

COLLECTION

# AVOMATHS

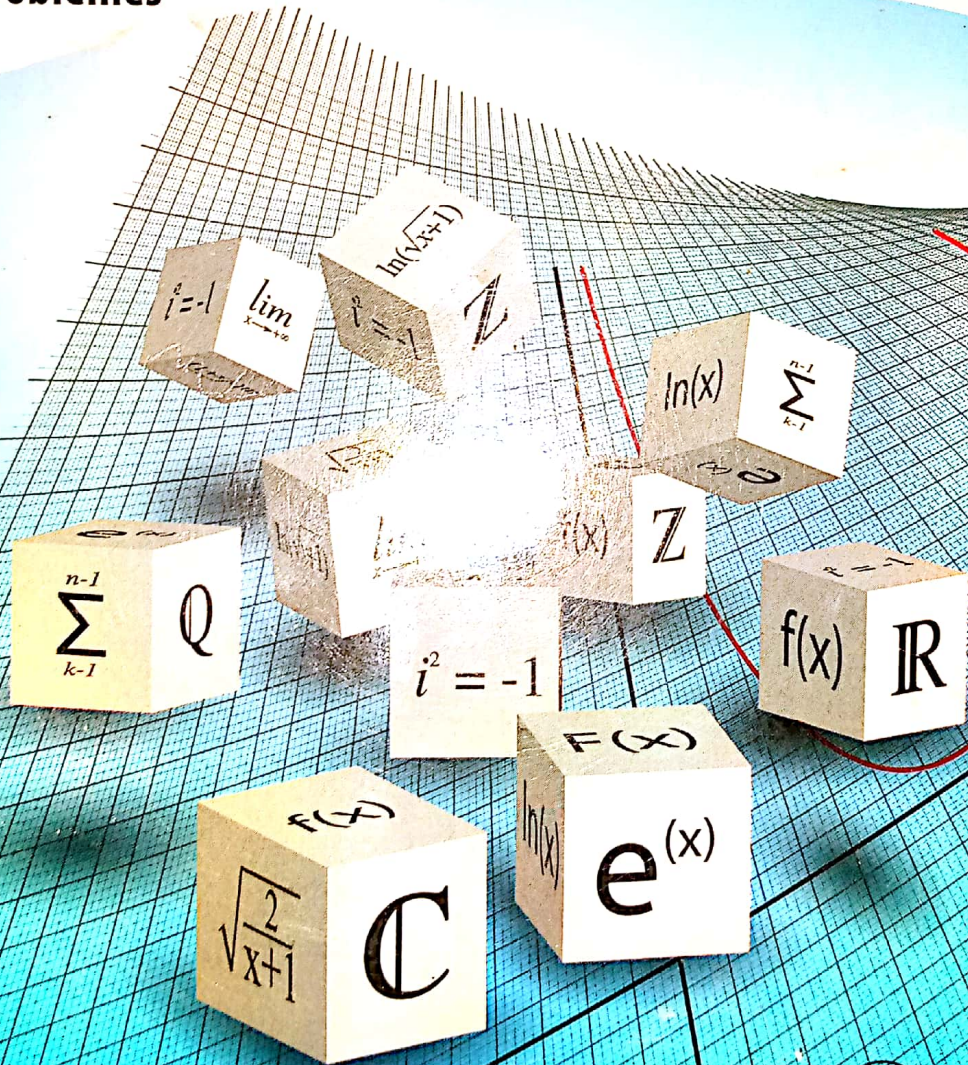
ANNALES

TERMINALE C

## ARITHMÉTIQUE

- Résumés de cours
- Exercices et Problèmes
- Corrigés

# C



Les Classiques  
ivoiriens

**Collection AVOMATHS**  
MATHÉMATIQUES

# ARITHMÉTIQUE

**Terminale C**

**par**

**BOUA Philippe**

**Professeur certifié de mathématiques**

**CIV 3022**



10 B.P. 1034 Abidjan 10 • Tél : 21 56 50 63 • Fax : 21 36 56 57  
[info@classiquesivoiriens.com](mailto:info@classiquesivoiriens.com)

**SOMMAIRE**

| <b>CHAPITRE</b>  | <b>PAGES</b>   |                 |
|--|----------------|-----------------|
|  | <b>Énoncés</b> | <b>Corrigés</b> |
| <b>I - INTRODUCTION</b>  | 07             | 38              |
| <b>II - DIVISION EUCLIDIENNE</b>   | 09             | 45              |
| <b>III - CONGRUENCE MODULO <math>n</math></b>                                  | 14             | 60              |
| <b>IV - NUMERATION</b>   | 17             | 72              |
| <b>V - PGCD - PPCM</b>   | 21             | 81              |
| <b>VI - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX</b>   | 25             | 88              |
| <b>VII - NOMBRES PREMIERS</b>  | 31             | 110             |
| <b>VIII - NOMBRES DE FERMAT,<br/>NOMBRES DE MERSENNE,<br/>NOMBRES PARFAITS</b> | 35             | 118             |

## I - INTRODUCTION

### *Entiers naturels, entiers relatifs et nombres rationnels.*

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels dont le plus petit est 0.

Les nombres pairs sont les nombres de la forme  $2k$  où  $k$  est un entier naturel et les nombres impairs sont les nombres de la forme  $2k + 1$ .

$\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs et  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres rationnels.

Les nombres rationnels se présentent sous forme de fractions irréductibles ou non.

Ces différents ensembles sont ordonnées.

Un carré parfait est un entier naturel dont la racine carré est un entier naturel.

Les entiers  $n$  et  $n+1$  sont dits consécutifs.

### *Principe de la démonstration par récurrence.*

On veut démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à un entier naturel  $N$  donné, l'assertion  $P(n)$  est vraie.

On vérifie que  $P(N)$  est vraie.

On suppose que pour un entier naturel  $k$ ,  $P(k)$  est vraie et on démontre que  $P(k+1)$  est vraie.

On tire la conclusion.

1

Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  chacune des équations suivantes.

1. a)  $xy = 10$

b)  $x + y = 7$

c)  $x + 3y = 18$ .

2. a)  $x^2 \times y = 108$

b)  $x(5 - y^2) = 25$ .

c)  $x^2 - 9y^2 = 55$ .

2

Résoudre dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  chacune des inéquations suivantes.

a)  $2 \leq xy \leq 4$

b)  $xy < 5 - x$

c)  $2 \leq 2x + y \leq 6$ .

3

Déterminer les couples  $(x,y)$  d'entiers relatifs vérifiant les conditions dans chacun des cas ci-dessous.

1. a)  $xy = 13$                       b)  $(x - 1)y = -7$                       c)  $|xy| = 1$ .  
 2. a)  $0 < x|y| \leq 2$                       b)  $150 = 8x + y$  et  $10 \leq x \leq y$                       c)  $|x| + |y| = 5$  et  $|xy| \leq 4$ .

4

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

a)  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$                       b)  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. En déduire  $\sum_{k=0}^n k(k+1)$  et  $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$  en fonction de  $n$ .

5

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On pose :  $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$  et  $T_n = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$ .

Démontrer que :  $T_n = S_n^2$ .

6

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4,  $2^n \geq n^2$ .

7

Démontrer que si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors,  $3 + 2^n$  n'est pas un carré parfait.

8

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Calculer  $(3n + 2)^2 - 3(n + 1)(3n + 1)$ .  
 2. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3(n + 1)(3n + 1) + 1$  est un carré parfait.

## II - DIVISION EUCLIDIENNE

### Propriété

Soit  $a$  un entier relatif et  $b$  un entier relatif non nul.

Il existe un unique couple d'entiers relatifs  $(q, r)$  tel que :  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < |b|$ .

$q$  est le quotient et  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

Si  $r = 0$  et  $b \neq 0$ ,  $b$  est un diviseur de  $a$ , et  $a$  est un multiple de  $b$ .

Les multiples d'un entier relatif  $b$  sont les nombres  $bk$  où  $k$  est un entier relatif.

### Remarque

$b$  étant un diviseur de  $a$ , on a :  $|b| \leq |a|$ .

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs. Si l'entier relatif  $d$  est un diviseur commun à  $a$  et  $b$  alors  $d$  divise toute combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ .

1

Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  dans chacun des cas suivants.

1.  $a = 243$  et  $b = 17$

2.  $a = 50$  et  $b = 72$ .

3.  $a = 34126$  et  $b = 151$

4.  $a = -189$  et  $b = -45$ .

5.  $a = -63$  et  $b = -10105$

6.  $a = 2500$  et  $b = -347$ .

7.  $a = -99$  et  $b = 247$

2

1. Vérifier que :  $36542112 = 9875 \times 3700 + 4612$ .

2. En déduire le reste et le quotient de la division euclidienne de :

a)  $36542112$  par  $9876$

b)  $36542112$  par  $3700$

c)  $36542112$  par  $-9875$

d)  $-36542112$  par  $9875$ .

3

Déterminer l'ensemble  $D(240)$  des diviseurs positifs de 240.

4

Déterminer l'ensemble des diviseurs communs positifs à 130 et 136.

5

Déterminer le nombre de multiples de 17 compris entre :

- a) 64 et 2015
- b) -1281 et 450.

6

Soit  $n$ ,  $n+1$  et  $n+2$  trois entiers naturels consécutifs. Démontrer que l'un d'entre eux est divisible par 3.

7

Soit  $a$  un entier naturel strictement positif.

1. Vérifier que :  $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$

2. En déduire :

- a) le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a^3$  par  $a - 1$ .
- b) le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a^3$  par  $a^2 + a$ .

8

Déterminer l'entier naturel  $x$  d'après les conditions suivantes :

La division euclidienne de  $x$  par 25 a pour quotient  $q$  et pour reste 17.

La division euclidienne de  $x$  par 16 a pour quotient  $q^2$  et pour reste 3.

9

La division euclidienne d'un entier naturel  $n$  par un entier naturel  $b$  a pour reste  $r$ .

Déterminer  $n$  lorsque  $(n - 4b)(n - r) = 24$ .

10

La division euclidienne d'un entier naturel  $n$  par un entier naturel  $b$  a pour quotient 23 et pour reste  $r$ . Déterminer  $n$  lorsque  $n - 3b + 2r = 243$ .

11

Démontrer que pour tout entier naturel,  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  est divisible par 4.

12

On rappelle que  $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $8^n - 1$  et  $43^n - 29^n$  sont divisibles par 7.

13

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel,

- $5^n - 2^n$  est divisible par 3.
- $7 \times 3^n + 11^n$  est divisible par 8.
- $5 \times 10^{2n+1} + 2 \times 10^{4n} + 3$  est divisible par 11.

14

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 7. Une urne contient  $n$  boules rouges,  $n+1$  boules vertes et  $2n$  boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 5 boules de l'urne.

- Déterminer le nombre de tirages possibles.
  - En déduire que  $(4n+1)n(4n-1)(2n-1)(4n-3)$  est divisible par 15.
- Déterminer le nombre de tirages comportant 4 boules rouges et 1 boule verte.
  - En déduire que  $n^2(n-1)(n-2)(n-3)$  est divisible par 24.

15

- Déterminer les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{2n+11}{n+1}$  est un entier relatif.

- Reprendre la question avec chacune des fractions  $\frac{6n^2-5}{3n^2+1}$  et  $\frac{4n^3-7n^2-7n+1}{n^2+n+1}$ .

16

On pose :  $A = n + \frac{3}{n+1} - \frac{2}{n+2}$

Déterminer les entiers relatifs  $n$  pour lesquels le nombre  $A$  est un entier relatif.

17

Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont deux nombres pairs consécutifs alors l'un est divisible par 2 et l'autre par 4.

18

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs non nul.

Démontrer que si  $a^2 + b^2 + c^2$  est divisible par 5 alors au moins l'un d'entre les entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  est divisible par 5.

19

$m$  un entier naturel non nul. On pose :  $M = m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2$ .

Démontrer que si  $M$  est pair alors 2 est le seul diviseur de  $M$  autre que  $M$ .

20

Pour tout entier relatif  $n$ , justifier les propositions dans chacun des cas qui suivent.

- Tout diviseur commun à  $n+4$  et  $n+12$  divise  $-8$ .
- Tout diviseur commun à  $3n+23$  et  $2n-11$  divise 79.
- 1 est le seul diviseur commun positif de  $n^2-2$  et  $n+1$ .

21

Soit  $a$ ,  $b$  et  $r$  trois entiers naturels non nul tels que :  $a = bq + r$  et  $m$  un entier naturel tel que :  $r^m < b$ .

- Démontrer que  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
- Démontrer que  $r^m$  est le reste de la division euclidienne de  $a^m$  par  $b$ .

22

Déterminer les éventuelles couples  $(x,y)$  d'entiers relatifs vérifiant :

- $y^3 - x^3 = 1$
- $y > x$  et  $y^3 - x^3 = 8$

23

Déterminer les éventuels couples  $(a,n)$  d'entiers naturels tels que :

- $5^n = a^2 - 2$
- $5^n = a^2 + 9$

24

On pose :  $T = 173^{2014}$  et  $S = 173^{2013} + 173^{2012} \times 29 + \dots + 173 \times 29^{2012} + 29^{2013}$ .

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de T par S.

25

Soit l'équation (E):  $7^x + 2 = y^2$  où  $(x,y)$  est un couple d'entier naturels.

Soit  $(x,y)$  un couple solution de l'équation (E).

1. Démontrer que x ne peut être pair.
2. a) On pose :  $x = 2p + 1$ . Démontrer que :  $6 \times 7^p = 1 + 49^p$ .  
b) Démontrer que p ne peut être supérieur ou égal à 1.

(On pourra démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 49^n > 6 \times 7^n$ ).

3. Déduire de ce qui précède les solutions de (E).

### III - CONGRUENCE MODULO n

#### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs, et  $n$  un entier naturel non nul.

On dit que  $a$  est congru à  $b$  modulo  $n$  si  $b - a$  est un multiple de  $n$  ( autrement : il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $b - a = kn$  ).

#### Propriété

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre entiers relatifs et,  $n$  un entier naturel non nul.

Si  $a \equiv b [n]$  et  $c \equiv d [n]$  alors  $a + c \equiv b + d [n]$  et  $ac \equiv bd [n]$

#### Propriété

Soit  $a, b$  et  $k$  trois entiers relatifs et,  $n$  un entier naturel non nul.

Si  $a \equiv b [n]$  et alors  $ka \equiv kb [n]$ ,  $a^k \equiv b^k [n]$  et  $(ka \equiv kb [kn]$  si  $k > 0$ ).

#### Propriété

Soit  $a$  un entier relatif,  $r$  un entier naturel et  $n$  un entier naturel non nul.

$a \equiv r [n]$  avec  $0 \leq r < n$  équivaut à  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $n$ .

1

Soit  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs tels que :  $x \equiv 6 [11]$  et  $y \equiv -27 [11]$ .

Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de chacun des nombres suivants :

$5x, x + y, x - y, 4x + 6y, x^2, x^2 - y^2, (x - y)(4x + 6y)$  et  $(x + y)^5$ .

2

Soit  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs tels que :  $2x \equiv 2y [7]$  et  $x^2 \equiv y^2 [7]$ .

Démontrer que :  $(x + 3)(x - 1) \equiv (y + 3)(y - 1) [7]$ .

3

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $3^{2014}$  par 7.

2. Déterminer le reste de la division de  $8 \times 5^{18} - 3^{41}$  par 7.

4

Soit  $m$  un entier relatif et,  $k$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls tel que :  $m^k \equiv 1 [p]$ .

1. Démontrer que :  $m^{k+1} + 1 \equiv m(m^{k-1} + 1) [p]$ .

2. En déduire que :  $13^{2017} + 1 \equiv 13 \times (13^{2015} + 1) [5]$ .

5

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations dans chacun des cas suivants.

a)  $3x = 1$  [5]

b)  $x^2 = -3$  [7]

c)  $x^2 - 5x = 2$  [3].

6

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $n^2(n^2 + 3)$  est divisible par 4.

7

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7.

8

$n$  est un entier naturel non nul.

Démontrer que  $(n+5)(n+7)(5n+2)n$  est divisible par 24.

9

Démontrer en utilisant les congruences chacun des résultats suivants.

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $6^n - 2^n$  est divisible par 4.
2. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{4n} - 4^{2n}$  est divisible par 13.

10

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 9.

11

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $17 \times 25^{3n} + 4 \times 8^n$  est divisible par 7.

12

1. Vérifier chacun des résultats suivants :  $8^2 = 12$  [13];  $8^3 = 5$  [13] et  $8^4 = 4$  [13].
2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $8^{4n} = 1$  [13],  $8^{4n+1} = 8$  [13];  
 $8^{4n+2} = 12$  [13] et  $8^{4n+3} = 5$  [13].
3. En déduire le reste de la division euclidienne de chacun des nombres suivants par 13.  
 $8^{76}$ ,  $512^{206}$  et  $7 \times 8^{20631} + 2$  par 13.

**13**

 Déterminer, le reste de la division euclidienne de  $2014^{19327}$  par 17.

**14**

 Déterminer le centième entier naturel  $n$  tel que  $(8013002476 + n)^4$  soit divisible par 11.

**15**

 Soit  $a$  et  $b$  deux relatifs non nuls et de même signe.

 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $(a+b)^n = a^n + b^n$  [ab].

**16**

1. Donner l'égalité traduisant la division euclidienne par 11 de chacun des nombres

$$10^0 + 1, 10^1 + 1, 10^2 + 1 \text{ et } 10^3 + 1.$$

 2. Démontrer que si  $10^n + 1$  n'est pas divisible par 11 alors il est congru à 2 modulo 11.

**17**

1. a) Compléter les pointillets dans chacune des relations suivantes.

$$3^0 = \dots [5]; 3 = \dots [5]; 3^2 = \dots [5]; 3^3 = \dots [5]; 3^4 = \dots [5].$$

 b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $3^{47} + 4 \times 3^{29}$  par 5.

 2. a) Justifier que :  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 0 [5]$ .

 b) On pose :  $A(n) = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$ .

 Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le reste de la division euclidienne de  $A(n)$  par 5.

**18**

 Soit  $n$  un entier naturel non nul.

 1. Démontrer que  $1 + 2^n$  et  $1 + 2^n + 3^n$  sont respectivement divisibles par 3 et 6 lorsque  $n$  est impair.

 2. On admet que 6 est le chiffre des unités de  $6^n$ .

 Déterminer le chiffre des unités de  $16^n$ .

 3. a) Démontrer que  $1 + 2^n + 3^n + 4^n = 4 [10]$  lorsque  $n = 0 [4]$ .

 b) Démontrer que  $1 + 2^n + 3^n + 4^n$  est divisible par 10 lorsque  $n$  est impair.

## IV - NUMERATION

### Propriété

Soit  $x$  un entier naturel non nul et  $b$  un entier naturel non nul différent de 1.

Il existe une unique suite d'entiers naturels  $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$  telle que :

$$x = x_k \times b^k + x_{k-1} \times b^{k-1} + \dots + x_2 \times b^2 + x_1 \times b + x_0$$

avec :  $x_0 < b, x_1 < b, \dots, x_{k-1} < b$  et  $0 < x_k < b$ .

*Méthode de détermination pratique des termes de la suite  $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$*

On divise  $x$  par  $b$ . Le reste obtenu est  $x_0$ . On divise le quotient obtenu par  $b$  et on obtient

$x_1$ . Ainsi de suite, jusqu'à obtenir le quotient  $x_k$  plus petit que  $b$ .

On obtient l'écriture de  $x$  en base  $b$  qui est  $\overline{x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0}_b$ .

*Critère de divisibilité par 3 ou 9*

Un nombre est divisible par 3 (respectivement par 9) lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

*Critère de divisibilité par 4*

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

*Critère de divisibilité par 11*

Un nombre est divisible par 11 si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11.

*Critère de divisibilité par 7 ou 13*

On partage le nombre en listes de 3 chiffres en allant de droite vers la gauche. On effectue la somme des listes de rang pair et la somme des listes de rang impair puis on fait la différence de ces résultats. Si la différence obtenue est un multiple de 7 (respectivement 13) alors ce nombre est divisible par 7 (respectivement 13).

1

Donner l'écriture en base 2 de chacun des nombres suivants :  $2^6 + 2^4 + 2^3 + 1$ ,  
 $2^4 + 2^3 + 2^5$ ,  $3^4 + 3^2 + 3 + 1$  et  $2^5 + 3^5$ .

2

Déterminons les écritures en base 2 et en base 3 de 35.

3

Déterminer les entiers naturels dont les écritures en base 2 sont  $\overline{11101}$  et  $\overline{10100110}$ .

4

Soit  $x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0$  l'écriture d'un entier naturel  $x$  en système décimal.

1. Démontrer que  $x$  est congru à  $x_0 + 10x_1$  modulo 4.

2. Démontrer que  $x$  est congru à  $(-1)^k x_k + (-1)^{k-1} x_{k-1} + \dots + (-1)x_1 + x_0$  modulo 11.

5

1. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels compris entre 1 et 9.

Démontrer que les nombres  $abba$ ,  $abbaabba$  sont divisibles par 11.

2. Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers naturels compris entre 1 et 9.

Démontrer que les nombres  $abcabc$  et  $aabbcc$  sont divisibles par 11.

6

1. Déterminer le nombre  $r_i$  tel que  $10^i = r_i [13]$  avec  $0 \leq i \leq 6$  et  $-4 \leq r_i \leq 4$ .

2. Déterminer une condition suffisante pour que chacun des nombres  $ab$ ,  $abc$ ,  $abcd$ ,  $abcde$  et  $abcdef$  soit divisible par 13.

3. Démontrer que chacun des nombres  $aaaaaa$ ,  $abaaba$  et  $abcabc$  sont divisibles par 13.

7

Soit l'entier naturel  $x$  tel que :  $x = \sum_{i=0}^k a_i \times 10^i$ .

1. a) Donner les entiers  $r_i$  pour tout  $i$  allant de 0 à 6 tels que  $10^i = r_i [13]$  et  $-4 \leq r_i \leq 4$ .

b) Démontrer que :  $x = \sum_{i=0}^{k-1} 10^{6i} A_i$  où :

$$A_i = a_{6i} + a_{6i+1} \times 10 + a_{6i+2} \times 10^2 + a_{6i+3} \times 10^3 + a_{6i+4} \times 10^4 + a_{6i+5} \times 10^5$$

2. a) Prouver que pour tout  $i$  allant de 0 à  $k-1$ ,

$$A_i = 4(a_{6i+5} - a_{6i+2}) + 3(a_{6i+4} - a_{6i+1}) + a_{6i+0} - a_{6i+3} \quad [13].$$

b) En déduire que :  $x = \sum_{i=0}^{k-1} (4(a_{6i+5} - a_{6i+2}) + 3(a_{6i+4} - a_{6i+1}) + a_{6i+0} - a_{6i+3}) \quad [13].$

3. Déduire de ce qui précède si nombres  $X = 578056781432$  et  $Y = 293546287401$  sont multiples de 13.

8

- Déterminer le nombre  $r_i$  tel que :  $10^i = r_i \quad [7]$  avec  $0 \leq i \leq 6$  et  $-3 \leq r_i \leq 3$ .
- Déterminer une condition suffisante pour que chacun des nombres  $ab, abc, abcd, abcde$  et  $abcdef$  soit divisible par 13.
- Démontrer que chacun des nombres  $aaaaaa, abaaba$  et  $abcabc$  sont divisibles par 7.

9

- On désigne par  $X$  un entier naturel admettant un nombre pair de chiffres.
  - Démontrer que si tous les chiffres de  $X$  sont identiques alors  $X$  est divisible par 11.
  - Démontrer que si  $X$  admet des paires consécutives de chiffres identiques alors  $X$  est divisible par 11.
- On pose :  $X = x_0x_1 \dots x_{n-1}x_n$  et  $Y = x_nx_{n-1} \dots x_1x_0$ .  
Démontrer que si  $X$  est divisible par 11 alors  $Y$  est divisible par 11.

10

Déterminer les entiers naturels  $abc$  multiples de 13 dont la somme des chiffres est 14.

11

Justifier que chacun des nombres  $A = 105324038139567$  et  $B = 28093657683$  est divisible par 13.

12

Justifier que chacun des nombres  $M = 451731875$  et  $N = 14181838272$  est divisible par 7.

13

Soit  $a, b$ , et  $c$  trois entiers naturels non nuls compris entre 1 et 9.

- Déterminer  $b$  et  $c$  tels que  $4b \times c + 81$  soit un carré parfait.
- Déterminer tous les nombres  $abc$  de trois chiffres, divisibles par 3 tels que :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \times b + a \times c - b \times c) = 81 \quad (r).$$

14

Déterminer l'entier naturel  $b$  pour que le nombre  $14b2b$  soit divisible par 2 et 3.

15

Déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  pour que le nombre  $95a2ba$  soit divisible par 4 et 11.

16

Déterminer les triplets  $(x ; y ; z)$  d'entiers naturels pour que le nombre  $A = x26y5z$  est divisible par 11 et 7.

## V - PGCD-PPCM

### Définitions

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.

On appelle plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$ , et on note  $\text{PGCD}(a;b)$ , le plus grand élément de  $D(a;b)$ .

On appelle plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$ , et on note  $\text{PPCM}(a;b)$ , le plus petit élément de  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ .

### Remarque

$$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(|a|;|b|) \text{ et } \text{PPCM}(a;b) = \text{PPCM}(|a|;|b|).$$

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

$$\text{PGCD}(ka;kb) = k \times \text{PGCD}(a;b) \text{ et } \text{PPCM}(ka;kb) = k \times \text{PPCM}(a;b).$$

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nul. Posons :  $\delta = \text{PGCD}(a;b)$  et  $\mu = \text{PPCM}(a;b)$ .

$$\text{On a : } \mu \times \delta = a \times b.$$

### Conséquence

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels premiers entre eux alors,  $\text{PPCM}(a;b) = ab$ .

### Recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls avec  $(b > a)$  et,  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

Si  $r = 0$  alors  $\text{PGCD}(a;b) = b$ .

Sinon  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$ .

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls avec  $(b > a)$ .

$$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a;b - a).$$

1

Déterminer le PPCM et le PGCD de  $x$  et  $y$  dans chacun des cas suivants.

1. a)  $x = 17 \times 9$  et  $y = 13 \times 9$ .      b)  $x = -7 \times 31$  et  $y = 7 \times 19$ .  
 2. a)  $x = 6 \times 12 \times 11$  et  $y = 18 \times 38$ .      b)  $x = 12 \times 5 \times 23$  et  $y = 37 \times 25 \times 4$ .

2

Soit  $n$  un nombre pair supérieur ou égal à 2. On donne :  $x = n(n+3)$  et  $y = 2(n+3)$   
 Déterminer  $\text{PGCD}(x;y)$ .

3

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul  $n$ ,

1. a)  $\text{PGCD}(n(n+1);3)$       b)  $\text{PGCD}(n^2 - 3n;4)$ .  
 2. a)  $\text{PGCD}(n(n+1)(n+2);6)$       b)  $\text{PPCM}(n(n+1)(n+2);6)$   
 3. a)  $\text{PGCD}(n(n+1)(n+2);2n)$       b)  $\text{PPCM}(n(n+1)(n+2);2n)$ .

4

On pose :  $\mu = \text{PPCM}(a;b)$  et  $\delta = \text{PGCD}(a;b)$ .

1. Déterminer les diviseurs positifs de 200.  
 2. Déterminer les couples d'entiers naturels  $(a,b)$  tels que :  $\mu = 8\delta$  et  $ab = 200$ .

5

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs avec  $b < a$ . Déterminer en fonction de  $\text{PGCD}(a;b)$  :

1. a)  $\text{PGCD}(a+b;b)$ ;      b)  $\text{PGCD}(3a+b;4a+2b)$   
 2. a)  $\text{PGCD}(5a-16b;10a-31b)$       b)  $\text{PGCD}((a-b)^2; a^2 - b^2)$ .

6

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nul avec  $a < b$ . On désigne par  $\mu$  le  $\text{PPCM}(a;b)$ .

1. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels  $(m,n)$  tel que :  $am < \mu < bn$ .  
 2. Soit  $A$  l'ensemble des couples  $(p,q)$  d'entiers naturels tels que :  $ap < \mu < bq$ .  
 a) Justifier que  $A$  n'est pas vide.  
 b) Soit  $(p,q)$  un élément de  $A$ . Démontrer que :  $p < n$  et  $m < q$ .

7

On considère l'équation (E):  $7x + 4y = 12$ .

1. Démontrer que  $\text{PGCD}(x;y)$  prend l'une des valeurs 1, 2, 3, 4 et 12.

On considère l'équation (E):  $7x + 4y = 12$ . où  $(x,y)$  est un couple d'entiers relatifs.

2. On admet que les solutions de (E):  $7x + 4y = 0$  sont les couples  $(4k, -7k); k \in \mathbb{Z}$ .  
 a) Vérifier que le couple  $(0,3)$  est solution de (E).

- b) Démontrer que les solutions de (E) sont les couples  $(4k, 3 - 7k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .
3. Déterminer si possible une condition nécessaire sur  $k$  pour que :
- a)  $\text{PGCD}(x;y) = 4$ ,      b)  $\text{PGCD}(x;y) = 3$       c)  $\text{PGCD}(x;y) = 2$

8

- Déterminer les diviseurs positifs de 28.
- Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. On pose :  $\delta = \text{PGCD}(a,b)$ .  
Déterminer  $a$  et  $b$  tels que :  $2b - \delta = 28$ .

9

$n$  est un entier naturel non nul. On pose :  $a = 2n^2 + n + 39$  et  $b = n + 4$ .

- Justifier que :  $2n^2 + n + 39 = (n+4)(2n + 9) + 3$ .
- a) Démontrer que :  $\text{PGCD}(a;b) = 1$  ou  $\text{PGCD}(a;b) = 3$ .  
b) Démontrer que :  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(n+4;3)$
- Déterminer  $\text{PGCD}(a;b)$  suivant les valeurs de  $n$ .

10

$n$  est un entier naturel non nul. On pose :  $a = 5n + 1$  et  $b = 7n + 2$ .

- Déterminer une relation entre  $a$  et  $b$  ne dépendant pas de  $n$ .
- On désigne par  $\delta$  le  $\text{PGCD}(a ; b)$ . Déduire de la question 1) les valeurs possibles de  $\delta$ .
- Déterminer les valeurs de  $n$  dans chacun des cas suivants :  
a)  $\delta = 3$                                       b)  $\delta = 1$ .

11

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose :  $A = 3n + 1$  et  $B = 5n - 1$ .

- Démontrer que le  $\text{PGCD}$  de  $A$  et  $B$  est un diviseur de 8.
- a) Pour quelles valeurs de  $n$  ce  $\text{PGCD}$  est-il égal à 8 ?  
b) Calculer alors le  $\text{PPCM}(A;B)$ .
- Existe-t-il des valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\text{PGCD}(A ; B) = 2$  ?

12

On donne le tableau suivant obtenu par l'algorithme d'Euclide.

|           |     |    |    |   |   |
|-----------|-----|----|----|---|---|
| Dividende | 233 | 17 | 12 | 5 | 2 |
| Diviseur  |     |    | 5  |   | 1 |
| Reste     | 12  | 5  | 2  | 1 | 0 |

Compléter le tableau ci-dessous.

13

Déduire du tableau ci-dessous obtenu par l'algorithme d'Euclide le PGCD de a et b

|           |     |     |     |    |    |
|-----------|-----|-----|-----|----|----|
| Dividende | a   | ... | 126 | 72 | 54 |
| Diviseur  | b   | ... | 72  | 54 | 18 |
| Reste     | ... | ... | 54  | 18 | 0  |

14

A partir du tableau ci-dessous obtenu par l'algorithme d'Euclide, déterminer les valeurs possibles de l'entier relatif a.

|           |   |     |    |    |
|-----------|---|-----|----|----|
| Dividende | a | 276 | 52 | 16 |
| Diviseur  |   |     |    | 4  |
| Reste     |   |     | 4  | 0  |

15

En utilisant l'Algorithme d'Euclide, déterminer le PCDG de 238 et 42.

16

Déterminer par l'algorithme d'Euclide, le PGCD(a ; b) dans chacun des cas suivants

1.  $a = 171735$  et  $b = 160500$ ;
2.  $a = 94637$  et  $b = 83123$ .
3.  $a = 3042$  et  $b = 2185$ .

## VI - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.

On dit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si  $\text{PGCD}(a;b) = 1$ .

### Théorème de Bézout

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.

$a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :  $au + bv = 1$ .

### Théorème de Gauss

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs non nuls.

Si  $a$  divise  $bc$  et,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a$  divise  $c$ .

### Conséquence du théorème de Gauss

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers relatifs non nuls.

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et, si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux alors  $a$  et  $bc$  sont premiers entre eux.

Si  $a$  et  $b$  divisent  $c$  et, si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $ab$  divise  $c$ .

1

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux.

2

$x$  un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2. Démontrer que si  $x$  n'est pas divisible par 3 alors  $x$  et  $x+3$  sont premiers entre eux.

3

Soit  $x$  un entier naturel. Démontrer que si  $x$  est impair alors  $x - 4$  et  $x + 4$  sont premiers entre eux.

4

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que dans chacun des cas ci-dessous, les nombres présentés sont premiers.

a)  $n + 1$  et  $n$    b)  $n^2 + 1$  et  $n$    c)  $4n^2 + 5$  et  $3n^2 + 4$ .

5

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs premiers entre eux. Démontrer que  $a^2 + b^2$  et  $ab$  sont premiers entre eux.

6

Soit  $n$  un entier relatif. Démontrer que si 11 ne divise pas  $n - 4$  alors  $2n + 3$  et  $n + 7$  sont premiers entre eux.

7

On donne le tableau suivant obtenu par l'algorithme d'Euclide.

|           |     |     |    |    |   |
|-----------|-----|-----|----|----|---|
| Dividende | 403 | 187 | 29 | 13 | 3 |
| Diviseur  | 187 | 29  | 13 | 3  | 1 |
| Reste     | 29  | 13  | 3  | 1  | 0 |

1. Les nombres 403 et 187 sont-ils premiers entre eux ?
2. Déterminer à l'aide de ce qui précède deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $403a + 187b = 1$ .

8

1. Déterminer en utilisant l'Algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs  $(u_0; v_0)$  solution de l'équation  $86u + 35v = 1$  (E).
2. En déduire un couple solution de l'équation  $86u + 35v = 101$ .

9

Déterminer une solution particulière de l'équation (E) à l'aide de l'algorithme d'Euclide dans chacun des cas suivants.

- a)  $25u + 63v = 1$ ;      b)  $209u - 45v = 17$ ;      c)  $2564u + 1248v = -4$ .

10

1. Vérifier que le couple  $(-4, 9)$  est solution de l'équation (E) :

$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 29a + 13b = 1$

2. a) Résoudre (E).

b) En déduire les entiers naturels  $n$  tels que :

Le reste de la division euclidienne de  $n$  par 13 est 4 et le reste de la division euclidienne de  $n$  par 29 est 11.

11

Déterminer tous les triplets d'entiers relatifs  $(a, b, c)$  vérifiant les conditions

(1)  $a + c = 1$  et  $3b + 5c = 41$ .

12

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs et  $p$  un nombre premier.

- Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  compris entre 1 et  $p-1$ ,  $p$  divise  $C_p^k$ .
- En déduire que :  $(a+b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$ .

13

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système (S) : 
$$\begin{cases} x^2 = 4 \pmod{5} \\ x = 3 \pmod{7} \end{cases}$$

14

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , les solutions de l'équation  $3^n x = 4 \pmod{5}$  (E).

15

On veut déterminer suivant les valeurs de  $n$  les solutions de l'équation

$$(E_n) : 5^n x - 3^n y = 2.$$

- Déterminer les solutions de  $(E_0)$  et de  $(E_1)$ .
- On suppose pour ce qui suit que  $n$  est supérieur ou égal à 2.  
Démontrer que  $(E_n)$  est équivalent à  $5(5^{n-1}x - 1) = 3(3^{n-1}y - 1)$ .
- Démontrer que il existe un entier relatif  $p$  tel que :  
 $5^{n-1}x = 1 + 3p$  et  $3^{n-1}y = 1 + 5p$ .
- Démontrer que  $p$  est solution du système 
$$\begin{cases} a=3 \pmod{5} \\ a=1 \pmod{3} \end{cases} \text{ (S)}$$
- En déduire qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $p = 13 + 15k$ .
- Soit  $(x,y)$  un couple solution de  $(E_n)$ .  
Justifier que :  $x = (8 + 9k) \times 5^{2-n}$  et  $y = (22 + 25k) \times 3^{2-n}$ .
- En déduire les solutions de l'équation  $(E_2)$ .

**16**

On considère les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  telles que :  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 3$  et  $c_1 = 10$ .

et, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $a_{n+1} = a_n + 6$ ,  $b_{n+1} = b_n + 2$  et

$$c_n = a_n + b_n + 2n.$$

1. a) Démontrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites de termes impaires.

b) Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire l'expression de  $c_n$  en fonction de  $n$ .

2. Démontrer que les nombres  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

3. Démontrer que pour tout entiers naturel  $n$  supérieur à 1,

$$(a_n + 1)^2 + (a_n + b_n)^2 = c_n^2.$$

**17**

Soit  $a$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer par récurrence que si  $n$  est impair alors  $a^n + 2a$  est un multiple de 3.

2. On suppose que  $a$  est un nombre premier et  $n$  supérieur ou égale à 3.

On veut déterminer les entiers naturels  $a$ ,  $n$  et  $y$  tels que :  $a^n + 2a = y^2$

a) Justifier qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $y = ka$ .

b) Démontrer que :  $a = 2$  et  $k^2 - 2^{n-2} = 1$ .

c) Après avoir précisé la parité de  $k$ , démontrer que  $k$  est égale à 3.

d) Déterminer les valeurs de  $n$  et  $y$ .

3. Reprendre la question 2) à l'aide de la question 1.

**18**

Résoudre l'équation  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4x = 7y$  (E).

**19**

1. Vérifier que le couple  $(3, 6)$  solution de l'équation  $5x - 2y = 3$  (E).

2. Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E).

**20**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système (S) : 
$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases}$$

21

1. Vérifier que :  $23 \times 3 - 17 \times 4 = 1$ .

2. On admet que les solutions de l'équation  $23u = 17v$  sont les couples  $(17k, 23k)$  où  $k$  est un entier relatif.

Déterminer les solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation (E) :  $23u - 17v = 1$ .

3. On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 5$ ,

et pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = a_n + 23$  et  $b_{n+1} = b_n + 17$ .

Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(p, q)$  tels que :  $a_p = b_q$  avec  $0 \leq p \leq 2014$  et  $0 \leq q \leq 2014$ .

22

Soit l'équation  $ax + by = 0$  dont les solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont les couples  $(x_k, y_k)$

avec  $k$  un entier relatif. On désigne par  $(x_0, y_0)$  un couple tel que  $ax_0 + by_0 = c$ .

Déterminer les solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation (E) dans chacun des cas suivants.

1.  $ax + by = c$

2.  $ax + by = mc$

3.  $ax + by = ab + c$ .

23

Résoudre dans l'équation  $9x = 1 [5]$  (E).

24

Soit  $k$  est un entier relatif non nul. Il.

Démontrer que les fractions  $\frac{k(4k+1)}{3k+1}$  et  $\frac{k^3+k^2}{2k+1}$  sont irréductibles.

25

On considère l'équation (E) :  $x^a = 5^n$  où  $n$  est un entier naturel non nul et,  $a$  et  $x$  sont des entiers naturels.

Déterminer suivant les valeurs de  $n$  les solutions de (E).

26

Soit  $a$  et  $b$  tels que :  $3a(a+b+1) = a^2 + b^2 + (a+b-1)^2$  (1)

1. Vérifier que (1) est équivalente à la relation (2) :  $a(a+b+5) - 2b(b-1) = 1$ .

2. a) En déduire que  $a$  et  $b$  sont impairs et premiers entre eux.

b) Démontrer que  $b$  est strictement supérieur à  $a$ .

(on pourra effectuer un raisonnement par l'absurde).

3. On admet que la somme de trois carrés est divisible par 3 si chacun de ces carrés est divisible par 3 ou si aucun d'entre ces carrés n'est divisible par 3.

Démontrer que  $a$  est supérieur ou égal à 5 tandis que  $b$  est supérieur ou égal à 7.

4. On pose :  $A = a(a + b + 5) - 2b(b - 1)$  et  $b = 7 + n$  où  $n$  est un entier pair.

a) Vérifier que :  $2n^2 + 27n + 85 = (n + 5)(2n + 17)$ .

b) Démontrer que  $A = n + 1$  si et seulement si  $a = 5 + n$ .

5. En déduire les entiers naturels  $a$  et  $b$  vérifiant l'équation (1).

27

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 28

## VII - NOMBRES PREMIERS

### Définition

Soit  $p$  un entier naturel non nul. On dit que  $p$  est un nombre premier si les diviseurs de  $p$  sont 1 et  $p$ .

### Comment reconnaître un nombre premier

Un entier naturel est un nombre premier si il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée.

### Théorème fondamental (Décomposition en produit de facteurs premiers)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe une unique suite de nombres premiers  $(p_k)_{1 \leq i \leq k}$  avec  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  et des entiers naturels non nuls

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \text{ et } \alpha_k \text{ tels que : } n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

Cette décomposition est unique et est appelée *décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers*.

*Déterminations pratiques du PPCM( $a ; b$ ) et du PGCD( $a ; b$ ) où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels non nuls.*

On considère les décompositions en produit de facteurs premiers de  $a$  et de  $b$ .  
 PPCM( $a ; b$ ) est le produit des plus grandes puissances des nombres premiers qui interviennent dans l'une ou l'autre des deux décompositions.

PGCD( $a ; b$ ) est le produit des plus petites puissances des nombres premiers qui interviennent à la fois dans les deux décompositions.

1

Démontrer que 271 est un nombre premier.

2

Soit  $p$  un entier naturel supérieur à 1.

Démontrer que si  $p$  n'est pas premier alors  $2^p - 1$  n'est pas premier.

3

Soit  $x$  un entier naturel. Démontrer que si un nombre premier  $p$  divise  $x^n$  pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1 alors  $p$  divise  $x$ .

4

Soit  $u$  un entier naturel non nul. Démontrer que si  $u^n$  est divisible par un nombre premier  $p$  alors  $u$  est divisible par  $p$ .

5

Décomposer chacun des nombres 7623 et 27440 en produit de facteurs premiers.

6

Déterminer PPCM(A ; B) et PGCD(A ; B) dans chacun des cas suivants.

a)  $A = 3 \times 7^4 \times 11^2$  et  $B = 3^2 \times 5 \times 7^4 \times 11$ .

b)  $A = 13^2 \times 19$  et  $B = 17 \times 19 \times 23$ .

c)  $A = 2 \times 11 \times 13^2 \times 47$  et  $B = 2^3 \times 5 \times 7 \times 13^2$ .

7

Déterminer les entiers naturels  $x$  dans chacun des cas suivants.

a)  $\text{PPCM}(x; 24) = 48$

b)  $\text{PPCM}(x; 126) = 2520$ .

8

Déterminer les entiers naturels  $x$  tels que :  $\text{PGCD}(x; 90) = 6$  et  $25 < x < 33$ .

9

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de  $12!$

10

Soit  $p$  un nombre premier.

- Déterminer l'ensemble des diviseurs de  $p^n$  où  $n$  est un entier naturel.
- Démontrer que  $p^n$  est premier avec la somme  $S$  de ses diviseurs.
- Calculer  $101^5$  puis déduire de ce qui précède que les nombres 10510100501 et 10615201506 sont premiers entre eux.

11

Par combien de zéros se termine chacun des nombres  $100!$ ,  $500!$  et  $1000!$ .

12

1. Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 7.  
Démontrer que :  $p = 1 [10]$ ,  $p = 3 [10]$ ,  $p = 7 [10]$  ou  $p = 9 [10]$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5.  
Démontrer que :  $p = 1 [6]$  ou  $p = 5 [6]$ .

13

Soit  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre nombres premiers supérieurs ou égaux à 7 tels que :

$$p_1 = 1 [10], p_2 = 3 [10], p_3 = 7 [10] \text{ ou } p_4 = 9 [10].$$

1. Démontrer que  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$  est divisible par 10.
2. Démontrer que  $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = p_4 [10]$ . En déduire que  $p_1 \times p_2 \times p_3 - 1$  est un multiple de 10.

14

Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p^{2n} = 1 [6]$ .

15

1. Déterminer l'entier naturel  $r_1$  tel que  $4^1 = r_1 [7]$  avec  $0 \leq r_1 < 7$ .
2. Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel. On admet qu'il existe des entiers naturels  $k$  non nuls tels que :  $a^k = 1 [p]$ . On désigne par  $k_0$  le plus petit d'entre eux.

Démontrer que ces entiers naturels  $k$  sont multiples de  $k_0$ .

16

Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 7.

Démontrer que  $17^{p^2} = 17 [29]$ . En déduire que  $17^{(p-1)(p+1)} - 1$  est divisible par 29.

17

Démontrer que pour tout nombre premier  $p$  supérieur ou égal à 5,

$9^{p-1} + 9^{p-2} \times 8 + \dots + 9 \times 8^{p-2} + 8^{p-1} - 1$  est divisible par 73.

18

Soit  $a$  un entier naturel non nul non divisible par un nombre premier  $p$ .

Démontrer que si  $a^2 + b^2 + c^2$  est divisible par  $p$  alors  $b$  et  $c$  ne le sont pas tous les deux à la fois.

19

Soit  $a$ ,  $b$  et  $x$  trois entiers relatifs tels que  $ab = x^n$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il existe des entiers naturels  $p$  et  $q$

premiers entre eux tels que :  $a = p^n$  et  $b = q^n$ .

19

Soit  $a$ ,  $b$  et  $x$  trois entiers relatifs tels que  $ab = x^n$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il existe des entiers naturels  $p$  et  $q$

premiers entre eux tels que :  $a = p^n$  et  $b = q^n$ .

## VIII - NOMBRES DE FERMAT, NOMBRES DE MERSENNES, NOMBRES PARFAITS

### Nombres de Fermat

On appelle nombre de Fermat tout nombre de la forme  $F_n = 2^{2^n} + 1$  où  $n$  est un entier naturel.

### Nombres de Mersenne

On appelle nombre de Mersenne tout nombre  $M_n = 2^n - 1$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

### Nombres parfaits

On appelle nombre parfait tout entier naturel qui est égal à la somme de ses diviseurs propres (autres que lui-même).

1

Calculer  $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$  et  $F_5$ .

2

Démonstration du Petit théorème de Fermat

Soit  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier naturel non multiple de  $p$ .

Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $p-1$ , on désigne par  $r_i$  le reste de la division euclidienne de  $a^i$  par  $p$ .

1. Justifier que les entiers  $r_i$  sont distincts deux à deux.

2. En déduire que :

$$a^{p-1} = 1 [p]$$

$$a^p = a [p].$$

3

$x$  et  $y$  sont des entiers naturels, et  $p$  un nombre premier.

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(x + y)^p = x^p + y^p [p]$ .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $a$ ,  $a^p = a [p]$ .

4

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ .

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} - 2 = \prod_{k=0}^n F_k$  où  $\prod_{k=0}^n F_k = F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n$ .

5

Démontrer que les nombres de Fermat sont premiers entre eux.

6

Soit  $n$  un entier naturel.

Démontrer que si un nombre premier  $p$  divise  $F_n$  alors  $2^{2^{n+1}} \equiv 1 [p]$ .

7

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} = (F_n - 2)F_n + 2$ .

2. En déduire que :  $F_{n+1} - 2 = \prod_{k=0}^n F_k$ .

8

1. Démontrer que 3 divise  $F_{n+1} - 2$ .

2. En déduire que 3 divise l'un des nombres de Fermat à préciser.

9

1. Calculer les nombres de Mersennes  $M_2, M_3, M_4, M_5, \dots$  et  $M_{20}$ .

2. Reconnaître ceux qui sont premiers (on ne demande pas de justification).

3. Quelle remarque peut-on faire ?

10

Démontrer que si  $M_n = 2^n - 1$  est un nombre premier alors  $n$  est premier.

11

1. Soit  $a$  un nombre premier.

a) Démontrer que  $2a$  est un nombre parfait à condition que  $a$  soit égal à 3.

b) Démontrer que  $4a$  est un nombre parfait à condition que  $a$  soit égal à 7.

2. Existe-t-il un nombre premier  $a$  tel que  $8a$  soit un nombre parfait ?

12

Déterminer une condition suffisante pour que le produit de deux nombres premiers  $a$  et  $b$  soit un nombre parfait.

13

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres premiers avec  $y$  impair, et  $n$  un entier naturel non nul.

1. Démontrer que si  $x^n y$  est un nombre parfait alors  $(x^{n+1} - 2x^n + 1)y = x^{n+1} - 1$ .
2. En déduire que  $x$  est égal à 2.
3. Déterminer  $y$  puis  $x^n y$  en fonction de  $n$ .
4. Peut-on trouver deux nombres premiers  $a$  et  $b$  différents de 2 tels que  $2^n ab$  soit un nombre parfait ?
5. On rappelle que  $2^{n+1} - 1$  est un nombre premier si  $n+1$  est un nombre premier.
  - a) Déterminer les nombres parfaits  $2^n (2^{n+1} - 1)$  pour  $n$  allant de 1 à 6.
  - b)  $2^{10} (2^{10+1} - 1)$  et  $2^{12} (2^{12+1} - 1)$  sont-ils des nombres parfaits ?

## I - INTRODUCTION

1

1. a)  $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$ . Donc, les solutions sont les couples (1,10), (10,1), (2,5) et (5,2).

b)  $x$  et  $y$  sont positifs et ils sont tous les deux inférieurs à 7.

Les solutions sont les couples (0,7), (7,0), (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4) et (4,3).

c)  $x$  et  $y$  sont tous deux positifs, et  $3y$  est inférieur à 18. Les valeurs possibles de  $y$  sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Les solutions sont les couples (18,0), (15,1), (12,2), (9,3), (6,4), (3,5) et (0,6).

2. a)  $108 = 1^2 \times 108 = 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 27 = 3^2 \times 12 = 6^2 \times 3$ .

Les solutions sont les couples (1,108), (2,27), (3,12), (6,3), (27,2), (12,3) et (3,6).

b) On a :  $25 = 1 \times 25 = 5 \times 5$  et  $x(5 - y^2) = 25$ .

D'une part : ( $x = 1$  et  $5 - y^2 = 25$ ) ou ( $x = 25$  et  $5 - y^2 = 1$ )

$$(x = 1 \text{ et } y^2 = 20) \text{ ou } (x = 25 \text{ et } y^2 = 4)$$

$$x = 25 \text{ et } y = 2$$

D'autre part :  $x = 5$  et  $5 - y^2 = 5$

Donc :  $x = 5$  et  $y = 0$ .

Donc, les solutions de l'équation  $x(5 - y^2) = 25$  sont les couples (25,2) et (5,0).

$$c) x^2 - 9y^2 = 55 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 55.$$

De plus :  $x - 3y < x + 3y$ .

On en déduit que :  $x^2 - 9y^2 = 55 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ x+3y=55 \end{cases} (1) \text{ ou } \begin{cases} x-3y=5 \\ x+3y=11 \end{cases} (2)$

(1) donne :  $x = 28$  et  $y = 9$ .

Et, (2) donne :  $x = 8$  et  $y = 1$ .

Par conséquent, les solutions de l'équation  $x^2 - 9y^2 = 55$  sont les couples (28,9) et (8,1).

2

a) Les solutions sont les couples (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1) et (2,2).

b)  $xy < 5 - x \Leftrightarrow x(y+1) < 5$

On en déduit les couples solutions (1,1), (1,2), (1,3) et (2,1).

c) On a :  $y < 2(3-x)$  et  $y > 0$ .

Il en résulte :  $1 \leq x \leq 3$ .

Les solutions sont donc les couples (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1) et (2,2).

3

1. a)  $xy = 13$  impose que  $x$  et  $y$  soient de même signe. Les couples vérifiant  $xy = 13$  sont :  $(-1, -13)$ ,  $(-13, -1)$ ,  $(1, 13)$  et  $(13, 1)$ .

b) Comme  $(x-1)y = -7$  alors  $x-1$  et  $y$  sont diviseurs de  $-7$ . Ces entiers relatifs sont également de signes contraires. On en déduit les différents cas suivants :

$x-1 = 1$  et  $y = -7$ ;  $x-1 = -1$  et  $y = 7$ ;  $x-1 = 7$  et  $y = -1$ ;  $x-1 = -7$  et  $y = 1$ .

Il en découle que les couples vérifiant l'équation  $(x-1)y = -7$  sont :  $(2, -7)$ ,  $(0, 7)$ ,  $(8, -1)$  et  $(-6, 1)$ .

c) Les entiers relatifs  $x$  et  $y$  sont donc non nuls et la valeur absolue de leur produit est 1. Par conséquent,  $xy = 1$  ou  $xy = -1$ .

Il en découle que les couples  $(x,y)$  vérifiant l'équation  $|xy| = 1$  sont :  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  et  $(1, 1)$ .

2. a)  $0 < x|y| \leq 2 \Leftrightarrow |xy| \leq 2$  avec  $x$  et  $y$  non nuls, et  $x$  positif.

$$\Leftrightarrow |xy| = 1 \text{ ou } |xy| = 2.$$

Donc, les couples  $(x,y)$  vérifiant l'équation  $0 < x|y| \leq 2$  sont :  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, -2)$  et  $(1, 2)$ .

b) On a :  $150 = 8x + y$  et  $10 \leq x \leq y$

Donc :  $y = 150 - 8x$  et  $10 \leq x \leq y$

$$y = 150 - 8x \text{ et } 10 \leq x \leq 150 - 8x$$

$$y = 150 - 8x \text{ et } x \geq 10 \text{ et } 9x \leq 150$$

$$y = 150 - 8x \text{ et } 10 \leq x \leq 16$$

Pour  $x = 10$ ,  $y = 150 - 8 \times 10 = 70$ .

Pour  $x = 11$ ,  $y = 150 - 8 \times 11 = 62$ .

Pour  $x = 12$ ,  $y = 150 - 8 \times 12 = 54$ .

Pour  $x = 13$ ,  $y = 150 - 8 \times 13 = 46$ .

Pour  $x = 14$ ,  $y = 150 - 8 \times 14 = 38$ .

Pour  $x = 15$ ,  $y = 150 - 8 \times 15 = 30$ .

Pour  $x = 16$ ,  $y = 150 - 8 \times 16 = 22$ .

Il s'ensuit que les couples vérifiant l'équation sont  $(10,70)$ ,  $(11,62)$ ,  $(13,54)$ ,  $(14,46)$ ,  $(14,38)$ ,  $(15,30)$  et  $(16,22)$ .

c) Les couples qui vérifient  $|x|+|y|=5$  sont :  $(-3, -2)$ ,  $(-3, 2)$ ,  $(-2, -3)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(4, -1)$ ,  $(-4, 1)$ ,  $(-1, -4)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, -3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, -2)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(4, -1)$ ,  $(4, 1)$  et  $(5, 0)$ . Parmi ces derniers, ceux qui vérifient  $|xy| \leq 4$  sont :  $(-1, -4)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, -4)$  et  $(1, 4)$ . On conclut que les couples qui vérifient les deux conditions sont :  $(-1, -4)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, -4)$  et  $(1, 4)$ .

4

$$1. a) \sum_{k=0}^0 k = 0 \text{ et } \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0 \text{ donc, } \sum_{k=0}^0 k = \frac{0 \times (0+1)}{2}.$$

$$\text{Supposons que pour un entier } j, \text{ on a : } \sum_{k=0}^j k = \frac{j(j+1)}{2}.$$

$$\text{Démontrons que } \sum_{k=0}^{j+1} k = \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{k=0}^{j+1} k &= \left( \sum_{k=0}^j k \right) + j+1 = \frac{j(j+1)}{2} + j+1 \\ &= \frac{j(j+1) + 2(j+1)}{2} = \frac{(j+1)(j+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=0}^{j+1} k = \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}.$$

$$\text{On conclut que pour tout entier naturel } n, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$b) \sum_{k=0}^0 k^2 = 0 \text{ et } \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0 \text{ donc, } \sum_{k=0}^0 k^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6}.$$

$$\text{Supposons que pour un entier } j, \sum_{k=0}^j k^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}.$$

$$\text{Démontrons que } \sum_{k=0}^{j+1} k^2 = \frac{(j+1)((j+1)+1)(2(j+1)+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{j+1} k^2 = \sum_{k=0}^j k^2 + (j+1)^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} + (j+1)^2$$

$$= \frac{j(j+1)(2j+1) + 6(j+1)^2}{6} = \frac{(j+1)[j(2j+1) + 6(j+1)]}{6}$$

$$= \frac{(j+1)(2j^2 + 7j + 6)}{6}.$$

On a :  $(2j^2 + 7j + 6) = (j+2)(2j+3)$ .

$$\text{Donc : } \sum_{k=0}^{j+1} k^2 = \frac{(j+1)(j+2)(2j+3)}{6} = \frac{(j+1)((j+1)+1)(2(j+1)+1)}{6}.$$

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

$$2. \quad \sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n (k^2 + k) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k.$$

$$\text{Par conséquent : } \sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (1)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

### Autrement

Pour le calcul de  $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$  effectuons le changement de variable suivant.

Posons :  $j = k + 1$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Par conséquent : } \sum_{k=0}^n (k+1)^2 &= \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=0}^0 j^2 + \sum_{j=1}^{n+1} j^2 - \sum_{j=0}^0 j^2 \\
 &= \sum_{j=0}^{n+1} j^2 - 0^2 = \sum_{j=0}^{n+1} j^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{Il en résulte que : } \sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

5

$$S_1 = 1 \text{ et } T_1 = 1. \text{ Donc, } T_1 = S_1^2.$$

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $T_k = S_k^2$ . Démontrons que :  $T_{k+1} = S_{k+1}^2$ .

$$\text{On a : } T_{k+1} = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3.$$

$$\begin{aligned}
 T_{k+1} &= S_k^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
 &= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}
 \end{aligned}$$

$$T_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}.$$

$$\text{Donc : } T_{k+1} = S_{k+1}^2.$$

On conclut que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $T_n = S_n^2$ .

6

$$2^4 = 16 \text{ et } 4^2 = 16 \text{ donc : } 2^4 \geq 4^2$$

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $2^k \geq k^2$ .

Démontrons que :  $2^{k+1} \geq (k+1)^2$ .

$$\text{On a : } 2^k \geq k^2 \text{ donc, } 2^{k+1} \geq 2k^2.$$

$$\text{Or, } 2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1.$$

De plus,  $k \geq 4$  donc,  $k-2 \geq 2$ . Il s'ensuit que :  $k(k-2) - 1 \geq 7$ .

Par conséquent :  $2k^2 - (k+1)^2 > 0$

$$2k^2 > (k+1)^2.$$

On conclut que pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 4,  $2^n \geq n^2$ .

7

Raisonnons par l'absurde

$$3 + 2^n = 3 + 2^{n-1+1} = 3 + 2 \times 2^{n-1}.$$

Supposons qu'il existe un entier naturel  $k$  et que :  $k^2 = 3 + 2 \times 2^{n-1}$ .

Donc : 
$$k^2 = 3 + 2 \times 2^{n-1}$$

$$k^2 - 1 = 2 + 2 \times 2^{n-1}$$

$$k^2 - 1 = 2 + 2 \times 2^{n-1}.$$

$$k^2 \equiv 1 [2]$$

$$k \equiv 1 [2].$$

Il est clair que  $k$  est impair.

Donc, il existe un entier naturel  $p$  tel que :  $k = 2p+1$ .

Par suite : 
$$(2p+1)^2 - 1 = 2 + 2 \times 2^{n-1}$$

$$4p^2 + 4p + 1 - 1 = 2 + 2 \times 2^{n-1}$$

$$4p(p+1) = 2(1 + 2^{n-1})$$

$$2p(p+1) = 1 + 2^{n-1}$$

$$2p(p+1) + 1 = 2^{n-1}.$$

Il ressort de la dernière égalité que lorsque  $n$  est supérieur ou égale à 2,

$2^{n-1}$  est un nombre impair. Ce qui est faux. On conclut que si  $n$  est supérieur ou égale à 2, alors,  $3 + 2^n$  ne peut être un carré parfait.

8

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$(3n+2)^2 - 3(n+1)(3n+1) = 9n^2 + 12n + 4 - 3(3n^2 + 4n + 1)$$

$$= 9n^2 + 12n + 4 - 9n^2 - 12n - 3$$

$$= 9n^2 - 9n^2 + 12n - 12n + 4 - 3$$

Donc :  $(3n+2)^2 - 3(n+1)(3n+1) = 1.$

$$= 9n^2 - 9n^2 + 12n - 12n + 4 - 3$$

Donc :  $(3n + 2)^2 - 3(n + 1)(3n + 1) = 1$ .

2. D'après la question précédente,  $(3n + 2)^2 - 3(n + 1)(3n + 1) = 1$ .

$$3(n + 1)(3n + 1) + 1 = (3n + 2)^2.$$

Il en résulte que  $3(n + 1)(3n + 1) + 1$  est un carré parfait.

## II - DIVISION EUCLIDIENNE

1

1.  $243 = 17 \times 14 + 5$  avec  $0 < 5 < 17$ .

Donc, 14 est le quotient et 5 est le reste de la division euclidienne de a par b.

2.  $50 = 72 \times 0 + 50$  avec  $0 < 50 < 72$ .

0 est le quotient et 50 est le reste de la division euclidienne de a par b.

3.  $34126 = 151 \times 226$

226 est le quotient et 0 est le reste de la division euclidienne de a par b.

4.  $189 = 45 \times 4 + 9$

$$-189 = -45 \times 4 - 9$$

$$-189 = -45 \times 4 - 9 - 45 + 45$$

$$-189 = -45 \times 4 - 45 - 9 + 45$$

$$-189 = -45 \times 5 + 36 \text{ avec } 0 < 36 < 45.$$

5 est le quotient et 36 est le reste de la division euclidienne de a par b.

5.  $63 = 0 \times 10105 + 63$

$$-63 = -10105 \times 0 - 63$$

$$-63 = -10105 \times 0 - 63 - 10105 + 10105$$

$$-63 = -10105 \times 0 - 10105 - 63 + 10105$$

$$-63 = -10105 \times 1 + 10042 \text{ avec } 0 < 10042 < 10105.$$

1 est le quotient et 10042 est le reste de la division euclidienne de a par b.

6.  $2500 = 347 \times 7 + 71$

$$2500 = -347 \times (-7) + 71 \text{ avec } 0 < 71 < 347.$$

-7 est le quotient et 71 est le reste de la division euclidienne de a par b.

7.  $99 = 247 \times 0 + 99$

$$-99 = -247 \times 0 - 99$$

$$-99 = 247 \times 0 - 247 + 247 - 99$$

$$-99 = 247 \times (-1) + 148 \text{ avec } 0 < 148 < 247.$$

-1 est le quotient et 148 est le reste de la division euclidienne de a par b.

2

$$1. 9875 \times 3700 + 4612 = 36537500 + 4612 = 36542112$$

$$\text{Donc : } 36542112 = 9875 \times 3700 + 4612$$

$$2. a) 36542112 = 9875 \times 3700 + 4612 \text{ avec } 0 < 4612 < 9875.$$

3700 est le quotient et 4612 est le reste de la division euclidienne de 36542112 par 9875.

$$b) 36542112 = 9875 \times 3700 + 4612$$

$$36542112 = 9875 \times 3700 + 4612 - 3700 + 3700$$

$$36542112 = 9875 \times 3700 + 3700 + 4612 - 3700$$

$$36542112 = 9876 \times 3700 + 912 \text{ avec } 0 < 912 < 3700.$$

9876 est le quotient et 912 est le reste de la division euclidienne de 36542112 par 3700.

$$c) 36542112 = -9875 \times (-3700) + 4612 \text{ avec } 0 < 4612 < 9875.$$

-3700 est le quotient et 4612 est le reste de la division euclidienne de 36542112 par -9875.

$$d) 36542112 = 9875 \times 3700 + 4612$$

$$-36542112 = -9875 \times 3700 - 4612$$

$$-36542112 = 9875 \times (-3700) - 9875 + 9875 - 4612$$

$$-36542112 = 9875 \times (-3701) + 5263 \text{ avec } 0 < 5263 < 9875.$$

Donc, -3701 est le quotient et 5263 est le reste de la division euclidienne de -36542112 par 9875.

3

$$240 = 1 \times 240 = 2 \times 120 = 3 \times 80 = 4 \times 60 = 5 \times 48 = 8 \times 30 = 10 \times 24 = 12 \times 20$$

$$\text{Donc : } D_+(240) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 30, 48, 60, 80, 120, 240\}.$$

4

$$130 = 1 \times 130 = 2 \times 65 = 5 \times 26 \text{ et } 136 = 1 \times 136 = 2 \times 68 = 4 \times 34 = 8 \times 17.$$

$$D_+(130) = \{1, 2, 5, 26, 65, 130\} \text{ et } D_+(136) = \{1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136\}.$$

$$\text{Par conséquent : } D_+(130) \cap D_+(136) = \{1, 2\}.$$

5

Les multiples de 17 sont les entiers  $17k$  où  $k$  est un entier relatif.

a) Soit  $k$  un entier relatif.

$$64 \leq 17k \leq 2015 \Leftrightarrow \frac{64}{17} \leq k \leq \frac{2015}{17}.$$

$$\text{On a : } \frac{64}{17} \approx 3,76 \text{ et } \frac{2015}{17} \approx 118,52.$$

$$\text{Donc : } 64 \leq 17k \leq 2015 \Leftrightarrow 4 \leq k \leq 118.$$

On en déduit que le nombre de multiples de 17 compris entre 64 et 2015 est 115.

b) Soit  $k$  un entier relatif.

$$-1281 \leq 17k \leq 450 \Leftrightarrow \frac{-1281}{17} \leq k \leq \frac{450}{17}.$$

$$\text{On a : } \frac{-1281}{17} \approx -75,35 \text{ et } \frac{450}{17} \approx 26,47.$$

$$\text{Donc : } 64 \leq 17k \leq 2015 \Leftrightarrow 4 \leq k \leq 118. \quad -1281 \leq 17k \leq 450 \Leftrightarrow -75 \leq k \leq 26.$$

De  $-1$  à  $-1281$ , il y a 1281 entier et de 1 à 26, il y a 26 entier. Il s'ensuit que le nombre multiples de 17 compris entre  $-1281$  et 450 est  $1281 + 26 + 1 = 1308$ .

6

Démontrons que  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3.

On a :  $0 \times (0+1) \times (0+2) = 0$  donc,  $0 \times (0+1) \times (0+2)$  est divisible par 3.

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $k(k+1)(k+2)$  est divisible par 3 et démontrons que  $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$  est divisible par 3. Il existe un entier naturel  $p$  tel que

$$k(k+1)(k+2) = 3p.$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) &= (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= k(k+1)(k+1) + 3(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = 3(p + (k+1)(k+1))$$

Il en résulte que  $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$  est divisible par 3.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3.

Puisque 3 est un nombre premier alors seul l'un d'entre les nombres  $n$ ,  $n+1$  et  $n+2$  est divisible par 3 car il est évident que les deux autres ne peuvent l'être.

7

1. Evident

$$2. a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 = (a-1)(a^2 + a + 1) + 1$$

De plus,  $a \geq 3$  donc,  $a-1 \geq 2$ .

Par conséquent,  $0 < a < a-1$ .

On conclut que  $a^2 + a + 1$  est le quotient et 1 est le reste de la division euclidienne de

par  $a^3$  par  $a-1$ .

$$\text{D'autre part : } a^3 = (a-1)(a^2 + a + 1) + 1$$

$$a^3 = (a-1)(a^2 + a + 1) + 1 - a + a$$

$$a^3 = (a-1)(a^2 + a + 1 - 1) + a$$

$$a^3 = (a-1)(a^2 + a) + a \text{ avec, } 0 < a < a^2 + a.$$

Donc,  $a - 1$  est le quotient et  $a$  est le reste de la division euclidienne de  $a^3$  par  $a^2 + a$ .

8

$q$  et  $16q - 25$  sont des diviseurs de 14. Les diviseurs entiers naturels de 14 sont 1, 2, 7 et 14. Or,  $16q - 25 > 0$ . Il s'ensuit que :  $q \geq 2$ .

Pour  $q = 2$ ,  $16q - 25 = 7$ ;

Pour  $q = 7$ ,  $16q - 25 = 8$  impossible ;

Pour  $q = 14$ ,  $16q - 25 = 199$  impossible ;

La valeur de  $q$  qui convient est 2. On en déduit que  $x$  est égal à 67.

9

On a :  $0 \leq r < b$  donc,  $-b < -r$ ;  $n - 4b < n - r$ ;

Premier cas :  $n - 4b = 1$  et  $n - r = 24$ .

$n = 4b + 1$  et  $4b + 1 - r = 24$ ;

$n = 4b + 1$  et  $r = 4b - 23$

Puisque  $0 \leq r < b$  alors  $0 \leq 4b - 23 < b$

Donc :  $0 \leq 4b - 23$  et  $4b - 23 < b$

Par conséquent :  $7 \leq b \leq 7$ .

Pour  $b = 7$ ,  $n = 29$  et  $r = 5$ . Impossible car  $29 = 4 \times 7 + 1$ .

Deuxième cas :  $n - 4b = 2$  et  $n - r = 12$

$n = 4b + 2$  et  $4b + 2 - r = 12$ ;

$n = 4b + 2$  et  $r = 4b - 10$

Puisque  $0 \leq r < b$  alors  $0 \leq 4b - 10 < b$

Donc :  $0 \leq 4b - 10$  et  $4b - 10 < b$

Il s'ensuit que :  $3 \leq b \leq 3$ .

Pour  $b = 3$ ,  $n = 14$  et  $r = 2$ . On a :  $14 = 3q + 2$ . Ce qui est vrai.

On en déduit que le  $n$  est égal à 14.

Troisième cas,  $n - 4b = 3$  et  $n - r = 8$

$n = 4b + 3$  et  $4b + 3 - r = 8$ ;

$n = 4b + 3$  et  $r = 4b - 5$

Puisque  $0 \leq r < b$  alors  $0 \leq 4b - 5 < b$

Donc :  $0 \leq 4b - 5$  et  $4b - 5 < b$

Il en découle que :  $1 \leq b \leq 1$ .

Pour  $b = 1$ ,  $n = 7$  et  $r = 1$ . impossible.

Quatrième cas,  $n - 4b = 4$  et  $n - r = 6$

$n = 4b + 4$  et  $4b + 4 - r = 6$ ;

$n = 4b + 4$  et  $r = 4b - 2$

Puisque  $0 \leq r < b$  alors  $0 \leq 4b - 2 < b$

Donc :  $0 \leq 4b - 2$  et  $4b - 2 < b$ .

Il en résulte que :  $b = 0$ . Impossible.

10

On a :  $n = 23b + r$ ,  $n - 3b + 2r = 243$  et  $0 \leq r < b$ .

Donc :  $20b + 3r = 243$  et  $0 \leq r < b$

$3r = 243 - 20b$  et  $0 \leq 3r < 3b$

$3r = 243 - 20b$  et  $0 \leq 243 - 20b < 3b$

Il en découle que :  $11 \leq b \leq 12$ .

Pour  $b = 11$ , on a :  $3r = 23$  impossible car 3 ne divise pas 23.

Pour  $b = 12$ , on a :  $3r = 3$  donc,  $r = 1$ .

Par conséquent :  $n = 12 \times 23 + 1 = 277$ .

11

Soit  $n$  un entier naturel.

Si  $n$  est divisible par 4, le résultat est évident.

Si  $n = 4k + 1$  alors  $n + 3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$ . Donc,  $n + 3$  est divisible par 4.

Si  $n = 4k + 2$  alors  $n + 2 = 4k + 4 = 4(k + 1)$ . Donc,  $n + 2$  est divisible par 4.

Si  $n = 4k + 3$  alors  $n + 1 = 4k + 4 = 4(k + 1)$ . Donc,  $n + 1$  est divisible par 4.

Dans tous les cas  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$  est divisible par 4.

### Autrement

$n(n + 1)$  est le produit d'entiers naturels consécutifs. Donc, il est pair. Il en résulte que

$n(n + 1)$  est divisible par 2. De même  $(n + 2)(n + 3)$  est pair. Donc, il est divisible par 2.

Par conséquent,  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$  est divisible par 4.

12

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $8^n - 1 = 7 \times (8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1)$

Donc,  $8^n - 1$  est divisible par 7.

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$43^n - 29^n = (43 - 29)(43^{n-1} + 43^{n-2}29 + \dots + 43 \times 29^{n-2} + 29)$$

$$43^n - 29^n = 14 \times (43^{n-1} + 43^{n-2}29 + \dots + 43 \times 29^{n-2} + 29)$$

14 étant un multiple de 7, il s'ensuit que est divisible par 7.

13

a)  $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$  donc,  $5^0 - 2^0$  est divisible par 3.

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $5^k - 2^k$  est divisible par 3.

Démontrons que  $5^{k+1} - 2^{k+1}$  est divisible par 3.

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \times 5^k - 2 \times 2^k \\ &= 3 \times 5^k + 2 \times 5^k - 2 \times 2^k \\ &= 3 \times 5^k + 2(5^k - 2^k). \end{aligned}$$

Puisque 3 divise  $3 \times 5^k$  et  $5^k - 2^k$  alors, 3 divise  $3 \times 5^k + 2(5^k - 2^k)$ .

Par conséquent,  $5^{k+1} - 2^{k+1}$  est divisible par 3.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $5^n - 2^n$  est divisible par 3.

b)  $7 \times 3^0 + 11^0 = 7 \times 1 + 1 = 8$  donc,  $7 \times 3^0 + 11^0$  est divisible par 8.

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $7 \times 3^k + 11^k$  est divisible par 8.

Démontrons que  $7 \times 3^{k+1} + 11^{k+1}$  est divisible par 8.

$$\begin{aligned} 7 \times 3^{k+1} + 11^{k+1} &= 3 \times 7 \times 3^k + 11 \times 11^k \\ &= 3 \times 7 \times 3^k + 3 \times 11^k + 8 \times 11^k \\ &= 3(7 \times 3^k + 11^k) + 8 \times 11^k \end{aligned}$$

Donc,  $7 \times 3^{k+1} + 11^{k+1}$  est divisible par 8.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $7 \times 3^n + 11^n$  est divisible par 8.

$$c) 5 \times 10^{2 \times 0 + 1} + 2 \times 10^{4 \times 0} + 3 = 5 \times 10 + 2 + 3 = 55$$

Donc,  $5 \times 10^{2 \times 0 + 1} + 2 \times 10^{4 \times 0} + 3$  est divisible par 11.

Supposons que pour un entier naturel  $k$ ,  $5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k} + 3$  est divisible par 11.

Démontrons que  $5 \times 10^{2(k+1)+1} + 2 \times 10^{4(k+1)} + 3$  est divisible par 11.

On a :  $5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k} + 3 = 11p$  où  $p$  est un entier naturel.

$$\text{Donc, } 3 = 11p - (5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k})$$

$$5 \times 10^{2(k+1)+1} + 2 \times 10^{4(k+1)} + 3 = 5 \times 10^{2k+1+2} + 2 \times 10^{4k+4} + 3$$

$$= 5 \times 100 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10000 \times 10^{4k} + 3$$

$$= 5 \times 100 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10000 \times 10^{4k} + 11p - (5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k})$$

$$= 5 \times 99 \times 10^{2k+1} + 2 \times 9999 \times 10^{4k} + 11p$$

$$= 11(45 \times 10^{2k+1} + 1818 \times 10^{4k} + p)$$

Par conséquent,  $5 \times 10^{2(k+1)+1} + 2 \times 10^{4(k+1)} + 3$  est divisible par 11.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $5 \times 10^{2n+1} + 2 \times 10^{4n} + 3$  est divisible par 11.

### Autrement

$$5 \times 10^{2(k+1)+1} + 2 \times 10^{4(k+1)} + 3 = 5 \times 100 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10000 \times 10^{4k} + 3$$

$$= 5 \times 99 \times 10^{2k+1} + 5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 9999 \times 10^{4k} + 2 \times 10^{4k} + 3$$

$$= 11(5 \times 9 \times 10^{2k+1} + 2 \times 909 \times 10^{4k}) + 5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k} + 3$$

$$= 11(45 \times 10^{2k+1} + 1818 \times 10^{4k}) + 5 \times 10^{2k+1} + 2 \times 10^{4k} + 3$$

étant divisible par 11 donc,  $5 \times 10^{2(k+1)+1} + 2 \times 10^{4(k+1)} + 3$  est divisible par 11.

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $5 \times 10^{2n+1} + 2 \times 10^{4n} + 3$  est divisible par 11.

14

$$1. a) C_{4n+1}^5 = \frac{(4n+1)!}{5! \times (4n+1-5)!} = \frac{(4n+1)!}{5! \times (4n-4)!} = \frac{(4n+1)n(4n-1)(4n-2)(4n-3)}{30}$$

$$C_{4n+1}^5 = \frac{(4n+1)n(4n-1)(2n-1)(4n-3)}{15}$$

b)  $C_{4n+1}^5$  est un entier naturel.

Donc :  $(4n+1)n(4n-1)(2n-1)(4n-3)$  est divisible par 15.

$$2. a) C_n^4 \times C_{n+1}^1 = \frac{n!}{4! \times (n-4)!} \times \frac{(n+1)!}{1! \times (n+1-1)!}$$

$$= \frac{n!}{4! \times (n-4)!} \times \frac{(n+1)!}{1! \times (n+1-1)!} = \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$\text{Donc : } C_n^4 \times C_{n+1}^1 = \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

b)  $C_n^4 \times C_{n+1}^1$  est un entier naturel. Il en découle que,  $n^2(n-1)(n-2)(n-3)$  est divisible par 24.

15

1. Pour tout entier relatif  $n$  différent de  $-1$ ,  $\frac{2n+11}{n+1} = 2 + \frac{9}{n+1}$ .

Par conséquent,  $\frac{2n+11}{n+1}$  est un entier relatif lorsque  $n+1$  est un diviseur de 9.

Les diviseurs de 9 sont :  $-9, -3, -1, 1, 3$  et  $9$ .

$$n+1 = -9, n+1 = -3, n+1 = -1, n+1 = 1, n+1 = 3 \text{ ou } n+1 = 9.$$

Il en résulte les valeurs suivantes de  $n$ :  $-10, -4, -2, 0, 2$  et  $8$ .

2. Pour tout entier relatif  $n$ ,  $\frac{6n^2-5}{3n^2+1} = 2 - \frac{7}{3n^2+1}$ .

Par conséquent,  $\frac{6n^2-5}{3n^2+1}$  est un entier relatif lorsque  $3n^2+1$  est un diviseur de 7.

Les diviseurs de 7 sont :  $-7, -1, 1$  et  $7$ .

$$3n^2+1 = -7, 3n^2+1 = -1, 3n^2+1 = 1 \text{ ou } 3n^2+1 = 7.$$

On en déduit que  $n$  prend seulement la valeur 0.

Pour tout entier relatif  $n$ ,  $\frac{4n^3-7n^2-7n+1}{n^2+n+1} = 4n-11 + \frac{12}{n^2+n+1}$ .

Les diviseurs de 12 sont :  $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$  et  $12$ .

$$n^2+n+1 = -12 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -13.$$

$$n^2+n+1 = -6 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -7.$$

$$n^2 + n + 1 = -4 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -5.$$

$$n^2 + n + 1 = -3 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -4.$$

$$n^2 + n + 1 = -2 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -3.$$

$$n^2 + n + 1 = -1 \text{ est équivalent à } n(n+1) = -2.$$

$$n^2 + n + 1 = 1 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 0.$$

$$n^2 + n + 1 = 2 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 1.$$

$$n^2 + n + 1 = 3 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 2.$$

$$n^2 + n + 1 = 4 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 3.$$

$$n^2 + n + 1 = 6 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 5.$$

$$n^2 + n + 1 = 12 \text{ est équivalent à } n(n+1) = 11.$$

De plus,  $n$  et  $n+1$  sont consécutifs. Donc les valeurs de  $n$  qui conviennent vérifient  $n(n+1) = 0$  ou  $n(n+1) = 2$ .

On en déduit que les valeurs de  $n$  sont 0 et 1.

**16**

A est un entier relatif si  $n+1$  divise 3 et  $n+2$  divise 2

Il en découle que  $n+1 \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  et  $n+2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ .

$$n \in \{-4, -3, -2, 0, 1, 2\} \text{ et } n \in \{-4, -3, -1, 0\}.$$

Donc, A est un entier relatif si  $n$  prend l'une des valeurs suivantes :  $-4, -3, -2$ , et 0.

**17**

Supposons que  $a$  supérieur à  $b$  et  $a = 2k$  où  $k$  est un entier naturel.

Donc,  $b = 2k + 2 = 2(k+1)$ .

Si  $a$  est seulement divisible par 2 alors  $k$  est impair et  $k+1$  est pair.

Par conséquent, il existe  $p$  tel que  $k+1=2p$ . Par suite,  $b = 4p$ .

Donc,  $b$  est divisible par 4.

Dans le cas où  $a$  est divisible par 4,  $a = 4k$  et  $b = 4k + 2 = 2(2k+1)$ .

Comme  $2k+1$  étant impair alors  $b$  est seulement divisible par 2.

**18**

Supposons que aucun des entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne soit divisible par 5.

Par conséquent,

$a^2 = 5k + r$ ,  $b^2 = 5k' + r'$  et  $c^2 = 5k'' + r''$  avec  $0 < r < 5$ ,  $0 < r' < 5$  et  $0 < r'' < 5$ .

Donc :  $a^2 + b^2 + c^2 = 5k + r + 5k' + r' + 5k'' + r''$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5(k + k' + k'') + r + r' + r''$$

Puisque,  $a^2 + b^2 + c^2$  est divisible par 5, alors il existe un entier naturel q tel que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5q.$$

Il s'ensuit que :  $5(k + k' + k'') + r + r' + r'' = 5q$

$$r + r' + r'' = 5(q - k - k' - k'').$$

Il en résulte que :  $q > k + k' + k''$  car  $r + r' + r'' > 0$ .

Donc, il existe un entier naturel p tel que :  $k + k' + k'' = q - p$ .

Par suite :  $5(q + p) + r + r' + r'' = 5q$

$$5q + 5p + r + r' + r'' = 5q$$

$$5p + r + r' + r'' = 0.$$

La dernière égalité conduit à  $p = r = r' = r'' = 0$ , ce qui est impossible.

On conclut donc que au moins l'un d'entre les entiers a, b et c est divisible par 5.

19

$$M = 3m^2 + 6m + 5.$$

M étant pair alors m ne peut être pair. Dans ce cas m est impair.

Comme m est impair, il existe un entier naturel k tel que :  $m = 2k + 1$ .

$$\text{Donc : } M = (2k + 1)^2 + (2k + 2)^2 + (2k + 3)^2$$

$$M = 12k^2 + 24k + 14$$

$$M = 2 \times (6k^2 + 12k + 7)$$

On en déduit que M est divisible par 2.

$$\text{De plus : } 6k^2 + 12k + 7 = 2(3k^2 + 6k + 3) + 1$$

Par conséquent,  $6k^2 + 12k + 7$  est impair.

On conclut que 2 est le seul diviseur pair qui soit différent de M lorsque M est pair.

20

a) Puisque  $(n + 4) - (n + 12) = -8$  alors diviseur commun à  $n + 4$  et  $n + 12$  divise  $-8$ .

b) On a :  $2 \times (3n + 23) - 3 \times (2n - 11) = 79$ . Donc tout diviseur commun à  $3n + 23$  et  $2n - 11$  divise 79.

c) On a :  $n^2 - 2 - n \times (n + 1) = -n - 2$ .

Donc, tout diviseur commun de  $n^2 - 2$  et  $n + 1$  divise  $n + 1$  et  $-n - 2$ .

Et :  $-(n + 1) - (-n - 2) = -n + n - 1 + 2 = 1$ .

Par conséquent, tout diviseur commun positif de  $n^2 - 2$  et  $n + 1$  divise 1.

On conclut que 1 est le seul diviseur commun positif de  $n^2 - 2$  et  $n + 1$ .

21

1.  $r - r^m = r \times (1 - r^{m-1})$

Or ;  $r \geq 1$  donc,  $r^{m-1} \geq 1$

$$1 - r^{m-1} \leq 0$$

$$r \times (1 - r^{m-1}) \leq 0$$

$$r - r^m \leq 0$$

Par conséquent :  $r \leq r^m$ .

Puisque  $r^m < b$  alors,  $r < b$ .

On a :  $a = bq + r$  et  $r < b$ .

Donc,  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

2.  $a^m = (bq + r)^m$

$$= (bq)^m + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \times (bq)^k \times r^{m-k} + r^m$$

$$= b^m \times q^m + b \times \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \times b^{k-1} q^k \times r^{m-k} + r^m$$

Donc :  $a^m = b \times (b^{m-1} \times q^m + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \times b^{k-1} q^k \times r^{m-k}) + r^m$  avec  $0 \leq r < b$ .

On conclut que  $r^m$  est le reste de la division euclidienne de  $a^m$  par  $b$ .

22

a) On a :  $y^3 - x^3 = 1 \Leftrightarrow (y - x)(y^2 + yx + x^2) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x=1 \text{ et } y^2+yx+x^2=1 \\ \text{ou} \\ y-x=-1 \text{ et } y^2+yx+x^2=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \text{ et } 3x(x+1)=0 \\ \text{ou} \\ y=x-1 \text{ et } 3(x^2-x)=2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \text{ et } x=0 \text{ ou } x=-1 \text{ (1)} \\ \text{ou} \\ y=x-1 \text{ et } 3(x^2-x)=2 \text{ (2)}. \end{cases}$$

Dans le cas (1) :  $x = 0 \Rightarrow y = 1$ ;  $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Dans le cas (2) :  $3(x^2 - x) = 2$  signifie que 3 est un diviseur de 2. Ce qui est faux.

Il en découle que les couples vérifiant  $y^3 - x^3 = 1$  sont  $(0,1)$  et  $(-1,0)$ .

b) On a :  $y^3 - x^3 = 8 \Leftrightarrow (y-x)(y^2 + yx + x^2) = 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x=1 \text{ et } y^2+yx+x^2=8 \\ \text{ou} \\ y-x=2 \text{ et } y^2+yx+x^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \text{ et } 3(x^2 + x) = 7 \text{ (1)} \\ \text{ou} \\ y = x + 2 \text{ et } 3(x^2 + x) = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Aucun couple  $(x,y)$  ne vérifie (1).

Dans la relation (2) :  $x = 0 \Rightarrow y = 2$  et  $x = -2 \Rightarrow y = 0$ .

On conclut que les couples  $(x,y)$  vérifiant :  $y > x$  et  $y^3 - x^3 = 8$  sont  $(0,2)$  et  $(-2,0)$ .

**23**

a) Pour tout entier naturel  $n$ , 1 est le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 4.

le tableau de congruence modulo 4 de  $a^2 - 2$  est le suivant.

|           |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|
| a         | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $a^2$     | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $a^2 - 2$ | 2 | 3 | 2 | 3 |

Pour tout entier naturel  $a$ ,  $a^2 - 2$  n'est pas congru à 1 modulo 4. On conclut que il n'y pas de couples  $(a,n)$  d'entier naturels tels que  $5^n = a^2 - 2$ .

$$\begin{aligned} \text{b) Pour tout entier naturel } n, \quad 5^n &= a^2 + 9 \Rightarrow 5^n - 5 = a^2 + 4 \\ &\Rightarrow 5(5^{n-1} - 1) = a^2 + 4 \end{aligned}$$

On remarque que  $a$  est forcément pair.

Donc, il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $a = 2k$ .

Par conséquent, lorsque  $n$  est supérieur à 1,

$$5 \times 4 \times (5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5 + 1) = 4k^2 + 4$$

$$5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5 + 1 = k^2 + 1$$

$$5 \times (5^{n-2} + 5^{n-1} + \dots + 5 + 1) = k^2$$

Il en découle que 5 divise  $k$ .

Donc, il existe un entier naturel  $k'$  tel que :  $k = 5k'$ .

$$\text{Par suite : } 5 \times (5^{n-2} + 5^{n-1} + \dots + 5 + 1) = 25k'^2$$

$$5^{n-2} + 5^{n-1} + \dots + 5 + 1 = 5k'^2$$

$$5 \times (k'^2 - 5^{n-3} - 5^{n-2} - \dots - 5 - 1) = 1.$$

Il en résulte que 5 divise 1. Ce qui est impossible.

Donc il n'y a pas de couple  $(a, n)$  qui vérifie l'équation si  $n$  est supérieur ou égal à 3.

$$\text{On a : } 5^0 = a^2 + 9 \Rightarrow 1 = a^2 + 9 \text{ impossible.}$$

$$5^1 = a^2 + 9 \Rightarrow 5 = a^2 + 9 \text{ impossible.}$$

$$5^2 = a^2 + 9 \Rightarrow 25 = a^2 + 9$$

$$\Rightarrow a = 4.$$

On conclut que  $(2, 4)$  est le seul couple vérifiant  $5^n = a^2 + 9$ .

24

$$173^{2014} - 29^{2014} = 144 \times (173^{2013} + 173^{2012} \times 29 + \dots + 173 \times 29^{2012} + 29^{2013})$$

$$173^{2014} = 144 \times (173^{2013} + 173^{2012} \times 29 + \dots + 173 \times 29^{2012} + 29^{2013}) + 29^{2014}.$$

Démontrons que :  $29^{2014} < S$ .

$$\text{On a : } 29 < 173 \text{ et } 29^{2013} \leq 29^{2013}$$

$$\text{Donc : } 29^{2013} < 173 \times 29^{2012}$$

$$29^{2013} < 173^2 \times 29^{2011}$$

$$29^{2013} < 173^{2011} \times 29^2$$

$$29^{2013} < 173^{2012} \times 29$$

$$29^{2013} < 173^{2013}$$

Il en résulte que :  $2013 \times 29^{2013} < S$ .

On en déduit que :  $29^{2014} < S$ .

On conclut que 144 est le quotient et  $29^{2014}$  le reste de la division euclidienne de T par S.

25

1. Supposons que x soit pair. Donc, il existe un entier naturel p tel que :  $x = 2p$ .

Par conséquent : (E)  $\Leftrightarrow 7^{2p} + 2 = y^2$

$$\Leftrightarrow y^2 - (7^p)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (y - 7^p)(y + 7^p) = 2$$

$$\Leftrightarrow y - 7^p = 1 \text{ et } y + 7^p = 2 \text{ car } y + 7^p > y - 7^p.$$

Par suite :  $2 \times 7^p = 1$ .

On en déduit que 2 divise 1. Ce qui est faux.

On conclut que x ne peut être pair.

2. a)  $7^x + 2 = y^2 \Rightarrow 7^{2p+1} + 2 = y^2$

$$\Rightarrow 7 \times 49^p + 2 = y^2$$

$$\Rightarrow -2 \times 49^p + 9 \times 49^p + 2 = y^2$$

$$\Rightarrow -2 \times 49^p + (3 \times 7^p)^2 + 2 = y^2$$

$$\Rightarrow 2 \times (1 - 49^p) = y^2 - (3 \times 7^p)^2$$

$$\Rightarrow 2 \times (1 - 49^p) = (y^2 - 3 \times 7^p)(y^2 + 3 \times 7^p)$$

$$\Rightarrow y^2 + 3 \times 7^p = 2 \text{ et } y^2 - 3 \times 7^p = 1 - 49^p.$$

Il en découle que :  $6 \times 7^p = 1 + 49^p$ .

b) Démontrons par récurrence que :  $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 + 49^p > 6 \times 7^p$ .

On a :  $1 + 49^1 = 50$  et  $6 \times 7^1 = 42$ . Donc,  $1 + 49^1 > 6 \times 7^1$ .

Supposons que pour un entier naturel  $p$ ,  $1 + 49^k > 6 \times 7^k$ .

Démontrons que :  $1 + 49^{k+1} > 6 \times 7^{k+1}$ .

$$\begin{aligned} 1 + 49^{k+1} - 6 \times 7^{k+1} &= 1 + 49 \times 49^k - 7 \times 6 \times 7^k \\ &= 7 + 7 \times 49^k - 7 \times 6 \times 7^k + 42 \times 49^k - 8 \\ &= 7(1 + 49^k - 6 \times 7^k) + 42 \times 49^k - 8. \end{aligned}$$

On a :  $49^k \geq 1$  et  $42 > 8$  donc,  $42 \times 49^k > 8 \times 1$ .

Il s'ensuit que :  $42 \times 49^k - 8 > 0$ .

De plus :  $1 + 49^k > 6 \times 7^k$ .

On en déduit que :  $7(1 + 49^k - 6 \times 7^k) + 42 \times 49^k - 8 > 0$ .

Donc :  $1 + 49^{k+1} - 6 \times 7^{k+1} > 0$   
 $1 + 49^k > 6 \times 7^k$ .

On conclut que pour tout entier naturel  $p$  non nul,  $1 + 49^p > 6 \times 7^p$ .

Il en résulte que :  $1 + 49^p \neq 6 \times 7^p$ .

3. D'après ce qui précède, on a :  $x = 1$ . Ce qui revient à  $y = 3$ .

### III - CONGRUENCE MODULO n

1

$5x = 30 [11]$  et  $30 = 8 [11]$  donc,  $5x = 8 [11]$  avec  $0 < 8 < 11$ .

Il en résulte que 8 est le reste de la division euclidienne de  $5x$  par 11.

$x + y = 33 [11]$  donc,  $x + y = 0 [11]$ .

0 est le reste de la division euclidienne de  $x + y$  par 11.

$x - y = -21 [11]$  donc,  $x - y = 1 [11]$  avec  $0 < 1 < 11$ .

1 est le reste de la division euclidienne de  $x - y$  par 11.

$4x + 6y = 186 [11]$  donc,  $4x + 6y = 10 [11]$  avec  $0 < 10 < 11$ .

10 est le reste de la division euclidienne de  $4x + 6y$  par 11.

On a :  $x^2 = 3 [11]$  et  $y^2 = 5 [11]$  donc,  $x^2 - y^2 = -2 [11]$ ;

$$x^2 - y^2 = 9 [11] \text{ avec } 0 < 9 < 11.$$

Il en découle que 9 est le reste de la division euclidienne de  $x^2 - y^2$  par 11.

On a :  $x - y = 1 [11]$  et  $4x + 6y = 10 [11]$ .

Donc :  $(x - y)(4x + 6y) = 10 [11]$  avec  $0 < 10 < 11$ .

10 est le reste de la division euclidienne de  $(x - y)(4x + 6y)$  par 11.

On a :  $x^2 - y^2 = 9 [11]$  donc,  $(x^2 - y^2)^3 = 3 [11]$  avec  $0 < 3 < 11$ .

Donc, 3 est le reste de la division euclidienne de  $(x^2 - y^2)^3$  par 11.

2

$2x = 2y [7]$  et  $x^2 = y^2 [7]$  donc :  $x^2 + 2x = y^2 + 2y [7]$

$$x^2 + 2x - 3 = y^2 + 2y - 3 [7]$$

Par conséquent :

$$(x+3)(x-1) = (y+3)(y-1) [7].$$

3

1.  $3 = 3 [7]$ ;  $3^2 = 2 [7]$ ;  $3^3 = 6 [7]$ ;  $3^4 = 4 [7]$ ;  $3^5 = 5 [7]$ ;  $3^6 = 1 [7]$ .

La division euclidienne de 2014 par 6 donne :  $2014 = 6 \times 335 + 4$ .

Comme  $3^6 = 1 [7]$  alors  $(3^6)^{335} = 1^{335} [7]$

$$3^{6 \times 335} \times 3^4 = 1 \times 4 [7]$$

$$3^{6 \times 335 + 4} = 4 [7]$$

$$3^{2014} = 4 [7] \text{ avec } 0 < 4 < 7.$$

On conclut que le reste de la division euclidienne de  $3^{2014}$  par 7 est 4.

Par ailleurs :  $11 = 4 [7]$ ;  $11^2 = 2 [7]$ ;  $11^3 = 1$ .

La division euclidienne de 2014 par 3 donne :  $2014 = 3 \times 671 + 1$ .

Puisque  $11^3 = 1$  alors  $(11^3)^{671} = 1$

$$11^{3 \times 671} = 1 [7]$$

$$11^{3 \times 671 + 1} = 4 \times 11 [7]$$

$$11^{2014} = 44 [7]$$

De plus :  $44 = 2 [7]$ . Donc :  $11^{2014} = 2 [7]$  avec  $0 < 2 < 7$ .

Le reste de la division euclidienne de  $11^{2014}$  par 7 est 2.

2.  $5^0 = 1 [7]$ ;  $5 = 5 [7]$ ;  $5^2 = 4 [7]$ ;  $5^3 = 6 [7]$ ;  $5^4 = 2 [7]$ ;  $5^5 = 3 [7]$  et  $5^6 = 1 [7]$ .

On a :  $5^{18} = (5^6)^3$ .

En tenant compte de la question précédente, on a :  $3^{41} = (3^6)^6 \times 3^5$ .

Par suite :  $8 \times 5^{18} - 3^{41} = 8 \times 1 - 1 \times 3 [7]$

$$8 \times 5^{18} - 3^{41} = 5 [7] \text{ avec } 0 < 5 < 7.$$

On en déduit que 5 est le reste de la division euclidienne de  $8 \times 5^{18} - 3^{41}$  par 7.

4

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } m^{k+1} + 1 - m(m^{k-1} + 1) &= m^{k+1} + 1 - m^k - m \\ &= m^{k+1} - m^k - (m - 1) \\ &= (m - 1)m^k - (m - 1) \\ &= (m - 1)(m^k - 1) \end{aligned}$$

Or :  $m^k \equiv 1 [p]$  implique  $m^k - 1 \equiv 0 [p]$

Par suite :  $m^{k+1} + 1 - m(m^{k-1} + 1) = 0 [p]$ .

Donc :  $m^{k+1} + 1 = m(m^{k-1} + 1) [p]$ .

2. On a :  $10^0 = 1 [5]$ ;  $13^1 = 3 [5]$ ;  $13^2 = 4 [5]$ ;  $13^3 = 2 [5]$ ;  $13^4 = 1 [5]$ .

Et, on a :  $2016 = 4 \times 504$ .

Donc, d'après la question 1.) :  $13^{2016+1} + 1 = 13 \times (13^{2016-1} + 1) [5]$

$$13^{2017} + 1 = 13 \times (13^{2015} + 1) [5].$$

5

a) Soit  $x$  un entier relatif. Les restes possibles de la division euclidienne de  $x$  par 5 sont : 0, 1, 2, 3 et 4. Par suite, on a :  $x = 0 [5]$  ou  $x = 1 [5]$  ou ...ou  $x = 4 [5]$ .

Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 5 suivant.

|      |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|
| $x$  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $3x$ | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |

On déduit du tableau que :  $3x = 1 [5] \Leftrightarrow x = 2 [5]$ .

$$3x = 1 [5] \Leftrightarrow x = 2 + 5k; k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions de l'équation  $3x = 1 [5]$  sont les nombres  $2 + 5k$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

b) Pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$ ,

$$x^2 = -3 [7] \Leftrightarrow x^2 = -3 + 7k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 + 7 \times (-1 + k); k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 7k; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 7k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 7p \text{ ou } x+2 = 7p; p \in \mathbb{Z} \text{ car } 7 \text{ nombre premier.}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 7p \text{ ou } x = -2 + 7p; p \in \mathbb{Z}$$

Donc, les solutions de l'équation  $x^2 = -3 [7]$  sont les nombres  $2 + 7p$  et  $-2 + 7p$  où  $p$  est un entier relatif.

c) Pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$ ,

$$x^2 - 5x = 2 [3] \Rightarrow x^2 - 2x = -1 [3]$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 [3]$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 [3]$$

$$\Rightarrow x-1 = 0 [3] \text{ car } 3 \text{ est un nombre premier.}$$

$$\Rightarrow x = 1 [3]$$

Réciproquement :  $x = 1 [3] \Rightarrow x^2 = 1 [3]$  et  $-5x = -5 [3]$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 1 - 5 [3]$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = -4 [3]$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 2 [3]$$

Par suite :  $x^2 - 5x = 2 [3] \Leftrightarrow x = 1 [3]$

On conclut que les solutions de l'équation  $x^2 - 5x = 2$  sont les entiers relatifs  $1+3k$  où  $k$  est un entier relatif.

6

Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 4 sont : 0, 1, 2 et 3.

Donc, on a :  $n = 0 [4]$ ,  $n = 1 [4]$ ,  $n = 2 [4]$  ou  $n = 3 [4]$ .

Considérons le tableau de congruence modulo 4 suivant.

|                |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|
| $n$            | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $n^2$          | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $n^2 + 3$      | 3 | 0 | 1 | 0 |
| $n^2(n^2 + 3)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

On déduit du tableau que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2(n^2 + 3) = 0 [4]$ .

7

Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 7 sont : 0, 1, 2, ..., 5 et 6.

Donc, on a :  $n = 0 [7]$ ,  $n = 1 [7]$ , ...ou  $n = 6 [7]$ .

Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 7 suivant.

|                   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$               | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $3n - 2$          | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 | 2 |
| $n + 1$           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| $(3n - 2)(n + 1)$ | 5 | 2 | 5 | 0 | 1 | 1 | 0 |

On déduit du tableau que :

Pour  $n = 7k + 3$  ou  $n = 7k + 6$  où  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ ,

Le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7 est 0.

Pour  $n = 7k + 4$  ou  $n = 7k + 5$  où  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ ,

Le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7 est 1.

Pour  $n = 7k + 2$  ou  $n = 7k$  où  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ ,

Le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7 est 5.

Le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7 est 5.

Pour  $n = 7k + 1$  où  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ ,

Le reste de la division euclidienne de  $(3n - 2)(n + 1)$  par 7 est 2.

8

Posons :  $A = (n+5)(n+7)(5n+2)n$

Les restes de la division euclidienne de  $n$  par 3 sont 0, 1 et 2.

Donc :  $n = 0 [3]$ ,  $n = 1 [3]$ ,  $n = 2 [3]$ .

Considérons le tableau de congruence modulo 3 suivant.

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| n      | 0 | 1 | 2 |
| n + 5  | 2 | 0 | 1 |
| n + 7  | 1 | 2 | 0 |
| 5n + 2 | 2 | 1 | 0 |
| A      | 0 | 0 | 0 |

Donc, A est divisible par 3.

D'autre part, les restes de la division euclidienne de  $n$  par 8 sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Donc :  $n = 0 [8]$ ,  $n = 1 [8]$ ,  $n = 2 [8]$ ,  $n = 3 [8]$ ,  $n = 4 [8]$ ,  $n = 5 [8]$ ,

$n = 6 [8]$  et  $n = 7 [8]$ .

Tableau de congruence modulo 8.

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| n + 5  | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| n + 7  | 2 | 7 | 4 | 1 | 6 | 3 | 0 | 5 |
| 5n + 2 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 5 | 6 |
| A      | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc, A est divisible par 8.

Or, 3 et 8 sont premiers entre eux et chacun d'entre eux divise A par conséquent, 24 divise A.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(n+5)(n+7)(5n+2)n$  est divisible par 24.

9

1. On a :  $6 = 2 [4]$

Donc tout entier naturel  $n$ ,  $6^n = 2^n [4]$

$$6^n - 2^n = 0 [4]$$

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $6^n - 2^n$  est divisible par 4.

2. On a :  $81 = 3 [13]$  et  $16 = 3 [13]$ .

$$3^4 = 3 [13] \text{ et } 4^2 = 3 [13].$$

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{4n} = 3^n [13]$  et  $4^{2n} = 3^n [13]$ .

Par suite :  $3^{4n} - 4^{2n} = 3^n - 3^n [13]$

Donc :  $3^{4n} - 4^{2n} = 0 [13]$ .

Par conséquent, pour tout entier naturel  $n$ ,  $6^n - 2^n$  est divisible par 13.

10

On a :  $4^0 = 1 [9]$ ;  $4^1 = 4 [9]$ ;  $4^2 = 7 [9]$  et  $4^3 = 1 [9]$ .

Les exposants 0, 1 et 2 sont les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 3.

Par conséquent,  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$  ou  $n = 3k + 2$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pour  $n = 3k$ ,  $4^n = 4^{3k} = (4^3)^k$ .

Comme  $4^3 = 1 [9]$  alors  $(4^3)^k = 1 [9]$

Donc :  $4^n = 1 [9]$  avec  $0 < 1 < 9$ .

On en déduit que 1 est le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 9.

Pour  $n = 3k + 1$ ,  $4^n = 4^{3k+1} = (4^3)^k \times 4$ .

On a :  $(4^3)^k = 1 [9] \Rightarrow (4^3)^k \times 4 = 4 [9]$

$\Rightarrow 4^n = 4 [9]$  avec  $0 < 4 < 9$ .

Par conséquent, 4 est le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 9.

Pour  $n = 3k + 2$ ,  $4^n = 4^{3k+2} = (4^3)^k \times 4^2$ .

Or :  $(4^3)^k = 1 [9]$  et  $4^2 = 7 [9]$  donc,  $(4^3)^k \times 4^2 = 7 [9]$

$4^n = 7 [9]$  avec  $0 < 7 < 9$ .

Il en découle que 7 est le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 9.

11

On a :  $5 = 5 [7]$ ;  $5^2 = 4 [7]$ ;  $5^3 = 6 [7]$ ;  $5^4 = 2 [7]$ ;  $5^5 = 3 [7]$ ;  $5^6 = 1 [7]$ .

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(5^6)^n = 1^n [7]$

$25^{3n} = 1 [7]$

De plus :  $17 = 3 [7]$ . Par conséquent :  $17 \times 25^5 3 = 3 [7]$

$$17 \times 5^{5n} = 6 [7] \quad (1)$$

Par ailleurs :  $8 = 1 [7]$ .

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $8^n = 1 [7]$  et  $4 \times 8^n = 4 [7]$  (2)

Des relations (1) et (2), on a :  $17 \times 25^{3n} + 4 \times 8^n = 3 + 4 [7]$ .

Il en résulte que :  $17 \times 25^{3n} + 4 \times 8^n = 0 [7]$

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $17 \times 5^{3n} + 4 \times 8^n$  est divisible par 7.

## 12

1.  $8^2 = 64 = 13 \times 4 + 12$  donc,  $8^2 = 12 [13]$ .

Comme  $8^2 = 12 [13]$  et  $8 = 8 [13]$  alors  $8^3 = 8 \times 12 [13]$

Or,  $8 \times 12 = 96 = 13 \times 7 + 5$  donc,  $8^3 = 5 [13]$ .

On a :  $(8^2)^2 = 12^2 [13]$ ;  $8^4 = 144 [13]$  et  $144 = 13 \times 11 + 1$

Par conséquent :  $8^4 = 1 [13]$ .

On conclut que :  $8^2 = 12 [13]$ ;  $8^3 = 5 [13]$  et  $8^4 = 1 [13]$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $8^{4n+1} = (8^4)^n \times 8$ ,  $8^{4n+2} = (8^4)^n \times 8^2$  et  $8^{4n+3} = (8^4)^n \times 8^3$ .

On a :  $8^4 = 1 [13] \Rightarrow (8^4)^n = 1 [13]$ .

Donc :  $(8^4)^n \times 8 = 8 [13]$ ,  $(8^4)^n \times 8^2 = 12 [13]$  et  $(8^4)^n \times 8^3 = 5 [13]$ .

Il en découle que :  $8^{4n} = 1 [13]$ ,  $8^{4n+1} = 8 [13]$ ;  $8^{4n+2} = 12 [13]$  et  $8^{4n+3} = 5 [13]$ .

3.  $76 = 4 \times 19$ . Puisque  $8^{4n} = 1 [13]$  alors  $8^{76} = 1 [13]$  avec  $0 < 1 < 13$ .

Donc, 1 est le reste de la division euclidienne de  $8^{76}$  par 13.

On a :  $512 = 8^3$ . Par suite,  $512^{206} = (8^3)^{206} = 8^{618}$ .

Or :  $618 = 4 \times 154 + 2$  et  $8^{4n+2} = 12 [13]$ .

On en déduit que :  $512^{206} = 12 [13]$  avec  $0 < 12 < 13$ .

Il en découle que 12 est le reste de la division euclidienne de  $512^{206}$  par 13.

$$\text{On a : } 20634 = 4 \times 5157 + 3 \text{ et } 8^{4n+3} = 5 [13].$$

$$\text{Il s'ensuit que : } 8^{20631} = 5 [13]$$

$$\text{Par suite : } 7 \times 8^{20631} + 2 = 7 \times 5 + 2 [13]$$

$$7 \times 8^{20631} + 2 = 11 [13] \text{ avec } 0 < 11 < 13.$$

On conclut que 11 est le reste de la division euclidienne de  $7 \times 8^{20631} + 2$  par 13.

**13**

$$2014 = 17 \times 118 + 8 \text{ avec } 0 < 8 < 17 \text{ donc, } 2014 = 8 [17].$$

$$\text{Par conséquent : } 2014^{19327} = 8^{19327} [17].$$

$$\text{On a : } 8^0 = 1 [17]; 8^1 = 8 [17]; 8^2 = 13 [17]; 8^3 = 2 [17]; 8^4 = 16 [17];$$

$$8^5 = 9 [17]; 8^6 = 4 [17]; 8^7 = 15 [17]; 8^8 = 1 [17].$$

$$\text{De plus : } 19327 = 8 \times 2415 + 7.$$

$$\text{Donc : } 8^{19327} = 8^{8 \times 2415 + 7} = (8^8)^{2415} \times 8^7$$

$$\text{Il s'ensuit que : } 8^{19327} = 15 [17].$$

$$\text{Donc : } 2014^{19327} = 15 [17] \text{ avec } 0 < 15 < 17.$$

On conclut que 15 est le reste de la division euclidienne de  $2014^{19327}$  par 17.

**14**

$$\text{On a : } 8013002486 = 5 [11].$$

$$\text{Donc : } (8013002486 + n)^4 = 0 [11] \Rightarrow (5 + n)^4 = 0 [11]$$

$$\Rightarrow 5 + n = 0 [11]$$

$$\Rightarrow n = 6 [11]$$

$$\Rightarrow n = 6 + 11k \text{ où } k \text{ un entier naturel.}$$

$$\text{La centième valeur de } n \text{ est } n = 6 + 11 \times 99 = 1095.$$

On en déduit que 1095 est le centième entier naturel  $n$  qui rend  $(8013002486 + n)^4$  divisible par 11.

15

$$\text{On a : } (a + b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j \times a^j \times b^{n-j}$$

$$(a + b)^n = a^n + b^n + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \times a^j \times b^{n-j}$$

$$(a + b)^n = a^n + b^n + \sum_{j=0}^{n-2} C_n^j \times a^{j+1} \times b^{n-j-1}$$

$$(a + b)^n = a^n + b^n + ab \times \sum_{j=0}^{n-2} C_n^j \times a^j \times b^{n-2-j}$$

Donc :  $(a+b)^n = a^n + b^n [ab]$ .

16

1.  $10^0 + 1 = 2 = 0 \times 11 + 2$

$$10^1 + 1 = 11$$

$$10^2 + 1 = 101 = 9 \times 11 + 2$$

$$10^3 + 1 = 1001 = 91 \times 11$$

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $n = 2k$  ou  $n = 2k + 1$  avec  $k$  un entier naturel.

Si :  $n = 2k$ ,  $10^n = (10^2)^k = 100^k$ .

On a :  $100 = 1 [11]$  donc,  $100^k = 1 [11]$

$$10^n + 1 = 2 [11] \quad \text{avec } 0 < 2 < 11.$$

Donc, 2 est le reste de la division euclidienne de  $10^n + 1$  par 11.

Si :  $n = 2k+1$ ,  $10^n = (10^2)^k \times 10 = 100^k \times 10$ .

On a :  $100 = 1 [11]$  donc,  $(10^2)^k = 1 [11]$

$$10^{2k} = 1 [11]$$

$$10^{2k} \times 10 = 10 [11] \quad \text{avec } 10 = -1 [11]$$

Par suite :

$$10^{2k+1} = -1 [11]$$

$$10^n + 1 = 0 [11]$$

17

1. a)  $3^0 = 1 [5]; 3 = 3 [5]; 3^2 = 4 [5]; 3^3 = 2 [5]; 3^4 = 1 [5].$

b) Dans les relations précédentes les exposants 0, 1, 2, 3 et 4 sont les restes de la division euclidienne d'un entier naturel par 4.

On a :  $47 = 4 \times 11 + 3, 29 = 4 \times 7 + 1$  et  $3^4 = 1 [5].$

Donc :  $3^{47} = 3^{4 \times 11 + 3} = (3^4)^{11} \times 3^3$  et  $3^{29} = 3^{4 \times 7 + 1} = (3^4)^7 \times 3.$

Par suite :  $3^{47} = 1^{11} \times 2 [5]$  et  $3^{29} = 1^7 \times 3 [5]$

$$3^{47} = 2 [5] \text{ et } 3^{29} = 3 [5]$$

$$3^{47} = 2 [5] \text{ et } 4 \times 3^{29} = 2 [5]$$

Donc :  $3^{47} + 4 \times 3^{29} = 4 [5].$

2. a) On a :  $3^2 = 4 [5]$  et  $3^3 = 2 [5].$

Par conséquent :  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 4 + 2 [5].$

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 10 [5].$$

Il en résulte que :  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 0 [5].$

b) En considérant le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4, on déduit les possibilités suivantes :  $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2$  et  $n = 4k + 3.$

Pour  $n = 4k$  :  $A(n) = \sum_{i=1}^{k-1} 3^4(1+3+3^2+3^3) + 3^{4k}.$

De plus :  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 0 [5], 3^4 = 1 [5]$  et  $3^{4k} = 1 [5]$

Il s'ensuit que :  $A(n) = 1 [5].$

Donc, le reste de la division euclidienne de  $A(n)$  par 5 est 1.

Pour  $n = 4k+1$ :

$$A(n) = \sum_{i=1}^{k-1} 3^4(1+3+3^2+3^3) + 3^{4k} + 3^{4k+1} \text{ avec } 3^{4k+1} = 3 [5]$$

Donc :  $A(n) = 4 [5].$

Le reste de la division euclidienne de  $A(n)$  par 5 est 4.

Pour  $n = 4k+3$ :

$$A(n) = \sum_{i=1}^{k-1} 3^4(1+3+3^2+3^3) + 3^{4k} + 3^{4k+1} + 3^{4k+2} + 3^{4k+3} \quad \text{avec } 3^{4k+3} = 2 \text{ [5]}$$

Donc :  $A(n) = 0$  [5].

Le reste de la division euclidienne de  $A(n)$  par 5 est 0.

18

1.  $n$  est impair. Donc, il existe un entier naturel  $k$  tel que :

$$1 + 2^n = 1 + 2^{2k+1} = 1 + 2 \times 4^k.$$

On a :  $4 = 1$  [3];  $4^k = 1$  [3];  $2 \times 4^k = 2$  [3]. Donc,  $1 + 2 \times 4^k = 3$  [3]

Par conséquent :  $1 + 2^n = 0$  [3]. On conclut que  $1 + 2^n$  est divisible par 3 lorsque  $n$  est impair.

D'autre part :  $1 + 2^n + 3^n = 1 + 2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 1 + 2 \times 4^k + 3 \times 9^k.$

Démontrons par récurrence que  $4^k - 4$  et  $9^k - 3$  sont divisibles par 6.

On a :  $4^1 - 4 = 4 - 4 = 0$ . Donc,  $4^1 - 4$  est divisible par 6.

Supposons que pour un entier  $j$ ,  $4^j - 4$  soit divisible par 6 et démontrons que  $4^{j+1} - 4$  est divisible par 6.

On a :  $4^{j+1} - 4 = 4 \times 4^j - 4 = 4 \times (4^j - 4 + 4) - 4 = 4 \times (4^j - 4) + 12$ .

Comme  $4^j - 4$  et 12 sont divisibles par 6 alors  $4^{j+1} - 4$  est divisible par 6.

Il s'ensuit que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur non nul,  $4^k - 4$  est divisible par 6.

De même,  $9^1 - 3 = 9 - 3 = 6$ . Donc,  $9^1 - 3$  est divisible par 6.

Supposons que pour un entier  $j$ ,  $9^j - 3$  soit divisible par 6 et démontrons que  $9^{j+1} - 3$  est divisible par 6.

On a :  $9^{j+1} - 3 = 9 \times 9^j - 3 = 9 \times (9^j - 3 + 3) - 3 = 9 \times (9^j - 3) + 24$ .

Comme  $9^j - 3$  et 24 sont divisibles par 6 alors  $9^{j+1} - 3$  est divisible par 6.

Par conséquent, pour tout entier naturel  $k$  supérieur non nul,  $9^k - 3$  est divisible par 6.

Par suite :  $4^k = 4$  [6] et  $9^k = 3$  [6].

Donc :  $1 + 2 \times 4^k + 3 \times 9^k = 18$  [6];

On en déduit que  $1 + 2^n + 3^n$  est divisible par 6 lorsque  $n$  est impair.

2. En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$16^k = (10 + 6)^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \times 10^i \times 6^{k-i} + 6^k.$$

Or :  $\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \times 10^i \times 6^{k-i}$  est une somme de nombres où 0 est le chiffre des unités.

De plus le chiffre des unités de  $6^k$  est 6. Donc, le chiffre des unités de  $16^k$  est 6.

3. a) Puisque  $n = 0 [4]$  alors, il existe un entier naturel  $p$  tel que  $n = 4p$ .

$$\text{Donc : } 1 + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4p} + 3^{4p} + 4^{4p} = 1 + 16^p + 81^p + 16^{2p}$$

On a :  $16^p = 6 [10]$ ,  $81^p = 1 [10]$  et  $16^{2p} = 6 [10]$ .

Par conséquent :  $1 + 16^p + 81^p + 16^{2p} = 1 + 6 + 1 + 6 [10]$

$$1 + 16^p + 81^p + 16^{2p} = 14 [10]$$

Donc :  $1 + 2^n + 3^n + 4^n = 4 [10]$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 + 2^n + 3^n + 4^n &= 1 + 2 \times 4^k + 3 \times 9^k + 4 \times 16^k \\ &= 1 + 2 \times (10 - 6)^k + 3 \times (10 - 1)^k + 4 \times 16^k. \end{aligned}$$

Lorsque  $k$  est impair :

$$(10 - 6)^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \times 10^i \times (-6)^{k-i} - 6^k;$$

$$(10 - 1)^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \times 10^i \times (-1)^{k-i} - 1.$$

On a :  $6^k = 6 [10]$ ;  $-6^k = 4 [10]$  et  $16^k = 6 [10]$ ;

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2 \times 4 + 3 \times 9 + 4 \times 6 [10].$$

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n = 60 [10].$$

Lorsque  $k$  est pair :  $1 + 2^n + 3^n + 4^n = 40 [10]$ .

On conclut que  $1 + 2^n + 3^n + 4^n$  est divisible par 10 lorsque  $n$  est impair.

## IV - NUMERATION

1

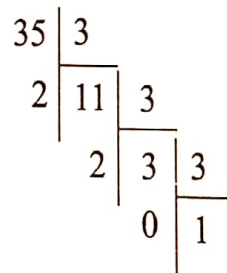
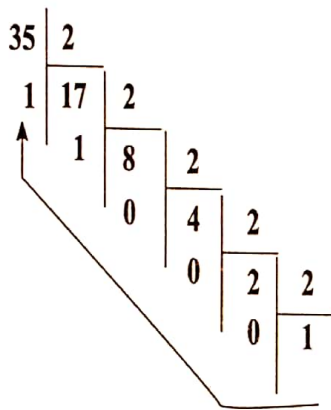
$$2^6 + 2^4 + 2^3 + 1 = \overline{1011001}^2.$$

$$2^4 + 2^3 + 2^5 = 2^5 + 2^4 + 2^3 = \overline{111000}^2.$$

$$3^4 + 3^2 + 3 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = \overline{1011110}^2.$$

$$2^4 + 3^2 = 2^4 + 2^3 + 1 = \overline{11001}^2.$$

2



Donc :  $35 = \overline{100011}^2$  et  $35 = \overline{1022}^3$ .

3

$$\overline{11101} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29; \overline{11101} = 29.$$

$$\overline{10100110} = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2 = 64 + 32 + 4 + 2 = 102; \overline{11101} = 102.$$

4

1. Posons  $x = \sum_{i=0}^k x_i \times 10^i$  avec  $0 \leq x_i < 10$  si  $0 \leq i \leq k-1$  et  $0 < x_k < 10$ .

On a :  $10 = 2 [4]$  donc,  $10^2 = 0 [4]$

Par suite, pour tout  $i$  élément de  $\{2; 3 \dots; k-1\}$ ,  $10^i = 0 [4]$

Donc :

$$x_i \times 10^i = 0 \text{ [4]}$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=2}^k x_i \times 10^i = 0 \text{ [4]}$$

$$x_0 + x_1 \times 10 + \sum_{i=2}^k x_i \times 10^i = x_0 + x_1 \times 10 \text{ [4]}$$

$$x = x_0 + x_1 \times 10 \text{ [4].}$$

Par conséquent, un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

2. Posons :  $x = \sum_{i=0}^k x_i \times 10^i$  avec  $0 \leq x_i < 10$  si  $0 \leq i \leq k-1$  et  $0 < x_k < 10$ .

On a :  $10 = -1 \text{ [11]}$

Par suite, pour tout  $i$  élément de  $\{0; 1; 2; \dots; k-1\}$ ,  $10^i = (-1)^i \text{ [11]}$

Donc :

$$x_i \times 10^i = x_i \times (-1)^i \text{ [11]}$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^k x_i \times 10^i = \sum_{i=0}^k x_i \times (-1)^i \text{ [11]}$$

$$x = \sum_{i=0}^k x_i \times (-1)^i \text{ [11]}$$

5

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } a + b - (b + a) &= a + b - b - a \\ &= a - a + b - b = 0 \end{aligned}$$

Donc, le nombre abba est divisible par 11.

$$\begin{aligned} \text{De même, } a + b + a + b - (b + a + b + a) &= 2a - 2b - 2a - 2b \\ &= 2a - 2a + 2b - 2b = 0. \end{aligned}$$

Donc, le nombre abbaabba est divisible par 11.

2. La somme des chiffres de rangs pairs est :  $a + c + b$ .

Et, la somme des chiffres de rangs impairs est  $b + a + c$ .

$$\text{On a : } a + c + b - (b + a + c) = a + c + b - b - a - c$$

On en déduit que le nombre abcabc est divisible par 11.

D'autre part, la somme des chiffres de rangs pairs de aabbcc est :  $a + b + c$ .

Et, la somme des chiffres de rangs impairs de aabbcc est  $a + b + c$ .

$$\text{On a : } a + b + c - (a + b + c) = a + b + c - a - b - c$$

2. Et, la somme des chiffres de rangs impairs de  $aabbcc$  est  $a + b + c$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } a + b + c - (a + b + c) &= a + b + c - a - b - c \\ &= a - a + c - c + b - b = 0. \end{aligned}$$

On conclut que le nombre  $aabbcc$  est divisible par 11.

6

1. On a :  $10^0 = 1 [13]$ ,  $10 = -3 [13]$ ,  $10^2 = -4 [13]$ ,  $10^3 = -1 [13]$ ,  $10^4 = 3 [13]$ ,  
 $10^5 = 4 [13]$ ;  $10^6 = 1 [13]$ .

2. Par conséquent :  $ab = 10a + b$ .

Il en découle que  $ab$  est divisible par 13 si  $b - 3a$  est divisible par 13.

On a :  $abc = 10^2a + 10b + c$ . De plus,  $10^2c + 10b + a = -4a - 3b + c [13]$ .

Il en résulte que  $abc$  est divisible par 13 si  $-4a - 3b + c$  est divisible par 13.

On a :  $abcd = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ .

De plus :  $10^3a + 10^2b + 10c + d = -a - 4b - 3c + d [13]$ .

Donc,  $abcd$  est divisible par 13 si  $a - 3b - 4c - d$  est divisible par 13.

On a :  $abcde = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$ .

Or :  $10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e = 3a - b - 4c - 3d + e [13]$ .

Donc,  $abcde$  est divisible par 13 si  $3a - b - 4c - 3d + e$  est divisible par 13.

On a :  $abcdef = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ .

Or :  $10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f = 4a + 3b - c - 4d + -3e + f [13]$ .

Donc,  $abcdef$  est divisible par 13 si  $4a + 3b - c - 4d + -3e + f$  est divisible par 13.

3.  $4a + 3a - a - 4a - 3a + a = 8a - 8a = 0$

On en déduit que le nombre  $aaaaaa$  est divisible par 13.

D'autre part :  $4a + 3b - a - 4a - 3b + a = a - a - 3b + 3b = 0$

On en déduit que le nombre  $abaaba$  est divisible par 13.

Enfin :  $4a + 3b - c - 4a - 3b + c = 4a - 4a + 3b - 3b - c + c = 0$

Donc, le nombre  $abcabc$  est divisible par 13.

7

1. a) On a :  $10^0 = 1 [13]$ ;  $10^1 = -3 [13]$ ;  $10^2 = -4 [13]$ ;  $10^3 = -1 [13]$ ;  $10^4 = 3 [13]$ ;  
 $10^5 = 4 [13]$ ;  $10^6 = 1 [13]$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x &= a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^4 + a_5 \times 10^5 \\
 &+ a_6 \times 10^6 + a_7 \times 10^7 + a_8 \times 10^8 + a_9 \times 10^9 + a_{10} \times 10^{10} + a_{11} \times 10^{11} \\
 &+ \dots + a_{6k-2} \times 10^{6k-2} + a_{6k-1} \times 10^{6k-1} + a_{6k} \times 10^{6k} \\
 &+ a_{6k-5} \times 10^{6k-5} + a_{6k-4} \times 10^{6k-4} + a_{6k-3} \times 10^{6k-3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^4 + a_5 \times 10^5 \\
 &+ 10^6 (a_6 + a_{6 \times 1 + 1} \times 10 + a_{6 \times 1 + 2} \times 10^2
 \end{aligned}$$

$$+ a_{6 \times 1 + 3} \times 10^3 + a_{6 \times 1 + 4} \times 10^4 + a_{6 \times 1 + 5} \times 10^5)$$

$$+ \dots + 10^{6(k-1)} (a_{6(k-1)} + a_{6(k-1)+1} \times 10 + a_{6(k-1)+2} \times 10^2$$

$$+ a_{6(k-1)+3} \times 10^3 + a_{6(k-1)+4} \times 10^4 + a_{6(k-1)+5} \times 10^5).$$

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} 10^{6i} (a_{6i} + a_{6i+1} \times 10 + a_{6i+2} \times 10^2 + a_{6i+3} \times 10^3 + a_{6i+4} \times 10^4 + a_{6i+5} \times 10^5)$$

Il en découle que :

$$A_i = a_{6i} + a_{6i+1} \times 10 + a_{6i+2} \times 10^2 + a_{6i+3} \times 10^3 + a_{6i+4} \times 10^4 + a_{6i+5} \times 10^5.$$

$$2. \text{ a) } A_i = a_{6i} - 3a_{6i+1} - 4a_{6i+2} - a_{6i+3} + 3a_{6i+4} + 4a_{6i+5} \quad [13].$$

$$\text{Donc : } A_i = 4(a_{6i+5} - a_{6i+2}) + 3(a_{6i+4} - a_{6i+1}) + a_{6i+0} - a_{6i+3} \quad [13].$$

$$\text{b) On a : } 10^6 = 1[13].$$

Par suite, pour tout  $i$  allant de 0 à  $k-1$ ,  $10^{6i} = 1[13]$ .

$$\text{Or : } A_i = 4(a_{6i+5} - a_{6i+2}) + 3(a_{6i+4} - a_{6i+1}) + a_{6i+0} - a_{6i+3} \quad [13].$$

$$\text{Par conséquent : } x = \sum_{i=0}^{k-1} (4(a_{6i+5} - a_{6i+2}) + 3(a_{6i+4} - a_{6i+1}) + a_{6i+0} - a_{6i+3}) \quad [13].$$

$$3. \text{ On a : } X = 578056781432.$$

$$\text{De plus : } 4 \times (5 - 0) + 3 \times (7 - 5) + 6 - 8 = 20 + 6 - 8 = 24$$

$$4 \times (7 - 4) + 3 \times (8 - 3) + 2 - 1 = 12 + 15 + 1 = 28$$

Et :  $24 + 28 = 52 = 13 \times 4$ . On en déduit que 578056781432 est un multiple de 13.

On a :  $Y = 293546.287401$ .

$$\text{Or : } 4 \times (2 - 5) + 3 \times (9 - 4) + 6 - 3 = -12 + 15 + 3 = 6$$

$$4 \times (2 - 4) + 3 \times (8 - 0) + 1 - 7 = -8 + 24 - 6 = 10$$

Et :  $6 + 10 = 16$ . Donc : 293546287401 n' est pas un multiple de 13.

8

$$\text{On a : } 10^0 = 1 [7], 10^1 = 3 [7], 10^2 = 2 [7], 10^3 = -1 [7], 10^4 = -3 [7], 10^5 = -2 [7].$$

Comme  $ab = 10a + b$ , alors  $ab$  est divisible par 7 si  $3a + b$  est divisible par 7.

$$\text{On a : } abc = 10^2a + 10b + c. \text{ De plus, } 10^2a + 10b + c = 2a + 3b + c [7].$$

Il en résulte que  $abc$  est divisible par 7 si  $2a + 3b + c$  est divisible par 7

$$\text{On a : } abcd = 10^3a + 10^2b + 10c + d.$$

$$\text{De plus : } 10^3a + 10^2b + 10c + d = -a + 2b + 3c + d [7].$$

Il s'ensuit que,  $abcd$  est divisible par 7 si  $-a + 2b + 3c + d$  est divisible par 7.

$$\text{On a : } abcde = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e.$$

$$\text{Or : } 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e = -3a - b + 2c + 3d + e [7].$$

Donc,  $abcde$  est divisible par 7 si  $-3a - b + 2c + 3d + e$  est divisible par 7.

$$\text{On a : } abcdef = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f.$$

$$\text{Or, } 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f = -2a - 3b - c + 2d + 3e - f [7].$$

Donc,  $abcdef$  est divisible par 7 si  $-2a - 3b - c + 2d + 3e - f$  est divisible par 7.

$$2. \quad -2a - 3a - a + 2a + 3a + a = -6a + 6a = 0$$

Il en découle que le nombre  $aaaaa$  est divisible par 7.

$$\text{D'autre part, } -2a - 3b - a + 2a + 3b + a = a - a + 3b - 3b = 0$$

On en déduit que le nombre  $abaaba$  est divisible par 7.

$$\text{Enfin : } -2a - 3b - c + 2a + 3b + c = -2a + 2a - 3b + 3b - c + c = 0$$

Donc, le nombre  $abcabc$  est divisible par 7.

9

1. Posons :  $X = aaaa\dots aaaa$ .

On a :  $a - a + a - a + \dots + a - a + a - a = 0$ .

Donc,  $X$  est divisible par 11.

2.  $X = aabb\dots ppqq$ .

On a :  $a - a + b - b + \dots + p - p + q - q = 0$ .

On en déduit que  $X$  est divisible par 11.

3.  $X$  est divisible par 11  $\Rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i = 11k$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^{-i} x_i = 11k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^{-n+n-i} x_i = 11k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^{-n} \times (-1)^{n-i} x_i = 11k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow (-1)^n \times \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} x_i = 11k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} x_i = (-1)^n \times 11k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

On conclut que  $Y$  est divisible par 11.

10

$abc$  est de 13 si :  $-4a - 3b + c = 13k$ . De plus,  $a + b + c = 14$ .

Il s'ensuit que :  $5a + 4b = 14 - 13k$ .

On en déduit que :  $5a + 4b = 1 \pmod{13}$ .

Cette dernière relation est vérifiée par les couples  $(a,b)$  suivants :  $(2,1)$ ,  $(3,3)$ ,  $(4,5)$ ,  $(5,7)$ ,  $(6,9)$  et  $(9,2)$ .

En considérant que :  $a + b + c = 14$ , les nombres  $abc$  recherchés sont : 338, 455, 572 et 923.

11

On partage le nombre en listes de trois chiffres de la droite vers la gauche.

$$A = 105.324.038.139.567$$

$$\text{On a : } 105 + 038 + 567 = 710, \quad 324 + 139 = 463 \text{ et } 710 - 463 = 247 = 13 \times 19$$

Donc,  $A$  est divisible par 13.

$$B = 28.093.657.683$$

$$\text{On a : } 28 + 657 = 685, \quad 93 + 683 = 776 \text{ et } 776 - 685 = 91 = 13 \times 7$$

On conclut que  $B$  est divisible par 13.

12

$$M = 451.731.875$$

$$\text{On a : } 451 + 875 = 1326 \quad \text{et} \quad 1326 - 731 = 595 = 7 \times 85$$

On en déduit que M est divisible par 7.

$$N = 14.181.838.272$$

$$\text{On a : } 14 + 838 = 852, \quad 181 + 272 = 453 \quad \text{et} \quad 852 - 453 = 399 = 7 \times 57.$$

Donc, N est divisible par 7.

13

1. Chacun des chiffres b et c étant compris entre 1 et 9.

$$\text{Donc : } 85 \leq 4b \times c + 81 \leq 401$$

Il s'ensuit que  $4b \times c + 81$  est l'un des nombres 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 ou 20.

Il en résulte :  $4b \times c + 81 = 121$  ou  $4b \times c + 81 = 225$

$$\text{Donc : } \quad b \times c = 10 \quad \text{ou} \quad b \times c = 36$$

Par suite, les couples (b,c) possibles sont (2,5), (5,2), (4,9), (6,6) et (9,4).

2. La relation (r) donne :  $(a + b + c)^2 - 4bc = 81$

$$4bc + 81 = 9k^2 \quad \text{et} \quad 4bc = 0 \quad [9].$$

$$4bc + 81 = 9k^2 \quad \text{et} \quad bc = 0 \quad [9].$$

On déduit de la question 1.) que les couples (b,c) qui conviennent sont : (4,9) et (9,4).

Lorsque l'un des chiffres b et c est égal à 9, la valeur de a qui est retenue est  $a = 2$ .

On conclut que les nombres qui vérifient les conditions de l'énoncé sont : 294 et 249.

14

$14b2b$  est divisible par 4 si  $2b$  est divisible par 4. Donc, les valeurs de b sont : 0, 4 et 8.

$14b2b$  est divisible par 11 si  $1+b+b - (4+2) = 2b - 5$  est divisible par 11.

En considérant les valeurs précédentes de b :  $2 \times 0 - 5 = -5$ ,  $2 \times 4 - 5 = 3$ ,  $2 \times 8 - 5 = 11$ .

On retient que la valeur de b pour que soit divisible par 4 et 11 est 8.

**15**

95a2ba est divisible par 11 si  $9+a+b - (5+2+a) = b + 2$  est divisible par 11. Donc, la valeur de b qui convienne est 9.

Par conséquent, 95a2ba est divisible par 4 si 9a est divisible par 4.

Les valeurs de a qui conviennent sont : 2 et 6.

On conclut que pour que 95a2ba soit divisible par 4 et 11, il faut que b soit égal à 9 et que a soit égal à 2 ou à 6

**16**

A divisible par 11 si  $x - 2 + 6 - y + 5 - z = 0$  [11]

A divisible par 11 si  $x - y - z = 2$  [11] (1)

De plus, A divisible par 7 si :  $-2x - 3 \times 2 - 6 + 2y + 3 \times 5 + z \equiv 0$  [7]

C'est à dire :  $2(y - x) = 4 - z$  [7]

Dans l'équation (2) :

$$z = 0 \Rightarrow 2(y - x) \equiv 4 [7] \text{ donc, } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=3) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=4) \\ (x=3 \text{ et } y=5) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=6) \\ (x=5 \text{ et } y=7) \text{ ou } (x=6 \text{ et } y=8) \\ (x=7 \text{ et } y=9). \end{cases}$$

$$z = 1 \Rightarrow 2(y - x) \equiv 3 [7] \text{ donc, } z = 1 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=6) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=7) \\ (x=3 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=9) \end{cases}$$

$$z = 2 \Rightarrow 2(y - x) \equiv 2 [7] \text{ donc, } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=2) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=3) \\ (x=3 \text{ et } y=4) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=5) \\ (x=5 \text{ et } y=6) \text{ ou } (x=6 \text{ et } y=7) \\ (x=7 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=8 \text{ et } y=9). \end{cases}$$

$$z = 3 \Rightarrow 2(y - x) \equiv 1 [7] \text{ donc, } z = 3 \Rightarrow \begin{cases} (x=4 \text{ et } y=1) \text{ ou } (x=5 \text{ et } y=2) \\ (x=6 \text{ et } y=3) \text{ ou } (x=7 \text{ et } y=4) \\ (x=8 \text{ et } y=5) \text{ ou } (x=9 \text{ et } y=6) \end{cases}$$

$$z = 4 \Rightarrow 2(y - x) \equiv 0 [7] \text{ donc, } z = 4 \Rightarrow \begin{cases} (x=8 \text{ et } y=1) \text{ ou } (x=9 \text{ et } y=2) \\ (x=1 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=9) \end{cases}$$

$$z = 5 \Rightarrow 2(y - x) \equiv -1 [7] \text{ donc, } z = 5 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=4) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=5) \\ (x=3 \text{ et } y=6) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=7) \\ (x=5 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=6 \text{ et } y=9) \end{cases}$$

$$z = 6 \Rightarrow 2(y - x) = -2 \text{ [7] donc, } z = 6 \Rightarrow \begin{cases} (x=2 \text{ et } y=1) \text{ ou } (x=3 \text{ et } y=2) \\ (x=4 \text{ et } y=3) \text{ ou } (x=5 \text{ et } y=4) \\ (x=6 \text{ et } y=5) \text{ ou } (x=7 \text{ et } y=6) \\ (x=7 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=8 \text{ et } y=9). \end{cases}$$

$$z = 7 \Rightarrow 2(y - x) = -3 \text{ [7] donc, } z = 7 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=3) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=4) \\ (x=3 \text{ et } y=5) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=6) \\ (x=5 \text{ et } y=7) \text{ ou } (x=6 \text{ et } y=8) \\ (x=7 \text{ et } y=9) \end{cases}$$

$$z = 8 \Rightarrow 2(y - x) = -4 \text{ [7] donc, } z = 8 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=6) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=7) \\ (x=3 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=9) \end{cases}$$

$$z = 9 \Rightarrow 2(y - x) = -5 \text{ [7] donc, } z = 8 \Rightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ et } y=2) \text{ ou } (x=2 \text{ et } y=3) \\ (x=3 \text{ et } y=4) \text{ ou } (x=4 \text{ et } y=5) \\ (x=5 \text{ et } y=6) \text{ ou } (x=6 \text{ et } y=7) \\ (x=7 \text{ et } y=8) \text{ ou } (x=8 \text{ et } y=9). \end{cases}$$

Vérifions les résultats obtenus dans la relation (1).

Les triplets (2,1,6), (3,2,6), (4,3,6), (5,4,6), (6,5,6), (7,6,6), (7,8,6) et (8,9,6) sont les seuls à vérifier la relation (1). Donc, ceux-ci sont les seuls à satisfaire aux conditions de l'énoncé.

## V - PGCD-PPCM

1

1. a)  $\text{PPCM}(x;y) = \text{PPCM}(17 \times 9; 13 \times 9) = 9\text{PPCM}(17;13)$

Les nombres 17 et 13 sont premiers entre eux.

Par conséquent :  $\text{PGCD}(x;y) = 9$  et  $\text{PPCM}(x;y) = 9 \times 17 \times 13 = 1989$ .

b)  $\text{PPCM}(x;y) = \text{PPCM}(-7 \times 31; 7 \times 18) = \text{PPCM}(7 \times 31; 7 \times 18)$

$\text{PGCD}(x;y) = 7$  et  $\text{PPCM}(x;y) = 7 \times 31 \times 18 = 3906$ .

2. a)  $x = 6 \times 12 \times 11 = 36 \times 22$  et  $y = 36 \times 19$ .

$\text{PPCM}(x;y) = \text{PPCM}(36 \times 22; 36 \times 19) = 36\text{PPCM}(22;19)$

$\text{PGCD}(x;y) = 36$  et  $\text{PPCM}(x;y) = 36 \times 22 \times 19 = 15048$ .

b)  $x = 4 \times 5 \times 3 \times 23$  et  $y = 4 \times 5 \times 5 \times 37$

$\text{PGCD}(x;y) = 20$  et  $\text{PPCM}(x;y) = 20\text{PPCM}(69;185) = 20 \times 12765$

$\text{PPCM}(x;y) = 255300$ .

2

$\text{PGCD}(x;y) = \text{PGCD}(n(n+3); 2(n+3)) = (n+3)\text{PGCD}(n;2)$

Or  $n$  est pair et supérieur à égal à 2. Donc :  $\text{PGCD}(n;2) = 2$ .

On conclut que :  $\text{PGCD}(x;y) = 2(n+3)$ .

3

1. a) Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 3 sont 0, 1 et 2.

Donc, on a :  $n = 0 [3]$ ,  $n = 1 [3]$  ou  $n = 2 [3]$ . Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 3 suivant.

|            |   |   |   |
|------------|---|---|---|
| $n$        | 0 | 1 | 2 |
| $n + 1$    | 1 | 2 | 0 |
| $n(n + 1)$ | 0 | 2 | 0 |

Donc, lorsque  $n = 3k$  ou  $n = 3k+2$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ , le nombre  $n(n+1)$  est divisible par 3. Donc :  $\text{PGCD}(n(n+1);3) = 3$ .

Lorsque  $n = 3k+1$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ , le reste de la division euclidienne  $n(n+1)$  par 3 est 2. Donc :  $\text{PGCD}(n(n+1);3) = \text{PGCD}(3;2) = 1$ .

b) Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 4 sont 0, 1, 2 et 3.  
 Donc, on a :  $n = 0 [4]$ ,  $n = 1 [4]$ ,  $n = 2 [4]$ ; ou  $n = 3 [4]$ . Considérons le tableau de congruence 4 suivant.

|            |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|
| $n$        | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $n^2$      | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $3n$       | 0 | 3 | 2 | 3 |
| $n^2 - 3n$ | 0 | 0 | 2 | 0 |

Dans le cas où  $n = 4k+2$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ , le reste de la division euclidienne de

$n^2 - 3n$  par 4 est 2. Donc,  $\text{PGCD}(n^2 - 3n; 4) = \text{PGCD}(4; 2) = 2$ .

Dans le cas contraire, le nombre  $n^2 - 3n$  est divisible par 4.

Donc :  $\text{PGCD}(n(n^2 - 3n); 4) = 4$ .

2.  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 2 et par 3. Donc,  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 6.

a)  $\text{PGCD}(n(n+1)(n+2); 6) = 6$  et b)  $\text{PPCM}(n(n+1)(n+2); 6) = n(n+1)(n+2)$

3. a)  $\text{PGCD}(n(n+1)(n+2); 2n) = n \text{PGCD}((n+1)(n+2); 2)$

$\text{PGCD}(n(n+1)(n+2); 2n) = 2n$ .

b)  $\text{PPCM}(n(n+1)(n+2); 2n) = n(n+1)(n+2)$ .

4

1.  $200 = 1 \times 200 = 2 \times 100 = 4 \times 50 = 8 \times 25 = 10 \times 20$

Donc, les diviseurs de 200 sont : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25; 50, 100 et 200.

2.  $ab = \mu\delta = 8\delta^2 = 200$ . Par conséquent,  $\delta = 5$ .

Posons :  $a = 5a'$  et  $b = 5b'$ .

Donc :  $ab = 25a'b' = 200$  et  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(5a'; 5b') = 5 \text{PGCD}(a'; b') = 5$ .

$a'b' = 8$  et  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ .

Les couples qui  $(a', b')$  conviennent sont : (1, 8) et (8, 1).

On en déduit les couples  $(a, b)$  : (5, 40) et (40, 5).

5

1. a)  $\text{PGCD}(a+b; b) = \text{PGCD}(a+b-b; b) = \text{PGCD}(a; b)$ ,

b)  $\text{PGCD}(3a+b; 4a+2b) = \text{PGCD}(3a+b; 4a+2b-3a-b)$   
 $= \text{PGCD}(3a+b; a+b)$

$$\begin{aligned}
 &= \text{PGCD}(3a + b - a - b; a + b) \\
 &= \text{PGCD}(2a; a + b) = \text{PGCD}(2a; 2a + 2b - 2a) \\
 &= \text{PGCD}(2a; 2b) = 2\text{PGCD}(a; b).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a) } \delta &= \text{PGCD}(5a - 16b; 10a - 31b) \\
 &= \text{PGCD}(10a - 31b - 5 \times (a - 3b); 10a - 31b) \\
 &= \text{PGCD}(a - 3b; 10a - 31b) \\
 &= \text{PGCD}(a - 3b; 10 \times (a - 3b) - b) \\
 &= \text{PGCD}(a - 3b; b) \\
 &= \text{PGCD}(a - 3b + 3b; b) \\
 &= \text{PGCD}(a; b).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \delta &= \text{PGCD}((a - b)^2; (a - b)(a + b)) \\
 &= (a - b)\text{PGCD}(a - b; a + b) \\
 &= (a - b)\text{PGCD}(2a; a + b) \\
 &= (a - b)\text{PGCD}(2a; 2b) \\
 &= 2(a - b)\text{PGCD}(a; b).
 \end{aligned}$$

6

1.  $\mu$  le PPCM( $a; b$ ) de  $a$  et  $b$ . Donc, il existe deux entiers naturels  $m$  et  $n$  tels que :  
 $\mu = bm$  et  $\mu = an$ . Or,  $a < b$ . Donc,  $am < bm$  et  $an < bn$ . Par suite,  $am < \mu < bn$ .
  2. a) On en déduit que le couple  $(m, n)$  appartient à  $A$ . On conclut que  $A$  est non vide.  
 b) On a :  $ap < \mu < bq$ ,  $\mu = bm$  et  $\mu = an$ . Donc,  $ap < an$  et  $bm < bq$ .
- Par conséquent :  $p < n$  et  $m < q$ .

7

1. Tout diviseur de  $x$  et  $y$  divise  $7x + 4y$ , c'est à dire 12. On en déduit que  $\text{PGCD}(x; y)$  est un diviseur positif de 12. Par conséquent,  $\text{PGCD}(x; y)$  prend l'une des valeurs 1, 2, 3, 4 et 12.
2. a) On a :  $7 \times 0 + 4 \times 3 = 12$ . Donc, le couple  $(0; 3)$  est solution de (E).  
 b) Soit un couple  $(x, y)$  solution de (E).  
 $(E) \Leftrightarrow 7x + 4y = 12$   
 $\Leftrightarrow 7x + 4(y - 3) = 0$   
 $\Leftrightarrow$  le couple  $(x, y - 3)$  est solution de (E').

$$\Leftrightarrow x = 4k \text{ et } y - 3 = 7k$$

Il s'ensuit que les solutions de (E) sont les couples  $(4k, 3 - 7k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

3. a) On a :  $x = 4k$  donc,  $\text{PGCD}(x;y) = 4$ , si  $y = 0 [4]$

$$3 - 7k = 0 [4]$$

$$3 - 3k = 0 [4]$$

$$3(1 - k) = 0 [4].$$

Puisque 3 est un nombre premier alors  $3(1 - k) = 0 [4] \Rightarrow 1 - k = 0 [4]$

Donc :  $k = 1 [4]$ .

b) Le reste de la division euclidienne de  $k$  par 3 est 0, 1 ou 2.

Par suite  $k = 0 [3]$ ,  $k = 1 [3]$  ou  $k = 2 [3]$ .

Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 3 suivant.

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| k      | 0 | 1 | 2 |
| 4k     | 0 | 1 | 3 |
| 3 - 7k | 0 | 2 | 1 |

Par conséquent,  $k$  doit être un multiple de 3.

c) On a :  $x = 4k$  donc :  $\text{PGCD}(x;y) = 2$ , si  $y = 0 [2]$

$$3 - 7k = 0 [2]$$

$$1 - k = 0 [2]$$

Donc :  $k = 1 [2]$ .

## 8

1. On a :  $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$ . Il en découle que les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14 et 28.

2. Il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $b = \delta \times k$ .

Donc :  $2b - \delta = 28 \Leftrightarrow \delta \times 2k - \delta = 28$

$$2b - \delta = 28 \Leftrightarrow \delta(2k - 1) = 28.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{cases} \delta=1 \\ 2k-1=28 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \delta=2 \\ 2k-1=14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \delta=4 \\ 2k-1=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2k-1=1 \\ \delta=28 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2k-1=2 \\ \delta=14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2k-1=4 \\ \delta=7 \end{cases}.$$

On déduit des systèmes ci-dessus que les valeurs possibles de  $\delta$  sont 4 et 28.

Pour  $\delta = 4$ , on a :  $b = 16$ . Il en résulte que :  $a = 4k$  où  $k$  est un entier naturel impair.

Pour  $\delta = 28$ , on a :  $b = 28$ .

Donc :  $a = k \times 28^p$  où  $k$  et  $p$  sont des entiers naturels non nuls.

**9**

1. Développer  $(n+4)(2n+9) + 3$  puis conclure.

2. a)  $2n^2 + n + 39 - (n+4)(2n+9) = 3$ . Donc,  $a - b(2n+9) = 3$ .

3 est une combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ . Or tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  divise toute combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ . Par conséquent  $\text{PGCD}(a;b)$  divise 3.

Donc :  $\text{PGCD}(a;b) = 1$  ou  $\text{PGCD}(a;b) = 3$ .

b)  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b, a - b(2n+9)) = \text{PGCD}(n+4;3)$

3. Le reste de la division euclidienne de  $n$  par 3 est 0, 1 ou 2.

Donc :  $n = 0 [3]$ ,  $n = 1 [3]$  ou  $n = 2 [3]$ .

Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 3 suivant.

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| n     | 0 | 1 | 2 |
| n + 4 | 1 | 2 | 0 |

Donc, lorsque  $n = 3k$  ou  $n = 3k+1$  avec  $k$  entier naturel, alors 3 ne divise pas  $n + 4$ .

Par conséquent :  $\text{PGCD}(a;b) = 1$ .

Et, lorsque  $n = 3k + 2$  avec  $k$  entier naturel alors 3 divise  $n + 4$ .

Il en résulte que :  $\text{PGCD}(a;b) = 3$ .

**10**

1.  $7a = 35n + 7$  et  $5b = 35n + 10$ .

Donc :  $7a - 5b = 35n + 7 - 35n - 10 = -3$

$$5b - 7a = 1.$$

2.  $\delta$  divise toute combinaison linéaire de  $a$  et  $b$  donc divise  $-3$ . Puisque  $\delta$  est strictement positif alors les valeurs possibles de  $\delta$  sont 1 et 3.

3 a) Déterminons les entiers naturels tels que  $5n+1$  soit divisible par 3.

Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 3 sont : 0, 1 et 3.

Donc :  $n = 0 [3]$ ,  $n = 1 [3]$  ou  $n = 2 [3]$ . Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 3 suivant :

|      |   |   |   |
|------|---|---|---|
| n    | 0 | 1 | 2 |
| 5n+1 | 1 | 0 | 2 |

Il en découle que  $5n+1$  est divisible par 3 si  $n = 3k+1$  où  $k$  est un entier naturel.

$$\text{Pour } n = 3k+1: \quad a = 5(3k+1) + 1 = 15k + 6 = 3(5k+2)$$

$$b = 7(3k+1) + 2 = 21k + 9 = 3(7k+3).$$

$$\text{De plus : } 5(7k+3) - 7(5k+2) = 1.$$

Donc,  $5k+2$  et  $7k+3$  sont premiers entre eux. On conclut que  $\delta$  est égal à 3 si  $n = 3k+1$  où  $k$  est un entier naturel.

b) D'après la question précédente,  $\delta$  est égal à 1 si  $n = 3k$  ou  $n = 3k+2$  où  $k$  est un entier naturel.

11

1. On a :  $5A - 3B = 8$ .

De plus, le PGCD de  $A$  et  $B$  divise toute combinaison linéaire de  $A$  et  $B$  donc, il divise 8.

2 a) Déterminons les entiers naturels tels que  $A$  soit divisible par 8.

Les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 8 sont : 0, 1, 2, 3, ..., 6 et 7.

Donc :  $n = 0 [8]$ ,  $n = 1 [8]$  ...ou  $n = 7 [8]$ . D'où le tableau de congruence modulo 8.

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $3n+1$ | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 |

Par conséquent,  $3n+1$  est divisible par 8 si  $n = 8k+5$  où  $k$  est un entier naturel.

Pour  $n = 8k+5$ :  $A = 3(8k+5) + 1 = 24k + 16 = 8(3k+2)$

$B = 5(8k+5) - 1 = 40k + 24 = 8(5k+3)$ .

Or :  $5(3k+2) - 3(5k+3) = 1$ .

Ce qui permet de dire d'après le théorème de Bézout que  $3k+2$  et  $5k+3$  sont premiers entre eux. On conclut que le PGCD de  $A$  et  $B$  est égal à 8 si  $n = 8k+5$  où  $k$  est un entier naturel.

b) Il résulte de la question 2a) que :  $A = 8(3k+2)$  et  $B = 8(5k+3)$ .

Par conséquent :  $\text{PPCM}(A;B) = 8\text{PPCM}(3k+2;5k+3)$

$\text{PPCM}(A;B) = 8(3k+2)(5k+3)$ .

3. En suivant une démarche analogue à celle de la question 2a),  $5n - 1$  est divisible par 2 si  $n = 2k+1$  où  $k$  est un entier naturel.

Dans ce cas :  $A = 2(3k+2)$  et  $B = 2(5k+2)$

Par suite,  $3k+2$  et  $5k+2$  sont premiers entre eux si  $k = 2p+1$  où  $p$  est un entier naturel.

On a donc :  $A = 6(2p+1) + 4 = 12p + 10 = 2(6p+5)$

$B = 10(2p+1) + 4 = 20p + 14 = 2(10p+7)$ .

De plus :  $\text{PGCD}(10p+7; 6p+5) = \text{PGCD}(6p+5; 4p+2)$

Où :  $6p+5 = 2(3p+2) + 1$  et  $4p+2 = 2(2p+1)$ .

Donc :  $6p+5$  est impair et  $4p+2$  est pair. On en déduit que  $\text{PGCD}(6p+5; 4p+2) = 1$ .

On conclut que :  $\text{PGCD}(A;B) = 2$ . Ce qui correspond à  $n = 2k+1$  avec  $k = 2p+1$ .

On obtient donc :  $n = 4p + 3$  ;  $p$  étant un entier naturel.

12

|           |     |    |    |   |   |
|-----------|-----|----|----|---|---|
| Diviseur  | 233 | 17 | 12 | 5 | 2 |
| Dividende | 17  | 12 | 5  | 2 | 1 |
| Reste     | 12  | 5  | 2  | 1 | 0 |

13

$\text{PGCD}(a;b) = 18$ .

14

|           |     |     |    |    |
|-----------|-----|-----|----|----|
| Diviseur  | a   | 276 | 52 | 16 |
| Dividende | 276 | 52  | 16 | 4  |
| Reste     | 52  | 16  | 4  | 0  |

Donc :  $a = 276k + 52$  ou  $k$  est un entier relatif.

15

|           |     |    |    |
|-----------|-----|----|----|
| Dividende | 238 | 42 | 28 |
| Diviseur  | 42  | 28 | 14 |
| Reste     | 28  | 14 | 0  |

Le PGCD de 238 et 42 est 14.

16

1

|           |        |        |       |      |
|-----------|--------|--------|-------|------|
| Diviseur  | 171735 | 160500 | 11235 | 3210 |
| Dividende | 160500 | 11235  | 3210  | 1605 |
| Reste     | 11235  | 3210   | 1605  | 0    |

PGCD(171735;160500) = 1605.

2

|           |       |       |       |      |
|-----------|-------|-------|-------|------|
| Diviseur  | 94637 | 83123 | 11514 | 2525 |
| Dividende | 83123 | 11514 | 2525  | 1414 |
| Reste     | 11514 | 2525  | 1414  | 1111 |
| 1414      | 1111  | 303   | 202   |      |
| 1111      | 303   | 202   | 101   |      |
| 303       | 202   | 101   | 0     |      |

PGCD(83123;11514) = 101.

3

|           |      |      |     |     |   |   |
|-----------|------|------|-----|-----|---|---|
| Diviseur  | 3024 | 2185 | 857 | 471 |   |   |
| Dividende | 2185 | 857  | 471 | 386 |   |   |
| Reste     | 857  | 471  | 386 | 85  |   |   |
| 386       | 85   | 46   | 39  | 7   | 4 | 3 |
| 85        | 46   | 39   | 7   | 4   | 3 | 1 |
| 46        | 39   | 7    | 4   | 3   | 1 | 0 |

PGCD(3024;2185) = 1.

## VI - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

1

Tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  divise toute combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ .

Donc :  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a+b;a) = \text{PGCD}(a+b;b) = 1$ .

Il en découle que les nombres  $a+b$  et  $b$  sont premiers entre eux.

De même :  $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a+b;a) = \text{PGCD}(a+b;b) = 1$ .

Par conséquent, les nombres  $a+b$  et  $a$  sont premiers entre eux.

On conclut que  $a+b$  et  $ab$  sont premiers entre eux.

2

On a :  $(x+3) - x = 3$ .

Donc, les diviseurs communs à  $x$  et  $x+3$  divisent 3. Or 3 ne divise pas  $x$ . On conclut que 1 est le seul diviseur commun à  $x$  et  $x+3$ . Par conséquent  $x$  et  $x+3$  sont premiers entre eux lorsque  $x$  n'est pas divisible par 3.

3

Posons :  $x = 2u + 1$ .

Donc :  $x - 4 = 2u + 1 - 4$ ;  $x - 4 = 2u - 3$

$x + 4 = 2u + 1 + 4$ ;  $x + 4 = 2u + 5$ .

On a la relation  $2u + 5 - (2u - 3) = 8$ , avec  $2u + 5$  et  $2u - 3$  qui ne sont pas des multiples de 2. Puisque tout diviseur de  $2u + 5$  et  $2u - 3$  divise 8, et que le seul diviseur impair positif de 8 est 1 alors  $\text{PGCD}(2u + 5; 2u - 3) = 1$ . Il en découle que  $2u + 5$  et  $2u - 3$  sont premiers entre eux. On conclut que  $x - 4$  et  $x + 4$  sont premiers entre eux.

4

$1 \times (n+1) - 1 \times n = 1$ ;  $1 \times (n^2 + 1) - n \times n = n^2 - n^2 + 1 = 1$ ;

$4(3n^2 + 4) - 3(4n^2 + 5) = 12n^2 - 12n^2 + 16 - 15 = 1$ .

D'après le théorème de Bézout, il s'ensuit que :  $n + 1$  et  $n$  sont premiers entre eux ;

$n^2 + 1$  et  $n$  sont premiers entre eux ;  $4n^2 + 5$  et  $3n^2 + 4$  sont premiers entre eux.

5

$a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :

$$au + bv = 1$$

Par suite :

$$(au + bv)^2 = 1$$

$$a^2 u^2 + 2abuv + b^2 v^2 = 1$$

$$(a^2 + b^2 - b^2)u^2 + 2abuv + b^2 v^2 = 1$$

$$(a^2 + b^2)u^2 + 2abuv + b^2 (v^2 - u^2) = 1$$

$$(a^2 + b^2)u^2 + b(2auv + b(v^2 - u^2)) = 1$$

Donc, d'après le théorème de Bézout,  $a^2 + b^2$  et  $b$  sont premiers entre eux.

De la même manière, on montre que  $a^2 + b^2$  et  $a$  sont premiers entre eux.

On conclut par la conséquence du théorème de Gauss que  $ab$  et  $a^2 + b^2$  sont premiers entre eux.

6

$$\text{PGCD}(2n+3 ; n+7) = \text{PGCD}(n-4 ; n+7) = \text{PGCD}(n-4 ; 11).$$

11 est un nombre premier donc les seuls diviseurs communs positifs possibles de  $n-4$  et 11 sont 1 et 11. Or 11 ne divise pas  $n-4$ . On en déduit que 1 est le seul diviseur commun positif de  $n-4$  et 11. Par suite :  $\text{PGCD}(n-4 ; 11) = 1$ .

Donc :  $\text{PGCD}(2n+3 ; n+7) = 1$ . Par conséquent,  $2n+3$  et  $n+7$  sont premiers entre eux.

7

$$1. \text{ On déduit du tableau que : } \text{PGCD}(403 ; 187) = \text{PGCD}(3 ; 1) = 1.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 1 &= 13 - 4 \times 3 = 13 - 4 \times (29 - 2 \times 13) = -4 \times 29 + 9 \times 13 \\ &= -4 \times 29 + 9 \times 13 = -4 \times 29 + 9 \times (187 - 29 \times 6) = 9 \times 187 - 58 \times 29 \\ &= 9 \times 187 - 58 \times (403 - 187 \times 2) = -58 \times 403 + 125 \times 187 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } -58 \times 403 + 125 \times 187 = 1.$$

On obtient :  $a = -58$  et  $b = 125$ .

8

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, on obtient le tableau ci-dessous.

|           |    |    |    |   |
|-----------|----|----|----|---|
| Diviseur  | 86 | 35 | 16 | 3 |
| Dividende | 35 | 16 | 3  | 1 |
| Reste     | 16 | 3  | 1  | 0 |

$$\begin{aligned} \text{Donc : } 1 &= 16 - 3 \times 5 = 16 - (35 - 2 \times 16) \times 5 = 16 \times 11 - 35 \times 5 \\ &= (86 - 2 \times 35) \times 11 - 35 \times 5 = 11 \times 86 - 27 \times 35 \end{aligned}$$

On en déduit que le couple  $(11, -27)$  est solution de l'équation (E).

2. De la question précédente, on a :  $11 \times 86 - 27 \times 35 = 1$

$$101 \times 11 \times 86 - 101 \times 27 \times 35 = 101$$

$$1111 \times 86 - 2727 \times 35 = 101.$$

Le couple  $(1111, -2727)$  est solution de l'équation  $86u - 35v = 101$ .

9

a) Les étapes de la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide.

|           |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|
| Diviseur  | 63 | 25 | 13 | 12 |
| Dividende | 25 | 13 | 12 | 1  |
| Reste     | 13 | 12 | 1  | 0  |

On a :  $1 = 13 - 12 = 13 - (25 - 13) = 2 \times 13 - 25$

$$1 = 2(63 - 25 \times 2) - 25 = 2 \times 63 - 5 \times 25.$$

Le couple  $(63, -25)$  est une solution particulière de (E).

b) Les étapes de la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide.

|           |     |    |    |    |    |   |
|-----------|-----|----|----|----|----|---|
| Diviseur  | 209 | 45 | 29 | 16 | 13 | 3 |
| Dividende | 45  | 29 | 16 | 13 | 3  | 1 |
| Reste     | 29  | 16 | 13 | 3  | 1  | 0 |

Donc :  $1 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 4 \times (16 - 13) = 5 \times 13 - 4 \times 16$

$$1 = 5 \times (29 - 16) - 4 \times 16 = 5 \times 29 - 9 \times 16$$

$$1 = 5 \times 29 - 9 \times (45 - 29) = 14 \times 29 - 9 \times 45$$

$$1 = 14 \times (209 - 4 \times 45) - 9 \times 45 = 14 \times 209 - 65 \times 45$$

$$1 = 14 \times 209 - 65 \times 45$$

$$17 \times 1 = 17 \times 14 \times 209 - 17 \times 65 \times 45$$

$$17 = 238 \times 209 - 1105 \times 45$$

Le couple  $(238, 1105)$  est une solution particulière de (E).

c) Les étapes de la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide.

|           |      |      |    |    |    |
|-----------|------|------|----|----|----|
| Diviseur  | 2564 | 1248 | 68 | 24 | 20 |
| Dividende | 1248 | 68   | 24 | 20 | 4  |
| Reste     | 68   | 24   | 20 | 4  | 0  |

Donc :  $4 = 24 - 20 = 24 - (68 - 2 \times 24) = 3 \times 24 - 68$

$$4 = 3 \times (1248 - 18 \times 68) - 68 = 3 \times 1248 - 55 \times 68$$

$$4 = 3 \times 1248 - 55 \times (2564 - 2 \times 1248) = 113 \times 1248 - 55 \times 2564$$

$$4 = 113 \times 1248 - 55 \times 2564$$

$$-4 = -113 \times 1248 + 55 \times 2564$$

Le couple  $(55 ; -113)$  est une solution particulière de (E).

10

$$1. \quad 29 \times (-4) + 13 \times 9 = -116 + 117 = 1$$

Donc, le couple  $(-4, 9)$  est solution de l'équation (E)

$$2. \text{ a) Pour } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (E) \Leftrightarrow 29a + 13b = 29 \times (-4) + 13 \times 9$$

$$(E) \Leftrightarrow 29(a + 4) + 13(b - 9) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow 29(a + 4) = -13(b - 9)$$

Les entiers relatifs 29 et  $-13$  sont premiers entre eux et 29 divise  $-13(b - 9)$ .

D'après le théorème de Gauss, 29 divise  $b - 9$ .

Donc, il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $b - 9 = 29k$

$$b = 9 + 29k.$$

$$\text{Par suite :} \quad 29(a + 4) = -13 \times 29k$$

$$a + 4 = -13k$$

$$a = -4 - 13k$$

On en déduit que tout couple  $(a, b)$  solution de (E) est de la forme  $(-4 - 13k, 9 + 29k)$

Réciproquement, soit un couple  $(-4 - 13k, 9 + 29k)$  où  $k$  est un entier relatif.

$$\text{On a : } 29 \times (-4 - 13k + 4) = 29 \times (-13k) = -377k$$

$$\text{Et : } -13(9 + 29k - 9) = -13 \times 29k = -377k.$$

$$\text{Donc : } 29 \times (-4 - 13k + 4) = -13(9 + 29k - 9)$$

Par suite, tous les couples  $(-4 - 13k, 9 + 29k)$  où  $k$  est un entier relatif est solution de (E).

Donc, les solutions de (E) sont les couples  $(-4 - 13k, 9 + 29k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

b) Ces entiers naturels  $n$  sont solutions du système  $\begin{cases} n \equiv 4 \pmod{13} \\ n \equiv 11 \pmod{29} \end{cases}$ .

$$\text{On a : } \begin{cases} n \equiv 4 \pmod{13} \\ n \equiv 11 \pmod{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29n \equiv 116 \pmod{377} \\ 13n \equiv 143 \pmod{377} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 29n \equiv 116 \pmod{377} \\ 13n \equiv 143 \pmod{377} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-4) \times 29n \equiv -464 \pmod{377} \\ 9 \times 13n \equiv 1287 \pmod{377} \end{cases}$$

$$\text{car : } 29 \times (-4) + 13 \times 9 = 1.$$

$$\Rightarrow n \equiv 823 \pmod{377}$$

$$\Rightarrow n = 823 + 377k; k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad n = 27 + 377k &\Rightarrow n = 4 + 819 + 29 \times 31k \\ &\Rightarrow n = 4 + 13 \times 63 + 29 \times 13k \\ &\Rightarrow n = 4 + 13 \times (63 + 29k) \\ &\Rightarrow n = 4 \pmod{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } \quad n = 11 + 812 + 377k &\Rightarrow n = 11 + 29 \times 28 + 29 \times 13k \\ &\Rightarrow n = 11 + 29 \times (28 + 13k) \\ &\Rightarrow n = 11 + 29 \times (1 + 13k) \\ &\Rightarrow n \equiv 11 \pmod{29} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent : } \begin{cases} n \equiv 4 \pmod{13} \\ n \equiv 11 \pmod{29} \end{cases} \Leftrightarrow n = 823 + 377k; k \in \mathbb{Z}$$

On conclut que :  $n = 823 + 377k; k \in \mathbb{Z}$

11

Déterminons l'ensemble des entiers  $b$  et  $c$  tels que :  $3b + 5c = 41$  (2)

On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de l'équation (2).

Le couple  $(2, -1)$  vérifie  $3b + 5c = 1$ .

Donc, le couple  $(82, -41)$  vérifie l'équation (2).

Par conséquent,  $(2) \Leftrightarrow 3b + 5c = 3 \times 82 + 5 \times (-41) = 41$

$$(2) \Leftrightarrow 3(b - 82) + 5(c + 41) = 0$$

Par suite, on a :  $b = 82 - 5k$  et  $c = -41 + 3k$  où  $k$  est un entier relatif.

On en déduit que :  $a = 42 - 3k$ .

On conclut que les couples vérifiant (1) sont les triplets  $(42 - 3k, 82 - 5k, -41 + 3k)$  où  $k$  est un entier relatif.

12

$$1. \text{ On a : } C_p^k = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

$$\text{Donc : } k!C_p^k = p(p-1)\dots(p-k+1).$$

$p$  est un nombre premier et  $k!$  est un produit d'entiers naturels non nuls strictement inférieurs à  $p$ . Donc,  $p$  est premier avec chacun d'entre eux. On en déduit que  $p$  et  $k!$  sont premiers entre eux. De plus  $p$  divise  $k!C_p^k$ . D'après la théorème de Gauss, on conclut

que  $p$  divise  $C_p^k$ .

$$2. (a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_{pa}^i a^i b^{p-i}.$$

En considérant la question 1, puisque  $i$  prend des valeurs comprises entre 1 et  $p-1$ , alors

$C_p^i$  est un multiple de  $p$ . Donc, il existe un entier naturel  $q_i$  tels que :  $C_p^i = pq_i$ .

$$\text{Il s'ensuit que : } (a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} pq_i a^i b^{p-i}$$

$$(a+b)^p = a^p + b^p + p \sum_{i=1}^{p-1} q_i a^i b^{p-i}.$$

Il en découle que :  $(a+b)^p = a^p + b^p [p]$ .

13

Pour  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$ ,  $x^2 \equiv 4 [5] \Leftrightarrow x \equiv 2 [5]$  ou  $x \equiv 3 [5]$

Donc : (S) :  $\begin{cases} x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 3 [7] \end{cases} (S_1)$  ou  $\begin{cases} x \equiv 2 [5] \\ x \equiv 3 [7] \end{cases} (S_2)$

Réolvons le système  $(S_1)$

$$\text{Pour } x \text{ élément de } \mathbb{Z}, (S_1) \Rightarrow \begin{cases} x-3 \equiv 0 [5] \\ x-3 \equiv 0 [7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x-3 \equiv 0 [35] \text{ car } 5 \text{ et } 7 \text{ sont premiers entre eux.}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 [35]$$

Réciproquement :  $x \equiv 3 [35] \Rightarrow x \equiv 3 [5]$  et  $x \equiv 3 [7]$ .

Donc :  $(S_1) \Leftrightarrow x \equiv 3 [35]$

Réolvons le système  $(S_2)$ .

$$\text{Pour } x \text{ élément de } \mathbb{Z}, (S_2) \Rightarrow \begin{cases} 7x \equiv 14 [35] \\ 5x \equiv 15 [35] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x \equiv 28 [35] \\ 15x \equiv 45 [35] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \equiv 17 [35]$$

Réciproquement :  $x \equiv 17 [35] \Rightarrow x = 17 + 35k; k \in \mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow x = 2 + 5(3 + 7k); k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x \equiv 2 [5]$$

Et :  $x = 17 [35] \Rightarrow x = 3 + 7 \times (2 + 5k); k \in \mathbb{Z}.$   
 $\Rightarrow x = 3 [7]$

Par suite :  $(S_2) \Leftrightarrow x = 17 [35]$

On conclut que les solutions de (S) sont les entiers  $3 + 35k$  et  $17 + 35k$  où  $k$  est un entier relatif.

14

Déterminons suivant les valeurs de  $n$  l'entier naturel  $r$  tel que :  $3^n = r [5]$  et  $0 \leq r < 5$ .

On a :  $3^0 = 1 [5]; 3^1 = 3 [5]; 3^2 = 4 [5]; 3^3 = 2 [5]; 3^4 = 1 [5].$

Pour  $n = 4k; k \in \mathbb{N}, 3^n = 3^{4k}$

Donc :  $3^4 = 1 [5] \Rightarrow 3^{4k} = 1 [5]$

$\Rightarrow 3^n = 1 [5]$

Par suite :  $(E) \Rightarrow x = 4 [5].$

Réciproquement :  $x = 4 [5] \Rightarrow 3^n \times x = 1 \times 4 [5]$

$\Rightarrow 3^n x = 4 [5]$

Par conséquent :  $(E) \Leftrightarrow x = 4 [5].$

On en déduit que les solutions de (E) sont les entiers  $4 + 5k, k$  étant un entier relatif.

Pour  $n = 4k + 1; k \in \mathbb{N}, 3^n = 3^{4k} \times 3$

Donc :  $3^4 = 1 [5] \Rightarrow 3^{4k+1} = 3 [5]$

$\Rightarrow 3^n = 3 [5].$

Lorsque  $n = 4k + 1; k \in \mathbb{N}, (E) \Rightarrow 3 \times x = 4 [5]$  car  $3^n = 3 [5].$

$\Rightarrow 3x = 4 [5]$

Considérons le tableau de congruence modulo 5 suivant.

|    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| x  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3x | 0 | 3 | 1 | 4 | 1 |

Donc :  $(E) \Rightarrow x = 3 [5].$

Réciproquement :  $x = 3 [5] \Rightarrow 3^n x = 3 \times 3 [5]$  car  $3^n = 3 [5].$

$\Rightarrow 3^n x = 9 [5]$

$\Rightarrow x = 4 [5].$

On conclut que :  $(E) \Leftrightarrow x = 3 [5]$ .

Les solutions de  $(E)$  sont les entiers  $3 + 5k$ ,  $k$  où un entier relatif.

Pour  $n = 4k + 2; k \in \mathbb{N}$ ,  $3^n = 3^{4k} \times 3^2$ .

Donc :  $3^4 = 1 [5] \Rightarrow 3^{4k+2} = 4 [5]$

$$\Rightarrow 3^n = 4 [5].$$

Il s'ensuit que :  $(E) \Rightarrow 4 \times x = 4 [5]$  car  $3^n = 4 [5]$ .

$$\Rightarrow 4x = 4 [5]$$

$$\Rightarrow 4(x-1) = 0 [5]$$

$$\Rightarrow x-1 = 0 [5] \text{ car } 4 \text{ et } 5 \text{ sont premiers entre eux.}$$

$$\Rightarrow x = 1 [5].$$

Réciproquement :  $x = 1 [5] \Rightarrow 3^n x = 1 \times 4 [5]$  car  $3^n = 4 [5]$ .

$$\Rightarrow 3^n x = 4 [5]$$

Donc :  $(E) \Leftrightarrow x = 1 [5]$ .

Il en découle que les solutions de  $(E)$  sont les entiers  $1 + 5k$ , où  $k$  un entier relatif.

Pour  $n = 4k + 3; k \in \mathbb{N}$ ,  $3^n = 3^{4k} \times 3^3$ .

Donc :  $3^4 = 1 [5] \Rightarrow 3^{4k+3} = 2 [5]$

$$\Rightarrow 3^n = 2 [5].$$

Lorsque  $n = 4k + 3; k \in \mathbb{N}$ ,  $(E) \Rightarrow 2x = 4 [5]$  car  $3^n = 2 [5]$ .

$$\Rightarrow 2(x-2) = 0 [5]$$

$$\Rightarrow x-2 = 0 [5] \text{ car } 2 \text{ et } 5 \text{ sont premiers entre eux.}$$

$$\Rightarrow x = 2 [5].$$

Réciproquement :  $x = 2 [5] \Rightarrow 3^n x = 2 \times 2 [5]$  car  $3^n = 2 [5]$ .

$$\Rightarrow 3^n x = 4 [5]$$

Donc :  $(E) \Leftrightarrow x = 2 [5]$ .

Par conséquent, les solutions de  $(E)$  sont les entiers  $2 + 5k$ , où  $k$  un entier relatif.

**15**

1. Pour  $n = 0$ , on a :  $(E): x - y = 2$ .

Les solutions de  $(E)$  sont les couples  $(x, x - 2)$  où  $x$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour  $n = 1$ , on a :  $(E): 5x - 3y = 2$ .

15

1. On a :  $(E_0) : x - y = 2$ .

Les solutions de  $(E_0)$  sont les couples  $(x, x - 2)$  où  $x$  est un entier supérieur ou égal à 2.

On a :  $(E_1) : 5x - 3y = 2$ .

Pour  $(x, y)$  solution de  $(E_1) : (E_1) \Rightarrow 5x - 3y = 5 - 3$

$$(E_1) \Rightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1)$$

5 divise  $3(y - 1)$  et, 5 et 3 premiers entre eux.

Donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise  $y - 1$ .

Il en résulte qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $y - 1 = 5k$

$$y = 1 + 5k$$

Par conséquent :  $5(x - 1) = 3(1 + 5k - 1)$

$$5(x - 1) = 3 \times 5k$$

$$x - 1 = 3k$$

$$x = 1 + 3k.$$

On en déduit que toute solution de  $(E_1)$  est de la forme  $(1 + 3k, 1 + 5k)$ .

Réciproquement, soit un couple  $(1 + 3k, 1 + 5k)$  où  $k$  est un entier naturel.

On a :  $5(1 + 3k) - 3(1 + 5k) = 5 + 15k - 3 - 15k$

$$= 5 - 3 + 15k - 15k$$

Donc :  $5(1 + 3k) - 3(1 + 5k) = 2$ .

Il en découle que tout couple  $(1 + 3k, 1 + 5k)$  est solution de l'équation  $(E_1)$ .

On conclut que les solutions de  $(E_1)$  sont les  $(1 + 3k, 1 + 5k)$  où  $k$  est un entier naturel.

2. Soit  $(x, y)$  solution de  $(E_n)$ ,  $(E_n) \Leftrightarrow 5^n x - 3^n y = 5 - 3$

$$(E_n) \Leftrightarrow 5^n x - 5 = 3^n y - 3$$

Par conséquent,  $(E_n)$  est équivalent à  $5(5^{n-1} x - 1) = 3(3^{n-1} y - 1)$ .

3. D'après la question 2, 5 divise  $3(3^{n-1} y - 1)$  et, 5 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise  $3^{n-1} y - 1$ .

Il en découle qu'il existe un entier relatif  $p$  tel que :  $3^{n-1} y - 1 = 5p$ .

Par conséquent :  $5(5^{n-1}x - 1) = 3 \times 5p$

$$5^{n-1}x - 1 = 3p.$$

Donc :  $3^{n-1}y = 5p + 1$  et  $5^{n-1}x = 3p + 1$ .

4. On a :  $5^{n-1}x = 1 + 3p$  donc,  $1 + 3p$  est multiple de 5.

Les restes de la division euclidienne de  $p$  par 5 sont 0, 1, 2, 3 et 4.

Il s'ensuit le tableau de congruence modulo 5 suivant.

|          |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|
| p        | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $1 + 3p$ | 1 | 4 | 2 | 0 | 3 |

Donc :  $p = 3 [5]$ .

D'autre part :  $3^{n-1}x = 1 + 5p$  donc,  $1 + 5p$  est multiple de 3.

Les restes de la division euclidienne de  $p$  par 3 sont 0, 1, et 2.

Il en résulte le tableau de congruence modulo 3 suivant.

|          |   |   |   |
|----------|---|---|---|
| p        | 0 | 1 | 2 |
| $1 + 5p$ | 1 | 0 | 2 |

Donc :  $p = 1 [3]$ .

On conclut que  $p$  est solution du système  $\begin{cases} a=3 [5] \\ a=1 [3]. \end{cases}$

5. (S)  $\Rightarrow \begin{cases} 3a=9 [15] \\ 5a=5 [15] \end{cases}$

$$\Rightarrow a = 13 [15]$$

$$\Rightarrow a = 13 + 15k.$$

Réciproquement :  $a = 13 + 15k \Rightarrow a = 3 [5]$  et  $a = 1 [3]$ .

Par conséquent : (S)  $\Leftrightarrow a = 13 + 15k; k \in \mathbb{Z}$ .

Donc, il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $p = 13 + 15k$ .

6.  $5^{n-1}x = 1 + 3p$  donc,  $5^{n-1}x = 1 + 3(13 + 15k)$

$$5^{n-1}x = 40 + 45k$$

$$5^{n-1}x = 5(8 + 9k)$$

Il s'ensuit que :  $x = (8 + 9k) \times 5^{2-n}$ .

Et :  $3^{n-1}y = 1 + 5p$  implique  $3^{n-1}y = 1 + 5(13 + 15k)$

$$3^{n-1}y = 3(22 + 25k)$$

Par suite :  $y = (22 + 25k) \times 3^{2-n}$ .

7. On a :  $x = 8 + 9k$  et  $y = 22 + 25k$ .

Réciproquement soit un couple  $(8 + 9k, 22 + 25k)$  où  $k$  est un entier naturel.

$$\begin{aligned} \text{On a : } 5^2(8 + 9k) - 3^2(22 + 25k) &= 25(8 + 9k) - 9(22 + 25k) \\ &= 200 + 225k - 198 + 225k = 2 \end{aligned}$$

Donc tout couple  $(8 + 9k, 22 + 25k)$  vérifie  $(E_2)$ .

On conclut que les solutions de  $(E_2)$  sont les couples  $(8 + 9k, 22 + 25k)$  où  $k$  est un entier naturel.

## 16

1. a)  $a_1 = 5$  donc,  $a_1$  est impair.

Supposons que pour tout entier naturel  $k$ ,  $a_k$  est impair.

Démontrons que  $a_{k+1}$  est impair.

On a :  $a_{k+1} = a_k + 6$  Puisque  $a_k$  est impair alors  $a_{k+1}$  est impair.

On conclut que pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 1,  $a_n$  est impair.

On démontre que la même manière que  $(b_n)$  est une suite de termes impaires.

b)  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites arithmétiques de raisons respectives 6 et 2.

Donc, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times 6$$

$$a_n = 5 + 6n - 6$$

$$a_n = 6n - 1$$

Et :

$$b_n = b_1 + (n - 1) \times 2$$

$$b_n = 3 + 2n - 2$$

$$b_n = 2n + 1$$

c) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$c_n = 6n - 1 + 2n + 1 + 2n$$

$$c_n = 10n.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a : } \text{PGCD}(a_n, b_n) &= \text{PGCD}(6n - 1, 2n + 1) \\ &= \text{PGCD}(6n - 1 + 2n + 1, 2n + 1) \\ &= \text{PGCD}(8n, 2n + 1). \end{aligned}$$

$8n$  est pair tandis que  $2n + 1$  est impair.

Par conséquent :  $\text{PGCD}(8n, 2n + 1) = 1$ .

On en déduit que :  $\text{PGCD}(a_n, b_n) = 1$ .

Il en découle que pour tout entier naturel  $n$  non nul, les nombres  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} 3. (a_n + 1)^2 + (a_n + b_n)^2 &= (6n - 1 + 1)^2 + (6n - 1 + 2n + 1)^2 \\ &= (6n)^2 + (8n)^2 \\ &= 36n^2 + 64n^2 \\ &= 100n^2 \\ &= (10n)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (a_n + 1)^2 + (a_n + b_n)^2 = c_n^2.$$

17

1.  $n$  étant impair, il existe un entier naturel  $p$  tel que :  $n = 2p + 1$ .

$$\text{Donc : } a^n + 2a = a^{2p+1} + 2a.$$

$$\text{On a : } a^{2 \times 0 + 1} + 2a = a + 2a = 3a.$$

Donc,  $a^{2 \times 0 + 1} + 2a$  est un multiple de 3.

Supposons que pour un entier naturel  $j$ ,  $a^{2j+1} + 2a$  soit un multiple de 3.

Démontrons que  $a^{2(j+1)+1} + 2a$  est un multiple de 3.

$$\begin{aligned} a^{2j+1+2} + 2a &= a^2 \times a^{2j+1} + 2a \\ &= a^2 \times (a^{2j+1} - 2a + 2a) + 2a \\ &= a^2 \times (a^{2j+1} + 2a) - 2(a^3 - a). \\ &= a^2 \times (a^{2j+1} + 2a) - 2a(a-1)(a+1). \end{aligned}$$

De plus  $a^{2j+1} + 2a$  est par hypothèse un multiple de 3 et la produit de trois entiers consécutifs est également un multiple de 3. Il s'ensuit que  $a^{2(j+1)+1} + 2a$  est un multiple de 3.

On conclut que si  $n$  est impair alors  $a^n + 2a$  est un multiple de 3.

$$2. a) a^n + 2a = y^2 \Rightarrow a(a^{n-1} + 2) = y^2$$

Il en découle que  $a$  divise  $y^2$ .

Comme  $a$  est un nombre premier alors il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $y = ka$ .

$$\begin{aligned} b) \quad y = ka &\Rightarrow a^n + 2a = a^2 k^2 \\ &\Rightarrow a^{n-1} + 2 = ak^2 \\ &\Rightarrow ak^2 - a^{n-1} = 2 \\ &\Rightarrow a(k^2 - a^{n-2}) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } a = 1 \text{ alors } k^2 - 1^{n-2} = 2$$

$$k^2 = 3. \text{ Ce qui est impossible dans } \mathbb{N}.$$

$$\text{Par conséquent : } a = 2 \text{ et } k^2 - 2^{n-2} = 1.$$

$$c) \text{ On a : } k^2 - 2^{n-2} = 1 \text{ donc, } k^2 = 1 + 2^{n-2}.$$

Puisque  $n \geq 3$  implique  $n - 2 \geq 1$  alors  $2^{n-2}$  est un nombre pair.

Il s'ensuit que  $1 + 2^{n-2}$  est impair.

Donc,  $k^2$  impair. On en déduit que  $k$  est impair.

Par suite, il existe un entier naturel  $p$  tel que :  $k = 2p + 1$ .

Donc :

$$(2p + 1)^2 = 1 + 2^{n-2}$$

$$4p^2 + 4p + 1 = 1 + 2^{n-2}$$

$$4p(p + 1) = 2^{n-2}$$

$p$  et  $p + 1$  sont deux entiers consécutifs. Donc, l'un d'entre eux est impair.

Aucun entier impair autre que 1 ne peut diviser  $2^{n-2}$  qui est un nombre pair.

On en déduit que  $p$  est égale à 1.

Il en résulte que :  $k = 3$ .

d) De ce qui précède, on a :  $1 + 2^{n-2} = 3^2$

$$2^{n-2} = 2^3$$

Donc :  $n - 2 = 3$

$$n = 5.$$

D'autre part,  $y = ka = 3 \times 2$ . Il en découle que  $y = 6$ .

3. D'après la question 1,  $y^2$  est divisible par 3.

De plus :  $a^n + 2a = y^2 \Rightarrow a(a^{n-1} + 2) = y^2$

Donc,  $y^2$  est divisible par  $a$ . Comme  $a$  est un nombre premier, alors  $y$  est divisible par  $a$ .

Par suite, il existe un entier naturel  $q$  tel que :  $y^2 = 9a^2 q^2$ .

Il s'ensuit que :

$$a(a^{n-1} + 2) = 9a^2 q^2$$

$$a^{n-1} + 2 = 9aq^2$$

$$9aq^2 - a^{n-1} = 2$$

$$a(9q^2 - a^{n-2}) = 2$$

Par conséquent :  $a = 2$  et  $9q^2 - 2^{n-2} = 1$ .

On en déduit que :  $(3q - 1)(3q + 1) = 2^{n-2}$ .

Donc, il existe un entier naturel  $m$  tel que :  $3q - 1 = 2^{n-2}$ .

Il en résulte que :  $3q + 1 = 2 + 2^{n-2}$ .

Le dernier résultat est vrai uniquement pour  $q = 1$ .

Donc :  $9 \times 1^2 - 2^{n-2} = 1$ .

$$2^{n-2} = 2^3$$

On obtient :  $n = 5$ .

Par conséquent :  $a = 2, n = 5$  et  $y = 6$ .

**18**

Soit  $x$  une solution de l'équation (E).

4 divise  $7y$  et, 4 et 7 premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise  $y$ .

Par conséquent, il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $y = 4k$ .

Donc,  $4x = 7 \times 4k \Rightarrow x = 7k$

Par suite, tout couple  $(x, y)$  solution de (E) est de la forme  $(7k, 4k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

Réciproquement soit, un couple  $(7k, 4k)$  avec  $k$  un entier relatif.

On a :  $4 \times 7k = 28k$  et  $7 \times 4k = 28k$ .

Donc :  $4 \times 7k = 7 \times 4k$ .

Il en résulte que tout couple  $(7k, 4k)$  où  $k$  est un entier relatif est solution de (E).

On conclut que les solutions de (E) sont les couples  $(7k, 4k)$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

**19**

1. a)  $5 \times 3 - 2 \times 6 = 15 - 12 = 3$

Donc, le couple  $(3, 6)$  est solution de (E).

b) Déterminons les solutions de l'équation  $5x - 2y = 0$  (E')

Pour  $(x, y)$  élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , (E')  $\Leftrightarrow 5x = 2y$ .

Soit  $(x, y)$  une solution de l'équation (E').

5 divise  $2y$  et, 5 et 2 premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 5 divise  $y$ .

Par conséquent, il existe un entier relatif  $k$  tel que  $y = 5k$ .

Et, comme  $5x = 2 \times 5k$  alors  $x = 2k$ . On en déduit que tout couple  $(x, y)$  solution de (E') appartient à l'ensemble  $\{(2k, 5k); k \in \mathbb{Z}\}$ .

Réciproquement, soit un couple  $(2k, 5k)$  où  $k$  entier relatif.

On a :  $5 \times 2k = 10k$  et  $2 \times 5k = 10k$  donc,  $5 \times 2k = 2 \times 5k$ .

Donc, tout couple  $(2k, 5k)$  est solution de (E').

On conclut que l'ensemble solution de (E') est  $\{(2k, 5k); k \in \mathbb{Z}\}$ .

Réolvons l'équation (E).

On a :  $5 \times 3 - 2 \times 6 = 3$

Donc, pour tout  $(x, y)$  élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,

$$(E) \Leftrightarrow 5x - 2y = 5 \times 3 - 2 \times 6$$

$$\Leftrightarrow 5(x - 3) - 2(y - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 2k \text{ et } y - 6 = 5k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 2k \text{ et } y = 6 + 5k \text{ où } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions de (E) sont les couples  $(3 + 2k, 6 + 5k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

20

$$\text{Pour } x \text{ élément de } \mathbb{Z}, \quad (S) \Rightarrow \begin{cases} 3x \equiv 12 [15] \\ 5x \equiv 35 [15] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \times 3x = 2 \times 12 [15] \\ 5x \equiv 35 [15] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x \equiv 24 [15] \\ 5x \equiv 35 [15] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6x - 5x = 24 - 35 [15]$$

$$\Rightarrow x \equiv -11 [15]$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 [15]$$

Réciproquement, pour  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$

$$\text{On a : } x \equiv 4 [15] \Rightarrow x = 4 + 3k \times 5; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 [5].$$

$$\text{Et : } x \equiv 4 [15] \Rightarrow x = 7 - 3 + 15k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 7 + 3 \times (-1 + 5k); k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 [3].$$

$$\text{Par suite : } x \equiv 4 [3] \Rightarrow \begin{cases} 3x \equiv 12 [15] \\ 5x \equiv 35 [15] \end{cases}$$

Par conséquent, pour  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$ ,  $(S) \Leftrightarrow x \equiv 4 [3]$ .

$$(S) \Leftrightarrow x = 4 + 3k; k \in \mathbb{Z}.$$

On conclut les solutions de (S) sont les nombres  $4 + 3k$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

### Autrement

$$\text{Pour tout } x \text{ élément de } \mathbb{Z}, \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5p; p \in \mathbb{Z} \\ x = 7 + 3q; q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Il s'ensuit que : } 4 + 5p = 7 + 3q$$

$$\text{Donc : } 5p - 3q = 3$$

Déterminons les entiers relatifs  $p$  et  $q$  vérifiant l'égalité  $5p - 3q = 3$ .

On a :  $5p - 3q = 3 \Leftrightarrow 5p = 3(1 + q)$

3 divise  $5p$  et, 3 et 5 premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 3 divise  $p$ .

Donc, il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $p = 3k$ .

Par conséquent :  $5 \times 3k = 3(1 + q);$

$$q = 5k - 1.$$

Donc le couple  $(p, q)$  est de la forme  $(3k, 5k - 1)$ .

Réciproquement, soit un couple  $(3k, 5k - 1)$  où  $k$  est un entier relatif quelconque.

On a :  $5 \times 3k = 15k$  et  $3(1 + 5k - 1) = 3 \times 5k = 15k$  donc,  $5 \times 3k = 3(1 + 5k - 1)$ .

Par conséquent, les couples  $(p, q)$  sont les couples  $(3k, 5k - 1)$  où  $k$  est un entier relatif.

Donc :  $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+5 \times 3k; p \in \mathbb{Z} \\ x=7+3 \times (5k-1); q \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+15k; p \in \mathbb{Z} \\ x=4+15k; q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow x = 4+15k; p \in \mathbb{Z}$$

21

1.  $23 \times 3 - 17 \times 4 = 69 - 68 = 1$  donc,  $23 \times 3 - 17 \times 4 = 1$ .

2. Soit  $(u, v)$  élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,

$$(E) \Leftrightarrow 23u - 17v = 23 \times 3 - 17 \times 4$$

$$\Leftrightarrow 23(u - 3) - 17(v - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 23(u - 3) = 17(v - 4)$$

$$\Leftrightarrow u - 3 = 17k \text{ et } v - 4 = 23k \text{ avec } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

$$(E) \Leftrightarrow u = 3 + 17k \text{ et } v = 4 + 23k \text{ avec } k \text{ élément de } \mathbb{Z}.$$

Il s'ensuit que les solutions de (E) sont les couples  $(3 + 17k, 4 + 23k)$  où  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

3. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites arithmétiques de raisons respectives 23 et 17.

Par suite, pour tout entiers naturels  $n$ ,  $a_n = a_0 + 23n$  et  $b_n = b_0 + 17n$ .

$$a_n = 2 + 23n \quad \text{et} \quad b_n = 5 + 17n.$$

Donc :  $a_p = b_q \Leftrightarrow 2 + 23p = 5 + 17q$

$$\Leftrightarrow 23p - 17q = 3$$

Par conséquent, le couple  $(p, q)$  est solution de (E).

Il en résulte que :  $p = 3 + 17k$  et  $q = 4 + 23k$

On a :  $0 \leq p \leq 2014 \Leftrightarrow 0 \leq 3 + 17k \leq 2014$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{17} \leq k \leq \frac{2011}{17}.$$

Or :  $-\frac{3}{17} \approx -0,17$  et  $\frac{2011}{17} \approx 118$ .

Donc :  $0 \leq p \leq 2014 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 118$  (1).

On a :  $0 \leq q \leq 2014 \Leftrightarrow 0 \leq 4 + 23k \leq 2014$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{23} \leq k \leq \frac{2010}{23}.$$

Or :  $-\frac{4}{23} \approx -0,17$  et  $\frac{2010}{23} \approx 87$

Donc :  $0 \leq q \leq 2014 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 87$  (2).

De (1) et (2), on déduit que :  $p = 3 + 17k$  et  $q = 4 + 23k$  avec  $0 \leq k \leq 87$ .

**22**

1. (E)  $\Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = x_k \text{ et } y - y_0 = y_k \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + x_k \text{ et } y = y_0 + y_k \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Donc, les solutions de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont les couples  $(x_0 + x_k, y_0 + y_k)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. On a :  $amx_0 + bmy_0 = mc$ .

Par suite : (E)  $\Leftrightarrow ax + by = amx_0 + bmy_0$

$$\Leftrightarrow a(x - mx_0) + b(y - my_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - mx_0 = x_k \text{ et } y - my_0 = y_k \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

$$\Leftrightarrow x = mx_0 + x_k \text{ et } y = my_0 + y_k \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Les solutions de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont les couples  $(mx_0 + x_k, my_0 + y_k)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

3. On a : (E)  $\Leftrightarrow ax + by = ab + c$

$$(E) \Leftrightarrow a(x - b) + by = c$$

$$(E) \Leftrightarrow a(x - b) + by = ax_0 + by_0 \text{ car } ax_0 + by_0 = c.$$

$$(E) \Leftrightarrow a(x - b - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = b + x_k + x_0 \text{ et } y = y_k + y_0 \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Les solutions de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sont les couples  $(b + x_k + x_0, y_k + y_0)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

**23**

Pour  $x$  élément de  $\mathbb{Z}$ , on a :  $9x = 1 [5]$  or  $1 = 81[5]$ .

Donc :  $9(x - 9) = 0 [5]$

On en déduit que 5 divise  $9(x - 9)$  avec 5 et 9 premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 5 divise  $x - 9$ . Donc, il existe un entier relatif  $k$  tel que  $x - 9 = 5k$ ;  $x = 9 + 5k$ .

Réciproquement :

$$\begin{aligned} x = 9 + 5k &\Rightarrow 9x = 81 + 45k \\ &\Rightarrow 9x = 81 + 45k \\ &\Rightarrow 9x = 1 + 80 + 45k \\ &\Rightarrow 9x = 1 + (16 + 9k) \times 5 \\ &\Rightarrow 9x \equiv 1 [5] \end{aligned}$$

Par conséquent :  $9x = 1 [5] \Leftrightarrow x = 9 + 5k; k \in \mathbb{Z}$ .

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres  $9 + 5k$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

**24**

On a :  $4 \times (3k + 1) - 3 \times (4k + 1) = 1$  et  $1 \times (3k + 1) - 3 \times k = 1$

Donc, d'après le théorème de Bézout, d'une part  $3k + 1$  et  $4k + 1$  et d'autre part,  $3k + 1$  et  $k$  sont premiers entre eux. On en déduit que  $(3k + 1)$  et  $k(4k + 1)$  sont premiers

entre eux. On conclut que la fraction  $\frac{k(4k+1)}{3k+1}$  est irréductible.

$$\text{On a : } \frac{k^3 + k^2}{2k + 1} = \frac{k^2(k+1)}{2k+1}.$$

Comme :  $\text{PGCD}(2k + 1, k) = \text{PGCD}(k, 2k + 1 - 2k) = \text{PGCD}(k, 1) = 1$

alors les nombres  $k$  et  $2k + 1$  sont premiers entre eux. Il en découle que  $k^2$  et  $2k + 1$  sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} \text{De plus : } \text{PGCD}(2k + 1, k + 1) &= \text{PGCD}(k + 1, 2(k + 1) - (2k + 1)) \\ &= \text{PGCD}(k + 1, 1) = 1 \end{aligned}$$

Donc, les nombres  $2k + 1$  et  $k + 1$  sont premiers entre eux.

Par conséquent,  $k^2(k + 1)$  et  $2k + 1$  sont premiers entre eux.

On conclut que  $\frac{k^2(k+1)}{2k+1}$  est irréductible.

**25**

$x$  est une puissance de 5 inférieure ou égale à  $5^n$ .

Lorsque  $n$  est impair, on a :  $x = 5$  et  $a = n$ .

Considérons le cas où  $n$  est pair.

On a :  $x^a = 5^{qk}$  avec  $qk = n$ .

Il en résulte que  $x$  est de la forme  $5^k$  où  $k$  est un diviseur de  $n$  et  $a = q$

26

$$1. \text{ On a : } 3a(a+b+1) = a^2 + b^2 + (a+b-1)^2$$

Après développement des membres de gauche et de droite on obtient :

$$a(a+b+5) - 2b(b-1) = 1. \quad (2).$$

2. a) De la relation précédente, on déduit par le théorème de Bézout que  $a$  et  $2$  sont premiers entre eux donc  $a$  est impair.

Si  $b$  était pair, on aurait  $a+b+5$  pair ce qui est impossible.

On en déduit que  $b$  est impair.

Par ailleurs, d'après la relation (2) et tenant compte du théorème de Bézout, les nombres  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

b) Supposons que  $b$  soit strictement inférieur à  $a$ .

$$\text{On a : } (2) \Rightarrow a(a+b+5) = 1 + 2b(b-1)$$

$$(2) \Rightarrow b^2 + b^2 + 5b < 1 + 2b^2 - 2b$$

$$(2) \Rightarrow 7b < 1 \text{ ce qui est absurde car } b \text{ est non nul.}$$

On en déduit que  $b$  est donc strictement supérieur à  $a$ .

3. En considérant la relation (2),  $a$  est supérieur ou égal à  $3$ . D'après la relation (2),  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et la somme de trois carrés présentée est divisible par  $3$ . On en déduit que  $a$  et  $b$  ne sont pas divisibles par  $3$ . Par conséquent,  $a$  est supérieur ou égal à  $5$  et  $b$  est supérieur ou égal à  $7$ .

4. a) Laissé au soin du lecteur.

b) Démontrons que si  $a = 5 + n$  alors  $A = n + 1$

$$A = (5+n)(5+n+7+n+5) - 2(7+n)(7+n-1)$$

$$A = (5+n)(2n+17) - 2(n^2+13n+42)$$

$$A = 2n^2 + 27n + 85 - 2n^2 - 26n - 84$$

$$A = n + 1.$$

Démontrons que si  $A = n + 1$  alors  $a = 5 + n$ .

$$\text{On a : } A = a(a+7+n+5) - 2(7+n)(7+n-1)$$

$$A = a(a+n+12) - 2n^2 - 26n - 84$$

$$\text{Par suite : } A = n + 1 \text{ implique } a(a+n+12) - 2n^2 - 26n - 84 = n + 1$$

$$\text{Donc : } a(a+n+12) - 2n^2 - 26n - 84 = 2n^2 + 26n + 85$$

$$a(a + n + 12) = (n + 5)(2n + 17)$$

Il s'ensuit que :  $a = n + 5$  et  $a + n + 12 = 2n + 17$

Donc :  $a = n + 5$ .

On conclut que  $A = n + 1$  si et seulement si  $a = 5 + n$ .

5. D'après la question 4b),  $A = 1$  si et seulement si  $a = 5$

$$a(a + b + 5) - 2b(b - 1) = 1 \text{ si et seulement si } a = 5$$

On en déduit que  $a(a + b + 5) - 2b(b - 1) = 1$  si et seulement si  $a = 5$  et  $b = 7$ .

Donc, les valeurs de  $a$  et  $b$  qui vérifient la relation (1) sont  $a = 5$  et  $b = 7$ .

27

Lorsque  $n$  est impair,

$$6^n + 1 = 6^n - (-1)^n = 7(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6 + 1)$$

$$5^n + 2^n = 5^n - (-2)^n = 7(5^{n-1} + 5^{n-2} \times 2 + \dots + 5 \times 2^{n-2} + 2^{n-1})$$

$$4^n + 3^n = 6^n - (-3)^n = 7(4^{n-1} + 4^{n-2} \times 3 + \dots + 4 \times 3^{n-2} + 3^{n-1})$$

Par conséquent,  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 7.

Lorsque  $n$  est pair, il existe un entier  $k$  tel que :  $n = 2k$ .

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n = 1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k + 49^k.$$

On a :  $9^k = 9^k [7]$ ;  $16^k = 2^k [7]$ ;  $25^k = 4^k [7]$ ;  $36^k = 1 [7]$ .

Par suite,  $1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k = 2 + 2 \times 4^k + 2 \times 4^k [7]$

$$1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k = 2(1 + 2^k + (2^k)^2) [7]$$

$$1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k = 2 \frac{(2^k)^3 - 1}{2^k - 1} [7]$$

$$1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k = 2 \frac{8^k - 1}{2^k - 1} [7]$$

Or,  $8 = 1 [7]$ ;  $8^k = 1 [7]$ ;  $8^k - 1 = 0 [7]$

Donc,  $1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k = 0 [7]$ .

Par conséquent,  $1 + 4^k + 9^k + 16^k + 25^k + 36^k + 49^k$  est divisible par 7.

Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 7.

Démontrons par récurrence que  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 4.

$$\text{On a : } 1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + 6^1 + 7^1 = 28$$

Donc,  $1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + 6^1 + 7^1$  est divisible par 4.

Supposons que pour un entier  $k$ ,  $1 + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k + 7^k$  est divisible par 4.

Démontrons que  $A = 1 + 2^{k+1} + 3^{k+1} + 4^{k+1} + 5^{k+1} + 6^{k+1} + 7^{k+1}$  est divisible par 4.

Puisque  $1 + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k + 7^k$  est divisible par 4 alors il existe un entier naturel  $p$  tel que :  $1 + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k + 7^k = 4p$

$$1 = 4p - (2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k + 7^k).$$

Donc :  $A = 4p + 2^k + 2 \times 3^k + 3 \times 4^k + 4 \times 5^k + 5 \times 6^k + 6 \times 7^k$ .

Par suite :  $A = 2^k + 2 \times 3^k + 2^k + 2 \times 3^k$  [4].

$$A = 2 \times 2^k + 4 \times 3^k$$
 [4].

$$A = 2 \times 2^k$$
 [4].

Pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $2^k$  est un multiple de 2.

On en déduit que  $2 \times 2^k$  est un multiple de 4. Il s'ensuit que :  $A = 0$  [4].

Donc, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 4.

Comme 4 et 7 divisent  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  et, que 4 et 7 sont premiers entre eux alors, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$  est divisible par 28.

## VII - NOMBRES PREMIERS

1

$$\sqrt{271} \approx 16,46.$$

Les nombres premiers plus petits que 16,46 sont : 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

$$\text{On a : } 271 = 2 \times 136 + 1; \quad 271 = 3 \times 90 + 1; \quad 271 = 5 \times 54 + 1; \quad 271 = 7 \times 38 + 5;$$

$$271 = 13 \times 20 + 11.$$

Donc, aucun de ces nombres premiers ne divise 271. Par conséquent, 271 est un nombre premier.

2

$p$  n'est pas premier donc, il existe  $a$  et  $b$  tels que :  $p = ab$ .

$$\text{Donc : } 2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^b - 1) \sum_{i=1}^a 2^{b(a-i)}.$$

Par conséquent si  $p$  n'est pas un nombre premier alors  $2^p - 1$  est décomposable.

On en déduit que  $2^p - 1$  n'est pas premier.

3

Les nombres premiers intervenant dans la décomposition de  $x^n$  sont les nombres premiers qui interviennent dans celle de  $x$ . Puisque  $p$  est présent dans la décomposition de  $x^n$ , alors  $p$  est présent dans la décomposition de  $x$ . Donc  $p$  divise  $x$ .

4

si  $u^n$  est divisible par un nombre premier  $p$  alors  $p$  intervient dans la décomposition de  $u$  en produit de facteurs premiers.

$$\text{Posons : } u = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$$

$$\text{On a : } u^n = \prod_{i=1}^k p_i^{n\alpha_i}.$$

Or  $p$  est parmi les nombres premiers  $p_i$  donc  $u^n$  est divisible par  $(p^n)^{\alpha_i}$ .

Donc,  $u^n$  est divisible par  $p^n$ .

5

On considère les schémas ci –contre

$$\begin{array}{r|l} 7623 & 9 \\ 847 & 7 \\ 121 & 121 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27440 & 5 \\ 5488 & 16 \\ 343 & 7 \\ 49 & 49 \\ 1 & \end{array}$$

Il en résulte :  $7623 = 3^2 \times 11^2 \times 7$  et  $27440 = 2^4 \times 5 \times 7^3$ .

6

a)  $\text{PPCM}(A; B) = 3^2 \times 5 \times 7^4 \times 11^2$ ;  $\text{PPCM}(A; B) = 13073445$ .

$\text{PGCD}(A; B) = 3 \times 7^4 \times 11$ ;  $\text{PGCD}(A; B) = 79233$ .

b)  $\text{PPCM}(A; B) = 13^2 \times 17 \times 19 \times 23$ ;  $\text{PPCM}(A; B) = 1255501$ .

$\text{PGCD}(A; B) = 19$ ;  $\text{PGCD}(A; B) = 79233$ .

c)  $\text{PPCM}(A; B) = 2^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13^2 \times 47$ ;  $\text{PPCM}(A; B) = 13073445$ .

$\text{PGCD}(A; B) = 2 \times 13^2$ .  $\text{PGCD}(A; B) = 79233$ .

7

a) On a :  $12 = 2^3 \times 3$  et  $48 = 2^4 \times 3$ .

Donc :  $x = 2^4$ ;  $x = 16$  ou  $x = 2^4 \times 3$ ;  $x = 48$ .

b) On a :  $126 = 2 \times 3^2 \times 7$  et  $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ .

Donc :  $x = 2^3 \times 3^\alpha \times 5 \times 7^\beta$  avec  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ .

Il en résulte les valeurs de  $x$  : 40, 120, 360, 280, 840 et 2520.

8

a) On a :  $90 = 2 \times 3^2 \times 5$  et  $6 = 2 \times 3$ .

Donc,  $x = 2^\alpha \times 3k$ .

Pour  $\alpha = 1$  et  $k = 1$ ,  $x = 2 \times 3 \times 1 = 6$ .

Pour  $\alpha = 2$  et  $k = 1$ ,  $x = 2^2 \times 3 \times 1 = 12$ .

Pour  $\alpha = 3$  et  $k = 1$ ,  $x = 2^3 \times 3 \times 1 = 24$ .

Pour  $\alpha = 4$  et  $k = 1$ ,  $x = 2^4 \times 3 \times 1 = 48$ .

Pour  $\alpha = 1$  et  $k = 2$ ,  $x = 2 \times 3 \times 5 = 30$ .

Pour  $\alpha = 2$  et  $k = 5$ ,  $x = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$ .

Par conséquent la valeur de  $x$  qui convienne est 30.

9

$$\begin{aligned} 12! &= 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11. \end{aligned}$$

Donc, le nombre de diviseurs de  $12!$  est  $11 \times 6 \times 3 \times 2 \times 2$  soit 792.

10

1. Les diviseurs de  $p^n$  sont les nombres de la forme  $p^i$  avec  $i$  allant de 0 à  $n$ .

Donc, l'ensemble des diviseurs de  $p^n$  est  $\{1; p; p^2; \dots, p^n\}$ .

$$2. \text{ On a : } S = 1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

$$\text{Par suite : } (p - 1)S = p^{n+1} - 1$$

$$p \times p^n - (p - 1)S = 1$$

A l'aide du théorème de Bézout, on conclut que  $p^n$  et  $S$  sont premiers entre eux.

$$3. 101^5 = 10510100501 \text{ et } 1 + 101 + 101^2 + \dots + 101^5 = 10615201506.$$

Il en résulte que 10510100501 et 10615201506 sont premiers entre eux.

11

Les puissances de 5 qui interviennent dans les différentes décompositions en produit de facteurs premiers des nombres inférieurs à 1000 sont : 5,  $5^2$ ,  $5^3$  et  $5^4$ .

$5^4$  intervient seulement dans la décomposition de 625.

$5^3$  intervient dans la décomposition des nombres 125, 250, 375, 500, 750, 875 et 1000.

$5^2$  intervient dans la décomposition de chacun des nombres 25, 50, 75, 100, 150, 175, 200, 225, 275, 300, 325, 350, 400, 425, 450, 475, 525, 550, 575, 600, 650, 675, 700, 725, 775, 800, 825, 850, 900, 925, 950, 975

5 intervient dans la décomposition de chacun des nombres 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95.

Les nombres pouvant générer des zéros dans  $100!$  sont : 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95 (chacun donne 1 zéro d'où 16 zéros), 25, 50, 75, 100 (chacun donne 2 zéros d'où 8 zéros). Au total 24 zéros terminent  $100!$ .

D'autre part, les nombres pouvant générer des zéros dans  $500!$  sont : 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95 (chacun donne 1 zéro d'où 16 zéros), 25, 50, 75, 100, 150, 175, 200, 225, 275, 300, 325, 350, 400, 425, 450, 475 (chacun donne 2 zéros d'où 32 zéros) et 125, 250, 375, 500 (chacun donne 3 zéros d'où 12 zéros). Au total 60 zéros terminent  $500!$ .

Enfin, les nombres pouvant générer des zéros dans  $1000!$  sont : 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95 (chacun donne 1 zéro d'où 16 zéros), 25, 50, 75, 100, 150, 175, 200, 225, 275, 300, 325, 350, 400, 425, 450, 475, 525, 550, 575, 600, 650, 675, 700, 725, 775, 800, 825, 850, 900, 925, 950, 975 (chacun donne 2 zéros d'où 64 zéros), 125, 250, 375, 500, 750, 875 et 1000 (chacun donne 3 zéros d'où 21 zéros) et 625 (donne 4 zéros). Au total 105 zéros terminent  $1000!$ .

## 12

1. On ne peut avoir  $p = 2 [10]$ ,  $p = 4 [10]$ ,  $p = 6 [10]$  et  $p = 8 [10]$   $p$  serait divisible par 2. On ne peut avoir  $p = 5 [10]$ .  $p$  serait divisible par 5.

D'autre part, chacun des nombres 1, 3, 7 et 9 n'ont pas de diviseurs communs avec 10. On en déduit que :  $p = 1 [10]$ ,  $p = 3 [10]$ ,  $p = 7 [10]$  ou  $p = 9 [10]$ .

2. On ne peut avoir  $p = 2 [6]$  ou  $p = 4 [6]$   $p$  serait divisible par 2. On ne peut avoir  $p = 3 [6]$ .  $p$  serait divisible par 3.

D'autre part, chacun des nombres 1 et 5 n'ont pas de diviseurs communs avec 6.

Donc,  $p = 1 [6]$  ou  $p = 5 [6]$ .

## 13

1. On a :  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 + 3 + 7 + 9 [10]$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 20 [10]$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 [10].$$

Il en découle que  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$  est divisible par 10.

$$2. \text{ On a : } p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 1 \times 3 \times 7 \times 9 \ [10]$$

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 189 \ [10]$$

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 9 \ [10].$$

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = p_4 \ [10] \text{ car } p_4 = 9 \ [10].$$

$$\text{Il s'ensuit que : } p_4 \times (p_1 \times p_2 \times p_3 - 1) = 0 \ [10].$$

Or  $p_4$  n'est pas un multiple de 10. D'après le théorème de Gauss, on conclut que

$p_1 \times p_2 \times p_3 - 1$  est multiple de 10.

14

On a :  $p = 1 \ [6]$  ou  $p = 5 \ [6]$ .

Si  $p = 1 \ [6]$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $p^{2n} = 1 \ [6]$

Si  $p = 5 \ [6]$  alors  $p^2 = 1 \ [6]$ . Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p^{2n} = 1 \ [6]$ .

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p^{2n} = 1 \ [6]$ .

15

$$1. \text{ On a : } 4^0 = 1 \ [7]; 4^1 = 4 \ [7]; 4^2 = 2 \ [7]; 4^3 = 1 \ [17].$$

2. Supposons que  $a^k = 1 \ [p]$  et  $k$  ne soit pas multiple de  $k_0$ .

Donc, il existe des entiers naturels  $q$  et  $r$  tels que :  $k = qk_0 + r$  et  $0 \leq r < k_0$ .

$$\text{Par conséquent : } a^k = a^{qk_0+r} = (a^{k_0})^q \times a^r.$$

$$\text{Puisque } a^{k_0} = 1 \ [p] \text{ alors } (a^{k_0})^q = 1 \ [p]$$

$$(a^{k_0})^q \times a^r = 1 \times a^r \ [p]$$

$$a^k = a^r \ [p]$$

$$a^r = 1 \ [p] \text{ car } a^k = 1 \ [p].$$

Ce dernier résultat contredit le fait que  $k_0$  le plus petit entier tel que  $a^{k_0} = 1 \ [p]$ .

On conclut que si  $a^k = 1 \ [p]$  alors  $k$  est multiple de  $k_0$ .

16

$p$  étant supérieur ou égal à 7, on a :  $p = 1 [8]$ ,  $p = 3 [8]$ ,  $p = 5 [8]$  ou  $p = 7 [8]$ .

Donc :  $p^2 = 1 [8]$ .

Par conséquent, il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $p^2 = 1 + 8k$ .

$$\text{On a : } 17^4 = 1 [29]$$

$$(17^4)^{2k} = 1 [29]$$

$$17 \times (17^4)^{2k} = 17 [29]$$

$$\text{On conclut que : } 17^{p^2} = 17 [29].$$

$$\text{On a : } 17^{p^2} = 17 [29]$$

$$17^{p^2} - 17 = 0 [29]$$

$$17 \times (17^{p^2-1} - 1) = 0 [29]$$

Puisque 17 et 29 sont premiers entre eux alors 29 et 13 n'ont pas de diviseurs en

commun. On en déduit que :  $17^{p^2-1} - 1 = 0 [29]$ .

Par conséquent,  $17^{(p-1)(p+1)} - 1$  est divisible par 29.

17

$p$  étant un nombre premier, le reste de la division euclidienne de  $p$  par 6 est 1 ou 5.

Donc, il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $p = 1 + 6k$  ou  $p = 5 + 6k$ .

De plus :  $9^6 = 1 [73]$ .

Si  $p = 1 + 6k$ , on a :  $9^p = 9^{1+6k} = 9 \times (9^6)^k$ .

Il s'ensuit que :  $(9^6)^k = 1 [73]$

$$9 \times (9^6)^k = 9 [73]$$

Donc :  $9^p = 9 [73]$

De même :  $8^6 = 1 [73]$ .

Donc :  $(8^6)^k = 1 [73]$

$$8 \times (8^6)^k = 8 [73]$$

$$8^p = 8 [73] \quad (2)$$

Si  $p = 5 + 6k$ , on a :  $9^p = 9^{5+6k} = 9^5 \times (9^6)^k$ .

Il s'ensuit que :  $(9^6)^k = 1 [73]$  et  $9^5 = 65 [73]$

$$9^5 \times (9^6)^k = 65 [73]$$

Donc  $9^p = 65 [73]$

De même :  $(8^6)^k = 1 [73]$

$$8^5 \times (8^6)^k = 64 [73]$$

$$8^p = 64 [73]$$

De ce qui précède, on a :  $9^p - 8^p = 1 [73]$

Par conséquent :  $(9 - 8)(9^{p-1} + 9^{p-2} \times 8 + \dots + 9 \times 8^{p-2} + 8^{p-1}) = 1 [73]$

$$9^{p-1} + 9^{p-2} \times 8 + \dots + 9 \times 8^{p-2} + 8^{p-1} = 1 [73]$$

$$9^{p-1} + 9^{p-2} \times 8 + \dots + 9 \times 8^{p-2} + 8^{p-1} - 1 = [73]$$

On en déduit que pour tout nombre premier  $p$  supérieur ou égal à 5,

$$9^{p-1} + 9^{p-2} \times 8 + \dots + 9 \times 8^{p-2} + 8^{p-1} - 1 \text{ est divisible par } 73.$$

### 18

Si  $b$  et  $c$  étaient tous les deux divisibles par  $p$ , on aurait  $a$  divisible par  $p$ . Absurde. Supposons alors que  $b$  ne soit pas divisible par  $p$  et que  $c$  le soit.

$$a^2 = pk + r, \quad b^2 = k'p + r' \text{ et } c^2 = pq \text{ avec } 0 < r < p \text{ et } 0 < r' < p.$$

Il en résulte que :  $a^2 + b^2 + c^2 = pk + r + k'p + r' + pq$

$$a^2 + b^2 + c^2 = p(k + k' + q) + r + r'.$$

De plus,  $a^2 + b^2 + c^2$  est divisible par  $p$ , alors il existe un entier naturel  $m$  tel que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = pm.$$

Il s'ensuit que :  $p(k + k' + q) + r + r' = pm$

$$r + r' = p(m - k - k' - q).$$

Donc :  $m > k + k' + q$ .

Il en découle qu'il existe un entier naturel  $s$  tel que :  $k + k' + q = m + s$

Par conséquent :  $p(m + s) + r + r' = pm$

$$pm + ps + r + r' = pm$$

$$ps + r + r' = 0$$

On conclut que :  $r' = sp = r = 0$ , ce qui est impossible.

Donc,  $a^2 + b^2 + c^2$  est divisible par  $p$  si  $b$  et  $c$  ne le sont pas tous les deux à la fois.

19

Il existe des nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  et  $p_k$  tels que :

$$x = (p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k})^n.$$

Par conséquent :  $ab = (p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k})^n$ .

Donc, les nombres premiers intervenant dans chacune des décompositions de  $a$  et  $b$  sont présents dans la décomposition de  $x^n$ . De plus, comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux les nombres premiers dans la décomposition de  $a$  ne sont pas ceux qui sont présents dans la décomposition de  $b$ . Il s'ensuit qu'il existe un entier naturel  $j$  inférieur à  $k$  tel que :

$$a = (p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_j^{\alpha_j})^n \text{ et } b = (p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \times p_{j+2}^{\alpha_{j+2}} \times \dots \times p_k^{\alpha_k})^n.$$

Donc :  $p = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_j^{\alpha_j}$  et  $q = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \times p_{j+2}^{\alpha_{j+2}} \times \dots \times p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \times p_k^{\alpha_k}$ .

## VIII - NOMBRES DE FERMAT, NOMBRES DE MERSENNES, NOMBRES PARFAITS

1

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3; F_0 = 3.$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5; F_1 = 5.$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17; F_2 = 17.$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257; F_3 = 257.$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537; F_4 = 65537.$$

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967296 + 1 = 4294967297; F_5 = 4294967297.$$

2

1. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers naturels compris entre 1 et  $p - 1$  avec  $i < j$ .

Il existe des entiers  $k_i$  et  $k_j$  tels que :  $ai = pk_i + r_i$  et  $aj = pk_j + r_j$ .

Par conséquent :

$$aj - ai = pk_j + r_j - pk_i - r_i$$

$$a(j - i) = p(k_j - k_i) + r_j - r_i$$

Supposons que :  $r_i = r_j$ .

Il s'ensuit que :  $a(j - i) = p(k_j - k_i)$ .

De plus :  $0 < j - i < p$ .

Donc les entiers  $p$  et  $j - i$  sont premiers entre eux. Or  $p$  divise  $a(j - i)$ .

D'après le théorème de Gauss,  $p$  divise  $a$ . Ce qui est contraire à l'hypothèse.

On en déduit que les entiers  $r_i$  et  $r_j$  sont distincts deux à deux.

2. Les restes possibles de la division euclidienne de  $a$  par  $p$  sont :  $1, 2, 3, \dots, p - 1$ .

Or, pour tout  $i$  allant de 1 à  $p - 1$ ,  $ai = r_i [p]$  avec  $1 \leq r_i \leq p - 1$ .

Par suite :  $a \times 2a \times 3a \times \dots \times (p - 1)a = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p - 1) [p]$

$$(p-1)!a^{p-1} = (p-1)! [p]$$

$$(p-1)!(a^{p-1} - 1) = 0 [p]$$

Donc,  $p$  divise  $(p-1)!(a^{p-1} - 1)$ .

De plus, comme  $p$  et tout entier naturel compris entre 2 et  $p-1$  sont premiers entre eux alors  $p$  et  $(p-1)!$  sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, on conclut que

$p$  divise  $a^{p-1} - 1$ .

Par conséquent :  $a^{p-1} = 1 [p]$ .

On en déduit que :  $a \times a^{p-1} = a \times 1 [p]$ .

Donc :  $a^p = a [p]$ .

3

On a :  $0^p = 0$ . Donc,  $0^p = 0 [p]$ .

Supposons que pour un entier naturel  $s$ ,  $s^p = s [p]$ .

Démontrons que :  $(s+1)^p = s+1 [p]$ .

On a :  $(s+1)^p = s^p + 1^p [p]$

$$(s+1)^p = s^p + 1 [p]$$

Or :  $s^p = s [p]$ . Donc :  $s^p + 1 = s + 1 [p]$ .

Par conséquent :  $(s+1)^p = s+1 [p]$ .

On conclut que pour tout entier naturel  $a$ ,  $a^p = a [p]$ .

4

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \times 2} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1$

De plus,  $F_n = 2^{2^n} + 1$  implique  $2^{2^n} = F_n - 1$ .

Par conséquent :  $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$

2. Démontrons ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

$$F_{0+1} - 2 = F_1 - 2 = 5 - 2 = 3; F_{0+1} - 2 = F_0 = \prod_{k=0}^0 F_k.$$

$$\text{Donc : } F_{0+1} - 2 = \prod_{k=0}^0 F_k.$$

On suppose que pour un entier naturel  $j$ ,  $F_{j+1} - 2 = \prod_{k=0}^j F_k$ .

Démontrons que :  $F_{(j+1)+1} - 2 = \prod_{k=0}^{j+1} F_k$ .

On a :  $F_{(j+1)+1} = (F_{j+1} - 1)^2 - 1 = (F_{j+1} - 1 + 1)(F_{j+1} - 1 - 1)$

$$F_{(j+1)+1} = F_{j+1}(F_{j+1} - 2) = F_{j+1} \times \prod_{k=0}^j F_k$$

Donc :  $F_{(j+1)+1} - 2 = \prod_{k=0}^{j+1} F_k$ .

On conclut que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} - 2 = \prod_{k=0}^n F_k$ .

5

Soit deux nombres de Fermat  $F_m$  et  $F_n$  où  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que :  
 $n > m$ .

$$\text{On a : } F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k = \left( \prod_{k=0}^{m-1} F_k \right) \left( \prod_{k=m}^m F_k \right) \prod_{k=m+1}^{n-1} F_k.$$

$$F_n - 2 = \left( \prod_{k=0}^{m-1} F_k \right) \times F_m \times \prod_{k=m+1}^{n-1} F_k.$$

$$F_n - 2 = bF_m \quad \text{où } b = \left( \prod_{k=0}^{m-1} F_k \right) \left( \prod_{k=m+1}^{n-1} F_k \right).$$

Donc :  $F_n - bF_m = 2$ .

Il en ressort que les diviseurs communs possibles de  $F_n$  et  $F_m$  sont 1 et 2.

Or les nombres de Fermat sont impairs. On en déduit que 1 est le seul diviseur commun de deux nombres de Fermat. Donc deux nombres de Fermat sont premiers entre eux.

6

Si  $p$  divise  $F_n$ , alors il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $F_n = kp$ .

$$\text{Par suite : } 2^{2^n} + 1 = kp$$

$$2^{2^n} = kp - 1$$

$$(2^{2^n})^2 = (kp - 1)^2$$

$$2^{2^{n+1}} = k^2 p^2 - 2kp + 1$$

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (k^2 p - 2k)p$$

Il en résulte que :  $2^{2^{n+1}} - 1 = 1 [p]$ .

7

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{2^{n+1}} - 1 = 2^{2^n \times 2} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1$

Par conséquent :  $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$

$$2^{2^{n+1}} + 1 - 2 = (2^{2^n} + 1 - 2)(2^{2^n} + 1)$$

Donc :  $F_{n+1} = (F_n - 2)F_n + 2$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} - 2 = F_n (F_n - 2)$ .

De proche en proche, on aboutit à :  $F_{n+1} - 2 = F_n \times F_{n-1} \times \dots \times F_2 \times F_1 \times F_0$ .

Donc :  $F_{n+1} - 2 = \prod_{k=0}^n F_k$ .

8

1.  $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^2)^{2^n} - 1$

$$= (2^2 - 1)((2^2)^{2^{n-1}} + (2^2)^{2^{n-2}} + \dots + (2^2)^2 + 2^2 + 1)$$

Donc :  $F_{n+1} - 2 = 3((2^2)^{2^{n-1}} + (2^2)^{2^{n-2}} + \dots + (2^2)^2 + 2^2 + 1)$

Il en résulte que 3 divise  $F_{n+1} - 2$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_{n+1} - 2 = \prod_{k=0}^n F_k$ .

Il s'ensuit que  $\prod_{k=0}^n F_k$  est divisible par 3.

De plus les nombres de Fermat sont premiers entre eux.

On en déduit que  $F_0 = 3$  est le seul nombre de Fermat divisible par 3.

**9**

$$\begin{aligned}
 1. \quad M_2 &= 2^2 - 1; M_2 = 3. & M_3 &= 2^3 - 1; M_3 = 7. & M_4 &= 2^4 - 1; M_4 = 15. \\
 M_5 &= 2^5 - 1; M_5 = 31. & M_6 &= 2^6 - 1; M_6 = 63. & M_7 &= 2^7 - 1; M_7 = 127. \\
 M_8 &= 2^8 - 1; M_8 = 255. & M_9 &= 2^9 - 1; M_9 = 511. & M_{10} &= 2^{10} - 1; M_{10} = 1023. \\
 M_{11} &= 2^{11} - 1; M_{11} = 2047. & M_{12} &= 2^{12} - 1; M_{12} = 4095. \\
 M_{13} &= 2^{13} - 1; M_{13} = 8191. & M_{14} &= 2^{14} - 1; M_{14} = 16383. \\
 M_{15} &= 2^{15} - 1; M_{15} = 32767. & M_{16} &= 2^{16} - 1; M_{16} = 65535. \\
 M_{17} &= 2^{17} - 1; M_{17} = 131071. & M_{18} &= 2^{18} - 1; M_{18} = 262143. \\
 M_{19} &= 2^{19} - 1; M_{19} = 524287. & M_{20} &= 2^{20} - 1; M_{20} = 1048575.
 \end{aligned}$$

2.  $M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}$  et  $M_{19}$ .

3. Pour qu'un nombre Mersenne soit premier il faut d'abord que la puissance de 2 dans l'expression de ce nombre soit d'exposant un nombre premier.

**10**

Supposons que  $n$  soit non premier. Donc,  $n = pq$  où  $p$  et  $q$  sont supérieurs ou égaux à 2.

Par suite :  $2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1$

$$2^n - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1).$$

$p \geq 2$  implique  $2^p - 1 \geq 3$ . De plus,  $(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1 \geq 2$ .

Il s'ensuit que  $2^n - 1$  peut se décomposer en produit de facteurs supérieurs ou égaux à 2.

Par conséquent,  $2^n - 1$  n'est pas premier.

On conclut que si  $M_n = 2^n - 1$  est un nombre premier alors  $n$  est premier.

*Rémarque* : 23 est un nombre premier tandis que  $M_{23} = 8388607 = 47 \times 178481$ .

Ce qui permet de dire de  $M_{23}$  n'est pas un nombre premier.

La condition  $n$  premier n'est pas suffisante pour conclure quant à la primarité de  $M_n$ .

11

1. a) Les diviseurs propres de  $2a$  sont : 1, 2 et  $a$ .

Donc :  $2a = 1 + 2 + a \Rightarrow a = 3$ . On en déduit que  $2a$  est un nombre parfait si  $a = 3$ .

Le nombre parfait obtenu est 6.

b) La somme des diviseurs propres de  $4a$  est :  $1 + a + 2(1 + a) + 4$

Donc :  $4a = 1 + a + 2(1 + a) + 4 \Rightarrow 4a = 7 + 3a$

$$\Rightarrow a = 7.$$

On conclut que  $4a$  est un nombre parfait si  $a$  est égal à 7.

28 est le nombre parfait obtenu.

2. La somme des diviseurs propres de  $8a$  serait  $1 + 2 + 4 + 8 + a(1 + 2 + 4)$

Donc :  $8a = 1 + 2 + 4 + 8 + a(1 + 2 + 4) \Rightarrow 8a = 15 + 7a$

Il en résulte que :  $a = 15$ .

Donc,  $a$  n'est pas un nombre premier.

12

Les diviseurs propres de  $ab$  sont : 1,  $a$  et  $b$ .

Il s'ensuit que  $ab$  est un nombre parfait si :  $ab = 1 + a + b$ .

Donc :  $a(b - 1) = b + 1$ .

$b$  étant un nombre impair donc  $b - 1$  et  $b + 1$  sont deux nombres pairs consécutifs avec  $b - 1$  inférieur à  $b + 1$ . Or dans notre cas présent,  $b - 1$  divise  $b + 1$ .

Il en résulte que  $b + 1$  est un multiple de 4 et  $b - 1$  est seulement un multiple de 2.

On en déduit que  $a$  est égal à 2. Donc :  $2b = 1 + 2 + b$ .

Par conséquent :  $b = 3$ .

13

1. Si  $x^n y$  est un nombre parfait alors :  $x^n y = S + yS + x^n$  où  $S = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

On a :  $(x - 1)S = x^n - 1$  et  $(x - 1)x^n y = (x - 1)S + y(x - 1)S + x^n(x - 1)$

Donc :  $(x - 1)x^n y = x^n - 1 + y(x^n - 1) + x^n(x - 1)$

$$x^{n+1}y - 2yx^n + y = x^{n+1} - 1$$

$$(x^{n+1} - 2x^n + 1)y = x^{n+1} - 1.$$

2. Supposons  $x$  est impair alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $x^{n+1} - 1$  est pair.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, (x^{n+1} - 2x^n + 1)y = x^{n+1} - 1$$

Il en résulte que  $y$  divise  $x^{n+1} - 1$ .

Ce qui est impossible car  $y$  impair et  $x^{n+1} - 1$  est pair.

Donc,  $x$  ne peut être supérieur ou égal à 3 et  $x$  étant premier, on conclut que  $x$  est égal à 2.

3. D'après la question 2) :

$$(2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1)y = 2^{n+1} - 1$$

$$(2^{n+1} - 2^{n+1} + 1)y = 2^{n+1} - 1$$

Il en résulte que :

$$y = 2^{n+1} - 1.$$

Et :

$$x^n y = 2^n (2^{n+1} - 1)$$

4. Si  $2^n ab$  est un nombre parfait alors :

$$2^n ab = 1 + 2 + \dots + 2^n + a(1 + 2 + \dots + 2^n) + b(1 + 2 + \dots + 2^n) + ab(1 + 2 + \dots + 2^{n-1})$$

$$\text{Donc : } 2^n ab = (1 + 2 + \dots + 2^n)(a + b + 1) + ab(1 + 2 + \dots + 2^{n-1})$$

Or :  $(1 + 2 + \dots + 2^{n-1})(2 - 1) = 2^n - 1$

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Il s'ensuit que :  $2^n ab = (2^{n+1} - 1)(a + b + 1) + ab(2^n - 1)$

$$ab = (2^{n+1} - 1)(a + b + 1)$$

Il en découle que :  $a = a + b + 1$  ou  $b = a + b + 1$ .

Donc :  $b + 1 = 0$  ou  $a + 1 = 0$ . ce qui est impossible.

Par conséquent, on ne peut pas trouver deux nombres premiers  $a$  et  $b$  différents de 2 tels que  $2^n ab$  soit un nombre parfait.

5. a)  $2^1 \times (2^{1+1} - 1) = 2 \times 3 = 6$  et  $1 + 2 + 3 = 6$ .

Donc, 6 est un nombre parfait.

$$2^2 \times (2^{2+1} - 1) = 4 \times (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28 \text{ et } 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Donc, 8 est un nombre parfait.

$$2^4 \times (2^{4+1} - 1) = 496;$$

$$\text{Et : } 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

Donc, 496 est un nombre parfait.

$$2^6(2^{6+1} - 1) = 2^6 \times 64 = 64 \times 127 = 8128$$

$$\text{Et : } 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 8128$$

Donc, 8128 est un nombre parfait.

$$\text{b) } 2^{10}(2^{10+1} - 1) = 2^{10} \times 2047 = 1024 \times 2047 = 2096128$$

Et :  $2047 = 23 \times 89$ . Par conséquent 2047 n'est pas un nombre premier.

Donc, 2096128 n'est pas un nombre parfait.

$$2^{12}(2^{13} - 1) = 2^{12} \times 2047 = 4096 \times 8191 = 33550336.$$

De plus :  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 + 8191$

$$\text{Et : } 8191 + 8191 \times 4095 = 33550336.$$

Il en résulte que 33550336 est un nombre parfait.

