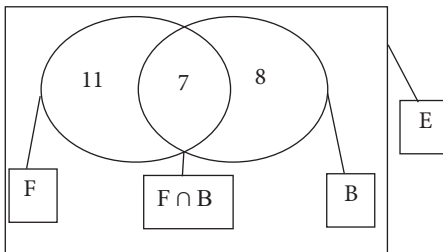
$A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{3; 4; 5\}, E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,

$A \cap B = \{3; 4\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$C_E^A = \{5; 6; 7\}$

Exercice 3



2) Le nombre de ceux qui n'aiment aucun sport est : $30 - (11 + 7 + 8) = 4$.

3) L'ensemble de ceux qui aiment au moins un sport est $F \cup B$.

$$\text{card}(F \cup B) = \text{card}(F) + \text{card}(B) - \text{card}(F \cap B) = 18 + 15 - 7 = 26.$$

L'ensemble de ceux qui n'aiment aucun des deux sports est donc $(\overline{F \cup B})$.

$$\text{card}(\overline{F \cup B}) = \text{card}(E) - \text{card}(F \cup B) = 30 - 26 = 4.$$

Exercice 4

1-b, 2-b, 3-c.

Exercice 5

$$1) \text{card}(F \times G) = \text{card}(F) \times \text{card}(G) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{card}(G \times F) = \text{card}(G) \times \text{card}(F) = 3 \times 2 = 6$$

$$2) F \times G = \{(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}$$

$$G \times F = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1)\}$$

Exercice 6

1-c, 2-a, 3-a.

Exercice 7

$A = \{e; f; g; h; i\}$

Trois 4-uplets possibles de A sont $(e; e; e; e)$, $(e; f; f; g)$ et $(f; g; h; i)$.

Exercice 8

$$\text{Card}A^2 = (\text{Card}A)^2 = 5^2 = 25.$$

$$\text{Card}A^3 = (\text{Card}A)^3 = 5^3 = 125.$$

Exercice 9

Il s'agit de donner le nombre 4-uplets de l'ensemble des dix chiffres.

On a donc : $10^4 = 10000$ codes possibles.

Exercice 10

Le nombre de mots ayant un sens ou non de trois lettres avec les cinq lettres a ; b ; c ; d et i tels que chaque lettre peut être utilisée trois fois est le nombre des 3-uplets de l'ensemble des cinq lettres, donc ce nombre est $5^3 = 125$.

Exercice 11

Si les téléphones portables et les tiroirs sont discernables et qu'il peut avoir des tiroirs vides alors chaque portable a 3 rangements possibles. Donc le nombre de rangements possibles est : $3^5 = 243$.

Exercice 12

Le nombre de résultats possibles lorsque l'on lance un dé cubique 3 fois de suite est le nombre des 3-uplets de l'ensemble des six différentes faces du dé, donc ce nombre est $6^3 = 216$.

Exercice 13

Réponses : 1-b , 2-c , 3-a.

Exercice 14

$$A_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

$$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

$$A_9^2 = 9 \times 8 = 72.$$

Exercice 15

$A = \{e ; f ; g ; h ; i\}$
 4 arrangements de l'ensemble A sont : (e ; f ; g), (g ; e ; f), (f ; e ; g), (e ; g ; f).

Exercice 16

| Propositions | V | F |
|--|---|---|
| Soit p un entier naturel non nul. Factorielle p est le produit : $p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. | × | |
| Soit n un entier naturel. Factorielle n est aussi noté : !n. | | × |

| | | |
|--|---|---|
| Factorielle 0 est égal à 0. | | × |
| Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que : $n \leq m$. On a : $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ | × | |

Exercice 17

| Propositions | V | F |
|--|---|---|
| Une permutation d'un ensemble fini non vide est un arrangement de tous ses éléments. | × | |
| (1 ; 2) et (2 ; 1) est une permutation de l'ensemble {1 ; 2} | × | |
| Le nombre de permutation d'un ensemble à 5 éléments est 5. | | × |

Exercice 18

Calcule $1!$, $5!$, $10!$
 $1! = 1$.
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
 $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 $= 3\,628\,800$.

Exercice 19

$A = \{e ; f ; g ; h ; i\}$.
 3 permutations de l'ensemble A sont :
 (e ; f ; g ; h ; i), (e ; g ; h ; f ; i), (i ; e ; f ; g ; h).

Exercice 20

1-c ; 2-a ; 3-b ; 4-c.

Exercice 21

$$C_9^1 = \frac{9}{1} = 9.$$

$$C_9^8 = C_9^1 = 9.$$

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35.$$

$$C_7^4 = C_7^3 = 35.$$

$$C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10.$$

Exercice 22

$$A = \{e; f; g; h; i\}$$

Trois combinaisons de l'ensemble A ayant 2 éléments sont : $\{e; f\}$, $\{f; g\}$, $\{h; i\}$.

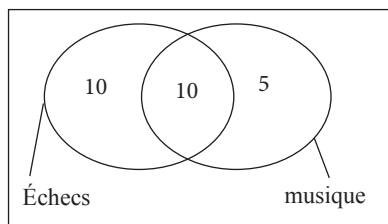
Exercice 23

$$1) (a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 b^4 \\ = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$2) (a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 \\ + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4 b + \\ 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 24



Exercice 25

On effectue le produit cartésien de l'ensemble des 3 entrées, des 2 plats et des 4 desserts pour constituer les menus. Donc le nombre de menus différents que l'on peut composer est : $3 \times 2 \times 4 = 24$.

Exercice 26

L'ensemble de tous les nombres à deux chiffres que l'on peut former sachant que ces deux chiffres sont inférieurs ou égaux à 3 est : $\{10; 11; 12; 13; 20; 21; 22; 23; 30; 31; 32; 33\}$.

Exercice 27

Une poignée de main se fait entre 2 personnes et l'ordre n'intervient pas dans ce cas.

Le nombre de poignées de main qui ont été échangées par les élèves est le nombre de sous-groupes formés de 2 élèves qui est :

$$C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{2!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45.$$

Exercice 28

1) Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble des 10 chiffres. Le nombre de numéros de téléphone différents à 8 chiffres est :

$$10^8 = 100\,000\,000.$$

2) Pour le premier chiffre on a 9 choix et pour les 7 autres on a 107 choix, donc le nombre de numéros de téléphone différents à 8 chiffres ne commençant par le chiffre 0 est :

$$9 \times 10^7 = 90\,000\,000.$$

Exercice 29

Un octet est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\{0; 1\}$. Donc le nombre de caractères que l'on peut former avec un octet est : $2^8 = 256$.

Exercice 30

1) Le nombre de podiums possibles est :

$$A_{21}^3 = 21 \times 20 \times 19 = 7\,980.$$

2) Si l'élève de la 1^{ère} C est premier alors le nombre de podiums possibles est :

$$A_{20}^2 = 20 \times 19 = 380.$$

3) L'élève de la 1^{ère} C peut occuper les trois premiers rangs, donc on a 3 cas. Le nombre de podiums possibles est donc :

$$3 \times A_{20}^2 = 3 \times 20 \times 19 = 1\,140.$$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31

1) Si elle en invite 5, alors il y aura 3 hommes et 2 femmes. Le nombre de types d'invitation est donc : $C_5^3 \times C_6^2 = 10 \times 15 = 150$.

2) Si elle en invite au moins 5 alors le nombre de type d'invitation est : $C_5^3 \times C_6^2 + C_5^4 \times C_6^1 + C_5^5 \times C_6^0 = 10 \times 15 + 5 \times 20 + 1 \times 15 = 265$.

3) Si elle en invite au moins 3 alors le nombre de type d'invitation est la somme si elle en invite 3 et si elle en invite au moins 5 alors on a :

$$C_5^2 \times C_6^1 + 265 = 10 \times 6 + 265 = 325.$$

Exercice 32

1) Le nombre de comités que l'on peut former est : $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28 = 24\,360$.

2) Si le poste de secrétaire est occupé par une femme, alors le nombre de comités est :

$$A_{12}^1 \times A_{29}^2 = 12 \times 29 \times 28 = 9\,744.$$

3) Le chef a 3 postes possibles et il y aura un arrangement des 2 autres parmi les 29 restants. Donc le nombre de comités comprenant le chef de classe est : $3 \times A_{29}^2 = 3 \times 29 \times 28 = 2\,436$

4) Le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et la secrétaire est une fille est : $A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^1 = 18 \times 12 \times 28 = 6\,048$.

5) Le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents est :

$$2 \times A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^1 = 2 \times 18 \times 12 \times 28 = 12\,096.$$

Exercice 33

1) Un code est un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble $\{A ; B ; C\}$, de cardinal 3, et de l'ensemble des 3-listes d'éléments de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, de cardinal 6^3 . Donc le nombre de codes différent qu'on peut former est : $3 \times 6^3 = 648$.

2) Si le code ne doit pas contenir le chiffre 1, alors les 3-listes sont constitués d'éléments de $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et sont au nombre de 5^3 .

Donc le nombre de codes sans le chiffre 1 est : $3 \times 5^3 = 375$.

3) Le contraire de « codes comportant au moins le chiffre 1 » est « codes ne comportant aucun chiffre 1 ». Donc le nombre de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 est : $648 - 375 = 273$.

4) Le nombre de codes comportant des chiffres distincts est : $3 \times A_6^3 = 3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$.

5) Le nombre de codes comportant au moins deux chiffres identiques est : $648 - 360 = 288$.

Exercice 34

| | Filles | Garçons | Total |
|----------------|--------|---------|-------|
| Première | 75 | 60 | 135 |
| Autres classes | 213 | 102 | 315 |
| Total | 288 | 162 | 450 |

Exercice 35

1. a) Le nombre de manières de ne tirer que 3 jetons verts est : $A_3^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

b) Le nombre de manières de ne tirer aucun jeton vert est : $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

c) **1^{ère} méthode** : Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons est A_9^3 .

Le nombre de manières de tirer au plus 2 jetons verts est : $A_9^3 - A_3^3 = 9 \times 8 \times 7 - 60 = 444$.

2^{ème} méthode : Le nombre de manières de tirer au plus 2 jetons verts est :

$$A_4^3 + 3 \times A_5^1 \times A_4^2 + 3 \times A_5^2 \times A_4^1 = 444.$$

d) Le nombre de manières de tirer exactement 1 jeton vert est : $A_5^1 \times A_4^2 = 5 \times 12 = 60$.

2. a) Le nombre de manières de ne tirer que 3 jetons verts est : $C_5^3 = 10$.

b) Le nombre de manières de ne tirer aucun jeton vert est : $C_4^3 = 4$.

c) **1^{ère} méthode** : Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons est C_9^3

Le nombre de manières de tirer au plus 2 jetons verts est : $C_9^3 - C_3^3 = 84 - 10 = 74$.

2^{ème} méthode : Le nombre de manières de tirer au plus 2 jetons verts est :

$$C_4^3 + C_5^1 \times C_4^2 + C_5^2 \times C_4^1 = 74.$$

d) Le nombre de manières de tirer exactement 1 jeton vert est : $C_5^1 \times C_4^2 = 5 \times 6 = 30$.

Exercice 36

1) Le nombre de façons est $14! = 87\,178\,291\,200$.

2) Le nombre de façons est $2! \times 5! \times 4! \times 3! = 34\,560$.

3) Il va faire une permutation des matières, ensuite une permutation entre les livres de chaque matière.

Le nombre de façons est

$$4! \times 2! \times 5! \times 4! \times 3! = 829\,440.$$

Exercice 37

$$1) A_n^2 = 42 \Leftrightarrow n(n-1) = 42 \Leftrightarrow n^2 - n = 42 \Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0.$$

Le discriminant du polynôme réel $x^2 - x - 42$ est $\Delta = 169$, d'où ses zéros sont -6 et 7 .

Comme $n \in \mathbb{N}$, donc l'ensemble de solutions de l'équation est $\{7\}$.

$$\begin{aligned} 2) C_n^3 = n(n-3) &\Leftrightarrow \frac{A_n^3}{3!} = n^2 - 3n \\ &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n^2 - 3n \\ &\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 6n^2 - 18n \\ &\Leftrightarrow n(n^2 - 9n + 20) = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n^2 - 9n + 20 \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme réel $x^2 - 9x + 20$ est $\Delta = 1$, d'où ses zéros sont 4 et 5 .

Comme $n \in \mathbb{N}$, donc l'ensemble de solutions de l'équation est $\{0; 4; 5\}$.

Exercice 38

On doit avoir $1 \leq p \leq n-1$.

$$\begin{cases} 2C_n^p = C_n^{p+1} \\ 7C_n^{p-1} = 2C_n^p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2n!}{(n-1)!p!} = \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\ \frac{7n!}{(n-p-1)!(p+1)!} = \frac{2n!}{(n-1)!p!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n-p} = \frac{1}{p+1} \\ \frac{7}{n-p+1} = \frac{2}{p} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n - 3p = 2 \\ 2n - 9p = -2 \end{cases}$$

On obtient ainsi $p = 2$, $n = 8$ qui vérifient les conditions.

L'ensemble de solution est donc est $\{(2; 8)\}$.

Exercice 39

$$\begin{aligned} 1) C_4^0 - C_4^1 - C_4^2 - C_4^3 - C_4^4 &= 1 - 4 + 6 - 4 + 1 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) C_5^0 - C_5^1 - C_5^2 - C_5^3 - C_5^4 - C_5^5 &= 1 - 5 - 10 + 10 - 5 + 1 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 &= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 \\ &= 16 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

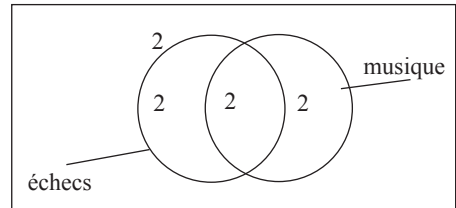
$$\begin{aligned} 4) C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 &= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \\ &= 32 \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

IV.4. Situations complexes**Exercice 40**

Nous allons utiliser un diagramme pour déterminer le nombre d'élèves qui :

- n'aiment aucun de ces loisirs
- aiment ces deux loisirs
- aiment la musique uniquement
- aiment le jeu d'échecs uniquement

En suite, nous allons trouver le nombre de comités possibles.



Le nombre de comités possible est $2 \times 2 \times 3 \times 5$ soit 60 comités.

Exercice 41

Pour obtenir une somme égale à 9, on a respectivement pour les cas allant de 1 à 6 les nombres de possibilités suivants : $3!, 3!, 3, 3, 3, 1$.

Le nombre total d'issues favorables est donc : $3! + 3! + 3 + 3 + 3 + 1 = 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$.

Pour obtenir une somme égale à 10, on a respectivement pour les cas allant de 1 à 6 les nombres de possibilités suivants : $3!, 3!, 3, 3!, 3, 3$. Le nombre total d'issues favorables est donc :

$$3! + 3! + 3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27.$$

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1. c ; 2. a ; 3. b ; 4. a ; 5. c ; 6. b

Exercice 2

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23.$$

b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 49.$$

c) $f(x) = 15x^2 - 30x + 15$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 15 \times 15 = 0.$$

d) $f(x) = 7x^2 - 0,7$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times 7 \times (-0,7) = 19,6.$$

e) $f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{11}{6}$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{11}{6} = -\frac{17}{3}.$$

f) $f(x) = 5x^2 - 0,7$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times 5 \times 7 = -140.$$

Exercice 3

1) 17 ; 2) 4 ; 3) 0.

Exercice 4

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} ; x_2 = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$= 2 ; = -3$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{2 ; -3\}.$$

b) $-x^2 + 4x - 5 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -4$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

c) $x^2 + 14x + 49 = 0$

$$\Delta = (14)^2 - 4 \times 1 \times (49) = 0$$

$$x_1 = \frac{-14}{2} = -7$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-7\}.$$

d) $4t^2 + 3t + 3 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 3 = -39$$

$$x_1 = \frac{-14}{2} = -7$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

e) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 28$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} ; x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{4}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{7}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \right\}.$$

f) $-5u^2 - u + 2 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 41$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{-10} ; x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{-10}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{41}}{-10} ; \frac{1 + \sqrt{41}}{-10} \right\}.$$

Exercice 5

a) $f(x) = 12x^2 + 37x + 3 = 0$

$$\Delta = (37)^2 - 4 \times 12 \times 3 = 35^2$$

$$x_1 = -3 ; x_2 = -\frac{1}{12}$$

$$f(x) = (x + 3)(12x + 1).$$

b) $g(x) = 5x^2 + 7x - 6 = 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 5 \times (-6) = 13^2$$

$$x_1 = \frac{-3}{5} ; x_2 = 2$$

$$g(x) = (5x + 3)(x - 2)$$

$$c) h(x) = -x^2 + 11x - 10$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 81$$

$$x_1 = 10 \quad ; \quad x_2 = 1$$

$$h(x) = -(x - 10)(x - 1)$$

Exercice 6

$$a) f(x) = 3x^2 - 4x + 4 \text{ et } x_1 = 2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{4}{3} - 2$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$b) g(x) = -x^2 + 2x + 8 \text{ et } x_1 = -2$$

$$x_1 x_2 = \frac{8}{-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-8}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4$$

$$c) h(x) = -13x^2 + 15x - 2 \text{ et } x_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-15}{-13} \Leftrightarrow x_2 = \frac{15}{13} - 1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{13}$$

Exercice 7

$S = 10$ et $P = 22$. Soit x_1 et x_2 les nombres cherchés. x_1 et x_2 sont solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ soit $X^2 - 10X + 22 = 0$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times 22 = 12$ d'où $5 + \sqrt{3}$ et $5 - \sqrt{3}$ sont les deux nombres cherchés.

Exercice 8

$$1) -2x^2 + 5x + 7 \geq 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 7 = 81$$

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

$$(-2x + 7)(x + 1) \geq 0.$$

| x | $-\infty$ | -1 | $\frac{7}{2}$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|------|---------------|-----------|
| $(-2x + 7)(x + 1)$ | | - | + | - |

$$S_{\mathbb{R}} = \left[-1; \frac{7}{2}\right]$$

$$2) 5x^2 - x + 3 < 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 \times 3 = -59$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset \quad \text{car } 5 > 0.$$

$$3) -x^2 - 2x - 4 < 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = -12$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset \quad \text{car } -1 > 0.$$

$$4) -x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(-x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ donc } S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[.$$

$$5) 3x^2 - 2x\sqrt{6} + 2 \leq 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{6})^2 - 4 \times 3 \times 2 = 0; x_0 = \frac{2\sqrt{6}}{6},$$

$$3\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \leq 0 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

$$6) 4x^2 - 4x\sqrt{5} + 5 \leq 0$$

$$\Delta = (-4\sqrt{5})^2 - 4 \times 4 \times 5 = 0; x_0 = \frac{4\sqrt{5}}{8},$$

$$4\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 > 0 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Exercice 9

Cas 1- c) ; Cas 2- a) ; Cas 3- b)

Exercice 10

$$a) f(x) = 7x^2 - 12x + 5$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 7 \times 5 = 4$$

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{5}{7}$$

$$f(x) = (7x - 5)(x - 1).$$

$$\bullet \forall x \in]-\infty; \frac{5}{7}[\cup]1; +\infty[, f(x) > 0.$$

$$\bullet \forall x \in]\frac{5}{7}; 1[, f(x) < 0$$

$$\bullet \forall x \in \left\{\frac{5}{7}; 1\right\}, f(x) = 0$$

$$b) f(x) = -x^2 + 6x - 9$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 7 \times 5 = 4$$

$$x_0 = 3 \quad ; \quad f(x) = -(x - 3)^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0.$$

$$c) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 20$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-20) = -4$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0.$$

Exercice 11

a) $\sqrt{2x+3} = 7$

$x \in V \Leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow V = [1; +\infty[$

$\forall x \in V, \text{ on a } \sqrt{2x+3} = 7 \Leftrightarrow 2x+3 = 7^2 \Leftrightarrow x = 23$

$23 \in V \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{23\}.$

b) $\sqrt{x-1} = -1 \text{ et } V = [1; +\infty[$

$\forall x \in V, \text{ on a } \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$

c) $\sqrt{7-x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 7] \\ 7-x = 5^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 7] \\ x = -18 \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{-18\}.$

Exercice 12

a) $\sqrt{x-4} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-4 = (x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4; +\infty[\\ x \in [-1; +\infty[\\ x^2 + x + 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4; +\infty[\\ x^2 + x + 5 = 0 \\ \Delta = -19 \end{cases}$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$

b) $\sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\infty; 4[\\ x \in [2; +\infty[\\ x(x-3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2; 4[\\ x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

c) $\sqrt{x^2-12} = 2x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12 \geq 0 \\ 2x-6 \geq 0 \\ x^2-12 = (2x-6)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [-2\sqrt{3}; +\infty[\\ x \in [3; +\infty[\\ x^2 - 8x + 16 = 0 \text{ et } \Delta = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2\sqrt{3}; +\infty[\\ x = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{4\}$

Exercice 13

a) $\sqrt{3x+1} \leq 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 3x+1 = (4-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\frac{1}{3}; +\infty[\\ x \in [-\infty; 4[\\ x^2 - 11x + 15 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\frac{1}{3}; 4[\\ \left(x - \frac{11 - \sqrt{61}}{2}\right)\left(x + \frac{11 - \sqrt{61}}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{3}; \frac{11 - \sqrt{61}}{2}\right]$

b) $\sqrt{x^2+5x+3} < 2x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 3x+1 = (4-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}] \cup \left[\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}; +\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty[\\ 3x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty[\\ (x-1)(x+2) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty[\\ x \in]-\infty; \frac{-2}{2}[\cup]1; -\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]1; +\infty[$

Exercice 14

a) $\sqrt{2x-1} \geq -3 \Leftrightarrow$ toujours vrai pour

$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) $\sqrt{2-x} > x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ 2-x = (x+4)^2 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 2+x \geq 4 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\infty; 2[\\ x \in [-4; +\infty[\\ x^2 + 9x + 14 < 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} x \in]-\infty; 2] \\ x \in]-\infty; -4] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-4; 2] \\ (x+7)(x+7) < 0 \text{ ou } x \in]-\infty; -4] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [-4; -2] \cup]-\infty; -4] \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -2]$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 15

a) $f(x) = -5x^2 + 3x + 8$

$\Delta = 9^2 - 4 \times 8 \times (-5) = 13^2$

$x_1 = -1$; $x_2 = \frac{8}{5}$

$f(x) = (-5x+8)(x+1)$

• $\forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{8}{5}; +\infty\right[$, $f(x) < 0$

• $\forall x \in]-1; \frac{8}{5}[$, $f(x) > 0$

• $\forall x \in \left\{\frac{8}{5}, -1\right\}$

b) $f(x) = 12x^2 + 10x + 7$

$\Delta = 10^2 - 4 \times 12 \times 7 = -236$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

c) $f(x) = x^2 + x\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$

$f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

Exercice 16

1) $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

2) $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

| | | | | |
|--------|-----------|----------------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | + | - | + | |

• $\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$, $f(x) > 0$

• $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $f(x) < 0$

• $\forall x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $f(x) = 0$

b) $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$

Exercice 17

$\frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{(3x-20x-7)} < 0$

| | | | | | | |
|---------------------------------------|-----------|------|----------------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -4 | $-\frac{1}{3}$ | 5 | 7 | $+\infty$ |
| $x^2 - x - 20$ | + | - | - | + | + | |
| $3x^2 - 20x - 7$ | + | + | + | | | + |
| $\frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7}$ | + | - | + | - | + | |

Exercice 18

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$
- L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution
- $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$

2) Signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

$$\begin{cases} \bullet \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[f(x) > 0 \\ \bullet \forall x \in]-1; 2[f(x) < 0 \\ \bullet \forall x \in \{-1; 2\} f(x) = 0 \end{cases}$$

Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0.$$

Signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0.$$

Signe de $k(x)$ suivant les valeurs de x :

$$\begin{cases} \bullet \forall x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[k(x) < 0 \\ \bullet \forall x \in]-2; 1[k(x) > 0 \\ \bullet \forall x \in \{-2; 1\} k(x) = 0 \end{cases}$$

Exercice 19

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{S}{P} = -\frac{5}{3} \times \frac{3}{-1} = 5$$

$$B = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$$

$$= \left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{31}{9}$$

$$C = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy$$

$$= \left(\frac{-5}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{28}{9}$$

$$D = (4x-1)(4y-1) = 16xy - 4(x+y) + 1$$

$$= 16\left(\frac{-1}{3}\right) - 4\left(\frac{-5}{3}\right) + 1 = \frac{7}{3}$$

Exercice 20

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{5}{6} \\ xy = 5 \end{cases}$$

$$x \text{ et } y \text{ sont de l'équation } X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6} = 0$$

$$X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 34 \\ xy = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2 \\ xy = -15 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$$

x et y sont solution de l'équation $x^2 - 2x - 15 = 0$

ou $x = 1$ ou $x = 3$ donc $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(-5; 3); (3; -5); (5; -3); (-3; 5)\}$.

Exercice 21

a) $S = 7$ et $P = 10$, les deux nombres sont solution de l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 5.$$

b) $S = -33$ et $P = 266$: les deux nombres sont solution de l'équation $x^2 + 33x + 266 = 0$

$$x^2 + 33x + 266 = 0 \Leftrightarrow x = 19 \text{ ou } x = 14.$$

c) $S = 55$ et $P = 750$: les deux nombres sont solution de l'équation $x^2 + 55x + 750 = 0$

$$x^2 + 55x + 750 = 0 \Leftrightarrow x = 25 \text{ ou } x = 30.$$

Exercice 22

$$a) \sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}; x \in \mathbb{V} \Leftrightarrow 4x-1 = 3-x \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \text{ et } x \leq 3 \Leftrightarrow \mathbb{V} = \left[\frac{1}{4}; 3\right].$$

$$\forall x \in \mathbb{V}, \sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow 4x-1 = 3-x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \text{ et } \frac{4}{5} \in \mathbb{V} \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{4}{5}\right\}.$$

$$b) \sqrt{x^2 - 5x + 3} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 5x + 3 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left] -\infty; \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\\ 3x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\\ x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{1\}.$$

$$c) \sqrt{-5x+6} = 2+x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+6 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ -5x+6 = (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; \frac{6}{5}] \\ x \in]-\infty; 2] \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[\\ x=1 \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{1; -\frac{1}{2}\}$$

Exercice 23

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Posons $X = x^2$ donc $X > 0$.
L'équation devient :

$$4X^2 - 5X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{ou } x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$$

b) $x^4 - x^2 + 1 = 0$. Posons $X = x^2$ donc $X > 0$.
L'équation devient :

$$X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou}$$

$$X \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ou}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{10}}}{2}; -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{10}}}{2} \right\}$$

c) $x^4 - 7x^2 + 8 = 0$. Posons $X = x^2$ donc $X > 0$.
L'équation devient :

$$X^2 - 7X + 8 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-7+\sqrt{17}}{2} \text{ ou}$$

$$X = \frac{-7-\sqrt{17}}{2} \text{ impossible car } X > 0$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

$$d) x^2 - \frac{6}{x^2} = -5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$$

Posons $X = x^2$ donc $X > 0$.

L'équation devient :

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X = -2 \text{ ou } X = -3$$

impossible car $X > 0$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

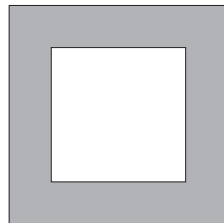
Exercice 24

Soit x le côté du carré intérieur.

$$\text{On a : } x^2 = 4^2 - x^2$$

$$\text{Soit } 2x^2 = 16, x^2 = 8,$$

$$\text{donc } x = 2\sqrt{2}$$



IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 25

$$a) \frac{x+3}{1-x} \leq -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x+3}{1-x} + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{-4x+8}{1-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in]1; 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} =]1; 2].$$

$$b) \frac{2x+1}{x^2+3} > 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2+3} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+2x-5}{x^2+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, -2x^2+x-5 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$$

$$c) \frac{2x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x-1-x+2}{x^2+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} =]-1; 1[.$$

$$d) \frac{5}{x^2-x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{(-x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} =]-2; 1[.$$

Exercice 26

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 19x + 15$$

$$1) P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{27}{8} + 3 \times \frac{9}{4} - 19 \times \frac{3}{2} + 15$$

$$= -15 + 15 = 0 \text{ donc } \frac{3}{2} \text{ est un zéro de } P.$$

$$2) P(x) = 2ax^3 + (2b-3a)x^2 + (2c-3b)x - 3c \text{ par}$$

$$\text{identification on a } \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = 3 \\ 2c - 3b = -19 \\ -3c = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -5 \end{cases} \quad p(x) = (2x-3)(x^2+3x-5)$$

$$= (2x-3) \left(x + \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \left(x + \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$3) p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \text{ ou } x = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2}, \frac{-3-\sqrt{29}}{2} \right\}.$$

Resolution de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

| X | $-\infty$ | $\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ | $\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|--------------------------|--------------------------|---------------|-----------|
| $2x-3$ | - | - | - | + | |
| x^2+3x-5 | + | - | + | + | |
| $P(x)$ | - | + | - | + | |

$$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty; \frac{-3-\sqrt{29}}{2} \right[\cup \left] \frac{-3+\sqrt{29}}{2}; \frac{3}{2} \right[$$

Exercice 27

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + 11x - 12}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 11x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+12) \geq 0$$

$$\text{donc } D_f = \left] -\infty; 1 \right] \cup \left[12; +\infty \right[.$$

$$b) f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - x}$$

$$c) \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$\text{donc } D_f = \left] -\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$$

$$d) f(x) = \sqrt{2 - \frac{3x}{x^2+1}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2 - \frac{3x}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2+1} \geq 0$$

soit $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ et $q(x) = x^2 + 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) > 0$ et $q(x) > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

Exercice 28

$$\text{ou } \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 3] \cup [1; +\infty[\\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ 2x^2 + 2x + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[\\ x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 3] \cup [1; +\infty[\\ 3x^2 + 2x + 4 < 0 \text{ et } \Delta = -44 \end{cases}$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

$$b) \sqrt{x^2 + 1} \geq 2x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3 \geq 0 \\ x^2 + 1 > (2x^2 + 3)^2 \end{cases}$$

$$a) \sqrt{x^2 + 2x - 3} > 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 > (2x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 4x^2 + 11x^2 + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \emptyset \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exercice 29

On a : $x^2 + (1-x)^2 \leq \frac{7}{10}$

Soit $2x^2 - 2x + 1 - \frac{7}{10} \leq 0$

$2x^2 - 2x + \frac{3}{10} \leq 0$

$20x^2 - 20x + 3 \leq 0$

$\Delta = 20^2 - 4 \times 20 \times 3 = 20 \times 8 = 160$

$x_1 = \frac{20 - 4\sqrt{10}}{40} = \frac{5 - \sqrt{10}}{10}$;

$x_2 = \frac{20 + 4\sqrt{10}}{40} = \frac{5 + \sqrt{10}}{10}$

Donc $x \in \left[\frac{5 - \sqrt{10}}{10} ; \frac{5 + \sqrt{10}}{10} \right]$.

Exercice 30

Quatre nombres 3, 6, a et b sont tels que leur moyenne arithmétique est 5 et leur écart type

est $\frac{1}{2}\sqrt{30}$.

Donc :

$$\begin{cases} \frac{3+6+a+b}{4} = 5 \\ \frac{(3-5)^2 + (6-5)^2 + (a-5)^2 + (b-5)^2}{4} = \frac{30}{4} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} a+b = 11 \\ 4+1+a^2+b^2-10(a+b)+50 = 30 \\ a+b = 11 \\ a^2-11a+18 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (a; b) = (2; 9)$ ou $(a; b) = (9; 2)$.

IV.4. Situations complexes**Exercice 31**

Soit v la vitesse du cycliste le plus lent.

La durée du trajet du cycliste le plus lent est : $\frac{195}{v}$

La durée du trajet du cycliste le plus rapide

est : $\frac{195}{v+4}$

On a : $\frac{195}{v+4} = \frac{195}{v} - 1$

$195v - 195(v+4) + v(v+4) = 0.$

$v^2 + 4v - 780 = 0$

$\Delta = 16 + 4 \times 780 = 56^2$

$v_1 = \frac{-4+56}{2} = 26$ et $v_2 = \frac{-4-56}{2} = -30$

Le cycliste le plus lent a roulé à 26 km/h tandis que le plus rapide a roulé à 30 km/h.

Exercice 32

Pour trouver le nombre d'invités, il faut calculer de deux façons différentes ce nombre.

Lorsqu'on a fait x rangées de $x+2$ chaises, il y avait 7 chaises de trop se traduit par : $x(x+2)-7$.

Lorsqu'on a doublé le nombre x de rangées en mettant $x-3$ chaises par rangée tout le monde était assis et il n'y avait aucune chaise vide se traduit par $2x(x-3)$.

On a : $x(x+2) - 7 = 2x(x-3)$

$x^2 + 2x - 7 = 2x^2 - 6x$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

On trouve $x = 7$

On a : $x(x+2) - 7 = 7 \cdot 9 - 7 = 56$

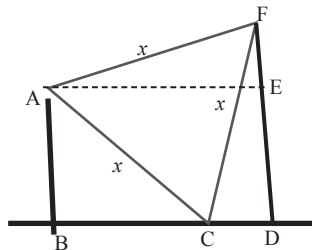
Il y avait 56 personnes présentes.

Exercice 33

Posons x la longueur du côté du drapeau.

Nous savons que : $AE = BD = BC + CD$.

Il suffit de calculer toutes les distances en fonction de x et de résoudre l'équation irrationnelle pour trouver x .



Posons $BC = a_1$; $CD = a_2$ et $AE = BD = a$

Dans le triangle rectangle ABC on a :

$a_1 = \sqrt{x^2 - 9}$

Dans le triangle rectangle CDF on a :

$$a_2 = \sqrt{x^2 - 16}$$

Dans le triangle rectangle AEF on a :

$$a = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{On a : } a_1 + a_2 = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 + x^2 - 16 + 2\sqrt{(x^2 - 9)(x^2 - 16)} = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2 - 9)(x^2 - 16)} = 24 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 9)(x^2 - 16) = x^4 - 48x^2 + 576$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 100x^2 + 576 = x^4 - 48x^2 + 576$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 52x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{52}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{2}{3}\sqrt{39}$$

La longueur du côté du drapeau est $\frac{2}{3}\sqrt{39}$.

Leçon 4 Limite et continuité

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

Si une fonction f est définie en a et admet une limite en a , alors cette limite est égale à $f(a)$.

Exercice 2

1- V ; 2- V ; 3- F ; 4- F.

Exercice 3

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 7 = 7$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} (9 - \sqrt{11}) = 9 - \sqrt{11}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2020} x = 2020$.

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{13}} x^2 = 13$; f) $\lim_{x \rightarrow -3} x^3 = -27$;

g) $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{1}{x} = -2$

Exercice 4

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \tan x = -1$; f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$

Exercice 5

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (-5x + 4) = -6$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 1) = -\frac{3}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 + 4x - 1) = -4$;

d) $\lim_{x \rightarrow -7} (29 + \frac{1}{x} - x^2) = -\frac{141}{7}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) = 0$

Exercice 6

a) $\lim_{x \rightarrow -2,53} |x + 1| = |-1,53| = 1,53$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (-3|x| + 10) = 7$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1-\sqrt{3}} (1 + |x|) = 1 + |1 - \sqrt{3}|$
 $= 1 - 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -2\sqrt{3}} |-x - 3| = |2\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3} - 3$

Exercice 7

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 3)(x - 1) = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} 4x^2(7 + x) = 1200$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} x\sqrt{x + 8} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 3x|x - 2| = 3\sqrt{3}|\sqrt{3} - 2|$
 $= 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 9$

Exercice 8

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{5}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{7}$; d) $\lim_{x \rightarrow 13} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = \frac{1}{3}$.

Exercice 9

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{108}{x-2} = -54$; b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x-1}{3x+5} = \frac{11}{10}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x+4}{x-4} = -\frac{8}{5}$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{5x-12}{x^2+1} = \frac{23}{50}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x+4}{2x^2-4x-1} = \frac{14}{15}$.

Exercice 10

1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x+7) = 8$.
 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3x+10) = 8$.
 3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 8$.

Exercice 11

1) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (5-3x^2) = -7$.
 2) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = 0$.
 3) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ donc g n'a pas

de limite en 2.

Exercice 12

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+3-1)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-1) = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} (2+\sqrt{x}) = 4$
 c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(x+2)}{2(x-\frac{1}{2})}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x+2) = \frac{5}{4}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{2x^3+8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{(x+2)(x^2-2x+4)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)} = \frac{1}{12}$

e) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{6}$

Exercice 13

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{3}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{2}$

donc f est continue en -1 .

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{1}{5}$ et $f(x) = \frac{1}{5}$

donc f est continue en 0.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x} = \frac{3}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{2}$ donc f est continue en 2.

Exercice 14

a) Toute fonction polynôme est continue en tout point de \mathbb{R} donc f est continue en -1 ;

b) Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$) donc f est continue en -3 .

c) f est la somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} donc f est continue en -2 .

d) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc en 1 ; la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-6}$ est continue sur donc $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ en 1. En tant que produit de deux fonctions continues en 1, f est continue en 1.

e) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ est continue en $\frac{\pi}{4}$; aussi la fonction $x \mapsto 2 \sin x$ est continue en $\frac{\pi}{4}$. En tant que somme de deux fonctions continues en $\frac{\pi}{4}$, f est continue en $\frac{\pi}{4}$.

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 15**

2 est un zéro de x^3-2x^2+x-2 et de x^2-x-2 .
 On a : $x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+1)$ et
 $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

Exercice 16

- 1) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 > 0 \\ -x+1 & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$
- $$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ -x+1 & \text{si } x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$
- $$\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = \frac{x^2-1}{-x+1} = -x-1$$
- $$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x+1$$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x-1) = -2$;
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x+1) = 2$;
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en -1.

Exercice 17

- 1) a- Pour $x < 2, f(x) = \sqrt{2-x}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$
- b- Pour $x > 2, f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{4}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 2.

Exercice 18

- 1) a- Pour $x < 1, f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 3x - 1) = 4$.

b- Pour $x > 1, f(x) = x^2 + 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ donc
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ donc f n'est pas continue en 1.

Exercice 19

- 1) $D_f = \mathbb{R}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$ donc f est continue en 1

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 20

- a) $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x(7-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -5(7-x) = -35$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x(7-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5(7-x) = 35$$
- b) $|-3x+2| = \begin{cases} -3x+2 & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x > \frac{2}{3} \end{cases}$
- $$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{-3x+2}{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} \frac{-3x+2}{4x-1} = 0$$
- $$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{3x-2}{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{3x-2}{4x-1} = 0$$
- c) $|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$
- $$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-4x-12}{|x+3|} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4(-x-3)}{-x-3} = 4$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-4x - 12}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-4(x + 3)}{x + 3} = -4\end{aligned}$$

Exercice 21

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 > 0 \\ -x + 2 & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases}$

$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \in]2; +\infty[\\ -x + 2 & \text{si } x \in]-\infty; 2[\end{cases}$
 $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x}{x + 2}$$

$\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x + 2} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1) = 1.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ donc f n'admet pas de

limite en 2 et par conséquent il n'existe aucune valeur de a pour lesquelles f est continue en 2

Exercice 22

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x^2 - \cos x)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x + a) = \frac{\pi}{2} + a$$

f est continue en $\frac{\pi}{2}$ si

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2} + a = b$.

Par conséquent $a = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$ et

$$b = \frac{\pi^2}{4}.$$

IV.4. Situation complexe

Exercice 23

Nous allons déterminer l'aire latérale en fonction du rayon r de base des cylindres et du volume v constant du cylindre ($v = 400 \text{ m}^3$). À l'aide du calcul de limite nous allons expliquer le phénomène.

On a : $v = \pi \times r^2 \times h$ où v est le volume du cylindre, r le rayon de base et h la hauteur.

Soit $A(r) = 2 \times r \times h$

$$A(r) = 2\pi \times r \times \frac{v}{\pi \times r^2}$$

$$A(r) = 2 \times \frac{v}{r} = \frac{800}{r}$$

Le volume étant constant, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 10000} A(x) = \lim_{x \rightarrow 10000} \frac{800}{x} = 0,08$$

$$\lim_{x \rightarrow 1000} A(x) = \lim_{x \rightarrow 1000} \frac{800}{x} = 0,8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} A(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{800}{x} = 200$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,25} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0,25} \frac{800}{x} = 3200$$

$A(x)$ est exprimé en m^2

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, $A(r)$ devient de plus en plus petite.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus petite, $A(r)$ devient de plus en plus grande.

Leçon 5 Probabilité

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1- a ; 2- a ; 3- c.

Exercice 2

- a) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 b) On pose : $A = \{2; 4; 6\}$
 • $A \subset \Omega$
 D'où, est un événement ;
 • On va utiliser la propriété commune aux éléments de A.
 Chaque élément de A est un nombre pair.
 D'où, A est l'événement : "Obtenir un nombre pair", ou "Le numéro relevé est pair", ...
 c) $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.
 d) C : "Le numéro noté est impair".

Exercice 3

| Affirmations | Réponse |
|--|---------|
| L'événement A, $A = \{(R_2; V)\}$, est un événement élémentaire | V |
| L'événement B : "Obtenir deux boules rouges", est un événement élémentaire | F |
| L'événement C : "Obtenir deux boules vertes", est un événement élémentaire | V |
| L'événement D : "Obtenir dans l'ordre du tirage une boule verte et une boule rouge" est un événement élémentaire | F |

- $B = \{(R_1, R_1), (R_1, R_2), (R_2, R_1), (R_2, R_2)\}$
 $C = \{(V, V)\}$
 $D = \{(V, R_1), (V, R_2)\}$

Exercice 4

Une urne U contient une boule verte V et deux boules rouges R_1 et R_2 .
 On effectue, au hasard, deux tirages successifs sans remise d'une boule de l'urne.
 Soit Ω , l'univers de l'expérience :

- $\Omega = \{(R_1, R_2), (R_2, R_1), (R_1, V), (V, R_1), (R_2, V), (V, R_2)\}$
 a) $A = \{(R_1, R_2), (R_2, R_1), (R_1, V), (V, R_1), (R_2, V), (V, R_2)\}$
 $A = \Omega$.

D'où, A est l'événement certain.

Méthode 2 (Raisonnement logique)

- Il n'y a qu'une seule boule verte.
 Or, on effectue deux tirages sans remise d'une boule.
 D'où, on a au moins une boule rouge.
 Donc, A est l'événement certain.
 b) C'est un tirage sans remise.
 D'où, on ne peut avoir deux boules vertes.
 Donc : $B = \emptyset$.
 B est l'événement impossible.
 c) $C = \{(R_1, V), (V, R_1), (R_2, V), (V, R_2)\}$
 $D = \{(R_1, R_2), (R_2, R_1)\}$
 $D \cap C = \emptyset$ et $D \cup C = \Omega$.
 D'où : $D = \bar{C}$.

Méthode 2 (Raisonnement logique)

- Il n'y a qu'une seule boule verte.
 Or, on effectue deux tirages sans remise d'une boule.
 Soit, on a exactement une boule verte, soit on a deux boules vertes.
 D'où, D est le complémentaire de C dans Ω .
 C'est-à-dire : $D = \bar{C}$.
 Or, on effectue deux tirages sans remise d'une boule.
 Soit, on a exactement une boule verte, soit on a deux boules vertes.
 D'où, D est le complémentaire de C dans Ω .
 C'est-à-dire : $D = \bar{C}$.

Exercice 5

- a) $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{4; 5\}$ et $C = \{5; 6\}$.
 b) $A \cup B$: "Obtenir un numéro inférieur 5 ou compris entre 3 et 6";
 $A \cap C$: "Obtenir un numéro inférieur 5 et, compris entre 3 et 6";
 c) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $A \cap C = \{4\}$.
 d) $A \cap C = \emptyset$.
 D'où, les événements A et C sont incompatibles.

Exercice 6

| Affirmations | Réponse |
|--|---------|
| Si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A = \bar{B}$ | faux |
| La probabilité $P(A)$ d'un événement A est un réel supérieur à 1 | faux |
| Si A et B sont deux événements quelconques, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | vrai |
| La probabilité d'un événement certain est 1 | vrai |
| La probabilité d'un événement impossible est 1 | faux |
| Si A et B sont deux événements incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ | vrai |
| La probabilité de l'événement contraire de A est égale à $1 + P(A)$ | faux |

Exercice 7

| | Affirmations | Réponse |
|---|--|---------|
| 1 | Il s'agit d'une expérience aléatoire | vrai |
| 2 | On a plus de chance d'obtenir le 6 que le 1 | faux |
| 3 | La probabilité de ne pas obtenir 5 est : $\frac{1}{6}$ | faux |
| 4 | Les événements "Obtenir un chiffre pair" et "Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 5" sont des événements incompatibles | faux |
| 5 | On a autant de chance d'obtenir un chiffre pair qu'un chiffre impair | vrai |
| 6 | Les événements «Obtenir un chiffre pair» et «Obtenir un chiffre supérieur impair» sont des événements incompatibles | vrai |

Exercice 8

1) B : "La boule est noire"
La boule ne peut être à la fois blanche et noire.
D'où, A et B sont incompatibles.

2) $B \cap C = B$ et $B \neq \emptyset$.

D'où, A et B sont incompatibles.

3) $\bar{A} \cap \bar{B}$ = "Obtenir une boule rouge"

Exercice 9

1) $\bullet A \cap B = \emptyset$.

$P(A \cap B) = 0$

$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,8$

2) $\bullet P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,7$

$\bullet P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,5$

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 10**

$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

$\bullet P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$

$\bullet P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$
 $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

$\bullet P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
 $= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$

$\bullet P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B})$
 $= 1 - P(A \cap B)$
 $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

$\bullet P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B})$
 $= 1 - P(\overline{A \cup B})$
 $= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$

Exercice 11

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$: univers du tirage

1) $\bullet A = \{3; 6; 9\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A \cap B = \{3; 6\}$

$\bullet A \cap B \neq \emptyset$.

D'où, A et B ne sont pas incompatibles.

2) Il n'y a pas de numéro à la fois pair et impair.

D'où : $C \cap D = \emptyset$.

Donc, A et B sont incompatibles.

3) $\bullet A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$

$P(A \cup B) = \frac{7}{10}.$

• $C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} = \Omega$.
 $P(C \cup D) = 1$.

Exercice 12

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$: univers du lancer

1) • $A = \{1; 2\}$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

• $B = \{2; 3; 6\}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) $H = \{1; 2; 3; 6\}$

$P(H) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 13

$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_{35}\}$: univers du tirage

On a 0 élève fait ni l'angle ni l'espagnol.

$\bar{E} \cap \bar{A} = \emptyset, \text{card}(\bar{E} \cap \bar{A}) = 0$.

On peut donc remplir facilement le tableau suivant :

| | A | \bar{A} | Total |
|-----------|----|-----------|-------|
| E | | | 25 |
| \bar{E} | | 0 | 10 |
| Total | 20 | 15 | 35 |

On obtient

| | A | \bar{A} | Total |
|-----------|----|-----------|-------|
| E | 10 | 15 | 25 |
| \bar{E} | 10 | 0 | 10 |
| Total | 20 | 15 | 35 |

1) • $P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

• $P(E) = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$.

2) $P(A \cap E) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Exercice 14

1) • $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$: univers du lancer

D'où : $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ (1)

• $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}$

D'où : $P(2) = 2P(1), P(3) = 3P(1), P(4) = 4P(1), P(5) = 5P(1)$ et $P(6) = 6P(1)$

En reportant ces expressions dans l'égalité (1) :
 $P(1) + 2P(1) + 3P(1) + 4P(1) + 5P(1) + 6P(1) = 1$
 $21P(1) = 1$

$P(1) = \frac{1}{21}$

Par suite : $P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{3}{21}$,

$P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21}$ et $P(6) = \frac{6}{21}$

2) A : "Obtenir un nombre premier"

$A = \{2; 3; 5\}$

$P(A) = P(3) + P(5) + P(2)$

$= \frac{3}{21} + \frac{5}{21} + \frac{2}{21} = \frac{10}{21}$

Exercice 15

| | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|
| $\nearrow +$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 7 |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 |
| 6 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 11 |
| 8 | 9 | 9 | 9 | 11 | 11 | 13 |
| 10 | 11 | 11 | 11 | 13 | 13 | 15 |
| 12 | 13 | 13 | 13 | 15 | 15 | 17 |

1) A : "Obtenir pour somme 13"

$\text{Card}(A) = 6$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2) B : "Obtenir une somme inférieure ou égale à 9"

$\text{Card}(B) = 20$

$P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Exercice 16

1) $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2) $P(C) = \frac{1}{10}$

3) $\bar{A} = B$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$= 1 - P(B) = \frac{3}{5}$

Exercice 17

1) A : "Tirer deux boules de même couleur"
 Pour réaliser A,
 on prend : 2 boules blanches : 2^2 choix possibles ;
 ou
 3 boules blanches : 3^2 choix possibles.

$$P(A) = \frac{A_2^2 + A_3^2}{A_5^2}$$

$$P(A) = \frac{2 + 6}{20}$$

$$P(A) = \frac{8}{20}$$

2) B : "Tirer deux boules de mêmes différentes"
 $\overline{B} = A$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$

$$= 1 - P(A) = \frac{12}{20}$$

Exercice 18

1) A : "Les 2 postes sont occupées par des filles"

$$P(A) = \frac{A_{20}^2}{A_{45}^2} = \frac{19}{99}$$

2) B : "Les 2 postes sont occupées par des garçons"

$$P(B) = \frac{A_{20}^2}{A_{45}^2} = \frac{10}{33} = \frac{19}{99}$$

3) C : "Les 2 postes sont occupées par deux élèves de même sexe"

$$C = A \cup B \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{49}{99}$$

4) D : "Les 2 postes sont occupées par deux élèves de sexes différents"

$$\overline{D} = C$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D})$$

$$= 1 - P(C) = \frac{50}{99}$$

Exercice 19

1. a) A : "Tirer 3 boules noires"

$$P(A) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$$

b) B : "Tirer 3 boules de même couleur"

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3} = \frac{11}{56}$$

c) C : "Tirer au moins une boule rouge"

$$\overline{C} = A$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C})$$

$$= 1 - P(A) = \frac{98}{99}$$

2. a) D : "Le 1^{ère} boule tirée est rouge et la dernière est noire"

Pour réaliser D,

on prend : 1 boule noire : 3 choix possibles ;

1 boule rouge : 5 choix possibles.

$$P(D) = \frac{3 \times 5}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

b) E : "La 1^{ère} boule tirée est noire"

Pour réaliser E, on prend : 1 boule noire :

3 choix possibles ;

1 boule quelconque : 7 choix possibles.

$$P(E) = \frac{3 \times 7}{C_8^2} = \frac{3}{4}$$

c) F : "La 2^{ème} boule tirée est rouge"

Pour réaliser F,

on fixe une boule rouge pour le 2^{ème} tirage : 5 choix ;

on prend 1 boule quelconque : 7 choix possibles.

$$P(F) = \frac{7 \times 5}{C_8^2} = \frac{5}{8}$$

Exercice 20

1) a) A : "Ne tirer que 3 jetons verts"

$$P(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$$

b) B : "Ne tirer aucun jeton vert"

$$P(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}$$

c) C : "Tirer au plus 2 jetons verts"

$$\overline{C} = A$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A) = \frac{37}{42}$$

d) D : "Tirer exactement 1 jeton vert"

D est composé des triplets de la forme (v, r, r),

(r, v, r) et (r, r, v)

Pour réaliser D,

on prend : 1 jeton vert : 5 choix possibles ;

2 jetons rouges : A_4^2 choix possibles ;

on dispose les 3 jetons (2 couleurs) : 3 choix possibles.

$$P(D) = \frac{5 \times A_4^2 \times 3}{A_9^3} = \frac{5}{14}$$

2. a) A : "Ne tirer que 3 jetons verts"

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$$

b) B : "Ne tirer aucun jeton vert"

$$P(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$$

c) C : "Tirer au plus 2 jetons verts"

$$\begin{aligned} \bar{C} &= A \\ P(C) &= 1 - P(\bar{C}) \\ &= 1 - P(A) \\ &= \frac{37}{42} \end{aligned}$$

d) D : "Tirer exactement 1 jeton vert"

Pour réaliser D,
on prend : 1 jeton vert : 5 choix possibles ;
2 jetons rouges : C_4^2 choix possibles ;

$$P(D) = \frac{5 \times C_4^2 \times 3}{C_9^3} = \frac{5}{14}$$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 21

1)

| | Garçon | Fille | Total |
|---------|--------|-------|-------|
| Externe | 5 | 15 | 20 |
| Interne | 15 | 20 | 35 |
| Total | 20 | 35 | 55 |

2. a) $P_a = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$

b) $P_b = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$

c) $P_c = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$

d) $P_d = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$

Exercice 22

8 cœurs

8 carreaux

8 trèfles

8 piques

1) A : "Les 2 cartes sont de même couleur"

On fixe la couleur : 4 choix ;

On prend 2 cartes de cette couleur : C_8^2 choix.

$$P(A) = \frac{4C_8^2 \times 3}{C_{32}^2} = \frac{7}{31}$$

2) B : "Tirer au moins un as"

\bar{B} : "Ne tirer aucun as"

Il y a exactement 28 cartes qui ne sont pas des As.

$$P(\bar{B}) = \frac{C_{28}^2}{C_{32}^2}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - \frac{C_{28}^2}{C_{32}^2} \\ &= \frac{59}{248} \end{aligned}$$

Exercice 23

13 cœurs

13 carreaux

13 trèfles

13 piques

Chacune des 4 couleurs a les cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

1) Soit N le nombre cherché.

$$N = C_{52}^8 = 752\,538\,150$$

2) a. A : "Ne tirer aucun as"

Il y a exactement 48 cartes qui ne sont pas des As.

$$P(A) = \frac{C_{48}^8}{C_{52}^8} = \frac{19393}{38675}$$

b. B : "Tirer au moins un as"

$\bar{B} = A$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - P(A) \\ &= \frac{19282}{38675} \end{aligned}$$

c. C : "La main a 4 As"

On prend : 4 as : 1 choix ;

4 autres cartes : C_{48}^4 choix.

$$P(C) = \frac{1 \times C_{48}^4}{C_{52}^8} = \frac{2}{7735}$$

d) D : "La main a exactement 1 As"

On prend : 1 As : 4 choix ;

7 autres cartes : C_{48}^7 choix.

$$P(D) = \frac{4 \times C_{48}^7}{C_{52}^8} = \frac{15136}{38675}$$

Exercice 24

5 p500

10 p250

15 p25

$$1) \text{ a. } P(A) = \frac{C_{15}^4}{C_{30}^4} = \frac{13}{261}$$

$$\text{ b. } P(B) = \frac{C_{10}^4}{C_{30}^4} = \frac{2}{261}$$

$$\text{ c. } P(C) = 1 - \frac{C_{25}^4}{C_{30}^4} = \frac{2951}{5481}$$

$$\text{ d. } P(D) =$$

$$\frac{C_5^2 \times 10 \times 15 + 5 \times C_{10}^2 \times 10 + 5 \times 10 \times C_{15}^2}{C_{30}^4} = \frac{75}{203}$$

$$2) \text{ a. } P(E) = \frac{15^4}{30^4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ b. } P(F) = \frac{10^4}{30^4} = \frac{1}{81}$$

$$\text{ c. } P(G) = 1 - \frac{25^4}{30^4} = \frac{671}{1296}$$

$$\text{ d. } P(H) =$$

$$\frac{5^2 \times 10 \times 15 \times 3 + 5 \times 10^2 \times 15 \times 3 + 5 \times 10 \times C_{15}^2}{C_{30}^4} = \frac{75}{203}$$

Exercice 25

| | Oui à la question 2 (B) | Non à la question 2 (\bar{B}) | Total |
|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|-------|
| Oui à la question 1 (A) | 46% $A \cap B$ | 19% $A \cap \bar{B}$ | 65% |
| Non à la question 1 (\bar{A}) | 5% $\bar{A} \cap B$ | 30% $\bar{A} \cap \bar{B}$ | 35% |
| Total | 51% | 49% | 100% |

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 65\% + 51\% - 46\%$$

$$= 70\%$$

$$2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 30\%$$

IV.4. Situation complexe

Exercice 26

1) Numérotons les roues R_1, R_2, R_3 et R_4 .

Et, on note les fruits affichés dans le même ordre.

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 |
|------------|------------|------------|------------|
| 8 choix | 8 choix | 8 choix | 8 choix |

Soit N le nombre cherché.

$$N = 8^4 = 4096$$

2) • A : “On fait apparaître 4 fruits identiques”

A : “Obtenir un tee-shirt”

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 |
|------------|------------|------------|------------|
| 8 choix | 1 choix | 1 choix | 1 choix |

$$P(A) = \frac{8 \times 1 \times 1 \times 1}{8^4} = \frac{1}{512}$$

• B : “On fait apparaître 4 fruits distincts”.

B : “Obtenir une casquette”

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 |
|------------|------------|------------|------------|
| 8 choix | 7 choix | 6 choix | 5 choix |

$$P(B) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{8^4} = \frac{105}{256} = \frac{210}{512}$$

• C : “On fait apparaître exactement 3 fruits identiques”

C : "Obtenir un sac"

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| R ₁ | R ₂ | R ₃ | R ₄ |
| 8 choix | 1 choix | 1 choix | 7 choix |

Et, on permute les 4 fruits : 4 choix.

$$P(C) = \frac{8 \times 1 \times 1 \times 7 \times 4}{8^4} = \frac{7}{128} = \frac{28}{512}$$

$$3) P(A) < P(C) < P(B)$$

D'où, il est plus probable d'obtenir une casquette.

Leçon 6 Dérivation

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

- b
- c

Exercice 2

- Taux d'accroissement en 1.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en -3 .

Exercice 3

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 3}{x - 2} = 0$$

donc le nombre dérivé de la fonction f en 2 est 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 + 2 - (\sqrt{2})^3 - 2}{x - \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 2)}{x - \sqrt{2}} = 6$$

donc le nombre dérivé de la fonction f en $\sqrt{2}$ est 6.

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(2)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 3 - 1}{x + 1}$$

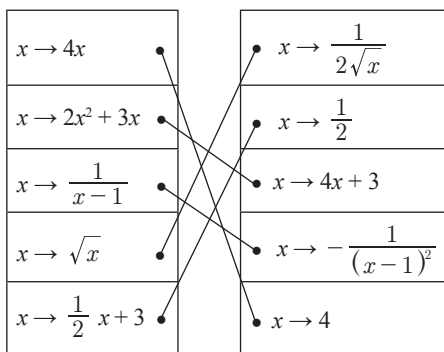
$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x + 1)}{x + 1} = 2$$

donc le nombre dérivé de la fonction f en -1 est 2.

Exercice 4

- $y = 3$
- $y = 6(x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} + 2 = 6x - 4\sqrt{2} + 2$
- $y = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$

Exercice 5



Exercice 6

- f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 10x$
- f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -3x^2 - 3$
- f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^* \text{ et } f'(x) = \frac{(2x+1)x - x^2 - x + 2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$
- f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \sin x + x \cos x$
- f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

Exercice 7

a) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -x - 2 - x + 1 = -2x - 1$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $f'(x) =$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+2) - 2x(x^2-x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$$

c) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2x \sin(-4x+1) - 4x^2 \cos(-4x+1)$

Exercice 8

1. b) ; 2. c)

Exercice 9

a) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{4} \right\}$ et pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{4} \right\}$, $f'(x) = \frac{4}{(5-4x)^2}$

b) f est dérivable sur $] -\infty; \frac{5}{4} [$ et pour tout x

élément de $] -\infty; \frac{5}{4} [$,

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$$

c) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x élément de \mathbb{R} , $f'(x) = -8084(5-4x)^{2020}$

d) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x élément de \mathbb{R} , $f'(x) = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 10

1. a ; 2. a ; 3. b ; 4. c

Exercice 11

1. faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. faux

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 12**

- 1) Faux
- 2) Faux ($h'(-1) = 5$)
- 3) Vrai
- 4) Faux (ça ne marche pas avec la fonction constante)
- 5) Faux

6) La fonction g définie par $g(x) = (2x+3)^2$ est dérivable en 0 et $g'(x) = 12$. (Vrai)

7) La fonction h définie par : $h(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ admet pour dérivée $\frac{-7}{(x-3)^2}$. (Faux)

Exercice 13

1) $f'(x) = 3$ donc $f'(0) = 3$

la tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = 3x + 5$.

2) $f'(x) = 4x$ donc $f'(1) = 4$

la tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 4(x-1) + 3 = 4x - 1$

3) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $f'(-1) = -1$

la tangente à (C) au point d'abscisse -1 a pour équation : $y = -(x+1) - 1 = -x - 2$.

Exercice 14

1) $f'(x) = 6x - 4$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

• $\forall x \in]-\infty; \frac{2}{3} [$, $f'(x) < 0$

• $\forall x \in]\frac{2}{3}; +\infty [$, $f'(x) > 0$

2) $\forall x \in]\frac{2}{3}; +\infty [$, f est strictement croissante.

$\forall x \in]-\infty; \frac{2}{3} [$, f est strictement décroissante.

Exercice 15

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

2) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$ donc

• $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty [$, $g'(x) > 0$

car à l'extérieur des racines $g'(x)$ a le signe de 3

• $\forall x \in]-2; 0[$, $g'(x) < 0$

3) $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty [$, g est strictement croissante.

$\forall x \in]-2; 0[$, g est strictement décroissante.

Exercice 16

| | | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| x | $-\infty$ | -2 | 0 | $+\infty$ | |
| $g'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | | | | | |

• g' s'annule en -2 en changeant de signe donc $g(-2)$ est un extremum relatif. 20 est un maximum relatif.

• g' s'annule en 0 en changeant de signe donc $g(0)$ est un extremum relatif. 0 un minimum relatif.

Exercice 17

a) Pour tout x élément de \mathbb{R} , $f'(x) = 3x^2 - 5x$, $f'(-1) = 8$, donc le nombre dérivé de la fonction f en -1 est 8 .

b) Proposition ; $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
 Pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$;

$f'(2) = \frac{1}{16}$, donc le nombre dérivé de la fonction f en 2 est $\frac{1}{16}$.

c) Pour tout x élément de $]0; +\infty[$,

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(4) = \frac{1}{4}$, donc le nombre dérivé de la fonction f en 4 est $\frac{1}{4}$.

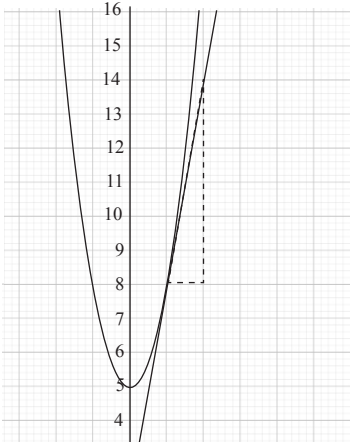
d) Pour tout x élément de \mathbb{R} , $f'(x) = 15x^2 - 2$, $f'(-2) = 58$, donc le nombre dérivé de la fonction f en -2 est 58 .

Exercice 18

a) $f'(x) = 6x$

Le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 6$.

b) Un vecteur directeur de la tangente en A est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.



Exercice 19

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ -x^3 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

$\forall x \in [0; +\infty[$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

donc f est dérivable en 0 .

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ -x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

$\forall x \in [0; +\infty[$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

donc g est dérivable en 0 .

Exercice 20

1) L'ensemble de dérivabilité de f est \mathbb{R} et l'ensemble de dérivabilité de g est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

2) $f'(x) = 8x - 3$

$f'(-1) = -11$ et $f'(3) = 14$

$$g'(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$$

$$g'^{-1} = -\frac{5}{16} \text{ et } g'(3) = -\frac{5}{64}$$

Exercice 21

1) $f'(x) = 6x - 6$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2) $\forall x \in]-\infty; 1]$ $g'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[$ $g'(x) \geq 0$

3) Tableau de variation

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | | | |

• f' s'annule en 1 en changeant de signe donc $f(1)$ est un extrémum relatif. 4 est un minimum relatif.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 22

1) $Df = \mathbb{R}^*$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x < 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x > 0} f(x) = +\infty$

3) a. L'ensemble de dérivabilité de f est \mathbb{R}^* et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

b. $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$ et

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[f'(x) > 0$

$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[f'(x) < 0$

c. f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $]-1 ; 0[$ et sur $]0 ; 1[$

| | | | | | | |
|---------|-----------|---|---|---|-----------|---|
| x | $-\infty$ | 1 | 0 | 1 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | | | | |

• f' s'annule en -1 en changeant de signe donc $f(-1)$ est un extrémum relatif. -4 est un minimum relatif.

• f' s'annule en 0 en changeant de signe donc $f(0)$ est un extrémum relatif. 0 est un minimum relatif.

Exercice 23

1) $Df = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) a. L'ensemble de dérivabilité de f est \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 - x + 1$

Le discriminant est : $(-1)^2 - 4 \times 3 = -11 < 0$ ou

$\forall x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante

$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[f'(x) < 0$

Tableau de variation

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | | |

5) $y = x - 2$

Exercice 24

1) $f(x) = \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6 \right)$

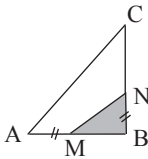
2. a) $h'(x) = \frac{3}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(x-2)(x+1)$.

b)

| | | | | |
|---------|-----------|----------------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\frac{7}{12}$ | $-\frac{5}{3}$ | $-\infty$ |

3) $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$ or $h'(0) = -1$ et $h(0) = 0$ donc $y = -x$

Exercice 25



Posons : $AM = x$

L'aire du triangle MNB est $\frac{MB \times BN}{2}$

L'aire du triangle MNB est maximale lorsque $MB \times BN$

Posons $f(x) = MB \times BN$

On a : $f(x) = x(4 - x) = 4x - x^2$

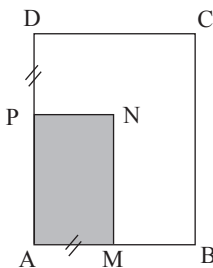
$f'(x) = 4 - 2x$;

La fonction dérivée s'annule en 2 en changeant de signe.

f admet un maximum en 2.

L'aire du triangle MNB est maximale lorsque $AM = 2$.

Exercice 26



L'aire du rectangle AMNP est $AM \times AP$.

Posons $f(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$f'(x) = -2x + 6$

f est maximale lorsque $x = \frac{3}{2}$

L'aire du rectangle AMNP est maximale lorsque $AM = \frac{3}{2}$

IV.4. Situations complexes

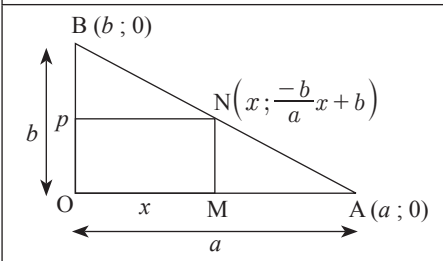
Exercice 27

Nous allons placer le terrain dans un repère OAB. Poser x un des côtés de la maison et déterminer l'aire f de la maison en fonction de x . En utilisant la fonction dérivée de f , Nous allons déterminer le maximum de f .

Soit un triangle OAB rectangle en O, où avec $OA = a$ et $OB = b$.

M est un point quelconque du segment [OA] distincts de O et de A, N est un point de la droite (AB) et P un point de la droite (OB) tel que OMNP soit un rectangle.

Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.



Une équation de la droite (AB) est de la forme $y = ax + \beta$. Comme elle passe par les points A

et B on a : $\alpha = \frac{-b}{a}$ et $\beta = b$. D'où l'équation de la droite (AB) est $y = \frac{-b}{a}x + b$.

On en déduit la distance MN et OM

$OM = x$, où $x \in]0 ; a[$

$$MN = b - \frac{b}{a}x \left(b - \frac{b}{a}x > 0, a > b \right)$$

$$f(x) = OM \times MN$$

$$f'(x) = -\frac{2b}{a}x + b$$

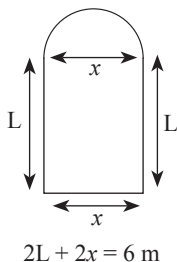
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a}x + b = 0$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Il suffit de placer M au milieu du segment [OA].

Exercice 28

Posons x le rayon du demi-cercle. Nous allons exprimer l'aire $a(x \mapsto a(x))$ de la fenêtre en fonction de x et déterminer la valeur de x pour que $a(x)$ soit maximale.



On a : $2L + 2x = 6 \text{ m}$; soit $L = 3 - x$

$a(x) = xL + \frac{1}{2}$ aire du cercle de diamètre x

$$a(x) = x(3 - x) + \frac{\pi \times x^2}{8}$$

$$a(x) = \frac{(8 - \pi)x^2 + 24x}{8} \quad 8 - \pi \text{ étant négatif,}$$

la parabole admet un maximum. $a'(x) = \frac{(8 - \pi)x + 12}{4}$

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{8 - \pi} ;$$

$$L = 3 - \frac{12}{8 - \pi} = \frac{12 - 3\pi}{8 - \pi}$$

Pour que la fenêtre laisse passer plus de lumière on a :

La base du rectangle est $\frac{12}{8 - \pi}$ m la hauteur

du rectangle est égale à $\frac{12 - 3\pi}{8 - \pi}$ m et le rayon

du demi-cercle est égal à $\frac{6}{8 - \pi}$

Leçon 7 Barycentre

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

G est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, -3).

Exercice 2

P est le barycentre des points pondérés (Q, $\sqrt{5}$) et (R, $\frac{7}{9}$).

Exercice 3

$$1) 3 \overrightarrow{GA} - 5 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$2) \overrightarrow{TP} - 7 \overrightarrow{TQ} = \vec{0}$$

$$3) -11 \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}.$$

Exercice 4

1. c ; 2. b ; 3. b

Exercice 5

$$\overrightarrow{AG} = 7 \overrightarrow{AB} \Rightarrow 6 \overrightarrow{GA} - 7 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$6 - 7 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A,6);(B,-7)\}$

Exercice 6

$G = \text{bar}\{(E, -4); (F, 6)\} \Rightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{6}{-4+6} \overrightarrow{EF}$.
 D'où : $\overrightarrow{EG} = 3 \overrightarrow{EF}$. On en déduit la construction de G.

**Exercice 7**

$G = \text{bar}\{(A, 5555); (B, 3333)\}$.
 En utilisant la propriété d'homogénéité du barycentre, on a : $G = \text{bar}\{(A, 5); (B, 3)\}$.
 D'où : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8} \overrightarrow{AB}$.

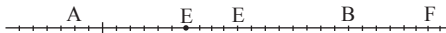
Exercice 8**Exercice 9**

Figure1 : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$.
 Figure2 : $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 4)\}$.
 Figure3 : $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$.

Exercice 10

$$x_G = \frac{1 \times x_M - 2 \times x_N}{1 - 2} = \frac{1 \times 2 - 2 \times (-1)}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = 4$$

$$y_G = \frac{1 \times y_M - 2 \times y_N}{1 - 2} = \frac{1 \times 3 - 2 \times 4}{1 - 2} = \frac{-5}{-1} = 5$$

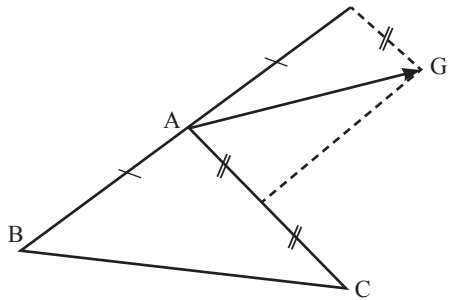
D'où $G(-4; 5)$.

Exercice 11

a) $2\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
 On a : $-2 + 1 + 3 \neq 0$.
 Donc : $G = \text{bar}\{(A, -2); (B, 1); (C, 3)\}$.
 b) $5\overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{BG} - 7\overrightarrow{CA} \Rightarrow -12\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 7\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
 On a : $-12 + 4 + 7 \neq 0$.
 Donc : $G = \text{bar}\{(A, -12); (B, 4); (C, 7)\}$.

Exercice 12

$G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -2); (C, 1)\}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.
 On en déduit la construction de G.

**Exercice 13**

D est l'isobarycentre des points A, B et C.
 D'où : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
 Ce qui donne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
 On a : $1 + 1 - 3 \neq 0$.
 Donc : $A = \text{bar}\{(B, 1); (C, 1); (D, -3)\}$.

Exercice 14

On a : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$
 $= \text{bar}\{(H, 3); (C, 3)\}$.
 G est l'isobarycentre des points H et C.
 Donc, G est le milieu du segment [HC].

Exercice 15

$4\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{AD}$
 $\Rightarrow 4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
 On a : $4 - 3 + 1 + 2 \neq 0$.
 Donc : $G = \text{bar}\{(A, 4); (B, -3); (C, 1); (D, 2)\}$.

Exercice 16

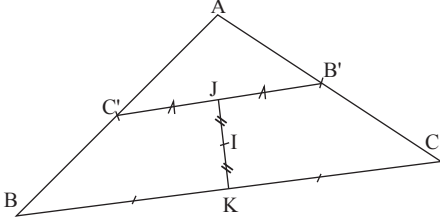
$m \neq -8$
 $G = \text{bar}\{(A, m); (B, 3); (C, 2); (D, 3)\}$.
 On a : $m\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
 • $I = \text{bar}\{(B, 1); (C, 1); (B', 1); (C', 1)\}$.

Soit J et K les milieux respectifs des segments [BC] et [B'C'] .

On a : $I = \text{bar}\{(J, 2) ; (K, 2)\}$.

I est l'isobarycentre de J et K, donc le milieu du segment [JK].

• On construit les points B' et C', puis les points J et K et enfin I.



Exercice 17

$C = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 1)\}$.

$D = \text{bar}\{(A, 3) ; (B, -9)\}$.

$E = \text{bar}\{(A, 5) ; (B, 1)\}$.

$F = \text{bar}\{(A, -9) ; (B, 3)\}$.

Exercice 18

a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$1 + 1 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 1)\}$

b) $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$-2 + 1 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, -2) ; (B, 1)\}$

c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$-2 + 1 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, -2) ; (B, 1)\}$

d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow 0\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$0 + 1 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 0) ; (B, 1)\}$

Exercice 19

1) $2\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$1 - 3 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, -3)\}$

Or $G = \text{bar}\{(A, a) ; (B, b)\}$, avec $a + b = 6$

Il existe un nombre réel non nul k tel que :

$ka = 1, kb = -3$ et $a + b = 6$

On obtient : $\frac{1}{k} - \frac{3}{k} = 6$. D'où : $k = -\frac{1}{3}$.

Alors : $a = -3$ et $b = 9$.

2) $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$3 - 2 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 3) ; (B, -2)\}$

Or $G = \text{bar}\{(A, a) ; (B, b)\}$, avec $a + b = -3$

Il existe un nombre réel non nul k tel que :

$ka = 3, kb = -2$ et $a + b = -3$

On obtient : $\frac{3}{k} - \frac{2}{k} = -3$. D'où : $k = -\frac{1}{3}$.

Alors : $a = -9$ et $b = 6$.

3) $\overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, d'où $G = \text{bar}\{(A, -2) ; (B, 5)\}$

Or $G = \text{bar}\{(A, a) ; (B, b)\}$, avec $a + b = 1$

Il existe un nombre réel non nul k tel que :

$ka = -2, kb = 5$ et $a + b = 1$

On obtient : $-\frac{2}{k} - \frac{5}{k} = 1$. D'où : $k = 3$.

Alors : $a = -\frac{2}{3}$ et $b = \frac{5}{3}$.

4) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} \Rightarrow 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$2 + 3 \neq 0$, d'où $G = \text{bar}\{(A, 2) ; (B, 3)\}$

Or $G = \text{bar}\{(A, a) ; (B, b)\}$, avec $a + b = -1$

Il existe un nombre réel non nul k tel que :

$ka = 2, kb = 3$ et $a + b = -1$

On obtient : $\frac{2}{k} - \frac{3}{k} = -1$. D'où : $k = -5$.

Alors : $a = -\frac{2}{5}$ et $b = -\frac{3}{5}$.

Exercice 20

1) $x_{G_1} = \frac{2x_A + 3x_B}{5} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 3}{5} = \frac{13}{5}$,

$y_{G_1} = \frac{2y_A + 3y_B}{5} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 3}{5} = \frac{23}{5}$

D'où : $G_1 \left(\frac{13}{5} ; \frac{23}{5} \right)$.

$x_{G_2} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$,

$y_{G_2} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5$

D'où : $G_2 \left(\frac{5}{2} ; 5 \right)$.

$$3) x_{G_3} = \frac{2x_0 - x_A + 3x_B}{2 - 1 + 3} = \frac{-2 + 3 \times 3}{4} = \frac{7}{4},$$

$$y_{G_3} = \frac{2y_0 - y_A + 3y_B}{2 - 1 + 3} = \frac{-7 + 3 \times 3}{4} = \frac{1}{2}$$

D'où : $G_3 \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{2} \right)$.

Exercice 21

G est le centre de gravité du triangle ABC.

$$\text{On a : } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

$$\text{D'où : } \vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}.$$

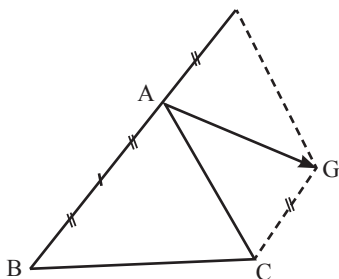
Dans le repère (A,B,C), on a : $G \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

Exercice 22

$$1) G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}.$$

$$\text{On a : } \vec{AG} = -\frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC}.$$

On en déduit la construction de G.



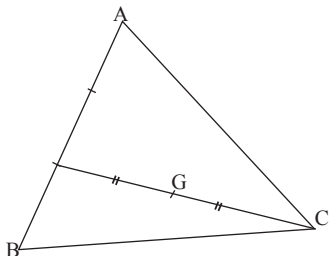
$$2) G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$$

$$\text{Soit } I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}.$$

$$\text{On a : } G = \text{bar}\{(I, 3); (C, 3)\}$$

$$\text{On construit d'abord } I \text{ tel que : } \vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

Ensuite, on construit G, milieu de [IC].



Exercice 23

ABCD est un parallélogramme de centre O.

$$1) O \text{ est milieu de } [AC]. \text{ Donc : } \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}.$$

$$O \text{ est milieu de } [BD]. \text{ Donc : } \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

$$\text{Alors : } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

$$1 + 1 + 1 + 1 \neq 0,$$

$$\text{donc } O = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}.$$

Alors O est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

$$G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 4); (C, 1); (D, 2)\}.$$

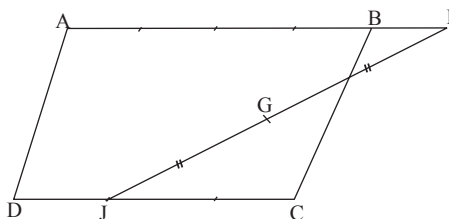
$$\text{Soit } I = \text{bar}\{(A, -1); (B, 4)\} \text{ et } J = \text{bar}\{(C, 1); (D, 2)\}$$

$$\text{On a : } G = \text{bar}\{(I, 3); (J, 3)\}.$$

$$\text{On construit } I \text{ tel que : } \vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AB}$$

$$\text{On construit } J \text{ tel que : } \vec{CJ} = \frac{1}{3} \vec{CD}$$

Ensuite, on construit G, milieu de [IJ].



$$G' = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, 4)\}$$

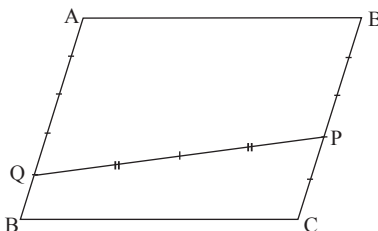
$$\text{Soit } P = \text{bar}\{(B, 2); (C, 3)\} \text{ et } Q = \text{bar}\{(A, 1); (D, 4)\}.$$

$$\text{On a : } G' = \text{bar}\{(P, 5); (Q, 5)\}.$$

$$\text{On construit } P \text{ tel que : } \vec{BP} = \frac{3}{5} \vec{BC}$$

$$\text{On construit } Q \text{ tel que : } \vec{AQ} = \frac{4}{5} \vec{AD}$$

Ensuite, on construit G, milieu de [PQ].



Exercice 24

1) $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 2); (D, 3)\}$

$J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$ et $K = \text{bar}\{(B, -1); (D, 3)\}$.

Alors : $G = \text{bar}\{(J, 3); (K, 2)\}$.

Donc : $3\vec{GJ} + 2\vec{GK} = \vec{0}$.

2) a. $L = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 2); (D, 3)\}$
 $= \text{bar}\{(L, 2); (D, 3)\}$.

Donc : $2\vec{GL} + 3\vec{GD} = \vec{0}$.

b. Nouvelle construction de G

• On construit J et K en utilisant les relations :

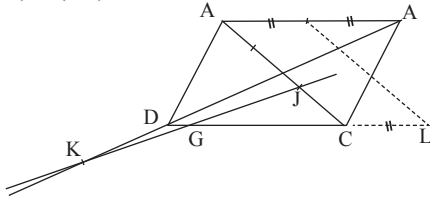
$$\vec{AJ} = \frac{2}{3} \vec{AC} \text{ et } \vec{BK} = \frac{3}{2} \vec{BD}.$$

• On construit L en utilisant la relation :

$$\vec{AL} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC}.$$

$G = \text{bar}\{(J, 3); (K, 2)\} = \text{bar}\{(L, 2); (D, 3)\}$.

Donc G est le point d'intersection des droites (JK) et (LD).



Exercice 25

1) a. On a : $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$

et $J = \text{bar}\{(C, 1); (D, 1)\}$.

Donc : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MI} + 2\vec{MJ}$.

b. D'après 1-a) :

$$\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0} \Rightarrow \vec{NI} + \vec{NJ} = \vec{0}.$$

Alors N est le milieu du segment [IJ].

2) On a : $P = \text{bar}\{(A, 1); (C, 1)\}$

et $Q = \text{bar}\{(B, 1); (D, 1)\}$.

N est le milieu du segment [IJ].

Alors : $N = \text{bar}\{(I, 2); (J, 2)\} = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\} = \text{bar}\{(P, 2); (Q, 2)\}$.

Donc, les points N, P et Q sont alignés.

3) On a : $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$.

Alors : $N = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$
 $= \text{bar}\{(G, 3); (D, 1)\}$.

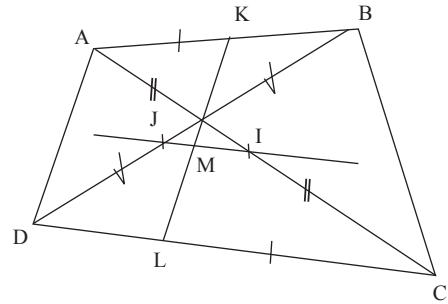
Donc, les points N, D et G sont alignés.

On a $N = \text{bar}\{(G, 3); (D, 1)\}$,

donc : $\vec{GN} = \frac{1}{4} \vec{GD}$.

Exercice 26

1) Figure



2) $\vec{BA} = 3\vec{BK} \Rightarrow \vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$.

$1 + 2 \neq 0$, donc : $K = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$.

3) M est le milieu de [KL]. Donc :

$$M = \text{bar}\{(K, 1); (L, 1)\} = \text{bar}\{(K, 3); (L, 3)\}$$

$$= \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1); (D, 2)\}.$$

4) On a : $I = \text{bar}\{(A, 1); (C, 1)\}$ et

$J = \text{bar}\{(B, 1); (D, 1)\} = \text{bar}\{(B, 2); (D, 2)\}$.

Alors : $M = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1); (D, 2)\}$
 $= \text{bar}\{(I, 2); (J, 4)\}$.

Donc, les points J, M et I sont alignés.

Exercice 27

1) On a : $\vec{AG} = \vec{AI} + \vec{IG} = \frac{1}{3} \vec{AB} + 3\vec{GC}$

D'où : $3\vec{AG} - \vec{AB} - 9\vec{GC} = \vec{0}$.

$3\vec{AG} - \vec{AG} - \vec{GB} - 9\vec{GC} = \vec{0}$.

$\vec{AG} - \vec{GB} - 9\vec{GC} = \vec{0}$.

$-\vec{GA} - \vec{GB} - 9\vec{GC} = \vec{0}$.

$2\vec{AG} + \vec{GB} + 9\vec{GC} = \vec{0}$.

$2 + 1 + 9 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 9)\}$

2) Figure 1

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AG} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \\ &= \frac{3}{4} (\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } 4 \overrightarrow{AG} - 3 \overrightarrow{AB} - 2 \overrightarrow{BC} &= \vec{0} . \\ 4 \overrightarrow{AG} - 3 \overrightarrow{AG} - 3 - 2 \overrightarrow{BG} - 2 \overrightarrow{GC} &= \vec{0} . \\ 2 \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} - 9 \overrightarrow{GC} &= \vec{0} . \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2 \overrightarrow{GC} &= \vec{0} . \end{aligned}$$

$1 + 1 + 2 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

Figure 2

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{BG} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \\ &= (\frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } 12 \overrightarrow{BG} - 3 \overrightarrow{BA} - 2 \overrightarrow{AC} &= \vec{0} . \\ 12 \overrightarrow{BG} - 3 \overrightarrow{BG} - 3 \overrightarrow{GA} - 2 \overrightarrow{GA} - 2 \overrightarrow{GC} &= \vec{0} . \\ \overrightarrow{GA} + 9 \overrightarrow{GB} + 2 \overrightarrow{GC} &= \vec{0} . \end{aligned}$$

$1 + 9 + 2 \neq 0$, donc $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 9); (C, 2)\}$

Exercice 28

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$.

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow 2MG^2 + GA^2 + GB^2 = AB^2$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } GA &= GB = \frac{1}{2} AB \\ \text{Alors : } 2MG^2 + \frac{1}{2} AB^2 &= AB^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } MG^2 = \frac{1}{4} AB^2$$

$$MG = \frac{1}{2} AB = AG.$$

L'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon AG.

Exercice 29

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{bar}\{(A, 2); (B, -3)\} \text{ et} \\ G_2 &= \text{bar}\{(A, -\frac{1}{3}); (B, \frac{1}{2}); (C, \frac{1}{6})\} \end{aligned}$$

$$1) x_{G_1} = \frac{2x_A - 3x_B}{2 - 3} = \frac{2 \times 1 - 3 \times 0}{-1} = -2,$$

$$y_{G_1} = \frac{2y_A - 3y_B}{2 - 3} = \frac{2 \times 0 - 3 \times 2}{-1} = 6$$

D'où : $G_1(-2; 6)$.

$$x_{G_2} = \frac{-\frac{1}{3}x_A + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{6}x_C}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{-\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{6} \times 2}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$y_{G_2} = \frac{-\frac{1}{3}y_A + \frac{1}{2}y_B + \frac{1}{6}y_C}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{-\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times (-3)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times (-3) = \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

D'où : $G_2(0; \frac{3}{2})$.

On a : $\overrightarrow{CG_1} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG_2} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$
 $\det(\overrightarrow{CG_1}, \overrightarrow{CG_2}) = 0$, alors, les vecteurs $\overrightarrow{CG_1}$ et $\overrightarrow{CG_2}$ sont colinéaires.

Donc, les points G_1, G_2 et C sont alignés.

$$3) G_1 = \text{bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$$

En multipliant les coefficients par $-\frac{1}{6}$,

$$\text{on a : } G_1 = \text{bar}\{(A, -\frac{1}{3}); (B, \frac{1}{2})\}.$$

$$\begin{aligned} 4) G_2 &= \text{bar}\{(A, -\frac{1}{3}); (B, \frac{1}{2}); (C, \frac{1}{6})\} \\ &= \text{bar}\{(G_1, \frac{1}{6}); (C, \frac{1}{6})\}. \end{aligned}$$

G_2 est l'isobarycentre de G_1 et C . Donc,

G_2 est le milieu du segment $[G_1 C]$.

Exercice 30

$$1) G = \text{bar}\{(A, -2); (B, 2); (C, 1)\}.$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AG} = 2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CG} = 2 \overrightarrow{AB}$$

Donc, les droites (CG) et (AB) sont parallèles.

$$2) \text{ a. } A' = \text{bar}\{(B, 2); (C, 1)\}.$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}.$$

On en déduit la construction de A' .

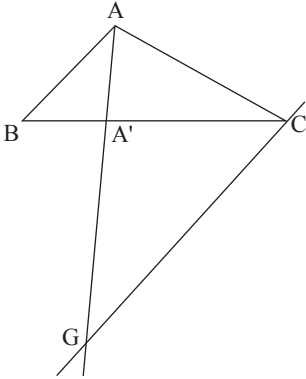
$$b) G = \text{bar}\{(A, -2); (B, 2); (C, 1)\} = \text{bar}\{(A, -2); (A', 3)\}.$$

Donc, les points G , A et A' sont alignés.

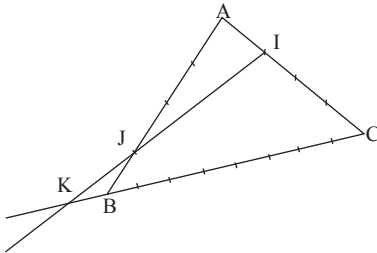
Construction de G

On a : $(CG) \parallel (AB)$ et $G \in (AA')$.

Donc, la droite passant par C et parallèle à (AB) coupe (AA') en G .



Exercice 31



$$1) I = \text{bar}\{(A, 3); (C, 1)\}. \text{ Donc : } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}.$$

On en déduit la construction de I .

$$2) J = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\}. \text{ Donc : } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}.$$

On en déduit la construction de J .

$$3) K = \text{bar}\{(C, -1); (B, 9)\}. \text{ Donc : } \overrightarrow{CK} = \frac{9}{8} \overrightarrow{CB}$$

On en déduit la construction de K .

$$b. K = \text{bar}\{(C, -1); (B, 9)\}. \text{ On a : } -\overrightarrow{CK} + 9\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

$$\text{On obtient : } 8\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

$$8 + 1 \neq 0, \text{ donc } B = \text{bar}\{(K, 8); (C, 1)\}.$$

4) a.

$$\text{On a : } J = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\} = \text{bar}\{(A, 3); (B, 9)\} \\ = \text{bar}\{(A, 3); (K, 8); (C, 1)\}$$

$$b. \text{ On a : } J = \text{bar}\{(A, 3); (K, 8); (C, 1)\} \\ = \text{bar}\{(K, 8); (I, 4)\}.$$

Donc, les points I , J et K sont alignés.

$$c. J = \text{bar}\{(K, 8); (I, 4)\}.$$

$$\text{Donc : } 8\overrightarrow{JK} + 4\overrightarrow{JI} = \vec{0}.$$

$$\text{On en déduit que : } \overrightarrow{IK} = \frac{3}{2} \overrightarrow{IJ}.$$

Exercice 32

$$1) G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3)\}.$$

$$2) a. H = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3)\}.$$

$$x = \frac{2x_A - 3x_B}{5} = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{5} = 1,$$

$$y_H = \frac{2y_A - 3y_B}{5} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 2}{5} = 2$$

D'où : $H(1; 2)$.

$$b. 2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}.$$

$$3) G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 1)\} \\ = \text{bar}\{(H, 5); (C, 1)\}.$$

Exercice 33

$$E = \text{bar}\{(B, 3); (C, 5)\} \text{ et } F = \text{bar}\{(C, 5); (A, 2)\}.$$

• Soit $G' = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 5)\}.$

$$\text{On a : } G' = \text{bar}\{(A, 2); (E, 8)\} = \text{bar}\{(B, 3); (F, 7)\}.$$

$G' \in (AE)$ et $G' \in (BF)$.

G' est le point d'intersection des droites (AE) et (BF) . Alors : $G' = G$.

On a donc : $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 5)\}.$

• Soit $H' = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$. Alors : $H' \in (AB)$.

$$\text{On a : } G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 5)\}$$

$$= \text{bar}\{(H', 5); (C, 5)\}. \text{ Alors : } H' \in (GC).$$

H' est le point d'intersection des droites (AB) et (GC) . Alors : $H' = H$.

D'où : $G = \text{bar}\{(H, 5); (C, 5)\}$.

G est l'isobarycentre de H et C. Donc, G est le milieu du segment [HC].

Exercice 34

1. a) ABCD est un rectangle. $AC = BD = a (a > 0)$.

$$m \neq 0, G_m = \text{bar}\{(A, m); (B, -1); (C, 1)\}$$

On a $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

$$D'où : \overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

ABCD étant un rectangle, alors $G_1 = D$.

b. Soit $m \neq 0$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AG_m} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{m} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{m} \overrightarrow{BC}$$

Alors : $(AG_m) \parallel (BC)$.

Donc, (E_1) est la droite (AD), privée de A.

$$2) \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a.$$

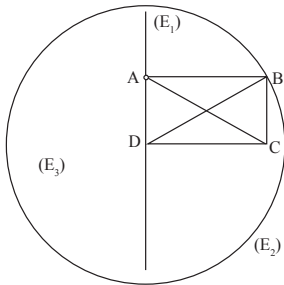
On sait que : $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\} = D$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$$

On obtient : $MD = a$

Donc, (E_2) est le cercle de centre D et de rayon a.

3) Construction de (E_1) , (E_2) et (E_3) .



IV.4. Situations complexes

Exercice 35

$$(R): \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$1) G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

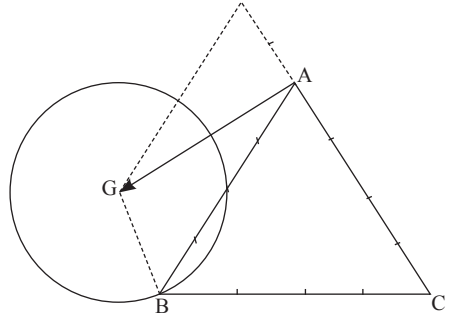
$$2) \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Rightarrow 2MG = 4$$

Donc : $MG = 2$.

3) L'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation (R) est le cercle de centre G et de rayon 2.

Construction de (E)

$$\text{On a : } \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } MG = 2.$$



Exercice 36

$$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{5} \overrightarrow{BC} \Rightarrow I = \text{bar}\{(B, 2); (C, 3)\}$$

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow J = \text{bar}\{(C, 3); (A, -1)\}$$

$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow K = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2)\}$$

Soit $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$.

On a : $G = \text{bar}\{(A, -1); (I, 5)\}$, alors $G \in (AI)$

$G = \text{bar}\{(B, 2); (J, 2)\}$, alors $G \in (BJ)$

$G = \text{bar}\{(C, 3); (K, 1)\}$, alors $G \in (CK)$.

Donc, les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

Leçon 8

Extension de la notion de limite

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

1-B ; 2-C ; 3-A

Exercice 2

a) FIGURE 1 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

b) FIGURE 2 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

c) FIGURE 3 (Ancienne FIG 4)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\} ; \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Exercice 3

1-B ; 2-A ; 3-C

Exercice 4

a) Figure 1 : la droite (D) d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à (C_f)

b) Figure 2 : la droite (D) d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à (C_f)

c) Figure 3 : la droite (D) d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C_f)

d) Figure 4 : la droite (D) d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à (C_f)

Exercice 5

1-B ; 2-A ; 3-C

Exercice 6

1-B ; 2-C ; 3-A

Exercice 7

a) Figure 1 : la droite (D) d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C_f) .

b) Figure 2 : la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Figure 3 : la droite (D) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

d) Figure 4 : la droite (D) d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 8

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty ;$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2020} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2020} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3} x^{11} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} x^{11} = +\infty ;$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^3} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^3} = 0 ;$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{2}}{x^{10}} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{2}}{x^{10}} = 0.$

Exercice 9

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{x} \right) = -5 ;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-5 + \frac{1}{x} \right) = -5$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty ;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - 3 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty ;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 - 3 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 99x) = +\infty ;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 99x) = -\infty$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (11 - 9x^3) = -\infty ;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (11 - 9x^3) = -\infty$$

Exercice 10

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)(x^3-5) = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3-5) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x(4x^2-12) = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2-12) = +\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x)\left(x+\frac{7}{3}\right) = -\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x+\frac{7}{3}\right) = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3(x+1)\left(-x^2-\frac{3}{4}\right)(x^8-6) = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x^2-\frac{3}{4}\right) = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^8-6) = +\infty$$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7-9)\left(\frac{1}{x^3}+2\right) = -\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7-9) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3}+2\right) = 2$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^2\left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x}-4\right) = +\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x}-4\right) = -4$$

Exercice 11

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x+3} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+3) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-4x^2} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-4x^2) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ et

$$\forall x \in]-\infty; 3[, x-3 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]-\infty; 3[, x-3 < 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2+x} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -2} (2+x) = 0$ et

$$\forall x \in]-\infty; -2[, 2+x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2+x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -2} (2+x) = 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]-\infty; -2[, 2+x > 0.$$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-x+1} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0$ et
 $\forall x \in]-\infty; 1[, -x+1 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-x+1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0 \text{ et}$$
$$\forall x \in]1; +\infty[, -x+1 < 0.$$

Exercice 12

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^3-3} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-3) = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+7x-9}{-3} = -\infty$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2+7x-9) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3) = -3$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{2x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3+\frac{1}{x^2}\right) = 3$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7+\frac{2}{x}}{2\sqrt{x}} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-7+\frac{2}{x}\right) = -7$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 13

a) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x-7} = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x-7} = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{8}{3-x} = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{8}{3-x} = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-2}{x+5} = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-2}{x+5} = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{6}{3x-2} = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{6}{3x-2} = +\infty$$

Exercice 14

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x-1}{x+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} (3x-1) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x-1}{x+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} (3x-1) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} = +\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} (3x-1) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+4} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{6-3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{6-3x} (x+2) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{6-3x} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{6-3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{6-3x} (x+2) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{6-3x} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-7}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-7}{x-1} = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-7}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-7}{x-1} = +\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} &= +\infty \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 9} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x}{(9-x)(-x-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} \cdot \frac{x}{-x-3} = -\infty \text{ car} \\ \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x}{(9-x)(-x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} \cdot \frac{x}{-x-3} = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} = +\infty$$

Exercice 15

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{3} x^5 \right) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{16}{3} x^5 \right) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5) = -\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (40x^4) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (40x^4) = +\infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (12x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (12x) = -\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^{2020}) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^{2020}) = -\infty ;$$

Exercice 16

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3} = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{9x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{3} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$$

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 17**

1-F ; 2-V ; 3-F ; 4-V ; 5-F .

Exercice 18

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2 - 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x - 5x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{(x - 5)} = -\frac{3}{5} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 2)} = -1 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{-x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 1)(x + 3)}{-(x + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} (-x + 1) = 4 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 2)}{(x - 3)} = \frac{3}{4} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} (-3x + 15) \frac{7}{x^2 - 25} &= \\
 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-21(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-21}{(x + 5)} = -\frac{21}{10} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}} = 1
 \end{aligned}$$

Exercice 19

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \\
 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + 2x - 4}{x^2}\right) &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -4} \left(-2x + 1 - \frac{5}{x - 4}\right) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{x - 4}\right) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x + 1 - \frac{5}{x - 4}\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x - 5}{-2x - 1} - \frac{5}{x - 4}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{-2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2) = -2
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1$$

Exercice 20

$$\text{a) } f(x) = \frac{x - 1}{(2x + 1)^2}; \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{(2x + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^2} (x - 1) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{(2x + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^2} (x - 1) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^2} = +\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation

$$x = -\frac{1}{2} \text{ est une asymptote verticale à } (C_f) \text{ en } +\infty.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1 - 2x}{5x - 2}; \quad a = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1 - 2x}{5x - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1}{5x - 2} (1 - 2x) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1}{5x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1 - 2x}{5x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1}{5x-2} (1-2x) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1}{5x-2} = +\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation

$$x = \frac{2}{5} \text{ est une asymptote verticale à } (C_f) \text{ en } +\infty.$$

$$c) f(x) = \frac{-7}{x^2-1}; a = -1 \text{ et } a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-7}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-7}{x-1} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-7}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-7}{x-1} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-7}{x+1} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-7}{x-1} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f)

$$d) f(x) = \frac{x}{(9-x)(x-3)}; a = 3 \text{ et } a = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(9-x)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x}{9-x} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{9-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(9-x)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x}{9-x} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{9-x} = +\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x}{(9-x)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} \cdot \frac{x}{x-3} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x}{(9-x)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} \cdot \frac{x}{x-3} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{9-x} = -\infty$$

Par conséquent la droite (D) d'équation $x = 9$ est une asymptote verticale à (C_f)

Exercice 21

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0;$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_f)

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-3x} = -\frac{1}{3};$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-3x} = -\frac{1}{3}$, donc la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{3}$ est une asymptote horizontale à (C_f)

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = +\infty,$$

donc (Cf) n'admet pas d'asymptotes horizontales.

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-39x}{-18x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{39}{18x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-39x}{-18x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{39}{18x} = 0,$$

donc la droite (D) d'équation $y = 0$ est une asymptote à (Cf)

Exercice 22

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{2}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$ donc la droite (D) d'équation $y = 7$ est une asymptote horizontale à (Cf)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$ donc la droite (D') d'équation $y = -\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontale à (Cf)

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite (D'') d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (Cf)

Exercice 23

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{9\}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = -\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ donc la droite (D) d'équation $y = 5$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = -\infty$ donc la droite (D') d'équation $x = 9$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$

Exercice 24

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{(x - 5)^2} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x - 5)^2} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4) = 21$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x - 5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x - 5)^2} = +\infty$$

car $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}, (3x - 5)^2 > 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$$

2) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$ donc la droite (D) d'équation $x = 5$ est une asymptote verticale à (Cf) en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite (D') d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 25

$$\text{Cas 1 : } f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} (3x + 1) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} (3x + 1) = +\infty.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite (D) d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ donc la droite (D') d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\text{Cas 2 : } f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{-2x^2 + 5}{x-3} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{-2x^2 + 5}{x-3} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{-2x^2 + 5}{x-3} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 + 5}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{-2x^2 + 5}{x-3} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ donc la droite (D) d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ donc la droite

(D') d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ donc la droite

(D'') d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 26

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. a)

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2x^2 + 7x - 4}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} (-2x^2 + 7x - 4) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + 7x - 4}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} (-2x^2 + 7x - 4) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ donc la droite

(D) d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 27

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} (-2x^2 - 1) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 1}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} (-2x^2 - 1) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ donc la droite

(D) d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

Exercice 28

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2x^2}{1-x} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1+x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2x^2}{1-x} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{2x^2}{1+x} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{2x^2}{1+x} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite (D) d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ donc la droite (D'') d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) f est dérivable $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{1-x^2} \right)'$$

$$= \frac{(2x^2)'(1-x^2) - 2x^2(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{4x(1-x^2) - 2x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, (1-x^2)^2 > 0$ donc le signe de $f(x)$ dépend de celui de $4x$. Ainsi :

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; 0[$;

- $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est

strictement croissante sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

5) Tableau de variation

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ | |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|------|
| $f'(x)$ | - | | - | + | | + |
| $f(x)$ | -2 | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | -2 |

Exercice 29

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} (4x^2 + 3x - 2) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} (4x^2 + 3x - 2) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

3. a) f est dérivable $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 3x - 2}{x+1} \right)'$$

$$= \frac{(8x+3)(x+1) - (4x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x + 5}{(x+1)^2}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, (x+1)^2 > 0$ et $4x^2 + 3x - 2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Tableau de variation

| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | + | | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

IV.4. Situation complexe

Exercice 30

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = a + \frac{b}{x+10} = \frac{ax+10a+b}{x+10}$$

Par identification $a=60$ et $b=-560$. Ainsi

$$f(x) = 60 - \frac{560}{x+10}$$

Soit a et b deux éléments de \mathbb{R}^* tels que $a < b$.
On a :

$$a+10 < b+10$$

$$(a+10)^2 < (b+10)^2$$

$$\frac{1}{(a+10)^2} > \frac{1}{(b+10)^2}$$

$$60 - \frac{560}{(a+10)^2} < 60 - \frac{560}{(b+10)^2}$$

$$f(a) < f(b)$$

Ainsi f est croissante et par conséquent la population est croissante.

// Autre méthode (en utilisant la fonction dérivée)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{560}{(x+10)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}^* et par conséquent la population est croissante.

1) Population limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(60 - \frac{560}{x+10} \right) = 0$$

La population limite est 60.000 habitants.

Leçon 9

Étude et représentation graphique d'une fonction

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

| | |
|---|--|
| Une fonction d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque : | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) + f(x) = 0$ |
| | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ |
| | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ |
| Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Une fonction f est paire si et seulement si | sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par rapport à l'axe (OI) . |
| | sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par au point O |

| | |
|--|--|
| | sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par rapport à l'axe (OJ) . |
|--|--|

Exercice 2

| | |
|--|--|
| Une fonction d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque : | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ |
| | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ |
| | $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ |

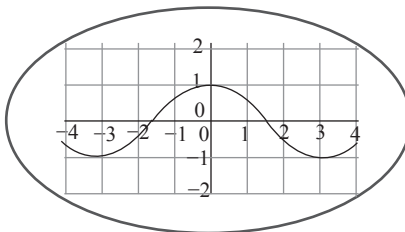
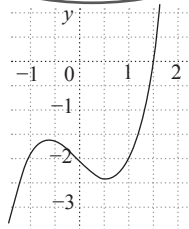
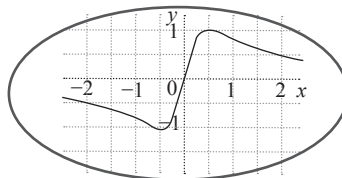
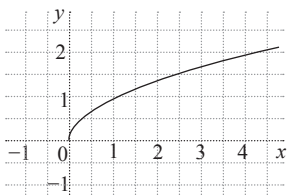
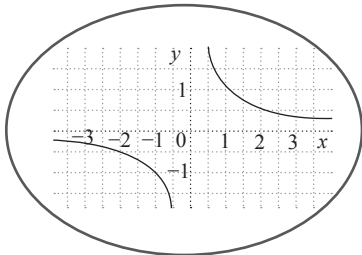
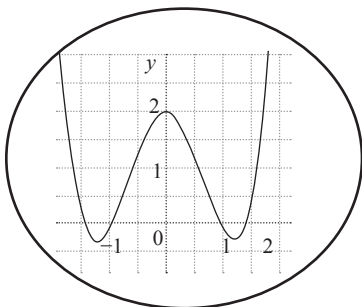
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Une fonction f est impaire si et seulement si

sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par rapport à l'axe (OI) .

sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par au point O

sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est symétrique par rapport à l'axe (OJ) .

Exercice 3



Exercice 4

f fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } f(-x) &= (-x)^2 - 2 \\ &= x^2 - 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où, f est paire.

Exercice 5

f fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 1}.$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } f(-x) &= \frac{1}{|-x| + 1} \\ &= \frac{1}{|x| + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où, f est paire.

Exercice 6

f fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x|x|. \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } f(-x) &= -x|-x| \\ &= -x|x|. \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

D'où, f est impaire.

Exercice 7

f fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x^3 - x. \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } f(-x) &= (-x)^3 - (-x) \\ &= -x^3 + x. \\ &= -(x^3 - x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

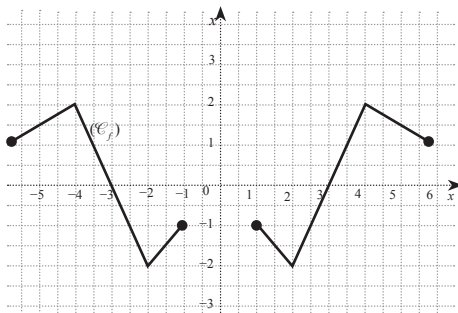
D'où, f est impaire.

Exercice 8

La fonction f est paire.

D'où, le tableau de valeurs

| | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|---|---|
| x | -6 | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| $f(x)$ | 1 | 2 | -2 | -1 | -1 | -2 | 2 | 1 |

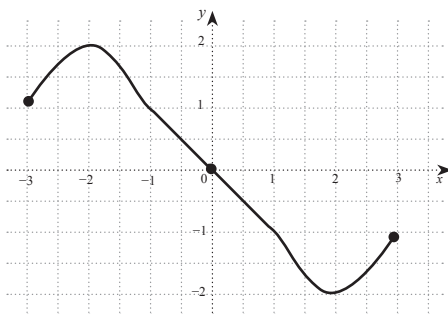


Exercice 9

La fonction f est impaire.

D'où, le tableau de valeurs

| | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|---|----|----|----|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| $f(x)$ | 1 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -1 | 1 |



Exercice 10

a) f est fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \text{ et } a = 3$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R};$$

$$6 - x \in \mathbb{R},$$

$$\text{Et, } f(6 - x) = (6 - x)^2 - 6(6 - x) + 14$$

$$= 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x + 14$$

$$= x^2 - 6x + 14$$

$$= f(x)$$

D'où, la droite d'équation : $x = 3$, est un axe de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

b) f est fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \text{ et } a = -1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; 6 - x \in \mathbb{R},$$

$$\text{Et, } f(-2-x) = \frac{1}{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 3}$$

$$= \frac{1}{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$= f(x)$$

D'où, la droite d'équation : $x = -1$, est un axe de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

Exercice 11

a) f est fonction numérique définie par :

$$f(x) = (x - 2)^3 + 4 \text{ et } A(2; 4)$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R};$$

$4-x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{Et, } \frac{1}{2} [f(4-x) + f(x)] &= \frac{1}{2} [(4-x-2)^3 + 4 + (x-2)^3 + 4] \\ &= \frac{1}{2} [(-x+2)^3 + 4 + (x-2)^3 + 4] \\ &= \frac{1}{2} [-(x-2)^3 + 4 + (x-2)^3 + 4] \\ &= \frac{1}{2} [-(x-2)^3 + 4 + (x-2)^3 + 4] \\ &= \frac{1}{2} [8] \\ &= 4 \end{aligned}$$

D'où, le point A(2 ; 4) est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

b) f est fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 9}{x + 2} \text{ et } A(-2 ; -7)$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad -4-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad |-4-x$ est le symétrique de x par rapport à -2

$$\begin{aligned} \text{Et, } \frac{1}{2} [f(-4-x) + f(x)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(-4-x)^2 - 4 - x - 9}{-4-x+2} + \frac{2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(16 + 8x + x^2) - x - 13}{-x-2} + \frac{2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{32 + 16x + 2x^2 - x - 13}{-x-2} + \frac{2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2x^2 + 15x + 19}{-x-2} + \frac{2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-2x^2 - 15x - 19}{x+2} + \frac{2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-2x^2 - 15x - 19 + 2x^2 + x - 9}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-14x - 28}{x+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-14(x+2)}{x+2} \right] = -7 \end{aligned}$$

D'où, le point A(-2 ; -7) est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

c) f est fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x-4}{x-2} \text{ et } A(2 ; 1)$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$4-x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad |4-x$ est le

$$\begin{aligned} \text{symétrique de } x \text{ par rapport à } 2. \text{ Et,} \\ &= \frac{1}{2} [f(4-x) + f(x)] = \frac{1}{2} \left[\frac{4-x-4}{4-x-2} + \frac{x-4}{x-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-x}{-x+2} + \frac{x-4}{x-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x+x-4}{x-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2x-4}{x-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(x-2)}{x-2} \right] = \frac{1}{2} [2] = 1 \end{aligned}$$

D'où, le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

Exercice 12

| | |
|---|---|
| Le plan est muni d'un repère (O, I, J). La droite (D) d'équation : $y = ax + b$, $a \neq 0$, est une asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de d'une fonction f signifie que | $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (ax + b)]$ $= 0$ |
| | $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)]$ $= -\infty$ |
| | $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)]$ $= 0$ |

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^*

$$\text{par : } f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

D'où, la droite (D) : $y = 2x + 1$, est une asymptote à (\mathcal{C}_f) en $+\infty$.

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

D'où, la droite (D) : $y = 2x + 1$, est une asymptote à (\mathcal{C}_f) en $-\infty$.

Exercice 14

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}; (x-2)^2 > 0, f'(x)$ a le même signe que $-(x-3)(x-1)$.

* $\forall x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$. D'où, f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et sur $]3; +\infty[$.

* $\forall x \in]1; 2[\cup]2; 3[, f'(x) < 0$. D'où, f est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; 3]$.

| | | | | | |
|---------|-----------|---|---|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | | - | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ |

Diagramme de variation de $f(x)$:
 - Pour $x < 1$, $f(x)$ décroît de $+\infty$ à 3 .
 - Entre $x = 1$ et $x = 2$, $f(x)$ croît de 3 à $+\infty$.
 - Entre $x = 2$ et $x = 3$, $f(x)$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$.
 - Pour $x > 3$, $f(x)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}; f(x) - (-x+3) = -\frac{1}{x-2}$, $f(x) - (-x+3)$ a le même signe que $-(x-2)$.

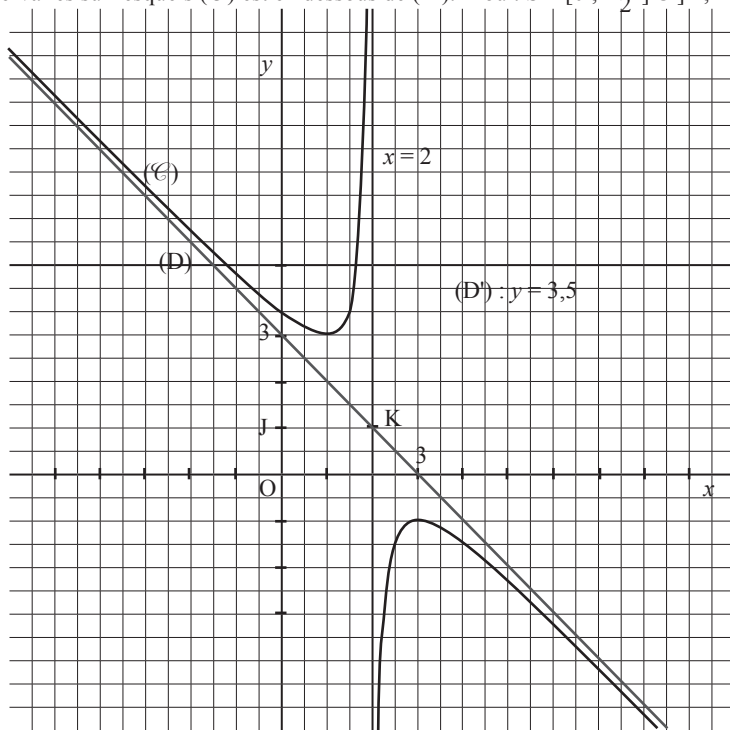
* $\forall x \in]-\infty; 2[, f(x) > 0$. D'où, (\mathcal{C}) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 2[$.

* $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) < 0$. D'où, (\mathcal{C}) est en dessous de (D) sur $]2; +\infty[$.

c) $(D) : y = -x + 3$

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 3 |
| y | 3 | 0 |

d) Traçons la droite (D') d'équation : $y = 3,5$ ($\frac{7}{2} = 3,5$). L'ensemble, S , des solutions est la réunion des intervalles sur lesquels (\mathcal{C}) est en dessous de (D') . D'où : $S = [0; \frac{3}{2}] \cup]2; +\infty[$.



IV.. Exercices de renforcement

Exercice 15

a)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

x et $-x$ appartiennent à D_f .

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(x)^2 - 4} \\ &= -\frac{x}{x^2 - 4} \quad f \text{ est une fonction impaire} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

b) $j(1) = -1$ et $j(-1) = 3$ Donc j est ni paire ni impaire.

c) $D_k = \mathbb{R}$

x et $-x$ appartiennent à D_k .

$$\begin{aligned} k(-x) &= \\ &= -\frac{x}{x^2 - 4} = -k(x) \quad f \text{ est une fonction} \\ &\text{impaire} \end{aligned}$$

d) $D_i = [-1; 1]$ x et $-x$ appartiennent à D_i .

$$\begin{aligned} i(x) &= \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} \\ i(-x) &= \sqrt{-x+1} + \sqrt{1-(-x)} \\ i(-x) &= \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \\ i(-x) &= \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \\ i(-x) &= i(x) \end{aligned}$$

Exercice 16

a)

$$D_n = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$2 \in D_n$ et $-2 \notin D_n$ donc la fonction n est ni paire ni impaire.

b) $D_h = [0; +\infty[$

$2 \in D_h$ et $-2 \notin D_h$ donc la fonction h est ni paire ni impaire.

c) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

x et $-x$ appartiennent à D_f .

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{x^2}{|x| - 2} \\ k(-x) &= \frac{(-x)^2}{|-x| - 2} \end{aligned}$$

$$k(-x) = \frac{x^2}{|x| - 2}$$

$k(-x) = k(x)$ f est une fonction paire

d) $D_l = \mathbb{R}$

x et $-x$ appartiennent à D_f .

$$l(-x) = (-x)^3 + 2(-x)$$

$$l(-x) = (-x^3 + 2x)$$

$$l(-x) = -l(x)$$

f est une fonction paire

Exercice 17

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 + 1} - x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$$

Exercice 18

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x - 5$

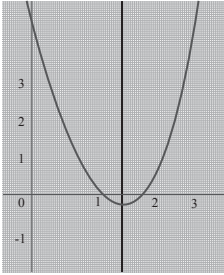
b) f est décroissante sur $] -\infty; \frac{5}{4}]$ et f est

croissante sur $[\frac{5}{4}; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|-----------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{5}{4}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-\frac{1}{8}$ | $+\infty$ |

4



$$4) \forall x \in \mathbb{R}; f\left(\frac{5}{4} + x\right)$$

$$f\left(\frac{5}{4} + x\right) = 2\left(\frac{5}{4} + x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4} + x\right) + 3$$

$$f\left(\frac{5}{4} + x\right) = \frac{25}{2} + 10x + 2x^2 - \frac{25}{2} - 5x + 3$$

$$f\left(\frac{5}{4} + x\right) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f\left(\frac{5}{4} + x\right) = f(x)$$

Donc la droite d'équation $x = \frac{5}{4}$ est un axe de symétrie de (Cf).

Exercice 19

$$f(x) = -3x^2 + 7x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

1) a) $Df = \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -6x + 7$

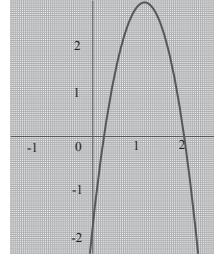
b) f est croissante sur $]-\infty; \frac{7}{6}]$ et f est décroissante sur $[\frac{7}{6}; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{7}{6}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\frac{25}{12}$ | $-\infty$ |

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{25}{12}$$

3)



Exercices d'approfondissement

Exercice 20

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

1) $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{-x^3 - 3x + 1 + x^3 - 3x + 1}{2}$$

$= 1$, donc le point $A(0; 1)$ est le centre de symétrie de (C).

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$

b) f est décroissante sur $[-1; 1]$ et f est

croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|---|----|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | 1 | -1 | $+\infty$ |

4) a) $f(0) = -3$ et $f(1) = 1$

(T): $y = -3x + 1$

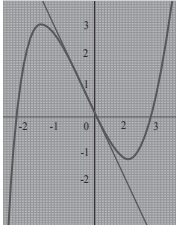
b) $f(x) - (-3x + 1) = x^3 - 3x + 1 + 3x - 1$

$$f(x) - (-3x + 1) = x^3$$

Sur $]-\infty; 0]$, (C) est au-dessous de (T),

Sur $[0 ; +\infty[$, (C) est au-dessous de (T),

5)



Exercice 21

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

1) a) $Df = \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 - 6x - 3$
 $= -3(x^2 + 2x + 1) = -3(x+1)^2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$, f est croissante sur \mathbb{R} .

Tableau de variations

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - |
| $f(x)$ | $+\infty$ | -1 |

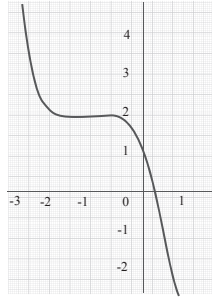
3) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(-2-x) + f(x)}{2} &= \frac{-(-2-x)^3 - 3(-2-x)^2 - 3(-2-x) + 1}{2} \\ &\quad + \frac{(-x)^3 - 3x^2 - 3x + 1}{2} \\ &= \frac{-(8 - 12x^2 - 6x - x^3) - 3(4 + 4x + x^2) + 6 + 3x + 1}{2} \\ &\quad - \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 1}{2} \\ &= \frac{8 + 12x + 6x^2 + x^3 - 12 - 12x - 3x^2 + 6 + 3x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{2} \\ &= \frac{+1 - x^3 - 3x^2 - 3x + 1}{2} = 2 \end{aligned}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(-2-x) + f(x)}{2} = 2$, donc le point

$A(-1 ; 2)$ est le centre de symétrie de (C).

4)



Exercice 22

$$f(x) = \frac{x-4}{2x-3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

b) La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f .

2) a) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{1}{2x-3} (x-4) = +\infty$

car $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{1}{2x-3} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (x-4) = -\frac{5}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{1}{2x-3} (x-4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{1}{2x-3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (x-4) = -\frac{5}{2}$$

b) La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}, f'(x)$

$$= \frac{1(2x-3) - 2(x-4)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{2x - 3 - 2x + 8}{(2x - 3)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}, f'(x) = \frac{5}{(2x - 3)^2}$$

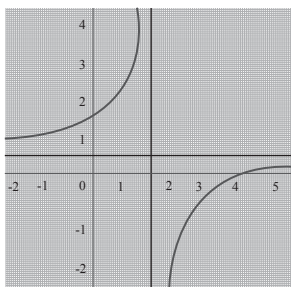
b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}, f'(x) > 0$

f est croissante sur $] -\infty; \frac{3}{2} [$ et sur $] \frac{3}{2}; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|---------------|---------------|---------------|
| x | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | | + |
| $f(x)$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ | $\frac{3}{2}$ |

4)



Exercice 23

$$f(x) = \frac{-3x + 5}{x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 5}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x} = -3$

b) La droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe (C) de f .

2) a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1} (-3x + 5) = -\infty$
 car $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 5) = 8$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1} (-3x + 5) = +\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 5) = 8$

b) La droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C).

3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$

$$f'(x) = \frac{-3(x + 1) - (3x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{-4}{(x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{-4}{(x + 1)^2}$$

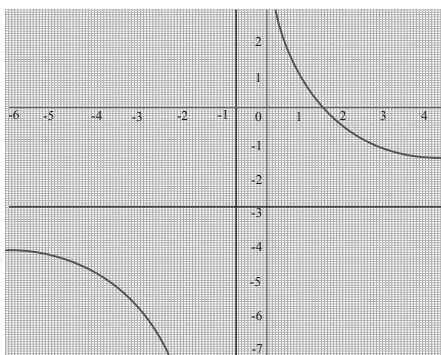
b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) < 0$

f est décroissante sur $] -\infty; -1 [$ et sur $] -1; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | | - |
| $f(x)$ | -3 | $+\infty$ | -3 |

4)



Exercice 24

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

1) a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} (x^2 - 3x + 3) = -\infty$

car

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} (x^2 - 3x + 3) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3x + 3) = 1$$

b) La droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C).

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x}$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - x + 2 - 2 + 3}{x - 2}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x - 2}$$

$$c) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) - (x-1) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C).

$$d) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) - (x-1) = \frac{1}{x-2}$$

sur $] -\infty; 2[$, (C) est au-dessous de (D)

sur $] 2; +\infty[$, (C) est au-dessus de (D)

$$3) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2) - x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup] 3; +\infty[, f'(x) > 0$$

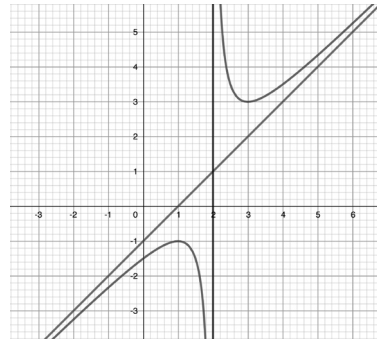
$$\forall x \in] 1; 2[\cup] 2; 3[, f'(x) < 0$$

b) f est croissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $] 3; +\infty[$.

f est croissante sur $] 1; 2[$ et sur $] 2; 3[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|----------------------------------|-----|--|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+0 -$ | | $-0+$ |
| $f(x)$ | -1 ↙ ↘ $-\infty -\infty$ | | $+0$ ↘ ↙ -3 $+\infty +\infty$ |



Exercice 25

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x + 1}$$

$$1) Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} (-x^2 + 2) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x^2 + 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} (-x^2 + 2) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 2) = 1$$

$$3) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\text{b) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x + 1} = \frac{-x^2 - x + x + 1}{x + 1} = -x + 1 + \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{c) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) - (-x + 1) = \frac{1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (C).

$$\text{d) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) - (-x + 1) = \frac{1}{x + 1}$$

sur $] -\infty; -1[$, (C) est au-dessous de (D)

sur $] -1; +\infty[$, (C) est au-dessus de (D)

$$\text{3) a) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = -1 - \frac{1}{(x + 1)^2} \text{ car}$$

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x + 1}$$

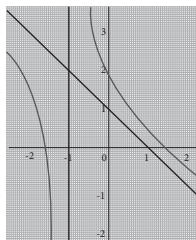
$$\text{b) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) < 0$$

f est décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $] 1; +\infty[$.

Tableau de variations

| | | | |
|---------|-----------|------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $-\infty$ |

4)



Exercice 26

$$\text{1) a) } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 10$$

$$\text{b) } 0 \leq f(x) \leq 4 \text{ l'ensemble cherché est } [1; 10]$$

$$\text{2) a) } f'(4) \text{ et } f'(10)$$

$$\text{b) Une équation de la droite (D) est } y = -x + 9$$

$$\text{c) } f'(7) = -1$$

| | | | | | |
|---------|-----------|-----|------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 4 | 10 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | 4 | | 0 | $+\infty$ |

$$\text{3) a) } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{b) } 48 + 8a + b = 0, \text{ car } f'(4) = 0.$$

$$300 + 20a + b = 0, \text{ car } f'(10) = 0.$$

$$12a = -252$$

$$a = -21$$

$$b = -48 - 8(-21) = 120$$

$$f'(x) = 3x^2 - 42x + 120$$

$$\text{c) On a : } f(x) = x^3 - 21x^2 + 120x + c = 0$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 21 + 120 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -100$$

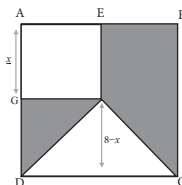
$$\text{d) } f(x) = x^3 - 21x^2 + 120x - 100$$

IV.4. Situation complexes

Exercice 27

Nous allons poser : $x = AG, x \in]0; 8[$, déterminer l'aire de la partie hachurée en fonction de x et déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

Soit $x = AG, x \in]0; 8[$



L'aire de la partie hachurée est :

$$f(x) = 64 - x^2 - \frac{8(8-x)}{2} = -x^2 + 4x + 32$$

$$f'(x) = -2x + 4, f \text{ est maximale pour } x = 2$$

Exercice 28

Nous allons déterminer les extremums (minimum) du coût de production. $u(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$

$$u'(x) = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$

Le coût de production est le plus bas lorsque $x = 30$.

Leçon 10 Angles orientés et trigonométrie

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

a) Soit α la mesure principale de $\frac{7\pi}{4}$
 α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) : $-\pi < \alpha \leq \pi$;

(2) : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \frac{7\pi}{4} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$$-\pi < \frac{7\pi}{4} + k2\pi \leq \pi$$

On a : $-\pi - \frac{7\pi}{4} < k2\pi \leq \pi - \frac{7\pi}{4}$

Puis : $-\frac{11\pi}{4} < k2\pi \leq -\frac{3\pi}{4}$ en divisant

par 2π , on obtient : $-\frac{11}{8} < k \leq -\frac{3}{8}$

Par suite : $-1,3 < k \leq -0,375$; d'où : $k = -1$.

On conclut que : $\alpha = \frac{7\pi}{4} + (-1) \times 2\pi$,

soit : a) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

b) $\alpha = -\frac{\pi}{8}$.

c) $\alpha = \frac{3\pi}{7}$.

d) $\alpha = \pi$.

e) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

f) $\alpha = 0$.

Exercice 2

$$\begin{aligned} \bullet \text{mes}((\widehat{\alpha}) + (\widehat{\beta})) &= \frac{35\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} \\ &= \frac{35\pi}{6} + \frac{22\pi}{6} \\ &= \frac{57\pi}{6} \end{aligned}$$

On en déduit que : $\text{Mes}(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}) = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \bullet \text{mes}((\widehat{\alpha}) + (\widehat{\beta})) &= \frac{35\pi}{6} - \frac{11\pi}{3} \\ &= \frac{35\pi}{6} - \frac{22\pi}{6} \\ &= \frac{13\pi}{6} \end{aligned}$$

On en déduit que : $\text{Mes} \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

| Affirmation | Réponse |
|---|---------|
| $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \cos x \geq 0$ | Vrai |
| $\forall x \in [\frac{\pi}{2}; \pi], \cos x \geq 0$ | Faux |
| $\forall x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}], \cos x \leq 0$ | Vrai |
| $\forall x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}], \cos x \leq 0$ | Vrai |
| $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; 0], \cos x \geq 0$ | Vrai |

Exercice 4

| Affirmation | Réponse |
|--|---------|
| 1) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin x \geq 0$ | Vrai |
| 2) $\forall x \in [\frac{\pi}{2}; \pi], \sin x \geq 0$ | Vrai |
| 3) $\forall x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}], \sin x \leq 0$ | Vrai |
| 4) $\forall x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}], \sin x \leq 0$ | Vrai |
| 5) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; 0], \sin x \geq 0$ | Faux |

Exercice 5

| | a | b | c |
|--|-------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|
| $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ est égale à | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est égale à | $\sin(x)$ | $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos\left(\frac{34\pi}{3}\right)$ est égale à | $2\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$ | $\frac{\cos(34\pi)}{3}$ | $\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ |

Exercice 6

| | Égalité | Reponses |
|---|--|----------|
| 1 | $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | faux |
| 2 | $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | faux |
| 3 | $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ | vrai |
| 4 | $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}$ | faux |

Exercice 7

| | | | |
|---------------------------|---|--------------------------|--|
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\cos(x - \pi) = -\cos x$ | $\sin(-x) = -\sin x$ | $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ |
| $\cos(x + \pi) = -\cos x$ | $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ | $\sin(\pi - x) = \sin x$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ |
| $\tan(-x) = -\tan x$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ | $\tan(x + \pi) = \tan x$ | $\tan(x - \pi) = \tan x$ |

Exercice 8

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x & ; & \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x & ; & \quad \cos(-x) = \cos x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x \end{aligned}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) \text{ et } D_f = \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, x + \pi \in \mathbb{R} \text{ et } f(x + \pi) &= \cos(x + \pi) \\ &= \cos(2x + 2\pi) \\ &= \cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Comme $\forall x \in D_f, x + \pi \in D_f$ et $f(x + \pi) = f(x)$ alors f est une fonction périodique de période π .

Exercice 10

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \text{ et } D_g = \mathbb{R} \\ f(x+3) &= f(x) \text{ et } g(x+4) = g(x) \\ D_{f \circ g} &= D_f \cap D_g = \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, x+12 \in \mathbb{R} \\ (f \circ g)(x+12) &= f(x+12) \times g(x+12) \\ \text{Or } f(x+12) &= f(x+9) + 3 \\ &= f(x+9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x+6)+3 \\
 &= f(x+6) \\
 &= f((x+3)+3) \\
 &= f(x+3) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } g(x+12) &= g((x+8)+4) \\
 &= g(x+8) \\
 &= g((x+4)+4) \\
 &= g(x+4) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } (f \times g)(x+12) &= f(x) \times g(x) \\
 &= (f \times g)(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in D(f \times g), x+12 \in D_{f \times g}$

et $(f \times g)(x+12) = (f \times g)(x)$ alors $f \times g$ est périodique de période 12.

Exercice 11

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x+2k\pi) &= \cos x \\
 \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x+2k\pi) &= \sin x \\
 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(x+k\pi) &= \tan x
 \end{aligned}$$

Exercice 12

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f'(x) &= \cos(x) - \sin(x) \\
 \text{b) } f'(x) &= 2x + \sin(x) \\
 \text{c) } f'(x) &= -\sin(x) - 2(\tan^2(x) + 1)
 \end{aligned}$$

Exercice 13

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f'(x) &= 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\
 \text{b) } f'(x) &= 3 \sin\left(-3x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 \text{c) } f'(x) &= -\frac{5}{3} \sin \frac{x}{3} - \frac{21}{2} \cos \frac{3x}{2}
 \end{aligned}$$

Exercice 14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}))}{2x \cos(\frac{x}{2}) \times \sin(\frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{2x \cos(\frac{x}{2}) \times \sin(\frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x \cos(\frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x \cos(\frac{x}{2})} \times \frac{1}{2 \cos(\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

Autre méthode

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos)(1 + \cos)} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos)} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Posons $f(x) = \cos x$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(car f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$).

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 15

| A | B |
|-----------------------------------|-------------|
| $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ | $\sin(a+b)$ |
| $2\cos(2a) - 1$ | $\cos(2a)$ |
| $2\cos(a)\sin(a)$ | $\cos(a-b)$ |
| $\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ | $\sin(2a)$ |

Exercice 16

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin x = -4(\cos x + \sin x)$$

$$2) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x) = 3\cos x - 5\sin x$$

Exercice 17

Réduisons chacune des expressions suivantes :

$$\bullet \cos x - \sin x = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Soit } \beta \text{ tel que : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \cos x - \sin x &= \sqrt{2} \cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet \cos x + \sin x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Soit } \beta \text{ tel que : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bullet -\cos x + \sqrt{3} \sin x$$

$$\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{Soit } \beta \text{ tel que : } \begin{cases} \cos \beta = \frac{-1}{2} \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc } = -\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice 18

• (E₁): $x \in \mathbb{R}, \cos x = \cos \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{5} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$
 $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{4\pi}{5} + k2\pi; -\frac{4\pi}{5} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₂): $x \in \mathbb{R}, \sin x = \sin \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{6\pi}{7} + k2\pi$ ou $x = \pi - \frac{6\pi}{7} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{6\pi}{7} + k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{7} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{6\pi}{7} + k2\pi; \frac{\pi}{7} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₃): $x \in \mathbb{R}, \tan x = \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 19

• (E₁): $x \in \mathbb{R}, \cos x = -2$
 Comme $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$, alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$

• (E₂): $x \in \mathbb{R}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que: $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₃): $x \in \mathbb{R}, \sin x = 0.$

On sait que: $\sin 0 = 0$

Donc $\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0$

$\Leftrightarrow x = 0 + k2\pi$ ou $x = \pi - 0 + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ ou $x = \pi + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \{k2\pi; \pi + k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₄): $x \in \mathbb{R}, \sin x = 1,$

Comme $x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset.$

• (E₅): $x \in \mathbb{R}, \sin x = -\frac{1}{2}$

On sait que: $\sin(-\pi/6) = -\frac{1}{2}$

Donc $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₆): $x \in \mathbb{R}, \tan x = 0$

On sait que: $\tan 0 = 0$

Donc $\tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \tan(0)$

$\Leftrightarrow x = 0 + k\pi$

$\Leftrightarrow x = k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₇): $x \in \mathbb{R}, \tan x = \sqrt{3}$

On sait que: $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Donc $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

• (E₈): $x \in \mathbb{R}, \cos x = 0$

On sait que: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Donc $\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 20

En utilisant le cercle trigonométrique on a :

$\sin x > -\frac{8}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right[$

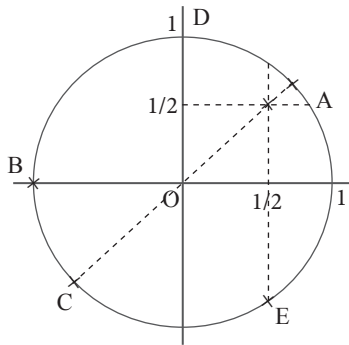
Exercice 21

$S = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right[$

Exercice 22

$S = \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right[$

Exercice 23



Exercice 24

$$\begin{aligned}
 1) \cos(2x) &= \cos(x+x) \\
 &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
 &= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\
 &= \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) \\
 &= 2\cos^2(x) - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) a) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

b) D'après question 1),
on a : $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{24}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1 \\
 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\
 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{8}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{8}}$$

Car $\frac{\pi}{24} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$.

Exercice 25

- $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos(\pi + a) - 2\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a - \pi)$
 $= \cos(a) - \cos(a) - 2\sin(a) - \sin(a)$
 $= -3\sin(a)$
- $B = \cos(3a)\cos(a) + \sin(3a)\sin(a)$
 $= (\cos(2a + a)\cos(a) + \sin(2a + a)\sin(a))$
 $= (\cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)\cos(a) + (\sin(2a)\cos(a) + \cos(2a)\sin(a))\sin(a))$
 $= \cos(2a)\cos^2(a) - \sin(2a)\sin(a)\cos(a) + \sin(2a)\cos(a)\sin(a) + \cos(2a)\sin^2(a)$
 $= \cos(2a)\cos^2(a) + \cos(2a)\sin^2(a)$
 $= \cos(2a)$

Exercice 26

$$\begin{aligned}
 \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8} &= \sin\frac{\pi}{8} \\
 -\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) & \\
 = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) & \\
 = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \\
 = 0 &
 \end{aligned}$$

Exercice 27

- $\cos(x + \pi) + \sin(x - \pi) + \cos(x - 5\pi) - \sin(x + 2\pi)$
 $= -\cos x - \sin x - \cos x - \sin x$
 $= -2\cos x - 2\sin x$
- $\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$
 $= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 $= -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x$
 $= 0$

Exercice 28

$$\begin{aligned}
1) \forall x \in \mathbb{R}, (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 \\
&= [\cos x + \sin x + (\cos x - \sin x)][\cos x + \sin x - (\cos x - \sin x)] \\
&= 2\cos x \times 2\sin x \\
&= 4\cos x \sin x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \forall x \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y) \\
&= \cos[(x+y)+(x-y)] \\
&= \cos 2x
\end{aligned}$$

Exercice 29

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Exercice 30

$$\begin{aligned}
1) \text{ On sait que : } \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos\left(2 \frac{\pi}{8}\right)}{2} \\
&= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \\
&= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \frac{\pi}{8} \in]0; \frac{\pi}{2}[\text{ alors } \cos \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ On sait aussi que : } \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 - \cos\left(2 \frac{\pi}{8}\right)}{2} \\
&= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \frac{\pi}{8} \in]0; \pi[\text{ alors } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\begin{aligned}
2) \bullet \sin\left(3 \frac{\pi}{8}\right) &= \sin\left(2 \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 31

$$\begin{aligned}
\bullet (E_1) : x \in \mathbb{R}, \\
\cos x = -\cos \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{5} + k2\pi$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{5} + k2\pi; -\frac{2\pi}{5} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet (E_2) : x \in \mathbb{R}, \sin x = -\sin \frac{\pi}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{9} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{10\pi}{9} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{8\pi}{9} + k2\pi$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{8\pi}{9} + k2\pi; -\frac{\pi}{9} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet (E_3) : x \in \mathbb{R}, \tan x = -\tan \frac{2\pi}{11}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{11} + k\pi$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{2\pi}{11} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 32

$$\begin{aligned} \bullet (E_1): x \in \mathbb{R}, \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} &= \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \pi + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ S_{\mathbb{R}} &= \{\pi + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (E_2): x \in \mathbb{R}, \cos(3x + \frac{\pi}{4}) &= \cos(x + \frac{\pi}{3}) \\ \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} &= x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{4} = -(x + \frac{\pi}{3}) + k2\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } 4x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \\ S_{\mathbb{R}} &= \{\frac{\pi}{24} + k\pi; -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (E_3): x \in \mathbb{R}, \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} &= -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ S_{\mathbb{R}} &= \{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (E_4): x \in \mathbb{R}, \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + k2\pi \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + x + k2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7\pi}{36} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ S_{\mathbb{R}} &= \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}; \frac{\pi}{12} + k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 33

$$\begin{aligned} \bullet (E_1): x \in I =]-\pi; \pi], \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi. \end{aligned}$$

Les solutions dans I sont des mesures principales on a donc

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet (E_2): x \in I = [-\pi; 3\pi], \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 2x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= -\frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \end{aligned}$$

Cherchons les solutions dans I

$$\begin{aligned} -\pi &\leq -\frac{\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \text{ ou } -\pi \leq \frac{5\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \\ -\pi + \frac{\pi}{24} &\leq k\pi \leq 3\pi + \frac{\pi}{24} \text{ ou } -\pi - \frac{5\pi}{24} \leq k\pi \\ &\leq 3\pi - \frac{5\pi}{24}; \frac{-23}{24} \leq k \leq \frac{73}{24} \text{ ou } -\frac{23}{24} \leq k \leq \frac{67}{24} \\ \bullet -\frac{23}{24} &\leq k \leq \frac{73}{24} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \end{aligned}$$

Pour $k = 0, x = -\frac{\pi}{24}$

Pour $k = 1, x = \frac{23\pi}{24}$

Pour $k = 2, x = \frac{47\pi}{24}$

Pour $k = 3, x = \frac{71\pi}{24}$

$-\frac{29}{24} \leq k \leq \frac{67}{24} \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2\}$

Pour $k = -1, x = -\frac{19}{24}$

Pour $k = 0, x = \frac{5\pi}{24}$

Pour $k = 1, x = \frac{29\pi}{24}$

Pour $k = 2, x = \frac{53\pi}{24}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{19}{24}; -\frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}; \frac{23\pi}{24}; \frac{29\pi}{24}; \frac{47\pi}{24}; \frac{53\pi}{24}; \frac{71\pi}{24} \right\}$$

Exercice 34

• $x \in \mathbb{R}, \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \sqrt{2}$

Réduisons l'expression $\cos x + \sin x$

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit β tel que :

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ on a } \begin{cases} \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

Donc $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(0)$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \{\pi/4 + k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

• $x \in \mathbb{R}, \cos x - \sqrt{3} \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

Réduisons l'expression $\cos x - \sqrt{3} \sin x$

$$\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

Soit β tel que : $\begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{2} \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{3}$

Donc $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Ainsi $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \{k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

• $x \in \mathbb{R}, -\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Réduisons l'expression $-\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$$\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Soit β tel que : $\begin{cases} \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{5\pi}{6}$

Donc $-\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

Ainsi $-\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

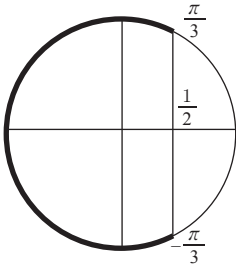
$\Leftrightarrow x = \pi/6 + \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \{\pi + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

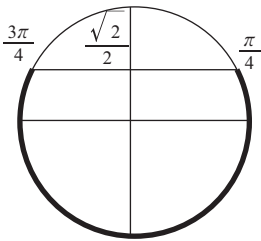
Exercise 35

- (I₁): $x \in [-2\pi, 2\pi], \cos x \leq 0,5$



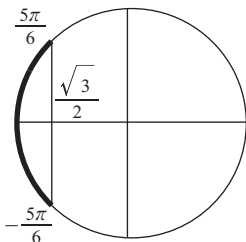
$$S_{[-2\pi, 2\pi]} = \left[-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

- (I₂): $x \in [-\pi, 2\pi], \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



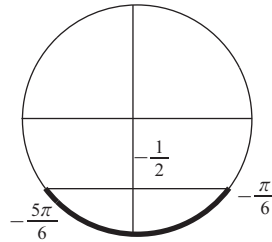
$$S_{[-\pi, \pi]} = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$$

- (I₃): $x \in [0, 2\pi], \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



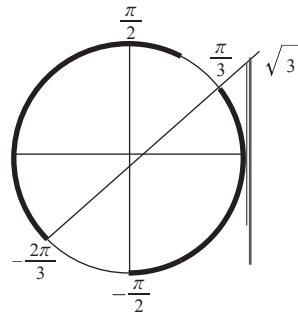
$$S_{[0, 2\pi]} = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$$

- (I₄): $x \in [-2\pi, 0], \sin x \leq -\frac{1}{2}$



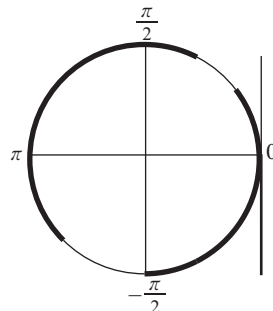
$$S_{[-2\pi, 0]} = \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$$

- (I₅): $x \in [-2\pi, 2\pi], \tan x \leq \sqrt{3}$



$$S_{[-2\pi, 2\pi]} = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

- (I₆): $x \in [-\pi, \pi], \tan x \leq 0$



$$S_{[-\pi, \pi]} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Exercice 36

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= (\cos x - 2\sin x)\cos x - (\sin x + 2\cos x)\sin x \\ &= \cos^2 x - 2\sin x \cos x - \sin^2 x - 2\cos x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos x \sin x \\ &= \cos^2 x - 4\cos x \sin x \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = 12\sin^2 x \cos x - 3\cos x$$

$$\text{c) } f'(x) = -2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 6\cos \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$$

$$\text{d) } f'(x) = 3x^2 + \sin^2 x - \cos^2 x \\ = 3x^2 - \cos 2x$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$$

$$\text{f) } f'(x) = -\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\cos^2 x} \\ (\cos x - \cos x + x\sin x)(\cos x + x\sin x)$$

$$\text{g) } f'(x) = \frac{-(-\sin x - \sin x + x\cos x)(\sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$\frac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - x\cos x(\sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$\frac{x\sin x \cos x + x^2 \sin^2 x - x\cos x \sin x + x^2 \cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

Exercice 37

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \tan x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$\frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3x}{\sin 3x + 1} = -1 \quad \text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos 3x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 3x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \times \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Posons $f(x) = \sin 2x$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{car } f \text{ est dérivable en } \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2\cos 2 \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\cos \frac{\pi}{2}$$

$$= 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2\sin x \cos 2x - \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{2\sin x \cos 2x - \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{2\cos 2x - 2\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{4\cos^2 x - 2\cos x - 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) (\cos x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\cos x - 1)}{4 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) (\cos x - 1) \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \cos x} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Exercice 38

- 1) a) $\cos(a+b) + \cos(a-b)$
 $= \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b$
 $= 2 \cos a \cos b$
- b) $\cos(a-b) - \cos(a+b)$
 $= \cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b$
 $= 2 \sin a \sin b$
- c) $\sin(a+b) + \sin(a-b)$
 $= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b$
 $= 2 \sin a \cos b$
- d) $\sin(a+b) - \sin(a-b)$
 $= \sin a \cos b + \cos a \sin b - \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 $= 2 \cos a \sin b$.

2) Posons $p = a + b$ et $q = a - b$

$$\text{On a : } a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2}$$

En remplaçant a et b respectivement par $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ dans 1) on obtient :

$$\text{a) } \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\text{b) } \cos q - \cos p = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$-(\cos p - \cos q) = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\text{c) } \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\text{d) } \sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

Exercice 39

$$\bullet (E_1) : x \in]-\pi ; \pi], \sin(2x) + \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \text{ ou } 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$S_{]-\pi ; \pi]} = \left\{ -\frac{5\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{9} \right\}$$

$$\bullet (E_2) : x \in I =]-\pi ; 3\pi],$$

$$\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\text{ou } \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ou } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ou } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$\text{ou } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{ou } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\text{ou } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k4\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3}$$

$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = x - \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\text{ou } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{6} + k4\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3}$$

$$S_{[-\pi; 3\pi]} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{17\pi}{18}, -\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \\ \frac{31\pi}{18}, \frac{13\pi}{6}, \frac{43\pi}{18} \end{array} \right\}$$

Exercice 40

$$1) \sin^2 x - \sin x - 6 = 0$$

Posons $X = \sin x$

$$\text{On a : } X^2 - X - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 3 \text{ ou } X = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 3 \text{ ou } \sin x = -2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

$$2) 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

Posons $X = \cos x$

$$\text{On a : } 2X^2 - 3X - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = 2 \text{ (impossible)}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Exercice 41

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$1) a) \forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R},$$

$$f(x + 2\pi) = \cos\left(x + 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(x + 11\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= f(x)$$

$$b) \forall x \in D_f, x + 2\pi \in D_f \text{ et } f(x + 2\pi) = f(x)$$

donc f est périodique de période 2π .

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, \frac{7\pi}{6} - x \in D_f, \frac{7\pi}{6} + x \in D_f$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos(\pi - x)$$

$$= -\cos(x)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos(\pi + x)$$

$$= -\cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{7\pi}{6} - x \in D_f, \frac{7\pi}{6} + x \in D_f$$

$$\text{et } f\left(\frac{7\pi}{6} - x\right) = f\left(\frac{7\pi}{6} + x\right).$$

Donc la droite (Δ) d'équation $x = \frac{7\pi}{6}$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) .

c) Déterminons une équation de la tangente

(T) en O.

$$(T) : y = f'(0)(x) + f(0)$$

$$f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(0) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) Démontrons que le point $\Omega(\frac{2\pi}{3}; 0)$ est un centre de symétrie de (\mathcal{C}) .

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\pi/3 + x \in \mathbb{R} \text{ et } 2\pi/3 - x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + f\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = 0$$

$$\text{Comme } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{2\pi}{3} + x \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \frac{2\pi}{3} - x \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + f\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)}{2} = 0,$$

alors le point $\Omega(\frac{2\pi}{3}; 0)$ est un centre de symétrie de (\mathcal{C}) .

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\pi/6 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq -x \leq -\frac{\pi}{6}$$


$$-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq -x + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

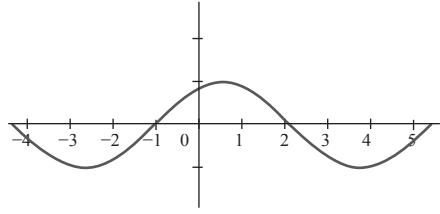
$$-\frac{\pi}{2} \leq -x + \frac{\pi}{6} \leq 0$$

$$-1 \leq \sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$$

Donc $\forall x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}]$, $f'(x) \leq 0$ alors f est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}]$.

b)

| | | |
|---------|---|------------------|
| x | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| $f'(x)$ | - | |
| $f(x)$ |  | |



Exercice 42

$$D_f = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = 1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x$$

$$(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 1 + \sin x + \cos x + \cos x \sin x = f(x)$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\pi}{4} - x \in D_f, \frac{\pi}{4} + x \in D_f$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= (1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right))(1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)) \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= (1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right))(1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)) \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\pi}{4} - x \in D_f, \frac{\pi}{4} + x \in D_f \text{ et } f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

Donc la droite (Δ) d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) .

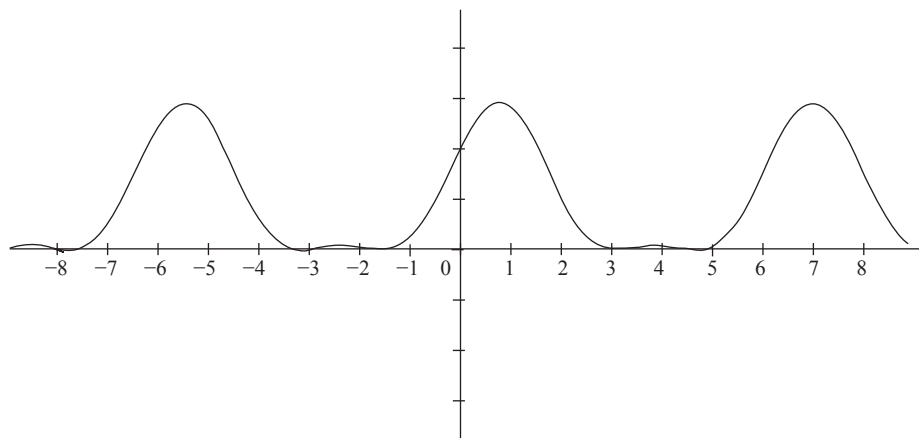
3) La fonction f est périodique de période 2π , on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π et compléter sa courbe sur \mathbb{R} par la translation de vecteur $k2\pi \vec{OI}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Comme la droite (Δ) d'équation $x = \pi/4$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) alors on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude π et compléter sa courbe sur un intervalle d'amplitude 2π par la symétrie orthogonale.

L'intervalle $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ est bien d'amplitude π on peut donc étudier la fonction f sur cet intervalle d'axe (Δ) .

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\sin x(1+\sin x) + \cos x(1+\cos x) \\
&= -\sin x - \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\
&= \cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= \cos x - \sin x + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \\
&= (\cos x - \sin x)(1 + \cos x + \sin x).
\end{aligned}$$

b)

| | | | |
|---------|----------------------------|---|------------------|
| x | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |



IV.4. Situation complexe

Exercice 43

$$P = \frac{v_0 \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{g}$$

Dans cette écriture seule $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ varie donc cette valeur est

maximale lorsque : $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ est maximale c'est-à-dire : $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\mathbb{Z}, \text{ soit } \alpha = \frac{\pi}{12} + 2k\mathbb{Z}.$$

Leçon 11

Système d'équation à deux inconnus ou à trois inconnus

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

m, n, p, r, q , et q sont des nombres réels.
 $mr - nq$; $nr - mq$; $mq - rn$; $mn - rq$.

Exercice 2

Le déterminant du système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$
 est 11

Exercice 3

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$; b) $\begin{vmatrix} -2 & 13 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 3$;
 c) $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Exercice 4

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 26$
 Le déterminant du système est différent de zéro donc le système admet une solution.

Exercice 5

$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -15 & -21 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1 \\ -15x - 21y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 7y = 1 \\ 5x + 7y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

 et $-\frac{2}{3} \neq 1$, donc le système n'a pas de solution.

Exercice 6

a) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 5 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + y = \sqrt{2} \\ 5x + \sqrt{5}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \sqrt{5}y = \sqrt{10} \\ 5x + \sqrt{5}y = 1 \end{cases}$$

 $\sqrt{10} \neq 1$ donc le système n'a pas de solution.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 16$
 $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, donc le système a une solution.

c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$
 $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, donc le système a une solution.

d) $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 8x + 2y = 10 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$$

 Donc ce système admet une infinité de solutions.

Exercice 7

- Le couple $(\frac{52}{11}; -\frac{1}{11})$ est la solution du système.
- Le couple $(\frac{16}{7}; -\frac{15}{7})$ est la solution du système.

Exercice 8

1. V ; 2. F ; 3. V, 4. V

Exercice 9

1. V ; 2. V ; 3. V, 4. V

Exercice 10

S = {(1 ; 2 ; -1)}

Exercice 11

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ -3y + 2z = -4 \\ 5z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ -3y - 2 = -4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{4}{3} - 1 = -1 \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc la solution est : $(-\frac{4}{9}; \frac{2}{3}; 1)$.

Exercice 12

$$S = \left\{ \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) \right\}.$$

Exercice 13

x le nombre de rose jaune
 y le nombre d'iris

$$\text{On a : } \begin{cases} 5x + 4y = 1600 \\ 3x + 6y = 1500 \end{cases}$$

Exercice 14

Soit :

x le nombre de stylos
 y le nombre de cahiers
 z le nombre de gommes

$$\text{On a : } \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 630 \\ 5x + 7y + z = 1500 \\ 10x + y + 6z = 600 \end{cases}$$

Exercice 15

| Affirmations | Réponses |
|---|----------|
| le système $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$ n'a pas de solution | faux |
| | vrai |
| | faux |
| | vrai |

Exercice 16

1. b, 2.C; 3.b

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 17**

Solution

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \text{ et}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11$$

La solution est : $(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}) = (\frac{1}{19}, \frac{11}{19})$.

$$\text{b) } \Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \text{ et}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

La solution est :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{5}, \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5} \right).$$

$$\text{c) } \Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 3 \end{vmatrix} = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \sqrt{7} - \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & -3 \end{vmatrix} = -3\sqrt{7} + \sqrt{15} \neq 0$$

Donc le système n'a pas de solution.

$$\text{d) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 - 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 21 = 16,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 15 - 7 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = -75 - 49 = -124 \text{ et}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 45 = -52$$

La solution est :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta} \right) = \left(\frac{-124}{16}, \frac{-52}{16} \right) = \left(\frac{-31}{4}, \frac{-13}{4} \right)$$

$$e) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 0,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = -75 + 75 = 0 \text{ et}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = -25 + 25 = 0$$

Donc le système a une infinité de solution.

$$f) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 1 = 21 \text{ et}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 10 = 9$$

La solution est :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta} \right) = \left(\frac{-21}{3}, -\frac{9}{3} \right) = (7; 3).$$

Exercice 18

$$(S_1) \begin{cases} 3x + y - z = -25 \\ -x + 2y + z = 15 \\ 2x - 3y + 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 15 \\ -x + y - z = -25 \\ 2x - 3y + 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 15 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 7y + 2z = 20 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ y + 4z = 14 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 15 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 7y + 2z = 20 & L_2 \leftarrow L_3 \\ -26z = -78 & L_3 \leftarrow L_2 - 7L_3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \text{ et } S = \{(-8; 2; 3)\}.$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + z = -3 & L_1 \\ x + 10y - 3z = 5 & L_2 \Leftrightarrow \\ 2x - y + 2z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = -3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 11y - 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ y + 4z = -4 & L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y + 4z = -4 & L_2 \leftarrow L_3 \\ -46z = 46 & L_3 \leftarrow L_2 - 11L_3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \text{ et } S = \{(2; 0; -1)\}.$$

$$(S_3) \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = -1 & L_1 \\ 3x - 2y + 3z = 1 & L_2 \Leftrightarrow \\ 2x + y - z = 6 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y + 3z = 1 & L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ 5y - z = 4 & L_3 \leftarrow 2L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2y + 3z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 \\ -13z = 13 & L_3 \leftarrow -5L_2 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ et } S = \{(2; 1; -1)\}.$$

$$(S_4) \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 & L_1 \\ y + z = 2 & L_2 \\ x + z = 3 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ y - z = -4 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ 2z = 6 & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ et } S = \{(0; -1; 3)\}.$$

$$(S_5) \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 4 \\ x + 2y - 6z = 4 \\ x + 8y - 21z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 6z = -1 & L_1 \\ x + 8y - 21z = 6 & L_2 \Leftrightarrow \\ 2x - 2y + 3z = 4 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 4 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 6y - 15z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 6y + 15z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 6z = 4 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 6y - 15z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ 0z = -2 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

On a : $0z = -2$ n'a pas de solution, donc $S = \emptyset$

$$(S_6) \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 3x + 2y - z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = -1 & L_1 \\ 2x - y + z = -3 & L_2 \\ 3x + 2y - z = 10 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y + z = -1 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ 11y + 5z = 7 & L_3 \leftarrow 3L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y + z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 \\ 6z = 18 & L_3 \leftarrow 5L_2 + 2L_3 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \\ z = 3 \end{cases}$ et $S = \{(-5; -4; 3)\}$.

Exercice 19

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 2 \\ 4x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 4x - y \\ 3x + y + 5(4x - y) = 2 \\ 2x + 3y + (4x - y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 4x - y \\ 23x - 4y = 2 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x - y \\ 2y = 1 - 6x \\ 23x - 2(1 - 6x) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x - y \\ 2y = 1 - 6x \\ x = \frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{10} \\ y = \frac{11}{70} \\ x = \frac{4}{35} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{4}{35}, \frac{11}{70}, \frac{3}{10} \right) \right\}$.

$$b) \begin{cases} 3x + y + z = -25 \\ -x + 2y + z = 15 \\ 2x - 3y + 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y + z - 15 \\ 3(2y + z - 15) + y - z = 15 \\ 2(2y + z - 15) - 3y - 2z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y + z - 15 \\ 7y + 2z = 20 \\ y + 4z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z - 15 \\ y = 14 - 4z \\ 7(14 - 4z) + 2z = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z - 15 \\ y = 14 - 4z \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Donc $S = \{(-8; 2; 3)\}$.

$$c) \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 3(2y + z + 1) - 2y + 3z = 1 \\ 2(2y + z + 1) + y - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 2y + 3z = -1 \\ 5y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ z = 4 - 5y \\ 2y + 3(4 - 5y) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ z = 4 - 5y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc $S = \{(2; 1; -1)\}$.

$$d) \begin{cases} x + 10y + 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z + 3 \\ 2(y + z + 3) - y + 2z = 2 \\ (y + z + 3) + 10y - 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z + 3 \\ y + 4z = -4 \\ 11y - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z + 3 \\ y = -4 - 4z \\ 11(-4 - 4z) - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z + 3 \\ y = -4 - 4z \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Donc $S = \{(2; 0; -1)\}$.

$$e) \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 2(2y + z + 1) + y - z = 6 \\ 3(2y + z + 1) - 2y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 5y + z = 4 \\ 4y + 6z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ z = 4 - 5y \\ 4y + 6(4 - 5y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ z = 4 - 5y \\ -26y = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc $S = \{(2; -1; 1)\}$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 20

Solution

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} = 6 \end{cases} \text{ posons : } \frac{1}{x} = X \text{ et } \frac{1}{y} = Y.$$

Le système devient : $\begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ X(5 - X) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 - X \\ X = 2 \text{ ou } X = 3 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$.

D'où $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right) \right\}$.

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ x \times y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ x \times y = 225 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$.

On a : $X^2 - 34X + 225 = 0$.

$X = 25$ ou $Y = 9$. On en déduit que : $x = 5$

ou $x = -5$ ou $x = 3$ ou $x = -3$.

Tenant compte de $xy < 0$, on obtient :

$S = \{(5; -3), (-5; 3), (3; -5), (-3; 5)\}$.

$$c) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \text{ Posons } \frac{1}{x} = X \text{ et } \frac{1}{y} = Y.$$

Le système devient :

$$\begin{cases} X + 2Y = 2 \\ 3X - Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3X - 3 \\ X + 2(3X - 3) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3X - 3 \\ X + 2(3X - 3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{8}{7} \\ Y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} x = \frac{7}{8} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$. $S = \left\{ \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{3} \right) \right\}$.

Exercice 21

Solution $y = ax^2 - bx + c$.

La parabole (\mathcal{P}) passe par le point A(0 ; -1) donc $-1 = a(0)^2 - b(0) + c$. Soit $c = -1$.

La parabole (\mathcal{P}) passe par le point B(1 ; 2) donc $2 = a(1)^2 - b(1) - 1$. Soit $a - b = 3$

La parabole (\mathcal{P}) passe par le point C(2 ; 3) donc $3 = a(2)^2 - b(2) - 1$. Soit $2a - b = 2$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

L'équation de la parabole(P) est : $y = -x^2 + 4x - 1$.

IV.4. Exercices d'évaluation

Exercice 22

Désignons par x le nombre de canards, par y le nombre de lapin et par z le nombre de dromadaires.

• Un canard a deux pattes, un lapin a quatre pattes et un dromadaire a deux bosses

On a : $2x + 4y + 2z = 130$.

• Un canard, un lapin et un dromadaire ont chacun une tête.

On a : $x + y + z = 46$.

• Un lapin et un dromadaire ont chacun deux oreilles.

On a : $2y + 2z = 38$.

• De plus le fermier dénombre au moins 16 lapins. Donc $y \geq 16$.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 130 \\ x + y + z = 46 \\ y \geq 16 \end{cases}$$

La résolution du système donne : $\begin{cases} x = 27 \\ y = 19 \\ z = 0 \end{cases}$

Donc le fermier a 27 canards, 19 lapins et n'a pas de dromadaire.

Leçon 12 Suites numériques

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

- a) 4 - 7 - 10 - 13 - 16 - 19 - 21 - 24
- b) 3 - 6 - 12 - 24 - 48 - 96 - 192 - 384
- c) 20 - 19 - 17 - 14 - 10 - 5 - (-1) - (-8)
- d) 5 - 7 - 11 - 17 - 25 - 35 - 47 - 51
- e) 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 54

Exercice 2

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+1}{n+1}$
 $u_0 = -1,$
 $u_1 = \frac{1}{2}u_2 = 1$ et $u_3 = \frac{7}{4}.$
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + 2n - 3,$

$$v_0 = -3, v_1 = 0,$$

$$v_2 = 5 \text{ et } v_3 = 11.$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = (-1)^{n+1},$$

$$w_0 = -1, w_1 = 1,$$

$$w_2 = -1 \text{ et } w_3 = 1.$$

$$\text{d) } \forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n},$$

$$t_1 = \frac{17}{6}, t_2 = \frac{7}{3},$$

$$t_3 = \frac{13}{6} \text{ et } t_4 = \frac{25}{12}$$

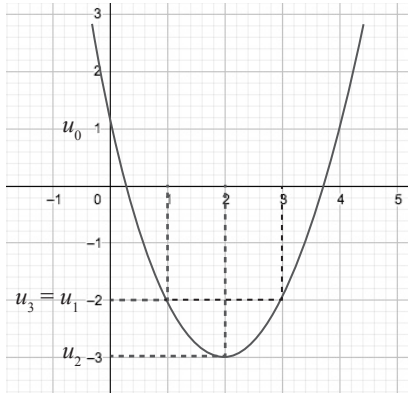
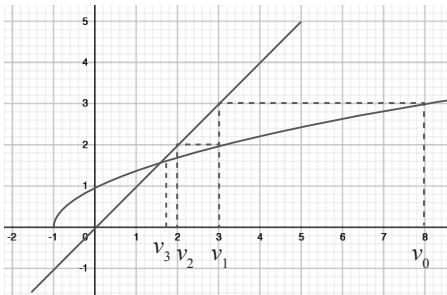
$$\text{e) } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{2}{n!},$$

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } x_4 = \frac{1}{12}$$

Exercice 3

- a) Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$
 $u_4 = 1$.
 b) Si $v_1 = +2$, alors $v_2 = 2$, $v_3 = 2$, $v_4 = 2$
 $v_5 = 2$.
 c) Si $w_0 = -3$, alors $w_1 = -3$, $w_2 = -3$,
 $w_3 = -3$, $w_4 = -3$.

Exercice 4**Exercice 5****Exercice 6**

- a) $u_{n+1} = u_n + r$; b) $u_{12} = u_{11} + r$;
 c) $u_{38} = u_{37} + r$

Exercice 7

- a) $u_n = 2n - 15$; b) $u_n = \frac{13}{3} - 3n$;
 c) $u_n = \frac{8}{5}n - 1$.

Exercice 8

- a) $u_{n+1} - u_n = 3 + 5(n+1) - 3 - 5n = 5$.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme u_0 , où $u_0 = 3$.
 b) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2$.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme u_0 , où $u_0 = 0$.
 b) $u_{n+1} - u_n = 100 + 500(n+1) - 100 - 500n = 500$.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison 500 et de premier terme u_0 , où $u_0 = 100$.

Exercice 9

- a) $S_1 = 50 \left(\frac{1+50}{2} \right) = 12750$
 b) $S_2 = 11 \left(\frac{20}{2} \right) = 110$
 c) $S_3 = 10 \left(\frac{1000+5000}{2} \right) = 30000$

Exercice 10

- a) $v_{n+1} = v_n \times q$; b) $v_{12} = v_{11} \times q$;
 c) $v_{38} = v_{37} \times q$

Exercice 11

- a) $v_n = -15 \left(\frac{1}{3} \right)^n$; b) $v_n = \frac{2}{3} (-2)^n$;
 c) $v_n = \frac{\sqrt{7}}{243} (3)^n$

Exercice 12

- a) $v_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$; $q = \frac{1}{2}$ et $v_0 = 3$
 b) $v_n = 2(\sqrt{5})^n$; $q = \sqrt{5}$ et $v_0 = 2$.
 c) $v_n = \frac{7}{2^{n+1}}$; $q = \frac{1}{2}$ et $v_0 = \frac{7}{2}$
 d) $v_{n+1} = \frac{10}{4} v_n$; $q = \frac{10}{4}$ et $v_1 = -3$

Exercice 13

- a) $S = 7 \times \frac{1-(2)^8}{1-2} = 1785$

$$b) S = 2187 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = 3267$$

$$c) S = -30 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -59,941$$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 14

$$1) S = 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 8,995$$

$$2) T = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{107}}{1 - \frac{1}{3}} = 274.10^{-5}$$

Exercice 15

$$a) u_{n+1} - u_n = 2, \text{ donc } r = 2 \text{ et } u_0 = -3$$

$$b) r = \frac{1}{3} \text{ et } u_0 = -1 ;$$

$$c) r = \frac{-5}{2} \text{ et } u_0 = 2.$$

Exercice 16

$$1) S = 31 \left(\frac{-5 + 55}{2} \right) = 775$$

$$2) u_{11} = 17 \quad u_{52} = 99 \text{ et } T = 2436$$

Exercice 17

$$a) u_{100} = \frac{199}{99}$$

$$b) u_{n+1} = \frac{2n+1}{n} ; u_{2n+1} = \frac{4n+1}{2n}$$

$$u_{n-1} = \frac{2n-3}{n-2}$$

Exercice 18

$$72q = 6 \text{ donc } q = \frac{1}{12}$$

Exercice 19

$$1) 1-F \quad 2-F \quad 3-V \quad 4-F \quad 5-F \quad 6-F \quad 7-F.$$

Exercice 20

$$1) 1-V \quad 2-V \quad 3-V \quad 4-F \quad 5-V \quad 6-F$$

Exercice 21

$$1) 1-A \quad 2-C \quad 3-B \quad 4-A \quad 5-B$$

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 22

$$1) u_1 = -1 \quad u_{25} = 47 \quad u_{100} = 197$$

$$2) u_{n+1} = r = -\frac{12}{5}u_0 = \frac{76}{5}u_{18} = 28$$

$$2) r = \frac{1}{2}u_0 = 0$$

Exercice 23

$$1) w_4 = 24 ; w_8 = 384 ; w_{12} = 6144$$

$$2) q = 3 ; w_0 = \frac{2}{27} ; w_{15} = 18 \times 3^{10} ;$$

$$w_{20} = 18 \times 3^{15}.$$

Exercice 24

$$S = 3 \left(\frac{u_2 + u_4}{2} \right) = 15 \text{ donc } u_3 = 5 ; r = 5 ;$$

$$u_0 = -10.$$

Exercice 25

$$1) u_{n+1} - u_n = -2 \text{ donc } u_n \text{ est une suite arithmétique de raison } -2 \text{ et } u_0 = 5.$$

$$2) u_9 = -14.$$

$$3) S = 10 \times \frac{1}{2}(5 - 14) = -45$$

Exercice 26

$$1) v_0 = 8.$$

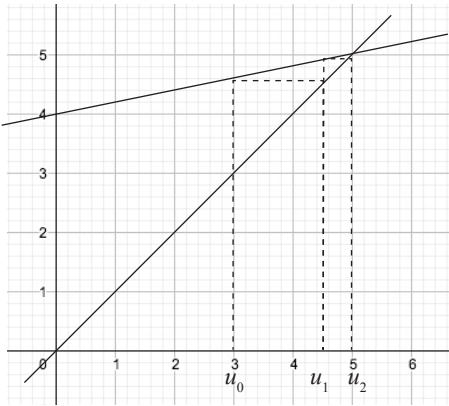
$$2) v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 \text{ donc } v_n \text{ est une suite}$$

géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

$$3) S = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16368}{3072} = \frac{341}{64}.$$

Exercice 27

1) Graphique



2) (voir graphique)

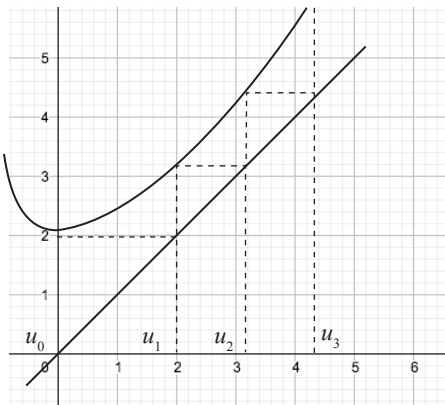
3) a- $t_0 = -2$.

b- $t_{n+1} = \frac{1}{5}t_n$ ou $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{5}$ donc t_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

c- $t_n = -2\left(\frac{1}{5}\right)^n$

4) $u_n = 5 + t_n = 5 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Exercice 28



Exercice 29

a) $S = 18 \left(\frac{2+87}{2}\right) = 1032$

b) $S = 18 \left(\frac{92-3}{2}\right) = 801$

c) $S = 2 \left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = 510$

d) $S = 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6}{1 - \frac{1}{10}} = 1,11111$

e) $S = 1 \frac{1 - (-4)^7}{1 - 4} + (-2) \frac{1 - 4^6}{1 - 4} = 2731$
 $4096 + (-1) \frac{1 - 4^6}{1 - 4} = 2731$

Exercice 30

1) Voir courbe.

2) $u_1 = 2$ $u_2 = \frac{7}{2}$ $u_2 = \frac{31}{8}$

3) a) $v_0 = -8$ $v_1 = -2$ $v_2 = \frac{-1}{2}v_3 = \frac{-1}{8}$

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}v_n$ donc v_n est une suite géométrique avec $q = \frac{1}{4}$ et $v_0 = -8$

c) donc $v_n = -8\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4$
 $= 4 - 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) a) $S_n = -8 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{-32}{3} + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) $S'_n = \frac{-20}{3} + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 31

1) $u_1 = -5$ $u_2 = -3$ $u_3 = \frac{-13}{5}$

2) a- $v_{n+1} - v_n = 2$ donc la suite v_n est une suite arithmétique de raison 2 et $v_0 = 1$.

b) $v_n = 1 + 2n$ et $u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n - 2} = \frac{-1 - 4n}{2n - 1}$

c) $S_n = (n+1)^2$

Exercice 32

- 1) a) 5 janvier 2018 on a 875500 F
 b) 5 Janvier 2019 on aura 901 000 F et le janvier 2020 : 926500 F
- 2) a) de l'année 2018
 b) $E_1 = E_0 + 25500$ avec $25500 = 3\% \cdot 850000$
 c) $E_n = E_{n-1} + 25500$
 d) $E_n - E_{n-1} = 25500$ donc E_n est une suite arithmétique de raison 25500.
 e) $E_n = 850000 + 25500n$
 f) en 2027 on aura $-E_{10} = 1100500$ F.

IV.4. Situation complexe**Exercice 33**

On doit calculer le montant de chaque offre et les comparer.

- 1) a) $u_{n+1} - u_n = 15000$ donc u_n est une suite arithmétique de raison 15000
 b) $u_1 = 95000$
 c) $u_{12} = 260000$
 d) $u_{36} = 620000$ et $S_n = 36 \left(\frac{95000 + 620000}{2} \right) = 12870000$ F.
- 2) a) $v_{n+1} = 1,01v_n$ donc v_n est une suite géométrique de raison 1,01.
 b) $v_1 = 45450$
 c) $v_{12} = 50707,12$
 d) $S_n = 45450 \frac{1 - (1,01)^{36}}{1 - 1,01} = 1954844,121$.
- 3) La proposition la moins chère est celle de l'entreprise B.

Leçon 13 Orthogonalité dans l'espace**IV. Exercices****IV.1. Exercices de fixation****Exercice 1**

| | | |
|---|---|------|
| 1 | Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre. | vrai |
| 2 | Si deux droites de l'espace n'ont aucun point commun, alors elles sont parallèles. | faux |
| 3 | Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles entre elles. | faux |

Exercice 2

Coche la bonne réponse dans chacun des cas

- 1) La droite (HG) est orthogonale à la droite (AD)
 2) La droite (AD) est orthogonale à la droite (CG)

- 3) La droite (BF) est orthogonale à la droite (CD)
 4) La droite (AC) est orthogonale à la droite (HF)

Exercice 3

- 1) La droite (AB) est orthogonale au plan (EDH)
- 2) La droite (DH) est orthogonale au plan (ABC)
- 3) La droite (ED) est orthogonale au plan (AHG)

Exercice 4

$A'B'C'$ et ABC sont des triangles rectangles respectivement en B' et B.

- 1) Démontrons que la droite (AB) est orthogonale au plan (CB'C').
 $(AB) \perp (BC)$ et $(AB) \perp (BB')$.
 (BC) et (BB') sont deux droites sécantes du plan (BB'C) par conséquent $(AB) \perp (BB'C)$.
 Donc $(AB) \perp (CB'C')$.
- 2) Démontrons que la droite (AA') est orthogonale au plan (A'B'C').

$(AA') \perp (A'C')$ et $(AA') \perp (A'B')$.
 $(A'C')$ et $(A'B')$ sont deux droites sécantes du plan $A'B'C'$.
 Donc $(AA') \perp (A'B'C')$.

Exercice 5

Démontrons que les plans (AFG) et (BCE) sont perpendiculaires.

$$(GF) \perp (FE) \text{ et } (GF) \perp (BF) \Rightarrow (GF) \perp (BE)$$

Les diagonales du carré ABFE sont perpendiculaires.

$$(AF) \perp (BE) \\ \left\{ \begin{array}{l} (GF) \perp (BE) \\ (AF) \perp (BE) \end{array} \right.$$

Or (GF) et (AF) sont deux droites sécantes du plan (AGF) donc $(AGF) \perp (BE)$.

De plus $(BE) \subset (BCE)$ donc $(BCE) \perp (AGF)$.

Exercice 6

| | Affirmations | |
|---|--|------|
| 1 | Le projeté orthogonal d'un point sur un plan est une droite | faux |
| 2 | Le projeté orthogonal d'une droite sur un plan est soit un singleton soit une droite. | vrai |
| 3 | Le projeté orthogonal d'un segment sur un plan est soit un singleton, soit un segment. | vrai |
| 4 | $[AB]$ est un segment dont le support n'est pas orthogonal à un plan (P). Le projeté orthogonal du milieu de $[AB]$ sur le plan (P) n'est pas le milieu de l'image de $[AB]$ sur (P). | faux |

Exercice 7

- 1) Le projeté orthogonal de la droite (EG) sur le plan (ABC) est la droite (AC).
- 2) Le projeté orthogonal de la droite (DF) sur le plan (ABC) est la droite (BD).
- 3) Le projeté orthogonal de la droite (HD) sur le plan (ABC) est Le singleton $\{D\}$.
- 4) Le projeté orthogonal de la droite (BD) sur le plan (ABC) est la droite (BD).

5) Le projeté orthogonal du segment [CH] sur le plan (ABC) est le segment [CD].

6) Le projeté orthogonal du segment [FG] sur le plan (ABC) est le segment [BC].

IV.2. Exercices de renforcement**Exercice 8**

- 1) • Droites perpendiculaires : $(AB) \perp (AD)$; $(EG) \perp (HF)$; $(FC) \perp (BG)$

- Droites orthogonales (pas perpendiculaires) :
 $(AB) \perp (HD)$; $(EG) \perp (BD)$; $(FC) \perp (AH)$
- Plans parallèles : $(ABC) \parallel (EFG)$;
 $(GFC) \parallel (HED)$
- Plans perpendiculaires : $(ABC) \perp (FBC)$;
 $(ECG) \perp (FGH)$; $(EDF) \perp (FBG)$.
- Droites perpendiculaires à un plan :
 $(AB) \perp (AED)$; $(FC) \perp (ADC)$.

2) Trouvons une droite orthogonale commune aux deux droites données dans chacun des cas suivants.

- (AB) est une droite orthogonale commune aux droites (FG) et (AD) .
- (EH) est une droite orthogonale commune aux droites (AB) et (DG) .
- (HG) est une droite orthogonale commune aux droites (AH) et (CF) .
- (DB) est une droite orthogonale commune aux droites (DH) et (AG) .
- (DH) est une droite orthogonale commune aux droites (CH) et (DE) .
- (HB) est une droite orthogonale commune aux droites (CF) et (AF) .

Exercice 9

1) $(EA) \parallel (FB)$ et $(FB) \parallel (GC)$ donc $(EA) \parallel (GC)$.

Considérons le carré EFGH.

$(HF) \perp (GE)$ et $(GE) \parallel (AC)$ donc $(HF) \perp (AC)$.

Considérons le carré CGHD.

$(GC) \perp (FG)$ et $(GC) \perp (GH)$.

(FG) et (GH) sont deux droites sécantes du plan (FGH) .

Donc $(GC) \perp (FGH)$.

Or $(HF) \subset (FGH)$ donc $(GC) \perp (HF)$.

$$\begin{cases} (HF) \perp (AC) \\ (FH) \perp (GC) \\ (AC) \cap (GC) = \{C\} \end{cases}$$

Par conséquent $(AGC) \perp (FH)$.

2) $E \in (AGC)$.

Exercice 10

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD et O le centre du carré.

Les faces latérales de la pyramide sont des triangles isocèles.

1) Démontrons que $(SO) \perp (CB)$.

$(SO) \perp (OC)$ et $(SO) \perp (OB)$ or (OC) et (OB) sont deux droites sécantes du plan (OCB)
 Donc $(SO) \perp (OCB)$.

$(BC) \subset (OBC)$ donc $(SO) \perp (CB)$.

2) Déduisons que $(SOI) \perp (CB)$.

SBC est un triangle isocèle en S et I milieu de $[BC]$ donc $(SI) \perp (CB)$.

$$\begin{cases} (BC) \perp (SI) \\ (BC) \perp (SO) \\ (SI) \cap (SO) = \{S\} \end{cases}$$

Donc $(SOI) \perp (CB)$.

3) $d(B, SOI) = BI$

Exercice 11

1) • Dans le triangle isocèle BAD, et I milieu $[BD]$ donc la droite (BD) est orthogonale à la droite (AI) .

- Dans le triangle isocèle BCD, I est le milieu $[BD]$, donc la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (CI) .

- La droite (BD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AIC) . Donc la droite (BD) est orthogonale au plan (ACI) .

2) La droite (BD) est orthogonale au plan (ACI) donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (AC) .

Exercice 12

ABCDEFGH est un cube, I est un point de l'arête $[GC]$. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments $[ID]$ et $[IB]$.

1) Démontrons que les droites (MN) et (AC) sont orthogonales.

D'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle IBD les droites (MN) et (DB) sont parallèles.

Les diagonales [AC] et [BD] du carré ABCD sont perpendiculaires.

$\left\{ \begin{array}{l} (DB) // (MN) \\ (DB) \perp (AC) \end{array} \right.$ on en déduit que $(MN) \perp (AC)$.

2) Démontrons que les droites (MN) et (EG) sont orthogonales.

$(DB) // (MN)$ et $(DB) // (FH)$ donc $(MN) // (FH)$.
Les diagonales [EG] et [FH] du carré EFGH sont perpendiculaires.

$\left\{ \begin{array}{l} (FH) // (MN) \\ (FH) \perp (EG) \end{array} \right.$ on en déduit que $(MN) \perp (EG)$.

3) Démontrons que la droite (MN) est orthogonale au plan (ACG).

$(GC) \perp (BC)$ et $(GC) \perp (DC)$ donc $(GC) \perp (DBC)$ car (BC) et (DC) sont deux droites sécantes du plan (DBC).

De plus $(DB) \subset (DBC)$ donc $(GC) \perp (DB)$.

Dans le carré ABCD on a $(AC) \perp (DB)$.

$\left\{ \begin{array}{l} (DB) // (GC) \\ (DB) \perp (AC) \end{array} \right.$ on en déduit que $(DB) \perp (ACG)$

car (GC) et (AC) sont deux droites sécantes du plan AGC.

$\left\{ \begin{array}{l} (DB) // (MN) \\ (DB) \perp (ACG) \end{array} \right.$ on en déduit que

$(MN) \perp (ACG)$.

4) Déduisons que (MN) et (AG) sont orthogonales.

$(MN) \perp (ACG)$ et $(AG) \subset (ACG)$
donc $(MN) \perp (AG)$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 13

ABCDEFGH est un cube.

a) Justifions que $(CG) \perp (BC)$.

BCGF est un carré, ses arêtes (BC) et (GC) sont perpendiculaires.

Justifions que $(CG) \perp (EH)$.

Dans le carré EFGH on a $(EH) // (FG)$

Dans le carré BCGF on a $(CG) \perp (FG)$

$\left\{ \begin{array}{l} (GF) // (EH) \\ (GF) \perp (GC) \end{array} \right.$ on en déduit que $(GC) \perp (EH)$.

b) Peut-on déduire que $(GC) \perp (BCE)$?

On a $\left\{ \begin{array}{l} (CG) \perp (BC) \\ (CG) \perp (EH) \\ (BC) // (EH) \end{array} \right.$

On en déduit que (CG) n'est pas orthogonale au plan (BCE).

Exercice 14

ABCD est un tétraèdre tel que $AC = AD$;
 $BC = BD$ et les triangles ACD et BCD ont même aire

M milieu de [CD] et M' milieu de [AB].

• Démontrons que (MM') est la perpendiculaire commune à (AB) et (CD).

Les triangles ACD et BCD sont superposables.
M milieu de [CD] donc [BM] est une médiane du triangle BCD et [AM] est une médiane du triangle ADC.

Les médianes [BM] et [AM] ont la même longueur.

Le triangle ABM est isocèle en M et [MM'] est la médiatrice de [AB].

Donc $(MM') \perp (AB)$.

M' milieu de [AB], donc les médianes [CM'] et [DM'] ont la même longueur. Le triangle CM'D est isocèle en M'.

(MM') médiatrice de [CD].

Donc $(MM') \perp (CD)$.

Exercice 15

ABCD est un tétraèdre régulier et E milieu de [CD].

1) Démontrons que $(CD) \perp (ABE)$.

Le triangle ACD est équilatéral et E milieu du segment [CD].

Donc $(AE) \perp (CD)$.

Le triangle BCD est équilatéral, E milieu du segment [CD].

Donc $(BE) \perp (CD)$.

(AE) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (ABE)

Donc $(CD) \perp (ABE)$.

2) Démontrons que la hauteur du triangle ABE issue de A est perpendiculaire à la face BCD.

Soit H le pied de la hauteur issue de A, donc $(AH) \perp (BE)$.

On a $(CD) \perp (ABE)$ or $H \in (ABE)$ donc $(CD) \perp (AH)$.

$$\begin{cases} (AH) \perp (BE) \\ (AH) \perp (CD) \end{cases}$$

(BE) et (CD) sont deux droites sécantes du plan (BCD) donc $(AH) \perp (BCD)$.

• Démontrons que la hauteur du triangle ABE issue de B est perpendiculaire à la face ACD .
Soit H' le pied de la hauteur de B ; $(BH') \perp (AE)$.
On a $(CD) \perp (ABE)$ or $H' \in (ABE)$ donc $(CD) \perp (BH')$.

$$\begin{cases} (BH') \perp (AE) \\ (BH') \perp (CD) \end{cases}$$

(AE) et (CD) sont deux droites sécantes du plan (ACD) donc $(BH') \perp (ACD)$.

3) Démontrons que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.

Considérons le plan BCD et H le pied de la hauteur issue de A .

$(AH) \perp (BCD)$ donc $(AH) \perp (BC)$
 $(ADH) \perp (BC)$ par conséquent $(DH) \perp (BC)$.
 $(ACH) \perp (BD)$ par conséquent $(CH) \perp (BD)$
 $(ABH) \perp (CD)$ par conséquent $(BH) \perp (CD)$
On en déduit que le pied de la hauteur issue de A est l'orthocentre de la face BCD .

4) Déduisons que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

Puisque les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes, alors le tétraèdre régulier $ABCD$ est orthocentrique (Les quatre hauteurs sont concourantes).

Exercice 16

$ABCDEFGH$ est un cube tel que $AB = 4$ cm et O est le centre du carré $EFGH$.

1) Justifions que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et (HDB) .

$O \in (EG)$ donc $(OD) \subset (EDG)$.

$(HD) \parallel (AE)$ et $(AE) \parallel (FB)$ donc $(HD) \parallel (BF)$

De plus $HD = BF$, le quadrilatère $HDBF$ est un parallélogramme.

$O \in (HF)$ donc $(OD) \subset (HDF)$ or (HDF) et (HDB) sont confondues.

$$\begin{cases} (OD) \subset (EDG) \\ (OD) \subset (HDB) \end{cases}$$

(OD) est la droite d'intersection des plans (EDG) et (HDB) .

2) a) Dessinons en vraie grandeur $HFBD$

Calculons DB .

Le triangle ABD est rectangle et isocèle en A .

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD = 4\sqrt{2}$$

$$BD = HF \text{ et } OH = OF = 2\sqrt{2}.$$

b) Calculons \widehat{HDO} et \widehat{DBH} .

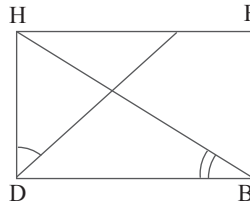
Considérons le triangle HDO rectangle en H .

$$\tan \widehat{HDO} = \frac{HO}{HD} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Considérons le triangle DBH rectangle en D .

$$\tan \widehat{DBH} = \frac{HD}{DB} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• Prouvons que les droites (HB) et (OD) sont perpendiculaires.



$$\text{Posons } \widehat{\alpha} = \text{mes } \widehat{HDO}$$

$$\widehat{\beta} = \text{mes } \widehat{DBH}$$

$$\widehat{\delta} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\alpha}$$

$$\tan \widehat{\alpha} = \tan \widehat{\delta} \text{ et } \tan \widehat{\beta} = \tan \widehat{\alpha} \text{ donc } \widehat{\beta} = \widehat{\delta}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\alpha} \text{ par suite } \widehat{\beta} + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que les droites (HB) et (DO) sont perpendiculaires.

3) a) Démontrons que $(HD) \perp (EG)$

$(HD) \perp (HE)$ et $(HD) \perp (HG)$ or (HE) et (HG) sont deux droites sécantes du plan (HGE) donc $(HD) \perp (HGE)$.

$(EG) \subset (HGE)$ donc $(HD) \perp (EG)$.

b) Démontrons que $(EG) \perp (HFB)$.

On a $(BF) \perp (FG)$ et $(BF) \perp (FE)$ or (FG) et (FE) sont deux droites sécantes du plan (FGE) .

$(EG) \subset (FGE)$ donc $(BF) \perp (EG)$

$\left\{ \begin{array}{l} (EG) \perp (HD) \\ (EG) \perp (BF) \end{array} \right.$

On en déduit que $(EG) \perp (HFB)$.

Montrons que $(EG) \perp (HB)$.

$(EG) \perp (HFB)$ et $(HB) \subset (HFB)$

donc $(EG) \perp (HB)$.

4) Démontrons que $(HB) \perp (DEG)$.

$(HB) \perp (EG)$ et $(HB) \perp (OD)$

(OD) et (EG) sont deux droites sécantes du plan (DEG) .

Donc $(HB) \perp (DEG)$.

Exercice 17

ABCD est un tétraèdre régulier.

I milieu de $[BC]$ et J milieu de $[CD]$

G centre de gravité du triangle BCD.

1) Démontrons que (BC) est orthogonale au plan (AID)

ABC est un triangle équilatéral et I milieu de $[BC]$ donc $(AI) \perp (BC)$.

BCD est un triangle équilatéral et I milieu de $[BC]$ donc $(DI) \perp (BC)$.

Or (AI) et (DI) sont deux droites sécantes du plan (ADI) donc $(BC) \perp (ADI)$.

2) Démontrons que (CD) est orthogonale au plan (AJB) .

ACD et BCD sont des triangles équilatéraux et J milieu de $[CD]$.

$\left\{ \begin{array}{l} (AJ) \perp (CD) \\ (BJ) \perp (CD) \end{array} \right.$
 $(AJ) \cap (BJ) = \{J\}$

On en déduit que $(ABJ) \perp (CD)$.

3) Démontrons que (AG) est orthogonale au plan (BCD) .

$(DI) \cap (BJ) = \{G\}$

$(BC) \perp (ADI)$ et $(AG) \subset (AID)$ donc

$(BC) \perp (AG)$.

$(CD) \perp (AJB)$ et $(AG) \subset (AJB)$ donc

$(CD) \perp (AG)$.

(BC) et (CD) sont deux droites sécantes du plan (BCD) donc (AG) est orthogonale au plan (BCD) .

Déterminons la nature du triangle ABG.

$(AG) \perp (BCD)$ et G centre de gravité du triangle (BCD) donc $(AG) \perp (BG)$ par conséquent le triangle ABG est rectangle en G.

Exercice 18

1) a) Démontrons que la droite (SQ) est perpendiculaire au plan (PTR) .

Considérons la pyramide régulière TQPRS de base PQRS.

Soit I milieu des diagonales $[PR]$ et $[SQ]$.

$(SI) \perp (PI)$ et $(SI) \perp (TI)$.

(TI) et (PI) sont deux droites sécantes du plan (PTR) , donc (SI) est perpendiculaire au plan (PTR) . D'où (SQ) est perpendiculaire au plan (PTR) .

b) • Justifions que les plans (SQR) et (PTR) sont perpendiculaires.

$(SQ) \perp (PTR)$ et $(SQ) \subset (SQR)$ donc

$(SQR) \perp (PTR)$

2) a) Démontrons que les plans (STQ) et (PTR) sont perpendiculaires.

Considérons la pyramide régulière STPQR de sommet T, de base PQRS et I milieu des diagonales de PQRS.

$(SQ) \perp (PR)$ et $(TI) \perp (PR)$ or (SQ) et (TI) sont deux droites sécantes du plan (SQT) donc $(PR) \perp (SQT)$.

On a $(PR) \subset (PTR)$ donc $(PTR) \perp (SQT)$.

b) • Déterminons la droite d'intersection des plans (PTR) et (SQT)

(PTR) et (SQT) sont perpendiculaires suivant la droite passant par T et perpendiculaire respectivement à (SQ) et (PR) .

La droite d'intersection des plans (PTR) et (SQT) est la droite (TU) .

3) Démontrons que les plans (SRU) et (PQT) sont parallèles.

$(PT) \parallel (RU)$ et $(PQ) \parallel (RS)$.

(PT) et (PQ) sont deux droites sécantes du plan (PQR)

(RU) et (RS) sont deux droites sécantes du plan (SRU)

On en déduit que les plans (SRU) et (PQT) sont parallèles.

Exercice 19

ABCD est un tétraèdre

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$$

$$I = \{(B, 1); (C, 1)\} \quad J = \{(D, 1); (C, 1)\}$$

$$K = \{(B, 1); (A, 1)\} \quad L = \{(A, 1); (D, 1)\}$$

$$M = \{(A, 1); (C, 1)\} \quad N = \{(B, 1); (D, 1)\}$$

1) Démontrons que les droites (IL); (KJ) et (MN) sont concourantes.

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$$

Théorème des barycentres partiels.

$$G = \text{bar}\{(I, 2); (L, 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(K, 2); (J, 2)\}$$

$$G = \text{bar}\{(M, 2); (N, 2)\}$$

Les droites (IL); (KJ) et (MN) sont concourantes en G.

2) a) Déterminons la nature du quadrilatère KIJL (Propriété de la droite des milieux)

Considérons le triangle ABC.

$$(KI) \parallel (AC) \text{ et } KI = \frac{1}{2} AC.$$

Considérons le triangle ACD

$$(JL) \parallel (AC) \text{ et } JL = \frac{1}{2} AC.$$

On en déduit que (KI) // (JL) et KI = JL

En considérant les triangles BCD et BDA on montre que (KL) // (IJ) et KL = IJ.

$$\begin{cases} (KL) \parallel (IJ) \\ (LJ) \perp (IK) \\ KL = IJ = JL = IK \end{cases}$$

Le quadrilatère KIJL est un losange.

De même on montre que les quadrilatères KMJN et INLM sont des losanges.

c) Démontrons que les droites (KJ) et (IL) sont orthogonales.

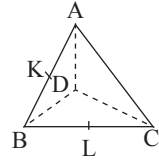
Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires, donc les droites (KJ) et (IL) sont orthogonales.

3) Démontrons que la droite (KJ) est orthogonale au plan (MIN).

$$\begin{cases} (KJ) \perp (IL) \\ (KJ) \perp (MN) \end{cases}$$

(IL) et (MN) sont deux droites sécantes du plan (MIN) donc la droite (KJ) est orthogonale au plan (MIN).

Exercice 20



1) (AB) ⊥ (KC) et (AB) ⊥ (KD).

On a : (AB) ⊂ (LAB)

et (AB) ⊥ (KC) et

(AB) ⊥ (KD)

et (KC) et (KD) sont deux droites sécantes de (KCD)

donc (LAB) est perpendiculaire au plan (KCD).

2) (ABC) = (LAB) d'après la question 1) (KCD) est perpendiculaire au plan (ABC).

En utilisant le même raisonnement avec la droite (AB) on démontre que (KCD) est perpendiculaire au plan (ABD).

3) (BC) ⊥ (LA) et (BC) ⊥ (LD)

Donc le plan (DAL) est perpendiculaire au plan (ABC).

En utilisant la droite (BC) on démontre que (DAL) est perpendiculaire à (BCD).

4) Les arêtes (AB) et (DC) sont opposées.

(AB) ⊂ (ABC) et (CD) ⊂ (KCD) et on sait que les plans (ABC) et (KCD) sont perpendiculaires.

D'où (AB) est orthogonale au plan (KCD).

Ainsi (AB) est orthogonale à toute droite du plan (KCD) en particulier à (CD).

Exercice 21

ABCDEFGH est un cube.

I le point d'intersection de (AH) et de (DE).

1) a) Montrons que les plans (AGI) et (DEG) sont perpendiculaires.

Les diagonales (AH) et (DE) du carré AEHD donc (AH) ⊥ (DE).

Soit J le point d'intersection des diagonales (BG) et (CF) du carré BCGF

On a (DE) ⊥ (IJ)

$$\begin{cases} (DE) \perp (IJ) \\ (DE) \perp (AH) \end{cases} \Rightarrow (DE) \perp (AGI) \text{ car } (IJ) \text{ et } (AH) \text{ sont deux droites sécantes du plan } (AGI).$$

(DE) ⊥ (AGI) et (DE) ⊂ (DEG) ⇒ (AGI) ⊥ (DEG).

b) Déterminons l'intersection de ces deux plans.

On a : (DE) ∩ (AH) = {I} et

(DEG) ∩ (AGI) = (GI).

L'intersection des plans (DEG) et (AGI) est la droite (GI).

2) a) Démontrons que A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (DEG).

(AA') ⊥ (IG) car A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (GI).

Or (DE) ⊥ (AGI) et A' ∈ (AIG) donc (DE) ⊥ (AA').

$$\begin{cases} (DE) \perp (AA') \\ (IG) \perp (AA') \end{cases} \Rightarrow (AA') \perp (DGE).$$

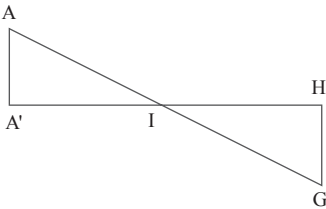
On en déduit que A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (DGE).

b) Démontrons que les triangles AA'I et GHI sont semblables.

Dans le plan (AGI) les triangles AA'I et GHI sont rectangles respectivement en A' et H.

De plus leurs angles en I sont opposés par le sommet, donc les triangles AA'I et GHI sont semblables.

c) Exprimons en fonction du réel a la distance du point A au plan (DEG).



On a $\frac{AA'}{AI} = \frac{GH}{GI}$ d'où $AA' = AI \times \frac{GH}{GI}$

$GH = a$; $AI = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ car dans le triangle ADH rectangle en D on a $AH^2 = AD^2 + HD^2$ or $AD = HD = a$.

Dans le triangle GHI rectangle en H ;

$$GI^2 = GH^2 + HI^2$$

$$GI^2 = a + \frac{a^2}{2} \text{ donc } GI = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{D'où } AA' = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \times a\right) \div \left(a\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$AA' = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

d) Démontrons que $IA' = \frac{1}{3} IG$.

Dans le triangle AA'I rectangle en I on a

$$IA'^2 = AI^2 - AA'^2$$

$$IA'^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} \Rightarrow IA' = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Or } GI = a\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et } \frac{1}{3} \left(a\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{6}} \text{ donc}$$

$$IA' = \frac{1}{3} IG.$$

IV.4. Situation complexe

Exercice 22

1) Démontrons que le triangle FIJ est isocèle en F. Les triangles FEJ et FBI sont rectangles respectivement en E et B.

Considérons le triangle FBI.

$$FI^2 = BF^2 + BI^2$$

Considérons le triangle FEJ

$$FJ^2 = EF^2 + EJ^2$$

$$\text{Ainsi } FJ = FI = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

F, I et J sont trois points non alignés tels que $FJ = FI$ donc le triangle FIJ est isocèle en F.

• Déduisons que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

FIJ est un triangle isocèle en F et K le milieu de [IJ].

(FK) est la hauteur issue de F donc la droite

(FK) est orthogonale à la droite (IJ).

2) Démontrons que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

Le triangle GIJ est isocèle en G et K milieu de [IJ].

(GK) est la hauteur issue de G donc la droite

(GK) est orthogonale à la droite (IJ).

$$\begin{cases} (IJ) \perp (FK) \\ (IJ) \perp (GK) \end{cases}$$

(FK) et (GK) sont deux droites sécantes du plan (FGK) donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

L'élève a raison.

Leçon 14 Composée de transformations du plan

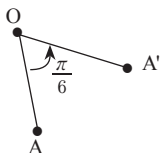
IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

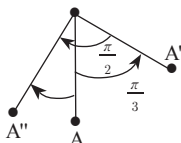
1. b ; 2. c.

Exercice 2



Exercice 3

1)
2)



3) Angle de la rotation qui transforme A en A''

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Exercice 4

- $r_1 \circ r_2 = R_{(O; \frac{2\pi}{3})}$ car $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \neq 0$
- $r_1 \circ r_3 = \text{Id}_p$ car $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $r_2 \circ r_3 = R\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ car $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 5

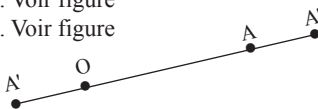


Exercice 6

1. a ; 2. b ; 3. c

Exercice 7

1. Voir figure
2. Voir figure



3. Le rapport de cette homothétie est $-\frac{1}{2} \times (-3) = \frac{3}{2}$.

Exercice 8

- $h_1 \circ h_2 = H_{(A; \frac{1}{3})}$ car $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $h_1 \circ h_3 = \text{Id}_p$ car $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

Exercice 9

- $h_1 \circ h_2 = S_\Omega$ car $-\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = -1$
- $h_1 \circ h_4 = H_{(\Omega; -6)}$ car $-\frac{3}{5} \times 10 = -6$
- $h_1 \circ h_3 = H_{(\Omega; \frac{12}{5})}$ car $-\frac{3}{5} \times (-4) = \frac{12}{5}$

IV.2. Exercices de renforcement

Exercice 10

$r_1 = r_{(O; \frac{2\pi}{3})}$, $r_2 = r_{(O; \frac{\pi}{6})}$, et $r_3 = r_{(O; \frac{\pi}{2})}$.

a) $f = r_2 \circ r_1$: Composée de deux rotations de centre O.

► d'où f est une rotation de centre O.

► De plus, $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \neq 0$.

Donc $f = R_{(O; \frac{5\pi}{6})}$.

b) $f \circ r_2 = r_1$

► $f \circ r_2 \circ r_2^{-1} = r_1 \circ r_2^{-1}$ d'où $f = r_1 \circ r_2^{-1}$ avec $r_2^{-1} = r_{(O; -\frac{\pi}{6})}$

► f est la composée de deux rotations de même centre O d'où f est une rotation de centre O.

► De plus, $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Donc $f = R_{(O, \frac{\pi}{3})}$.

c) $r_3 = r_1 \circ f \circ r_2$

▶ $r_3 \circ r_2^{-1} = r_1 \circ f \circ r_2 \circ r_2^{-1} = r_1 \circ f$

▶ $r_1^{-1} \circ r_3 \circ r_2^{-1} = r_1^{-1} \circ r_1 \circ f = f$: composée de trois rotations de même centre O.

▶ D'où f est une rotation de centre O avec

$$r_1^{-1}(O; -\frac{2\pi}{3}) \text{ et } r_2^{-1}(O; -\frac{\pi}{6})$$

▶ De plus, $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \neq 0$.

Donc $f = R_{(O, -\frac{\pi}{3})}$.

Exercice 11

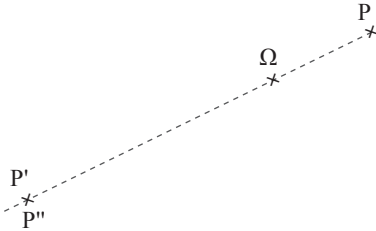
Ω et P et $h_{(\Omega; 2)}$, $h'_{(\Omega; -2)}$

1) Construction de $P'' = h \circ h'(P)$;

On a : $2 \times (-1) = -2$ d'où $P'' = H_{(\Omega; -2)}(P)$

C'est-à-dire $\overrightarrow{\Omega P''} = 2 \cdot \overrightarrow{\Omega P}$.

2) La composée de deux homothéties de même est commutative d'où $P''' = h' \circ h(P) = P$.



Exercice 12

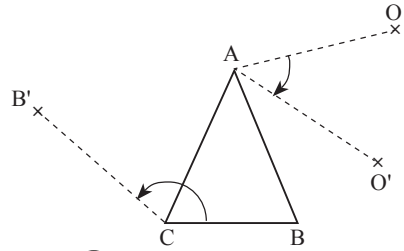
ABC triangle équilatéral ; O un point du plan

1) Construction de $O' = r_{(A; \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A; -\frac{2\pi}{3})}(O)$ et $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \neq 0$.

$$O' = r_{(A; -\frac{\pi}{3})}(O) \left\{ \begin{array}{l} AO = AO' \\ (\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AO'}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

2) Construction de $B' = r_{(C; \frac{\pi}{2})} \circ r_{(C; \frac{\pi}{3})}(B)$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \neq 0$.

$$B' = r_{(C; \frac{5\pi}{6})}(B) \left\{ \begin{array}{l} CB = CB' \\ (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CB'}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$



Exercice 13

ABC équilatéral direct et G centre de gravité. $r(A) = B$ et $r'(A) = C$ des rotations de centre G.

1) On a : $r_{(G; \frac{2\pi}{3})}$ et $r'_{(G; -\frac{2\pi}{3})}$ et $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 0$

d'où $r \circ r' = Id_p$

r et r' de même centre, donc $r \circ r' = r' \circ r$

2) On a : $r \circ r' = r' \circ r = Id_p$

Donc $r' = r^{-1}$ et $(r^{-1})' = r$

Exercice 14

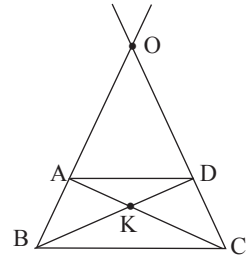
1) a) $\left\{ \begin{array}{l} (AD) \parallel (BC) \\ (AB) \cap (DC) = \{O\} \end{array} \right.$ d'où il existe une

homothétie h telle que $h(A) = B$ et $h(D) = C$.

b) Soit k le rapport, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} |k| = \frac{BC}{AD} \\ \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ même sens} \end{array} \right. \text{ donc } k = \frac{BC}{AD}$$

et le centre est O.



2) a) $\left\{ \begin{array}{l} (AD) \parallel (BC) \\ (AC) \cap (DB) \text{ non vide} \end{array} \right.$ d'où il existe

une homothétie h' telle que $h'(A) = C$ et $h'(D) = B$.

b) Soit k' le rapport, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} |k'| = \frac{BC}{AD} \\ \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sens contraire} \end{array} \right. \text{ d'où } k' = -\frac{BC}{AD}$$

et le centre $(AC) \cap (DB) = \{K\}$.

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 15

1) Dans le carré ABCD indirect,

$$\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ il existe une rotation}$$

r_A telle que $r_A(B) = D$.

2) Dans le carré AB'C'D indirect,

$$\begin{cases} AB' = AD' \\ (\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AD'}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ il existe une rotation}$$

r_A telle que $r_A(B') = D'$.

3) Dans le carré AB''C''D'' indirect,

$$\begin{cases} AB'' = AD'' \\ (\overrightarrow{AB''}; \overrightarrow{AD''}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ il existe une}$$

rotation r_A telle que $r_A(B'') = D''$.

Ainsi, dans la rotation r_A de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$ on a : $r_A(BB'B'') = DD'D''$.

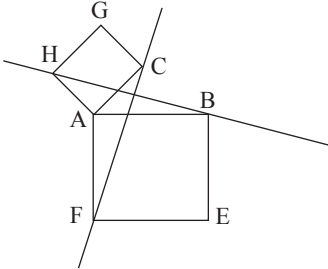
De plus, B, B' et B'' sont alignés et r_A conserve l'alignement : Donc D, D' et D'' sont alignés.

Exercice 16

1) Dans le carré ABEF direct,

$$\begin{cases} AF = AB \\ (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ il existe une rotation } r_A$$

telle que $r_A(F) = B$



2) Dans le carré ACGH direct,

$$\begin{cases} AC = AH \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ il existe une rotation } r_A$$

telle que $r_A(C) = H$.

Par $r_{(A; \frac{\pi}{2})}$ (l'image de de la droite (FC) est la droite (BH).

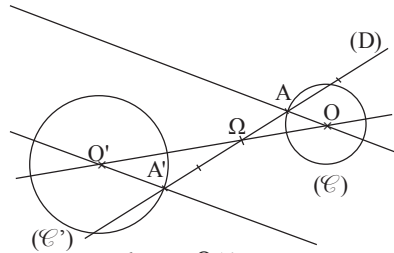
Donc $(CF) \perp (BH)$

Exercice 17

1) Programme de construction de

$$(\mathcal{C}') = h(\mathcal{C}) : \begin{cases} O' \in (A'O') \parallel (AO) \\ O' \in (\Omega O) \end{cases}$$

(\mathcal{C}') cercle de centre O' passant par A' .



$$2) \text{ Rapport : } \begin{cases} |k| = \frac{\Omega A'}{\Omega A} \\ \overrightarrow{\Omega A} \text{ et } \overrightarrow{\Omega A'} \text{ sens contraire} \end{cases}$$

Donc $k = -2$.

3) $OA = 2$, on a : le rayon r' de (\mathcal{C}') est tel que $r' = |k| \times 2 : r' = 4$.

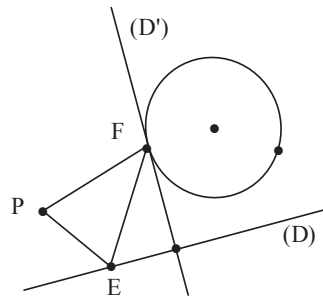
Exercice 18

- F est l'image de E par la rotation r de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

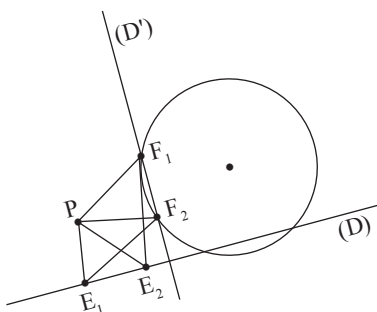
- Soit (D') l'image de (D) par la rotation r .

- Si (D') ne coupe pas (C) il n'y a pas de solution.

- Si (D') coupe (C) en un point F alors il y a une solution. E est l'image de F par la rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

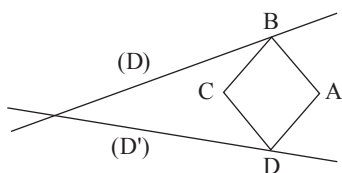


- Si (D') coupe (C) en deux points F_1 et F_2 alors il y a deux solutions où E_1 et E_2 sont les images respectives de F_1 et F_2 par la rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



Exercice 19

Considérons la figure déjà construite.



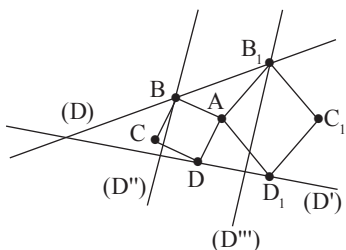
Sur la figure nous constatons que B est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Il suffit de trouver la position de l'un des points B ou D pour déterminer la position de l'autre. D'où le programme suivant.

Soit (D'') l'image de la droite (D') par la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Si (D'') coupe (D) en un point il y a une solution. Notons $\{B\} = (D'') \cap (D)$.

Alors $D = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B)$ et $D \in (D')$ car $B \in (D'')$.

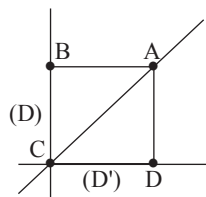


Lorsqu'on utilise l'image de (D') par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on obtient une deuxième possibilité. (voir figure ci-dessus).

En définition

Si (D) et (D') font un angle de $\frac{\pi}{2}$, il y a une

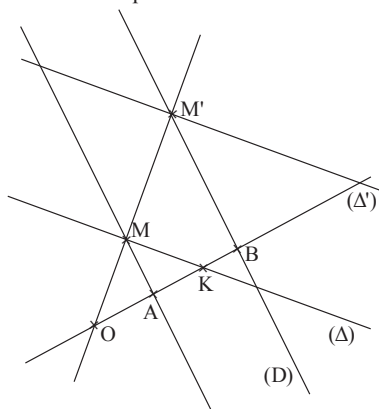
solution si A est sur la bissectrice de l'angle formé par les deux droites. (voir figure ci-dessous).



Si (D) et (D') ne font pas un angle de $\frac{\pi}{2}$, il y a deux solutions.

Exercice 20

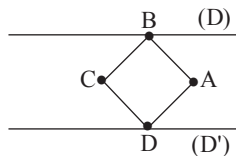
Même méthode que dans l'exercice 23.



- Choisir un point M sur (Δ) puis tracer la droite (OM)
- Tracer (D) , la parallèle à (AM) passant par B.
- $(D) \cap (OM) = \{M'\}$
- (Δ') image de (Δ) par h est la parallèle à (Δ) passant par M'

Exercice 21

Considérons une figure déjà construite



Sur la figure nous constatons que B est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Il suffit de trouver la position de l'un des points

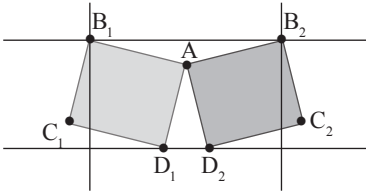
B ou D pour déterminer la position de l'autre.
D'où le programme suivant.

Soit (D') l'image de la droite (D) par la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Si (D') coupe (D) en un point il y a une solution.
Notons $\{B\} = (D') \cap (D)$.

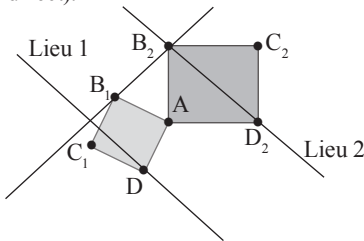
Alors $D = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B)$ et $D \in (D')$ car
 $B \in (D')$.

Lorsqu'on utilise l'image de (D') par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on obtient une deuxième possibilité. (voir figure ci-dessus).

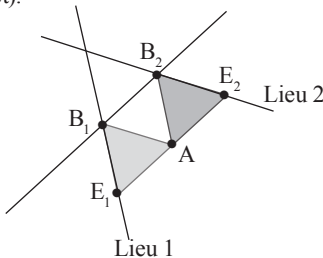


Exercice 22

1. Lorsque que B parcourt la droite (Δ) alors D parcourt l'image de (Δ) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$ (sens direct) ou $-\frac{\pi}{2}$ (sens indirect).



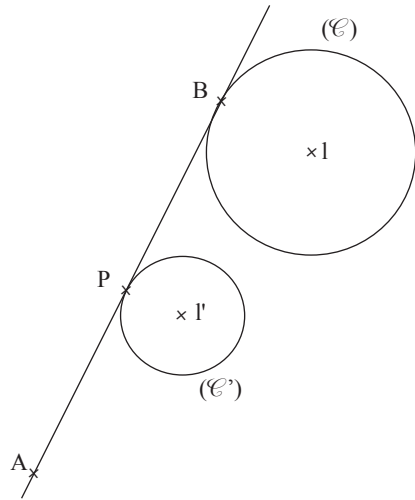
1. Lorsque que B parcourt la droite (Δ) alors D parcourt l'image de (Δ) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$ (sens direct) ou $-\frac{\pi}{2}$ (sens indirect).



Exercice 23

• P milieu de $[AB]$ d'où il existe une homothétie h de centre A de rapport $\frac{1}{2}$ telle que $h(B) = P$.

• B décrit (\mathcal{C}) , alors le point P décrit le cercle (\mathcal{C}') , homothétique de (\mathcal{C}) par $h_{(A; 0,5)}$.



IV.4. Situation complexe

Exercice 24

1) La nature de la figure modélise l'existence d'une rotation R d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui applique (b) sur (a)

2) Les figures sont homothétiques, existence d'une homothétie H de rapport 3

3) La construction de la figure s'est faite sur la base de composée de de R et de H, ainsi :
La flèche \longrightarrow indique « ...suivie de... »

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| (b) \longrightarrow R | (a) \longrightarrow H (1) |
| (a) \longrightarrow R | (d) \longrightarrow H (2) |
| (d) \longrightarrow R | (c) \longrightarrow H (3) |
| (c) \longrightarrow R | (b) \longrightarrow H (4) |

Leçon 15 Statistique à une variable

IV. Exercices

IV.1. Exercices de fixation

Exercice 1

| Classes | [150 ; 160[| [160 ; 170[| [170 ; 180[| Total |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------|
| Effectif | 13 | 20 | 17 | 50 |
| Fréquence | 26 | 40 | 34 | 100 |

Exercice 2

| Classes | [1,50 ; 1,60[| [1,60 ; 1,65[| [1,65 ; 1,70[| [1,70 ; 1,85[| Total |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| Effectif | 12 | 6 | 14 | 18 | 50 |

Exercice 3

Calcul des centres, amplitudes et densités de chaque classe

| Classes | [1 ; 5[| [5 ; 8[| [8 ; 13[| [13 ; 14[| [14 ; 21[|
|------------|---------|---------|----------|-----------|-----------|
| Effectifs | 12 | 28 | 32 | 24 | 8 |
| centres | 3 | 6,5 | 10,5 | 13,5 | 17,5 |
| amplitudes | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 |
| Densités | 3 | 9,33 | 6,4 | 24 | 1,14 |

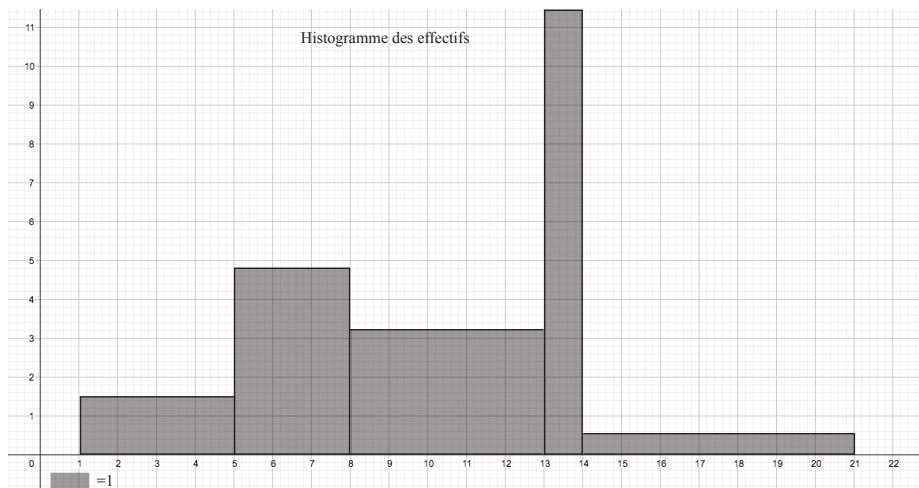
Exercice 4

| Classes | [0 ; 40[| [40 ; 60[| [60 ; 70[| [70 ; 80[| [80 ; 100[|
|------------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Effectifs | 10 | 15 | 20 | 35 | 20 |
| Centres | 20 | 50 | 65 | 75 | 90 |
| Amplitudes | 40 | 20 | 10 | 10 | 20 |
| Densités | 0,25 | 0,75 | 2 | 3,5 | 1 |

Exercice 5

Réponds par vrai ou faux pour chacune des affirmations suivantes.

| Classes | [1 ; 5[| [5 ; 8[| [8 ; 13[| [13 ; 14[| [14 ; 21[| total |
|------------------------------|---------|---------|----------|-----------|-----------|-------|
| Amplitudes | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 | 20 |
| Largeurs des rectangles (cm) | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 | 20 |
| Hauteur des rectangles (cm) | 1,5 | 4,665 | 3,2 | 12 | 0,57 | |
| Densités | 3 | 9,33 | 6,4 | 24 | 1,14 | |



Exercice 6

| Affirmations | Vrai | Faux |
|--|------|------|
| Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est égale à l'effectif de la classe correspondante. | | × |
| Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante si les classes ont des amplitudes égales. | | × |
| Dans un histogramme, l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante | × | |
| Dans un histogramme, la hauteur de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe correspondante | | × |
| Dans un histogramme, l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante | × | |

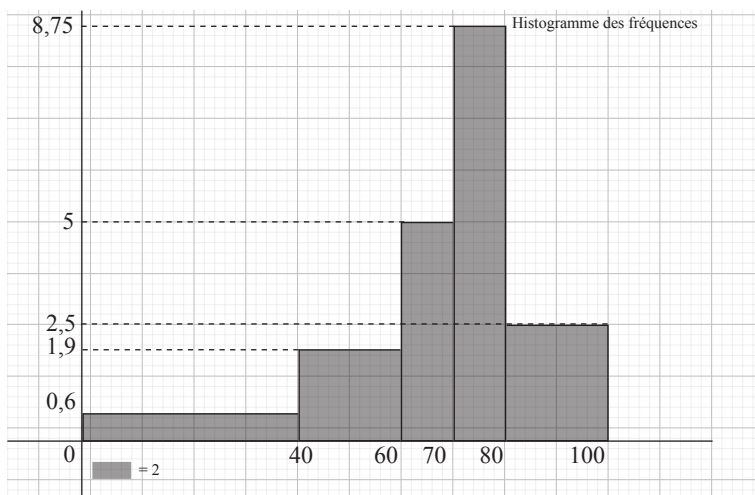
Exercice 7

- a) Le polygone des effectifs est obtenu en joignant les milieux successifs des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme.
 b) Le polygone des fréquences est obtenu en joignant les milieux successifs des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme.

Exercice 8

Réponds par vrai ou faux pour chacune des affirmations suivantes.

| Classes | [0 ; 40[| [40 ; 60[| [60 ; 70[| [70 ; 80[| [80 ; 100[| Total |
|----------------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------|
| fréquences | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,35 | 0,2 | 1 |
| Largeur (cm) | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | |
| Longueurs (cm) | 0,6 | 1,9 | 5 | 8,75 | 2,5 | |
| Densités | 0,25 | 0,75 | 2 | 3,5 | 1 | |
| Amplitudes | 40 | 20 | 10 | 10 | 20 | |

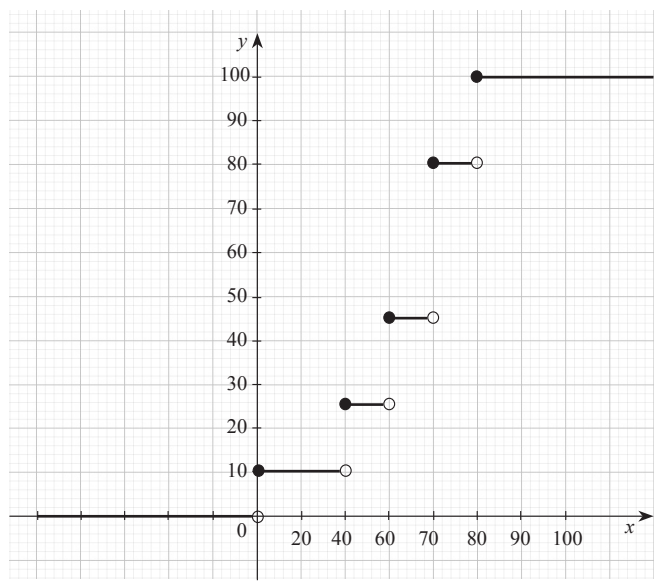
**Exercice 9**

Construction de la courbe cumulative des effectifs de la série statistique de l'exercice 4.

| Classes | [0 ; 40[| [40 ; 60[| [60 ; 70[| [70 ; 80[| [80 ; 100[|
|---------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Effectifs | 10 | 15 | 20 | 35 | 20 |
| Effectif cumulé croissant | 10 | 25 | 45 | 80 | 100 |

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

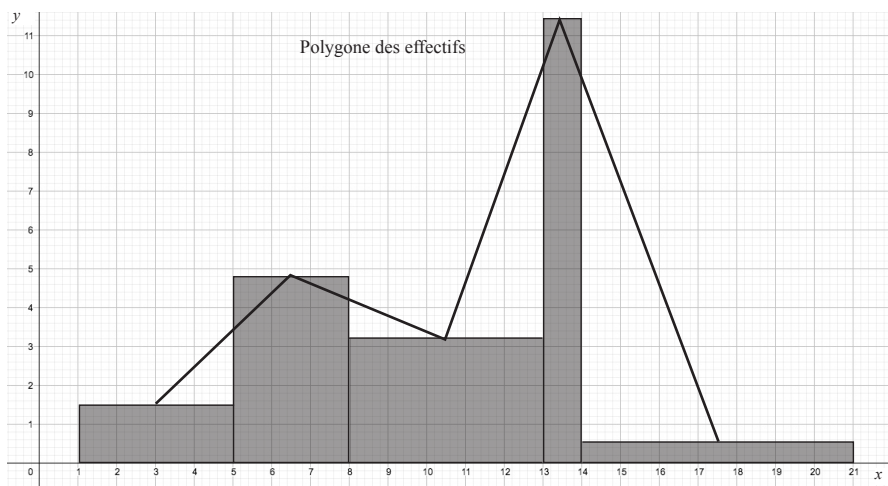
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, F(x) = 0 \\ \forall x \in]0; 40[, F(x) = 10 \\ \forall x \in]40; 60[, F(x) = 25 \\ \forall x \in]60; 70[, F(x) = 45 \\ \forall x \in]70; 80[, F(x) = 80 \\ \forall x \in]80; +\infty[, F(x) = 100 \end{cases}$$



Exercice 10

Construction du polygone des effectifs de la série statistique de l'exercice 12.

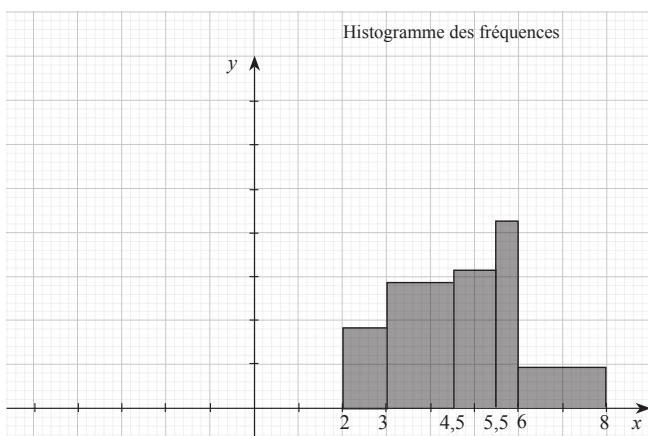
| Classes | [1 ; 5[| [5 ; 8[| [8 ; 13[| [13 ; 14[| [14 ; 21[| total |
|------------------------------|---------|---------|----------|-----------|-----------|-------|
| Amplitudes | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 | 20 |
| Largeurs des rectangles (cm) | 4 | 3 | 5 | 1 | 7 | 20 |
| Hauteur des rectangles (cm) | 1,5 | 4,665 | 3,2 | 12 | 0,57 | |
| Densités | 3 | 9,33 | 6,4 | 24 | 1,14 | |



Exercice 11

Construction de l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

| | | | | | |
|---------------|---------|-----------|-------------|-----------|---------|
| Modalité | [2 ; 3[| [3 ; 4,5[| [4,5 ; 5,5[| [5,5 ; 6[| [6 ; 8[|
| fréquence | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0,15 |
| Amplitude | 1 | 1,5 | 1 | 0,5 | 2 |
| Hauteurs (cm) | 1,9 | 2,9 | 3,1 | 2,5 | 0,9 |
| Largeur (cm) | 1 | 1,5 | 1 | 0,5 | 2 |
| Densités | 15 | 23,33 | 25 | 20 | 7,5 |



Exercice 12

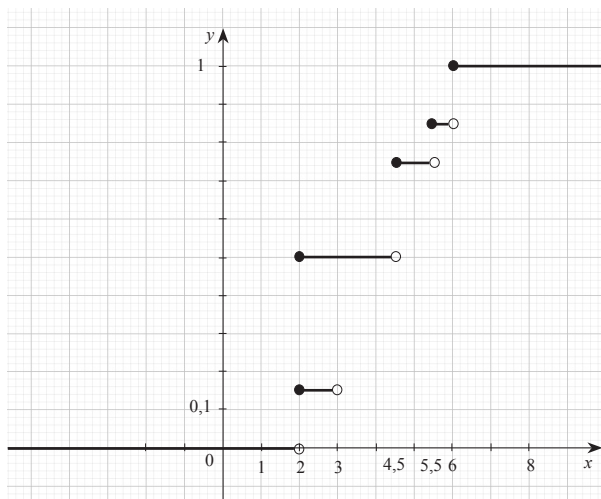
Construction de la courbe cumulative des effectifs de la série statistique de l'exercice 4.

| Modalité | [2 ; 3[| [3 ; 4,5[| [4,5 ; 5,5[| [5,5 ; 6[| [6 ; 8[|
|--------------------------------|---------|-----------|-------------|-----------|---------|
| Fréquence | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0,15 |
| Fréquences cumulés croissantes | 0,15 | 0,5 | 0,75 | 0,85 | 1 |

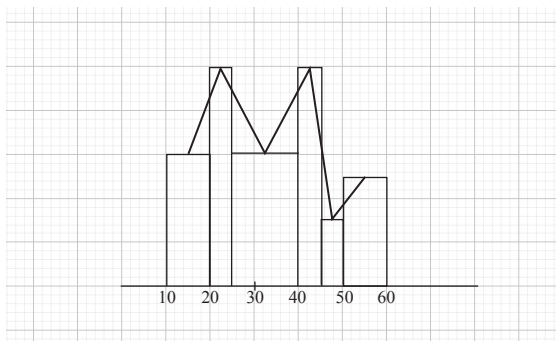
Construction de la courbe cumulative des fréquences

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 2[, F(x) = 0 \\ \forall x \in]2 ; 3[, F(x) = 0,15 \\ \forall x \in]3 ; 4,5[, F(x) = 0,5 \\ \forall x \in]4,5 ; 5,5[, F(x) = 0,75 \\ \forall x \in]5,5 ; 6[, F(x) = 0,85 \\ \forall x \in]6 ; +\infty[, F(x) = 1 \end{cases}$$



Exercice 13



Exercice 14

Réponds par vrai ou faux pour chacune des affirmations suivantes.

| Affirmations | Réponses |
|--|----------|
| Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est une classe ayant le plus grand effectif. | Faux |
| Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est une classe ayant la plus grande densité. | Vrai |
| Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude est une classe ayant le plus grand effectif. | Vrai |
| Toute série statistique regroupée en classe d'amplitudes différentes a une unique classe modale | Faux |
| Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude est une classe ayant la plus grande fréquence. | Vrai |

Exercice 15

- 1) Vrai 2) Faux 3) Vrai

Exercice 16

1) Le premier quartile est :

- a) $Q_1 = 11$ b) $Q_1 = 13$ c) $Q_1 = 8$

2) Le deuxième quartile est :

- a) $Q_2 = 12$ b) $Q_2 = 9$ c) $Q_2 = 10$

3) Le troisième quartile est :

- a) $Q_3 = 15$ b) $Q_3 = 14$ c) $Q_3 = 12$

4) La médiane est :

- a) $M_e = 10$ b) $M_e = 9$ c) $M_e = 12$

Exercice 17

La classe modale est [50 ; 65[car elle a la plus grande densité.

Exercice 18

Calcul de la moyenne \bar{X} .

| | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Classes | [40 ; 50[| [50 ; 65[| [65 ; 75[| [75 ; 80[| [80 ; 100[|
| Effectifs | 15 | 35 | 25 | 10 | 15 |
| Centres | 45 | 57,5 | 70 | 77,5 | 90 |

$$\bar{X} = \frac{15 \times 45 + 35 \times 57,5 + 25 \times 70 + 10 \times 77,5 + 15 \times 90}{100} = \frac{6562,5}{100} = 65,625$$

Exercice 19

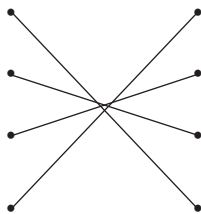
Colonne A

Variance

Ecart interquartile

Ecart-type

Ecart moyen



Colonne B

$$\frac{n_1|c_1 - \bar{x}| + n_2|c_2 - \bar{x}| + \dots + n_p|c_p - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

$$\sqrt{V}$$

$$Q_3 - Q_1$$

$$\frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(c_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Exercice 20

1)

| Temps (en min) | [0;20[| [20;40[| [40;60[| [60;100[| [100;140[| [140;200[| Total |
|-----------------|--------|---------|---------|----------|-----------|-----------|--------|
| Effectifs n_i | 35 | 41 | 30 | 12 | 5 | 2 | 125 |
| Centres c_i | 10 | 30 | 50 | 80 | 120 | 170 | |
| $n_i c_i^2$ | 3500 | 36900 | 75000 | 76800 | 72000 | 57800 | 322000 |

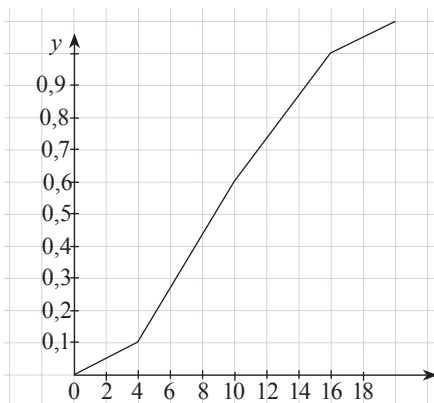
2) Calcul de la variance et l'écart-type

- Variance : $V = \frac{322000}{125} - (39,84)^2 = 988,7744$
- Ecart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{988,7744} = 31,44$

Exercice 21

La courbe ci-contre représente le polygone des fréquences cumulées croissantes des notes obtenues par une classe de 18 élèves.

- 1) Détermine la médiane et les quartiles de cette série statistique.
- 2) Donne la valeur de l'écart interquartile. Interprète le résultat.



- 1) La médiane est 9.
Le quartile 1 est 6,5
Le quartile 3 est 13

2) quartile 3 - quartile 1 = 13 - 6,5 = 6,5.

Exercice 22

1) Détermination de la classe modale

| | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Classes | [40 ; 50[| [50 ; 65[| [65 ; 75[| [75 ; 80[| [80 ; 100[|
| Effectifs | 15 | 35 | 25 | 10 | 15 |
| Densité | 1,5 | 2,33 | 2,5 | 2 | 0,75 |

La classe modale est [65 ; 75[

2) Calcule la moyenne

$$\bar{X} = \frac{15 \times 45 + 35 \times 57,5 + 25 \times 70 + 10 \times 77,5 + 90 \times 15}{100} = 65,625$$

3) Calcule de la médiane M_c .L'effectif total est $N = 100$, la médiane M_c a pour effectif cumulé $\frac{N}{2} = 50$

$$\text{Donc } \frac{M_c - 50}{50 - 15} = \frac{65 - 50}{50 - 15}$$

$$M_c = 65.$$

Interprétation : la moitié des téléphones ont un prix inférieur ou égal à 65000 .

4) Calcul du premier Q_1 et du troisième quartile Q_3 .- L'effectif total est $N=100$, le premier quartile Q_1 a pour effectif cumulé croissant $\frac{N}{4} = 25$.

$$\text{Donc } \frac{Q_1 - 50}{25 - 15} = \frac{65 - 50}{25 - 15} \text{ d'où } Q_1 = 54,286.$$

- L'effectif total est $N = 100$, le troisième quartile Q_3 a pour effectif cumulé croissant $\frac{3N}{4} = 75$.

$$\text{Donc } \frac{Q_3 - 65}{75 - 50} = \frac{75 - 65}{75 - 50} \text{ d'où } Q_3 = 75$$

5) Calcul de l'écart interquartile

$$\text{L'écart interquartile est : } Q_3 - Q_1 = 75 - 54,286 = 20,714$$

Interprétation :

Exercice 231) Calcul de la moyenne \bar{X}

| | | | | |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Classes | [150 ; 160[| [160 ; 170[| [170 ; 180[| [180 ; 190[|
| Effectif | 3 | 23 | 79 | 7 |
| Centres (c_i) | 155 | 165 | 175 | 185 |

$$\bar{X} = \frac{3 \times 155 + 23 \times 165 + 76 \times 175 + 7 \times 185}{112} = 168,35$$

2) Complète le tableau

| Classes | n_i | $c_i - \bar{X}$ | $(c_i - \bar{X})^2$ | $n_i(c_i - \bar{X})^2$ |
|--------------|-------|-----------------|---------------------|------------------------|
| [150 ; 160[+ | 3 | -13,35 | 178,2225 | 534,6675 |
| [160 ; 170[| 23 | -3,35 | 11,2225 | 258,1175 |
| [170 ; 180[| 79 | 6,65 | 44,2225 | 3493,5775 |
| [180 ; 190[| 7 | 16,65 | 277,2225 | 1940,5575 |

3) Calcul de la variance V.

$$V = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{534,6675 + 258,1175 + 1940,5575}{112} - \frac{6226,92}{112} = 55,6$$

4) Calcul de l'écart-type σ .

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{55,6} = 7,46$$

Exercice 24

1) Complète le tableau

| Notes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| Nombre d'élèves | 15 | 24 | 52 | 80 | 92 | 132 | 154 | 42 | 21 | 2 |
| Effectif cumulé croissant | 15 | 39 | 91 | 171 | 263 | 395 | 549 | 591 | 612 | 614 |
| Fréquence cumulée croissante en % | 2,44 | 6,35 | 14,82 | 27,85 | 42,83 | 64,33 | 89,41 | 96,25 | 99,67 | 0,33 |

2) Calcul du premier quartile Q_1

Le premier quartile Q_1 a pour effectif cumulé croissant 154.

$$\text{Donc } \frac{Q_1 - 3}{154 - 91} = \frac{4 - 3}{171 - 91} \text{ d'où } Q_1 = 4.$$

3) Calcul du troisième quartile Q_3 .

Le troisième quartile Q_3 a pour effectif cumulé croissant 461

$$\text{Donc } \frac{Q_3 - 6}{461 - 395} = \frac{7 - 6}{549 - 395} \text{ d'où } Q_3 = 7.$$

4) Calcul de l'écart interquartile

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$.

Interprétation : Les valeurs centrales sont éloignées de la médiane

IV.3. Exercices d'approfondissement

Exercice 25

1) Calcul du chiffre d'affaire moyen.

| Chiffre d'affaire | [0;2,5[| [2,5;5[| [5;10[| [10;25[| [25;50[| [50;100[|
|----------------------|---------|---------|--------|---------|---------|----------|
| Nombre d'entreprises | 137 | 106 | 112 | 154 | 100 | 33 |
| Centres | 1,25 | 3,75 | 7,5 | 12,5 | 37,5 | 75 |

$$\bar{X} = \frac{137 \times 1,25 + 106 \times 3,75 + 112 \times 7,5 + 154 \times 12,5 + 100 \times 37,5 + 33 \times 75}{642} = 14,889$$

2) Construction de la courbe cumulative des effectifs

| Chiffre d'affaire | [0;2,5[| [2,5;5[| [5;10[| [10;25[| [25;50[| [50;100[|
|---------------------------|---------|---------|--------|---------|---------|----------|
| Nombre d'entreprises | 137 | 106 | 112 | 154 | 100 | 33 |
| Effectif cumulé croissant | 137 | 243 | 355 | 509 | 609 | 642 |

Exercice 26

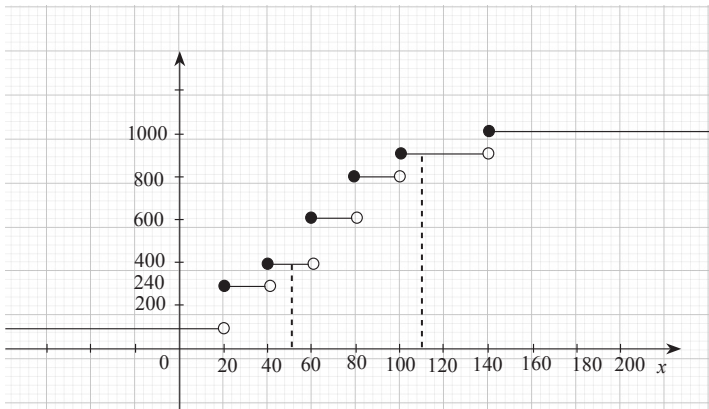
1) Calcul de la superficie moyenne \bar{X} des logements.

| Superficie (en m ²) | [20 ; 40[| [40 ;60[| [60 ;80[| [80 ; 100[| [100;140[| [140;200[| [150;200[|
|---------------------------------|-----------|----------|----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| Nombre de foyers | 240 | 208 | 160 | 172 | 129 | 91 | 0,125 |
| Centres (c_i) | 30 | 50 | 70 | 90 | 120 | 170 | 175 |

$$\bar{X} = \frac{240 \times 30 + 208 \times 50 + 160 \times 70 + 172 \times 90 + 129 \times 120 + 91 \times 170}{1000} = 75,23 \text{ m}^2$$

2) On considère le tableau suivant :

| Superficie(en m ²) | [20 ; 40[| [40 ;60[| [60 ;80[| [80 ; 100[| [100;140[| [140;200[|
|--------------------------------|-----------|----------|----------|------------|-----------|-----------|
| Nombre de foyers | 240 | 208 | 160 | 172 | 129 | 91 |
| Effectif cumulé croissant | 240 | 448 | 608 | 780 | 909 | 1000 |



3) Calcul de la proportion de foyers vivants dans des logements dont la superficie est comprise entre 50 et 110 m².

La proportion de foyers vivants dans des logements dont la superficie est comprise entre 50 et 110 m² est : 461.

Exercice 27

1) Calcul du poids moyen d'un fromage de chèvre

| Masse en grammes | [80 ; 85[| [85 ; 90[| [90 ; 95[| [95 ; 100[| [100 ; 105[| [105;110[| [110;115[|
|------------------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-----------|-----------|
| Effectifs | 5 | 9 | 14 | 18 | 25 | 16 | 7 |
| Centres | 82,5 | 87,5 | 92,5 | 97,5 | 102,5 | 107,5 | 112,5 |

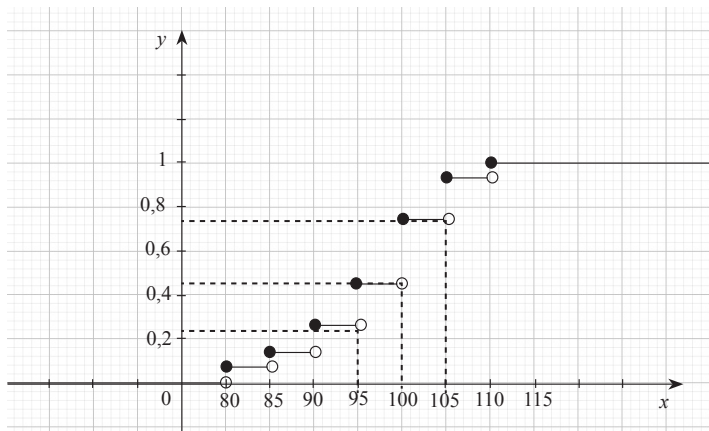
$$\bar{X} = \frac{5 \times 82,5 + 9 \times 87,5 + 14 \times 92,5 + 18 \times 97,5 + 25 \times 102,5 + 16 \times 107,5 + 7 \times 112,5}{94}$$

$$= 99,15 \text{ g}$$

2) Calcul des fréquences et des fréquences cumulées

| Masse en grammes | [80 ; 85[| [85 ; 90[| [90 ; 95[| [95 ; 100[| [100 ; 105[| [105;110[| [110;115[|
|------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-----------|-----------|
| Fréquences | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,19 | 0,27 | 0,17 | 0,07 |
| Fréquences cumulées c. | 0,05 | 0,15 | 0,3 | 0,49 | 0,76 | 0,93 | 1 |

3) Construction de la courbe cumulative des fréquences



Graphiquement :

- $Q_1 = 93$
- $M_e = 100$
- $Q_3 = 105$

4) Vérification des valeurs par calcul

Calcul de la médiane M_e a pour fréquence cumulée 0,5.

$$\text{Donc } \frac{M_e - 100}{0,5 - 0,49} = \frac{105 - 100}{0,76 - 0,49} \text{ d'où } M_e = 100,2$$

Calcul du premier Q_1 et du troisième quartile Q_3 .

- Le premier quartile Q_1 a pour fréquence cumulée croissante 0,25.

$$\text{Donc } \frac{Q_1 - 90}{0,25 - 0,15} = \frac{95 - 90}{0,3 - 0,15} \text{ d'où } Q_1 = 93,33$$

- Le troisième quartile Q_3 a pour fréquence cumulée croissante 0,75.

$$\text{Donc } \frac{Q_3 - 100}{0,75 - 0,49} = \frac{105 - 100}{0,76 - 0,49} \text{ d'où } Q_3 = 104,8$$

5) Détermination du pourcentage de fromages ayant un poids compris entre 92 et 107g.

Le pourcentage de fromages ayant un poids compris entre 92 et 107g est 90%.

IV.4. Situation complexe

Exercice 28

1) Calcul du poids moyen d'un fromage de chèvre

| Âge | [11;13[| [13;16[| [16;17[| [17;21[| [21;22[|
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Garçons | 420 | 310 | 240 | 280 | 70 |
| Filles | 530 | 360 | 120 | 160 | 50 |

1) a) Détermination de la classe modale

| Âge | [11;13[| [13;16[| [16;17[| [17;21[| [21;22[|
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Garçons | 420 | 310 | 240 | 280 | 70 |
| densité | 210 | 103,3 | 240 | 70 | 70 |

La classe modale est : [16 ; 17[

b) Calcul de moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile, la variance et l'écart-type de X

| Âge | [11;13[| [13;16[| [16;17[| [17;21[| [21;22[|
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Effectif (garçons) | 420 | 310 | 240 | 280 | 70 |
| Centre | 12 | 14,5 | 16,5 | 19 | 21,5 |
| Effectif cumulé | 420 | 730 | 970 | 1250 | 1320 |

$$\text{- Moyenne : } \bar{X} = \frac{12 \times 420 + 310 \times 14,5 + 240 \times 16,5 + 280 \times 19 + 70 \times 21,5}{13,20} = 15,39$$

$$\text{- Premier quartile : } Q_1 = 12,57$$

$$\text{- Troisième quartile : } Q_3 = 17,29$$

$$\text{- Médiane : } M_e = 15,32$$

$$\text{- Variance : } V = 8,82$$

$$\text{- Ecart-type : } \sigma = 2,97$$

2) a) Détermination de la classe modale

| Âge | [11;13[| [13;16[| [16;17[| [17;21[| [21;22[|
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| filles | 530 | 360 | 120 | 160 | 50 |
| densité | 265 | 120 | 120 | 40 | 50 |

La classe modale est : [11 ; 13[

b) Calcul de moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile, la variance et l'écart-type de Y.

| Âge | [11;13[| [13;16[| [16;17[| [17;21[| [21;22[|
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Effectif (filles) | 530 | 360 | 120 | 160 | 50 |
| Centre | 12 | 14,5 | 16,5 | 19 | 21,5 |
| Effectif cumulé | 530 | 890 | 1010 | 1170 | 1220 |

- Moyenne : $\bar{Y} = \frac{12 \times 530 + 360 \times 14,5 + 120 \times 16,5 + 160 \times 19 + 50 \times 21,5}{1220} = 14,49$

- Premier quartile : $Q'_1 = 12,15$

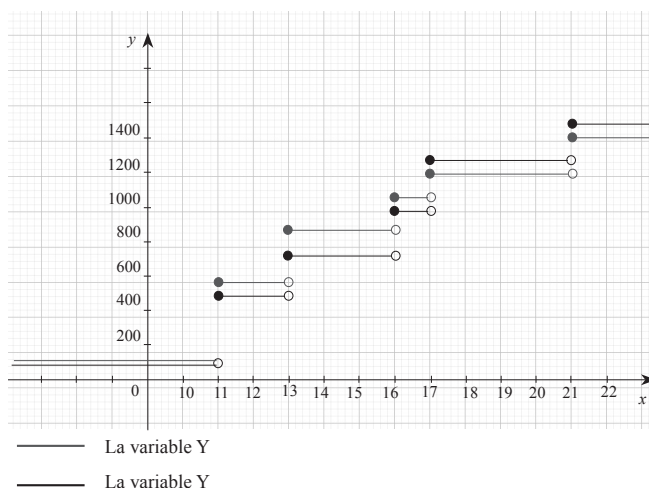
- Troisième quartile : $Q'_3 = 16,21$

- Médiane : $M'_e = 13,67$

- Variance : $V' = 7,78$

- Ecart-type : $\sigma' = 2,79$

3) Courbes cumulatives



5) Conclusions

- La moyenne d'âges des filles scolarisée est d'environ 15 ans plus faible que celle des garçons qui est d'environ 16 ans.

- Chez les filles 25% ont un âge inférieur 13 ans sensiblement égal à celui des garçons

- 75% des filles ont un âge inférieur à 17 ans.

- Plus de la moitié des filles ont un âge supérieur à 14 ans.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 2722410821/0101916125
Achévé d'imprimer en Côte d'Ivoire
4^{ème} trimestre 2022
Dépôt légal : n° 17790 du 06 aout 2021

