Collection
La Réussite

# Mathématiques
Manuel

# Tle D

Vallesse

Collection
La Réussite

# Mathématiques
Manuel

BENGALY
KALIFA

Tle D

Auteurs

**KOUDOU BROUBIE François**
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire
**ATSE Angi Théodore**
Encadreur pédagogique de Mathématiques
**AKÉ Djebri Antonin**
Professeur de lycée

Vallesse

# Avant-Propos

Ce manuel de mathématiques de Terminale D est conforme au programme en vigueur.
Il comporte quatre parties : un pré-acquis, douze leçons, un raisonnement et un mémento :

- **Un pré-acquis** : ce sont des résumés des leçons de la classe de Première D indispensables à la classe de Terminale D.

- **12 leçons :** chaque leçon est organisée de la façon suivante :

  - Le titre de la leçon : il est conforme à celui du programme.

  - Une image : elle illustre et suscite une réflexion sur le titre de la leçon.

  - Une situation d'apprentissage : elle a les caractéristiques suivantes : un contexte, une (ou des) circonstance(s) et une (ou des) tâche(s).

  - Les habiletés et contenus : ils sont organisés pour faire apparaître le plan suivant lequel sera traitée la leçon.

  - L'installation des habiletés : elle présente une succession d'activités en rapport avec le plan précédent et permettant le développement des habiletés et contenus. Chaque activité est suivie d'exercices de fixation.

  - L'apprentissage de la rédaction : il présente des exercices corrigés. Ces exercices sont suivis de points méthodes.

  - Le résumé de cours : il présente l'essentiel de la leçon à retenir.

  - Les exercices : ils présentent des exercices rangés en trois groupes :

    - Exercices de renforcement : ils convoquent au moins deux habiletés d'une même leçon.
    - Exercices d'approfondissement : ils convoquent des habiletés de plusieurs leçons.
    - Situation(s) complexe(s) : ses constituants sont : un contexte, une (ou des) fonction(s), une (ou des) ressource(s) et une (à trois) consigne(s) indépendante(s).

  - Le coup de pouce : il présente pour certains exercices d'approfondissement ou situations complexes, des indications à l'utilisateur. Ces exercices sont signalés par un astérisque.

- **Un raisonnement** : il résume les raisonnements mathématiques et les points méthodes essentiels utilisés dans la leçon.

- **Un mémento** : il présente un résumé succinct de chaque leçon du manuel.

**Les auteurs**


ISBN : 978-2-902594-74-0

# Sommaire

# Sommaire

## Sommaire

# Préacquis

## ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{R}$

$a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré. La fonction $f$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une fonction polynôme du second degré.
- (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ est une l'équation du second degré.
- $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de $f(x)$ ou de (E).

| Signe de $\Delta$ | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| Zéro(s) de $f(x)$ ou solution(s) de (E) | $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_0 = -\frac{b}{2a}$ | Pas de zéro ou Pas de solution |
| Factorisation de $f(x)$ | $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ | $f(x) = a(x - x_0)^2$ | Pas de factorisation |
| Signe de $f(x)$ | Signe de $a$ à l'extérieur des zéros et signe de $-a$ entre les zéros | Signe de $a$ ou nul | Signe de $a$ |

- Résoudre une inéquation du second degré du type : $ax^2 + bx + c > 0$ (resp. $< 0$ ; $\leq 0$ ; $\geq 0$) revient à étudier le signe de $ax^2 + bx + c$ et en déduire les solutions de l'inéquation.

### Somme et produit des solutions

- Si $x_1$ et $x_2$ sont les solutions de (E), alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
- Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

## ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

### Déterminant d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

- Le déterminant de (S) est le nombre réel noté $\Delta$ tel que : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.
- Si $\Delta = 0$, alors (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Si $\Delta \neq 0$, alors (S) admet une solution unique.

## GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

### Comparaison de fonctions

$f$ et $g$ sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs $D_f$ et $D_g$.

- Les fonctions $f$ et $g$ sont égales lorsque $D_f = D_g$ et, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$,

$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ ($f$ est supérieure à $g$).

$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ ($f$ est inférieure à $g$).

### Somme, produit et quotient de fonctions

$f$ et $g$ sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs $D_f$ et $D_g$.

- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$, $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

### Composition de fonctions

$f$ et $g$ sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs $D_f$ et $D_g$.

- $x \in \mathscr{D}_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_{g \circ f}$, $g \circ f(x) = g[f(x)]$

### Applications injective, surjective et bijective

Soit $f$ est une application de E vers F.

- $f$ est une application injective si et seulement si $\forall a \in E$, $\forall b \in E$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
- $f$ est une application surjective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ / $y = f(x)$.
- $f$ est une application bijective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$ / $y = f(x)$.

Une application bijective est une application à la fois injective et surjective.

- $f$ est une bijection et $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

On a : $\forall x \in E, \forall y \in F$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

# LIMITES ET CONTINUITÉ

- Limite de la somme

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

- Limite du produit

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$ | $l\times l'$ | $+\infty$ si $l>0$ ou $-\infty$ si $l<0$ | $-\infty$ si $l>0$ ou $+\infty$ si $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

- Limite du quotient

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 | $l>0$ | | $l<0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 | 0 et $g(x)>0$ | 0 et $g(x)<0$ | 0 et $g(x)>0$ | 0 et $g(x)<0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ | $\dfrac{l}{l'}$ | 0 | | ? | ? | ? | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## Continuité

Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $a$ un élément de $\mathscr{D}_f$.
$f$ est continue en $a$ si $f$ admet une limite finie en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

# DÉRIVATION

## Nombre dérivé en un point

$f$ est une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $a$ un élément de $\mathscr{D}_f$.
Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

## Dérivée et opérations sur les fonctions

| Fonction | $u+v$ | $ku$ $(k\in\mathbb{R})$ | $uv$ | $u^n$ | $\dfrac{u}{v}$ | $\sqrt{u}$ | $x\mapsto u(ax+b)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dérivée | $u'+v'$ | $ku'$ | $u'v+uv'$ | $nu'u^{n-1}$ | $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $x\mapsto au'(ax+b)$ |

## Dérivée et sens de variation

$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- $f$ est croissante sur K si et seulement si $f'$ est positive sur K.
- $f$ est décroissante sur K si et seulement si $f'$ est négative sur K.
- $f$ est constante sur K si et seulement si $f'$ est nulle sur K.

# EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

## Limite à l'infini de fonction polynôme et rationnelle

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

## Asymptotes

- La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty (\text{ou} -\infty)$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$).
- La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \left(resp \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$.

# ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

## Parité

- Une fonction $f$ d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est paire lorsque pour tout $x$ élément de $\mathscr{D}_f$, on a :
$-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction $f$ d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est impaire lorsque pour tout $x$ élément de $\mathscr{D}_f$, on a :
$-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

## Axe de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la représentation graphique d'une fonction $f$ lorsque l'une des propositions est vraie :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathscr{D}_f$, on a : $a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(a + x) = f(a - x)$.
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et : $f(2a - x) = f(x)$.
- La fonction : $x \mapsto f(a + x)$ est paire.

## Centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Le point $A(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de la représentation graphique d'une fonction $f$ lorsque l'une des propositions est vraie :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathscr{D}_f$, on a : $a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- La fonction : $x \mapsto f(a - x) + b$ est impaire.

## Asymptote oblique

La droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(resp. \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right).$$

# SUITES NUMÉRIQUES

## Suites arithmétiques

$(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$.

- Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Pour tous entiers naturels $n$ et $p$, $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p \leq n$,

$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n - p + 1)\dfrac{u_p + u_n}{2}$.

## Suites géométriques

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q$.

- Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = qv_n$.
- Pour tous entiers naturels $n$ et $p$, $v_n = v_p q^{n-p}$.
- Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p \leq n$,

$v_p + v_{p+1} + ... + v_n = v_p\left(\dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$, si $q \neq 1$.

# STATISTIQUE

Soit $([a_i\ ;\ a_{i+1}[, n_i)$ une série statistique regroupée en classe.
$c_i$ est le centre de la classe d'effectif $n_i$ et N est l'effectif total.

## Densité d'une classe

$$d = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{amplitude de la classe}}.$$

## Moyenne de la série statistique

$$\overline{x} = \frac{c_1 \times n_1 + c_2 \times n_2 + ... + c_p \times n_p}{N}.$$

## Variance et écart type

- $V = \dfrac{n_1 \times (c_1 - \overline{x})^2 + n_2 \times (c_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p \times (c_p - \overline{x})^2}{N}$

ou

$$V = \frac{c_1^2 \times n_1 + c_2^2 \times n_2 + ... + c_p^2 \times n_p}{N} - (\overline{x})^2$$

- $\sigma = \sqrt{V}$.

# DÉNOMBREMENT

## Cardinal

Soit A et B deux ensembles finis.

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

## p-uplets

Le nombre de $p$-uplets d'un ensemble de $n$ éléments est : $n^p$.

## Arrangements

Le nombre d'arrangements de $p$ éléments d'un ensemble de $n$ éléments, $1 \le p \le n$, est : $A_n^p$.

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

## Permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble de $n$ éléments est : $n!$.

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

NB : $0! = 1$

## Combinaisons

Le nombre de combinaisons de $p$ éléments d'un ensemble de $n$ éléments, $0 \le p \le n$, est : $C_n^p$.

$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$ pour $1 \le p \le n$

# PROBABILITÉ

- $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

  $= \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ dans une situation d'équiprobabilité
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, alors

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

# BARYCENTRE

## Barycentre

- A, B et C sont trois points du plan et $a$, $b$ et $c$ sont des réels tels que $a + b + c \neq 0$.

Si G est le barycentre des trois points pondérés (A, $a$) ; (B, $b$) ; (C, $c$) alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
- Pour tout point M du plan,

$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

## Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère (O, I, J).
Si G est le barycentre des trois points pondérés (A, $a$) ; (B, $b$) ; (C, $c$) et si

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \text{ alors } G\begin{pmatrix} \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{pmatrix}$$

# ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

## Formules d'addition

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

## Formules de duplication

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\cos a \times \sin a$

## Formules de linéarisation

- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

## Formule de transformation d'une somme en un produit

- $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

## Formule de transformation d'un produit en une somme

- $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a.\sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a.\sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

## COMPOSÉES DE TRANSFORMATIONS DU PLAN

### Composition

- Soient $r$ et $r'$ deux rotations de même centre A et d'angles orientés respectifs $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\theta'}$.

- $r \circ r' = r' \circ r$ ;
- $r \circ r'$ est la rotation de centre A et d'angle orienté $\widehat{\theta} + \widehat{\theta'}$.

- Soient $h$ et $h'$ deux homothéties de même centre A et de rapports non nuls respectifs $k$ et $k'$.

- $h \circ h' = h' \circ h$ ;
- $h \circ h'$ est l'homothétie de centre A et de rapport $kk'$.

## ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

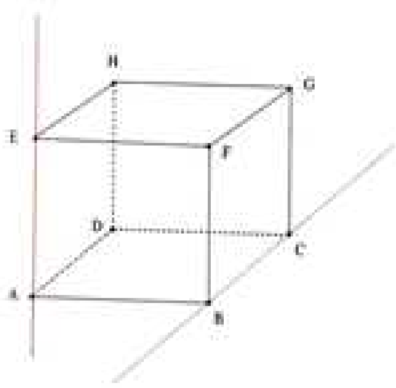
### Droites orthogonales

#### Définition

- On dit que deux droites sont orthogonales lorsque les parallèles à chacune d'elles passant par un même point sont perpendiculaires.

Notation : (D) orthogonale à (L) se note : (D) ⊥ (L).

Illustration



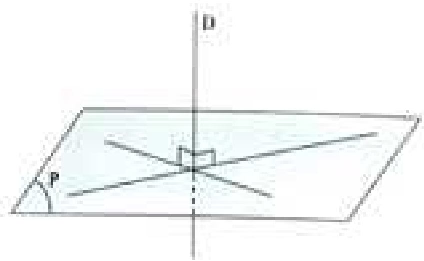

La droite (AE) est orthogonale à la droite (BC).

**Remarques :** Deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement coplanaires.
Lorsqu'elles le sont, elles sont sécantes et on dit qu'elles sont perpendiculaires.

### Droite orthogonale à un plan

#### Définition

- On dit qu'une droite (D) est orthogonale à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).

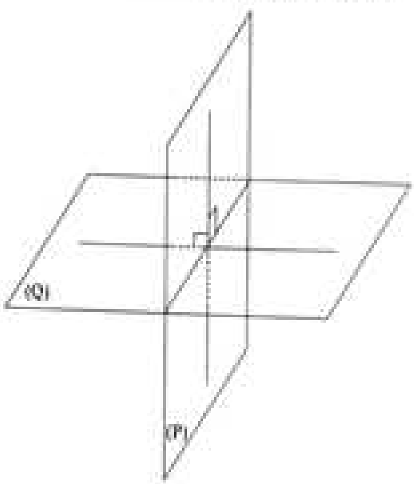



**Vocabulaire et notation**
On dit aussi que (D) est orthogonale à (P).
On note (D) ⊥ (P).

### Plans perpendiculaires

#### Définition

- On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

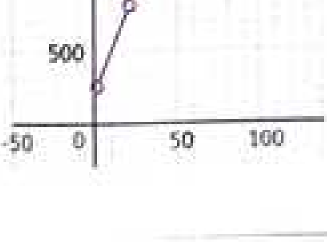


Leçon 1

# LIMITES ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Comment assurer la continuité entre la production et les achats ?

## SITUATION D'APPRENTISSAGE




Une entreprise fabrique au maximum 80 verres de lunettes par jour à l'aide d'une machine.

Cette machine nécessite une intervention technique à certaines phases de la production, ce qui augmente les coûts.

Un logiciel a permis d'obtenir la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction de coût total ci-contre.

Des élèves de ta classe en visite dans cette entreprise, observent avec stupéfaction cette courbe qui diffère de celles qu'ils ont l'habitude de voir. Ils sollicitent leur professeur de mathématiques pour comprendre le tracé de la courbe. Celui-ci leur répond qu'une étude de la notion de continuité d'une fonction pourrait les aider à comprendre le tracé de la courbe.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Calcul de limites à partir des limites de référence

*Connaître :*

les propriétés relatives aux opérations sur les limites

*Déterminer :*

la limite d'une fonction en utilisant les limites de référence

### 2 Limite d'une composée de deux fonctions

*Connaître :*

la propriété relative à la limite d'une fonction composée

*Déterminer :*

la limite d'une fonction composée

### 3 Techniques de calcul de limites

*Connaître :*

la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

*Déterminer :*

la limite d'une fonction en utilisant :

- une expression conjuguée
- la définition d'un nombre dérivé
- les propriétés de comparaison (minoration, majoration et encadrement)

### 4 Prolongement par continuité

*Déterminer :*

un prolongement par continuité d'une fonction en un point

### 5 Interprétation graphique de limites

*Identifier :*

les notions de branches paraboliques de direction celle de (OI) ou celle de (OJ) dans un repère (O, I, J)

*Interpréter*

graphiquement :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (resp. $-\infty$)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (resp. $-\infty$)

### 6 Continuité d'une fonction sur un intervalle

*Connaître :*

- les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle
- la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle
- le théorème des valeurs intermédiaires ;
- les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue :
  - en utilisant son tableau de variation
  - en utilisant une méthode algébrique

*Déterminer :*

l'image d'un intervalle par une fonction continue

- en utilisant son tableau de variation
- en utilisant une méthode algébrique

### 7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

*Connaître :*

les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

*Déterminer :*

- le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$.
- la formule explicite d'une bijection réciproque quand cela est possible.

*Démontrer :*

- qu'une fonction $f$ est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où $f$ est continue et strictement monotone sur I.
- l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = m$ (m réel) sur un intervalle I, $f$ étant continue et strictement monotone sur I

- l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$, $f$ étant continue et strictement monotone sur $]a\ ,\ b[$

*Représenter :*

la courbe de la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé

### 8 Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction

*Connaître :*

les méthodes de dichotomie et de balayage

*Déterminer :*

une valeur approchée d'une solution d'une équation

### 9 Puissances d'exposants rationnels

*Identifier :*

- une racine $n$-ième d'un nombre positif
- une puissance d'exposant rationnel

*Connaître :*

les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels

*Noter :*

- une racine $n$-ième d'un nombre positif $\left(\sqrt[n]{x} \text{ ou } x^{\frac{1}{n}}\right)$
- une puissance d'exposant rationnel $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$

*Représenter :*

graphiquement des fonctions du type :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}\ (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*)$
- $x \mapsto x^r\ (r \in \mathbb{R}\ , x \in \mathbb{R}_+^*)$

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Calcul de limites à partir des limites de référence

1. Rappelle les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x}$.

2. a) Complète le tableau suivant :

| $x$ | 9 | 100 | 10000 | 1020 | 1030 | 1040 | 1050 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | | | | | | | |

b) Conjecture $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

3. a) Calcule $\lim\limits_{x \to -2} \frac{1}{x+2}$.

b) Déduis-en $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x-5}{x+2}$.

4. Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$.

a) Détermine le nombre dérivé de $f$ en 0.

b) Déduis-en : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

5. Soit la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos x$.

a) Détermine le nombre dérivé de $g$ en 0.

b) Déduis-en : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.

6. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$.

Synthèse

Pour calculer une limite, on peut utiliser les limites de référence.

### Exercices de fixation

**1.1** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.

**1.2** Réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = +\infty$ ;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$ ; d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-2}{x-1} = +\infty$.

**1.3** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-5}{x-2}$ ;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-5}{x-2}$ ;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-1}$.

## Activité 2 Limite d'une composée de deux fonctions

Soient $u$, $v$ et $f$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = -2x + 1$, $v(x) = x^3$ et $f(x) = (-2x + 1)^3$.

1. Calcule la limite de $u$ en $+\infty$ et la limite de $v$ en $-\infty$.
2. a) Développe et réduis $f(x)$.
   b) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$.
3. a) Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (v \circ u)(x)$.
   b) Compare la limite de $f$ en $+\infty$ et la limite de $v$ en $-\infty$.

Synthèse

On admet que pour calculer $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x)$, on calcule :

• $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ puis • $\lim\limits_{x \to b} v(x) = \ell$ et on conclut • $\lim\limits_{x \to a} (v \circ u) = \ell$.

### Exercices de fixation

**2.1** Pour chaque affirmation, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indique le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la réponse exacte.

1. Soient $u$ et $v$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = \ell$, alors :
   a) $\lim\limits_{x \to b} v \circ u(x) = \ell$ ; b) $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = b$ ;
   c) $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = \ell$.
2. Soient $u$ et $v$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to 2} u(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3} v(x) = -5$, alors :
   a) $\lim\limits_{x \to 2} u \circ v(x) = -5$ ;
   b) $\lim\limits_{x \to 2} v \circ u(x) = -5$ ;
   c) $\lim\limits_{x \to 2} u \circ v(x) = 3$.
3. Soient $u$ et $v$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} v(x) = -\infty$, alors :
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (v \circ u)(x) = 2$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} u \circ v(x) = 2$
   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (v \circ u)(x) = -\infty$.

**2.2** Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{x}}$ ; 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

**2.3** Pour chaque affirmation, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indique le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la réponse exacte.

1. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^8 = +\infty$, alors :
   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 3)^8 = +\infty$ ;
   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 3)^8 = -\infty$ ;
   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 3)^8 = 0$.

2. On a $\lim_{x \to 1} u(x) = 4$ et $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$, alors :

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{u(x)} = 4$ ; b) $\lim_{x \to 1} \sqrt{u(x)} = 2$ ;

c) $\lim_{x \to 1} \sqrt{u(x)} = 2$.

3. On a $\lim_{x \to 2} u(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, alors :

a) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 4$ ; b) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 1$ ;

c) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin x}{x} \times u(x) = 1$.

**2-4** 1. a) Calcule $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 5)$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

b) Déduis $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

2. a) Calcule $\lim_{x \to 0} 5x$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

b) Déduis $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$.

3. a) Calcule $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2}$ et $\lim_{x \to -\infty} x^7$.

b) Déduis $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{1}{x-2}\right)^7$.

## Activité 3 Techniques de calcul de limites

### 3.1. Utilisation d'une expression conjuguée

1. a) Justifie que : pour tout $x$ élément de $]0 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2+3} - x = \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$.

b) Déduis-en $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} - x$.

c) Calcule : $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3} + x$.

2. a) Justifie que : pour tout x élément de $]-\infty ; 0[$, $\sqrt{x^2+2x+3} + x = \frac{-2 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}$.

b) Calcule : $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1$.

c) Déduis-en $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x+3} + x$.

**Synthèse**

Pour calculer une limite, on peut utiliser une expression conjuguée.

### Exercices de fixation

**3-1-1** Calcule les limites suivantes en utilisant une expression conjuguée :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ ; b) $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+11} - 3}{x+2}$.

**3-1-2** En multipliant le numérateur et le dénominateur par : $1 - \cos x$ :

calcule $\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

**3-1-3** Calcule chacune des limites suivantes en utilisant une expression conjuguée :

a) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x$ ; b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x} + x + 1$ ;

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{x}$ ; d) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+3} + x$.

**3-1-4** Calcule chacune des limites suivantes en utilisant une expression conjuguée :

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ ; b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x} + x + 1$ ;

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x}$ ; d) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+3} + x$.

### 3.2. Utilisation d'un nombre dérivé

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Détermine le taux de variation de $f$ en $a$.
2. Déduis-en les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$.

**Synthèse**

Pour calculer une limite on peut utiliser un nombre dérivé.

**Exercices de fixation**

**3-2-1** Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ; $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

**3-2-2** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ ; c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ ; d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{6x - \pi}$.

### 3.3. Utilisation des propriétés de comparaison

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies respectivement par $f(x) = 2x + \sin x$, $g(x) = 3x + 2\cos x$.

1. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 2x - 1$.
   b) Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 3x + 2$.
   b) Déduis $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x^2 \leq h(x) \leq x^2$.
   b) Déduis $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

**Synthèse**

On peut utiliser des comparaisons pour calculer des limites.

**Exercices de fixation**

**3-3-1** Sachant que : $\forall x \in ]0 ; +\infty[$,

$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

**3-3-2** 1. Soit $f$ une fonction telle que pour tout $x > 1$, $\dfrac{4}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Soit $f$ une fonction telle que pour tout $x > 1$,
$\dfrac{2}{x} \leq f(x) - \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{3}{x}$.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**3-3-3** Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$.

## Activité 4 Prolongement par continuité

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On définit la fonction $f$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2 \text{ si } x < 3 \\ f(x) = x^2 - 8 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Calcule puis compare $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.
3. Trace la courbe représentative de la fonction $f$.
4. $f$ est-elle continue en 3 ? Justifie ta réponse.
5. Soit $g$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x < 3 \\ g(3) = 1 \\ g(x) = f(x) \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Justifie que $g$ est continue en 3.

**Synthèse**

La fonction $g$ est appelée le prolongement par continuité de $f$ en 3. On dit que $f$ est prolongeable par continuité en 3.

## Exercices de fixation

**4-1** On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$.
Justifie que l'on peut prolonger $f$ par continuité en 1 puis donne le prolongement.

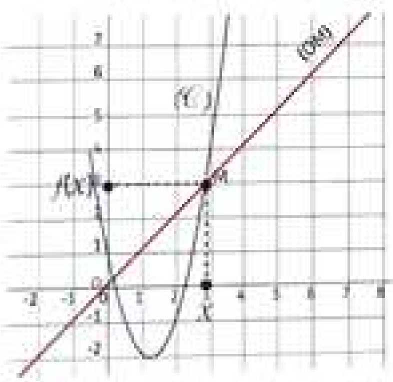
**4-2** On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$.
La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 3, si oui donne son prolongement.

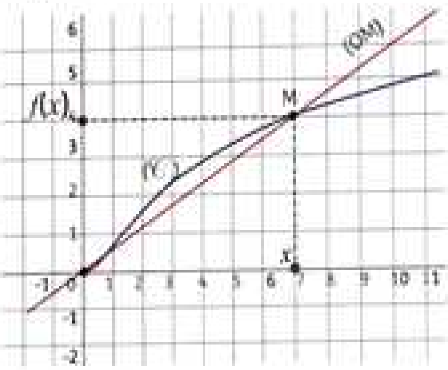
**4-3** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$.
1. Justifie que pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq |\sin x|$.
2. Déduis-en que $f$ est prolongeable par continuité en 0.

## Activité 5 Interprétation graphique de limites

1. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous et $M(x, f(x))$ un point de $(\mathscr{C})$.
Soit $a(x)$ le coefficient directeur de la droite (OM).
 a) Détermine graphiquement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
 b) Détermine $a(x)$ et calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x)$.
 c) Quelle sera la direction de la droite (OM) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

2. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous et $M(x, f(x))$ un point de $(\mathscr{C})$.
Soit $a(x)$ le coefficient directeur de la droite (OM).
 a) Détermine graphiquement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
 b) Détermine $a(x)$ et calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x)$.
 c) Quelle sera la direction de la droite (OM) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?




**Synthèse**

$f$ est une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
On admet que :

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

## Exercices de fixation

**5-1** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

Soit $f$ une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

1. $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).
2. $(\mathscr{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).
3. $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).
4. $(\mathscr{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

**5-2** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Soit $f$ une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Lorsqu'on a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en ........ une ........ de direction ........ .
2. Lorsqu'on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en ........ une ........ de direction ........ .

**5-3** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

1. On considère la fonction $f$ définie par :

$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{3x - 2}$ et de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

a) $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

b) $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

c) $(\mathscr{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

2. On considère la fonction $f$ définie par :

$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 3}}$ et de courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

a) $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

b) $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

## Activité 6 Continuité d'une fonction sur un intervalle

### 6.1. Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle K.
Soit $x_0 \in$ K.

1. a) Calcule $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ ; $\lim_{x \to x_0} (f(x) \times g(x))$.
   b) Justifie que $f + g$ et $f.g$ sont continues en $x_0$.
2. On suppose que : $g(x_0) \neq 0$.
   a) Calcule $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.
   b) Justifie que $\frac{f}{g}$ est continue en $x_0$.

**Synthèse**

- Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur intervalle K, alors $f + g$ et $fg$ sont continues sur K.
- De plus si $\forall x \in K$, $g(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur K.

## Exercices de fixation

**6.1.1** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.
Soient I, J et K trois intervalles telles que $I \subset K$ et $J \not\subset K$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues sur K.
1. $f+g$ est continue sur I.
2. $f.g$ est continue sur J.
3. Si $g$ ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
4. $f.g$ est continue sur I.

**6.1.2** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.
Soient I, J et K trois intervalles telles que $I \subset K$ et $J \not\subset I$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues sur I.
1. $f+g$ est continue sur I.
2. $fg$ est continue sur K.
3. Si $g$ ne s'annule pas sur J alors $\frac{f}{g}$ est continue sur J.
4. $fg$ est continue sur K.

**6.1.3** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Soient $f$ et $g$ deux fonctions .... sur un intervalle I. Si $g$ ne .... sur I alors .... est .... sur I.
Les fonctions .... et .... sont .... sur I.

### 6.2. Composée de deux fonctions continues sur un intervalle

K et K' sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $f$ une fonction continue sur K telle que $f(K) \subset K'$ et $g$ une fonction continue sur K'.
Soit $x_0 \in K$.
1. Calcule $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to f(x_0)} g(x)$ puis déduis $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$.
2. Justifie que $g \circ f$ est continue en $x_0$.

**Synthèse**

K et K' sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle K telle que $f(K) \subset K'$ et $g$ une fonction continue sur K' alors $g \circ f$ est continue sur K.

## Exercices de fixation

**6.2.1** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.
Soient I et J deux intervalles telles que $I \subset J$, $f$ une fonction continue sur I et $g$ une fonction
continue sur $f(I)$.
1. $g \circ f$ est continue sur I.
2. $g \circ f$ est continue sur J.

**6.2.2** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Soient K et K' deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si $f$ est une fonction .... sur un intervalle K telle que .... et $g$ est une fonction .... sur K' alors .... est .... sur .... .

### 6.3. Image d'un intervalle par une fonction continue

$f$ est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^2 - 1$ dont le tableau de variation sur $[-6\,;4]$ est ci-contre :

| $x$ | $-6$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $35$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $15$ |

1. Détermine à l'aide du tableau de variation de $f$, l'image par $f$ de chacun des intervalles suivants : $[-6\,;4]$, $[-6\,;4[$, $]-6\,;4[$, $[-6\,;0]$, $[0\,;4]$ et $]-6\,;4]$.
2. Détermine à l'aide de la méthode algébrique, l'image par $f$ des intervalles suivants : $[0\,;4]$, $]-6\,;0[$ et $[-6\,;0]$.

3. a) En remarquant que $[-6 ; 4] = [-6 ; 0] \cup [0 ; 4]$, justifie à l'aide de la méthode algébrique que $f([-6 ; 4]) \subset [-1 ; 35]$.

b) Soit $y \in [-1 ; 35]$.
Démontre que $y$ admet un antécédent $x$ par $f$ dans $[-6 ; 4]$.

c) Détermine alors l'image par $f$ de $[-6 ; 4]$.

**Synthèse**

On admet que :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.
- Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ où $m$ et M sont respectivement le minimum et le maximum de $f$ sur $[a, b]$.

## Exercices de fixation

**6-3-1** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. $m$ et M sont respectivement le minimum et le maximum de $f$ sur $[a, b]$.
1. L'image par $f$ de $[a, b]$ est $[f(a), f(b)]$.
2. L'image par $f$ d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par $f$ de $[a, b]$ est $[m, M]$.
4. L'image par $f$ de $[a, b]$ est $]m, M[$.

**6-3-2** Soit $f$ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = 2x - 1$.
Détermine l'image des intervalles $[-1 ; 3]$ et $]1 ; 5[$ par la fonction $f$.

**6-3-3** $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation sur $]-\infty, 6]$ est le suivant :

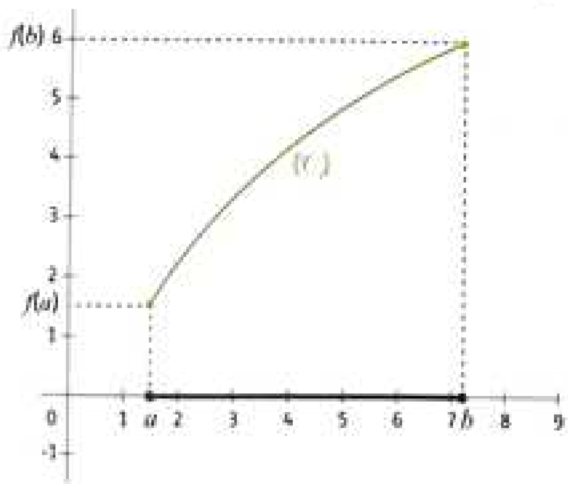
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-4$ |

Pour chaque affirmation, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indique sur ta copie le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la réponse exacte.

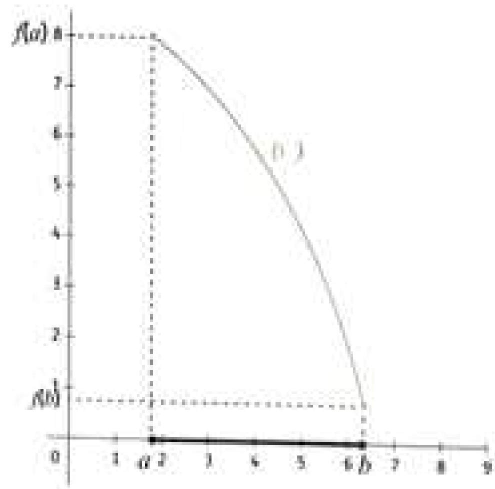
1. L'image par $f$ de $[0 ; 6]$ est :
a) $[-4 ; -1]$ ; b) $[-1 ; 5]$ ; c) $[-4 ; 5]$.
2. L'image par $f$ de $]-\infty ; 2[$ est :
a) $]5 ; +\infty[$ ; b) $[-1 ; +\infty[$ ; c) $]-1 ; +\infty[$.
3. L'image par $f$ de $[0 ; 2]$ est :
a) $[-1 ; 5]$ ; b) $]-1 ; 5[$ ; c) $[-1 ; 5[$.
4. L'image par $f$ de $]-\infty ; 6]$ est :
a) $[5 ; +\infty[$ ; b) $[-4 ; 5[$ ; c) $[-4 ; +\infty[$.

### 6.4. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K. $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'intervalle K dans le plan muni du repère (O, I, J).
Recopie et complète les pointillés par la réponse qui convient.




L'image par $f$ de $[a, b]$ est...




L'image par $f$ de $[a, b]$ est...

**Synthèse**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.

| K | $f$(K) | |
|---|---|---|
| | $f$ est strictement croissante sur K | $f$ est strictement décroissante sur K |
| $[a, b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $]a, b[$ | $]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$ | $]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$ |
| $[a, b[$ | $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$ | $]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x), f(a)]$ |
| $]a, b]$ | $]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$ |

## Exercices de fixation

**641** Remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.

| K | $f$(K) | |
|---|---|---|
| | $f$ est strictement croissante sur K | $f$ est strictement décroissante sur K |
| $[a, b]$ | $[f(a), f(b)]$ | .................................. |
| $]a, b[$ | .................................. | $]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$ |
| $[a, b[$ | $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$ | .................................. |
| $]a, b]$ | .................................. | $[f(b), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$ |

**642** Écris le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle K contenant $a$ et $b$.

1. L'image par $f$ de $[a, b]$ est $[f(b), f(a)]$.
2. L'image par $f$ de $[a, b[$ est $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.
3. L'image par $f$ de $]a, b[$ est $]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.
4. L'image par $f$ de $]a, b]$ est $[f(b), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$.

**643** Écris le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle K.

1. L'image par $f$ de $[a, b]$ est $[f(b), f(a)]$.
2. L'image par $f$ de $[a, b[$ est $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.
3. L'image par $f$ de $]a, b[$ est $]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.
4. L'image par $f$ de $]a, b]$ est $[f(b), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$.

### 6.5. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f$ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.

1. Justifie que $f([1 ; 2]) = [0 ; 3]$.
2. Soit $y_0$ un élément de $[0 ; 3]$.

Justifie que $y_0$ a au moins un antécédent compris entre 1 et 2 par $f$.

**Synthèse**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K , $a$ et $b$ deux éléments de K.
Tout nombre réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par $f$ compris entre $a$ et $b$.

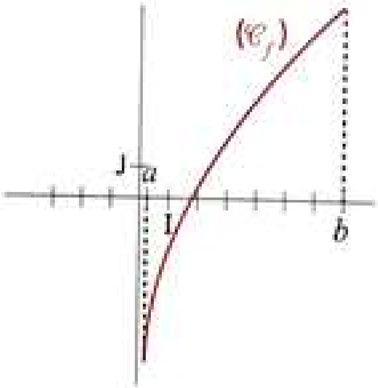
**Exercices de fixation**

**6-5-1** Remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K, $a$ et $b$ deux éléments de K.
Tout nombre réel $y$ compris entre .................... et .................... admet .................... un antécédent par $f$ compris entre .................... et .................... .

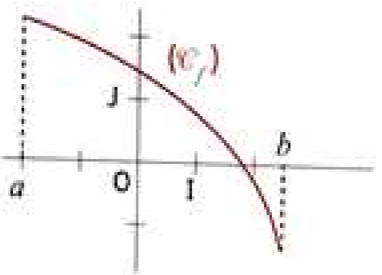
**6-5-2** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K, $a$ et $b$ deux éléments de K.
1. Tout nombre réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au plus un antécédent par $f$ compris entre $a$ et $b$.
2. Tout nombre réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par $f$ compris entre $a$ et $b$.
3. Tout nombre réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par $f$ compris entre $a$ et $b$.

## Activité 7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

### 7.1. Bijection




1. $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle K dans un repère orthonormé. Soit $y \in f(K)$.
   a) Détermine le nombre d'antécédents de $y$ par $f$.
   b) Justifie que $f$ réalise une bijection de K sur un intervalle à préciser.
   c) Construis la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1}$ dans le même repère que celui de $(\mathscr{C}_f)$.
   d) $f^{-1}$ est-elle continue sur $f(K)$ ?
   e) Détermine à l'aide de la représentation graphique de $f^{-1}$ le sens de variation de $f^{-1}$.
   f) Déduis de la question b) que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans K.




2. $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ continue et strictement décroissante sur un intervalle K dans un repère orthonormé.
Soit $y \in f(K)$.
   a) Détermine le nombre d'antécédent de $y$ par $f$.
   b) Justifie que $f$ réalise une bijection de K sur un intervalle à préciser.

c) Construis la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1}$ dans le même repère que celui de $(\mathscr{C}_f)$.

d) $f^{-1}$ est elle continue sur $f(K)$ ?

e) Détermine à l'aide de la représentation graphique de $f^{-1}$ le sens de variation de $f^{-1}$.

f) Déduis de la question b) que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans K.

**Synthèse**

- Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K alors $f$ réalise une bijection de K sur $f(K)$.
- La bijection réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone sur $f(K)$ et *a* le même sens de variation que $f$.
- Pour tout réel $m \in f(K)$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans K.

## Exercices de fixation

**7.1.1** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Si $f$ est une fonction .... et .... monotone sur un intervalle K alors $f$ réalise une .... de .... sur .... la bijection réciproque $f^{-1}$ est .... et .... sur .... et a le même .... que $f$.

**7.1.2** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Si $f$ est une fonction .... et .... monotone sur un intervalle K alors pour tout réel m $\in f(K)$, l'équation .... admet une .... solution dans K.

**7.1.3** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

1. Si $f$ est continue sur un intervalle K, alors $f$ réalise une bijection de K, sur $f(K)$.
2. Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle K alors $f$ réalise une bijection de K sur $f(K)$.
3. Si $f$ est strictement monotone sur un intervalle K, alors $f$ réalise une bijection de K sur $f(K)$.

### 7.2. Solution de l'équation $f(x) = 0$

1. Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.
   a) Détermine $f([a, b])$.
   b) Démontre que si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.
2. Soit $f$ une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.
   a) Détermine $f([a, b])$.
   b) Démontre que si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

**Synthèse**

Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

## Exercices de fixation

**7.2.1** Recopie et remplace les pointillés par les mots ou expressions qui conviennent.
Soit $f$ est une fonction ..... et ..... monotone sur un intervalle $[a, b]$. Si ..... alors l'équation ..... admet une ..... solution dans $]a, b[$.

**7.2.2** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

1. Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

2. Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

3. Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

4. Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

**T22** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" si l'affirmation est vraie ou "FAUX" si elle est fausse.

Soit $f$ une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-3 ; 7]$ dont le tableau est le suivant :

| $x$ | $-3$ | $5$ | $7$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $-1$ | $4$ |

1. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-3 ; 5[$.
2. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-3 ; 7[$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]5 ; 7[$.

## Activité 8 Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction

### 8.1. Méthode de balayage

Soit $f$ la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$.

1. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1 ; 2]$.

| $x$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | − | − | − | − | − | + | + | + | + | + | + |

a) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans$]1,4 ; 1,5[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,4 ; 1,5[$.

2. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1,4 ; 1,5]$.

| $x$ | 1,40 | 1,41 | 1,42 | 1,43 | 1,44 | 1,45 | 1,46 | 1,47 | 1,48 | 1,49 | 1,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | − | − | + | + | + | + | + | + | + | + | + |

a) Justifie que $\alpha \in ]1,41 ; 1,42[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,41 ; 1,42[$.

3. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1,41;1,42]$ :

| $x$ | 1,410 | 1,411 | 1,412 | 1,413 | 1,414 | 1,415 | 1,416 | 1,417 | 1,418 | 1,419 | 1,420 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | − | − | + | + | + | + | + | + | + | + | + |

a) Justifie que $\alpha \in ]1,414 ; 1,415[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,411 ; 1,412[$.

**Synthèse**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $[1 ; 2]$ et $\alpha$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]1 ; 2[$.

Pour déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ de $\alpha$, on procède comme suit :

- On subdivise l'intervalle $]1 ; 2[$ par des décimaux consécutifs d'ordre 1.
- On détermine les images par $f$ de chacun des décimaux consécutifs d'ordre 1.
- $\alpha$ est compris entre les décimaux consécutifs d'ordre 1 dont les images sont de signes contraires.
- $\alpha$ est compris dans l'intervalle $]1,4 ; 1,5[$.

Pour déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-n}$ de $\alpha$, on procède de la même manière.

- Cette méthode est la méthode de balayage.

## Exercices de fixation

**8.1.1** Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Détermine une valeur approchée de $\alpha$ par la méthode de balayage à 0,1 près.

**8.1.2** Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-2 ; -1]$.
2. Détermine une valeur approchée de $\alpha$ par la méthode de balayage à 0,1 près.

### 8.2. Méthode de dichotomie

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $[1 ; 2]$.

1. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1 ; 2]$ :

| $x$ | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | - | + | + |

a) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]1 ; 1,5[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1 ; 1,5[$ et compare-la à l'amplitude souhaitée.

2. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1 ; 1,5]$

| $x$ | 1 | 1,25 | 1,5 |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | - | - | + |

a) Justifie que $\alpha \in ]1,25 ; 1,5[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,25 ; 1,5[$ et compare-la à l'amplitude souhaitée.

3. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1,25 ; 1,5]$ :

| $x$ | 1,25 | 1,375 | 1,5 |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | - | - | + |

a) Justifie que $\alpha \in ]1,375 ; 1,5[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,375 ; 1,5[$ et compare-la à l'amplitude souhaitée.

4. On donne le tableau de signe de la fonction $f$ sur $[1,375;1,5]$ :

| $x$ | 1,375 | 1,4375 | 1,5 |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | - | + | + |

a) Justifie que $\alpha \in ]1,375 ; 1,4375[$.
b) Détermine l'amplitude de l'intervalle $]1,375 ; 1,4375[$ et compare-la à l'amplitude souhaitée.

**Synthèse**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et $\alpha$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]a ; b[$.

Pour déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ de $\alpha$, on procède comme suit :

- On divise l'intervalle en deux sous intervalles.
- On détermine l'image du centre de l'intervalle $]a ; b[$ par $f$.
- Si $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ sinon $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$.
- On continue cette subdivision de la même façon que précédemment.
- On s'arrête lorsque l'amplitude $\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$, avec $n$ étant le nombre d'itération) de l'intervalle qui contient $\alpha$ soit inférieur à l'amplitude souhaitée, $10^{-1}$.
- Cette méthode est la méthode de dichotomie.

## Exercices de fixation

**8.2.1** Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Détermine une valeur approchée de $\alpha$ par la méthode de dichotomie à 0,1 près.

**8.2.2** Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-2 ; -1]$.
2. Détermine une valeur approchée de $\alpha$ par la méthode de dichotomie à 0,1 près.

## Activité 9 Puissances d'exposants rationnels

### 9-1. Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Soit $n$ un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et l'application $\varphi_n : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[\,,\ x \mapsto x^n$.
Justifie que $\varphi_n$ est une bijection.

**Synthèse**

- La bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction racine $n^{\text{ième}}$.
- La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre positif $x$ s'écrit $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

**Exercices de fixation**

**9-1-1** 1. Détermine la bijection réciproque de l'application $\varphi_3 : [0\,;+\infty[ \to [0\,;+\infty[,\ x \mapsto x^3$.
2. Détermine la bijection réciproque de l'application $\varphi_5 : [0\,;+\infty[ \to [0\,;+\infty[,\ x \mapsto x^5$

**9-1-2** Calcule :
1. $\sqrt[3]{8}$ ; 2. $\sqrt[4]{81}$ ; 3. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

**9-1-3** Construis dans un même repère orthonormé $\varphi_3$ et sa bijection réciproque.

### 9-2. Puissance d'exposant rationnel

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ respectivement par $f(x) = \sqrt[q]{x}$ et $g(x) = x^p$,
où $p$ est un entier relatif et $q$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1. Calcule pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, $f\circ g(x)$ et $g\circ f(x)$.
2. Posons $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $z = (x^{\frac{1}{q}})^p$.
   a) Calcule $y^q$ et $z^q$.
   b) Justifie que $z^q = x^p$.
3. a) Justifie que $y^q = z^q$ et déduis que $y = z$.
   b) Justifie que pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, $f\circ g(x) = g\circ f(x)$.

**Synthèse**

- Pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $q \geq 2$, $(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$.
- $x^{\frac{p}{q}}$ est noté $\sqrt[q]{x^p}$ ou $(\sqrt[q]{x})^p$.

**Exercices de fixation**

**9-2-1** Écris dans chaque cas le numéro de l'affirmation suivi de la mention "VRAI" ou "FAUX" retenue.

Soit $x$ un nombre réel strictement positif.

1. La racine cubique de $x^2$ se note $\sqrt[3]{x^2}$.
2. La racine cinquième de $x^4$ est égale à $x^{\frac{4}{5}}$.
3. $x^{\frac{6}{5}}$ est égal à $\sqrt[6]{x^5}$.
4. La racine carrée de $x^3$ se note $\sqrt[3]{x^2}$.

**9-2-2** Pour chaque affirmation, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indique le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la réponse exacte.

1. La racine carrée de $x^3$ est égale à :
   a) $\sqrt[3]{x^2}$ ; b) $\sqrt[3]{(x^2)^3}$ ; c) $\sqrt{x^3}$.
2. $x^{\frac{6}{7}}$ est égal à :
   a) $\sqrt[6]{x^7}$ ; b) $\sqrt[7]{x^6}$ ; c) $\sqrt{(x^6)^7}$.
3. La racine cubique de $x^2$ est égale à :
   a) $x^{\frac{3}{2}}$ ; b) $x^{\frac{1}{3}}$ ; c) $x^{\frac{2}{3}}$.

## Exercice 1 Utiliser des limites de référence

Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{1-4x}{x-3}$ ; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{1-4x}{x-3}$ ; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

**Corrigé**

a) $\dfrac{1-4x}{x-3} = \dfrac{1}{x-3} \times (1-4x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} 1-4x = -11$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{1-4x}{x-3} = +\infty$

b) $\dfrac{1-4x}{x-3} = \dfrac{1}{x-3} \times (1-4x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} 1-4x = -11$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{1-4x}{x-3} = -\infty$.

**Méthode**

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$.
- Utiliser la limite d'un produit.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{x} \times \dfrac{x}{\sin x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ; ainsi,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ ; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = 0$.

## Exercice 2 Utiliser le nombre dérivé

Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ; b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x-3}$.

**Corrigé**

Posons : $f(x) = \sqrt{x+7}$ ; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}$

et $f'(2) = \dfrac{1}{6}$ ; $f'(-3) = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{1}{6}$.

**Méthode**

On peut utiliser le nombre dérivé pour calculer les limites.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \dfrac{1}{4}$.

## Exercice 3 Utiliser une factorisation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+4x$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-4x$.

**Corrigé**

a) $\sqrt{x^2+2x-1}+4x = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}+4x$

$= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4x$

$= -x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4x$,

si $x \in ]-\infty\,;-1]$

$= x(-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4)$, si $x \in ]-\infty\,;-1]$

**Méthode**

On peut utiliser une factorisation pour calculer les limites.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4 = 3$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+4x = -\infty$

b) $\sqrt{x^2+2x-1}-4x = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}-4x$.

$= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x$

$= x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x$,

si $x \in ]1\,;+\infty[$

$= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4\right)$, si $x \in ]1\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4 = -3$,

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-4x = -\infty$

## Exercice 4 Utiliser l'expression conjuguée et une factorisation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$ ; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x$ ; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

**Corrigé**

**Méthode**

Pour calculer les limites, on peut utiliser l'expression conjuguée.

a) $\sqrt{x^2+2x}-x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x+x}}$

$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+x}}$

$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$

$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$, si $x \in ]1\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1.$

b) $\sqrt{x^2+2x}+x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x-x}}$

$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-x}}$

$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$

$= \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$, si $x \in ]-\infty\,;-1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x = \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1} = -1$

c) $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

## Exercice 5 Utiliser une comparaison

Calcule la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

**Corrigé**

**Méthode**

On peut calculer les limites en utilisant une comparaison.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |\sin x|$

$\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

## Exercice 6 Encadrement de solution de l'équation $f(x) = 0$

1. Démontre que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution $\alpha$ dans $[0 ; 1]$.
2. Détermine un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$ par la méthode de dichotomie.

**Corrigé**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.
Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f'(x) > 0$. Donc $f$ est strictement croissante sur $[0 ; 1]$. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
On a : $f(0) \times f(1) < 0$, $f$ est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$. Comme $f(0) \times f(1) < 0$ ; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0 ; 1[$. On conclut que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution dans $]0 ; 1[$.

2. L'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution dans $]0 ; 1[$.
$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}37$ et $f(1) = 1$ ; $f(0) = -1$

**Méthode**

Pour encadrer $\alpha$ on peut utiliser la méthode de dichotomie.

$f(0{,}5) \times f(1) < 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 1$

$\frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$ on choisit 0,7 car il s'agit de déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$

$f(0{,}7) = 0{,}04$ ; $f(0{,}5) \times f(0{,}7) < 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}7$

$\frac{0{,}5+0{,}7}{2} = 0{,}6$ ; $f(0{,}6) = -0{,}18$ ;

$f(0{,}6) \times f(0{,}7) < 0$ donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

## Exercice 7 Méthode de balayage

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $f$ la fonction définie sur $[-4 ; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 12x)$.

1. a) Détermine $f'(x)$ pour tout $x$ élément de $[-4 ; 4]$.
   b) Dresse le tableau de variation de $f$.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[3 ; 4]$.
3. Détermine un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$ par la méthode de balayage.

**Corrigé**

1. a) Pour tout $x$ élément de $[-4 ; 4]$,
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x-2)(x+2)$.

b) Signe de la dérivée $f'$.
$\forall x \in [-4 ; -2] \cup [2 ; 4]$, $f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [-2 ; 2]$, $f'(x) \leq 0$.
$f(-3) = \frac{9}{4}$, $f(-2) = 4$, $f(2) = -4$ et $f(4) = 4$.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $4$ |

$f$ est continue et strictement croissante sur $[3 ; 4]$ tel que $f([3 ; 4]) = \left[-\frac{9}{4} ; 4\right]$.

**Méthode**

On peut encadrer une solution d'une équation par la méthode de balayage.

2. $f$ est continue et strictement croissante sur $[3 ; 4]$ tel que $f([3 ; 4]) = \left[-\frac{9}{4} ; 4\right]$.
Or, $f(3) \times f(4) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3 ; 4]$.

3. Déterminons un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.

| $x$ | 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | ... | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | – | – | – | – | – | + | + | + |

Comme $f(3{,}4) \times f(3{,}5) < 0$ donc $3{,}4 < \alpha < 3{,}5$.

## Résumé de cours

### 1 Calcul de limites à partir des limites de référence

#### 1.1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

$n$ est un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

#### 1.2. Limites en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ; $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair.} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ; • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

#### 1.3. Limites en $a$, $a \in \mathbb{R}$, de $\dfrac{1}{(x-a)^n}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair.} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

#### 1.4. Rappel des opérations sur les limites

**a) Somme de fonction**

| Si $f$ a pour limite en $a$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $g$ a pour limite en $a$ | L | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $f + g$ a pour limite en $a$ | $\ell$ + L | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | On ne peut conclure |

**b) Produit de fonction**

| Si $f$ a pour limite en $a$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $g$ a pour limite en $a$ | L | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
| Alors $f.g$ a pour limite en $a$ | $\ell \times$ L | $+\infty$ (si $\ell > 0$)<br>$-\infty$ (si $\ell < 0$) | $-\infty$(si $\ell > 0$)<br>$+\infty$(si $\ell < 0$) | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | On ne peut conclure |

**c) Quotient de fonction ( L ≠ 0 et $\ell$ ≠ 0)**

| Si $f$ a pour limite en $a$ | $\ell$ | $\ell$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $g$ a pour limite en $a$ | L | $+\infty$ | 0 | L | L | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en $a$ | $\dfrac{\ell}{L}$ | 0 | On ne peut conclure | $+\infty$ (si L > 0)<br>$-\infty$ (si L < 0) | $-\infty$(si L > 0)<br>$+\infty$(si L < 0) | On ne peut conclure |

### 2 Limite d'une composée de deux fonctions

**Propriété** Soit $v \circ u$ la composée de deux fonctions $u$ et $v$, $a$ un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $v \circ u$ est définie et $a$, $b$ et $\ell$ des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = \ell$.

## 3 Techniques de calculs des limites

### 3.1. Utilisation d'une expression conjuguée

**Méthode**

Pour calculer une limite, on peut :

- Utiliser l'expression conjuguée.
- Simplifier ou factoriser si nécessaire.

### 3.2. Utilisation d'un nombre dérivé

**Méthode**

Pour calculer une limite, on peut :

- Utiliser le taux de variation de $f$ en $a$ : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Calculer $f'(x)$ puis $f'(a)$.
- Conclure en utilisant $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

### 3.3. Utilisation des propriétés de comparaison

$a$ est un nombre réel.

Pour calculer une limite par comparaison on peut utiliser les propriétés suivantes :

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[b\,;c]$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ $(a \in [b\,;c\,])$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $]-\infty\,;a]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $]-\infty\,;a]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Si sur $[a\,;+\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Si sur $]-\infty\,;a]$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ell$.

On admet les propriétés suivantes :

**Propriété 1** Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$, $(a < b)$.

- Si $f$ est majorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie à gauche en $b$.
- Si $f$ est minorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie à droite en $a$.

### 3.4. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

**Remarque**

De manière analogue, pour une fonction $f$ décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ :

- Si $f$ est majorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie à gauche en $b$.
- Si $f$ est minorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie à droite en $a$.

**Propriété 2** Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$, $(a < b)$.

- Si $f$ est non majorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ a pour limite $+\infty$ à gauche en $b$.
- Si $f$ est non minorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite $-\infty$ à droite en $b$.

**Remarques**

De manière analogue, pour une fonction $f$ décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ :

- Si $f$ est non majorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ a pour limite $+\infty$ à droite en $a$.
- Si $f$ est non minorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ a pour limite $-\infty$ à gauche en $b$.

## 4 Prolongement par continuité

### Rappels

**Définition** Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $x_0$ un élément de $\mathscr{D}_f$.
On dit que $f$ est continue en $x_0$ si $f$ admet en $x_0$ une limite finie et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

### Prolongement par continuité

**Définition** Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et $x_0$ un nombre réel n'appartenant pas à $\mathscr{D}_f$.
On dit que $f$ admet en $x_0$ un prolongement par continuité lorsque $f$ admet en $x_0$ une limite finie.

**Remarque**

Soit $g$ le prolongement par continuité de $f$ en $x_0$.

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in \mathscr{D}_f \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$

## 5 Interprétation graphique de limites

Dans cette partie, $f$ désigne une fonction, $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

### Rappels

### Asymptotes parallèles aux axes

**Définition** Soit $f$ une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.
- Lorsque $f$ a une limite $b$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).
- Lorsque $f$ a une limite infinie à droite ou à gauche en $x_0$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

### Asymptote oblique

**Définition** Soit $f$ une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-(ax+b) = 0$) on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

## Résumé de cours

### Branches paraboliques

**Définition** Soit $f$ une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

Lorsqu'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

On dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) (respectivement (OI)).

## 6 Continuité d'une fonction sur un intervalle

### 6.1. Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

**Propriété** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle K.

- Les fonctions $f+g$, $fg$, $kf$ $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues sur K.
- Si $g$ ne s'annule pas sur K, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur K.

### 6.2. Composée de deux fonctions continues sur un intervalle

**Propriété** Soient K et K' deux intervalles.
Soit $f$ une fonction continue sur K telle $f(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}'$ et $g$ une fonction continue sur K'.
La fonction $g \circ f$ est continue sur K.

### 6.3. Image d'un intervalle par une fonction continue

**Propriété 1** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Propriété 2** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$.
Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé $[m, \mathrm{M}]$ où $m$ et M sont respectivement le minimum et le maximum de $f$ sur $[a, b]$.

**Remarque**
L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas toujours un intervalle ouvert.

### 6.4. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

**Propriété** Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
$f(\mathrm{K})$ est un intervalle ou un singleton.
Le tableau ci-après précise $f(\mathrm{K})$ suivant la nature de K et le sens de variation de $f$.

| L'intervalle K | L'intervalle $f(\mathrm{K})$ | |
|---|---|---|
| | $f$ est strictement croissante sur K | $f$ est strictement décroissante sur K |
| $[a, b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $]a, b[$ | $\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$ |

| | | |
|---|---|---|
| $[a, b[$ | $[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)]$ |
| $]a, b]$ | $]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$ |
| $]-\infty, b]$ | $]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$ |
| $]a\ ; +\infty[$ | $]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$ |
| $\mathbb{R}$ | $]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$ |

### 6.5. Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K, $a$ et $b$ deux éléments de K.
Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par $f$ compris entre $a$ et $b$.

## 7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

### 7.1. Bijection

**Propriété** Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K, alors :

- $f$ réalise une bijection de K sur $f$(K).
- Sa bijection réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone sur $f$(K).
- $f$ et $f^{-1}$ ont le même sens de variation.

### 7.2. Solution de l'équation $f(x) = 0$

**Propriété** Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
Pour tout réel $m$ de $f$(K), l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans K.

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

## 8 Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]a, b[$.
Déterminons un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $\ell$.

### 8.1. Méthode de balayage

**Méthode**

- On commence par balayer l'intervalle $[a, b]$ avec un pas de 1.

C'est-à-dire qu'on calcule $f(a), f(a+1), f(a+2)$,... On s'arrête dès qu'on a trouvé deux entiers consécutifs $n$ et $n+1$ pour lesquels $f(n)$ et $f(n+1)$ sont de signes opposés.
On sait alors que $\alpha \in\ ]n\ ; n+1[$.

- On balaie ensuite l'intervalle $[n\ ; n+1]$ avec un pas de 0,1. On calcule donc $f(n)$, $f(n+0{,}1)$, $f(n+0{,}2)$,... et on s'arrête dès qu'on a trouvé $p$ de sorte que $f(n+0,p)$ et $f(n+0,p+0{,}1)$ sont de signes opposés.

- On continue en balayant l'intervalle $[n + 0,p ; n + 0,p + 0,1]$ avec un pas de 0,01.

Et ainsi de suite...

### 8.2. Méthode de dichotomie

**Méthode**

- On détermine le centre $\frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $]a, b[$.
- On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Si $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors $\alpha \in \left]a ; \frac{a+b}{2}\right[$ sinon $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2} ; b\right[$.
- Si l'amplitude $\frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $\left]a ; \frac{a+b}{2}\right[$ ou $\left]\frac{a+b}{2} ; b\right[$ est inférieure à $\varepsilon$, alors on s'arrête, sinon on répète le processus $n$ fois jusqu'à ce que l'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$ soit inférieure à $\varepsilon$.

## 9 Puissances d'exposants rationnels

### 9.1. Fonction racine $n^{ième}$

**Définition** Soit $n$ un entier naturel non nul.
La fonction racine $n^{ième}$ est la bijection réciproque de la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ .
$x \mapsto x^n$

**Notation**

L'image de tout nombre réel positif $x$ par la fonction racine $n^{ième}$ est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

Si $n = 2$, alors on note $\sqrt{x}$ et on lit racine carrée de $x$.

Si $n = 3$, alors on note $\sqrt[3]{x}$ et on lit racine cubique de $x$.

**Conséquences**

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x = y^n \end{cases}$
- La fonction racine $n^{ième}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La courbe représentative de la fonction racine $n^{ième}$ et celle de la fonction $x \mapsto x^n$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

**Remarque**

On étend de même aux racines $n^{ièmes}$ toutes les propriétés de calculs établies pour les racines carrées.

### 9.2. Puissance d'exposant rationnel

**Définition** Soient $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle $x$ à la puissance $\frac{p}{q}$, le nombre réel noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par :
$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.

**Remarque**

On étend de même aux puissances d'exposants rationnels toutes les propriétés de calculs établies pour les puissances d'exposants entiers.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** À l'aide de propriété sur les limites d'une composée de fonctions, calcule :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{x+2}}$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \left(\dfrac{x-3}{x-5}\right)^3$ ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

**2** Calcule à l'aide d'une factorisation, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}$.

**3** Calcule à l'aide de l'expression conjuguée les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

**4** Calcule à l'aide d'un taux de variation, les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{20}-1}{x-1}$ ; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$.

**5** Pour chaque affirmation, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Écris le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la réponse exacte.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{2x^2+5x+1} + x + 1)$ est égale à :
   a) $+\infty$ ; b) $-\infty$ ; c) 0.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\dfrac{1}{x})$ est égale à : a) 0 ; b) $+\infty$ ; c) 1.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-\sin x}$ est égale à :
   a) $-\infty$ ; b) $+\infty$ ; c) 1.
4. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^{2020}-1}{x+1}$ est égale à :
   a) 0 ; b) $-200$ ; c) 200.

**6** Calcule : 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$ ; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

**7** Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{2-\cos x}$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+x-1}$ ;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}$.

**8** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ ;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$.

**9** Détermine les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi\tan x}{3x}\right)$ ; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$ ;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$.

**10** On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 4]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$

Étudie la continuité de $f$ en 0.

**11** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2.\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Démontre que $f$ est continue 0.

**12** On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$, si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Étudie la continuité de $f$ en 0.

**13** Calcule : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$.

**14** Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = 3x^2 + 2.\sin x$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. a) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$3x^2 - 2 \leq g(x) \leq 3x^2 + 2$.
   b) Déduis $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. a) Démontre que pour tout $x > 0$,
$\dfrac{3x^2-2}{x} \leq \dfrac{g(x)}{x} \leq \dfrac{3x^2+2}{x}$.
   b) Démontre que $(\mathscr{C}_g)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

**15** L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifie la réponse.
a) Si pour tout nombre réel $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

**16** On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$, si $x \neq 1$.
Peut-on prolonger $f$ par continuité en 1 ? si oui donne son prolongement.

**17** Soit $f$ une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.
a) Détermine le domaine de définition de $f$.
b) Calcule la limite de $f$ en 0 et déduis-en un prolongement par continuité $g$ de $f$ en 0.

**18** Vérifie que la fonction $h$ définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1}, \text{ si } x \in \mathbb{R} - \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \\ h(x) = -\dfrac{25}{16}, \quad \text{si } x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de la fonction $k(x) = \dfrac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1}$ en $-\dfrac{1}{2}$.

**19** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{4x}{|x+2|-|x-2|}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Démontre que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et détermine son prolongement.

**20** Soit $f$ la fonction continue définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}\,;3]$ et dont le tableau de variation est le suivant.

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | −2 | ↗ | −1 | ↘ | −3 | ↗ | 1 |

1. Détermine l'image par $f$ de l'intervalle $[0\,;1]$.
2. Détermine l'image par $f$ de l'intervalle $[-\frac{1}{2}\,;3]$.

**21** Soit $f$ une fonction dont le tableau de variation est :

| $x$ | $-\infty$ | | −2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −5 | ↘ | −8 | ↗ | 5 |

Détermine, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

**22** Soit $f$ une fonction dont le tableau de variation est :

| $x$ | $-\infty$ | | −2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −5 | ↘ | −8 | ↗ | 5 |

1. Détermine l'image par $f$ de l'intervalle $]-\infty\,;5]$.
2. Détermine, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

**23** $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | 3 | ↘ | 1 |

Détermine l'image par $f$ des intervalles suivants : $[0\,;2]$ ; $]-\infty\,;0[$ ; $]2\,;+\infty[$ ; $]-\infty\,;2[$ et $]0\,;+\infty[$.

**24** $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

1. Démontre que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $[3\,;+\infty[$.
2. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]-\infty\,;1]$.
   b) Démontre que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $[1\,;3]$.
4. Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in\, ]-\infty;\alpha[\,, f(x) < 0 \\ \forall x \in\, ]\alpha;+\infty[\,, f(x) > 0 \end{cases}$.

**25** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$.

1. Dresse le tableau de variation de $f$.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$.
3. Détermine un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

**26** Représente graphiquement la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

**27** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$.

1. Calcule les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Détermine la fonction dérivée $f'$ de $f$ que l'on factorisera.
3. Résous l'équation $f'(x) = 0$ puis détermine le signe de la dérivée $f'$.
4. Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
5. D'après le tableau de variation, Détermine le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 1$.

# Exercices

**28** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.
On note par $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J ).
1. Étudie les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

**29** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.
1. Étudie les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresse le tableau de variations de la fonction $f$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
4. a) Déduis-en que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
b) Donne un encadrement de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

**30** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :
$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x - 1}$.
1. Étudie les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
Déduis-en que la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.
2. a) Trouve les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour $x$ différent de 1, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
Déduis-en que $(\mathscr{C})$ admet, en $+\infty$ et en $-\infty$, une asymptote (D) dont on donnera une équation.
b) Étudie suivant les valeurs de $x$ la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. Étudie les variations de la fonction $f$ et dresse son tableau de variation.
4. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes.

## Exercices d'approfondissement

**31** Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x^3 + 24}$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$ ;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ ; d) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$.

**32** Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies respectivement par $f(x) = 2x + \sin x$,
$g(x) = 3x + 2\cos x$ et $h(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$.
1. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 2x - 1$.
b) Déduis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 3x + 2$.
b) Déduis $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x^2 \leq h(x) \leq x^2$.
b) Déduis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x)$.

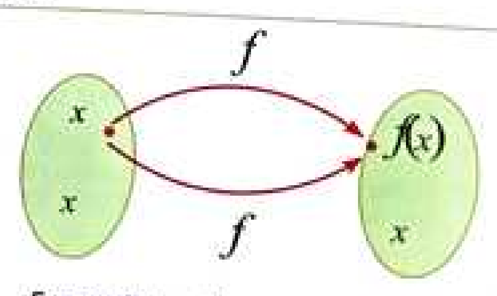
**33** On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 3}{2x^3 - 3x^2 + 1}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Calcule la limite de $f$ en 1.
3. La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, définis ce prolongement.

**34** On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x + a}{x - 1}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. a) Détermine $a$ pour que $f$ admette un prolongement par continuité en 1.
b) Définis dans ce cas ce prolongement.

**35** Pour tout nombre réel strictement positif $a$, on considère la fonction $f_a$ définie sur $[0 ; a]$ par
$f_a(x) = \frac{a - x}{a(a+x)}$.
1. Démontre que $f_a$ réalise une bijection de $[0 ; a]$ sur $[0 ; \frac{1}{a}]$.
2. On note $f_a^{-1}$ la bijection réciproque de $f_a$.
Dresse le tableau de variation de $f_a^{-1}$.
3. Démontre que : $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

**36** **Involutions**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).




En mathématique, une **involution** est une application bijective qui est sa propre réciproque

1. Soit la fonction $f$ définie sur $[0 ; 1]$ par :
$f(x) = \frac{1 - x}{1 + 2x}$.
a) Démontre que pour tout $x$ de $[0 ; 1]$, on a $f \circ f(x) = x$.

b) Démontre que $f$ est décroissante sur $[0 ; 1]$.

c) Démontre que $f$ est une bijection de $[0 ; 1]$ sur $[0 ; 1]$ puis détermine $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$.

d) Trace la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de $f$.

**37** Soit $f$ une fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$.

On admet que pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} + 2$.

1. Démontre que $f$ réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2. On note $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$. Justifie que $f^{-1}$ est continue sur J, puis donne le sens de variation de $f^{-1}$ sur J.
3. Explicite $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J.
4. a) Démontre que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}[$.

   b) Détermine par la méthode de balayage, une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

**38** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} ; 3]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels.

On donne ci-dessous son tableau de variation.

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $26$ |

1. Détermine l'expression de $f$.
2. Détermine $f([-\frac{1}{2} ; 3])$.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à $[-\frac{1}{2} ; 3]$. Vérifie que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.
4. Étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**39** Soit $f$ une fonction dérivable sur $]0 ; 1[$ et définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

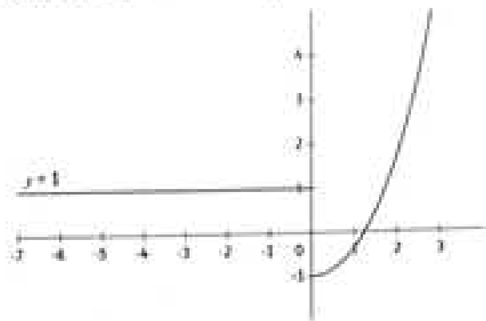
On admet que $f$ est strictement croissante sur $]0 ; 1[$.

1. Démontre que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Explicite $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J.

**40** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{x^2+1} \text{ si } x > 0 \\ f(x) = 1 + \dfrac{a}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Détermine $a$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Reproduis et complète la représentation graphique de $f$ dans le repère ci-dessous.




3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]1 ; 2[$. Donne une valeur approchée par défaut de $\alpha$ à 0,1 près.
4. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
5. Donne le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**41** Soit la fonction $f$ dérivable sur $]-1, 1[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On admet que pour tout $x \in ]-1 ; 1[$,

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1. Étudie le sens de variation de $f$.
2. a) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1 ; 1[$ une solution unique $\alpha$.

   b) Démontre que : $\alpha > \frac{4}{5}$.
3. Déduis le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de $x$.
4. Démontre que $f$ réalise une bijection de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
5. Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.

**42** Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $f$ la fonction de variable réelle définie par :

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Détermine l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$.
2. Calcule la dérivée $f'$ de la fonction $f$.
3. Détermine le signe de $f'$, puis déduis-en le sens des variations de $f$.
4. Détermine les limites de $f$ aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
5. Dresse le tableau de variation de $f$.
6. Détermine les éventuelles asymptotes.
7. Construis, sur le même dessin, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les asymptotes.

# Exercices

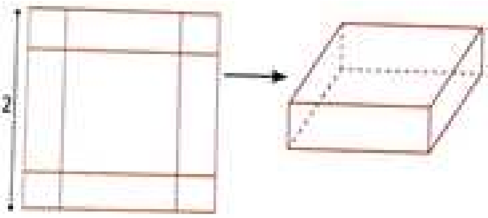
**43** Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Soit $f$ la fonction de variable réelle définie par :
$$f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}.$$
Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
1. Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Calcule la dérivée $f'$ de la fonction $f$.
3. Détermine le signe de $f'$, puis déduis-en le sens de variation de $f$.
4. Détermine les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
5. Dresse le tableau de variation de $f$.
6. Détermine les éventuelles asymptotes.
7. Construis, sur le même dessin, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les asymptotes.

**44*** **Partie I :**

Soit V la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
1. Étudie les variations de la fonction V sur $\mathbb{R}$.
2. Trace la représentation graphique de la fonction V dans le plan muni d'un repère orthogonal. On utilisera les unités graphiques suivantes : sur l'axe des obscisses 2 cm pour 1 unité et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 10 unités.

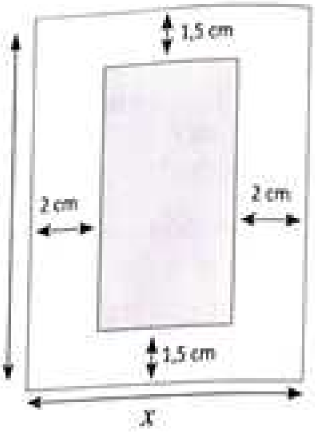
**Partie II :**

Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles, des carrés de côté $x$ pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle.



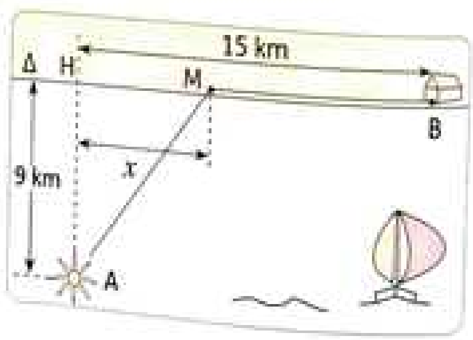

1. Justifie que l'ensemble des valeurs que peut prendre $x$ est l'intervalle $[0 ; 6]$.
2. Démontre que le volume du pavé est donné par la formule $V(x)$.
3. Déduis-en la valeur de $x$ qui rend le volume maximal.
Détermine ce volume.

**45*** Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de $300 \text{ cm}^2$. Les marges doivent faire 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux (voir figure ci-après).




Problème : Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?
1. Démontre que l'aire d'une page est égale à $f(x) = \frac{300x}{x-4} + 3x$.
2. Démontre que l'ensemble de définition de $f$ est $]4 ; +\infty[$.
3. Détermine les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
4. Précise les asymptotes à la courbe représentative de $f$.
5. Étudie les variations de cette fonction sur son ensemble de définition.
6. Dresse le tableau de variation complet de $f$.
7. Résous alors le problème posé.

**46*** Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B).
Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h puis à pied à la vitesse de 5 km/h.
On suppose qu'il n'y a pas de courant qui fait dériver le canot, et que la côte est rectiligne. Les dimensions utiles sont sur le dessin.
Où doit-il accoster pour que le temps de parcours soit minimal ?
On note $x$ la longueur HM et $f(x)$ la durée (en $h$) du trajet. On a donc $x \in [0, 15]$.



a) Démontre que : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5}$.

b) Détermine l'expression de la dérivée $f'(x)$.

c) Démontre que $f'(x)$ peut s'écrire

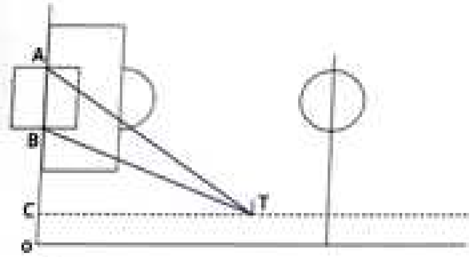
$$f'(x) = \frac{9(x-12)(x+12)}{20(\sqrt{x^2+81})(5x+4\sqrt{x^2+81})}$$

d) Déduis-en le tableau de variations de $f$ sur $[0 , 15]$ et conclus.

**47** Un joueur de football se déplace sur l'axe (CT) en direction du but.

La droite (CT) est perpendiculaire à droite (AB).

Notations : $\alpha = \text{mes}\,\widehat{ATB}$, $b = \text{mes}\,\widehat{CTB}$, $c = \text{mes}\,\widehat{CTA}$ ; AB = 8 m, OB = 19, OC = 9.




$\alpha \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et On pose : $CT = x$, $x \in ]0 ; +\infty[$

1. Justifie que $\tan\alpha = \tan(c-b) = \frac{\tan(c) - \tan(b)}{1+\tan(c)\times\tan(b)}$.
2. Déduis-en que $\tan\alpha = \frac{8x}{x^2+180}$.
3. Étudie la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{8x}{x^2+180}$.
4. Détermine la distance $x$ où l'angle de tir est le plus grand.

Le stade olympique d'Ébimpé

**48** Soit $f$ la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par $f(x) = 9x + (15-2x)\sqrt{x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

**Partie A**

Soit $g$ la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par $g(x) = 18\sqrt{x} - 6x + 15$.

1. a) Dresse le tableau de variation de $g$.
   b) Déduis que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0 ; +\infty[$.
   c) Justifie que $13,5 < \alpha < 13,6$.
2. Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in ]0;\alpha[ , g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ , g(x) < 0 \end{cases}$

**Partie B**

1. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.
2. a) Démontre que : $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
   b) Dresse le tableau de variation de $f$.
3. Démontre que $f$ réalise une bijection de $]\alpha ; +\infty[$ sur J à préciser.

**49** 1. Démontre que l'équation $x^3+x-2=0$ admet une unique solution réelle $\alpha$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$.
Démontre que : $f(\alpha) = 0$.

**50** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

1. Dresse le tableau de variation de $f$.
2. a) Démontre que l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Détermine une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
3. Justifie que : $\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$.

**51** Soit $f$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

**Partie A**

Soit $g$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. a) Dresse le tableau de variation de $g$.
   b) Déduis que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   c) Justifie que $-2 < \alpha < -1$.
2. Détermine un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
3. Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;\alpha[ , g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ , g(x) > 0 \end{cases}$

**Partie B**

1. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a) Démontre que : $\forall x \in ]0 ; +\infty[$,
$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

3. a) Démontre que : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

b) Détermine un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Démontre que : $f$ réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur J à préciser.

**52** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose $f$ dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe un nombre réel $\alpha \in ]0 ; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Pour cela, considérons la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $]0 ; 1[$ et définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 \text{ si } x = 0 \\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1} \text{ si } x \in ]0;1[ \\ g(x) = 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1. Étudie la continuité de la fonction $g$ en 0 et 1.
2. a) Démontre qu'il existe $\alpha \in ]0 ; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

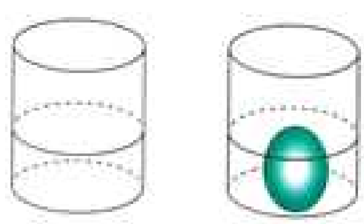
b) Déduis que $f(\alpha) = \alpha$.

**53** $f$ une fonction de $[a ; b]$ vers $[a ; b]$ continue.

Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

**53** Une boîte cylindre a pour base un disque de rayon 12 cm et contient de l'eau sur une hauteur de 5 cm.

Ton professeur de physique-chimie plonge dans ce cylindre une boule de rayon $r$ (le rayon est exprimé en mm) et constate que la surface de l'eau est tangente à la boule.



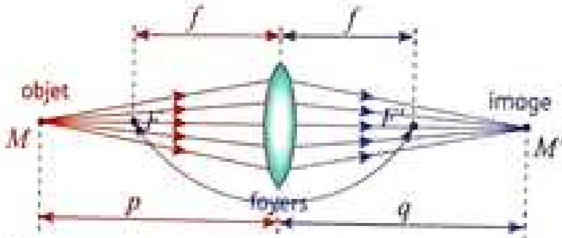
Détermine alors une valeur approchée du rayon $r$ de la boule à 0,1 mm près.

**Situations complexes**

**55** Une lentille et la distance $q$ de son image au centre sont reliées par la relation suivante :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'}.$$

Yao, un élève de ta classe, affirme de par ses recherches; que plus un objet est éloigné du foyer, plus son image se rapproche du foyer image et plus un objet est proche du foyer plus son image se rejette à l'infini. A-t-il raison ?




À partir de l'interprétation des deux résultats obtenus, donne ton point de vue sur l'affirmation de Yao.

**56** Les élèves de votre classe souhaitent fabriquer un réservoir de 1 m³ en tôle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée afin de recueillir de l'eau pour l'entretien de votre salle de classe. Vous souhaitez utiliser le moins de tôle possible.

Détermine les dimensions du réservoir.

**Coup de Pouce**

**44** $V = 4x(6 - x)^2$

**45** $f(x) = yx$ et $(x - 4)(y - 3) = 300$

**46** $f(x) = \frac{AM}{4} + \frac{MB}{5}$

puis utiliser la propriété de Pythagore.

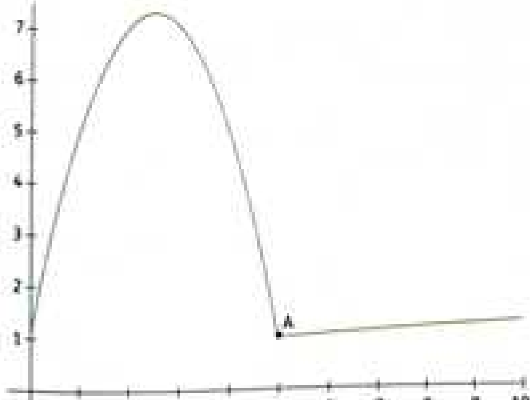
**47** $\tan(u+v) = \dfrac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u) \times \tan(v)}$

Leçon

# 2 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDES DE FONCTIONS

Aujourd'hui, les scientifiques, les industriels, les économistes ..., utilisent tous les notions liées à la dérivabilité dans leur travail de tous les jours. Ainsi, en balistique, lors de l'envoi d'un satellite dans l'espace ou lors de la simple modélisation de la trajectoire d'un ballon, l'utilisation destangentes est primordiale. L'étude de l'évolution de grandeurs (bénéfices, coût, productions, populations, ..) et la recherche de leurs valeurs extrêmes (minimum ou maximum) sont grandement facilitées par le calcul dit « différentiel ».

## SITUATION D'APPRENTISSAGE




Au début du cours de cinématique, un professeur de physique-chimie demande à ses élèves de tracer à l'aide d'une calculatrice graphique, la trajectoire d'un mobile dont l'équation est donnée par : $x(t) = -t^2 + 5t + 1$ si $t \in [0,5[$ et $x(t) = \dfrac{3t-5}{2t}$ si $t \in [5, 10]$, où $t$ est exprimé en seconde. Les élèves obtiennent la courbe ci-contre qu'ils présentent au professeur. Ce dernier affirme que la fonction en question n'est pas dérivable en 5 mais est dérivable à gauche et à droite en 5. Curieux, les élèvent décident de recourir à leur professeur de mathématiques pour faire des recherches sur les notions de dérivabilité à gauche et à droite d'une fonction en un point.

# HABILETÉS ET CONTENUS

## 1 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point

*Connaître :*

la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point

*Noter :*

un nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction

*Étudier :*

la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement

*Représenter :*

- graphiquement des fonctions de raccordement
- graphiquement une fonction :
  - comportant une valeur absolue
  - comportant une racine carrée

*Interpréter :*

graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point $x_0$

## 2 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

*Connaître :*

les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

## 3 Dérivée d'une fonction composée

*Connaître :*

la propriété relative à la dérivée d'une fonction composée

*Calculer :*

le nombre dérivé en un point d'une fonction composée, la dérivée d'une fonction composée

*Représenter :*

graphiquement une fonction du type :

- $x \mapsto \cos(ax+b)$
- $x \mapsto \sin(ax+b)$
- $x \mapsto \tan(ax+b)$
- $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$
- $x \mapsto ax^2+bx+c \quad dx^2+ex+f$
- $x \mapsto ax+b$
- $x \mapsto ax^2+bx+c$

*Démontrer :*

qu'une fonction composée est dérivable en un point

## 4 Dérivée d'une bijection réciproque en un point

*Déterminer :*

- le signe d'une fonction en utilisant ses variations
- le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction $f$ sur un intervalle J connaissant
- le sens de variation de $f$ sur un intervalle I
- le nombre dérivé de la fonction $f^{-1}$ en un point $y_0$

*Représenter :*

- graphiquement la bijection réciproque d'une bijection dans un repère orthonormé
- une demi-tangente

## 5 Dérivées successives

*Connaître :*

- la définition des dérivées successives d'une fonction
- les nouvelles notations des dérivées successives $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d^2f}{dx^2}, ..., \dfrac{d^nf}{dx^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

*Noter :*

les dérivées successives d'une fonction

*Déterminer :*

des dérivées successives d'une fonction

## 6 Point d'inflexion

*Reconnaître :*

graphiquement un point d'inflexion

*Déterminer :*

un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction

## 7 Inégalités des accroissements finis

*Connaître :*

les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis

*Utiliser :*

l'inégalité des accroissements finis pour :

- démontrer une inégalité
- établir un encadrement

## Activité 1 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + x + 2$ si $x \in ]-\infty, 0[$ ; $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ si $\in [0, 1[$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ si $x \in [1, +\infty[$.

1. Détermine la limite à gauche et à droite en 0 de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ puis, compare-les.
2. Détermine la limite à gauche et à droite en 1 de $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ puis, compare-les.

### Synthèse

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc $f$ est dérivable en 1.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ donc $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 0 d'équation : $y = f'_g(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x + 2$.

### Exercices de fixation

**1-1** $f$ est définie sur un intervalle K et $x_0$ un point de K .
Recopie le numéro de chaque affirmation suivie de la lettre de la bonne réponse.

1. $f$ est dérivable à gauche en $x_0$ signifie que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet :
   a) Une limite en $x_0$.
   b) Une limite à droite en $x_0$.
   c) Une limite finie à gauche en $x_0$.
2. $f$ est dérivable à droite en $x_0$. Le nombre dérivé de $f$ à droite en $x_0$ est noté :
   a) $f'_d(x_0)$ ; b) $f(x_0)$ ; c) $f'_g(x_0)$.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie en $x_0$.
   $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente :
   a) horizontale ; b) verticale ; c) oblique.

**1-2** $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
$f(2) = -3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ ;

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$.

Recopie le numéro de chaque affirmation suivie de vraie (V) si elle est vraie ou de faux (F) si elle est fausse.

1. $f$ est dérivable à droite en 2.
2. $f$ est dérivable à gauche en 2.
3. $f'_g(2) = 1$.
4. $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse 2.
5. $f$ est dérivable en 2.
6. $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale à gauche au point d'abscisse 2.

**1-3** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + x$ si $x < -1$ et $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ si $x \geq -1$.

1. Détermine le nombre dérivé de $f$ à gauche en $-1$ .
2. Détermine le nombre dérivé de $f$ à droite en $-1$.
3. Interprète graphiquement les résultats de 1) et 2).

## Activité 2 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

### 2.1. Définition

On considère la fonction $f$ définie sur $[a, b]$ par $f(x) = x^2$.

1. Soit $x_0$ un élément de $]a, b[$. Justifie que $f$ est dérivable en $x_0$.
2. On suppose que $f$ est dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
   a) Justifie que $f$ est dérivable à droite en $a$.
   b) Justifie que $f$ est dérivable à gauche en $b$.
   c) Déduis-en la dérivabilité de $f$ sur $[a, b]$.

**Synthèse**

$f$ est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ signifie que :

- $f$ est dérivable sur $]a, b[$.
- $f$ dérivable à gauche en $b$.
- $f$ dérivable à droite en $a$.

**Exercices de fixation**

Recopie la phrase et remplace les pointillés par le mot ou la lettre correct choisi parmi : *dérivable, gauche, droite, a, b.*

$f$ est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ si $f$ est... sur $]a, b[$ , dérivable à ... en ...et ... à droite en ...

### 2.2. Fonctions de raccordement, Interprétation graphique

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - |x|$.

$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Écris $f(x)$ sans les barres de valeur absolue.
2. a) Étudie la dérivabilité de $f$ à gauche en 0.
   b) Étudie la dérivabilité de $f$ à droite en 0.
   c) $f$ est-elle dérivable en 0 ? Justifie ta réponse.
3. a) Interprète graphiquement la dérivabilité de $f$ en 0.
   b) Représente graphiquement la fonction $f$.

**Synthèse**

La fonction n'est pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Le point O est un point de raccordement.

## Exercices de fixation

**2-2-1** On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

1. Étudie la dérivabilité de $f$ en 1.
2. Donne une interprétation graphique du résultat précédent.

**2-2-2** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = |x+1| - \dfrac{1}{x}$.

1. Écris $f(x)$ sans les barres de valeur absolue.
2. Étudie la dérivabilité de $f$ en $-1$.
3. Donne une interprétation graphique du résultat précédent.

## Activité 3 Dérivée d'une fonction composée

Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $f$ est définie sur un intervalle I, $g$ est définie sur un intervalle contenant $f$ (I) et $a$ un élément de I.

1. On suppose que $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $f(a)$.
   a) En utilisant la limite de la composée de deux fonctions, détermine $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)}$.
   b) En remarquant que $\dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \times \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)}$, justifie que $g \circ f$ est dérivable en $a$ et détermine $(g \circ f)'(a)$.
2. On suppose que $f$ est dérivable sur I et $g$ est dérivable sur $f$(I). Justifie que $g \circ f$ est dérivable sur I et donne l'expression de $(g \circ f)'$ en fonction de $f$, $f'$ et $g'$ sur I.

**Synthèse**

Si $f$ est dérivable en $a$ et $g$ dérivable en $f(a)$ alors :
- $g \circ f$ est dérivable en $a$ ;
- $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a)$.

Si $f$ est dérivable sur I et $g$ dérivable sur $f$ (I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

## Exercices de fixation

**3-1** Soient $f$ et $g$ deux fonctions, I un intervalle, $f$ définie sur I, $g$ définie sur $f$ (I) et $a$ un élément de I.

Recopie le numéro de chaque affirmation et la lettre de la bonne réponse.

1. $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $f(a)$, on a :
   a) $g \circ f$ est dérivable en $a$.
   b) $f \circ g$ est dérivable en $a$.
   c) $g \circ f$ est dérivable en $f(a)$.
2. Si $g \circ f$ est dérivable en $a$, on a :
   a) $(g \circ f)'(a) = g'(a) \times f'(a)$.
   b) $(g \circ f)'(a) = g'(a) \times (f' \circ g)(a)$.
   c) $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a)$.

**3-2** Relie chaque fonction à sa dérivée.
$u$ désigne une fonction dérivable.

| Fonctions | Fonctions dérivées |
|---|---|
| 1. $\sqrt{u}$ | a) $nu'.u^{n-1}$ |
| 2. $\dfrac{1}{u}$ | b) $-\dfrac{u'}{u^2}$ |
| 3. $\cos u$ | c) $-u'\sin u$ |
| 4. $\sin u$ | d) $ru'.u^{r-1}$ |
| 5. $u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) | e) $u'\cos u$ |
| 6. $u^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$) | f) $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

**3-3** On considère les fonctions $f$ et $g$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et respectivement définies par :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = x^3 + 2$.

Recopie le numéro de chaque affirmation suivie de vraie (V) si elle est correcte ou de faux (F) si elle ne l'est pas.

1. Le nombre dérivé de $g \circ f$ en 0 est 0.
2. Le nombre dérivé de $f \circ g$ en $-1$ est $-1$.
3. $(g \circ f)'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} 3x^2$.
4. $(f \circ g)'(x) = \dfrac{3x^2(x^3-2)}{\sqrt{(x^3+2)^2+1}}$.

## Activité 4 Dérivée d'une bijection réciproque en un point

Soit $f$ la bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2$ et $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

1. Calcule l'image par $f$ de chacun des nombres réels $-1$ et 0. Déduis-en $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(2)$.
2. a) Justifie que $f$ est dérivable en $-1$ et en 0.

   b) En posant $u = f(x)$, justifie que : $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{f^{-1}(u) - f^{-1}(1)}{u-1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}$.

   c) $f^{-1}$ est-elle dérivable en 1 ? Si oui, compare $(f^{-1})'(1)$ et $\dfrac{1}{f'(-1)}$.

   d) Justifie que $\lim\limits_{u \to 2} \dfrac{f^{-1}(u) - f^{-1}(2)}{u-2} = \dfrac{1}{f'(0)}$. $f^{-1}$ est dérivable en 2.

**Synthèse**

$f$ est une bijection de I vers J, $f^{-1}$ sa réciproque, $b \in$ J et $a = f^{-1}(b)$.

Si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$ et : $f^{-1}(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

### Exercices de fixation

**4-1** On considère une bijection $g$ d'un intervalle ouvert I vers un intervalle J, $b$ un élément de J et $a$ son antécédent par $g$. Recopie le numéro de chaque affirmation et réponds par vraie (V) si elle est correcte et par faux (F) si elle ne l'est pas.

1. Si $g$ est dérivable en $a$ et $g'$ s'annule en $a$, alors $g^{-1}$ est dérivable en $b$.
2. Si $g^{-1}$ est dérivable en $b$ alors $(g^{-1})'(b) = (g'(b))^{-1}$.
3. Si $g$ est dérivable en $a$ et $g'(a) \neq 0$, alors $g^{-1}$ est dérivable en $b$.
4. Si $g^{-1}$ est dérivable en $b$, alors $(g^{-1})'(b) = \dfrac{1}{g'(a)}$.

**4-2** Soit $f$ la bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$, $f^{-1}$ sa bijection réciproque et $f(0) = 1$, $f(-2) = -9$ et $f(1) = 3$.

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.

1. Le nombre dérivé de $f^{-1}$ en 1 est :

   a) 1 ; b) 4 ; c) $\dfrac{1}{4}$.
2. Le nombre dérivé de $f^{-1}$ en 3 est :

   a) 28 ; b) $\dfrac{1}{4}$ ; c) $\dfrac{1}{3}$.
3. Le nombre dérivé de $f^{-1}$ en $-9$ est :

   a) $\dfrac{1}{-9}$ ; b) $\dfrac{1}{-2}$ ; c) $\dfrac{1}{13}$.

## Activité 5 Dérivées successives

On considère la fonction $f$ dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5$.

1. Détermine la dérivée $f'$ de $f$.

2. Justifie que $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa dérivée $f''$ qu'on notera aussi $(f^{(1)})'$ appelée dérivée seconde de $f$ ou d'ordre 2.

3. Justifie que $f^{(2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa dérivée $f^{(2)'}$ qu'on notera $f^{(3)}$ appelée dérivée $3^{ème}$ de $f$ ou d'ordre 3.

4. Détermine la dérivée $4^{ème}$ de $f$.

5. On note : $f' = \dfrac{df}{dx}$ et $f^{(2)} = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Déduis-en des notations similaires pour $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ et $f^{(5)}$.

**Synthèse**

- Si une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle I, alors sa dérivée $f'$ sur I est appelée dérivée première ou d'ordre 1 de $f$ et notée aussi $f^{(1)}$ ou $\dfrac{df}{dx}$.
- Soit $n$ un entier naturel non nul. Si elle existe, la dérivée $n^{ième}$ (ou d'ordre $n$) de $f$ sur I est la dérivée de la dérivée d'ordre $n-1$. On la note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. $(f^{(n)} = f^{(n-1)})'$).

## Exercices de fixation

**5-1** Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.

1. Si la fonction $f$ est deux fois dérivable, alors sa dérivée seconde se note :

a) $\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2$ ; b) $\dfrac{df^2}{dx}$ ; c) $\dfrac{df^2}{dx^2}$ ; d) $\dfrac{d^2f}{dx^2}$

2. Soit $g$ la fonction 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = 2x^2 + 5$.

La dérivée d'ordre 3 de $g$ est la fonction :

a) $x \mapsto (2x^2+5)^3$ ; b) $x \mapsto 0$ ;
c) $x \mapsto 4x$ ; d) $x \mapsto 4$.

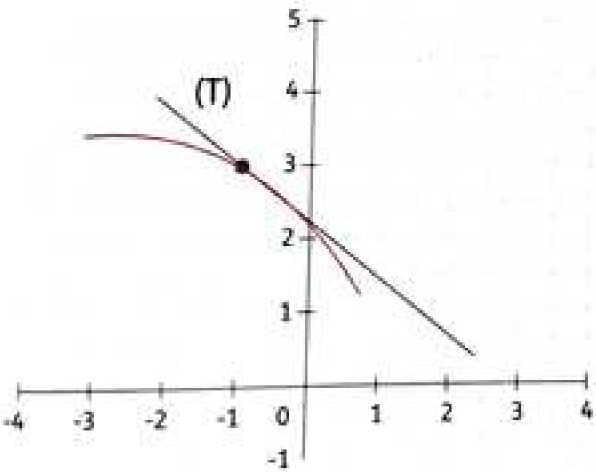
**5-2** Calcule la dérivée d'ordre 3 de chacune des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

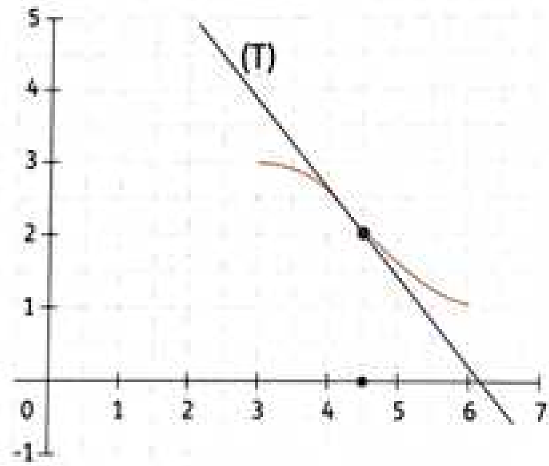
$f : x \mapsto x^2$

## Activité 6 Point d'inflexion

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).




**Graphique 1**




**Graphique 2**

1. Le graphique 1 est la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ d'une fonction $g$ définie sur l'intervalle $[-3, 1]$. On a tracé la tangente (T) à $(\mathscr{C}_g)$ au point d'abscisse $-1$.
Étudie graphiquement la position relative de $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à (T).

2. Le graphique 2 est la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0$ est un élément de $[a, b]$.

On a tracé la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point $x_0$.
Étudie graphiquement la position relative de ($\mathscr{C}$) par rapport à (T').

3. On définit la fonction $h$ sur l'intervalle $[a, b]$ par : $h(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.
On rappelle qu'une équation de la tangente (T') est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
On suppose que $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et que $f''(x_0) = 0$.
On admet de plus que : $\forall x \in [a, x_0]$, $f''(x) \geq 0$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f''(x) \leq 0$.
a) Calcule $h(x_0)$ et $h'(x)$.
b) Justifie que $h'$ est croissante sur $[a, x_0]$ puis que : $\forall x \in [a, x_0]$, $f'(x) - f'(x_0) \leq 0$.
c) Déduis-en que $h$ est décroissante sur $[a, x_0]$ puis que : $\forall x \in [a, x_0]$, $h(x) \geq 0$.
Quelle est la position relative de (T') par rapport à ($\mathscr{C}$) sur $[a, x_0]$ ?
d) En s'inspirant des questions précédentes démontre que : $\forall x \in [x_0, b]$, $h(x) \leq 0$ puis que ($\mathscr{C}$) est en dessous de (T') sur $[x_0, b]$.

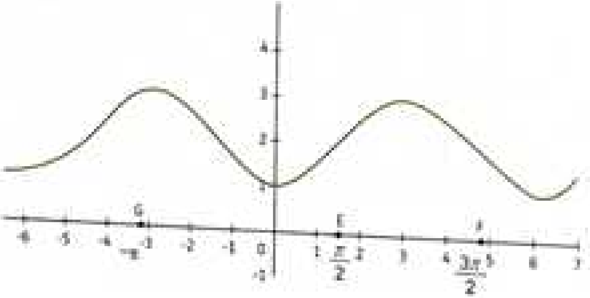
**Synthèse**

- La tangente ne traverse pas la courbe ($\mathscr{C}_g$) au point d'abscisse −1.
- La tangente traverse la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse $x_0$.
- Si $f''(x_0) = 0$ et si $f''$ change de signe en $x_0$ alors le point d'abscisse $x_0$ est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}_f$).

## Exercices de fixation

**6-1** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique est donnée par le graphique ci-contre.
Recopie chaque numéro et complète, à partir du graphique, par vrai (V) si le point d'abscisse $x$ est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}$) et par faux (F) sinon.

1. $x = -\pi$, 2. $x = -2$, 3. $x = 0$,
4. $x = \frac{\pi}{2}$, 5. $x = \frac{3\pi}{2}$



**6-2** Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de signe de $f''$ est donné ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | 2 | | 2,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + | |

Recopie le numéro de chaque affirmation et complète par vraie ( V ) si elle est correcte et par faux (F) sinon.

1. Le point d'abscisse −2 est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}$).
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}$).
3. Le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}$).
4. Le point d'abscisse 2,5 est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}$).

**6-3** Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Recopie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse correcte.

1. La représentation graphique de $f$ admet pour point d'inflexion le point d'abscisse :
a) −1 , b) 0 , c) 2
2. La représentation graphique de $g$ :
a) n'admet pas de point d'inflexion
b) admet le point d'abscisse 0 comme point d'inflexion
c) admet le point d'abscisse −1 comme point d'inflexion.

## Activité 7 Inégalités des accroissements finis

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, $a$ et $b$ deux éléments de I tels que $a < b$, $m$ et M deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$.

1. On définit la fonction $g$ sur $[a, b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$ .
   a) Détermine $g'(x)$ sur $[a, b]$ et donne son signe sur $[a, b]$.
   b) En utilisant le sens de variation de $g$ sur $[a, b]$, compare $g(a)$ et $g(b)$ puis déduis-en l'inégalité $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$.
2. On définit la fonction $h$ sur $[a, b]$ par : $h(x) = Mx - f(x)$.
   a) Détermine $h'(x)$ sur $[a, b]$ et son signe sur $[a, b]$.
   b) En utilisant le sens de variation de $h$ sur $[a, b]$, compare $h(a)$ et $h(b)$ puis déduis-en l'égalité $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
3. Déduis des équations 1. b) et 2. b) que : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
4. On suppose que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Soient $a$ et $b$ deux éléments de I.
   a) Trouve un encadrement de $f'(x)$ sur $[a, b]$.
   b) Déduis des questions précédentes que : $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|$.

**Synthèse**

Soit $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Soient $a$ et $b$ deux éléments de I ($a < b$). S'il existe deux réels $m$ et M tels que $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- Si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors pour tous éléments $a$ et $b$ de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

### Exercices de fixation

**7-1** Complète chacune des phrases par l'inégalité correcte.

1. Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, $a$ et $b$ deux éléments de I ($a < b$). S'il existe deux réels $m$ et M tels que : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : ......
2. Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un nombre M. Tel que ..............................alors pour tous réels $a$ et $b$ de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

**7-2** Soit $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1, 3]$ telle que pour tout réel $x$ de $[-1, 3]$, $2 \leq f'(x) \leq 5$.

Soit $g$ une fonction dérivable $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x$, $|g'(x)| \leq 3$.
Pour chaque inégalité, écris V si elle est vraie et F si elle ne l'est pas.

a) $8 \leq f(3) - f(-1) \leq 20$.

b) $8 \leq f(3) + f(-1) \leq 20$.

c) $|g(3) - g(-1)| \leq 3$.

d) $|g(3) - g(-1)| \leq 12$.

**7-3** On rappelle que pour tout nombre réel, $|\cos x| \leq 1$.
Démontre que pour nombres réels $a$ et $b$, on a : $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

## APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

### Exercice 1 Étudier une fonction définie par intervalles

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 9$ si $x \leq 2$ et $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 4}$ si $x \geq 2$.
On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique.

1. a) Étudie la dérivabilité de $f$ en 2.
   b) Précise les tangentes à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2.

2. Soit $g$ la restriction de $f$ à $[2, +\infty[$.

2.1. Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.

2.2. Démontre que g réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

2.3. a) Calcule $g(2\sqrt{2})$.

b) Démontre que $g^{-1}$ est dérivable en 5 et calcule $(g^{-1})'(5)$.

3. Soit $h$ la restriction de $f$ à $]-\infty, 2]$ et $(\mathscr{C}_h)$ sa représentation graphique.

a) Calcule les 2 premières dérivées de $h$.

b) Démontre que $(\mathscr{C}_h)$ admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées.

**Corrigé**

1. a) - Dérivabilité de $f$ à gauche en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^3+x^2-9-3}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^3+x^2-12}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x^2+3x+6) = 17.$$

Donc $f$ est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2) = 17$.

- Dérivabilité de $f$ à droite en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3+\sqrt{x^2-4}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = +\infty.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 2.

On en déduit que $f$ n'est pas dérivable en 2.

b) Tangentes à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

- On a $f_g'(2) = 17$, $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse 2 à gauche une demi-tangente $(T_g)$ d'équation : $y = 17(x-2)+3$ soit $y = 17x - 31$.

- On a $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$, $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse 2 à droite une demi-tangente verticale.

2.1. $g$ est dérivable sur $]2, +\infty[$ et $\forall x \in ]2,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Pour tout $x > 2$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$ donc $g$ est strictement croissante sur $]2,+\infty[$.

- Limite de $f$ en $+\infty$ et en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} 3+\sqrt{x^2-4} = 3 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3+\sqrt{x^2-4} = +\infty$$

car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

**Méthode**

Pour la dérivabilité en 2, il faut choisir la fonction qui convient. Pour chaque question, identifier l'intervalle et choisir la fonction qui convient.

Tableau de variation de $g$.

| $x$ | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | + | |
| $g(x)$ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

2.2. Démontrons que $g$ réalise une bijection.

$g$ est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$ telle que $g([2,+\infty[) = [3, +\infty[$, donc $g$ réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[3,+\infty[ = K$.

2.3. a) Calcul de $g(2\sqrt{2})$.

$g(2\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4} = 5.$

b) Démontrons que $g^{-1}$ est dérivable en 5.

On a $g^{-1}(5) = 2\sqrt{2}$, or $g$ est dérivable en $2\sqrt{2}$ et $g'(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \neq 0$.

Donc $g^{-1}$ est dérivable en 5.

De plus on a $(g^{-1})'(5) = \frac{1}{g'(2\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. a) Calcul de $h'$ et $h''$.

$h$ est dérivable sur $]-\infty, 2]$, $h'(x) = 3x^2 + 2x$.

$h'$ est dérivable sur $]-\infty, 2]$, $h''(x) = 6x + 2$.

b) Démontrons que $(\mathscr{C}_h)$ admet un point d'inflexion.

$h$ est deux fois dérivable sur $]-\infty, 2]$ et $h''(x) = 6x + 2$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

$h''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ et $h''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$.

$h''$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ en changeant de signe,

On a : $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9 = -\frac{79}{27}$ ;

d'où $(\mathscr{C}_h)$ admet le point $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{79}{27}\right)$ comme point d'inflexion.

## Exercice 2 Utiliser l'inégalité des accroissements finis

Soit $f$ la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f$, démontre que pour tous réels $a$ et $b$, on a : $|\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}| \leq |a-b|$.

**Corrigé**

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$x^2 < x^2 + 3$

$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+3}$

$|x| < \sqrt{x^2+3}$

$-\sqrt{x^2+3} < x < \sqrt{x^2+3}$

$-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} < 1$

C'est-à-dire que $-1 \leq f'(x) \leq 1$, soit $|f'(x)| \leq 1$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$|f(a) - f(b)| \leq 1.|a-b|$

soit $|\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}| \leq |a-b|$.

**Méthode**

M = 1 donc il faut démontrer $|f'(x)| < 1$.

## Exercice 3 Étudier une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$

Étudie et représente graphiquement la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

**Corrigé**

- L'ensemble de définition D de la fonction $f$ est $\mathbb{R}$.
- $f$ est périodique de période $\pi$. En effet si $x \in D$ alors $x + \pi \in D$ et $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi) + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} + 2\pi) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = f(x)$.
- On réduit l'ensemble d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
- $f$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.
- Signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$.

$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$, car $x \in [0, \pi]$

$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 0$

$\Leftrightarrow \pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ car $x \in [0, \pi]$.

Donc $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi]$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

D'où $f$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et sur $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$ et $f$ est croissante sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

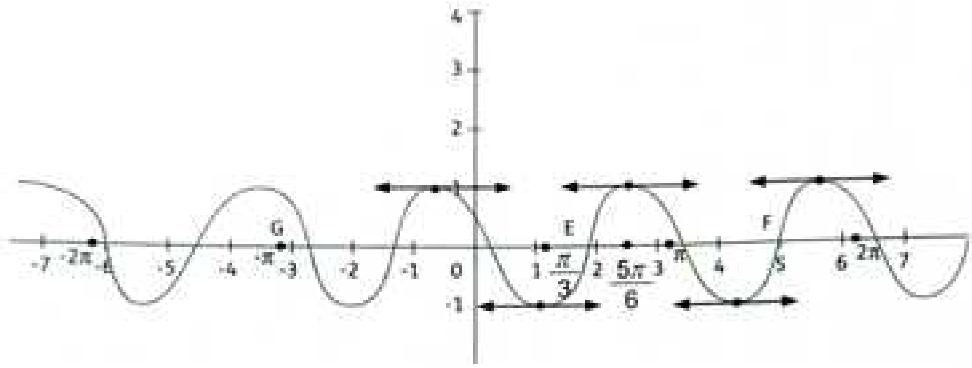
- Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | ½ | ↘ | -1 | ↗ | 1 | ↘ | ½ |

**Méthode**

Il faut déterminer la période de la fonction et réduire l'intervalle d'étude.

On construit $(\mathscr{C})_{[0,\pi]}$ puis par translations successives de vecteurs $\pi(\overrightarrow{OI})$ et $-\pi(\overrightarrow{OI})$.
On obtient $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$.




## Exercice 4 Étudier une fonction de type : $x \mapsto \tan(ax+b)$, $a \neq 0$

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan(3x+\frac{\pi}{6})$. Étudie et représente graphiquement $f$.

**Corrigé**

- Ensemble de définition D de $f$.

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $3x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc $D = \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

- $f$ est périodique de périodique $\frac{\pi}{3}$.

En effet : si $x \in D$, alors $x + \frac{\pi}{3} \in D$ car si $x + \frac{\pi}{3} \notin D$,

alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} - \frac{3\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{(k-1)\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$

et $x \notin D$ ce qui est absurde d'où $x + \frac{\pi}{3} \in D$.

De plus : $f(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(3(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}) =$

$\tan[(3x + \frac{\pi}{6}) + \pi] = f(x)$.

On réduit, l'ensemble d'étude à $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$

- $f$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ et

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$, $f'(x) = 3[1 + \tan^2(3x + \frac{\pi}{6})]$.

Signe de $f'(x)$ et sens de variation de $f$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ $f'(x) > 0$ donc $f$ est croissante

sur $[0, \frac{\pi}{9}[$ et sur $]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$.

- Tableau de variation

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ <}} \tan(3x+\frac{\pi}{6}) = \lim\limits_{\substack{X \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan X = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ >}} \tan(3x+\frac{\pi}{6}) = \lim\limits_{\substack{X \to \frac{\pi}{2} \\ >}} \tan X = -\infty$

**Méthode**

Il faut déterminer la période de la fonction et réduire l'intervalle d'étude.

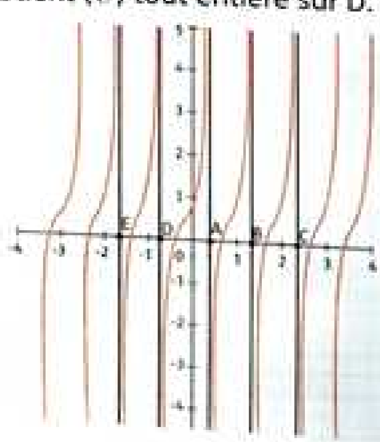
| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{9}$ | | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

- Courbe de $f$.

$(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{9}$.

On construit $(\mathscr{C})$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ et par translations successives de vecteurs $-\frac{\pi}{3}\overrightarrow{OI}$ et $\frac{\pi}{3}\overrightarrow{OI}$.

On obtient $(\mathscr{C})$ tout entière sur D.



**Exercice 5** **Étudier une fonction comportant une valeur absolue**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.

1. Détermine l'ensemble de définition D de $f$.
2. Détermine l'expression de $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
3. Détermine la dérivabilité de $f$ en $-3$ et en 1 et donne le sens de variation de $f$.
4. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
5. Représente la courbe de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**Corrigé**

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \forall x \in [-3, 1]$

3. Dérivabilité de $f$ en $-3$ et en 1.

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} = \lim_{x \to -3} x - 1 = -4.$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{(x+3)(-x+1)}{x+3} = \lim_{x \to -3} -x + 1 = 4.$$

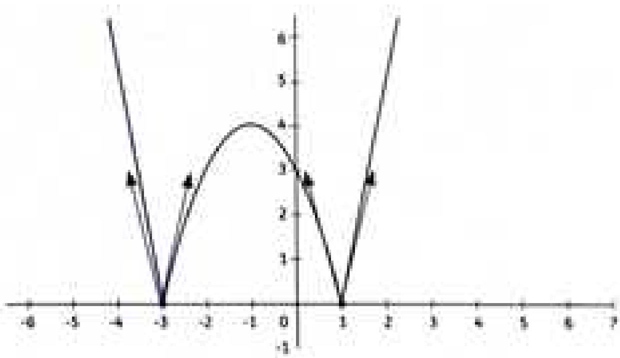
$f'_g(-3) = -4$ et $f'_d(-3) = 4$ donc $f$ n'est pas dérivable en $-3$.
($\mathscr{C}$) admet au point d'abscisse $-3$ deux demi-tangentes d'équations respectives :
$y = -4x - 12$ et $y = 4x + 12$.
On vérifie facilement de la même manière que $f$ n'est pas dérivable en 1 car $f_g'(1) = -4$ et $f_d'(1) = 4$ et ($\mathscr{C}$) admet deux demi-tangentes d'équation :
$y = 4x - 4$ et $y = -4x + 4$.

4. Sens de variation de $f$.
$f$ est dérivable sur $]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$,
$\forall x \in ]-\infty ; -3[ \cup ]1, +\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$
$f$ est dérivable sur $]-3, 1[$
$\forall x \in ]-3 ; 1[$, $f'(x) = -2x - 2 = -2(x+1)$
Signe de $f'(x)$ sur $]-\infty ; -3[ \cup ]1 ; +\infty[$
$\forall x \in ]-\infty ; -3[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in ]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
Signe de $f'(x)$ sur $]-3 ; 1[$
$\forall x \in ]-3 ; -1[$, $f'(x) > 0$
$\forall x \in ]-1 ; 1[$, $f'(x) < 0$.
$f$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]-1 ; 1[$.
$f$ est strictement croissante sur $]-3 ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
Tableau de variation de $f$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

5. Courbe de $f$.



**Méthode**

Pour étudier une fonction avec le symbole de valeur absolue, on écrit la fonction sans le symbole de valeur absolue.

**Exercice 6** **Étudier une fonction rationnelle.**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x+8}{4x^2-2x-12}$.

Étudie et trace la courbe représentative de $f$ sur son ensemble de définition dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**Corrigé**

**Méthode**

Il faut dresser le tableau de variation, rechercher les asymptotes avant de construire la courbe $f$.

a) Ensemble de définition D de $f$.

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $4x^2 - 2x - 12 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 2$ et $x \neq \frac{-3}{2}$. Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-3}{2}, 2\}$.

b) Limites aux bornes de D.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{4x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{4x} = 0.$$

$(\mathscr{C})$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

- On a $\forall x \in D, f(x) = \dfrac{3x+8}{4(x+\frac{3}{2})(x-2)}$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} f(x) = \frac{3x+8}{4(x-2)} \times \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = +\infty$$

car $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{3x+8}{4(x-2)} = \frac{-1}{4}$.

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{3x+8}{4(x-\frac{3}{2})} \times \frac{1}{x-2} = -\infty$$

car $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{3x+8}{4(x-\frac{3}{2})} = 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

On déduit de ces limites que les droites d'équations $x = \frac{-3}{2}$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à $(\mathscr{C})$.

c) Sens de variation de $f$.

- $f$ est dérivable sur D et $\forall x \in D$, on a :

$$f'(x) = \frac{3(4x^2-2x-12) - (3x+8)(8x-2)}{(4x^2-2x-12)^2}$$

$$= \frac{-12x^2-64x-20}{(4x^2-2x-12)^2}$$

$$= \frac{-(x-5)(3x+1)}{(2x^2-x-6)^2}$$

- Signe de $f'(x)$ sur D.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $\frac{-3}{2}$ | | $\frac{-1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+5)(x+\frac{1}{3})$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $(2x^2-x-6)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $-$ | |

- Sens de variations

$f$ est strictement croissante sur $]-5, \frac{-3}{2}[$ et sur $]-\frac{-3}{2}, \frac{-1}{3}[$.

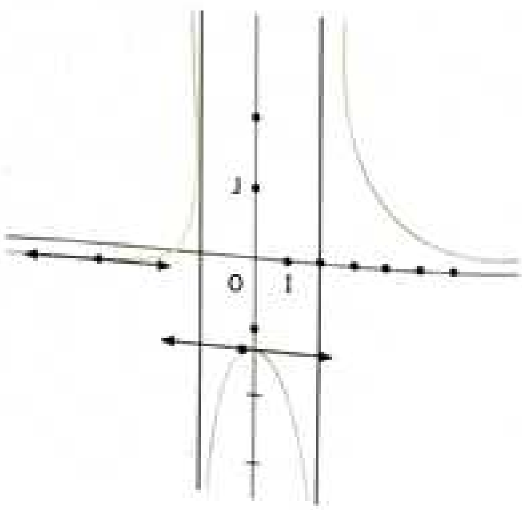
$f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -5[$, sur$]\frac{-1}{3}, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

- Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $\frac{-3}{2}$ | | $\frac{-1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $\frac{1}{4}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{-9}{14}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 0 |

d) Courbe de $f$.

On prendra pour unités OI = 1 cm et OJ = 5 cm.



## Exercice 7 Étudier une fonction irrationnelle.

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+3)}$.

1. Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Calcule les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Justifie que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = -x - 1$ et asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
4. Étudie la dérivabilité de $f$ en 1 et en 3.
5. Étudie les variations de $f$ puis dresse son tableau de variation.
6. Construis $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{C})$.

**Corrigé**

1. Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.

$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(x-1)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \in ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$, donc $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.

2. Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)(x+3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)(x+3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. Asymptotes

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x - 1} = 0.$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1) = 0$

(D) est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + (x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x - 1} = 0.$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1) = 0$

(D) est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

4. Dérivabilité de $f$ en 1 et en $-3$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = -\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x+3}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+3)^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}} = +\infty.$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{x-1}{x+3} = +\infty$ donc $f$ n'est pas dérivable à gauche en $-3$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse $-3$ une demi-tangente verticale.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x-1}$

**Méthode**

Étudier la fonction en faisant attention à l'ensemble de définition pour dresser le tableau de variation.

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} = +\infty.$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x+3}{x-1} = +\infty$ donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 1 donc $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale.

5. Sens de variation de $f$.

- $f$ est dérivable sur $]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$ et

$\forall x \in ]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{(x-1)(x+3)}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}$

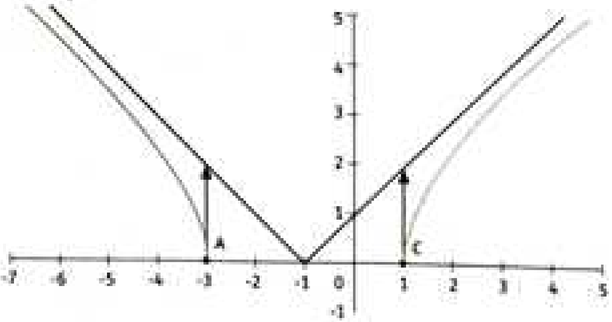
- $\forall x \in ]-\infty, -3[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in ]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -3[$ et $f$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

- Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

6. On construit (D), (D') les tangentes verticales puis $(\mathcal{C}_f)$.



**Exercice 8** **Étudier une fonction irrationnelle**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) : unité 2 cm.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté au repère (O, I, J).

1. a) Écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

   b) Justifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ puis interprète graphiquement le résultat.

   c) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$.

2. Étudie la dérivabilité de $f$ en $-1$ puis interprète graphiquement le résultat de la limite.

On admet que $f$ n'est pas dérivable en 1 et $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale dirigée vers le haut.

3. a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x$ élément de $]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

   b) Vérifie que pour tout $x$ élément de $]-1\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Justifie que : $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;1[$, $f'(x) < 0$.

$\forall x \in\,]-1\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

5. Dresse le tableau de variation de $f$.
6. Démontre que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
7. Construis $(\mathscr{C})$.

**Corrigé**

1. a) $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]1\,;+\infty[$,

$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

$\forall x \in\,]-1\,;1[$, $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

$f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 1 = 1$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} x-1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \sqrt{x^2-1} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x+\sqrt{1-x^2}+1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 + \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 = 1$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1-x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \sqrt{1-x^2} = 0$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$

Donc $f$ est pas dérivable en $-1$ et (C) admet au point d'abscisse $-1$ une tangente verticale.

3. a) $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\forall x \in\,]-1\,;1[$,

$f'(x) = 1 + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[$, $x^2-1 < x^2$

$0 < \sqrt{x^2-1} < |x|$

$\sqrt{x^2-1} < -x$

$\sqrt{x^2-1} + x < 0$.

**Méthode**

- Écrire la fonction sans les symboles de valeur absolue.
- Étudier sur chaque intervalle le signe de la dérivée en utilisant les résultats sur les inéquations irrationnelles de la classe de 1ère D

Donc $\forall x \in ]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$.

$\forall x \in ]1 ; +\infty[$ , $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in ]1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2-1} + x > 0$, donc $f'(x) > 0$

$\forall x \in ]-1 ; +1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2} - x > 0$ dans $]-1 ; 1[$.

$\sqrt{1-x^2} > x$, $\forall x \in ]-1 ; +1[$.

- Si $x \in ]-1 ; 0[$, $\sqrt{1-x^2} > x$ et $f'(x) > 0$.
- Si $x \in ]0 ; 1[$, alors on a : $x > 0$.

$\sqrt{1-x^2} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > x$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 > x^2$,

$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0$, $\forall x \in ]0 ; 1[$,

$\Leftrightarrow (1 - x\sqrt{2})(1 + x\sqrt{2}) > 0$,

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit que $\forall x \in ]-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $f'(x) > 0$

$\forall x \in ]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$.

D'où le résultat :

$\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$

$\forall x \in ]-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[ \cup ]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

5. Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

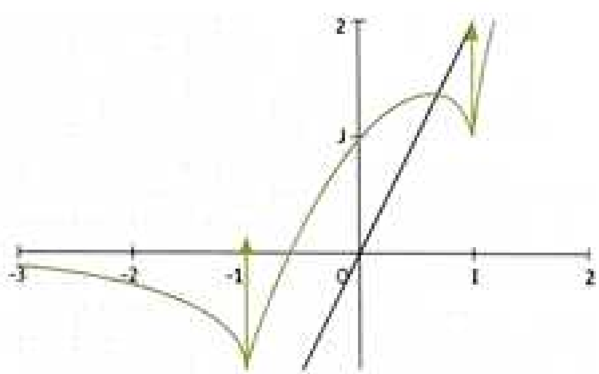
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} - 2x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

7. Construisons (C).



## Résumé de cours

### 1 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point

#### Définitions et notation

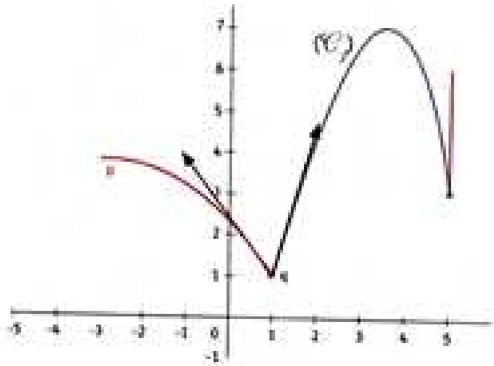
**Définition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, a]$(resp.$[a, x_0[$). On dit que $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $(x \neq a)$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite). Dans ce cas, la valeur de cette limite est appelée nombre dérivé de $f$ à gauche (resp.à droite) en $a$.

__Notation__

Si $f$ est dérivable à gauche (resp.à droite) en $a$, on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_g'(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_d'(a)$).

#### Interprétation graphique-tangente verticale

- Si $f$ est dérivable à gauche (resp.à droite) en $a$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse $a$ à gauche (resp.à droite) une demi-tangente d'équation : $y = f_g'(a)(x-a)+f(a)$ (resp.$y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$).
- Si la fonction : $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $(x \neq a)$ admet en $a$ (resp.à gauche ou à droite) une limite infinie, alors (C) admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.




**Propriété** $f$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche en $a$, dérivable à droite en $a$ et $f_g'(a) = f_d'(a)$.

### 2 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

#### 2.1. Définition

**Définition** $f$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a$ et $b$ deux éléments de I.

- On dit que $f$ dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
- On dit que $f$ est dérivable sur $[a, b]$ si $f$ est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en $a$ et dérivable à gauche en $b$.

#### 2.2. Propriétés

**Propriété 1**

- Les fonctions suivantes sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs : $x \mapsto a, x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbb{N})$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

**Propriété 2** Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle K, $\alpha$ un nombre réel et $n$ un entier naturel non nul.
Les fonctions $u + v$, $uv$, $\alpha u$ et $u^n$ sont dérivables sur K. De plus si $v$ ne s'annule pas sur K, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur K.

**Propriété 3** Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

## 3 Dérivée d'une fonction composée

### Propriétés

**Propriétés** Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $g$ une fonction définie sur un intervalle contenant $f$(I) et a un élément de I.

- Si $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $f(a)$, alors $gof$ est dérivable en $a$ et $(gof)'(a) = f'(a) \times (g'of)(a)$.
- Si $f$ est dérivable sur I et $g$ dérivable sur $f$(I), alors $gof$ est dérivable sur I et pour tout $x$ élément de I, on a : $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

### Conséquences

$u$ est une fonction dérivable.

| Fonction | Fonction dérivée |
|---|---|
| $u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) | $nu'u^{n-1}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u^r$ | $ru'u^{r-1}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |
| $\sin u$ | $u'\cos u$ |
| $\cos u$ | $-u'\sin u$ |

## 4 Dérivée d'une bijection réciproque en un point

**Propriétés** Soient $f$ une bijection d'un l'intervalle I vers l'intervalle $f$(I), $f^{-1}$ sa bijection réciproque, $b$ un élément de $f$(I) et $a$ son antécédent par $f$ ( c'est-à-dire $f(a) = b$).

- Si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$ et on a :
$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}$.
- Si $f$ est dérivable sur I et si $f'$ ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1}$ est dérivable sur J.
De plus pour tout élément $x$ de J, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f'of^{-1})(x)}$.

<u>Point méthode</u> : Exprime $f'(x)$ en fonction $f(x)$ puis $(f' o f^{-1})(x)$ en fonction de $x$.

## 5 Dérivées successives

### Définition et notation

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

- Si $f$ est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée $f'$ est appelée dérivée première (ou d'ordre 1) de $f$. On la note aussi $f^{(1)}$.
- Si $f'$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est appelée dérivée seconde (ou d'ordre 2) de $f$. On la note $f''$ ou $f^{(2)}$.
- Par dérivation successive, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ ( ou d'ordre $n$ ) de $f$. On la note $f^{(n)}$.

### Notation différentielle (ou de Leibniz)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
Si elles existent , les dérivées successives : $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(1-n)}$ et $f^{(n)}$ de $f$ sont notées aussi successivement : $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d^2f}{dx^2}, \dots, \dfrac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ et $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

## 6 Point d'inflexion

### Définition

**Définition** On suppose que $f$ est une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un élément de I. On dit que le point d'abscisse $a$ est un point d'inflexion de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de $f$ si $(\mathscr{C})$ traverse la tangente au point d'abscisse $a$.

### Propriété

**Propriété** Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a$ un élément de I. Si $f''$ s'annule en $a$ en changeant de signe, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$.

## 7 Inégalités des accroissements finis

### Première forme

**Propriété** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle, $a$ et $b$ deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe deux nombres réels $m$ et M tels que pour tout $x$ élément de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

### Deuxième forme

**Propriété** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un nombre réel M tel que pour tout $x$ élément de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels $a$ et $b$ de I, $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

## Exercices de renforcement

**1** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (Γ) la représentation graphique de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Étudie dans chaque cas la dérivabilité de $f$ en $x_0$ et précise les tangentes au point d'abscisse $x_0$.

1. $f(x) = x^2 - x - 3$ si $x \geq 2$
$f(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$ si $x < 2$ $\quad x_0 = 2$
2. $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$ $\quad x_0 = -1$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad x_0 = 1$

**2** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (C) la représentation graphique de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.
1. Calcule $g'(x)$ et $g''(x)$.
2. Démontre que (C) admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées.

**3** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^3$.
Démontre que $f$ est dérivable en -1 et calcule $f'(-1)$.

**4** Détermine dans chaque cas la dérivée de $f$ sur l'intervalle I.
1. $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$ $\quad I = \mathbb{R}$,
2. $f(x) = \cos^3(2x)$ $\quad I = \mathbb{R}$,
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ $\quad I = \mathbb{R}$,
4. $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^4$ $\quad I = ]2\,;+\infty[$,
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ $\quad I = \mathbb{R}$.

**5** On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$.
1. Démontre que $g$ est une bijection de $]-1\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;3[$.
2. Démontre que $g^{-1}$ est dérivable en 0 puis calcule $(g^{-1})'(0)$.

**6** On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J).
1. Étudie la parité de $f$.
2. Détermine les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
3. Calcule la fonction dérivée de $f$ et étudie son signe.
4. Dresse le tableau de variation de $f$.
5. Trace la courbe représentative de $f$.

**7** Soit la fonction $f : ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$.
1. Démontre que $f$ est une bijection.
2. Démontre que $f^{-1}$ est dérivable en $\sqrt{3}$ et calcule $(f^{-1})'(\sqrt{3})$.

**8** Détermine les 4 premières dérivées de $f$ sur $\mathbb{R}$ dans chaque cas.
1. $f(x) = 5x^4 - 12x^3 - 3$, 2. $f(x) = \cos(2x+1)$,
3. $f(x) = \sin x$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

**9** Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.
1. Étudie les variations de $f$.
2. a) Démontre que $f$ est une bijection de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$ sur $[1\,;+\infty[$.
b) Calcule $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(2)$.
c) Justifie que $f^{-1}$ est dérivable en chacun des points 1, $\sqrt{2}$ et 2 puis calcule le nombre dérivé de $f^{-1}$ en chacun de ces points.

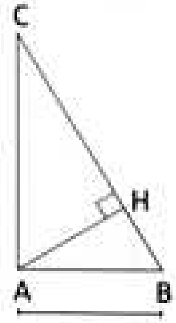
**10** 1. Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$
a) Démontre que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \dfrac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$.
b) Établis le tableau de variation de $g$.
c) Calcule $g(1)$. Déduis-en une étude de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$.
a) Dresse le tableau de variation de $f$.
b) Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe de $f$ en son point d'abscisse −1.
c) Trace la courbe représentative (C) de la fonction $f$.

**11** En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :
$\forall a > 0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

**12** Démontre les inégalités suivantes :
1. Pour tout nombre réel $x \geq 0$,
on a : $(1+x)^{\frac{1}{3}} \leq 1 + \frac{1}{3}x$.
2. Pour tout nombre réel $x$, on a : $|\sin x| \leq |x|$.

**13** On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 1. On désigne par $x$ la distance AC ($x \in ]0\,;+\infty[$).

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
1. Exprime l'aire du triangle ABH en fonction du nombre réel positif $x$.
2. On notera $f(x)$ cette aire.
Étudie les variations de la fonction $f$, déduis-en la valeur du nombre réel $x$ telle que l'aire du triangle ABH est maximale.




On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash(1)$ par :

$f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

**14** 1. Démontre que $f$ est continue en tout point de son ensemble de définition.
2. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
calcule $\zeta(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$,
utilise ce calcul pour étudier la dérivabilité de $f$ en $-1$.
3. Précise l'ensemble de dérivabilité D de $f$ et détermine la fonction dérive $f'$ de $f$.
4. Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
5. On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Démontre que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = -x - 1$ sont des asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.
b) Écris une équation cartésienne de chacune des demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ en son point Mo d'abscisse $-1$ et représente-les dans les repères $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
c) Trace la courbe $(\mathscr{C})$.

**15** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{2x+3}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de $f$ dans un plan affine muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Détermine les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash(-\frac{3}{2})$, on a :

$\frac{2x^2-4x+2}{2x+3} = ax + b + \frac{c}{2x+3}$.

2. Démontre que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes, la droite (D) d'équation $y = ax + b$ et une droite (D') dont on donnera l'équation.
3. Soit I le point d'intersection de (D) et (D').
Démontre que I est un centre de symétrie pour $(\mathscr{C})$.
4. Étudie les variations de $f$ et représente graphiquement $f$ (on étudiera la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'asymptote (D).
5. $m$ étant un paramètre réel. Utilise $(\mathscr{C})$ pour étudier l'existence des solutions de l'équation suivante dans $\mathbb{R}$ : $2x^2 - 2(m+2)x - 3m + 2 = 0$.
6. Écris une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point A d'abscisse $-\frac{3}{2}$.

## Exercices d'approfondissement

**16** On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1. a) Démontre que $f$ est définie sur :
$I = ]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.
b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
c) Étudie la dérivabilité de $f$ à gauche en 1 et à droite en 3. Interprète graphiquement le résultat de chaque limite.
2. a) Démontre que pour tout $x \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$,
on a : $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$.
b) Dresse le tableau de variation de $f$.
3. Démontre que la droite $(\Delta_1)$ d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$ et que la droite $(\Delta_2)$ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4. Trace $(\Delta_1)$ ; $(\Delta_2)$ et (C).
5. Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$g(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 3}$.
a) Détermine l'ensemble de définition J de la fonction $g$.
b) Démontre que $g$ est une fonction paire.
c) Trace la courbe représentative (C') de la fonction $g$.

**17** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (Γ) la représentation graphique de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x - |x-2|}$.
1. Justifie que l'ensemble de définition de $f$ : est $D_f = \mathbb{R}-(1)$.
2. Écris $f$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. Détermine les limites de $f$ à gauche et à droite en 1 et donne une interprétation graphique des résultats.

4. a) Détermine les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement les résultats.

b) Calcule la limite de $f$ en $-\infty$.

c) Démontre que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\Gamma)$ en $-\infty$.

5. Étudie la dérivabilité de $f$ en 2.
Précise les tangentes éventuelles au point d'abscisse 2.

6. a) Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.

b) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\Gamma)$ au point d'abscisse 0.

7. Trace dans le repère (O, I, J), les droites (T), $(\Delta)$ et les tangentes au point d'abscisse 2 puis construis $(\Gamma)$.
(Tu prendras pour unité : OI = OJ = 1 cm).

**18** Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 1 cm). On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

**Partie A**

1. Détermine les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.

2. Détermine $a$ et $b$ pour que la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = 4x + 3$.

**Partie B**

On suppose que : $a = 4$ et $b = 3$.

1. Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1}$.

2. Calcule $f'(x)$.

3. Étudie le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variation.

4. Démontre que le point A (0 ; 3) est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

5. Soit $h$ la restriction de $f$ à $[1,+\infty[$.

a) Démontre que $h$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b) Dresse le tableau de variation de $h^{-1}$, la bijection réciproque de $h$.

6. a) Résous dans $[1,+\infty[$, l'équation : $f(x) = 4$.

b) Démontre que $h^{-1}$ est dérivable en 4 et détermine $(h^{-1})'(4)$.

7. Trace l'asymptote à $(\mathscr{C})$, construis $(\mathscr{C})$ puis $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de $h^{-1}$.

**19** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

A- On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$, $(\mathscr{C})$ désigne la représentation graphique de $f$.

1. a) Détermine la limite de $f$ en $-\infty$ et interprète graphiquement le résultat.

b) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$.

c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

3. a) Démontre que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

4. a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Trace (T), (D) puis construis $(\mathscr{C})$.
Tu prendras pour unité : IO = OJ = 2 cm.

B-

1. a) Démontre que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser .

b) Dresse le tableau de variation de $f^{-1}$.

c) Trace $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le repère précédent.

2. a) Démontre que $f^{-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Calcule $f(0)$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

**20*** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. a) Justifie que $f$ est continue en 0.

b) Étudie la dérivabilité de $f$ en 0.

2. Étudie les variations de $f$.

3. a) Démontre que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

b) Démontre que $f^{-1}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et calcule $(f^{-1})'(0)$.

**21** Soit $f$ la fonction définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Étudie les variations de $f$.

2. a) Démontre que $f$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$.

b) Calcule $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$.

c) Justifie que $f^{-1}$ est dérivable en chacun des points 1, $\sqrt{2}$ et 2 puis calcule le nombre dérivé de $f^{-1}$ en chacun de ces points.

**22*** On considère l'application $f : ]0 ; \pi[ \to \mathbb{R}$,
$x \mapsto \frac{\cos(x + \frac{\pi}{3})}{\sin x}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de $f$.

1. Calcule les limites de $f$ aux bornes de $]0\,;\pi[$.
2. On suppose que $f$ est dérivable sur $]0\,;\pi[$.
   a) Démontre que $\forall x \in ]0\,;\pi[, f'(x) = \frac{-1}{2\sin^2 x}$.
   b) Étudie les variations de $f$ puis dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont tu préciseras les coordonnées.
   b) Détermine une équation de la tangente (T) en A à $(\mathscr{C}_f)$.
   c) Trace les asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$, (T) puis $(\mathscr{C}_f)$. (Tu prendras pour unité : IO = OJ =2 cm.)
4. a) Démontre que $f$ est une bijection de $]0\,;\pi[$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Trace $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le repère (O, I, J).
5. a) Justifie que $f^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{2}$.
   b) Démontre que $f^{-1}$ est dérivable en $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et calcule $(f^{-1})'(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

**23** Soit $f$ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

I. 1. Dresse le tableau de variation de $f$.
2. a) Démontre que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.
   b) Trace la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
3. a) Démontre que $f$ réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Explicite $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de J.
   c) Trace la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le repère (O, I, J).

II. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f^{-1}(\frac{1}{\cos x})$.
1. Démontre que pour tout $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$, $g(x) = 1 + \tan(x)$.
2. Démontre que $g$ réalise une bijection de $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ sur $[1\,;+\infty[$.
3. Démontre que $g^{-1}$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et calcule $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in [1\,;+\infty[$.

**24** Une entreprise fabrique des boulons.

En courte période, sa production totale P en nombre de boulons, dépend du facteur travail $h$ selon la relation :
$P(h) = -15h^3 + 175h^2 + 150h$, où la durée de travail $h$ est exprimée en heure et est comprise entre 0 et 8.
Le rythme de production R (ou vitesse de production ) est égal est la dérivée de P et est exprimé en boulons produits par heure.
1. Détermine la production au bout de 4 heures de travail.
2. a) Calcule R($h$).
   b) Déduis-en le rythme de production au bout de 4 heures de travail.
   c) Étudie le sens de variation de R sur [0,8]. Interprète le résultat.
3. a) Étudie le sens de variation de R sur [0,8].
   b) Pour quelle durée de travail le rythme de production est-il maximum ? (Donne le résultat à 10 minutes près).
4. Sur un intervalle où le rythme de production est croissant (resp. décroissant) on parle de phase de rendements croissants (resp. décroissants).
   a) Identifie ces deux phases pour la production.
   b) Interprète graphiquement les résultats.
5. L'entreprise doit livrer à un client une commande de 3000 boulons. Détermine, à 10 minutes près, le nombre d'heures de travail nécessaires pour honorer la commande.

**25** 1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^3 - 3x - 4$.
   a) Étudie le sens de variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$.
   Donne une valeur approchée de $\alpha$ au centième près.
   c) Détermine le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.
   a) Démontre que la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f$ a le même signe que $g(x)$ sur $]1\,;+\infty[$.
   b) Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   Précise les éventuelles asymptotes.
   c) Dresse le tableau de variations de $f$ et donne une valeur approchée de $f(\alpha)$.
   d) Démontre que la droite (D) d'équation : $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $f$.

Précise la position relative de (D) et de ($\mathscr{C}$).

e) Détermine une équation de la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 2.

f) Construis ($\mathscr{C}$), les asymptotes et les tangentes aux points d'abscisses 2 et α, dans un repère orthonormé.

**26** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Précise l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction $f$.

2. a) Démontre que pour tout réel $x$ de $\mathscr{D}_f$,

$f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$.

Déduis-en la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.

b) Détermine la limite de $f$ en $-\infty$.

3. Démontre que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe ($\mathscr{C}_f$) en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en 1.

a) Démontre que : $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}} - 1$.

Déduis-en la limite de $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ lorsque $x$ tend vers $-1$.

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudie les variations de la fonction $f$ sur son ensemble de dérivabilité.

b) Dresse le tableau de variations de $f$ sur $\mathscr{D}_f$.

6. Trace la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2$ ; $-1$ ; 1 et 2.

**27** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative.

1. a) Démontre que pour tout réel $x$,

$x \leq f(x) \leq x + 1$.

b) Déduis-en les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Interprète graphiquement l'encadrement précédent.

2. On note ($D_1$) et ($D_2$) les droites d'équations $y = x$ et $y = x + 1$.

Détermine les points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) avec la droite ($D_1$), puis avec la droite ($D_2$).

3. a) Démontre que pour tout réel $x$,

$f'(x) = 1 - \sin(2x)$.

b) Déduis-en le sens de variation de la fonction $f$.

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

4. a) Dresse le tableau de variation de $f$ sur $[0 ; \pi]$.

b) Trace ($D_1$), ($D_2$) et la représentation graphique de $f$ sur $[0 ; \pi]$.

5. a) Démontre que pour tout réel $x$,

$f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Comment déduit-on la courbe ($\mathscr{C}$) de la représentation graphique de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

**28** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$ et ($\mathscr{C}_f$) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. a) Étudie les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Vérifie que : $f(x) = (x - 2)\left(1 - \dfrac{1}{1 + x^2}\right)$.

c) Démontre que la droite (Δ) d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à ($\mathscr{C}_f$).

d) Étudie la position relative de ($\mathscr{C}_f$) et (Δ).

2. a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{x(x - 1)(x^2 + x + 4)}{(1 + x^2)^2}$.

b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ puis établis le tableau de variation de $f$.

3. Démontre que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution que tu noteras $\gamma$ dans $\mathbb{R}$. Donne un encadrement de $\gamma$ à $10^{-1}$ près.

4. a) Détermine les abscisses des points A et B de ($\mathscr{C}_f$) en lesquels la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$) est parallèle à (Δ). A sera le point d'obscisse négative.

b) Donne l'équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$) au point D d'abscisse 2.

c) Trace la droite (Δ), les trois tangentes précédentes ainsi que les tangentes horizontales et la courbe ($\mathscr{C}_f$).

d) Démontre que la distance, exprimée en cm, du point A à la droite (Δ) a pour valeur approchée 3 cm à $10^{-2}$ près.

On rappelle que :

La distance d'un point $M_0(x_0 ; y_0)$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule : $d(M_0 ; \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**29** On considère la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Démontre que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Détermine les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

3. Étudie la parité de la fonction $f$.

4. Étudie les variations de $f$.

5. Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.

6. a) Démontre que la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.
b) En utilisant la question 3, détermine une autre asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.
7. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
8. Résous l'équation $f(x) = 0$.

**30** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$.
1. Détermine les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudie les variations de la fonction $f$.
3. Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
4. a) Détermine des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ où $a$ et $b$ sont les valeurs trouvées à la question 4.a).
5. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
6. Détermine les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

**31** On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.
1. Détermine les dérivées $f'$, $f''$ et $f^{(3)}$ de la fonction $f$.
2. Détermine le signe de la fonction $f$ en étudiant successivement les variations des fonctions $f'$ et $f''$.
3. Déduis-en que, pour tout réel $x \geq 0$,
$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
4. Donne un encadrement de $f$ pour $x \leq 0$.
5. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.
a) La fonction $g$ est-elle continue en 0 ?
b) La fonction $g$ est-elle dérivable en 0 ?

**32** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.
« On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. »
1. Détermine les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudie les variations de $f$.
3. Dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
4. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ $-\infty$.
5. Détermine, au point d'abscisse 0, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$.
6. a) Trouve tous les polynômes du second degré dont la courbe représentative admet la droite (T) comme tangente au point d'abscisse 0.
b) Parmi ces polynômes, en existe-t-il un qui passe par le point A de coordonnées $(2 ; 1)$ ? Justifie la réponse.
7. Représente graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$, la tangente (T), la droite (D), le polynôme (s'il en existe dans la question 6. b).

**33** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = x^2$.
Pour cela, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - \cos x$.
1. Étudie la parité de la fonction $f$.
2. Démontre que pour tout réel $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Calcule, pour tout réel $x$, $f'(x)$ et $f''(x)$ où $f''(x)$ désigne la dérivée seconde de la fonction $f$.
4. Détermine le sens de variation de la fonction $f'$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
5. Calcule $f'(0)$ et déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$.
6. Déduis-en le sens de variation de $f$ sur $[0 ; \pi]$.
7. Démontre que l'équation (E) admet une unique solution $\alpha$ sur $[0 ; \pi]$.
8. Donne une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
9. Déduis-en toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

**34** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
1. Étudie la parité de la fonction $f$.
2. Démontre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Démontre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
4. Déduis des questions 1 et 3 que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
5. Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ ?

**35** 1. On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

a) Démontre que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes que tu préciseras.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

c) Trace la courbe $(\mathscr{C})$.

2. Soit $m$ un réel et (D) la droite d'équation $y = m$. Détermine, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D).

3. Dans la suite, on suppose que : $m > 2$ ; on appelle A et B les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D).

a) Démontre que le produit de l'abscisse de A par l'abscisse de B est constant et égal à 3.

b) Soit I le milieu de [AB]. Conjecture le lieu du point I lorsque m décrit l'intervalle $[2; +\infty[$.

Tu pourras utiliser la fonction tracée dans 1.

**36** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Étudie la parité de la fonction $f$.

2. a) Détermine les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ ?

3. Étudie les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

4. Démontre que pour tout réel $x$, $0 < f'(x) \leq 1$.

5. Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ de coefficient directeur 1.

6. Détermine une fonction g polynôme du second degré dont la courbe $(\mathscr{C}')$ admet pour tangente la droite (T).

**37** Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A :** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Démontre que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $= \mathbb{R}$.

2. Étudie la parité de la fonction $f$.

3. Détermine les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. a) Démontre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$.

b) En utilisant la question 2, détermine une autre asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.

5. Étudie les variations de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

6. Dresse le tableau de variations de $f$ sur son ensemble de définition.

7. Précise l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

8. Résous l'équation $f(x) = 0$.

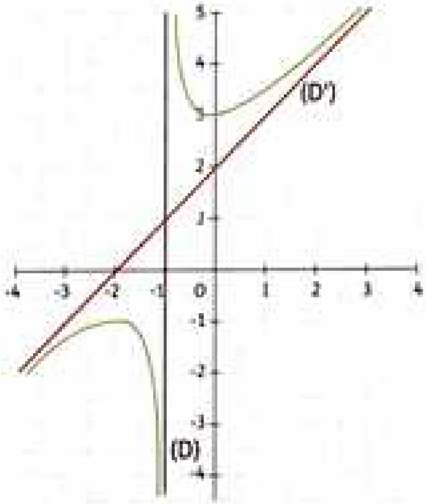
**Partie B :** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ et $g(0) = 0$, la fonction $f$ étant celle définie dans la partie A.

1. Démontre que la fonction $g$ est continue en 0.

2. Est-elle dérivable en 0 ? Justifie la réponse.

3. Interprète graphiquement le résultat de la limite précédente.

**38** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$, où $a, b, c, d$ sont des nombres réels, et dont la représentation graphique est la courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous.




Les droites (D) et (D') sont des asymptotes à $(\mathscr{C})$. Le point A(0 ; 3) est un point de la courbe $(\mathscr{C})$. Détermine les réels $a, b, c, d$ à l'aide du graphique. Justifie les solutions.

**39** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4x^2+3}$.

a) Démontre que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$.

b) Détermine les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

c) La fonction $f$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

d) Détermine les variations de la fonction $f$.

e) Démontre que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

**40** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$.

a) Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Détermine les variations de la fonction.

c) Donne une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

d) Étudie la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (T).

**41** A. Démontre que, pour tout nombre réel $a \in [0\,;1]$, on a : $\sqrt{a} \geq a$.

B. On s'intéresse aux fonctions $f$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

1. la fonction $f$ est continue sur $[0\,;1]$ ;
2. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ ;
3. la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$ ;
4. pour tout $x$ de $[0\,;1]$, $f(x) \leq x$.

a) Démontre que la fonction $g$ définie par : $g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ satisfait aux conditions précédentes. (On pourra utiliser le résultat de la partie A.)

b) Déduis-en que, pour tout $k \in [0\,;1]$, l'équation $g(x) = k$ a une unique solution dans $[0\,;1]$.

c) Résous cette équation lorsque $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Cette fonction $g$ est-elle dérivable en 1 ?

e) Trouve un polynôme du second degré P vérifiant les quatre conditions précédentes.

## Situation complexe

**42** Lors d'une conférence organisée dans un lycée, le médecin chef de l'hôpital a donné, entre autres, les informations suivantes :

« Une épidémie a frappé les habitants d'une ville. Le nombre de personnes malades en fonction du temps, en jour, peut être modélisé par la fonction $f$, définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par :
$f(t) = -t^3 + 30t^2$.
La vitesse de propagation de la maladie au jour $t$ est assimilée au nombre dérivé $f'(t)$. »

Une élève ayant assisté à cette conférence désire savoir :
- le jour où il y a le plus grand nombre de malades et le nombre de malades ce jour ;
- la vitesse de propagation de la maladie au 10e jour.

Elle te sollicite. Aide-la.

## Coup de Pouce

**16** $D_g = ]-\infty\,;-3] \cup [-1\,;1] \cup [3\,;+\infty[$.
Pour représenter la courbe de $g$, on utilisera la parité de $g$ et la courbe de la fonction $f$.

**20** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$

**22** Pour le calcul de la dérivée de $f$, on utilisera la formule trigonométrique $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Leçon 3

# PRIMITIVES

L'accélération est la dérivée de la vitesse.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors du cours de cinématique dans une classe de Terminale D, le professeur de physique signifie que l'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse instantanée et la dérivée seconde de la position d'un objet en mouvement. Après avoir donné les équations horaires de $v(t)$ et $x(t)$, un élève curieux demande au professeur comment ces équations ont-elles été obtenues à l'aide de la définition de l'accélération instantanée.

Vu la pertinence de la question, le professeur recommande à l'élève de se référer au cours de Primitive en mathématique. L'élève demande l'aide de ses amis de classe afin de déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ lorsque l'accélération est nulle ou lorsqu'elle est une constance.

Ensemble, ils décident de chercher ces expressions.

# HABILETÉS ET CONTENUS

## 1 Primitive d'une fonction

*Connaître :*

- la définition d'une primitive d'une fonction continue
- la propriété relative à la condition d'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle
- la propriété relative à l'ensemble des primitives d'une fonction continue
- la propriété relative à l'unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné

*Déterminer :*

- l'ensemble des primitives d'une fonction continue
- la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné

*Justifier :*

- qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée

## 2 Primitives des fonctions de référence

*Connaître :*

les primitives des fonctions de référence

*Déterminer :*

les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence

## 3 Primitives et opérations sur les fonctions

*Connaître :*

- les primitives de : $u'+v'$; $\lambda u' (\lambda \in \mathbb{R})$
- $v' \times u'ov$ ; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ; $u'\cos u$ ; $u'\sin u$ ; $\frac{u'}{u^r}$,

$r \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ ; $u' \times u^m, m \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ où $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables

*Déterminer :*

- les primitives d'une fonction du type
- $u' + v', \lambda u' \ (\lambda \in \mathbb{R})$
- $v' \times u'ov$ ; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ; $u'\cos u$ ; $u'\sin u$ ; $\frac{u'}{u^r}$ ;

$(r \neq 1)$

$r \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$ ; $u' \times u^m$, $m \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ où $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables

# INSTALLATION DES HABILETÉS

## Activité 1 Primitive d'une fonction

### 1.1. Définition d'une primitive d'une fonction continue

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x + 2$.

1. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

   a) $h$ est la dérivée de la fonction $H : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{x}$.

   b) $h$ est la dérivée de la fonction $H : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + 1$.

   c) $h$ est la dérivée de la fonction $H : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x$.

2. Trouve deux autres fonctions ayant $h$ pour dérivée.

## Exercices de fixation

**1.1.1** Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

1. $f$ et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I. F est une primitive de $f$ sur I si $f$ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

2. $h$ et $t$ sont deux fonctions définies sur un intervalle K et $\forall x \in \mathrm{K}$, $h'(x) = t(x)$. $h'$ est donc une primitive de $t$ sur K.

3. F est une primitive de $f$ sur un intervalle I équivaut à $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

**1.1.2** Recopie et complète le texte ci-dessous avec les mots ou groupe de mots suivants qui conviennent : une primitive, la dérivée, dérivable.

1. $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, ... de la fonction $\mathrm{T} : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$ est la fonction $\mathrm{t}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc T est ........ de la fonction t' sur $]0; +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t : x \mapsto x$ est ........ de la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \pi$ donc $h$ est ........ de la fonction $t$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 4x + 1$ est........ de la fonction $g : x \mapsto x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$.

**1.1.3** Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est correcte. Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre indiquant la réponse correcte.

| N° | Énoncés | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x + \sqrt{3}$ est la fonction ... | $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + \sqrt{3}$ | $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ | $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + \sqrt{3}\,x$ |
| 2 | Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto \cos x + \pi$ est la fonction ... | $\mathrm{H} : x \mapsto -\sin x$ | $\mathrm{H} : x \mapsto \sin x + \pi x$ | $\mathrm{H} : x \mapsto \sin x + \pi$ |

### 1.2. Ensemble des primitives d'une fonction continue

On admet que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.
On donne une fonction $f$ définie sur un intervalle K et F une primitive de $f$ sur K.

I- 1. Démontre que pour tout nombre réel $c$, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x) + c$ est une primitive de $f$.
2. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
a) Toute fonction continue sur un intervalle K admet une unique primitive sur K.
b) Si F est une primitive de $f$ sur K, alors pour tout nombre réel $c$, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x) + c$ est une primitive de $f$.

II- Soit H une primitive de $f$.
1. Justifie que $(\mathrm{F} - \mathrm{H})'$ est la fonction nulle.
2. Déduis-en que pour $x \in \mathrm{K}$, $\mathrm{H}(x) = \mathrm{F}(x) + c$, où $c$ est une constante.
3. Si F est une primitive de $f$, donne la forme générale de toutes les primitives de $f$.

**Synthèse**

Si F est une primitive de $f$ sur un intervalle K, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x) + c$, où $c$ est une constante, est une primitive de $f$ sur K et toutes les primitives de $f$ sont sous cette forme.

## Exercices de fixation

**1.2.1** Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

1. Les fonctions polynômes admettent toutes des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles admettent toujours des primitives sur $\mathbb{R}$.
3. Deux primitives sur un intervalle K, d'une même fonction diffèrent d'une constante.
4. Toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$ sont de la forme $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ ou $k$ est un nombre réel.

**1.2.2** Parmi les fonctions ci-dessous, inscris les primitives correspondantes à chaque fonction de la première ligne.

$x \mapsto \frac{4x^3}{3} + 4x + 1$ ; $x \mapsto \frac{4x^3}{3} + x - 4$ ; $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{3}$ et $x \mapsto \sqrt{x} + 3x$.

| Fonction | $x \mapsto 4x^2 + 1$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
|---|---|---|
| Primitives | | |

**1.2.3** Dans chacun des cas suivants, F et $f$ sont des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Justifie que F et est une primitive de $f$ sur l'intervalle I.

1. $F(x) = \frac{x^6}{3} - x^3 + 2x - 1$
$f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ ; $I = \mathbb{R}$

2. $F(x) = \cos(2x-1) + \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$
$f(x) = -2\sin(2x-1) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ ; $I = \mathbb{R}$

3. $F(x) = \frac{1}{x^3} + x\sqrt{x} + \sqrt{2}$
$f(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ; $I = ]0 ; +\infty[$

4. $F(x) = \sqrt{x+2} - (3x-2)^2$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 18x + 12$ ; $I = ]-2 ; +\infty[$

### 1.3. Unicité de la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.

$f$ est une fonction continue sur un intervalle K, elle admet une primitive H sur K.

1. Détermine une primitive F de $f$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$ sur K.
2. On suppose que G est une primitive de $f$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$ sur K. Compare G et F.
3. Existe-t-il une autre primitive de $f$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$ ?

**Synthèse**

Il existe une et une seule primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle K qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.

## Exercices de fixation

**1.3.1** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Détermine la primitive F de $f$ qui prend la valeur 3 en 1.

**1.3.2** Soit la fonction $F(x) = \sqrt{x+1} - 2$, une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ sur $]-1; +\infty[$.
Détermine la valeur qui annule la primitive F de $f$ sur $]-1 ; +\infty[$.

**1.3.3** Dans chacun des cas suivants, $f$ est une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Détermine la primitive F de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f(x) = -6x^5 + 2$ et $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ ; 2. $f(x) = \cos x$ et $x_0 = \pi$ et $y_0 = \frac{1}{2}$ ;
3. $f(x) = \frac{x^4}{3} + 1$ et $x_0 = 1$ et $y_0 = -3$ ; 4. $f(x) = x + 1$ et $x_0 = -2$ et $y_0 = -3$.

## Activité 2 Primitives des fonctions de référence

Recopie et complète le tableau suivant en déterminant la fonction dont la dérivée est $f$.

| Primitive F définie par : | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonction dérivée $f$ définie par | $f(x) = 0$ | $f(x) = 1$ | $f(x) = 2x$ | $f(x) = x^r$ ; $r \in \mathbb{Q}$ | $f(x) = \frac{1}{x^r}$ ; $r \in \mathbb{Q}^*$ | $f(x) = \sin x$ |

**Synthèse**

À l'aide des dérivées des fonctions usuelles, on détermine les primitives des fonctions de référence ou usuelles.

## Exercices de fixation

**2-1** Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $F(x) = 5x^4$ est une primitive de la fonction définie par $f(x) = x^5$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la fonction définie par $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$, est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^4}$.
3. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, la fonction définie par $F(x) = \tan x$ est une primitive de la fonction définie par $f(x) = 1 + \tan^2 x$.

**2-2** $f$ est une fonction continue et F est une primitive de $f$ sur l'intervalle I.
Recopie et associe chaque fonction $f$ à sa primitive F.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f : x \mapsto \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ | • | • | $F : x \mapsto 2x^{\frac{1}{2}}$ |
| $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | • | • | $F : x \mapsto \frac{1}{4x^4}$ |
| $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | • | • | $F : x \mapsto x\sqrt{x}$ |
| $f : x \mapsto -\frac{1}{x^5}$ | • | • | $F : x \mapsto -\frac{1}{x}$ |

## Activité 3 Primitives et opérations sur les fonctions

Recopie et complète le tableau suivant en déterminant la fonction dont la dérivée est $f$ :

| Primitive F définie par : | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fonction dérivée $f$ définie par | $f(x) = u' + v'$ | $f(x) = \lambda u'$ | $f(x) = v' \times u' o v$ | $f(x) = u' \sin u$ |

**Synthèse**

- La primitive de la somme de deux fonctions est la somme des primitives de ces fonctions.
- La primitive du produit d'un nombre réel par une fonction est le produit de ce nombre par la primitive de cette fonction.
- La primitive du produit de la dérivée d'une fonction $v$ par la composée de la fonction $v$ par la dérivée d'une fonction $u$ est la fonction composée $u o v$.

## Exercices de fixation

**3-1** Pour chacun des énoncés du tableau suivant, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la réponse qui convient.
$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et ont pour dérivée respective $u'$ et $v'$.

| N° | Énoncés | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Une primitive sur I de la fonction $-\frac{u'}{u^2}$ est la fonction : | $\frac{1}{u}$ | $\frac{-1}{u^2}$ | $\frac{-1}{u}$ |
| 2 | Une primitive sur I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction : | $uv$ | $u'v$ | $u'v'$ |
| 3 | Une primitive sur I de la fonction $ru'u^{r-1}$ où $r \in \mathbb{Q} - \{1\}$ est la fonction de la forme : | $ru^{r-1}$ | $ru^r$ | $u^r$ |
| 4 | Une primitive sur I de la fonction $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ est la fonction : | $\frac{u}{v^2}$ | $-\frac{u}{v}$ | $\frac{u}{v}$ |
| 5 | Une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u > 0$ sur I est la fonction de la forme : | $\frac{1}{\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}$ | $2\sqrt{u}$ |

**3-2** Détermine une primitive sur $]-\infty\,;0[$ de la fonction : $f : x \mapsto \frac{1-x^2}{x^2}$.

**3-3** $f$ est une fonction continue et F est une primitive de $f$ sur l'intervalle I.
Recopie et associe chaque fonction $f$ à sa primitive F.

| | |
|---|---|
| $f : x \mapsto 2(2x+3)^3$ • | • $F : x \mapsto (3x)^{\frac{1}{2}}$ |
| $f : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x}}$ • | • $F : x \mapsto \frac{(x^2-2)^3}{3} - \frac{1}{x^4}$ |
| $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ • | • $F : x \mapsto \frac{(2x+3)^4}{4}$ |
| $f : x \mapsto 2x(x^2-2)^2 + \frac{4}{x^5}$ • | • $F : x \mapsto \frac{-1}{x+1}$ |

## Exercice 1 Justifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction

On donne F et $f$ deux fonctions dérivables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ définies par :
$F(x) = \tan^3 x$, $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$.
Justifie que F est une primitive de $f$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

**Corrigé**

Justifions que F est une primitive de $f$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
F est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $F'(x) = 3 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} \times \tan^2 x$

$$F'(x) = 3 \times \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$F'(x) = \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = f(x)$$

donc F est une primitive de $f$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

**Méthode**

Pour justifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction $f$ :
- on rappelle que F est dérivable ;
- on calcule la dérivée de F ;
- on remarque que $F'(x) = f(x)$.

## Exercice 2 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction

Détermine les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $h$ définie par :
$h(x) = (6x - 2)(3x^2 - 2x + 1)^4$.

**Corrigé**

Déterminons les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $h$.
Posons $v$ et $u'$ les fonctions définies par :
$v(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ; $v'(x) = 6x - 2$ et $u(x) = \dfrac{x^5}{5}$
On constate que : $h = v' \times u' \circ v$
donc une primitive de $h$ sur $]0;+\infty[$ est $H = u \circ v$.
Soit $H : x \mapsto \dfrac{(3x^2 - 2x + 1)^5}{5}$.
Ainsi les primitives de $h$ sont sous la forme
$x \mapsto \dfrac{(3x^2 - 2x + 1)^5}{5} + k$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**Méthode**

Pour déterminer les primitives d'une fonction écrite sous la forme $v' \times u' \circ v$ :
- on identifie $u'$ et $v$ ;
- on calcule la dérivée de v et la primitive de $u$ ;
- on définit les primitives de la fonction sous la forme $u \circ v(x) + k$ avec $k$ un réel.

## Exercice 3 Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.

On donne sur $]-\infty;-1[$ la fonction $g$ définie par : $g(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$.

1. Détermine les nombres réels $a$, $b$ et $c$ pour que $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.
2. Détermine la primitive G sur $]-\infty;-1[$ de la fonction $g$ qui s'annule en 0.

**Corrigé**

1. Déterminons les nombres réels $a$, $b$ et $c$ pour que $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$.

Faisons la division euclidienne :

On a $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 \phantom{+2x+1} & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} \phantom{+1} & 2x - 1 \\ -x^2 - 2x \phantom{+1} & \\ \underline{x^2 + 2x + 1} & \\ 1 & \end{array}$$

Donc $g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ ;

Ainsi $a = 2$ ; $b = -1$ et $c = 1$.

2. Déterminons la primitive G sur $]-\infty ; -1[$ de la fonction g qui s'annule en 0.

On a $g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Les primitives de $g$ sont sous la forme

$x \mapsto x^2 - x + \frac{-1}{x+1} + k ; k \in \mathbb{R}$.

$G(0) = 0$ équivaut à $0^2 - 0 + \frac{-1}{0+1} + k = 0$.

$G(0) = 0$ équivaut à $k = 1$.

Ainsi $G(x) = x^2 - x + \frac{-1}{x+1} + 1$.

**Méthode**

Pour déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ pour que $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$ :

- on détermine les coefficients $a$, $b$ et $c$ soit par division euclidienne, soit par la détermination de coefficients indéterminée ;
- on détermine l'ensemble des primitives de $g$ ;
- on remplace $x$ par 0 et on résout l'équation $h(0) = 0$ pour déterminer la constante $k$.

## Résumé de cours

### 1 Primitive d'une fonction

#### 1.1. Définition de la primitive d'une fonction continue

**Définition** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de $f$ sur I, toute fonction F dérivable sur I et pour tout $x$ de I, $F'(x) = f(x)$.

**Propriété admise**

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

**Conséquence**

- Les fonctions polynômes admettent toutes des primitives sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles admettent des primitives sur chaque intervalle où elles sont définies.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

#### 1.2. Ensemble des primitives d'une fonction

**Propriété** Soit F est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $k$, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de $f$ sur I.
- Toute primitive de $f$ sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

#### 1.3. Unicité de la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné

**Propriété** $f$ est une fonction continue sur un intervalle I, $x_0$ un nombre réel de I et $y_0$ un nombre réel quelconque. Il existe une et une seule primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.

### 2 Primitives des fonctions de référence

| Fonction $f$ | Une primitive de $f$ | Sur l'intervalle I |
|---|---|---|
| $x \mapsto c\ (c \in \mathbb{R})$ | $x \mapsto cx$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^m\,;\ m \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x^r}\ [r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}]$ | $x \mapsto \dfrac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$ | $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x}$ | $]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto -\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x \mapsto \tan x$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + kr\,;\dfrac{\pi}{2} + kr\right[,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $x \mapsto -\text{cotan}\, x$ | $]k\pi\,;\pi + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$ |

**Remarque**

$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + kr\,;\dfrac{\pi}{2} + kr\right[,\ k \in \mathbb{Z}\,;\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$

Résumé de cours

## 3 Primitives et opérations sur les fonctions

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

| Fonction $f$ | Primitives |
|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v$ |
| $\lambda u'$ | $\lambda u$ |
| $u'v + uv'$ | $u \times v$ |
| $v' \times u' \circ v$ | $u \circ v$ |
| $u' \times u^n (n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $\dfrac{u'}{u^r}$ $(r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\})$ | $\dfrac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ |
| $u' \cos u$ | $\sin u$ |
| $u' \sin u$ | $-\cos u$ |

## Exercices de renforcement

**1** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.

**2** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 3x^4 + 2x^2$, $I = \mathbb{R}$.

**3** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{x}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**4** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 2x + \dfrac{3}{x^2}$, $I = ]-\infty\,;0[$.

**5** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = x + 2\sin x$, $I = \mathbb{R}$.

**6** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \cos x + 2\sin x$, $I = \mathbb{R}$.

**7** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \sin x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**8** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \sin x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**9** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 3x^4 + 9x^2 + \dfrac{5}{x^2}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**10** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 2 + 9x^2 - \dfrac{2}{x^2}, + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**11** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \sin x + x\cos x$, $I = \mathbb{R}$.

**12** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \cos x - x\sin x$, $I = \mathbb{R}$.

**13** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$, $I = \mathbb{R}$.

**14** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**15** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 2\sin x + (2x+1)\cos x$, $I = \mathbb{R}$.

**16** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**17** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = 3(3x+7)^5$, $I = \mathbb{R}$.

**18** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = x^2(x^3+2)^3$, $I = \mathbb{R}$.

**19** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$, $I = ]-2\,;0[$.

**20** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$, $I = ]-\infty\,;-\sqrt{3}[$.

**21** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2}{x^2}$, $I = ]-\infty\,;0[$.

**22** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$, $I = ]-\infty\,;0[$.

**23** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

**24** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, $I = \mathbb{R}$.

**25** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :
$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$.

**26** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \dfrac{1-2x}{(x^2-x+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

**27** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$, $I = ]-\infty\,;-2[$.

**28** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $I = ]-\infty\,;0[$.

**29** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $I = ]0\,;+\infty[$.

**30** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \sin(2x+\pi)$, $I = \mathbb{R}$.

**31** Détermine une primitive de la fonction suivante sur l'intervalle I considéré :

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $I = \mathbb{R}$.

**32** Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction $f$ définie par :

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3$ ; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2+2x-\sqrt{2}$ ; $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 6x^2\,(2x^3+7)^2$ ; $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = (x-1)(x+1)$ ; $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = (3x-2)^3$ ; $I = \mathbb{R}$.

**33** Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction $f$ définie par :

a) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{5}{(1-x)^2}$ ; $I = ]1\,;+\infty[$.

b) $f(x) = -5x^2 + \dfrac{4x^3+1}{(x^4+x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{(x^2+2x-\sqrt{2})}{\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2-\sqrt{2x}\right)^3}$ ; $I = ]3\,;+\infty[$.

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6x}{(3x^2-2)^4}$ ; $I = ]3\,;+\infty[$.

**34** Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction $f$ définie par :

a) $f(x) = 2\sqrt{2x-3}$ ; $I = [2\,;+\infty[$

b) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{\sqrt{1-3x}}$ ; $I = ]-\infty\,;-3[$

c) $f(x) = (2x-1)\sqrt{x^2-x}$ ; $I = ]3\,;+\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x-1}}$ ; $I = ]1\,;+\infty[$.

**35** Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction $f$ définie par :

a) $f(x) = 3\cos 3x + 2\sin(2x+1)$ ; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3\sin 3x \sin 2x - 2\cos 3x \cos 2x$ ; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ; $I = ]0\,;\pi[$

d) $f(x) = \dfrac{-5\sin 5x \sin 3x - 3\cos 3x \cos 5x}{\sin^2 3x}$ ;

$I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

e) $f(x) = \dfrac{2\sin^2 2x + 2\cos^2 2x}{\sin 2x}$ ; $I = \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$

**36** Dans chacun des cas suivants, détermine la primitive F sur l'intervalle I de la fonction $f$ telle que :

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$ et $F(1) = 0{,}3$ ; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} + x$ et $F(-1) = 1$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

c) $f(x)) = x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $F(1) = -\dfrac{1}{3}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \cos x - \sin x$ et $F(\pi) = \pi$ ; $I = ]0\,;+\infty[$.

**37** Dans chacun des cas suivants, détermine la primitive F de la fonction $f$ qui s'annule en 1 sur l'intervalle I :

a) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ; $I = ]-\infty\,;2[$

b) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2} + x$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

c) $f(x) = 3x^2\,(x^3+5) + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x + x\cos\dfrac{\pi}{2}x$ ; $I = \mathbb{R}$.

**38** Démontre que la fonction G définie par : $G(x) = 2x - \dfrac{1}{x+3}$ est une primitive de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2+12x+19}{(x+3)^2}$

**39** 1. Calcule la dérivée de la fonction $f$ définie par : $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$.
2. Déduis-en deux primitives de la fonction $g$ définie par : $g(x) = 9x^2 - 9$.

**40** Deux fonctions F et G sont définies sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $F(x) = \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$ et $G(x) = \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$.
Ces fonctions F et G sont-elles des primitives de la même fonction $f$ sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ ?
Justifie ta réponse.

**41** Détermine l'ensemble des primitives des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :
1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \cos x - \sin x$ ; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{4}x - 1$ ; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2$ ; $I = \mathbb{R}$

**42** Détermine l'ensemble des primitives des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :
1. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 1}}$ ; $I = ]1 ; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{4x}{(1 + 2x^2)^2}$ ; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^3$ ; $I = \mathbb{R}$
4. $f(t) = -\sin t \cos^3 t$, $I = \mathbb{R}$

**43** Détermine la primitive F de $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(3t - 3t - \frac{\pi}{6})$ telle que $F(0) = 2$.

**44** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui s'annule en 2.
$f(x) = 4x - 7$, $I = \mathbb{R}$

**45** Soit $g$ la fonction définie sur $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^2 + 12x - 1}{(x + 2)^2}$.
1. Vérifie que pour tout $x > -2$, $g(x) = 3 - \frac{13}{(x + 2)^2}$.
2. Déduis-en la primitive de $g$ qui vaut 4 pour $x = 1$.

**46** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$.
$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $I = ]0 ; \pi[$.

**47** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui vérifie la condition indiquée
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$, $I = \mathbb{R}$ et $F(2) = 3$

**48** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui prend la valeur 1 en 0.
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$, $I = ]0; +\infty[$.

**49** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui prend la valeur 1 en 0.
$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

**50** Détermine la fonction F, primitive de $f$ sur l'intervalle I, qui vérifie la condition indiquée
$f(x) = 3x(x^2 + 1)^4$, $I = \mathbb{R}$ et $F(\sqrt{2}) = 1$

**51** Soit la fonction $f$, définie par $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$.
Détermine sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f$ qui s'annule en $\frac{2\pi}{3}$.

## Exercices d'approfondissement

**52** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x + 3}{(x - 1)^3}$.
1. Détermine deux nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x \neq 1$ : $f(x) = \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{(x - 1)^3}$.
2. Déduis-en une primitive de $f$ sur $]-\infty ; 1[$.
3. Déduis-en la primitive de $f$ sur $]-\infty ; 1[$ qui s'annule en $-4$.

**53** Dans chacun des cas suivants F et $f$ sont deux fonctions dérivables sur I.
Justifie que F est une primitive sur I de $f$.
a) $F(x) = \frac{2}{15}(3x + 1)^2\sqrt{3x + 1} + 1$;
$f(x) = (3x + 1)\sqrt{3x + 1}$ ; $I = ]0 ; +\infty[$.
b) $F(x) = \frac{(x + 1)^2 + 2}{(x + 1)^2}$ ; $f(x) = -\frac{4}{(x + 1)^3}$ ;
$I = ]0 ; +\infty[$.
c) $F(x) = \frac{\tan^2 x}{2}$ ; $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ; $I = ]0 ; +\frac{\pi}{2}[$.
d) $F(x) = \left(\frac{1 + \cos^2 x}{2}\right)^2$ ; $f(x) = -4\sin x\cos^3 x$ ;
$I = ]-\infty ; -3[$.

**54** Soit la fonction dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et définie par : $f(x) = \frac{4x^3 - 8x^2 + 4x + 2}{(x - 1)^2}$.
a) Détermine deux nombres réels $a$ et $b$ tels que pour tout $x \neq 1$ ; $f(x) = ax + \frac{b}{(x - 1)^2}$.
b) Détermine la primitive F de $f$ qui s'annule en 0.

**55** Soit $f(x) = x\sqrt{1-2x}$.

a) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.

b) Justifie que la fonction F définie par $F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}\right)\sqrt{1-2x}$ est une primitive de $f$ sur son ensemble de définition.

c) Déduis-en la primitive de $f$ qui prend la valeur 1 en 0.

**56** Soit la fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{4-x}{(x+2)^4}$.

a) Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.

b) Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{a}{(x+2)^3} + \frac{b}{(x+2)^4}$.

c) Déduis-en la primitive F de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ qui s'annule en $-3$.

**57** a) Démontre que pour tout nombre réel $x$, $\cos^5 x = \cos x - 2\sin^2 x\cos x + \sin^4 x\cos x$.

b) Détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g$ définie par : $g(x) = \cos^5 x$.

c) Déduis en la primitive de $g$ qui prend la valeur $-\frac{1}{5}$ en $-\frac{\pi}{2}$.

## Situation complexe

**58** Une entreprise produit et commercialise des ordinateurs portables. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 ordinateurs.
On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que la variation du bénéfice journalier B exprimé en milliers de francs CFA, est déterminée à l'aide de la fonction $b$ définie par : $b(x) = -4x + 60$.
L'entreprise souhaite déterminer le bénéfice maximal sachant que l'entreprise ne fait pas de bénéfice et ne perd pas pour 30 ordinateurs produits et vendus.

## Coup de Pouce

**55** Il suffit de dériver $F(x)$ et on a $F'(x) = f(x)$

c) $F(x) + c$ et trouver $c$ tel que $F(0) = 1$.

**56** Après les calculs, on a :

b) $a = 1$ et $b = -6$

c) Déterminer une primitive sur $D_f$ de $\frac{1}{(x+2)^3}$ et une primitive sur $D_f$ de $\frac{6}{(x+2)^4}$ puis l'ensemble de primitives de F de $f$.

Enfin poser : $F(-3) = 0$ pour déterminer la constante.

**57** a) Utiliser $\cos^5 x = \cos x \cos^4 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

b) Utiliser la consigne a) pour trouver les primitives de $g(x)$.

**58** $B'(x) = b(x)$ et $B(x) = -2x^2 + 60x + k$, $k \in \mathbb{R}$ trouver $k$ tel que $B(30) = 0$.

Leçon 4

# FONCTIONS LOGARITHMES

John NEPER ou NAPIER (1550 - 1617), écossais :
Il découvre les logarithmes et en livre une table. Les logarithmes permettent de remplacer les multiplications par des additions et les divisions par des soustractions, ce qui simplifie beaucoup de calculs. Le logarithme de base e est dit népérien en son honneur. Il propose un système de réglettes facilitant les multiplications. Cette fonction est utile dans les études de séisme et tremblement de terre.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

En 2019, une entreprise a fabriqué un million de bicyclettes pour la consommation intérieure d'un pays et 250000 pour l'exportation. Depuis le 1er janvier 2020, les augmentations annuelles de demande sont en moyenne de 11% pour la consommation intérieure et de 40% pour l'exportation. Le responsable de cette entreprise veut savoir au bout de combien d'années les exportations dépasseront la consommation intérieure. Tu es sollicité à aider le responsable de l'entreprise.
Avec les élèves de ta classe, vous décidez de rechercher des solutions.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Fonction logarithme népérien

*Connaître :*

- la définition de la fonction logarithme népérien
- les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien
- les limites de référence de la fonction logarithme népérien.
- la dérivée de la fonction logarithme népérien
- le sens de variation de la fonction logarithme népérien
- l'allure de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

*Noter :*

la fonction logarithme népérien

### 2 Équations – Inéquations

*Résoudre :*

- des équations et inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien
- une équation de la forme : $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}^*_+$, $n \in \mathbb{N}^*$)
- une inéquation d'inconnue $n$ de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ ($q \in \mathbb{R}^*_+$, $a \in \mathbb{R}^*_+$, $n \in \mathbb{N}^*$)

### 3 Dérivées et primitives

*Connaître :*

- Les dérivées des fonctions du type $\ln \circ u$ ou $\ln \circ |u|$
- les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$

*Déterminer :*

- Les dérivées des fonctions du type $\ln \circ u$ ou $\ln \circ |u|$
- les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$

### 4 Fonctions logarithmes de base $a$

*Connaître :*

- la définition d'une fonction logarithme de base $a$ ($a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$)
- la définition de la fonction logarithme décimal
- les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

*Noter :*

- la fonction logarithme de base $a$ ($a \in \mathbb{R}^*_+$)
- la fonction logarithme décimal

### 5 Étude de fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

*Déterminer :*

- l'ensemble de définition d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien
- la fonction dérivée d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

*Étudier :*

les variations d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien

*Représenter :*

graphiquement des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Fonction logarithme népérien

**1.1. Définition**

$n$ est un entier naturel non nul.

1. On suppose que : $n \neq 1$.

a) Détermine la primitive V de la fonction $v : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

b) Détermine V lorsque $n = 2$ et lorsque $n = 3$.

2. On suppose que $n = 1$.

Soit $f$ la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

a) Justifie que la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

b) Combien existe-t-il de primitives de $u$ qui prennent la valeur 0 en 1.

**Synthèse**

La primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui prend la valeur 0 en 1 est la fonction **logarithme népérien notée ln.**

**Exercice de fixation**

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. La fonction ln est définie en −3.
2. La fonction ln est définie en 0.
3. La fonction ln est définie en 1.
4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de ln.
5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la dérivée de ln.
6. La fonction ln est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui prend la valeur 1 en 0.

### 1.2. Conséquences de la définition de la fonction ln

1. Donne l'ensemble de définition de la fonction ln.
2. Donne la dérivée de la fonction ln.
3. Donne ln(1).

**Synthèse**

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- $\forall x \in\, ]0\,;+\infty[$, $\ln' x = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

**Exercice de fixation**

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.
Écris le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| | | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | L'ensemble de définition de la fonction ln est : | $\mathbb{R}$ | $]0\,;+\infty[$ | $\mathbb{R}^*$ | $]-\infty\,;0[$ |
| 2 | $\forall x \in\, ]0\,;+\infty[$, $\ln' x =$ | $x$ | 1 | 0 | $\frac{1}{x}$ |
| 3 | $\ln(1) =$ | 1 | −1 | 0 | n'existe pas |

### 1.3. Propriétés algébriques

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs.

1. Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = \ln(ax)$.

a) Démontre que : $\forall x \in\, ]0\,;+\infty[$, $h'(x) = \ln'(x)$.

b) Déduis-en une relation entre $h(x)$ et $\ln x$ pour tout $x \in\, ]0\,;+\infty[$.

c) Calcule $h(1)$ puis compare $\ln(ax)$ et $\ln(a) + \ln(x)$.

d) Calcule $\ln(ab)$.

2. a) En utilisant la relation précédente et l'égalité $\frac{a}{b} \times b = a$, exprime $\ln \frac{a}{b}$ en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

b) Déduis-en $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ en fonction de $\ln b$.

3. a) À l'aide d'une démonstration par récurrence, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a^n) = n\ln a$.

b) Pour tout élément $r$ de $\mathbb{Q}$, exprime $\ln(a^r)$ en fonction de $r$ et $\ln a$.

**Synthèse**

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(a^n) = n\ln a$.

## Exercices de fixation

**1.3.1** Justifie que $\ln(4+\sqrt{15}) + \ln(4-\sqrt{15}) = 0$.

**1.3.2** Écris plus simplement :

$A = \ln 6 + \ln \frac{1}{3}$

$B = \ln(2x) + \ln 3 - \ln 6$

$C = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 - \ln 10$

$D = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

**1.3.3** Écris en fonction de ln3 :

$A = \ln 27$ ; $B = \ln \frac{1}{81}$ ; $\ln = \frac{1}{3}\ln 729$.

**1.3.4** Écris en fonction de ln2 et ln5 :

$A = \ln 50$ ; $B = \ln \frac{16}{25}$ ; $C = \ln 250$.

### 1.4. Variations, représentation graphique de ln et limites de référence

#### A. Limites de référence

1. Limite en $+\infty$

a) Justifie que si la fonction ln est majorée alors elle admet une limite finie L lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) En admettant que $\lim_{x \to +\infty} \ln(2x) = L$ et sachant que $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, justifie que $L = L + \ln 2$ et déduis-en que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

2. Limite en 0

a) Justifie que : pour $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ln.

d) Justifie que ln est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

- Notation : L'antécédent de 1 par ln est noté $e$.

3. On démontre et on admet que pour tout $x \in ]1\,;+\infty[$, $0 < \ln x < \sqrt{x}$.

a) Justifie que : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in ]1\,;+\infty[$.

b) Déduis-en que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Interprète graphiquement ce résultat sachant que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

c) Utilise ce résultat pour calculer $\lim_{x \to 0} x\ln x$ (Tu pourras poser : $X = \frac{1}{x}$).

4. a) En utilisant la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point, calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

b) En utilisant le résultat précédent, calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
(Tu pourras poser $X = 1 + x$.)

**Synthèse**

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ ; $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ; $\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$ ; $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ; $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

B. Variation et représentation graphique

1. Étudie le sens de variation de la fonction ln et dresse son tableau de variation.

2. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs.
Compare ln$a$ et ln$b$ lorsque $a = b$ et lorsque $a < b$.

3. Trace la courbe représentative de la fonction ln.

**Exercice de fixation**

Parmi les courbes suivantes, détermine celle qui est la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

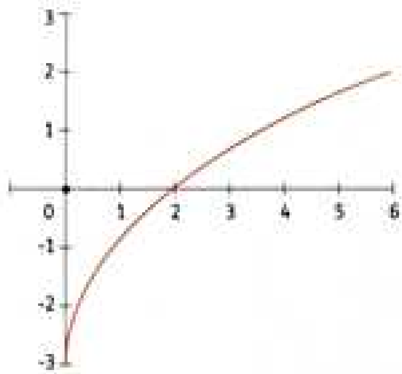



Figure 1

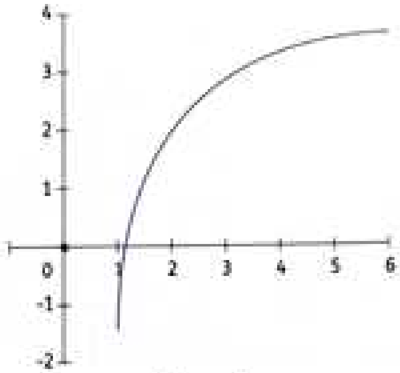



Figure 2

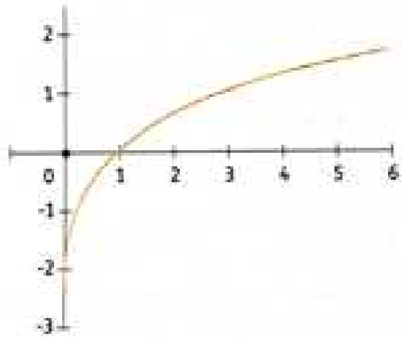



Figure 3

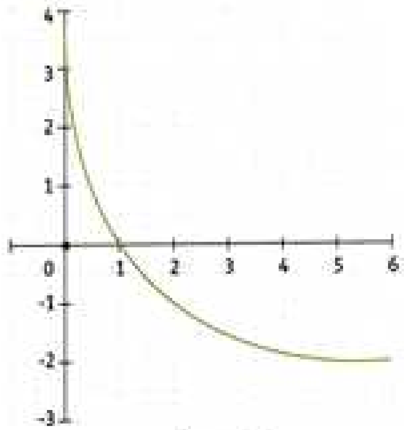



Figure 4

### 1.5. Ensemble de définition de la composée d'une fonction numérique et de la fonction logarithme népérien.

1. À quelle condition la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ existe-t-elle ?
2. $u$ étant une fonction numérique, à quelle condition la fonction $g : x \mapsto \ln(u(x))$ existe-t-elle ?
3. $u$ étant une fonction numérique, à quelle condition la fonction $h : x \mapsto \ln|u(x)|$ existe-t-elle ?

**Synthèse**

$u$ est une fonction numérique.

- $f = \ln \circ u$
  $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$.

- $f = \ln \circ |u|$
  $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

## Exercices de fixation

**1-5-1** Choisis la bonne réponse parmi les ensembles de définitions donnés.

| | Fonction | Ensemble de définition | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = \ln(1 - x)$ | $]0\,;+\infty[$ | $]0\,;+\infty[$ | $]-\infty\,;1[$ |
| 2 | $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ | $]0\,;+\infty[$ | $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$ | $]1\,;+\infty[$ |
| 3 | $f(x) = \ln(x - 1)$ | $]1\,;+\infty[$ | $]0\,;+\infty[$ | $]e\,;+\infty[$ |

**1-5-2** Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 1 - \ln x$ ; 2. $f(x) = \dfrac{2\ln(-x) + 3}{15}$ ; 3. $f(x) = \ln x + \ln(-x + 1)$.

## Activité 2 Équations - Inéquations

**Équations du type, (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$**

a) À quelle condition l'équation (E) admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$ ?
b) Soit V l'ensemble de validité de (E). Complète la phrase suivante : $x \in V \Leftrightarrow$ ........> 0 et $v(x)$.........
c) Complète l'équivalence suivante $\forall x \in V$, $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) =$ ..........

**Inéquations du type, (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$**

a) À quelle condition l'inéquation (I) admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$ ?
b) Soit V l'ensemble de validité de (I). Complète la phrase suivante : $x \in V \Leftrightarrow$ .......... > 0 et $v(x)$............
c) Complète l'inégalité suivante $\forall x \in V$, $\ln(u(x)) < \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) <$ ..........

**Synthèse**

**Équations du type,** (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$.

- On détermine l'ensemble de validité V de l'équation (E) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

**Inéquations du type,** (E) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$.

- On détermine l'ensemble de validité V de l'inéquation (I) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
- On utilise la propriété $a > 0, b > 0, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ pour résoudre les équations.
- On utilise la propriété $a > 0, b > 0, \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ pour résoudre les inéquations.

## Exercices de fixation

**2-1** Choisis la bonne réponse parmi celles proposées.

| | Équations | Solutions | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\ln x - 1 = 0$ | 0 | 1 | e |
| 2 | $\ln(-x + 1) = 0$ | 1 | 0 | −1 |
| 3 | $\ln(x + 3) = 0$ | −3 | −2 | −4 |

**2-2** Résous les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1. $\ln(x + 1) = \ln(-x + 2)$ ; 2. $\ln(x - 2) = 1$.

**2-3** Choisis la bonne réponse parmi celles proposées.

| | Inéquations | Solutions | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\ln(-x) > 0$ | $]1\,;+\infty[$ | $]0\,;1[$ | $]-\infty;-1[$ |
| 2 | $\ln(-x + 1) < 0$ | $]0\,;+\infty[$ | $]0\,;1[$ | $]1\,;+\infty[$ |
| 3 | $\ln(x - 2) < \ln x$ | $]1\,;+\infty[$ | $]2\,;+\infty[$ | $\emptyset$ |

**2-4** Résous les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.
1. $\ln x < 0$ ;
2. $\ln(x) > \ln(x + 1)$ ;
3. $\ln(x - 3) < 1$.

## Activité 3 Dérivées et primitives

1. $u$ et $v$ étant deux fonctions numériques, complète par l'expression qui convient : $(v \circ u)' = \ldots \times v' \circ \ldots$.
2. Déduis-en la dérivée de la fonction $\ln \circ u$.
3. Justifie que : $\ln \circ |u| = \frac{1}{2}\ln(u^2)$.
4. Déduis-en que la dérivée de la fonction $\ln \circ |u|$ est $\frac{u'}{u}$.
5. Quelles sont les primitives des fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$ ?

**Synthèse**

**Propriétés :**

- Si $u$ est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K alors $\ln(u)$ est dérivable sur K et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.
- Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur K et $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.
- $u$ étant une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, la fonction du type $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitives les fonctions du type $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

### Exercices de fixation

**3-1** Choisis la bonne réponse parmi celles proposées.

| | Fonction | Dérivée | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\ln(-2x)$ | $-2$ | $\frac{1}{-2x}$ | $\frac{1}{x}$ |
| 2 | $\ln(-x+1)$ | $\frac{1}{-x+1}$ | $\frac{1}{x-1}$ | $\frac{-1}{-x-1}$ |
| 3 | $\ln(2x+3)$ | $\frac{1}{2x+3}$ | $\frac{2}{2x+3}$ | $\frac{-2}{2x+3}$ |

**3-2** Réponds par vrai (V) ou par faux (F) aux affirmations suivantes.

1. La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(5x)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. La dérivée de la fonction $x \mapsto 6\ln(-3x)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
3. La dérivée de la fonction $x \mapsto -2\ln(-x+1)$ est $x \mapsto \frac{-2}{-x+1}$.

**3-3** Réponds par vrai (V) ou par faux (F) aux affirmations suivantes.

1. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(4x) - 2021$.
2. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(x+1) + 12$.
3. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{9x+21}$ est $x \mapsto \ln(3x-7) + 15e$.

## Activité 4 Fonctions logarithmes de base $a$

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$.
   a) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Dresse le tableau de variation de $f$.
   c) Calcule $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.
   d) Représente graphiquement $f$.
2. Soit la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
   a) Calcule $\lim_{x \to 0} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   b) Dresse le tableau de variation de $g$.
   c) Calcule $g(0{,}1)$, $g(1)$, $g(10)$ et $g(20)$.
   d) Représente graphiquement $g$.

Synthèse

**Propriétés :**

- La fonction $f$ est notée $\log_2$ et est appelée fonction logarithme de base 2.
$\forall x \in ]0\,;+\infty[,\ \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$.
- La fonction $g$ est notée log et est appelée fonction logarithme décimal.
$\forall x \in ]0\,;+\infty[,\ \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
- $a$ est un nombre réel strictement positif différent de 1.
La fonction $\log_a$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ est fonction logarithme de base $a$.

## Exercices de fixation

**4-1** Traduis avec des expressions mathématiques les phrases suivantes :

1. Le logarithme en base 2 du nombre 8 est 3 : ..............................
2. Le logarithme en base 7 du nombre 49 est 2 : ..............................

**4-2** Calcule :

1. $\log_3(243) =$ ;
2. $\log_8(512) =$ ;
3. $\log_5(15625) =$ .

## Activité 5 Étude de fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.

1. a) Calcule les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
   b) Donne une interprétation graphique de chacun des résultats précédents.
2. a) Démontre que : $\forall \in ]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.
   b) Étudie les variations de $f$ et dresse son tableau de variation.
3. On note A le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (OI).
   a) Détermine les coordonnées de A.
   b) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) en A.
4. Construis (T) et (C).

Synthèse

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction ln, on peut suivre les étapes de l'étude d'une fonction dans le cas général.

## Exercices de fixation

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Calcule la limite de $g$ en $+\infty$.
   b) Calcule la limite de $g$ à droite en 0 et donnes-en une interprétation graphique.
2. a) Démontre que : $\forall \in ]0\,;+\infty[,\ g'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$.
   b) Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.
3. Résous l'équation $g(x) = 0$.
4. Construis (C).

## Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant ln

Détermine l'ensemble de définition de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2 - x)$.

**Corrigé**

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(2 - x)$.

$x \Leftrightarrow D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2 - x > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x < 2$ donc $D_f = ]-\infty ; 2[$

**Méthode**

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.

## Exercice 2 Résoudre des équations et des inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) (E) : $\ln(1 - x^2) = \ln(2x - 1)$ ; b) $(I_1)$ : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$ ; c) $(I_2)$ : $\ln\left(\frac{x+1}{2x+5}\right) > 0$.

**Corrigé**

a) (E) : $\ln(1 - x^2) = \ln(2x - 1)$. Soit V l'ensemble de validité de (E).

- $x \in V \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$ et $2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) > 0$ et $x > \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow x \in ]-1 ; 1[$ et $x \in ]\frac{1}{2} ; +\infty[$

donc $V = ]\frac{1}{2} ; 1[$.

$\ln(1 - x^2) = \ln(2x - 1) \Leftrightarrow 1 - x^2 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$.

$\Delta = 12$ donc $x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

et $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$.

- $x_1 \in V$ et $x_2 \notin V$

donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1 + \sqrt{3}\}$

b) $(I_1)$ : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$, soit V l'ensemble de validité de $(I_1)$

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$ donc $V = ]0 ; +\infty[$.

On pose $X = \ln x$ et l'inéquation $(I_1)$ devient $X^2 - X - 2 < 0 \Leftrightarrow (X + 1)(X - 2) < 0$.

$X \in ]-\infty ; -1[ \cup ]2 ; +\infty[$ donc

$x \in ]-\infty ; e^{-1}[ \cup ]e^2 ; +\infty[ = S$

d'où $S_{\mathbb{R}} = S \cap V = ]-\infty ; e^{-1}[ \cup ]e^2 ; +\infty[ \cap ]0 ; +\infty[$

ainsi $S_{\mathbb{R}} = ]0 ; \frac{1}{e}[ \cup ]e^2 ; +\infty[$.

Résolvons l'inéquation $(I_2)\ln\left(\frac{x+1}{2x+5}\right) > 0$,

soit V l'ensemble de validité de $(I_2)$.

- $x \in V \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty ; -\frac{5}{2}[ \cup ]-1 ; +\infty[$

d'où $V = ]-\infty ; -\frac{5}{2}[ \cup ]-1 ; +\infty[$.

- $\ln\left(\frac{x+1}{2x+5}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2x+5}\right) > \ln 1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{-x-4}{2x+5} > 0$

$\Leftrightarrow x \in ]-4 ; -\frac{5}{2}[ = S$.

- $S_{\mathbb{R}} = S \cap V = ]-4 ; -\frac{5}{2}[ \cap ]-\infty ; -\frac{5}{2}[ \cup ]-1 ; +\infty[$

$= ]-4 ; -\frac{5}{2}[$.

**Méthode**

Utiliser la méthode :

- $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ ;
- Il suffit de poser $X = \ln(x)$.

## Exercice 3 Déterminer la dérivée d'une fonction faisant intervenir ln

Détermine les fonctions dérivées des fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$ et $g(x) = \ln|3x^2 - 2x + 7|$.

**Corrigé**

- $\forall x \in \forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)'}{\dfrac{2x-1}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{(x+1)(2x-1)}$$

**Méthode**

Utiliser la formule $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{(3x^2 - 2x + 7)'}{3x^2 - 2x + 7}$

$$= \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 7}$$

## Exercice 4 Déterminer une primitive

1. Détermine les primitives F de la fonction $f$ telle que : $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{3}\right[$.
2. Déduis-en la primitive G de $f$ qui prend la valeur $-\dfrac{\ln 2}{3}$ en 1.

**Corrigé**

1. En posant $u(x) = 3x - 5$ on a $u'(x) = 3$.
Réécrivons $f(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$.
On obtient : $f(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc
$F(x) = \dfrac{2}{3}\ln|3x - 5| + C$ soit $F(x) = \dfrac{2}{3}\ln(5 - 3x) + C$
sur $]-\infty ; \dfrac{5}{3}[$.

**Méthode**

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln \circ |u|$.

2. $G(1) = \dfrac{2}{3}\ln(5-3) + C = -\dfrac{\ln 2}{3} \Leftrightarrow C = -\dfrac{\ln 2}{3} - \dfrac{2\ln 2}{3}$
$= -\ln 2$ donc $G(x) = \dfrac{2}{3}\ln(5 - 3x) - \ln 2$.

## Exercice 5 Étudier une fonction faisant intervenir ln

On considère la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Calcule les limites de $f$ en 0, en $+\infty$ et en $e$, interprète graphiquement les deux derniers résultats.
3. a) On note $g$ le prolongement par continuité de $f$ en 0. Définis $g$.
   b) Étudie la dérivabilité de $g$ en 0. Interprète graphiquement le résultat de la limite calculée.
4. Étudie les variations de $f$ et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que la restriction $h$ de $f$ à $]0 ; e[$ est une bijection sur un intervalle K que tu détermineras.
6. a) Résous l'équation $h(x) = 3$. Justifie que $h^{-1}$ est dérivable en 3.
   b) Déduis-en la valeur exacte de $(h^{-1})'(3)$.
7. Définis l'expression explicite de la fonction $h^{-1}$.
8. Construis la courbe de $f$ et celle de $h^{-1}$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

**Corrigé**

1. Ensemble de définition de $f$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \in ]0\,;+\infty[$ et $x \neq e$ donc $D_f = ]0\,;e[ \cup ]e\,;+\infty[$.

2. Calcul des limites de $f$ en 0, en $+\infty$ et en $e$.

- Limite de $f$ en 0

En posant $X = \ln x$, quand $x \to 0$, $X \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to-\infty} \frac{1+X}{1-X} = \lim_{X\to-\infty} \frac{X}{-X} = -1.$$

**Interprétation :** $f$ n'est pas définie en 0 mais elle admet une limite finie en 0 donc on peut faire un prolongement par continuité à droite en 0.

- Limite de $f$ en $+\infty$.

En posant $X = \ln x$, quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1+X}{1-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{-X} = -1.$$

**Interprétation :** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

- Limites de $f$ en $e$

$$\lim_{\substack{x\to e\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to e\\>}} (1+\ln x) \times \frac{1}{1-\ln x} = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to e}(1+\ln x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\>}} \dfrac{1}{1-\ln x} = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to e\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to e\\<}} (1+\ln x) \times \frac{1}{1-\ln x} = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to e}(1+\ln x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\<}} \dfrac{1}{1-\ln x} = +\infty \end{cases}$

**Interprétation :** On a $\lim\limits_{\substack{x\to e\\<}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = e$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$.

3. a) $g$ le prolongement par continuité de $f$ en 0 est définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

b) Dérivabilité de $g$ en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\frac{1+\ln x}{1-\ln x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x - x\ln x} = +\infty$$

car $\forall x \in ]0, e[$, $x(1-\ln(x)) > 0$.

Donc $g$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

4. $f$ est dérivable sur $]0, e[$ et sur $]e, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}.$$

**Méthode**

- Pour calculer la limite en $a$ de $f(x) = \dfrac{P(\ln(x))}{Q(\ln(x))}$ où P et Q sont des polynômes, on peut faire un changement de variable en posant $X = \ln x$.
- On peut aussi mettre $\ln x$ en facteur.

$\forall x \in ]0, e[\cup] e, +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]0, e[$ et sur $]e, +\infty[$.

**Tableau de variation**

| $x$ | 0 | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

5. Sur $]0, e[$, $f$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection $h$ de $]0, e[$ dans $]-1, +\infty[ = K$.

6. a) Résolvons $h(x) = 3$.

$$h(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

$$h'(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8\sqrt{e}}{e} \text{ et } h'(\sqrt{e}) \neq 0$$

donc $h^{-1}$ est dérivable en 3.

b) $(h^{-1})'(3) = \dfrac{1}{h'[h^{-1}(3)]} = \dfrac{1}{h'(\sqrt{e})} = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

7. Déterminons l'expression explicite de la fonction $h^{-1}$ : On résout l'équation $h(x) = y$.

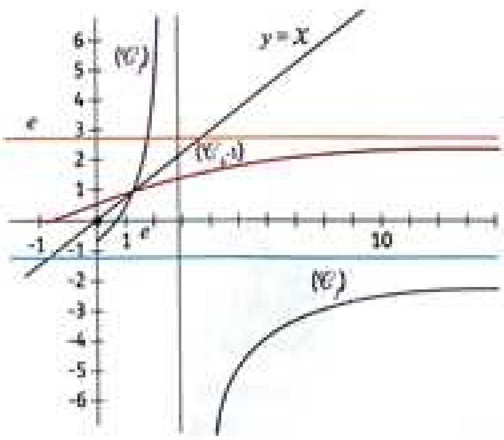
$h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x} = y \Leftrightarrow 1 + \ln x = y - y\ln x \Leftrightarrow$

$\ln x\,(1+y) = y - 1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{y+1}}$

donc $h^{-1} : ]-1, +\infty[ \to ]0, e[$.

$\qquad x \mapsto e^{\frac{x-1}{x+1}}$

8) Courbes représentatives de $f$ et de $h^{-1}$



## Exercice 6 Étudier une fonction faisant intervenir ln

**Partie A**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 4\ln x + 6$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Étudie les variations de $g$ puis dresse son tableau de variation.

3. a) Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0, +\infty[$.

b) Justifie que $\alpha \in ]1{,}8\,;\,1{,}9[$ et donne un encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

c) Justifie que $\forall x \in ]0\,;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a) Justifie que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

b) Justifie que la droite (D) et $(\mathscr{C}_f)$ se coupent au point $E\left(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3\right)$.

c) Étudie les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.

3. a) Justifie que : $\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

b) Déduis-en le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variation.

4. Détermine les coordonnées du point A de $(\mathscr{C}_f)$ tels que $(\mathscr{C}_f)$ admet en A une tangente (T) parallèle à (D).

5. Trace (D), $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé (O, I, J) avec OI = 2 cm.

Données : On prendra : $\alpha \approx 1{,}8$ ; $e \approx 2{,}7$ et $\sqrt{e} \approx 1{,}6$.

**Méthode**

B-2-c) Étudier le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$

**Corrigé**

**Partie A**

1. Calcul des limites de $g$ en 0 en et $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x^2 - 4\ln x + 6) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} (-x^2 + 6) = 6$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x^2 - 4\ln x + 6) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to +\infty} -4\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^2 + 6) = -\infty$.

2. $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = -2x - \frac{4}{x}$

$\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $g'(x) < 0$ donc $g$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variation de $g$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

3. a) Sur $]0\,;+\infty[$, $g$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0\,;+\infty[$.

b) on a : $\left.\begin{array}{l} g(1{,}8) = 0{,}40885 \\ g(1{,}9) = -0{,}17741 \end{array}\right\}$

$g(1{,}8) \times g(1{,}9) < 0$ donc $\alpha \in ]1{,}8\,;1{,}9[$.

La méthode par balayage, nous donne un encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

| $x$ | 1,8 | 1,81 | 1,82 | 1,83 | 1,84 | 1,85 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | + | + | + | + | + | + |

| 1,86 | 1,87 | 1,88 | 1,89 | 1,9 |
|---|---|---|---|---|
| + | − | − | − | − |

Donc $1{,}86 < \alpha < 1{,}87$ à $10^{-2}$ près.

c) Déterminons les signes de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\boxed{0}$ | ↘ | $+\infty$ |

$-\ \forall x \in ]0\,;\alpha[$, on a $x < \alpha$ et $g$ est strictement décroissante donc $g(x) > g(\alpha)$, or $g(\alpha) = 0$ d'où $\forall x \in ]0\,;\alpha[$ $g(x) > 0$.

$-\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$, on a $x > \alpha$ et $g$ est strictement décroissante donc $g(x) < g(\alpha)$, or $g(\alpha) = 0$ d'où $\forall x \in ]\alpha\,;+\infty[$ $g(x) < 0$.

**Partie B**

1. Calcul des limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}(2\ln x - 1)\right) = -\infty$ car

$\lim\limits_{x\to 0} (2\ln x - 1) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x + 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+3+\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x+3=-\infty$.

2. a) Justifions que la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

b) Résolvons l'équation : $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$.

$-\frac{1}{2}x+3+\frac{2\ln x-1}{x}=-\frac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow 2\ln x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e})=-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3$ donc (D) et ($\mathscr{C}$) se coupent au point E$(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3)$.

c) Étudions les positions relatives de (D) et ($\mathscr{C}$).

On cherche le signe de $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$ c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$.

Comme $\forall x\in\,]0\,;+\infty[$, $x>0$.

Le signe de $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$ s'obtient en résolvant l'inéquation : $2\ln x-1>0$.

$2\ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$, on en déduit le tableau des signes suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

- $\forall x\in\,]0\,;\sqrt{e}\,[$ on a $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)<0$ donc la courbe est au-dessous de (D).
- $\forall x\in\,]\sqrt{e}\,;+\infty[$ on a $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)>0$ donc la courbe est au-dessus de (D).

($\mathscr{C}$) et (D) se coupent au point E$(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3)$.

3. a) Justifions que $\forall x\in\,]0\,;+\infty[$, $f(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

$f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-2\ln x+1}{x^2}=\frac{-x^2-4\ln x+6}{2x^2}$.

or $g(x)=-x^2-4\ln x+6$ donc $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

b) Déduisons le sens de variation de $f$ puis son tableau de variation.

$\forall x\in\,]0\,;+\infty[$, $2x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Sens de Variation de $f$ :

- $\forall x\in\,]0\,;\alpha[$ $f'(x)>0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$.
- $\forall x\in\,]\alpha\,;+\infty[$ $f'(x)<0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

4. Déterminons les coordonnées du point A de ($\mathscr{C}$) tels que ($\mathscr{C}$) admet en A une tangente (T) parallèle à (D).

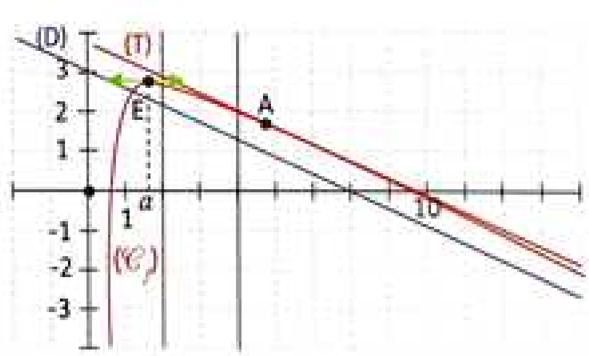
Soit A$(a, f(a))$ donc la tangente (T) :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ et (D) : $y=-\frac{1}{2}x+3$.

(T) // (D) $\Leftrightarrow f'(a)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-a^2-4\ln a+6}{2a^2}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4\ln a=-6 \Leftrightarrow a=e^{\frac{3}{2}}$ donc A$\left(e^{\frac{3}{2}}\,;f(e^{\frac{3}{2}})\right)$.

4. Traçons (D), ($\mathscr{C}$) et (T) dans un repère orthonormé ( O, I, J).



# 1 Fonction logarithme népérien

## 1.1. Définition

**Définition** La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

## 1.2. Conséquences de la définition de la fonction ln

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

## 1.3. Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs et $r$ un nombre réel, on a :

**Propriété fondamentale**

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

**Conséquences**

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

**En particulier**

- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

## 1.4. Étude et représentation graphique

**a) Limites de référence**

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

**b) Variation et représentation graphique**

<u>Sens de variation</u>

$\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

**Propriété** Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

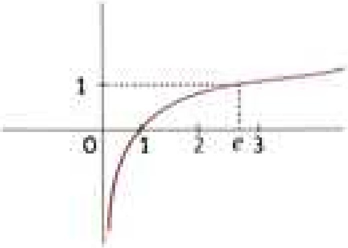
<u>Remarque</u>

La fonction ln est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'antécédent de 1 est noté $e$.
Ainsi $\ln(e) = 1$, on a : $e \simeq 2{,}7182$.
$\forall m \in \mathbb{R}, \forall x \in ]0\,;+\infty[\,;\ \ln(x) = m \Leftrightarrow x = e^m$.

**Tableau de variation**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | + | |
| $\ln(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**Représentation graphique**




### 1.5. Ensemble de définition de la composée d'une fonction numérique et de la fonction logarithme népérien

Soit $u$ une fonction numérique.

- On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$ telle que : $f = \ln\circ u$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$.

- On note $\mathscr{D}_g$ l'ensemble de définition de la fonction $g$ telle que : $g = \ln\circ|u|$.

$x \in D_g \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

## 2 Équations - Inéquations

**Équations du type,** (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

Pour résoudre l'équation (E) :

On détermine l'ensemble de validité V de l'équation (E) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Puis on utilise l'équation équivalente : (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

**Inéquations du type,** (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Pour résoudre l'équation (I) :

On détermine l'ensemble de validité V de l'inéquation (I) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Puis on utilise l'inéquation équivalente : (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

## 3 Dérivées et primitives

### Dérivées

**Propriétés**

- Si $u$ est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors $\ln\circ u$ est dérivable sur K et $(\ln\circ u)' = \frac{u'}{u}$.
- Si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln\circ|u|$ est dérivable sur K et $(\ln\circ|u|)' = \frac{u'}{u}$.

### Primitive

**Propriété**

$u$ étant une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, la fonction du type $\frac{u'}{u}$ admet pour primitives les fonctions du type $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

## Résumé de cours

### 4 Fonctions logarithmes de base $a$

#### 4.1 Définition

**Définition** On appelle fonction logarithme de base $a$, $a \in ]0\,;+\infty[ - \{1\}$, la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

<u>Vocabulaire</u>

- La fonction logarithme de base $e$ est la fonction logarithme népérien.
- La fonction logarithme de base 10 est la fonction logarithme décimal.

#### 4.2 La fonction logarithme décimal

**Définition** On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log et définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

<u>Conséquences</u>

- $\log(1) = 0$ ;
- $\log(10) = 1$ ;
- $\forall n \in \mathbb{Q}, \log(10^n) = n$ ;
- si $10^n \leq a \leq 10^{n+1}$, alors $n \leq \log(a) \leq n + 1$.

### 5 Étude de fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction ln, on peut suivre les étapes pour l'étude d'une fonction dans le cas général.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Sachant que $\ln 2 = 0{,}693$ et $\ln 3 = 1{,}098$,
Calcule $\ln 6$ ; $\ln 9 + \ln 8$ ; $\ln 9 \times \ln 8$ ; $\ln 72$ ; $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ; $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$ et $\ln 32$.

**2** Détermine la valeur exacte de chacun des nombres suivants :
$A = \frac{1}{2}\ln(e^{2})$ ; $B = \ln\left(\frac{1}{e^{5}}\right)$ ;
$C = \frac{5}{4}\ln\left(\frac{e}{\sqrt[5]{e}}\right)$ ; $D = 2\ln\left((e\sqrt{e})^{3}\right)$.

**3** Simplifie chacune des expressions suivantes :
$A = \ln(\sqrt{7}+2) + \ln(\sqrt{7}-2)$ ;
$B = \ln(\sqrt{7}+2) - \ln(\sqrt{7}-2)$ ;
$C = \ln\left(\sqrt{\sqrt{7}+2}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{7}-2}\right)$.

**4** Écris sous forme de $\ln a$ chacun des nombres réels suivants, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
$A = 5\ln 4 - 3\ln 8 + \ln 2$ ; $B = \ln\sqrt{3} - \ln 9 - \ln(3\sqrt{3})$ ;
$C = \ln(0{,}1) + \ln 10 - \ln(0{,}001)$ ;
$D = \ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2}-1)$ ;
$E = \ln(\sqrt{3}-1) + \ln\left(\frac{2e}{\sqrt{2}+1}\right)$.

**5** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :
$A = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times \dots \times\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et
$B = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
1. Démontre que : $A = n + 1$.
2. Déduis-en une expression plus simple de B en fonction de $n$.

**6** Soit $n$ un nombre entier naturel non nul et $a$ un nombre réel strictement positif.
Calcule la somme :
$S = \ln(a^{n}) + \ln(a^{n-1}) + \dots + \ln(a) + \ln(1) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \dots + \ln\left(\frac{1}{a^{n-1}}\right) + \ln\left(\frac{1}{a^{n}}\right)$

**7** Dans chacun des cas suivants, $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
1. $f(x) = \ln(-2x+3)$ ; 2. $f(x) = \ln(12x) - \ln(4+x)$ ;
3. $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$ ;

**8** Dans chacun des cas suivants, $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
1. $f(x) = \ln|3x-5|$ ; 2. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{5x+1}\right)$ ;
3. $f(x) = \ln\left|\frac{7x-8}{2x+4}\right|$.

**9** On considère les fonctions de $f$, $g$ et $h$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = \ln(2x-1) + \ln(x+3)$,
$g(x) = \ln[(2x-1)(x+3)]$ et
$h(x) = \ln|2x-1| + \ln|x+3|$.
1. A-t-on $f = g$ ?, $f = h$ ? $g = h$ ? Justifie les réponses.
2. Trouve le plus grand ensemble sur lequel $f$ et $g$ coïncident.
3. Trouve le plus grand ensemble sur lequel $f$ et $h$ coïncident.
4. Trouve le plus grand ensemble sur lequel $g$ et $h$ coïncident.

**10** Résous les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1. $\ln(2x+1) = 0$ ; 2. $\ln(e - 3x) = 1$ ;
3. $\ln(x-3) = \ln(2x+1)$ ; 4. $\ln(\sqrt{x-4}) = 1$.

**11** Résous les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1. $\ln(-x^2 + 6x - 5) = 0$ ; 2. $\ln(x^2 - 1) = \ln 2x$ ;
3. $\ln(5x+2) - \ln(x+2) = \ln(x-2)$ ;
4. $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x)$.

**12** Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $\ln\left(\left|\frac{x-2}{3x-2}\right|\right) = 0$ ;
b) $\ln(|x-2|) = \ln(3x-2)$ ;
c) $\ln|x^2 - 2x| = \ln|x-1|$.

**13** Résous les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1. $(2x-1)(1 - \ln(2-x)) \geq 0$ ;
2. $\ln(x^2 + 2x + 1) \geq 0$ ; 3. $(1 - \ln x)(2 + \ln x) \leq 0$.

**14** Résous les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ :
1. $\ln(2x+1) + \ln(x-3) < \ln x$ ;
2. $(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5\ln x + 3 > 0$ ;
3. $(1 - \ln x)(2 + \ln x) \leq 0$.

**15** Étudie le signe de chacune des expressions $p$, $q$ et $r$ suivantes sur $\mathbb{R}$ :
$p(x) = (\ln x)(\ln x - 1)$ ; $q(x) = 7x\ln(3-x)$ ;
$r(x) = -x^2\ln(x+1)$

**16** Détermine le plus petit entier naturel dans les différents cas suivants :
1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < 10^{-4}$.
2. $\frac{3}{2}(\sqrt{2})^{n} > 10^{3} \times \sqrt{3}$.
3. $10^{4}(1{,}11)^{n} \leq 250000(1{,}4)^{n}$.

**17** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 2}(x-2)\ln(x-2)$ ; b) $\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x-7}{x+1}\right)$ ;

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x\ln x}{1-x}$ ; d) $\lim_{x \to 2} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ ; e) $\lim_{x \to 3} \ln\left(\frac{x-3}{x-4}\right)$

**18** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ ; b) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$ ;

c) $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$ ; d) $\lim_{x \to e} \frac{x\ln x - e}{x-e}$.

**19** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 0} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ; b) $\lim_{x \to +\infty} x\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$ ;

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

**20** Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition dans chaque cas :

1. $f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ; 2. $f(x) = \frac{\ln(1-3x)}{x}$ ;

3. $f(x) = \ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|$.

**21** Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction :

$x \mapsto \frac{\ln(x-3)}{\ln(x+2)}$

**22** Étudie la continuité et la dérivabilité de $f$ en $x_0$ dans les cas suivants :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1-x}, \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \frac{1+\ln x}{x}, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

**23** Détermine la dérivée $f'$ de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ ; 2. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \ln(\sqrt{x})$ ;

3. $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.

**24** Détermine la dérivée $f'$ de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ ; 2. $f(x) = x^2 + \frac{2+\ln x}{x}$ ;

3. $f(x) = x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

**25** Soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$h(x) = \ln(2x - \sqrt{x})$.

1. Détermine l'ensemble de définition $h$.
2. Calcule la dérivée de $h$.

**26** Dans chacun des cas suivants, détermine la primitive sur K de la fonction $f$ qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.

1. $f(x) = \frac{5}{3-2x}$ ; $K = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$, $x_0 = 2$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.
2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ; $K = ]0 ; +\infty[$, $x_0 = e$ et $y_0 = \frac{3}{2}$.
3. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ ; $K = ]1 ; +\infty[$, $x_0 = e^2$ et $y_0 = 2\ln 2$.

**27** On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln x$.

1. Justifie que $f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calcule $f'(x)$.
2. Déduis-en une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction ln.

**28** On donne la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{8x^2 - 13x + 4}{(5x-2)(2x-1)^2}$.

1. Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout nombre réel $x$ de $\left]-\infty ; \frac{2}{5}\right[$,

$f(x) = \frac{a}{5x-2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$.

2. Déduis-en la primitive de $f$ qui prend la valeur $\frac{-7}{6}$ en $\frac{1}{5}$.

**29** Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - y = -2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$ ; 2. $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$.

**30** Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$ ; 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$ ;

3. $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$.

**31** On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{x\ln x}{1-x}$ si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = -1$.

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Justifie que l'on peut prolonger par continuité la fonction $f$ en 0 et en 1.
3. Notons $g$ ce prolongement.

Étudie la dérivabilité de $g$ en 0 et en 1.

Donne une interprétation graphique.

**32** Écris chacun des nombres suivants sous la forme d'un nombre rationnel :

$\log_3 243$ ; $\log_{27} 9$ ; $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)$

# Exercices

## Exercices d'approfondissement

**33** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(ax+b)$, et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative. Détermine les nombres $a$ et $b$ tels que la courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point A(2 ; 0) et la tangente à $(\mathscr{C})$ en A ait pour coefficient directeur –2.

**34** On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$.

1. Soit $x$ un nombre réel différent de 1, Calcule $f(1+x) + f(1-x)$.

2. Justifie que la courbe de $f$ admet un centre de symétrie dont tu préciseras les coordonnées.

**35** On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$

Justifie que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de $f$.

**36** 1. Dans chacun des cas suivants, démontre que la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous est impaire :

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ;

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Démontre que le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$ est le centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$, la courbe de $g$ où $g$ est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

**37** Soit p le polynôme défini par : $p(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$.

a) Calcule $p(3)$ et détermine une factorisation de $p(x)$ puis son signe suivant les valeurs de $x$.

b) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{R}$ de :

(E) : $\ln(x^2) - \ln(-5x - 3) = -\ln(-x + 1)$.

(I) : $(\ln(2-3x))^3 - (\ln(2-3x))^2 + 5\ln(2-3x) + 3 \geq 0$.

**38** 1. On considère la fonction $g$ définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Détermine les réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $\forall \in x > 1$, $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$.

b) Détermine les primitives G sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction $g$.

2. Soit $h$ la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $h(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

a) Calcule $h'(x)$.

b) On considère la fonction $f$ définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{(x^2-1)^2}$. En utilisant les questions les questions précédentes, détermine la primitive F de $f$ qui prend la valeur $-\dfrac{4}{3}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$ en 2.

**39** 1. Vérifie que $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est une primitive sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Détermine une primitive G sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Déduis des questions précédentes la primitive F sur $]1 ; +\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{5-4x}{\sqrt{x^2-1}}$ qui s'annule en 2.

**40** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ par : $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.

On admet que $f$ est dérivable et on note $f'$ sa dérivée. Le tableau de variation de la fonction $f$ est le suivant :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ | ↘ | $-\infty$ |

1. Justifie tous les éléments contenus dans ce tableau.

2. a) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ dans l'intervalle $\left]+\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) Donne un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

3. Détermine le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

**41** On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right) + x$.

1. Détermine $D_f$ l'ensemble de définition de $f$.

2. Calcule les limites de $f$ en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en $-1$ et à droite en 1. Donne les interprétations graphiques en $-1$ et en 1.

3. a) Démontre que $\forall x \in D_f$,

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + x - \ln 2$

b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.

c) Détermine la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

4. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.

5. Détermine les coordonnées des points A de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) en A à $(\mathscr{C})$ est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{3}x - 5$.

Représente graphiquement les droites (Δ), (D), les tangentes aux points A et $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé ( O, I, J).

**42** La courbe ci-dessous est celle d'une fonction $g$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

La droite (AB) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ en A.

On a : A(1 ; −1) ; B(0 ; −3) et $C\left(e ; 1 - \frac{1}{e}\right)$.

1. a) Détermine une équation cartésienne de la droite (AB).

b) Sur le graphique, lis les valeurs de $g(1)$ ; $g(e)$ et $g'(1)$.

c) Dresse le tableau de variation de $g$.

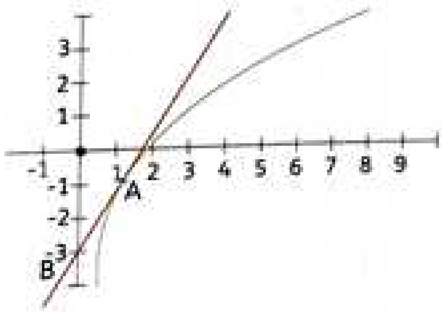
2. On suppose que $g(x)$ est de la forme $g(x) = a\ln x + \frac{b}{x}$ où $a$ et $b$ sont des réels.

a) Calcule $g'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.

b) À l'aide des résultats précédents, détermine les réels $a$ et $b$.

c) Justifie qu'il existe un unique réel α dans $]0 ; +\infty[$ tel que $\ln \alpha = \frac{b}{x}$ et que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

d) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.




**43** $f$ est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.

2. Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

Interprète les résultats.

3. Démontre que $f$ est impaire. Donnes-en une interprétation graphique.

4. a) Démontre que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Détermine les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (D).

5. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.

6. Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0,5.

7. Démontre que sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1{,}54 < \alpha < 1{,}55$.

8. Construis $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

**44** On considère l'équation (E) : $e^x - x^n = 0$, où $x$ est un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.

1. Justifie que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.

2. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$.

a) Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudie les variations de $f$.

3. Détermine le nombre de solutions de l'équation (E) suivant les valeurs de $n$.

**45** On considère la fonction $g$ définie sur $]-\infty ; 0[$ par : $g(x) = -1 - 2x\ln(x)$.

**Partie A**

1. a) Calcule la limite de $g$ en 0.
Interprète ce résultat.

b) Définis le prolongement par continuité $k$ de $g$.

c) Étudie la dérivabilité de $k$ en 0. Interprète ce résultat.

2. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interprète ce résultat.

3. Étudie les variations de $g$ et dresse son tableau de variation.

4. Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-\infty ; \frac{1}{e}\right[$, puis justifie que $\alpha \in ]-1{,}5 ; 1{,}4[$.

Donne un encadrement de α à $10^{-2}$ près.

5. Déduis-en que : $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; 0[, g(x) < 0$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty ; 0[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln^2(-x)$.

1. Calcule les limites de $f$ en $-\infty$ et en 0.
2. Calcule $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète ce résultat.
3. Justifie que $f(\alpha) = \frac{4\alpha - 1}{4\alpha^2}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Justifie que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.
5. Déduis-en le sens de variation et le tableau de variation de $f$.
6. Construis la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de $f$ dans un repère orthonormé ( O, I, J ).

**Partie C**

1. Justifie que la restriction $h$ de $f$ à $]\alpha ; 0[$ est une bijection de $]\alpha ; 0[$ sur un intervalle K à déterminer. On note $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$.
2. a) Calcule $h(-1)$ et justifie que $h^{-1}$ est dérivable en $-1$.
   b) Dresse le tableau de variation de $h^{-1}$.
   c) Calcule $h(-1)$ et détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ en $-1$.
3. Construis la courbe $(\Gamma)$ de $h^{-1}$ dans le même repère orthonormé (O, I, J).

**46** On considère la fonction $u$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$.

**Partie A**

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^3 + 1 = 0$.
Justifie que $u\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}(5 + 2\ln 3)$.
2. Détermine l'ensemble de définition de $u$.
3. Calcule les limites de $u$ en $-\infty$, 0 et en $+\infty$.
4. Étudie les variations de $u$ sur $\mathbb{R}^*$ puis dresse son tableau de variation.
5. a) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0 ; +\infty[$.
   b) Justifie que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$.
6. Justifie que : $\forall x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; \alpha[, u(x) < 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[, u(x) > 0$.

**Partie B**

On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$.
On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J ). L'unité graphique est 1 cm.

1. Calcule les limites de $f$ en $-\infty$.
Interprète la limite en 0.
2. Justifie que : $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$, et que $1{,}62 < f(\alpha) < 2{,}1$.
3. a) Justifie que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.
   b) Étudie la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
4. a) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$.
   b) Déduis-en le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variation.
5. Trace la courbe $(\mathscr{C})$ de $f$. Prendre $\alpha = 0{,}8$.

**Partie C**

Considérons la restriction $h$ de $f$ à $]-\infty ; 0[$.

1. Justifie que $h$ est une bijection de $]-\infty ; 0[$ dans un intervalle K à préciser. On note $h^{-1}$ sa bijection réciproque et $(\varphi)$ la courbe représentative de $h^{-1}$.
2. a) Calcule $h(-1)$ puis justifie que $h^{-1}$ est dérivable $-2$.
   b) Détermine la valeur exacte de $(h^{-1})'(-2)$.
3. Détermine une équation de la tangente (T) à $(\varphi)$ en $-2$.
4. Dresse le tableau de variation de $h^{-1}$.
5. Construis $(\varphi)$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.
6. Sur $]-\infty ; 0[$, on donne la fonction $g$ définie par $g(x) = x^2 + \frac{\ln x + 1}{x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
   a) Justifie que $g$ est une primitive de $f$ sur $]0 ; +\infty[$.
   b) Détermine la primitive de $f$ qui prend la valeur $e^2$ en $e$.

**47** Soit la fonction définie sur l'intervalle $[10 ; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{\ln t - 2}{2t}$.

**Partie A**

1. Justifie que $f(t)$ peut s'écrire sous la forme $f(t) = \frac{1}{2}\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}$.
Déduis-en la limite de $f(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$.
2. Calcule $f'(t)$ et montre que $f'(t) = \frac{3 - \ln t}{2t^2}$.
3. Étudie le signe de $f'(t)$ sur $[10 ; +\infty[$ et dresse le tableau de variations de $f$.
On fera figurer dans ce tableau les valeurs exactes de $f(10)$ et de $f(e^3)$.

**Partie B :** *Application*

On se propose d'étudier la capacité pulmonaire de l'être Humain en fonction de son âge $t$, $t$ représentant l'âge en année et $g(t)$ la capacité pulmonaire en litre.

On admet que sur l'intervalle [10 ; 60], on a $g(t) = 220\,f\,(t)$.

1. Donne l'expression de $g(t)$ sur [10 ; 60].

2. En utilisant la partie A, préciser la capacité pulmonaire maximale et l'âge où elle est atteinte. Donne une valeur approchée de l'âge à un an près et une valeur exacte puis approchée à $10^{-1}$ près de cette capacité.

3. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant :

| T | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | | | | | | | | |

4. Construis $(\Gamma)$ la courbe représentative de $g$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques 2 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).

Pour les questions 5 et 6, faire apparaître sur le graphique les tracés utiles.

5. Détermine graphiquement l'intervalle de temps durant lequel la capacité pulmonaire est supérieure ou égale à 5 litres.

6. Détermine graphiquement à quel âge la capacité pulmonaire a diminué de 20% par rapport à la capacité pulmonaire maximale.

**48** On veut suivre l'évolution de la population dans une culture bactérienne, suivant la température à laquelle on soumet cette culture.

Pour une température $x$, en dizaines de degrés Celsius, comprise entre 0,1 et 4, le nombre de bactéries, en millions, dans la culture est

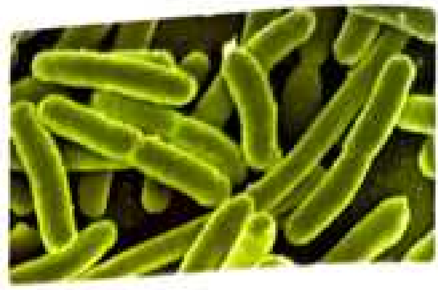
$f\,(x) = -\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5 + x + 2\ln x.$

1. À quelle température, en degrés Celsius, le nombre de bactéries dans la culture est-il maximal ?

Dans les deux questions suivantes, on fera apparaître les traits de construction utiles.

2. Détermine graphiquement le nombre de bactéries dans la culture chauffée à 37,5°C.

3. Pour quelles températures, en degrés Celsius, le nombre de bactéries dans la culture est-il inférieur ou égal à 5 500 000 ?



**49** Au cours d'une étude sur les rythmes cardiaques, on note toutes les cinq minutes à partir du temps $x = 0$, correspondant au début de l'épreuve physique, le rythme cardiaque d'un sportif en pulsations par minute. On considère que la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $f(x) = -2x + 60 + 32\ (\ln x + 1)$ permet d'estimer le rythme cardiaque à l'instant $x$ exprimé en minutes.

1. Construis la courbe représentative de la fonction dans un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 2 cm pour 5 minutes sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 pulsations par minute sur l'axe des ordonnées.

2. Au bout de combien de temps le rythme cardiaque est-il maximal ? Quelle valeur atteint-il ?

3. Quel est le rythme cardiaque du sportif au repos ?

4. À l'aide du graphique, réponds aux questions suivantes.

   a) À quel instant le rythme est-il de 90 pulsations par minute ?

   b) Dans les conditions de cette épreuve, on considère qu'une personne est en très bonne condition physique lorsque la durée pendant laquelle son cœur bat à plus de 1,5 fois sa vitesse au repos est inférieure à vingt minutes.

   Ce sportif est-il en très bonne condition physique ? Justifie.

   c) De même, une personne est considérée en mauvaise condition physique lorsque son rythme cardiaque atteint ou dépasse le double du rythme au repos.

Ce sportif est-il en mauvaise condition physique ? Justifie.

**50** On suppose que la glycémie (taux de glucose sanguin en $g.L^{-1}$) en fonction du temps $x$ (en heures) d'une personne observée après ingestion de sirop de glucose est donnée par $f(x) = \ln(4x + 1) - x + 1$ où $x$ varie dans l'intervalle $[0 ; \frac{5}{2}]$.

1. Détermine l'instant (en minutes) auquel la glycémie de cette personne est maximale.

2. Toute modification de la glycémie qui s'écarte de 25% de la valeur moyenne de 1 $g.L^{-1}$ provoque des perturbations plus ou moins graves chez l'homme.
Détermine l'intervalle dans lequel doit rester la glycémie pour éviter toute perturbation.

3. Une glycémie supérieure à 1,25 $g.L^{-1}$ est appelée hyperglycémie ; une glycémie inférieure à 0,75 $g.L^{-1}$ est appelée hypoglycémie.
 a) Détermine graphiquement le ou les intervalles de temps (en heures) pendant lesquels la personne observée est en hyperglycémie (faire apparaître les traits de construction utiles).
 b) Même question pour l'hypoglycémie.

**51** Une infirmière libérale parcourt chaque jour entre 40 et 80 kilomètres. Elle calcule le montant de ses frais de déplacement.

Soit $g$ la fonction définie par :

$g(x) = 200(1 + 2\ln(0{,}04x))$. On admet que $g(x)$ représente alors le montant des frais de déplacement exprimé en F CFA en fonction du nombre de kilomètres parcourus par jour.

On te demande de déterminer le nombre de kilomètres à partir desquels ces frais de déplacement s'élèveront au moins à 600 F CFA.

**52** **Partie A :**

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$g(x) = x^2 - 1 - \ln x$.

1. Calcule les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.

2. On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Démontre que pour tout nombre réel strictement positif $x$, $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.

3. Détermine les variations de $g$ et dresse son tableau de variation.

4. a) Calcule $g(1)$.
 b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left]0 ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.
 On désigne par $\alpha$ cette solution.
 Justifie que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

5. Déduis de tout ce qui précède que :
 si $x \in ]0 ; \alpha[ \cup ]1 ; +\infty[$, alors $g(x) > 0$ ;
 si $x \in ]\alpha ; 1[$, alors $g(x) < 0$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1. a) Détermine la limite de $f$ en 0.
 Donne une interprétation graphique du résultat.
 b) Détermine la limite de $f$ en $+\infty$.

2. On suppose que $f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Démontre que, pour tout nombre réel strictement positif $x$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

3. a) Démontre que : $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.
 b) Étudie les variations de $f$ et dresse son tableau de variation.

4. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
 b) Étudie la position de (D) par rapport à (C).
 c) Trace (D) et (C).
 On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$.

Situation complexe

53* Sur une chaîne de production de pièces métalliques, on sait que si on produit trop peu de pièces à la minute (cadence faible) on perd de l'argent et si on produit trop de pièces à la minute (cadence élevée), les machines chauffent et s'usent plus rapidement.

On a réussi à modéliser la courbe de rentabilité de la chaîne de production par la fonction $f$ définie par : $f(x) = 24\ln(x) - \frac{4}{5}x$, définie sur $]0\,;200]$ où $x$ désigne le nombre de pièces produites à la minute.

Le Directeur de l'usine veut accroître la rentabilité de la chaîne de production. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande de déterminer le nombre de pièces par minute à produire pour avoir la rentabilité maximale.

Coup de Pouce

53 Étudier la fonction $f$ puis déterminer le maximum de $f$.

Leçon

5

# FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

La structure des ponts suspendus a beaucoup évolué dans le temps. Cependant, deux contraintes importantes sont à prendre en compte lors de la construction d'un pont suspendu. Comment limiter les effets du vent et ceux de la résonance ?

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne des médicaments que l'élève prend immédiatement.

La fonction qui modélise la masse M, en mg, de ce médicament encore présent dans le sang de cet élève $t$ heures après sa prise, est la fonction telle que : $M(t) = 50e^{-0,75t}$.

En vue de prescrire si possible d'autres médicaments plus tard, le stagiaire désire visualiser cette masse M en fonction du temps $t$.

Il sollicite le professeur de Science de la Vie et de la Terre (SVT). Ce dernier associe la classe au projet.

Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur les fonctions.

# HABILETÉS ET CONTENUS

## 1 Fonction exponentielle népérienne

*Connaître :*

- la définition de la fonction exponentielle népérienne
- la dérivée de la fonction exponentielle népérienne
- les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne
- les limites de référence de la fonction exponentielle népérienne
- des limites des fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne
- le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne
- la représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne

*Noter :*

- la fonction exponentielle népérienne

*Utiliser :*

- les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture

## 2 Équations – Inéquations

*Résoudre :*

des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

## 3 Dérivées et primitives

*Connaître :*

- les fonctions dérivées d'une fonction du type : exp o $u$
- les primitives d'une fonction du type : $u'e^u$

*Déterminer :*

- la dérivée d'une fonction du type $e^u$
- des primitives d'une fonction du type $u'e^u$

## 4 Fonctions exponentielles de base $a$

*Connaître :*

- la définition d'une fonction exponentielle de base $a$ ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)
- la fonction dérivée de la fonction $\exp_a$
- les propriétés algébriques de la fonction $\exp_a$
- les limites de référence de la fonction $\exp_a$
- des limites des fonctions comportant $\exp_a$
- la représentation graphique $\exp_a$

*Noter :*

la fonction exponentielle de base $a$ ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)

## 5 Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

*Déterminer :*

- l'ensemble de définition d'une fonction comportant exp
- les limites d'une fonction comportant exp aux bornes de son ensemble de définition
- les branches infinies d'une fonction comportant exp
- la dérivée d'une fonction comportant exp
- le sens de variation d'une fonction compotant exp

*Représenter :*

graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

## 6 Fonctions puissances

*Connaître :*

- la définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul
- l'allure et la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)
- les propriétés algébriques de la fonction puissance d'exposant réel non nul
- les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances
- la formule de la dérivée d'une fonction du type $u^\alpha$, $\alpha$ $\mathbb{R}^*$
- les primitives d'une fonction du type $u'u^m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

*Noter :*

une fonction puissance d'exposant réel non nul

*Déterminer :*

- l'ensemble de définition des fonctions comportant des fonctions puissances
- les limites infinies des fonctions comportant des fonctions puissances
- les branches infinies des fonctions comportant des fonctions puissances
- la fonction dérivée d'une fonction comportant des fonctions puissances
- les primitives d'une fonction du type $u'u^m$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

*Utiliser :*

- les limites de référence pour calculer d'autres limites
- les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites

*Représenter :*

- graphiquement une fonction comportant des fonctions puissances
- graphiquement une fonction du type $u^n$

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Fonction exponentielle népérienne

**1.1. Définition**

1. Justifie que la fonction ln admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, (on l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note exp).

On a : $\forall x \in ]0\,;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$,

- $\ln x = y \Leftrightarrow x = \exp y$ ; 
- $\ln(\exp y) = y$ et $\exp(\ln x) = x$

2. Calcule exp(0) et exp(1).

3. On rappelle que : $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$.
Pour tout nombre rationnel $r$, détermine $\ln(\exp(r))$ et $\ln(e^r)$.
Déduis-en une expression de $\exp(r)$ comme une puissance du nombre réel $e$.

**Synthèse**

- La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction ln.
On la note exp.
Et, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exp(r) = e^r$ ($e^r$ est "$e$ puissance $r$", "$e$ exposant $r$" et peut se lire "exponentielle de $r$").
On convient d'étendre cette expression à tout nombre réel $x$ :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ ($e^x$ se lire "exponentielle de $x$").
- **Conséquences immédiates**
  - La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
  - $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in ]0\,;+\infty[$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

## Exercices de fixation

**1.1.1** Écris plus simplement :

$\ln(e^{7})$ ; $\ln(e^{-2})$ ; $\ln\left(\frac{1}{e^{3}}\right)$ ; $e^{\ln 4}$ ; $e^{3\ln 2}$ ; $e^{-\ln 8}$.

**1.1.2** Écris le plus simplement possible :

$\ln(e^{5}) + \ln(e^{9}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

**1.1.3** Détermine, dans chaque cas, le nombre réel $x$ :

a) $e^{x} = 2$ ;

b) $e^{3x} = 7$ ;

c) $e^{x^2-6} = 1$.

### 1.2. Propriétés algébriques

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels, $r$ un nombre rationnel.

1. a) Justifie que : $\ln(e^{a+b}) = a + b$.
   b) Justifie que : $\ln(e^{a} \times e^{b}) = a + b$.
   c) Déduis des deux résultats précédents que : $e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$.
2. a) Justifie que : $e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$.
   b) Justifie que : $e^{a-b} = \frac{e^{a}}{e^{b}}$.
   c) Justifie que : $e^{ra} = (e^{a})^{r}$.

**Synthèse**

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, et pour tout nombre rationnel $r$, $e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$ ; $e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$ ;
$e^{a-b} = \frac{e^{a}}{e^{b}}$ ; $e^{ra} = (e^{a})^{r}$.

## Exercices de fixation

**1.2.1** Écris les nombres A, B, C et D suivants sous la forme $e^{a}$ ($a \in \mathbb{Z}$).

$A = e^{2} \times e^{3}$ ; $B = e \times e^{5}$ ; $C = \frac{e^{6}}{e^{4}}$ ; $D = (e^{3})^{2}$.

**1.2.2** Écris sous la forme $e^{a}$ chacune des expressions suivantes :

$e^{-7} \times \frac{1}{e^{-5}} \times e$ ; $\frac{(e^{-3})^{4}}{e^{4} \times e^{-4}}$ ;

$e^{3}(e^{-3} - e^{2}) + e^{2}(e^{3} + e) - 1$.

**1.2.3** Écris sous la forme $e^{a}$ chacune des expressions suivantes :

$(e^{x})^{3} \times e^{-2x}$ ; $e^{3x+2} \times e^{-4x+6}$ ; $\frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$ ; $\frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x-1}}{e^{-x+1}}$

**1.2.4** Démontre que pour tout nombre réel $x$, on a :

$1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

### 1.3. Fonction dérivée de la fonction exp

1. a) Justifie que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) On donne la fonction numérique $f$ dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(\exp(x))$.
   Pour tout réel $x$, en remarquant que $f(x) = x$, donne deux expressions différentes de $f'(x)$.
   Déduis-en, pour tout réel $x$, $(\exp)'(x)$.
2. a) Donne le sens de variation de exp.
   b) Déduis-en que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow a = b$ et $e^{a} < e^{b} \Leftrightarrow a < b$.

**Synthèse**

- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = e^{x}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous réels $a$ et $b$, $e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow a = b$ ; $e^{a} < e^{b} \Leftrightarrow a < b$, ($e^{a} > e^{b} \Leftrightarrow a > b$).

## Exercices de fixation

**1.3.1** Dans chaque cas, on donne une fonction numérique $f$ dérivable en tout point de son ensemble de définition $\mathcal{D}f$.
Pour tout $x$ élément de $\mathcal{D}f$, calcule $f'(x)$.
a) $f(x) = e^x - 2x + 3$ ; b) $f(x) = xe^x$ ;
c) $f(x) = 3x^2 - 4e^x$.

**1.3.2** Calcule $f'(x)$ dans chaque cas, $f$ étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) $f(x) = (x^3 - 1)e^x$ ;
b) $f(x) = (e^x + 3)(e^x - e)$ ;
c) $f(x) = \dfrac{1}{5 + e^x}$ ;
d) $f(x) = \dfrac{3e^x + 8}{e^x + 2}$.

### 1.4. Limites de référence

1. La fonction exp étant une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, déduis-en $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.
2. a) En posant $X = e^x$, détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.
   b) En posant $t = -x$, déduis de 2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.
3. En utilisant la définition du nombre dérivée d'une fonction en un point, détermine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

**Synthèse**

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

## Exercices de fixation

**1.4.1** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 3x)e^x$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 3x)e^x$ ;
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 2x + 3)$ ; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 2x + 3)$ ;
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x - 1}$ ; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x - 1}$.

**1.4.2** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x - 4}{e^x - 2}$ ; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^x - 4}{e^x - 2}$.

**1.4.3** Calcule les limites suivantes :

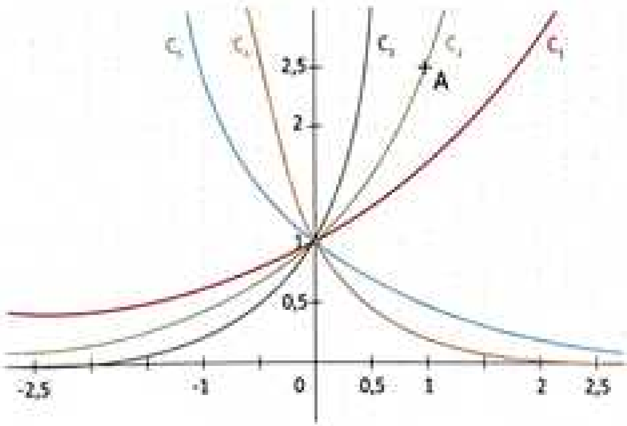
a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$ ; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$.

### 1.5. Représentation graphique

1. Dresse le tableau de variation de la fonction exp.
2. Trace la courbe représentative de la fonction exp dans le plan muni d'un repère orthonormé.

## Exercice de fixation

Parmi les courbes ci-dessous, indique celle qui représente la fonction exp.



## Activité 2 — Équations - Inéquations

1. En utilisant les propriétés relatives au sens de variation de la fonction exp, résous les équations suivantes.
   a) $e^{x} = 3$ ; b) $e^{x} = -6$ ; c) $e^{4x} = 8$ ; d) $e^{2-x} = e^{x}$ ; g) $e^{10-x} = e$.
2. En utilisant les propriétés relatives au sens de variation de la fonction exp, résous les inéquations suivantes.
   a) $e^{x} > e^{-4}$ ; b) $e^{-2x} \leq 13$ ; c) $e^{7x-2} \geq e^{9x-11}$.
3. On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 5e^{x} - 14 = 0$.
   On pose $X = e^{x}$.
   a) Justifie que résoudre (E) revient à résoudre l'équation (E') : $X^2 - 5X - 14 = 0$.
   b) Résous l'équation (E').
   c) Déduis-en les solutions de (E).
   d) En utilisant tout ce qui précède, résous l'inéquation $e^{2x} - 5e^{x} - 14 \leq 0$.

**Synthèse**

- Pour tout nombre réel $a$ élément de $]-\infty ; 0]$ :
  - L'équation : $e^{x} = a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  - L'inéquation : $e^{x} \leq a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel $a$ élément de $]0 ; +\infty[$.
  - L'équation : $e^{x} = a$, $\Leftrightarrow x = \ln a$.
  - Les inéquations : $e^{x} \leq a$, $e^{x} > a$, ... sont respectivement équivalentes à $x \leq \ln a$, $x > \ln a$,...
- Pour résoudre une équation du type $P(e^{x}) = 0$ ou une inéquation du type $P(e^{x}) \leq 0$ ($P(e^{x}) \geq 0$, ...), on pose $e^{x} = X$, avec $X > 0$, et P un polynôme.

### Exercices de fixation

**2-1** Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{3x-2} = e^{4}$
2. $e^{x^2} = 1$
3. $e^{-x} = 0$
4. $e^{x} + 7 = 0$
5. $e^{-3x+5} = 2$
6. $(e^{x-1} - 2)(e^{3-x} - e) = 0$

**2-2** Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$
2. $2e^{2x} - e^{x} - 3 = 0$

**2-3** Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{\frac{1}{x}} < e$
2. $e^{-x+7} > e^{x}$
3. $e^{x^2} \leq (e^{x})^3$
4. $e^{3-x} \geq e^{-3x}$
5. $e^{-x^2+1} \leq 1$
6. $e^{x+3} + 5 < 0$

**2-4** Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x} - 3e^{x} + 2 \leq 0$
2. $e^{2x} + e^{x} - 6 > 0$

## Activité 3 — Dérivées et primitives

### 3.1. Dérivée de $e^{u}$

On donne une fonction numérique $u$ dérivable sur un intervalle K de $\mathbb{R}$ et on considère la fonction numérique $f$ définie sur K par : $f(x) = e^{u(x)}$.

1. Justifie que $f$ est dérivable sur K.
2. En utilisant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $f'(x)$.

**Synthèse**

$u$ est une fonction numérique dérivable sur un intervalle K et $f$ est la fonction définie par : $f(x) = e^{u(x)}$.
La fonction $f$ est dérivable sur K et, $\forall x \in K$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

## Exercices de fixation

**3.1.1** Détermine la dérivée de la fonction $f$ sur l'ensemble K dans chaque cas.

1. $f(x) = e^{2x+1}$, $K = \mathbb{R}$ ;
2. $f(x) = e^{1-x^2}$, $K = \mathbb{R}$ ;
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $K = ]0 ; +\infty[$ ;
4. $f(x) = 3e^{-x} + e^{5x-2}$, $K = \mathbb{R}$.

**3.1.2** Détermine la dérivée de la fonction $f$ sur l'ensemble K dans chaque cas.

1. $f(x) = e^{\frac{x+3}{x^2+1}}$, $K = \mathbb{R}$ ;
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-x}}$, $K = \mathbb{R}\setminus\{0 ; 1\}$ ;
3. $f(x) = (4x^3 - 5)e^{-2x}$, $K = \mathbb{R}$ ;
4. $f(x) = \dfrac{2e^x + 3}{e^x - 1}$, $K = \mathbb{R}^*$.

### 3.2. Primitives de $u'e^u$

Soit K un intervalle de $\mathbb{R}$, $u$ une fonction numérique dérivable sur K.

1. Donne la dérivée de la fonction $f$ définie sur K par : $f(x) = e^{u(x)}$.
2. Déduis-en les primitives sur K de la fonction : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

**Synthèse**

K est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u$ une fonction dérivable sur K.
Les primitives sur K de la fonction $u'e^u$ sont les fonctions $e^u + c$, $c \in \mathbb{R}$.

## Exercices de fixation

**3.2.1** Dans chaque cas, on donne une fonction numérique $f$ continue sur un intervalle K de $\mathbb{R}$.
Détermine une primitive F de $f$ sur K.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et $K = ]-\infty ; 0[$ ;
b) $f(x) = e^{1-3x}$ et $K = \mathbb{R}$ ;
c) $f(x) = 7e^{x-5}$ et $K = \mathbb{R}$ ;
d) $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $K = \mathbb{R}$ ;
e) $f(x) = 9x^2e^{2x^3+1}$ et $K = \mathbb{R}$.

**3.2.2** Détermine, dans chaque cas, les primitives de la fonction $f$ sur K.

a) $f(x) = 2e^{4x} - xe^{x^2}$ et $K = \mathbb{R}$ ;
b) $f(x) = 3e^{-0,2x} + 2x$ et $K = \mathbb{R}$ ;
c) $f(x) = -\dfrac{x}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $K = \mathbb{R}$ ;
d) $f(x) = 8\sin(x) \times e^{3+\cos x}$ et $K = \mathbb{R}$.

## Activité 4 Fonctions exponentielles de base $a$

### 4.1. Définition

Une caisse de retraite place un capital d'un milliard de francs CFA dans une banque au taux d'intérêts annuels de 5% le 1er janvier d'une année.
On pose $C_0 = 1$ et on note $C_n$ ($n \in \mathbb{N}$) la valeur acquise (en milliards de FCFA) par le capital à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Calcule la valeur acquise à la fin de 1ère année.
2. Justifie que la suite $(C_n)$ est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 1.
3. Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = (1{,}05)^n$. Déduis-en, une fonction C qui donne la valeur acquise, par le capital, à chaque instant $x$.

**Synthèse**

- $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $C(x) = (1{,}05)^x$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ : $x \mapsto (1{,}05)^x$, est appelée fonction exponentielle de base 1,05.

- Soit $a$ un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel $x$, on définit $a^x$ par : $a^x = e^{x\ln a}$.
La fonction : $x \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base $a$ et notée $\exp_a$ et son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

**Exercices de fixation**

**4.1.1** Écris chaque nombre sous la forme $e^{\alpha\ln a}$.

a) $3^{0,2}$ ; b) $7,77^{-\sqrt{2}}$ ; c) $2022^{-\frac{1}{3}}$.

**4.1.2** Écris chaque nombre sous la forme $a^{\alpha}$

a) $e^{\pi\ln 2}$ ; b) $e^{0,999\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ ; c) $e^{\frac{2}{3}\ln(0,1)}$.

### 4.2. Propriétés algébriques

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs.

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a : $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
3. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a : $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
4. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a : $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a : $a^x b^x = (ab)^x$.
6. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a :
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

**Synthèse**

Pour tous $a$ et $b$ éléments de $]0 ; +\infty[$ et pour tous nombres réels $x$ et $y$ :

| | | |
|---|---|---|
| $a^x \times a^y = a^{x+y}$ | $a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a^x}\right)$ | $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ |
| $(a^x)^y = a^{xy}$ | $a^x \times b^x = (ab)^x$ | $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ |

**Exercices de fixation**

**4.2.1** Donne chacun des résultats sous la forme $2^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Aucune justification n'est demandée.

| | | |
|---|---|---|
| $512^5 \times 2^3 = \dots$ | $\dfrac{2^{\pi}}{2^3} = \dots$ | $\dfrac{1}{2^{-\pi}} = \dots$ |
| $(4^5)^3 = \dots$ | $64^3 \times 8^3 = \dots$ | $\dfrac{8^4}{4^5} = \dots$ |

**4.2.2** Vrai ou faux ? Justifie.

a) $4 \times 2^x = 2^{x+2}$ ;

b) $\dfrac{5^{x+3}}{2^x} = 125 \times 2,5^x$ ;

c) $\dfrac{8^x}{2^{x-2}} = 4^{x+1}$ ; d) $\dfrac{(2^x)^3}{4^{x+1}} = 2^{x-2}$.

### 4.3. Limites de référence

Soit $a$ un élément de $]0 ; +\infty[$.

Calcule les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ ; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$.

**Synthèse**

Soit $a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$ :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 < a < 1 \\ +\infty, \text{ si } a > 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \text{ si } 0 < a < 1 \\ 0, \text{ si } a > 1 \end{cases}$

**Exercices de fixation**

**4.3.1** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,999^x$ ; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 0,01^x$ ;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ ; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{7})^x$ ;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^x + \left(\dfrac{2}{7}\right)^x + \left(\dfrac{3}{7}\right)^x - 7\right)$ ;

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^x + \left(\dfrac{2}{7}\right)^x + \left(\dfrac{3}{7}\right)^x - 7\right)$.

**4.3.2** 1. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - 5^x)$.

Tu pourras utiliser :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x - 5^x = 5^x\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 1\right]$.

2. Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} (7^x - 5^x)$.

### 4.4. Étude et représentation graphique

Soit $a$ un élément de $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

On considère la fonction numérique $f$ dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a^x$.

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (\ln a)a^x$.
2. Dans cette question : $a > 1$, justifie que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresse son tableau de variation.
3. Dans cette question : $0 < a < 1$.

Justifie que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresse son tableau de variation.

**Synthèse**

Soit $a$ un élément de $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et $f_a$ la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.
Pour tout nombre réel $x$, $f_a'(x) = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$.
Si $a > 1$, alors $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $0 < a < 1$, alors $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

## Exercices de fixation

**4-4-1** Les fonctions $f, g, h$ définies ci-après sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calcule la dérivée de chacune et donne le sens de la variation.

a) $f(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x$ ;

b) $g(x) = 1{,}25^x$ ;

c) $h(x) = \left(\frac{2}{e}\right)^x$.

**4-4-2** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 1 cm.

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1{,}8)^x$, $g(x) = (0{,}4)^x$.

On note $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives de $f$ et $g$ dans le repère (O, I, J).

Construis $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

## Activité 5 Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x}$.

1. Détermine les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$.
   b) Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]1\,;+\infty[$ et vérifie que $1{,}59 < \alpha < 1{,}6$.
4. Construis la courbe représentative (C) de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**Synthèse**

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne, on peut suivre la démarche d'étude d'une fonction dans le cas général.

## Exercice de fixation

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
4. Construis la courbe représentative de $f$.

## Activité 6 Fonctions puissances

### 6.1. Notion de fonction puissance

1. Définis $3^{\pi}$ à l'aide d'une fonction déjà étudiée.
2. Pour tout $x$ élément de $]0\,;+\infty[$, définis de même $x^{\pi}$.

**Synthèse**

Soit $\alpha$ un nombre réel.

- On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha$, la fonction : $x \mapsto x^{\alpha}$.
- $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.
- Soit $f_{\alpha}$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$.

L'ensemble de définition de $f_{\alpha}$ est $D_{f_{\alpha}} = ]0\,;+\infty[$.

**Exercice de fixation**

Définis la fonction puissance d'exposant $\alpha$ dans chaque cas :

a) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ; c) $\alpha = 0{,}01$ ; d) $\alpha = -\frac{e}{7}$.

### 6.2. Étude et représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 2 cm.
Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = x^{\alpha}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le repère (O, I, J).

1. Détermine les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. Justifie que : $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
3. Détermine le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.

**Synthèse**

Soit $\alpha$ un nombre réel non nul et $f_{\alpha}$ la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$.

- $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, \text{ si } \alpha < 0 \\ 0, \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha < 0 \\ +\infty, \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$

- Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, $(f_{\alpha})'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

**Exercices de fixation**

**6.2.1** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{3}}$ ; b) $\lim\limits_{x \to 0} x^{-\frac{\pi}{2}}$ ; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{e}$ ; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

**6.2.2** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 2 cm.
On considère les fonctions numériques $f$, $g$ et $h$ définies respectivement par :
$f(x) = x^{2\sqrt{2}}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ et $h(x) = x^{-\frac{2}{3}}$.
On note $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ les courbes représentatives respectives de $f$, $g$ et $h$ dans le repère (O, I, J).
Construis $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ dans le même repère (O, I, J).

### 6.3. Croissance comparée

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifie que : $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^\alpha}\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^\alpha$, où $X = \dfrac{x}{\alpha}$. Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.
2. Justifie que : $x^\alpha e^x = (-1)^\alpha \times \dfrac{X^\alpha}{e^X}$, où $X = -x$. Déduis-en $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x$.
3. Justifie que : $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \times \left(\dfrac{\ln X}{X}\right)$, où $X = x^\alpha$. Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.
4. Justifie que : $x^\alpha \ln x = -\dfrac{\ln X}{X^\alpha}$, où $X = \dfrac{1}{x}$. Déduis-en $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x$.

**Synthèse**

Soit $\alpha \in ]0 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

**Exercices de fixation**

**6-3-1** Réponds soit par vrai (V), soit par faux (F).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = +\infty$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^5} = 0$ ; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^4} = +\infty$ ; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^4} = +\infty$.

**6-3-2** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 e^{5x+3}$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{2x}}$ ; c) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{2}} \ln x$.

### 6.4. Fonction $u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)

Soit K un intervalle de $\mathbb{R}$, $u$ une fonction numérique strictement positive et dérivable sur K et $g$ la fonction numérique définie par : $g(x) = (u(x))^\alpha$.

1. a) Justifie que $g$ est dérivable sur K.
   b) Pour tout $x$ élément de K, calcule $g'(x)$.
2. Détermine les primitives sur K de la fonction : $x \mapsto u'(x)(u(x))^\alpha$.

**Synthèse**

Soit $u$ une fonction numérique dérivable et strictement positive sur un intervalle K, $\alpha$ un nombre réel et $g_\alpha$ la fonction définie sur K par $g_\alpha(x) = (u(x))^\alpha$.

- La fonction $g_\alpha$ est dérivable sur K et $\forall x \in K$, $g_\alpha'(x) = \alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$.
- Les primitives sur K de la fonction $u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$, sont les fonctions $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.

**Exercices de fixation**

**6-4-1** Dans chaque cas, détermine l'ensemble de définition de la fonction numérique $f$.

a) $f(x) = (1 - x^2)^{\ln 5}$ ; b) $f(x) = \ln(x-2)^{\frac{5}{2}}$ ; c) $f(x) = (e^{2x} - 3e^x)^{\sqrt{2}}$.

**6-4-2** 1. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 + 2x)^\pi$.
Pour tout $x$ élément de $]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$, calcule $f'(x)$.

2. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.
Calcule $f'(x)$.

## Exercice 1 Calculer des limites

Calcule les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(2-3x)e^x$ ; $\lim_{x\to-\infty}(2-3x)e^x$ ; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2-3x}$ ; $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-2x}}{1-2x}$.

**Corrigé**

Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}(2-3x)e^x$, $\lim_{x\to-\infty}(2-3x)e^x$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2-3x}$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-2x}}{1-2x}$.

• $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(2-3x)=-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(2-3x)e^x=-\infty.$

[Limite du produit] •

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(2-3x)e^x=2e^x-3xe^x$.

$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}2e^x=0\\ \lim_{x\to-\infty}-3xe^x=0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(2-3x)e^x=0.$

[Limite de la somme]

• $\forall x\in]\frac{2}{3};+\infty[$, $\frac{e^x}{2-3x}=\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{2-3x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-3x}=-\frac{1}{3}$.

D'où, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2-3x}=-\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-2x}}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{e^{1-2x}}{1-2x}$

$=-\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}$ $\quad|X=1-2x, X\longrightarrow+\infty$

$=-\infty.$

**Méthode**

On utilise les limites de référence pour calculer les limites.

## Exercice 2 Calculer des limites

On donne la fonction numérique $f$ définie par : $f(x)=x^2-2x-\ln(e^x-2)$.

Calcule : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

**Corrigé**

$\mathcal{D}_f=]\ln2;+\infty[$

• $\forall x\in]\ln2;+\infty[$ ;

$f(x)=x^2-2x-\ln[e^x(1-2e^{-x})]$

$=x^2-2x-(\ln(e^x)+\ln(1-2e^{-x}))$.

$|a<0$ et $b<0$ : $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

$\ln(e^x)=x$

$=x^2-3x-\ln(1-2e^{-x})$

$=x^2(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x})$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x}))=1\end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

**Méthode**

Pour lever l'indétermination, on met $e^x$ en facteur dans $e^x-2$ : $e^x-2=e^x(1-2e^{-x})$.

• $\forall x\in]\ln2;+\infty[$ ;

$\frac{f(x)}{x}=x(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x})$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x}))=1\end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$

## Exercice 3 Résoudre des équations

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - 4e^{-x} = 0$.

**Corrigé**

1. Posons : $t = e^x$.

$(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$.

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 3$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$

$S = \{0 ; \ln 3\}$

**Méthode**

- On utilise le fait que $e^{2x} = (e^x)^2$ et on pose $t = e^x$.
- Si une équation ou une inéquation comporte $e^{-nx}$, on peut multiplier chaque membre par $e^{nx}$.

2. En multipliant chaque membre par $e^x$, on a :

$e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 4$

$\Leftrightarrow 2x = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$S = \{\ln 2\}$

## Exercice 4 Résoudre des inéquations

Résous, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $(I_a) : e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 \leq 0$ ; b) $(I_b) : e^{2x} - 2e^x + 2 > 0$ ; c) $(I_c) : e^{2x} - 6e^x + 8 > 0$ ;

d) $(I_d) : \ln(e^x - 1) \leq 0$ ; e) $(I_e) : \ln|e^x - 1| \leq 0$ ; f) $(I_f) : \dfrac{e^x - 1}{e^x - 2} < 0$.

**Corrigé**

a) $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - e)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x - e)^2 = 0$ ou $(e^x - e)^2 < 0$ (impossible)

$\Leftrightarrow e^x - e = 0$

$\Leftrightarrow e^x = e$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S_{I_a} = \{1\}$

b) $e^{2x} - 2e^x + 2 > 0$

Posons $X = e^x$.

$(I_b) \Leftrightarrow X^2 - 2X + 2 > 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$

$\forall X \in \mathbb{R}, X^2 - 3X + 2 > 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^2 - 2e^x + 2 > 0$

$S_{I_b} = \mathbb{R}$

c) $e^{2x} - 6e^x + 8 > 0$

Posons $X = e^x$.

$(I_c) \Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 > 0$

2 est un zéro évident de P, où

$P(X) = X^2 - 6X + 8 = (X - 2)(X - 4)$

donc $(Ic) \Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x - 4) > 0$

$\Leftrightarrow e^x < 2$ ou $e^x > 4$

$\Leftrightarrow x < \ln 2$ ou $x > 2\ln 2$

$S = ]-\infty ; \ln 2[ \cup ]2\ln 2 ; +\infty[$

d) Contrainte sur l'inconnue $x$ :

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$x > 0$

$V_d = ]0 ; +\infty[$

**Méthode**

Lorsqu'une inéquation est de la forme $P(e^x) \geq 0$ (ou $> 0$, ou $< 0$, $\leq 0$), où P est un polynôme de degré $n$, on pose $X = e^x$.

* $\ln(e^x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow e^x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq \ln(2)$, En tenant compte de $V_d$,

$S = ]0 ; \ln 2]$

e) $(I_e)$ * Contrainte sur l'inconnue $x$

$e^x - 1 \neq 0$

$x \neq 0$

$V_e = \mathbb{R}^*$

* $\ln|e^x - 1| \leq 0 \Leftrightarrow |e^x - 1| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq e^x - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq e^x \leq 2$

$\Leftrightarrow e^x \leq 2$ ($0 \leq e^x$ : toujours vraie)

$\Leftrightarrow x \leq \ln(2)$

En tenant compte de $V_e$,

$S = ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; \ln 2]$

f) $\dfrac{e^x - 1}{e^x - 2} < 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2) < 0$ si $x \neq \ln 2$

$\Leftrightarrow 1 < e^x < 2$

$\Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$

$S = ]0 ; \ln 2[$

## Exercice 5 Résoudre des inéquations

1. a) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
   Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x - 4)$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) \geq 0$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^x - 7 \geq 5e^{-x} - 4e^{-2x}$.

**Corrigé**

1. a) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x - 1)(x^2 - 3x - 4) = 2x^3 + (-6 - 1)x^2 + (-8 + 3)x + 4 = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$

$P(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x - 4)$.

b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$

$P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x - 4)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2 - 3x - 4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $4$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ou $x \geq 4$

$S = [-1 ; \frac{1}{2}] \cup [4 ; +\infty[$.

**Méthode**

Dans la dernière question, multiplier chaque membre par $e^{2x}$ et poser $X = e^x$.

2. En multipliant chaque membre par $e^{2x}$, on a :

$2e^{3x} - 7e^{2x} \geq 5e^x - 4$

$2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0$

$2(e^x)^3 - 7(e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0$

$P(e^x) \geq 0$, ou en posant $X = e^x$, l'inéquation devient $P(x) \geq 0$.

$-1 \leq e^x \leq \frac{1}{2}$ ou $e^x \geq 4$, d'après 1.b)

$e^x \leq \frac{1}{2}$ ou $e^x \geq 4$ ($-1 \leq e^x$ : toujours vrai)

$x \leq -\ln 2$ ou $x \geq \ln 4$

$S_{4b} = ]-\infty ; -\ln 2] \cup [2\ln 2 ; +\infty[$.

## Exercice 6 Étudier une fonction comportant la fonction exponentielle

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $g$ dans le repère orthonormal (O, I, J).
Unité graphique 2 cm.

1. Calcule la dérivée $g'$ de $g$ et démontre que $g'(x)$ est du signe de $(1 - x^2)$. Déduis-en les variations de $g$.
2. Démontre que :
   a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
   b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et précise l'asymptote à $(\mathscr{C})$ correspondante.
3. Trace la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère (O, I, J).
Tu placeras en particulier les points de la courbe d'obscisses respectives –2 ; –1 ; 0 ; 1 et 3.

**Corrigé**

1. $g'(x) = 2(x + 1)e^{-x} + (x + 1)^2 (-e^{-x}) = (1 - x^2)e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe $1 - x^2$.

D'où $g$ est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

$g$ est croissante sur $]-1 ; 1[$.

2. a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ car $\lim_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} + 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x} = 0$ ; $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

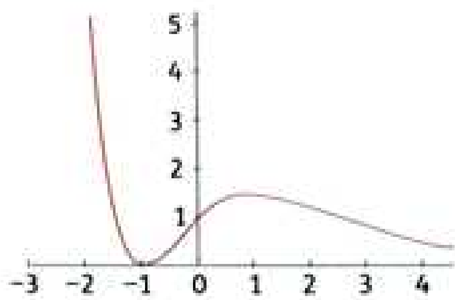
**Méthode**

$P(x)$ est un polynôme.
Pour calculer la limite en $+\infty$ de $P(x)\, e^{-x}$, on développe $P(x)\, e^{-x}$.
Pour calculer la limite en $-\infty$ de $P(x)\, e^x$, on développe $P(x)\, e^x$.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$.

3. Le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |



## Exercice 7 Étudier une fonction comportant une fonction exponentielle de base $a$

Soit $g$ la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x).3^x$.
1. Étudie le sens de variation de la fonction $g$.
2. Calcule les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Corrigé**

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -(x-1)e^{x\ln 3}$

$g'(x) = -[1 + (x-1)\ln 3]e^{x\ln 3} = -(x\ln 3 + 1 - \ln 3)e^{x\ln 3}$
$= -(x\ln 3 + 1 - \ln 3)3^x$

$3^x > 0$.

$g'(x)$ a le même signe que $-(x\ln 3 + 1 - \ln 3)$

$x\ln 3 + 1 - \ln 3 > 0 \Leftrightarrow x > 1 - \frac{1}{\ln 3}$.

- $\forall x \in ]1 - \frac{1}{\ln 3} ; +\infty[$, $g'(x) < 0$.

D'où, $g$ est strictement décroissante sur $[1 - \frac{1}{\ln 3} ; +\infty[$.

- $\forall x \in ]-\infty ; 1 - \frac{1}{\ln 3}[$, $g'(x) > 0$.

D'où, $g$ est strictement croissante sur $]-\infty ; 1 - \frac{1}{\ln 3}]$.

2. • $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3^x - x3^x$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x3^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

**Méthode**

On pourra écrire $3^x = e^{x\ln 3}$.

## Exercice 8 Étudier une fonction puissance

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 3 cm.

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x+1)^{3\sqrt{2}} - 1$ si $x > -1$ et, $f(-1) = -1$.
1. Détermine l'ensemble de définition de $f$.
2. Étudie la continuité de $f$ à droite en $-1$.
Étudie la dérivabilité de $f$ à droite en $-1$.
3. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
4. Construis la courbe représentative (C) de $f$ dans le repère (O, I, J).

**Corrigé**

1. $-1 \in \mathscr{D}_f$

Et, sur $\mathbb{R} \setminus (-1)$, $x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow x + 1 > 0$
$\Rightarrow x > -1$

$\mathscr{D}_f = [-1 ; +\infty[$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{3\sqrt{2}} = 0$ car $3\sqrt{2} > 0$

D'où, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -1$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)$.

D'où, $f$ est continue à droite en $-1$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{(x+1)^{3\sqrt{2}}}{x+1}$
$= \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)^{3\sqrt{2}-1} = 0$ car $3\sqrt{2} - 1 > 0$.

**Méthode**

$u$ étant une fonction et $\alpha$ un nombre de réels, la fonction $u^\alpha$ est définie pour tout nombre réel $x$ tel que $u(x) > 0$.

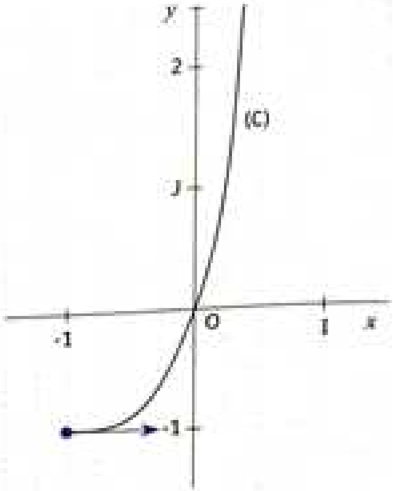
D'où, $f$ est dérivable à droite en $-1$ et $f_d'(-1) = 0$.
Donc, $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-1$.

3. $\forall x \in [-1\,;+\infty[$, $f'(x) = 3\sqrt{2}\,(x+1)^{3/2-1}$ et $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^{3/2} - 1 = +\infty$$

4.



## Résumé de cours

### 1 Fonction exponentielle népérienne

#### 1.1. Définition

**Définition** On appelle fonction exponentielle népérienne, et on note exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
Et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

<u>Conséquences de la définition</u>

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
  $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in ]0\,;+\infty[$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ (on a appliqué ln membre à membre).

#### 1.2. Propriétés algébriques

**Propriétés** Pour tous réels $a$ et $b$, et pour tout nombre rationnel $r$.

- $e^{a+b} = e^a e^b$ ; • $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ ; • $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ ; • $e^{ra} = (e^a)^r$.

#### 1.3. Fonction dérivée de la fonction exp

**Propriété** La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp x = e^x$.

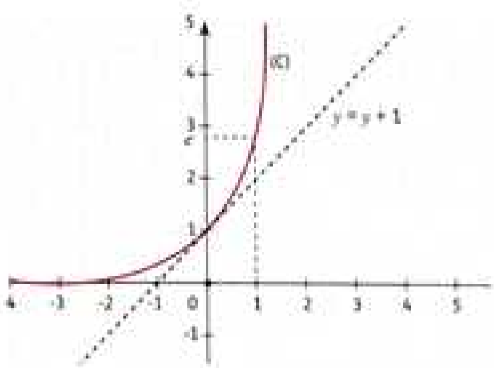
**Propriété** Pour tous réels $a$ et $b$,
$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ ; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ ; $(e^a > e^b \Leftrightarrow a > b)$.

#### 1.4. Limites de référence

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ; • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ; • $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ; • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

#### 1.5. Représentation graphique

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $(e^x)'$ | + | |
| $e^x$ | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |




Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction exp.
Soit (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
On a (T) : $y = x + 1$.

## 2 Équations - Inéquations

- Pour tout nombre réel $a$ élément de $]-\infty\,;0]$ :
  - L'équation : $e^x = a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  - L'inéquation : $e^x \leq a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel $a$ élément de $]0\,;+\infty[$.
  - L'équation : $e^x = a$, $\Leftrightarrow x = \ln a$.
  - Les inéquations : $e^x \leq a$, $e^x > a$, ... sont respectivement équivalentes à $x \leq \ln a$, $x > \ln a$,...
- Pour résoudre une équation du type $P(e^x) = 0$ ou une inéquation du type

$P(e^x) \leq 0$ ($P(e^x) \geq 0$, ...), on pose $e^x = X$, avec $X > 0$, et P un polynôme.

## 3 Dérivées et primitives

### 3.1. Dérivée de $e^u$

**Propriété** Soit $u$ une fonction numérique dérivable sur un intervalle K et $f$ la fonction définie par : $f(x) = e^{u(x)}$.
La fonction $f$ est dérivable sur K et, $\forall x \in K$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

### 3.2. Primitives de $u'e^u$

**Propriété** Soit $u$ une fonction numérique dérivable sur un intervalle K et $f$ la fonction définie par : $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
La fonction $f$ admet des primitives sur K et les primitives de $f$ sur K sont les fonctions F telles que : $\forall x \in K$, $F(x) = e^{u(x)} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

## 4 Fonctions exponentielles de base $a$

### 4.1. Définition

**Définition** Soit $a$ un nombre réel strictement positif et différent de 1.

- Pour tout nombre réel $x$, $a^x = e^{x\ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base $a$, la fonction : $x \mapsto a^x$.

*Exemple*

La fonction exponentielle népérienne ($x \mapsto e^x$) est la fonction exponentielle de base $e$.

### 4.2. Propriétés algébriques

**Propriétés** Pour tous $a$ et $b$ éléments de $]0\,;+\infty[$ et pour tous nombres réels $x$ et $y$,
$a^x \times a^y = a^{x+y}$ ; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ; $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ ; $(a^x)^y = a^{xy}$ ; $a^x \times b^x = (ab)^x$ ;
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

## Résumé de cours

### 4.3. Limites de référence

**Propriétés** Soit $a$ un élément de $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

Si $a > 1$, alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$, alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$

### 4.4. Étude et représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit $a$ un nombre réel de $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et $f_a$ la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.

On note $(C_a)$ la courbe représentative de $f_a$ dans le repère (O, I, J).

Pour tout réel $x$ ; $f_a(x) = e^{x\ln a}$ et $\frac{f_a(x)}{x} = (\ln a)\frac{e^{x\ln a}}{x\ln a}$.

| $0 < a < 1$ | $a > 1$ |
|---|---|
| **Limites et branches infinies** | |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ |
| • $(\mathscr{C}_a)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).<br>• La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_a)$ en $+\infty$. | • La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_a)$ en $-\infty$.<br>• $(\mathscr{C}_a)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ). |
| **Dérivabilité** | |
| • $f_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.<br>• Pour tout nombre réel $x$, $f_a'(x) = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$. | |
| **Sens de variation** | |
| $\forall x \in \mathbb{R}, f_a'(x) < 0$<br>D'où, $f_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. | $\forall x \in \mathbb{R}, f_x'(x) > 0$.<br>D'où, $f_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. |
| **Tableau de variation** | |

$0 < a < 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_a'(x)$ | | $-$ | |
| $f_a(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

$a > 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_a'(x)$ | | $+$ | |
| $f_a(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Exemples*

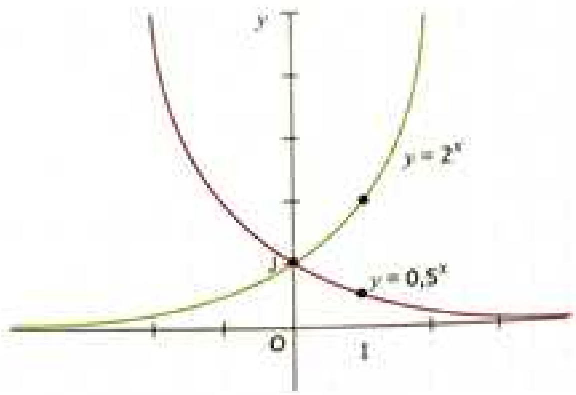
Pour tout nombre réel $x$,

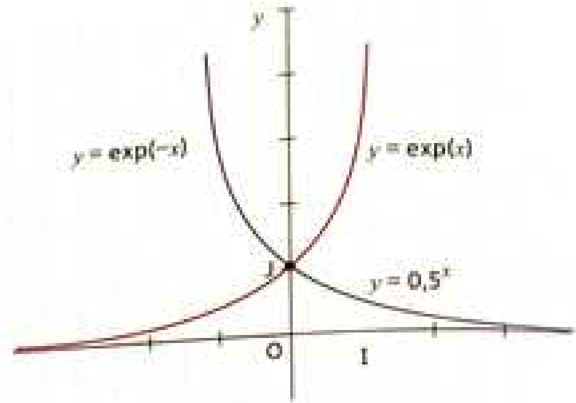
$2^{-x} = \frac{1}{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (0{,}5)^x$

$2 > 1$ et $0 < 0{,}5 < 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

$e > 1$ et $0 < \frac{1}{e} < 1$




## 5 Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle, on peut suivre les étapes de l'étude d'une fonction dans le cas général.

## 6 Fonctions puissances

### 6.1. Notion de fonction puissance

**Définition** Soit $a$ un nombre réel.
On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha$, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout $x$ associe $x^\alpha$.
Et, $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

*Ensemble de définition*

Soit $\alpha$ un nombre réel de $\mathbb{R}$ et $f_\alpha$ la fonction numérique définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est $]0\,;+\infty[$.

### 6.2. Étude et représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $\alpha$ un nombre réel de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $f_\alpha$ la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$, par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
On note $(\mathscr{C}_{f\alpha})$ la courbe représentative de $f_\alpha$ dans le repère (O, I, J).

| $\alpha < 0$ | $\alpha > 0$ |
|---|---|
| **Ensemble de définition et calcul** | |
| • $\mathscr{D}_f = ]0\,;+\infty[$<br>• $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ | |

### Limites et branches infinies

| | |
|---|---|
| • $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = +\infty$<br>• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$<br>• La droite (OJ) est une asymptote à $(\mathscr{C}_{\alpha})$.<br>• La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_{\alpha})$ en $+\infty$. | • $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$<br>• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$<br>Si $0 < \alpha < 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{x} = 0$<br>Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{x} = +\infty$<br>• $(\mathscr{C}_{\alpha})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) lorsque $0 < \alpha < 1$.<br>• $(\mathscr{C}_{\alpha})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) lorsque $\alpha > 1$. |

### Dérivabilité et fonction dérivée

• $f_{\alpha}$ est dérivable en tout point de $]0\,;+\infty[$.

• $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $(f_{\alpha})'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

### Sens de variation

$f_{\alpha}'(x)$ a le même signe que $\alpha$.

| | |
|---|---|
| $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f_{\alpha}'(x) < 0$<br>$f_{\alpha}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. | $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f_{\alpha}'(x) > 0$<br>$f_{\alpha}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. |

### Tableau de variation

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_{\alpha}'(x)$ | $-$ | |
| $f_{\alpha}(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

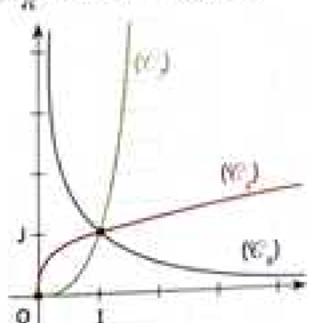
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_{\alpha}'(x)$ | $+$ | |
| $f_{\alpha}(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

### Exemples de représentations graphiques

Courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ des fonctions numériques $f$, $g$ et $h$ définies respectivement par :

$f(x) = x^{e}$, $g(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$ et $h(x) = x^{-\ln 3}$

$e > 1$, $0 < \dfrac{1}{\pi} < 1$ et $-\ln 3 < 0$




**Méthode**

Identification de l'allure à l'aide d'une fonction élémentaire :

<u>$\alpha > 1$</u> :

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to x^2$.

<u>$0 < \alpha < 1$</u> :

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to \sqrt{x}$.

$\alpha < 0$ :

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to \dfrac{1}{x}$.

### 6.3. Croissance comparée

**Propriétés** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

### 6.4. Fonction $u^\alpha$

Soit $u$ une fonction définitive sur un intervalle K et $\alpha$.

- La fonction $x \mapsto (u(x))^\alpha$ est définie pour tout $x$ tel que $u(x) > 0$.
- Si $u$ est dérivable et strictement positive sur K, alors :

- la fonction $u^\alpha$ est dérivable sur K et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha - 1}$ ;
- les primitives sur K de la fonction $u'u^\alpha$ sont les fonctions $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$.

## Exercices de renforcement

**1** $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Calcule, dans chaque cas, les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f(x) = e^x - x^2 + x - 1$ ; 2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

3. $f(x) = \dfrac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{-2x}}$ ; 4. $f(x) = x^2e^{-x} + xe^{-2x}$

5. $f(x) = \dfrac{e^x - 6}{e^x - 2}$ ; 6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+2}{e^x-2}\right)$

7. $f(x) = 3x - \ln(e^{2x}+1)$ ; 8. $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - x$

9. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{e^x - 1}$ ; 10. $f(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{x}$

11. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-2x} - 1}{x}$ ; 12. $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-1)^3}$

13. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}e^{\frac{1}{x^2-4}}$ ; 14. $f(x) = \ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x-2}\right|$

15. $f(x) = (e^x-2)\left|\dfrac{e^x-1}{e^x-2}\right|$.

**2** Démontre que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{3x}) - \ln(1+e^{-3x}) = 3x$.

**3** Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1} = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

**4** Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = 0$.

**5** Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes.

1. $e^6x + 2e3x - 3 = 0$ ; 2. $(x+4)(e^2x - 1) > 0$.

**6** Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :
$-4e^3x + 17e^2x + 16e^x - 5 = 0$.

**7** Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^xe^y = e^{-2} \end{cases}$

**8** Calcule :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x-1}{x}$ ; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{3x}$ ;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x$ ; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x - x^2}$.

**9** Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{5x}$ ; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} - e^{3x+4}$ ;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{x+3}$ ; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{x+3}$ ;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{x+3}$ ; f) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 3e^x - 2$ ;

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 - e^x$.

**10** Détermine les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-e^{5x}}{x}$ ; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+3)e^x$.

**11** Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{(x^4+x+1)}$.

**12** Démontre que pour tout nombre réel $x$ :
$(e^{2x} - e^{-x})(1 + e^{-3x}) = (e^{3x}+1)(1 - e^{-3x})e^{-x}$.

**13** Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x-2}{e^x+1}$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x-2}{e^x+1}$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$.

**14** Détermine les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2-2x)e^x$ ; 2. $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$ ;

3. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{2e^x = 1}$.

**15** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$ dont le tableau de variation est :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-18e^{-2}$ | ↗ | |

Détermine $a$, $b$, $c$ et $d$.

**16** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (4-x)e^{\frac{1}{2}x}$.

1. Détermine la limite de $f$ en $-\infty$.
2. Détermine la limite de $f$ en $+\infty$, puis interprète graphiquement le résultat.

**17** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. Démontre que pour tout réel $x < 0$, $f(x) < 0$.
2. Démontre que pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq f(x) < 1$.

**18** Détermine le signe de chacune des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$ :

a) $1 - e^x$ ; b) $e^{2x} - 1$ ; c) $e^{2x} - e^{x+1}$ ;

d) $e^{(x^2)} - e^{x+1}$ ; e) $1 - \dfrac{1}{e^x}$.

**19** 1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$9x - 3x - 2 = 0$.

2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (F) :
$3 \times 5^{2x} - 8 \times 5^x - 3 = 0$.

**20** Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $\left(\frac{4}{24}\right)^{x+1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{-2x}$ ;

b) $4^{5x+1} = (256)^{2x-3}$.

**21** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x3^{-x}$. $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$.

1. Détermine les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudie les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ puis dresse son tableau de variation.
3. a) Étudie la branche parabolique de $f$ en $-\infty$.
   b) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
4. Trace $(\mathscr{C})$, (T) et les asymptotes éventuelles.

**22** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x) = e^{\frac{x+1}{x+2}}$. $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Détermine les limites aux bornes de l'ensemble de définition de $f$. Donne une interprétation graphique du résultat.
2. Étudie les variations de $f$.
3. Détermine une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

**23** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Calcule $f(-x)$. Que peut-on conclure sur $(\mathscr{C})$.
2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis déduis-en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Calcule $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
4. Démontre que l'équation $f(x)= 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et que ces solutions sont opposées.

**24** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - x > 0$.
   b) Déduis-en l'ensemble de définition de $f$.
2. a) Démontre que si $x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$.
   b) Détermine les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Interprète géométriquement les résultats.
3. a) Détermine la fonction dérivée $f'$ de $f$.
   b) Étudie le signe de la dérivée de $f$ puis dresse le tableau de variation de la fonction $f$.
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Trace soigneusement la courbe $(\mathscr{C})$, en indiquant la tangente horizontale et la tangente (T).

**25** Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans son sang est modélisée en fonction du temps $t$, exprimé en heure, par la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = 2te^{-t}$.

1. Étudie les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ?
   Quelle est sa valeur ? Arrondis à $10^{-2}$ près.
3. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} 2te^{-t}$.
   Interprète le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0, 2 g. $L^{-1}$ pour un jeune conducteur.
   a) Démontre qu'il existe deux nombres réels $t_1$ et $t_2$ tels que : $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.
   b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donne le résultat arrondi à la minute la plus proche. Tu pourras calculer $f(4)$ et rentrer la fonction $g = f - 0{,}2$ et utiliser la méthode de dichotomie.

**26** On considère la fonction numérique $g$ de $[1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^x - x^2$.
La fonction $g$ est deux fois dérivable sur $[1 ; +\infty[$.

1. a) Justifie que la fonction dérivée, $g'$ de $g$, est strictement croissante.
   b) Justifie que : $\forall x \in [1 ; +\infty[,\ g'(x) > 0$.
2. Démontre que : $\forall x \in [1 ; +\infty[,\ e^x > x^2$.
3. Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
4. Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{R}^*)$
(Tu pourras faire le changement : $x = nt$).

**27** On considère la fonction numérique $f$ continue et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{1-2x}$.
On donne la fonction numérique F dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax + b)e^{1-2x}$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.
Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que F est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**28** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.
On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 4}{e^x - 2}$.
La fonction $f$ est deux fois dérivable en tout point de son ensemble de définition. $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$.

1. Justifie que le point $A(\ln 2 ; \frac{3}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.
2. Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
4. a) Justifie que la droite (T) : $y = 2x + 3$, est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$,
   $f''(x) = \dfrac{-2e^x(e^x - 2)(e^x + 2)}{(e^x - 2)^4}$
   Déduis-en la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T) sur $]-\infty ; \ln 2[$.
5. Trace la droite (T) et construis $(\mathscr{C})$.

**29** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.
On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x + 1 + \dfrac{e^x - 8}{e^x - 4}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

1. Démontre que le point $A(2\ln 2 ; \frac{5}{2} - 2\ln 2)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.
2. Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\ln 2\}$,
   $f'(x) = -\dfrac{e^{2x} - 12e^x + 16}{(e^x - 4)^2}$.
4. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation. [On prendra : $f(\ln(6 - 2\sqrt{5})) = 3{,}19$ et $f(\ln(6 + 2\sqrt{5})) = -0{,}97$].
5. a) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\ln 2\}$,
   $f(x) = -x + 3 - \dfrac{e^x}{e^x - 4}$.
   b) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\ln 2\}$,
   $f(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{e^x - 4}$.
6. a) Justifie que la droite (D) : $y = -x + 2$, est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   b) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
7. a) Justifie que la droite (D') : $y = -x + 3$, est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
   b) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D').
8. Trace les droites (D) et (D') puis construis $(\mathscr{C})$ avec soin.
9. Trouve une primitive F de $f$ sur $]-\infty ; 2\ln 2[$ (sans le symbole de la valeur absolue).

**30** On considère la fonction $f$ de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^{2x}, \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.
Étudie la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.

**31** On donne la fonction $f$ de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{\sqrt{2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Étudie la dérivabilité de $f$ en 0.

**32** On donne la fonction $f$ de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{\sqrt{2}-1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Étudie la dérivabilité de $f$ en 0.

## Exercices d'approfondissement

**33** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction numérique $g$ définie sur $]-\infty ; -1[ \cup [0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\sqrt{2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
La fonction $g$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $g$.

1. Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
2. Étudie la continuité de $g$ en 0.
3. Justifie que $g$ est dérivable en zéro et $g'(0) = 0$.
4. Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.
5. Trace $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes.

**34** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). OI = 2 cm.

**Partie A**

1. On donne la fonction $h$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = xe^x - 5$.
   a) Calcule les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudie le sens de variation de $h$ et dresse son tableau de variation.

c) Justifie que : l'équation : $h(x) = 0$, a dans l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ une unique solution $\gamma$ comprise entre 1,32 et 1,33.

d) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; \gamma[\ , h(x) < 0 \\ \forall x \in ]\gamma ; +\infty[\ , h(x) > 0 \end{cases}$.

2. On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^x - 5\ln x - 5$.

a) Calcule les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.

c) Justifie que : l'équation : $g(x) = 0$, a dans l'intervalle $]0 ; \gamma[$ une unique solution $\alpha$ telle que : $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d) Justifie que : l'équation : $x \in [2{,}18 ; 2{,}19]$, $g(x) = 0$, admet une unique solution $\beta$.

e) Justifie que :

$$\begin{cases} \forall x \in ]0 ; \alpha[ \cup ]\beta ; +\infty[\ , g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha ; \beta[\ , g(x) < 0 \end{cases}.$$

**Partie B**

On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - 5x\ln(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O ; I ; J)$.

1. Vérifie que : $f(\alpha) = e^\alpha + (5 - e^\alpha)\alpha$.

2. a) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$.

b) Justifie que $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique.

3. a) Justifie que $f$ est continue en zéro.

b) Étudie la dérivabilité de $f$ en zéro. Interprète graphiquement le résultat.

4. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.

5. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ avec soin.

**35** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité graphique : 1cm.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln\left|\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right|$.

On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de $f$ dans le repère (O, I, J).

1. Justifie que la fonction $f$ est impaire.

2. Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

3. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$(4e^x - 1)(e^x - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$.

4. Vérifie que, pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}\setminus\{-2\ln 2 ; 2\ln 2\}$, $f'(x) = \dfrac{-15e^x}{(4e^x - 1)(e^x - 4)}$.

5. a) Étudie le sens de variation de $f$.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

6. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$ par : $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{5}{3}x$.

a) Vérifie que, pour tout $x$ élément de $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$, $\varphi'(x) = \dfrac{-20(e^x - 1)^2}{3(4e^x - 1)(e^x - 4)}$.

b) Étudie le sens de variation de $\varphi$.

c) Justifie que :

$$\begin{cases} \forall x \in ]0 ; \alpha[ \cup ]\beta ; +\infty[\ , g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha ; \beta[\ , g(x) < 0 \end{cases}.$$

7. a) Détermine une équation de la droite (T) tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

b) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T) sur $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$.

8. Trace la droite (T) et construis $(\mathscr{C})$ avec soin.

**Partie B**

On désigne par $(\mathscr{C}_0)$ l'arc de $(\mathscr{C})$ relative à l'intervalle $]-2\ln 2 ; 2\ln 2[$.

On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\ln\left(\dfrac{e^x + 4}{4e^x + 1}\right)$.

On note $(\Gamma)$ la représentation graphique de $g$ dans le repère (O, I, J).

1. Justifie que $(\mathscr{C}_0)$ a pour équation : $y = \ln\left(-\dfrac{4e^x - 1}{e^x - 4}\right)$.

2. On donne la transformation $r$ du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

a) Détermine l'écriture complexe de $r$.

b) Étudie la transformation $r$.

3. a) Justifie que $(\Gamma)$ et l'image de $(\mathscr{C}_0)$ par la rotation $r$.

b) Donne les asymptotes de $(\Gamma)$ puis construis $(\Gamma)$ soigneusement.

**36** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

**Partie A**

On donne la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 1)e^{1-x} + 1$.

1. Calcule les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.
3. Justifie que l'équation : $g(x) = 0$, admet une unique solution $\alpha$ telle que : $-1{,}13 \leq \alpha \leq -1{,}12$.
4. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;\alpha[ \ , g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha;+\infty[ \ , g(x) > 0 \end{cases}$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x + 2)(1 - e^{1-x})$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

1. Vérifie que : $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha + 1}$.
2. Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
   b) Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
4. On donne la fonction $h$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 3x + 3$.
   a) Justifie que la fonction dérivée $h'$ de $h$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
   b) Vérifie que : $h'(1) = 0$.
   c) Étudie le sens de variation de $h$.
   d) Justifie que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $h(x) \leq 0$.
5. a) Justifie que la droite (T) : $y = 3x - 3$, est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
   b) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T) sur $[0 ; +\infty[$.
6. Justifie que $(\mathscr{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).
7. a) Justifie que la droite (D) : $y = x + 2$, est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   b) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
8. Trace les droites (T) et (D) puis construis $(\mathscr{C})$.

**37** On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = x^2 + x - 2\ln|e^x - 1|$.

La fonction $f$ est deux fois dérivable en tout point de son ensemble de définition.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Justifie que la fonction $f$ est paire.
2. Justifie que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
   Interprète graphiquement ce résultat.
3. Calcule la limite de $f$ en $+\infty$ puis justifie que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
   Donne une interprétation graphique de ces résultats.
4. Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{e^x - 1}$ et $f''(x) = 2 + \dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.
5. Justifie que la fonction dérivée $f'$ de $f$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
6. Justifie que l'équation : $x \in ]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 0$, admet une unique solution $\alpha$ comprise entre 1,04 et 1,05.
7. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in ]0;\alpha[ \ f(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha;+\infty[ \ f'(x) > 0 \end{cases}$.
8. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation (tu prendras $f(\alpha) = 0{,}92$).
9. Soit $a$ un élément de $]-\infty ; 0[$ et $(\mathrm{T}a)$ la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $a$.
   Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathrm{T}a)$ sur $]-\infty ; 0[$.
10. Construis $(\mathscr{C})$.

**38** **Partie A**

On donne la fonction numérique $f$ définie sur $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$.

La fonction $f$ est deux fois dérivable en tout point de son ensemble de définition.

1. Vérifie que : $\forall x \in ]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \dfrac{1}{x + 1}$ et $f''(x) = \dfrac{-1}{x(x + 1)^2}$.
2. a) Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
   b) Étudie le sens de variation de $f'$.
   Déduis-en que : $\forall x \in ]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
3. Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

**Partie B**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $]-\infty ; -1[\cup[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

La fonction $g$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $g$ dans le repère (O, I, J). (Tu utiliseras le fait que : $\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]0 ; +\infty[$, $g(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$).

1. Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = e$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = +\infty$

puis calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. a) Étudie la continuité de $g$ en 0.

b) Justifie que $g$ n'est pas dérivable en zéro et que la droite (OJ) est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

3. Étudie le sens de variation de $g$ et dresse son tableau de variation.

4. Construis $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes.

**39** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

On considère les fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\begin{cases} f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x \neq 0 ; \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $g(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$.

**Partie A**

1. Étudie les variations de $g$.

2. Justifie que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

3. a) Justifie que : $-1 \leq \alpha \leq 0$.

b) Détermine, par balayage, un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

4. Étudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie B**

1. Calcule les limites respectives de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Calcule les limites de $f$ à gauche et à droite en zéro.

b) Étudie la continuité de $f$ en zéro.

3. a) Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement le résultat obtenu.

4. Justifie que : pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.

5. a) Étudie les variations de $f$.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

**40** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques : 2 cm sur (OI) et 0,5 cm sur (OJ).

On donne les fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{\frac{1}{x}}$ et $g(x) = 2x^3 - x - 1$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$.

**Partie A**

1. Factorise $g(x)$.

2. Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie B**

1. Calcule les limites respectives de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calcule les limites de la fonction $f$ à gauche et à droite en 0.

3. a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{h(x)}{x}$ où $h$ est le prolongement par continuité de $f$ à gauche en zéro.

b) Interprète graphiquement le résultat obtenu.

4. Justifie que : pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

5. Dresse le tableau de variation de $f$.

6. a) Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement le résultat obtenu.

7. Construis la courbe $(\mathscr{C})$.

**41** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}, \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$ dans le repère (O, I, J).

**Partie A** (Étude de la fonction $f$)

1. a) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calcule les limites de $f$ à gauche et à droite en 1.

2. a) Étudie la continuité de $f$ en 1.

b) Étudie la dérivabilité de $f$ à droite en 1.

3. a) Étudie le sens de variation de $f$.

b) Dresse le tableau de variation de $f$.

**Partie B**

(Représentation graphique de la fonction $f$)

1. Justifie que la droite (T) : $y = \sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$ est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $-1$.

2. Justifie que la droite (D) : $y = x$, est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. On donne la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - (\sqrt{e}\,x + \sqrt{e})$.

a) Calcule $g'(-1)$ et donne l'arrondi d'ordre 2 de $g'\left(\frac{5}{3}\right)$.

b) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$g''(x) = \frac{-3x+5}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}$.

c) Étudie le sens de variation de $g'$.

d) Justifie que :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in ]-1 ; 1[, g'(x) > 0 \\ g'(-1) = 0 \end{cases}$$

e) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; 1[, g(x) \geq 0 \\ \forall x \in ]1 ; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

f) Étudie la position de (T) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

4. Soit $h$ la fonction définie de $\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x-1}} - 1$.

a) Donne un arrondi d'ordre 2 de $h(\,)$.

b) Calcule les limites de $h$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudie le sens de variation de $h$.

d) Détermine le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x$.

e) Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

5. Trace les droites (D), (T) et construis $(\mathscr{C})$.

**42** L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé sous l'effet du rayonnement cosmique, en carbone 14, radioactif, noté $^{14}C$. Les êtres vivants contiennent donc du $^{14}C$ qui est renouvelé constamment. À leur mort, il n'y a plus d'emprunt de $^{14}C$ à l'extérieur et le carbone $^{14}C$ qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de $^{14}C$ qui lui reste.

Soit N($t$) le nombre d'atomes de $14_C$ existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique.

La vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atomes présents.

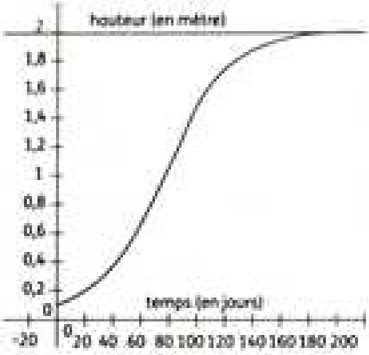
En appelant $N_0$ le nombre d'atomes de $^{14}C$ initial, $N(t) = N_0e^{-0{,}0001238t}$.

1. Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 30 000 ans ?
2. On appelle période (ou demi-vie) du carbone 14C, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.
Détermine la période du $^{14}C$ (à 1 an près).
3. On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. On constate qu'ils ont perdu 40% de leur teneur en carbone.
Détermine l'âge du fragment d'os.

**43** La hauteur, en mètre, d'un plant de maïs à l'instant $t$ est modélisée par la fonction $h$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = \frac{a}{1+be^{[illegible]}}$ où $t$ est exprimé en jour, $a$ et $b$ sont des constantes réelles.

On sait qu'à l'instant $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers 2 m.

1. Détermine $a$ et $b$.
2. On a représenté la courbe de la fonction $h$.
La vitesse de croissance du plant de maïs correspond à la dérivée de la fonction $h$.
À l'aide du graphique, détermine une valeur approchée de l'instant $t$ où la vitesse de croissance est maximale.
À quelle hauteur du plant cela correspond-il ?




**44** Un inspecteur de police qui arrive sur le lieu d'un crime demande au médecin légiste de prendre la température de la victime. Elle est de 32° C.

Il prend la température de la pièce, qui est de 20° C. Une demi-heure plus tard, la température de la victime est de 31° C.

La loi de Newton sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en posant $T(t) = Ae^{-ct} + 20$ où $t$ représente le temps, exprimé en heures, depuis la mort de la victime et T($t$) la température de la victime à l'instant $t$, en degré Celsius.

On admet qu'à l'instant du crime ($t$ = 0), la température du corps était de 37° C.

1. Détermine la constante c.
2. Détermine l'heure du crime.

**45** On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, en m/s, de chute de la goutte en fonction de la durée $t$ de chute est donnée par la fonction v définie pour tout nombre réel $t$ non nul par :

$v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ ; la constante $m$ est la masse de la goutte en milligramme et la constante $k$ est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air. On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

**Partie A**

1. Étudie le sens de variation de la fonction $v$.
2. La goutte d'eau ralentit-elle au cours de sa chute ?
3. Justifie que la limite de la fonction $v$ en $+\infty$ est $9{,}81\,\frac{m}{k}$.

*Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.*

4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite.
Cette affirmation est-elle correcte ?

**Partie B**

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3{,}9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de la goutte est 15 m/s.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondis le résultat au dixième de seconde.
2. Déduis-en la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse.
*Arrondis le résultat au dixième de m/s.*

## Situations complexes

**46'** Des élèves en classes de Terminale D désirant faire la médecine après le BAC ont organisé une sortie d'étude au Centre Hospitalier Universitaire de Cocody.
Au cours de leur passage au service pédiatrie ils ont été stupéfiés par les informations suivantes données par un médecin.
« Le modèle de Jenss est généralement considéré comme le plus précis dans la prévision de la taille d'un enfant.

Si $h(x)$ désigne la taille en (cm) à l'âge $x$ (en années), la formule de Jenss donne :
$h(x) = 79{,}041 + 6{,}39x - e^{3{,}261 - 0{,}993x}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$. »
Une élève intéressée par la pédiatrie est revenue de la sortie avec ces informations. Elle demande à ses amis de classe de l'aider à répondre aux préoccupations suivantes :
- Quels sont le taux de croissance et la taille d'un enfant d'un an ? d'un enfant de 30 mois ?
Indication : le taux de croissance à l'âge $x$ est $h'(x)$.
- À quel âge le taux de croissance est-il le plus élevé ? le plus faible ?

En tant qu'élève en classe de Terminale D, tu es sollicité pour les aider.
Réponds à leurs préoccupations.

**47'** Pendant la fête de fin d'année de leur établissement, la promotion Terminale d'un lycée a invité le député de leur région à prononcer une conférence. Le chef de classe de la $TD_1$ a noté les informations suivantes.
« Selon les spécialistes, notre région a un fort taux de natalité et le nombre d'habitants est modélisé par la fonction $f$ définie par :
$f(x) = 12e^{0{,}05x}$ où $f(x)$ est la population exprimée en millions d'habitants pour l'année $2020 + x$.
Notre région ne peut nourrir plus de vingt millions de personnes. La population en 2020 est estimée à 5 000 000 F.
À cette allure, la population va tripler bientôt et on se demande bien pendant combien d'année, après 2020, la nourriture sera-t-elle suffisante. »
Éberlué par l'utilisation de la fonction exponentielle pour évaluer une population, le chef de classe rapporte ces informations à ses amis de classe et leur demande de répondre aux préoccupations soulevées dans la dernière phrase.

Détermine l'année à partir de laquelle la nourriture sera insuffisante.

### Coup de Pouce

**46** Calculer $h(1)$ et $h'(1)$
30 mois $\longrightarrow$ 2,5 ans
Calculer $h(2{,}5)$ et $h'(2{,}5)$
Étudier les variations de $h$ sur $\left[\frac{1}{4} ; 6\right]$.

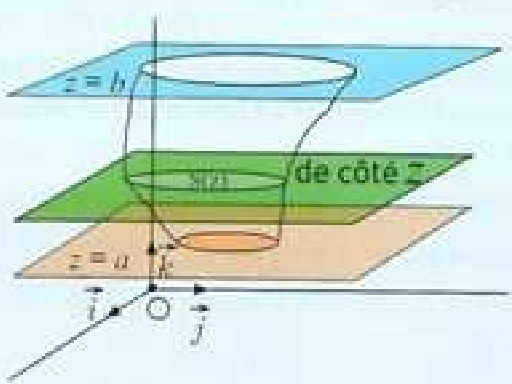
**47** 1. $f(x) = 3 \times 5 \Leftrightarrow x = 4{,}21$, $x \neq 5$ en 2005.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 20$.

Leçon
6
# CALCUL INTÉGRAL

La notion d'intégrale est liée à l'évaluation de l'aire sous une courbe. Intéressons-nous à la terrasse de cette splendide villa. Le calcul intégral pourrait aider à évaluer l'aire de cette terrasse.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève du Lycée Classique d'Abidjan en classe de Terminale D, découvre dans ses recherches qu'un solide compris entre deux plans $z = a$ et $z = b$ dont la section avec un plan à la hauteur $z$ ayant pour aire $S(z)$, a pour volume le nombre réel V défini par : $V = \int_a^b S(z)\,dz$.
Elle montre la formule du volume V à ses camarades de classe qui, émerveillés, décident de s'informer pour la comprendre.



## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Intégrale d'une fonction continue

*Connaître :*

- la définition d'une intégrale
- les propriétés de l'intégrale :
  - linéarité ;
  - signe d'une intégrale ;
  - relation de Chasles ;
  - inégalité et intégrales ;
  - inégalité de la moyenne (les deux formes)
- la valeur moyenne d'une fonction

*Noter :*

une intégrale

*Calculer :*

la valeur moyenne d'une fonction

*Déterminer :*

- le signe d'une intégrale
- un encadrement d'une intégrale

*Interpréter :*

graphiquement une intégrale

### 2 Techniques de calcul d'une intégrale

*Connaître :*

- la technique de l'intégration par parties
- la technique du changement de variable affine

*Calculer :*

une intégrale en utilisant :

- les primitives des fonctions usuelles
- la relation de Chasles
- une intégration par parties
- un changement de variable affine
- une fonction du type $u' \times (f' \circ u)$
- la parité ou la périodicité

### 3 Calcul d'aires

*Calculer :*

une aire

### 4 Fonctions du type $x \mapsto \int_{a}^{x} f(t)dt$

*Étudier :*

les variations d'une fonction du type

$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

*Représenter :*

l'allure d'une fonction du type

$x \mapsto \int_{a}^{x} f(t)dt$

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Intégrale d'une fonction continue

#### 1.1. Notion d'intégrale

On considère une fonction $f$ continue sur un intervalle I, $a$ et $b$ deux éléments de I.

1. Soient deux primitives F et G de la fonction $f$ sur I. Exprime G($x$) en fonction de F($x$), pour tout $x \in$ I.
2. Vérifie que : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

**Synthèse**

Le nombre réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de $f$ choisie sur I. Il est appelé intégrale de $a$ à $b$ de $f$.

On le note : $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$

## Exercices de fixation

**118** Calcule les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x^2+1)dx\,;\ \int_1^2 \left(u+\frac{1}{u}\right)du\,;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+2x)e^{(\sin x+x^2)}dx\,;\ \int_{-10}^{10}(x+5)dx\,;\ \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt\,;\ \int_2^{-1}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt.$$

**119** Réponds par vrai ou par faux.

a) $\int_0^1 dx = 1$ ; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}$ ; c) $\int_2^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

**120** Recopie puis relie chaque phrase à l'écriture mathématiques qui lui correspond.

| Phrases | Écriture mathématiques |
|---|---|
| 1. L'Intégrale de $-3$ à 6 de $g(x)dx$ est égale à 9. | a) $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$, avec $x > 0$. |
| 2. L'intégrale de 0 à 5 de $(t^2-3)\,dt$. | b) $\int_{-3}^{+6} g(x)dx = 9$. |
| 3. L'Intégrale de 1 à $x$ de $\frac{1}{t}\,dt$ est égale à $\ln x$, avec $x > 0$. | c) $\int_0^{+5} (t^2-3)dt$. |

### 1.2. Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

1. Construis $(\mathscr{C}_f)$ et hachure la partie (D) du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe (OI), et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 3$.
2. Trouve une primitive F de $f$ et calcule $F(3) - F(-1)$.
3. Calcule à l'aide de formule d'aire du trapèze, l'aire de (D) et compare le résultat au nombre réel $[F(3) - F(-1)]$.

**Synthèse**

L'intégrale de $a$ à $b$ d'une fonction continue et positive $f$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

## Exercices de fixation

**121** 1. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x + 6$.
Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 3$. On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (OI) sur $[-2 ; 3]$.

**122** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unités : 2 cm

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Calcule, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 5$.

### 1.3. Propriétés de l'intégrale

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit $a$, $b$ et $c$ des éléments de I, $\alpha$, $m$ et M des nombres réels.

Soit F une primitive de $f$ sur I et G une primitive de $g$ sur I.

1. En utilisant la définition de l'intégrale, calcule :

a) $\int_a^a f(x)dx$ ;

b) $\int_a^b f(x)$ et $\int_b^a f(x)dx$ puis trouve une relation entre ces deux intégrales ;

c) $\int_a^b f(x)$ et $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ puis compare-les ;

d) $\int_a^b \alpha f(x)dx$ et $\alpha \int_a^b f(x)dx$ puis compare-les ;

e) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ puis compare-les.

2. On suppose que $a < b$.

a) On suppose que $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \geq 0$.
Compare F($a$) et F($b$) puis justifie que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) On suppose que $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Donne le signe de $f(x) - g(x)$ et déduis-en une comparaison de $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$.

c) Justifie que $\forall x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$.

d) Déduis de la question précédente que si $\forall x \in [a\,;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M\,(b-a)$.

**Synthèse**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle K.
Soient $a$, $b$ et $c$ trois éléments de K.
Soient $\alpha$, $m$ et M des nombres réels.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \alpha f(x) = \alpha \int_a^b f(x)dx$.
- Si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Si $m \leq f \leq$ M sur $[a\,;b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- Si $|f| \leq$ M sur $[a\,;b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

## Exercices de fixation

**1.3.1** 1. Justifie que, pour tout nombre réel $t$, $\cos^3 t = \cos t\,(1-\sin^2 t)$.

2. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^3 t\,dt$.

**1.3.2** Calcule l'intégrale suivante : $\int_{-4}^{2} |x^2-4|\,dx$.

**1.3.3** On admet que $\forall x \in [0\,;+\infty[$,
$1 - x \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 - x + x^2$.
Détermine un encadrement de l'intégrale :
$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$.

### 1.4. Valeur moyenne d'une intégrale

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2 x$. Calcule $\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} f(x)dx$.

**Synthèse**

$f$ étant une fonction continue sur $[a\,;b]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$.

## Exercices de fixation

**14.1** Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
Calcule la valeur moyenne de $f$ sur $[-2 ; 4]$.

**14.2** Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
Calcule la valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; \ln 3]$.

## Activité 2 Techniques de calcul d'une intégrale

1. a) Détermine une primitive de la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$.

   b) Déduis-en $\displaystyle\int_0^3 \frac{t^3}{1+t^4}\,dt$.

2. Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur I.
Soient $a$ et $b$ deux nombres réels de I tels que $a < b$.

   a) Donne la formule de $(uv)'(x)$ et pour tout $x \in$ I.

   b) Déduis-en que $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v(x)'\,dx$.

3. Calcule $\displaystyle\int_1^5 (2x-3)^4$ en faisant un changement de variable affine c'est-à-dire en posant $t = 2x - 3$.

4. a) Justifie que la fonction $x \mapsto \cos 2x$ est paire, puis compare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$.

   b) Justifie que la fonction $x \mapsto \sin 2x$ est impaire.

   Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx$.

   c) En supposant que $0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$,

   calcule puis compare les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 2x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 2x\,dx$.

### Synthèse

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de $f$ sur $[a ; b]$.
- Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle$[a ; b]$.

Si les dérivées $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a ; b]$, alors :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$. C'est la formule d'intégration par parties.

- Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx$, on peut procéder comme suit :
  - Faire le changement de variable : $t = \alpha x + \beta$.
  
    On a : $dt = \alpha\,dx$. D'où $dx = \frac{1}{\alpha}dt$.
  - Utiliser l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{f(t)}{\alpha}\,dt$.
- Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout élément $a$ de K, on a :

  - Si $f$ est paire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
  - Si $f$ est impaire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
- Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période $T$.

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

## Exercices de fixation

**2-1** Calcule les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{2} xe^{x^2}dx \; ; \; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \; ; \; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

**2-2** Calcule les intégrales suivantes en utilisant une ou deux intégrations par parties :

$$\int_{0}^{3}(x+1)e^{x}dx \; ; \; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \; ; \; \int_{2}^{5} \ln x dx$$

et $\int_{-3}^{2} x^2 e^x dx$.

**2-3** Calcule les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable affine :

$$\int_{1}^{2} x\sqrt{3x+2}\,dx \text{ et } \int_{0}^{1} \frac{x^3}{x+1}dx.$$

**2-4** Calcule les intégrales suivantes en utilisant la parité ou la périodicité.

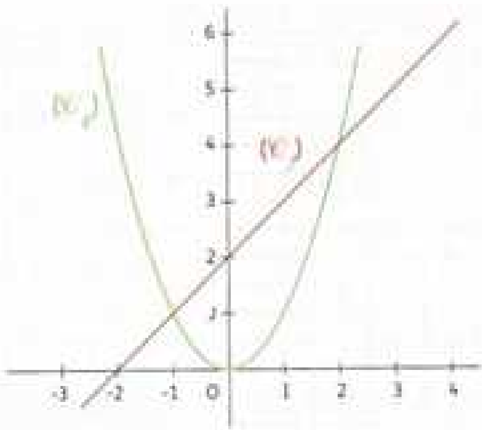
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \; ; \; \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \text{ et } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \tan x dx.$$

## Activité 3 Calculs d'aires

Soit les fonctions $f$ et $g$ définies respectivement par : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives de $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

1. Calcule en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par :
   a) $(\mathscr{C}_f)$, (OI) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ ;
   b) $(\mathscr{C}_g)$, (OI) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ ;
   c) $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
2. Calcule en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par :
   a) $(\mathscr{C}_g)$, (OI) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$ ;
   b) $(\mathscr{C}_f)$, (OI) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$ ;
   c) $(\mathscr{C}_g)$, $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. Déduis-en, l'aire en cm² de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 4$.




**Synthèse**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Soit $f$ une fonction continue sur $[a ; b]$, $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative, (Δ) est la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
   a) Si $f$ est positive sur $[a ; b]$, alors on a : $\mathscr{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)dx.ua$.
   b) Si $f$ est négative sur $[a ; b]$, alors on a : $\mathscr{A}(\Delta) = -\int_a^b f(x)dx.ua$.

c) Si $f$ n'a pas de signe constant sur $[a\,;b]$, alors on écrit $[a\,;b]$ comme réunion d'intervalles sur lesquels $f$ a un signe constant.

2. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbes représentatives respectives.

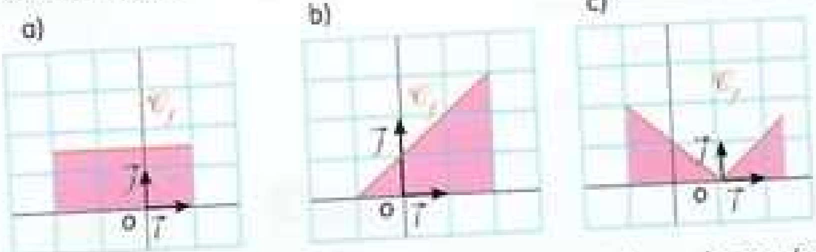
Δ est la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Si $g \leq f$ sur $[a\,;b]$, alors : $\mathscr{A}(\Delta) = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right)ua$.

## Exercices de fixation

**3-1** Soit les fonctions $f$ et $g$ définies respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2 cm.
Calcule en cm², l'aire $\mathscr{A}(\Delta)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

**3-2** Dans chacun des cas suivants :
1. Donne la formule explicite de la fonction $f$.
2. Décris le domaine colorié.
3. Calcule l'aire du domaine colorié à l'aide d'une intégrale.




**3-3** Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = x^2 - 1$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$, la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.
Calcule, en cm², l'aire $\mathscr{A}(\Delta)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

## Activité 4 Fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$ et la fonction $f$ définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

1. Détermine la dérivée de la fonction $g$ en utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction.
2. Réponds par vrai ou faux à chacune des phrases suivantes :
   a) $g$ est définie sur $]-1\,;1[$.
   b) $g$ est croissante sur $]-1\,;1[$.
   c) $g(0) = 0$.
   d) $g$ est une fonction impaire.
   e) En écrivant $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$, démontre que : $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

**Synthèse**

On admet que :
Si une fonction $f$ est continue sur un intervalle K et $a$ un élément de K alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ de K vers $\mathbb{R}$, est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.
Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $f$ c'est-à-dire que :
si $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ alors $\forall x \in K, F'(x) = f(x)$.

**Exercices de fixation**

**4-1** Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = \int_{-a}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$
Étudie le sens de variation de $h$.

**4-2** Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif et la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$F(x) = \int_a^x \alpha e^{\alpha t}\,dt.$
Sans calculer $F(x)$, détermine $F'(x)$.

## APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

### Exercice 1 Calculer des intégrales

Calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^{-3t}}\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_5^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx.$$

**Corrigé**

$$I = \int_1^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^{-3t}} = \int_1^{\ln 3} \frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^{\ln 3} \frac{3e^{3t}}{1+e^{3t}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln|1+e^{3t}|\right]_1^{\ln 3}$$
$$= \frac{1}{3}\left[28 - \ln(1+e^{3})\right]$$
$$J = \int_5^2 \left(\frac{1}{x} \times \ln x\right)dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_5^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 5)^2}{2}$$

**Méthode**

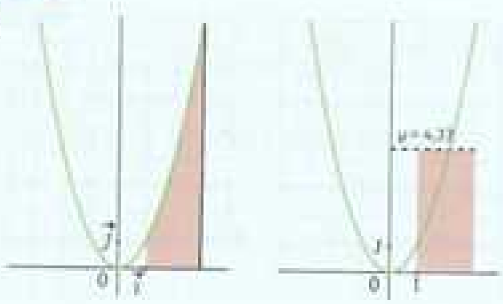
- On multiplie l'expression $\frac{dt}{1+e^{-3t}}$ par $\frac{e^{3t}}{e^{3t}}$ pour avoir l'expression $\frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}$.
Posons $u(x) = e^{3t} + 1$, on a $u'(t) = 3e^{3t}$ donc l'expression $\frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}$ est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{u'(t)}{u(t)}$.
- Posons $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ donc $(\frac{1}{x} \times \ln x)$ a la forme $u'(x)\,u^n(x)$.

### Exercice 2 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

1. Détermine graphiquement la valeur moyenne de la fonction carrée sur l'intervalle [1 ; 3].
2. Calcule cette valeur.

**Corrigé**

1.




**Méthode**

1. Les domaines coloriés ont la même aire.
2. Utilise la formule de la valeur moyenne.

2. $\mu = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$
$= \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ donc $\mu \approx 4{,}33$.

## Exercice 3 Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties

Calcule l'intégrale P à l'aide d'une intégration par parties.

$P = \int_1^2 (x+1)e^{-3x}\,dx$

**Corrigé**

Posons : $u(x) = x + 1$ et $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-3x}$

alors $v(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x}$

$P = \int_1^2 (x+1)e^{-3x}\,dx$

$= \left[\frac{-1}{3}e^{-3x}(x+1)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{3}e^{-3x}\,dx$

$= \left[-e^{-6} + \frac{2}{3}e^{-3}\right] - \left[\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_1^2$

$= -e^{-6} + \frac{2}{3}e^{-3} - \left[\frac{1}{9}e^{-6} - \frac{1}{9}e^{-3}\right]$

$= -\frac{10}{9}e^{-6} + \frac{7}{9}e^{-3}.$

**Méthode**

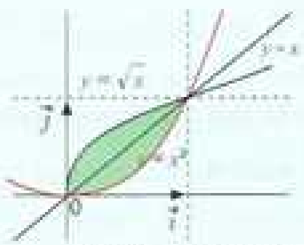
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

## Exercice 4 Calcule l'aire d'une partie du plan comprise entre deux courbes

Soient les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$, leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 3 cm.

Colorie la partie (Δ) du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis calcule en cm², l'aire A(Δ) de cette partie.

**Corrigé**




**Méthode**

On utilise la formule

$\mathcal{A}(\Delta) = (\int_a^b [f(x) - g(x)]dx)u.a$, $0 \leq g - f$ sur $[a ; b]$.

L'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ en cm², de la partie Δ du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est : $\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]dx\right) \times 9 = 9\left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 9[(2 \times \frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^3}{3}) - (2 \times \frac{0^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{0^3}{3})]$

$\mathcal{A}(\Delta) = 3$ cm².

## Exercice 5 Déterminer le sens de variation d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+t^4}\,dt.$

Détermine le sens de variation de F.

**Corrigé**

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+t^4}\,dt$

et la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+x^4}$.

F est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en 2 ;

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{1+x^4}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$, alors F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Méthode**

On utilise le théorème.

Si une fonction $f$ est continue sur un intervalle K et $a$ un élément de K alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de K vers $\mathbb{R}$, est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $f$ c'est-à-dire que : si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $\forall x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

## 1 Intégrale d'une fonction continue

### 1.1. Notion d'intégrale

**Définition** $f$ est une fonction continue sur un intervalle K, $a$ et $b$ sont deux éléments de K et F est une primitive de $f$ sur K.
On appelle intégrale de $a$ et $b$ de $f$ le nombre réel $F(b)-F(a)$.
On la note : $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$.
On a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

**Vocabulaire**

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : intégrale (ou somme) de $a$ à $b$ de $f(x)dx$.
- $[F(x)]_a^b$ se lit : "F(x) pris entre $a$ et $b$".
- $a$ et $b$ sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- La lettre $x$ n'intervient pas dans le résultat de $\int_a^b f(x)dx$. On peut donc la remplacer par toute autre lettre différente de $a$ et $b$. On l'appelle variable muette.

On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots = F(b) - F(a)$.

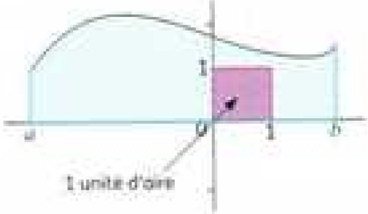
**Exemple**

Considérons la fonction $f$ définie par $f(x) = x^4$. Une primitive de $f$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{5}x^5$. Donc $\int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} \times 1^5 - 0$.
$= \frac{1}{5}$.

### 1. 2. Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unités d'aire) de la partie (Δ) du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

N.B : $1u.a = OI \times OJ$.




N.B.

- Soit Ω(Δ) l'aire de (Δ). On a : $\Omega(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \ u.a.$
- (Δ) est aussi l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
- Si $f$ est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a ; b]$.

Alors, $\Omega(\Delta) = \int_a^b [-f(x)]dx \ u.a.$

## Résumé de cours

### 1. 3. Propriétés de l'intégrale

**Conséquences de la définition**

$\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

**Égalité de Chasles**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K ; $a$, $b$ et $c$ trois éléments de K.

On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

**Linéarité**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle K ; $a$ et $b$ sont deux éléments de K et $\propto$ un nombre réel. On a :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$.

**Comparaison**

- Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
  Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
  Si $f \leq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.
  Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, $m$ et M sont deux nombres réels.

Si $m \leq f \leq M$ sur $[a ; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si $|f| \leq M$ sur $[a ; b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

**N.B.**

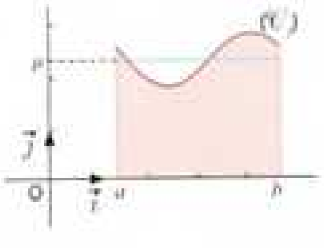
- Les calculs exacts d'intégrales sont faits avec les primitives ou en utilisant les différentes propriétés du cours (linéarité, relation de Chasles...).
- Pour encadrer une intégrale, on utilise les propriétés de comparaison (positivité, respect d'ordre, les inégalités de la moyenne).

### 1. 4. Valeur moyenne d'une fonction

**Définition** $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ ; $(a < b)$.
On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a ; b]$, le nombre réel $\mu$ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

**NB** : Si $(f[a, b]) = [m, M]$, alors $m \leq \mu \leq M$.
La valeur moyenne $\mu$ d'une fonction positive $f$ sur $[a ; b]$, est la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ ayant la même aire (en unités d'aire) que la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \cos x$.

La valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; \pi]$ est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\sin x]_0^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 2 Techniques de calcul d'une intégrale

**Utilisation d'une primitive :**

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de $f$ sur $[a ; b]$.

**Intégration par parties**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$.

Si les dérivées $u'$ et $v'$ sont continues sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

**Changement de variable affine**

Pour calculer $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $t = \alpha x + \beta$, avec $\alpha \neq 0$.

On a : $dt = \alpha\, dx$. D'où $dx = \frac{1}{\alpha} dt$.

- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{f(t)}{\alpha} dt$.

**Intégration des fonctions paires, impaires, périodiques**

- **Parité**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout élément $a$ de K, on a :

- Si $f$ est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

- Si $f$ est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

- **Périodicité**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.

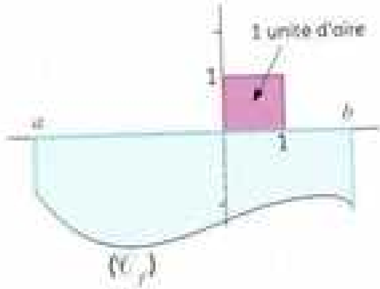
Pour tous nombres réels $a$ et $b$, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

## 3 Calculs d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Soit $f$ une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative, (Δ) est la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



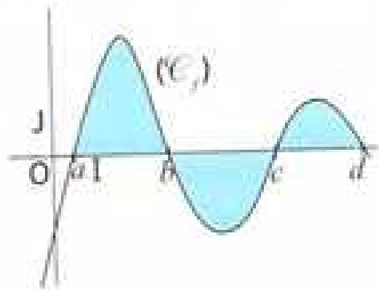

a) Si $f$ est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors on a :

$\mathscr{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \ ua$

b) Si $f$ est négative sur $[a\ ;\ b]$, alors on a :

$\mathscr{A}(\Delta) = -\int_a^b f(x)dx \ ua$

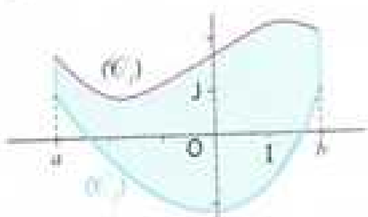
c) Soit la figure ci-contre :




$\mathscr{A}(\Delta) = \left(\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx\right) ua$

2. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbes représentatives respectives.
Δ est la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Soit la figure ci-dessous où on a : $g \leq f$ sur $[a\ ;\ b]$, c'est-à-dire que $f - g$ est positive sur $[a\ ;\ b]$ donc $\mathscr{A}(\Delta) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ ua$.




## 4 Fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

**Théorème**

Si une fonction $f$ est continue sur un intervalle K et $a$ un élément de K, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de K vers ℝ, est l'unique primitive sur K de $f$ qui s'annule en $a$.

Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $f$ c'est-à-dire que :

si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $\forall x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Calcule les intégrales suivantes :

$\int_{-3}^{2}(x+2)^5\,dx$ ; $\int_{0}^{2}-3e^{(1-q)}\,dq$ ; $\int_{-1}^{1}5e^{-t}\,dt$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^3(2t)\,dt$ ; $\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}}\cos x\sin x\,dx$ ;

$\int_{0}^{-\frac{\pi}{3}}\cos^3 t\sin^3 t\,dt$ ; $\int_{5}^{2}\frac{-5u}{1+u^2}\,du$ ; $\int_{0}^{e}\frac{\ln t}{t}\,dt$ ;

$\int_{0}^{e}\left(\frac{1}{x}+x\right)dx$ ; $\int_{6}^{4}\frac{5}{t^3}\,dt$ ; $\int_{4}^{2}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}\,dx$ ;

$\int_{-3}^{1}(5x^4-3x^2+x-2)\,dx$ ; $\int_{-3}^{2}(x+2)^5\,dx$ ;

$\int_{6}^{2}\sqrt{x-2}^{\,3}\,dx$ ; $\int_{0}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ ; $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{\ln t+2}}{t}\,dt$.

**2** Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$\int_{-3}^{1}(t+1)e^t\,dt$ ; $\int_{1}^{4}\ln(x+1)\,dx$ ; $\int_{1}^{3}(\ln x)^2\,dx$ ;

$\int_{1}^{3}\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$ ; $\int_{1}^{e}x^2\ln x\,dx$ ;

**3** Calcule les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties :

$\int_{-1}^{2}t^2e^t\,dt$ ; $\int_{0}^{\pi}x^2\cos 2x\,dx$ ; $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

**4** Soit les intégrales J et K définies par :

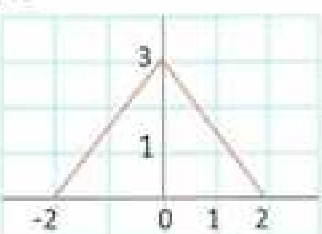
$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2(2x)\,dx$ et $K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\sin^2(2x)\,dx$.

a) Calcule : J − K à l'aide d'une intégration par parties.
b) Calcule : J + K.
c) Détermine la valeur exacte de J et celle de K.

**5** Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable affine.

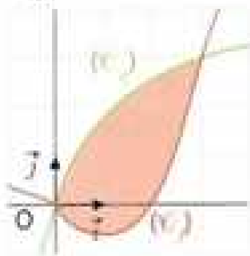
$\int_{1}^{2}x\sqrt{2x+4}\,dx$ ; $\int_{-1}^{2}x^2\sqrt{2x+4}\,dx$.

**6** Soit $f$ la fonction définie sur [-2;2] dont la représentation graphique est ci-dessous.
Calcule $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$.

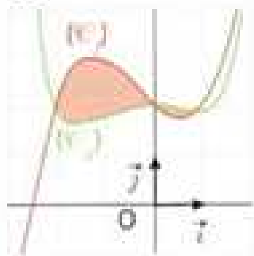



**7** Dans chacun des cas suivants, exprime l'aire du domaine colorié sous forme d'intégrale.
(On ne demande pas de calculer l'intégrale.)

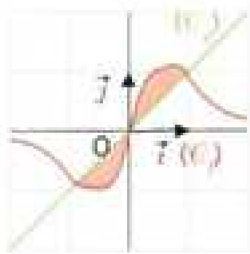
1.



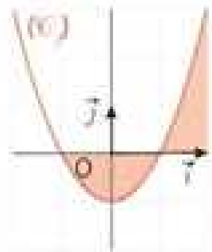

2.



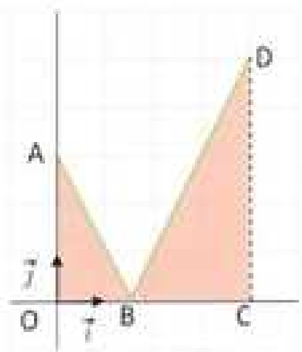

3.




4.




**8** Soit la fonction $g$ définie par : $g(x) = |2x - 3|$ dont la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ est ci-dessous (en vert).




Calcule l'aire (en unités d'aire) de la partie (Δ) du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe (OI), et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

**9** On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = \int_{2}^{x}\frac{e^t}{t^2}\,dt$, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$ dans plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Trouve l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.
2. Détermine le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$.
3. a) Étudie le sens de variation de $f$.
b) Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**10** On considère la fonction $f$ de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1 ; 1]$ définie par : $f(x) = \sin x$.
1. Démontre que $f$ est une bijection.
(On désigne par F sa bijection réciproque.)
2. Étudie la dérivabilité de F.
3. Démontre que : $\forall x \in ]-1 ; 1[$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Définie la fonction F, sur $]-1 ; 1[$, par une intégrale.
5. Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

**11** On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{\ln t + 2}}{t} dt$.
1. Trouve l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.
2. Démontre que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) \geq 0$.
3. a) Étudie le sens de variation de $f$.
b) Déduis-en que : $\forall x \in D_f$, $f(x) \geq 0$.

## Exercices d'approfondissement

**12*** Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent avec un débit variable en fonction du temps. Si $x$ est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction $f$ telle que :
- $f(x) = -4x^2 + 8x$ pour $x \in [0 ; 1]$.
- $f(x) = \ln x - x + 5$ pour $x \in [1 ; 5]$.

On admet que le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes est donné par $\int_0^5 f(x)dx$.
1. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction $f$ dans un repère orthogonal.
2. Vérifie que la fonction $f$ est continue en 1.
3. Calcule le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.

**13** On considère la fonction $f$ de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt$. $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1 cm.

**Partie A** : On considère la fonction $g$ de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$.
1. Calcule les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudie le sens de variation de $g$.
3. Établis le tableau de variation de $g$.
4. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.
a) Donne les arrondis d'ordre 2 respectifs de $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$, $g(6)$, $g(7)$ et $g(8)$.
b) Construis la représentation graphique $(\Gamma)$ de $g$ dans le repère (O, I, J).

**Partie B**
1. Détermine le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
2. a) Démontre que : $\forall x \in ]5 ; +\infty[$, $f(x) > \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.
b) Déduis-en la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Démontre que : $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $e^x > x^2$.
4. a) Démontre que : $\forall x \in ]0 ; 1[$, $f(x) < \ln x$.
b) Déduis-en la limite de $f$ en 0.
5. a) Étudie le sens de variation de $f$.
b) Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
c) Dresse le tableau de variation de $f$.
6. a) Trace la droite (T) tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
b) Détermine une équation de (T).
7. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.
8. Construis $(\mathscr{C})$. (On prendra : $f(0{,}5) = -2{,}95$ ; $f(2) = 1{,}48$ ; $f(3) = 2{,}27$ ; $f(4) = 3{,}10$ et $f(6) = 5{,}54$.)

**14** Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques : 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ). On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de F dans le repère (O, I, J).

**Partie A**
1. Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \leq e^x$.
2. Démontre que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $\frac{x^3}{3} + x \leq F(x)$.

**Partie B**
1. Détermine le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de $x$.
2. Démontre que la fonction F est impaire.

3. Trouve les limites de F aux bornes de son ensemble définition.
4. a) Étudie le sens de variation de F.
   b) Déduis-en le signe de F($x$) suivant les valeurs de $x$.
5. Dresse le tableau de variation de F.
6. Trouve une équation de la droite (T), tangente à ($\mathscr{C}$), au point d'abscisse 0.
7. Détermine puis interprète le résultat obtenu.
8. Trace la droite (T) et construis ($\mathscr{C}$).

NB : Pour la construction, on prendra :
F(0,5) = 0,6 ; F(1) = 1,5 ; F(1,5) = 4 et F(2) = 16,5.

**15** L'objectif est de calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ ;
$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ ; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. Soit la fonction $f$ définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
   a) Calcule la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$. Déduis-en la dérivée $f'$ de $f$.
   b) Calcule la valeur de I.
2. a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : J + 2I = K.
   b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontre que : $K = \sqrt{3} - J$.
   c) Déduis-en les valeurs de J et de K.

**16** **Partie A**

Soit $\varphi$ la fonction définie sur [2 ; 20] par : $\varphi(x) = x - 2 - 2\ln(x)$.

1. Étudie les variations de la fonction $\varphi$ puis dresse son tableau de variation.
2. Justifie que la fonction $\varphi$ s'annule exactement une fois sur l'intervalle [2 ; 20]. Indique la valeur arrondie à une décimale de ce nombre.
3. Déduis-en le signe de la fonction $\varphi$ sur l'intervalle [2 ; 20] et récapitule ces résultats dans un tableau.

**Partie B**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit $f$ la fonction définie sur [2 ; 20] par : $f(x) = \frac{x\ln x}{x-2}$ ($\mathscr{C}$) désigne la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni de ce repère.

1. a) Justifie que la dérivée $f'$ de $f$ a le même signe que $\varphi$ sur ]2 ; 20].
   b) Étudie les variations de la fonction $f$, détermine la limite de $f$ en 2 puis dresse le tableau de variation de cette fonction.
2. Prouve qu'il existe un unique point de la courbe ($\mathscr{C}$) où la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Trace la courbe ($\mathscr{C}$).

**Partie C**

Soit $g$ la fonction définie sur [2 ; 20] par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - 2x\ln(x)$.

1. Justifie que $g$ est une primitive de $\varphi$ sur [2 ; 20].
2. Soit I le nombre défini par: $I = \int_{10}^{20} \varphi(x)dx$.
   a) Exprime le nombre I uniquement à l'aide de nombres entiers et des deux nombres ln2 et ln5.
   b) Donne la valeur de I arrondie à deux décimales.

**17** **Partie A**

On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln(-x)$.

1. Détermine l'ensemble de définition de $g$.
2. Calcule les limites de $g$ en $-\infty$ et en 0.
3. Étudie les variations de $g$ sur $]-\infty ; 0[$ puis dresse son tableau de variation.
4. a) Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]-\infty ; 0[$.
   b) Justifie que: $-2 < \alpha < -1$.
5. Justifie que : $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; 0[, g(x) > 0$.

**Partie B**

On définit la fonction $f$ sur $]-\infty ; 0[$ par : $f(x) = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x^2}$.
On appelle ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 1 cm.

1. Calcule les limites de $f$ en 0 et en $-\infty$. Interprète graphiquement le résultat en 0.
2. a) Justifie que la droite (D) d'équation $y = \frac{2}{3}x - 1$ est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.
   b) Étudie la position relative de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D).
3. a) Justifie que : $\forall x \in ]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
   b) Déduis-en le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variation.

4. Trace la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ de $f$. Prendre $\alpha = -1$.

**Partie C**

1. a) Hachure la partie du plan $A(\lambda)$ limitée par : $(\mathscr{C})$, la droite (D), les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = -1$ où $\lambda < -1$.
   b) Calcule l'aire $A(\lambda)$.
2. Calcule $A(-2)$.
3. Calcule $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

**18** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité graphique est le centimètre.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le repère (O, I, J).

1. a) Calcule les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   Interprète graphiquement le résultat.
2. Étudie le sens de variation de $f$ et dresse son tableau de variation.
3. a) Justifie que la droite (T) : $y = -2x$, est tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse zéro.
   b) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 4e^{x}(e^{x} - 1)$.
   Déduis-en la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).
4. Étudie la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D) : $y = 3$.
5. Trace les droites (T) et (D) puis construis $(\mathscr{C})$ avec soin.
6. On pose : $K_t = \int_t^0 (3 - f(x))dx$ où $t$ est un nombre réel strictement négatif.
   a) Interprète graphiquement l'intégrale $K_t$.
   b) Calcule $K_t$.
   c) Hachure le domaine du plan constitué de points de coordonnées $(x\,;y)$ telles que : $x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 3$ puis détermine l'aire, en cm², du domaine hachuré sachant qu'elle vaut en unité d'aires $K_t$.

**Partie B**

1. Justifie que $f$ définit une bijection $h$ de $]-\infty\,;\ln 2]$ vers un ensemble que l'on précisera.
2. Construis la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de $h^{-1}$.
3. Justifie que la bijection réciproque $h^{-1}$ de $h$ n'est pas dérivable en $-1$.
4. Dresse le tableau de variation de $h^{-1}$.
5. Calcule $(h^{-1})'(0)$.
6. Pour tout $x$ élément de $[-1\,;3[$, explicite $h^{-1}(x)$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité graphique vaut deux centimètres.

**19** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
   Calcule $f'(x)$ pour tout $x$ de l'intervalle $]-1;+\infty[$.
2. Pour tout $x$ de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   a) Vérifie que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
   b) Calcule $N(0)$. Déduis-en les variations de N.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$.
   b) Calcule les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D).
4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = [\ln(1+x)]^2$.
   a) Justifie la dérivabilité sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction F et détermine, pour tout réel positif $x$, $F'(x)$.
   b) Calcule $\int_0^3 f(x)\,dx$.

**20** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Démontre que $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ? Justifie la réponse.
2. On pose $I = \int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}\,dx$.
   a) Détermine trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel différent de $-1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
   b) Calcule I.
3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat de la question 2, calcule, en unités d'aires, l'aire A du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses.

**21** Détermine les fonctions $f$ définies et continues sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ tels que pour tout réel $x > 1$, $\int_1^x f(x)\,dx = 2\ln(x)$.

**22** Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs vérifiant $a < b$. On considère les droites (D) et (D') d'équation respective $y = ax$ et $y = bx$.
On considère les hyperboles (H) et (H') d'équation respective $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{2}{x}$.
Le point A est le point d'intersection de (D) et (H), B celui de (D') et (H), (C) celui de (D') et (H'), et (D) celui de (D) et (H').
1. Fais une figure.
2. Calcule l'aire du quadrilatère curviligne ABCD en fonction de $a$ et $b$.

**23** Dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 4$ cm, détermine l'aire (en cm²) du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction logarithme népérien et les deux tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisse 1 et $e$.

**24** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a : $f(a + b - x) = f(x)$.
1. Démontre que :

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

Application
2. a) Justifie que : $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.
b) Déduis-en $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

**25** On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
1. Étudie la parité de la fonction $f$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?
2. Étudie les variations de la fonction $f$ sur $]-1\,;1[$.
3. Détermine les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
4. On considère la fonction F définie sur $]-1\,;1[$ par : $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.
a) Démontre que la fonction F est une primitive de la fonction $f$.
b) Détermine alors la valeur exacte de $I = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$.
c) Justifie que : $I = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.

**26** On admet le théorème suivant :
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction dérivable sur $[a\,;\,b]$ telle que $f'$ est continue sur $[a\,;\,b]$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. La longueur L, en unité de longueur, de l'arc de courbe défini par la courbe $(\mathscr{C})$ entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est égale à $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.
La chaînette est la courbe obtenue lorsqu'on suspend une chaîne entre deux points A et B. Cette courbe a une équation de la forme : $y = f(x)$ où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Calcule la longueur de la chaînette entre les points d'abscisses −1 et 1.

**27** On considère la fonction $f$ définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$.
1. Détermine les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+3}$.
2. Calcule : $I = \int_2^3 f(t)\,dt$.

**28** On considère la fonction $f$ définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
1. Pour $a \geq 1$, détermine $I(a) = \int_1^a f(t)\,dt$ en fonction de $a$.
2. Détermine la limite de $I(a)$ lorsque $a$ tend vers $+\infty$.
3. Interprète graphiquement ce dernier résultat.

**29** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
1. a) Détermine les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Étudie les variations de $f$.
2. À l'aide de deux intégrations par parties successives, détermine $A = \int_0^1 f(t)\,dt$.
Interprète graphiquement A.
3. Pour tout réel $x$ de $[1\,;+\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.
a) Démontre que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.
b) Détermine l'expression de $F(x)$ et calcule la limite de F en $+\infty$.
c) Interprète graphiquement ce dernier résultat.
4. On veut résoudre l'équation $F(x) = -A$.

a) Démontre que cette équation est équivalente à : $2\ln(1 + x) = x$.

b) Étudie le sens de variations de la fonction $h$ définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $h(x) = 2\ln(1 + x) - x$.

c) Démontre que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation : $2\ln(1 + x) = x$ a une unique solution $\alpha$.

d) Donne un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

e) Détermine $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de, puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

**30** 1. Soit $x$ un réel positif.

On pose $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt$.

Démontre que pour tout nombre réel $x$ positif, $\frac{e^x}{1+x} \geq 1$.

2. Démontre que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Prouve que : $f(2) \geq 1$.

4. Déduis-en qu'il existe un réel $c$ appartenant à $[1; 2]$ tel que : $f(c) = 1$.

**31** Soit $n$ un entier naturel. On définit la fonction $f_n$ sur $[1; e]$ en posant : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

On pose alors $I_n = \int_1^e f_n(t)\,dt$.

1. Démontre que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n + 1)I_n$.

2. Calcule $I_0$.

3. Déduis-en $I_1$, $I_2$ et $I_3$.

**32** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 2 cm).

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = \sin^2 x$.

Rappels : Pour tout $a$ réel, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$.

1. Représente graphiquement la fonction $f$.

2. Exprime $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

3. Déduis-en la valeur de $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt$.

4. Détermine l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$.

**33** On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = x\ln(x + 1)$.

On admet que pour tout $x$ de $[0 ; 1]$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x + 1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

1. a) Détermine un encadrement de $f(x)$ sur $[0 ; 1]$.

b) Déduis-en un encadrement par deux rationnels de $\int_0^1 f(x)\,dt$.

2. On considère la fonction $g$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$.

a) Démontre que la fonction G définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $G(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x\ln(x)$ est une primitive de $g$ sur $]0 ; +\infty[$.

b) Déduis-en l'intégrale $\int_1^2 g(x)\,dx$.

**34** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. Calcule l'intégrale : $A = \int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Soit l'intégrale : $B = \int_0^1 g(x)\,dx$.

Calcule l'intégrale $C = A + B$.

3. Déduis-en l'intégrale B.

**35** 1. Détermine les réels $a, b, c$ tels que pour tout $t$ différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{t^2-1}{2t-1} = at + b + \frac{c}{2t-1}$.

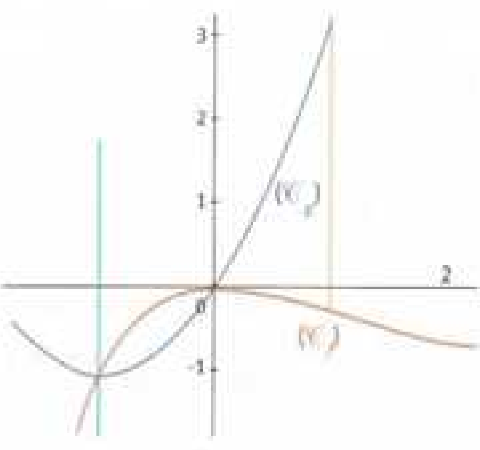
2. Calcule : $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx$.

3. Calcule : $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3(x)}{1-2\sin x}\,dx$.

**36** Dans la figure ci-dessous, on donne les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ définies respectivement par :

$f(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x$.

Détermine l'aire comprise entre les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.



**37** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de $f(x)$.

Calcule $f'(x)$ pour tout $x$ de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2. Pour tout $x$ de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   a) Vérifie que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
   b) Calcule N(0). Déduis-en les variations de $f$.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation : $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$.
   b) Calcule les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (D).
4. Soit F la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $F(x) = [\ln(1+x)]^2$.
   a) Justifie la dérivabilité sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction F.
   b) Détermine, pour tout réel positif $x$, $F'(x)$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_0^{3} f(x)\,dx$.

**38** On considère les fonctions $f$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$ et $g(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$.

1. Détermine les limites de $f$ et de $g$ aux bornes de leur ensemble de définition.
2. Détermine une primitive de la fonction.
3. Démontre que pour tout $x$ réel, $f(x) + g(x) = 2$.
4. Calcule les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,dx$.
5. Écris I et J chacun sous la forme $\ln a$ où $a$ est une fraction.

**39** À l'aide d'une intégration par parties, calcule chacune des intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_1^{e} x\ln x\,dx$ ; 2. $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln t\,dt$ ;

3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\sin x\,dx$ ; 4. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x+2)e^x\,dx$ ;

5. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

**40** À l'aide d'un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes.

1. $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} t^2\sqrt{1-t}\,dt$ ; 2. $A = \displaystyle\int_0^{1} (4x+7)^2\,dx$ ;

3. $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)\,dx$ ; 4. $A = \displaystyle\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

**41** À l'aide d'un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes.

1. $B = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1+x+x^2}{(x-1)^2}\,dx$ ; 2. $B = \displaystyle\int_0^{1} (2x-3)^5\,dx$ ;

3. $B = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(7x+6)\,dx$ ; 4. $B = \displaystyle\int_5^{10} \frac{1}{(3t-4)^4}\,dt$.

**42** À l'aide d'un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes

1. $C = \displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)\right] dx$ ;

2. $C = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{1+t}$ ; 3. $C = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2t+1}\,dt$.

**43** À l'aide d'une double intégration par parties, calcule chacune l'intégrale suivante.

$I = \displaystyle\int_{-1}^{0} (1+x)^2 e^x\,dx$.

**44** À l'aide d'une double intégration par parties, calcule l'intégrale suivante.

$I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x\, e^x\,dx$.

**45** 1. Soit $f$ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et H la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,dt$.

a) Justifie que $f$ et H sont bien définies sur $[1\,;+\infty[$.

b) Quelle relation existe-t-il entre H et $f$ ?

c) Soit (C) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Interprète en termes d'aire le nombre H(3).

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre H(3).

a) Démontre que pour tout nombre réel $x > 0$,

$\dfrac{x}{e^x - 1} = x \times \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b) Déduis-en que : $\displaystyle\int_1^{3} f(x)\,dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^{3} \ln(1 - e^{-x})\,dx$.

c) Démontre que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

d) Déduis-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^{3} \ln(1 - e^{-x})\,dx$, puis de $\displaystyle\int_1^{3} f(x)\,dx$.

**46** But de l'exercice : approcher $\ln(1 + a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque $a$ appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soit $a$ dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on note

$I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}dt.$

1. Calcule $I_0(a)$ en fonction de $a$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, exprimez $I_1(a)$ en fonction de $a$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, démontre que $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $p$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontre en calculant $I_2(a)$ ; $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que : $I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$.
Calculez $J(a)$.
6. a) Démontre que pour tout $t \in [0 ; a]$,
$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.
b) Démontre que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$,
$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.
7. Déduis-en que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$,
$|\ln(1 + a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.
8. Détermine en justifiant ta réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1 + a)$ à $10^{-3}$ près.

**47** Pour tout entier naturel $n$, on définit

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$.

1. Calcule $I_0$ et $J_0$.
2. En intégrant par parties $I_n$ et $J_n$, démontre que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$
3. Déduis-en les expressions de $I_n$ et $J_n$ en fonction de $n$.
4. Détermine la limite de $I_n$ et celle de $J_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**48** La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible suspendu à ses extrémités à deux points fixes.

On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ convenable la chaînette a pour équation : $y = f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$, où $\lambda$ est un paramètre réel positif dépendant de la longueur du fil. On note $C_\lambda$ la courbe représentative de $f_\lambda$.

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma.

2 m


**A. Étude de la chaînette**

1. On prend $\lambda = 1$ : étudie les variations de $f_1(x)$. Détermine ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Trace les courbes $C_1$, $C_2$ et $C_3$.
(unité graphique 1 cm)
3. Prouve que pour tout $\lambda$, la courbe $C_\lambda$ se déduit de la courbe $C_1$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Dans toute la suite on prend $\lambda$ strictement positif.

**B. Recherche de $d$**

Pour une courbe d'équation $y = f(x)$, un petit élément de courbe a pour longueur $ds$ tel que $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Soit

$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

$\Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

1. Fais un schéma montrant que vous avez compris quelque chose aux explications précédentes et démontre que la longueur de la chaînette est $L(\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
2. Exprime en fonction de $\lambda$ la flèche $d(\lambda)$ de la chaînette $C_\lambda$.

**C. Le problème consiste donc à trouver la valeur de $\lambda$ pour laquelle $L(\lambda) = 4$.**

1. Donne une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la solution $\alpha$ de l'équation (E) : $L(\lambda) = 4$.

2. On considère la fonction $\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.
Calcule $\varphi'(t)$ et démontre que $\varphi'(t)$ est toujours positive.

Détermine la limite de $\varphi(t)$ en $+\infty$ et déduis-en l'existence d'une unique solution de (E).

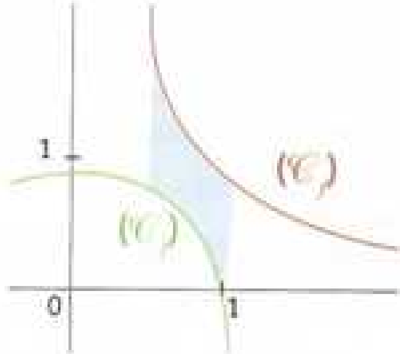
3. Détermine alors les coordonnées du minimum de la fonction $f_a(x)$ ainsi que $d(a)$.

**D. Une variante (nettement plus élaborée) de la question précédente est la suivante :**

1. Résous l'équation d'inconnue $x$, $x^2 - 4\lambda x - 1 = 0$.
2. Déduis-en que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1})$.
3. Soit $g$ la fonction définie par :
$g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.
   a) Étudie les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Trace sa courbe représentative ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.
   c) Démontre que l'équation $g(x) = x$ a une seule solution comprise entre 2 et 3.
4. On note : $I = [2 ; +\infty[$.
   a) Démontre que pour tout $x$ de I, $g(x)$ appartient à I.
   b) Prouve que pour tout $t$ de I, $0 \leq g'(t) \leq 0{,}5$.
Déduis-en que pour tout $x$ de I,
$|g(x) - a| \leq 0{,}5|x - a|$.
5. On considère la suite $u_n$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) En utilisant la construction du 3. b) conjecture le comportement de $u_n$.
   b) Démontre que pour tout $n$,
   $|u_n - a| \leq 0{,}5^n|2 - a|$. Conclus quant à la convergence de $u_n$.
   c) Détermine un entier $n_0$ tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $a$ à $10^{-4}$ près.
   d) Améliore le résultat obtenu au C.3.

**Situation complexe**

**49** Un couturier, père de l'un de tes camarades de classe, doit produire en grand nombre une pièce de la forme du dessin bleu ci-dessous.




Afin de prévoir au mieux sa commande de tissu, il te sollicite pour connaître la surface de la pièce qui représente la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, les droites d'équations :

$x = 0{,}5$ et $x = 1$ avec $g(x) = -x^2 + 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.
L'unité est le mètre.
Aide-le à calculer l'aire de cette pièce.

**Coup de Pouce**

**12** $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$.

**49** Cette aire est : $\int_{0,5}^1 (f(x) - g(x))dx$ ua

Leçon **7**

# SUITES NUMÉRIQUES

Les fractales sont des figures invariantes par changement d'échelle (nous parlons aussi de "structures autosimilaires") et sont la représentation graphique de suites récurrentes.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un concours scolaire dénommé « Une école, un grand arbre » a été lancé par la SODEFOR. Le principe est de planter un arbre d'une essence de son choix. Le concours est lancé début octobre 2020 et prendra fin début juillet 2023. L'établissement qui aura l'arbre le plus grand sera primé. Le club environnement du Lycée de Garçons de Bingerville décide de se procurer un arbre d'une essence rare. Les membres dudit club font des recherches sur cette essence et s'aperçoivent que son évolution, en centaines de centimètres, peut être modélisée par la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0{,}3$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{\ln 7}{U_n}\right)$.
L'un des membres du club affirme que, dans un article lu sur internet, il a découvert que la hauteur maximale de cet arbre, en trois ans, est 2710 cm. Devenus hésitants quant aux choix de cet arbre qui leur tenait à cœur, les membres du club décident de faire des recherches sur les suites numériques et leurs limites.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Généralités sur les suites numériques et raisonnement par récurrence

*Connaître :*

- la définition d'une suite :
  - croissante
  - décroissante
  - constante
  - majorée
  - minorée
  - bornée

*Savoir :*

- mener un raisonnement par récurrence

*Démontrer :*

- qu'une suite est monotone
- qu'une suite est majorée et/ou minorée

*Conjecturer :*

le comportement d'une suite récurrente

### 2 Convergence d'une suite numérique

*Connaître :*

- la définition d'une suite :
  - convergente
  - divergente
- les théorèmes de comparaison
- les propriétés sur les suites monotones
- les propriétés sur la convergence des suites numériques
- les propriétés sur la divergence des suites numériques

*Démontrer :*

- qu'une suite est convergente ou divergente

*Déterminer :*

- la limite d'une suite
- la plus petite valeur de $n$ telle que : $u_n \geq 10^p, p \in \mathbb{N}$
- la plus petite valeur de $n$ telle que : $|u_n - l| \leq 10^p, p \in \mathbb{N}$

### 3 Suite arithmétique-suite géométrique

*Connaître :*

- les propriétés sur la convergence :
  - des suites géométriques
  - des suites arithmétiques

*Reconnaître :*

- une suite géométrique convergente ou divergente

*Traduire :*

- une situation donnée à l'aide d'une suite :
  - arithmétique
  - géométrique
  - arithmético-géométrique

### 4 Suite $n^\alpha$, $b^n$, $\ln(n)$ : croissance comparée

*Connaître :*

- les propriétés sur la convergence des suites du type $n^\alpha$
- les propriétés sur les limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln(n))$ ; $(b^n)$, $b > 0$ et $(n^\alpha)$, $\alpha$ réel

*Reconnaître :*

- une suite du type $n^\alpha$ convergente ou divergente

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Généralités sur les suites numériques et raisonnement par récurrence

#### 1.1. Définition (Rappels)

1. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies respectivement par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 7} \end{cases}$ et $v_n = 3n^2 + n - 5$.
Calcule $u_1$ ; $u_2$ ; $v_3$ et $v_7$.
2. Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \frac{3}{2^n}$. Calcule $w_0$ et détermine l'expression de $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$.
3. Soit $(x_n)$ la suite définie par : $x_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - 3$.

a) Calcule $x_1$ ; $x_2$ ; $x_3$ ; $x_4$ ; $x_5$ et justifie par une conjecture que $n \in \mathbb{N}, x_n = 4 - 3n$.

b) En considérant la suite de terme général $4 - 3n$, retrouve l'expression de $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$.

**Synthèse**

Une suite peut être définie par :

- la donnée de son terme général en fonction de $n$ ; on dit alors que la suite est définie par une **formule explicite** ;
- la donnée du premier terme et d'une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ; on dit alors que la suite est définie par une **formule de récurrence**.

### Exercices de fixation

**1.1.1** Pour chacune des suites $(u_n)$ définies ci-dessous, calcule les 4 premiers termes.

a) $u_n = \sqrt{n-3}$ ; $u_n = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ;

b) $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

**1.1.2** La suite $(u_n)$ est définie par : $u_n = 3n + 1$.

Définis cette suite $(u_n)$ par récurrence.

**1.1.3** La suite $(v_n)$ est définie par $\begin{cases} v_0 = 0,3 \\ v_{n+1} = 8v_n \end{cases}$.

Définis cette suite $(v_n)$ par une formule explicite.

### 1.2. Raisonnement par récurrence

On donne la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 6$.

Soit la propriété mathématique P($n$) : $u_n \leq 10$.

1. Vérifie que pour $n = 0$, la propriété P($n$) est vraie.
2. Supposons que pour un entier naturel $k$, la propriété P($k$) est vraie c'est-à-dire que $u_k \leq 10$. Démontre que $u_{k+1} \leq 10$.
3. Que peux-tu conclure pour les termes de la suite $(u_n)$ ?

**Synthèse**

Soit P($n$) une propriété dépendant de l'entier naturel $n$. La démonstration, à l'aide du raisonnement par récurrence de la propriété P($n$) se fait en trois étapes : l'**initialisation**, l'**hérédité** (ou caractère héréditaire) et la **conclusion**.

### Exercices de fixation

**1.2.1** Soit $n$ un entier naturel. Dis si les propriétés suivantes sont vraies au rang $n_0$ :

a) P($n$) : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 \leq n^3$, $n_0 = 2$ ;

b) Q($n$) : $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, $n_0 = 4$ ;

c) R($n$) : $7^n - 4$ est divisible par 5 ; $n_0 = 2$.

**1.2.2** On considère la propriété Z($n$) : $3n > (n + 3)^2$ où $n$ est un entier naturel.

Détermine le plus petit entier naturel $n_0$ pour lequel Z($n$) est vraie.

**1.2.3** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$u_n = \frac{2n-6}{n+1}$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $-6 \leq u_n \leq 2$.

**1.2.4** On considère la suite $(v_n)$ définie par :

$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 2} \end{cases}$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq v_n \leq 1$.

**1.2.5** On considère la suite $(w_n)$ définie par : $w_n = n^2 - n + 5$.

Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $w_n$ est impair.

### 1.3. Sens de variation d'une suite

À chaque période, un prix subit une diminution de 30% par rapport au prix de la période précédente, puis une augmentation de 30 F. Le prix de base (en Francs) est $u_0 = 140$.

1. Soit $u_n$ le prix de la période $n$. Justifie que le prix à la période $n + 1$ est $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 30$.
2. Calcule $u_1$, $u_2$, $u_3$ , $u_4$ et $u_5$.
3. a) Vérifie que $u_1 \leq u_0$.
   b) Démontre que, s'il existe un entier $p$ tel que $u_{p+1} \leq u_p$ alors $u_{p+2} \leq u_{p+1}$.
   c) Déduis-en le sens de variation de la suite.

**Synthèse**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

(1) Si pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)$ est croissante.

(2) Si pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

(3) Si pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)$ est constante ou stationnaire.

**Exercices de fixation**

**1.3.1** Soit $(u_n)$ une suite numérique. Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes.

1. Si $u_n \leq u_{n-1}$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.
2. Si $u_{n+1} \leq u_n$, alors la suite $(u_n)$ est croissante.
3. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.
4. Si Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

**1.3.2** Soit la suite $(v_{n\geq 1})$ définie, pour $n > 1$, par $v_n = \ln(n - 1)$.

Détermine le sens de variations de la suite $(v_n)$.

**1.3.3** On considère la suite $(u_n)$ définie, pour $n \geq 2$, par $u_n = \frac{3^n}{2^n}$.

1. Vérifie que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.
2. Compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 puis déduis le sens de variations de la suite $(u_n)$.

**1.3.4** Soit la suite $(w_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $w_n = -n^2 + 2n + 8$.
Considérons la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $w_n = f(n)$.

1. Étudie le sens de variations de la fonction $x \mapsto f(x)$ sur $[1 ; +\infty[$ ;
2. Déduis en les variations de la suite $(w_n)$.

**1.3.5** Soit la suite $(z_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $z_{n+1} = 2z_n$ et $z_0 = \alpha$. $(\alpha \in \mathbb{R})$

1. Supposons que $\alpha = 0$. Démontre par récurrence que la suite $(z_n)$ est constante.
2. Supposons que $\alpha = 2$.
   Démontre par récurrence que la suite $(z_n)$ est croissante.
3. Supposons $\alpha = -1$.
   Démontre par récurrence que la suite $(z_n)$ est décroissante.

### 1.4. Suites majorées – suites minorées

Soit la suite $(u_n)$ de premier terme $u_3$ et définie par $u_n = \frac{n-1}{2n-5}$.

On considère la fonction $f$ définie sur $[3 ; +\infty[$, par $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

1. Justifie que pour tout élément $x$ de $[3 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(2x-5)}$.
2. Justifie que pour tout élément $x$ de $[3 ; +\infty[$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$.

**Synthèse**

(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

(2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

(3) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
$(\exists\, m \in \mathbb{R}, \exists\, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M)$.

## Exercices de fixation

**1.4.1** On considère une suite numérique $(u_n)$.
Recopie et complète le texte ci-dessous à l'aide des mots : majorée, minorée, bornée.
1. Comme $1 < u_n$, alors la suite $(u_n)$ est ..... par 1.
2. Puisque la suite $(u_n)$ est ..... par $-\frac{4}{5}$, alors pour tout entier naturel $n$, $-\frac{4}{5} \geq u_n$
3. La suite $(u_n)$ est telle que, pour tout entier naturel $n$, $-u_n > 1$ et $-u_n < 3$. On peut dire que la suite $(u_n)$ est .............. car elle est .......... par $-1$ et est ............ par $-3$.

**1.4.2** Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel $n$,
$v_{n+1} = 0{,}2v_n + 0{,}6$.
Démontre par récurrence que la suite $(v_n)$ est majorée par 1.

**1.4.3** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par
$w_0 = 2$ et $w_{n+1} = \frac{1+w_n}{w_n}$.
Démontre, par récurrence que,
pour tout entier naturel $n$, la suite $(w_n)$ est majorée par 2 et minorée par $\frac{3}{2}$.

**1.4.4** Soit $(z_n)$ une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 3 + \sin(n)$.
Démontre que $(z_n)$ est bornée.

## Activité 2 Convergence d'une suite numérique

### 2.1. Notion de convergence

1. On donne les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par : $u_n = \frac{1-2n}{1+n}$ ; $v_n = \frac{n^2}{1+n}$ et $w_n = (-1)^n$.
Recopie et complète les tableaux ci-dessous.

| $n$ | $10^2$ | $10^5+1$ | $10^9$ | $10^{11}+1$ | $10^{15}$ | $10^{23}+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | |
| $v_n$ | | | | | | |
| $w_n$ | | | | | | |

2. Vers quelle valeur s'accumulent tous les termes $u_n$ lorsque $n$ devient de plus en plus grand ?
Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.
3. Quelle est alors la limite de la suite $(v_n)$ et celle de la suite $(w_n)$ ?

**Synthèse**

(1) Une suite est convergente (ou converge) si elle admet une limite finie.
(2) Une suite est divergente (ou diverge) si elle n'est pas convergente (elle admet une limite infinie ou n'admet pas de limite).

## Exercices de fixation

**2.1.1** Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :
1. Une suite qui admet une limite finie est convergente.
2. Une suite qui admet une limite est convergente.
3. Une suite qui n'admet pas de limite est divergente.
4. Une suite qui n'est pas divergente est convergente.
5. Une suite qui admet une limite nulle est divergente.
6. Une suite qui n'admet pas une limite infinie est convergente.

**2.1.2** On considère les limites des suites suivantes. Lesquelles sont convergentes ?
$\lim u_n = 0$ ; $\lim v_n = -\frac{2}{5}$ ; $\lim w_n = -\infty$ ;
$\lim x_n = +\infty$ ; $\lim y_n$ n'existe pas ; $\lim z_n = 7$.

### 2.2. Suite définie par une formule explicite

#### 2.2.1. Limite d'une suite définie par une formule explicite

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par : $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+4}$.

On considère la fonction $f$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+4}$.

1. Détermine la limite de $f$ en $+\infty$.
2. Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Synthèse**

- Si tous les termes d'une suite $(u_n)$, à partir d'un certain rang, sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel $\ell$ (resp. aussi grand), on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $l$ (resp. $+\infty$) et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$).
- Si $f$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ; $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ alors la suite $(u_n)$ définie par $u_n = f(n)$ admet pour limite $l$.

**Exercice de fixation**

Détermine, si elles existent, la limite de chacune des suites définies par :

$u_n = \dfrac{3n-2}{2-n}, n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \dfrac{-4n^2+1}{2n^2-3n+1}, n \in \mathbb{N}$ ; $w_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}$ ; $x_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}, n \in \mathbb{N}$ ;

$t_n = \sqrt{\dfrac{3n^2-1}{n-5}}, n \in \mathbb{N}$ ; $y_n = \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(1-n^2), n \in \mathbb{N}^*$ ; $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ , $n \in \mathbb{N}$.

#### 2.2.2. Propriétés de comparaison

1. On considère les suites numériques $(x_n)$ et $(y_n)$ définies pour tout entier naturel non nul $n$ par $x_n = \dfrac{(-1)^n + n^2}{n}$ et $y_n = n - \dfrac{1}{n}$.
   a) Justifie que pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^*$, $y_n \leq x_n$.
   b) Détermine la limite de la suite $(y_n)$ et déduis celle de $(x_n)$.
2. Soit les suites numériques définies par les termes $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n^2}$ ; $v_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.
   a) Justifie que pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
   b) Détermine la limite de la suite $(u_n)$.

**Synthèse**

(1) Si, à partir d'un certain rang on a : $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
(2) Si, à partir d'un certain rang on a : $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.
(3) Si, à partir d'un certain rang on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

**Exercices de fixation**

Dans chaque cas, compare les termes généraux des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ puis détermine si possible la limite des suites $(u_n)$.

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n+1}$ et $v_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ ;
2. $u_n = n^2 + (-1)^n$ et $v_n = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}$.

Détermine la limite de la suite $(u_n)$ telle que : a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n} - 3 \leq u_n \leq \dfrac{-3n^2}{1+n^2}$ ;

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2n^2}$ ;

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \dfrac{1}{5^n}$ ;

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln 3| \leq \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Détermine, si elles existent, les limites des suites définies par :

$u_n = \sin n - 2n^3, n \in \mathbb{N}$ ;

$v_n = \dfrac{1}{n - e^{-n}}, n \in \mathbb{N}$ ;

$w_n = \dfrac{1}{n^2 + |\cos n|}, n \in \mathbb{N}$.

### 2.3. Suites récurrentes

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Construis sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Conjecture la limite de la suite $(u_n)$.
3. Justifie que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2u_n + 4}$.
4. a) Démontre par récurrence que $(u_n)$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
   b) Déduis-en que $(u_n)$ admet une limite telle que $\ell \leq \frac{1}{2}$.
5. Démontre que $l = \frac{3l + 1}{2l + 4}$ (en utilisant l'expression de $u_{n+1}$) et déduis-en que $\ell = \frac{1}{2}$.

**Synthèse**

Soit $(u_n)$ une suite récurrente et $\ell$ un nombre réel.

- Si $(u_n)$ converge vers $\ell$ et $f$ une fonction continue en $\ell$, alors la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.
- Si $(u_n)$ converge vers $\ell$ et si $f$ est continue en $\ell$, alors $\ell$ est solution de l'équation : $x = f(x)$.

**Exercices de fixation**

**2.3.1** On considère la suite convergente $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par $v_{n+1} = 2 - v_n^2$, telle que $0 \leq v_n \leq 5$. Soit $f$ la fonction telle que : $f(x) = 2 - x^2$.
Détermine la limite de la suite $(v_n)$.

**2.3.2** Soit la suite convergente $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}$.
On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \sqrt{x + 20}$.
1. Justifie que la limite de la suite $(u_n)$ est solution de l'équation $x^2 - x - 20 = 0$.
2. Détermine cette limite.

### 2.4. Suite monotone

A- Les termes de deux suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ sont représentés respectivement par les figures 1 et 2.

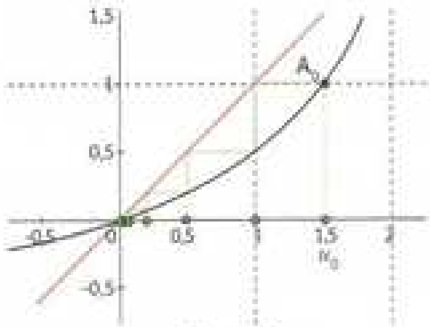


Figure 1

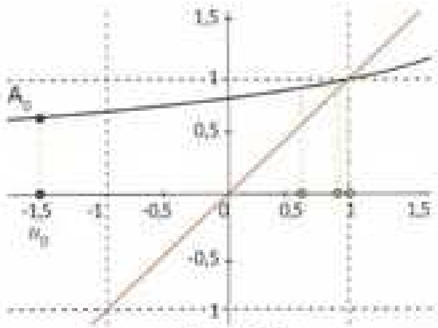


Figure 2

1. Conjecture les sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
2. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont-elles majorées ou minorées ? Si oui par quelle valeur ?
3. Conjecture la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
4. Déduis des trois questions précédentes, des propriétés sur la convergence.

B- Soient $(v_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques respectivement croissante et décroissante.
1. On suppose que la suite $(v_n)$ n'est pas majorée. Démontre qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que la suite $(v_n)$ n'est pas minorée. Démontre qu'elle diverge vers $-\infty$.

**Synthèse**

1. Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
2. Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.
3. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
4. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.

## Exercices de fixation

**3-4-1** Soit $(u_n)$ une suite numérique. Associe une phrase de chaque colonne de sorte à obtenir une propriété vraie.

| Si ... | et si ... | alors... |
|---|---|---|
| • la suite $(u_n)$ est minorée<br>• la suite $(u_n)$ n'est pas minorée<br>• la suite $(u_n)$ est majorée<br>• la suite $(u_n)$ n'est pas majorée | • la suite $(u_n)$ est croissante<br>• la suite $(u_n)$ est décroissante | • la suite $(u_n)$ converge<br>• la suite $(u_n)$ diverge |

**3-4-2** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que :
$v_n < v_{n+1} < u_{n+1} < u_n$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $v_n \leq 3 < u_n$.
Étudie la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**3-4-3** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

1. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n$, l'on a : $u_n > 1$.
2. Démontre que la suite $(u_n)$ est décroissante ; déduis-en que la suite $(u_n)$ est convergente.

## Activité 3 Suite arithmétique – suite géométrique

### 3.1. Suite arithmétique

#### 3.1.1. Généralités sur les suites arithmétiques

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.

1. a) Exprime $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
   b) Déduis-en le sens de variation de la suite $u_n$ suivant les valeurs de $r$.
2. a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$.
   b) Déduis-en la formule explicite de la suite $(u_n)$ pour tous entiers naturels $n$ et $p$.
3. Soit S la somme des vingt premiers termes de $(u_n)$.
Donne une expression de S.

**Synthèse**

- Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

Si $r < 0$ alors $(u_n)$ est décroissante ; si $r = 0$ alors $(u_n)$ est constante ; si $r > 0$ alors $(u_n)$ est croissante.

- La somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r$ et de premiers termes $u_0$

est égale à : le nombre de termes × $\frac{u_0 + u_n}{2}$.

## Exercices de fixation

**3.1.1.1** Parmi les suites arithmétiques suivantes, cite celles qui sont croissantes, celles qui sont constantes et celles qui sont décroissantes.
- $(u_n)$ est une suite de raison $r = -2$ de premier terme $u_0 = -9$.
- $(v_n)$ est une suite de raison $r = 3$ de premier terme $u_0 = -1$.
- $(w_n)$ est une suite telle que $w_n = 4 - n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)$ est une suite telle que $x_n = 2$.
- $(y_n)$ est une suite telle que $y_{n+1} = 1 + y_n$.

**3.1.1.2** Démontre que :
a) la somme des nombres pairs $2 + 4 + 6 + ... + (2p)$ égale $p(p + 1)$.
b) la somme des nombres impairs $1 + 3 + 5 + ... + (2p + 1)$ égale $(p + 1)^2$.

### 3.1.2. Convergence d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
1. Exprime $u_n$ en fonction de $u_0$, $n$ et $r$.
2. Déduis-en la limite de $(u_n)$ suivant le signe de $r$.

**Synthèse**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
Si $r = 0$, alors $(u_n)$ converge et $\lim u_n = u_0$.
Si $r \neq 0$, alors $(u_n)$ diverge et $\lim u_n = -\infty$, $(r < 0)$ ; $\lim u_n = +\infty$ $(r > 0)$.

## Exercices de fixation

**3.1.2.1** Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. La suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 2$ est convergente.
2. La suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = -0,2$ est divergente.
3. La suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -0,3$ est convergente.
4. La suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $r = 0$ est divergente.

**3.1.2.2** Étudie la convergence des suites arithmétiques définies ci-dessous.
a) $(u_n)$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
b) $(v_n)$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3 + v_n$.
c) $(w_n)$ de premier terme $w_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
d) $(x_n)$ de premier terme $x_0 = -2$ et de raison $r = 0,7$.
e) $(y_n)$ est définie, pour tout entier naturel $n$ par : $y_n = 2 - n\ln 5$.
f) $(z_n)$ est définie, pour tout entier naturel $n$ par : $z_n = \dfrac{-en + 3}{-2}$.

### 3.2. Suite géométrique

### 3.2.1. Généralités sur les suites géométriques

Soit $(v_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$.
1. Exprime $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
2. a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 \times q^n$.
   b) Déduis-en la formule explicite de la suite $(v_n)$ pour tous entiers naturels $n$ et $p$.
3. Soit S la somme des vingt premiers termes de $(v_n)$. Donne une expression de S.
4. Exprime $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $n$.
5. a) Supposons que $v_0 < 0$. Étudie les variations de la suite $(v_n)$ dans les cas suivants :
   1er cas : $q < 0$ ; 2e cas $q > 1$ ; 3e cas : $0 < q < 1$.
   b) Supposons que $v_0 > 0$. Réponds à la question 5. a) dans ce cas.

**Synthèse**

- Soit $(v_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$.

Pour $v_0 < 0$, $(v_n)$ est décroissante si $q > 1$, croissante si $0 < q < 1$ et n'est pas monotone si $q < 0$.
Pour $v_0 > 0$, $(v_n)$ est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$ et n'est pas monotone si $q < 0$.

- La somme de $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ est : $u_0 \times \dfrac{1-q^{\text{nbre de terme}}}{1-q}$.

**Exercices de fixation**

**3.2.1.1** Parmi les suites géométriques suivantes, cite celles qui sont croissantes et celles qui sont décroissantes.

- $(u_n)$ est une suite de raison $q = -2$ de premier terme $u_0 = -9$.
- $(v_n)$ est une suite de raison $q = \frac{2}{3}\ln 2$ de premier terme $v_0 = -1$.
- $(w_n)$ est une suite telle que $w_n = 3\left(\frac{2}{7}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)$ est une suite telle que $x_n = (\ln 2)^n$.
- $(y_n)$ est une suite telle que $y_{n+1} = e^{-3}y_n$ et $y_0 = -3$.

**3.2.1.2** Calcule les sommes suivantes :

a) $S = 1 + 2 + 4 + \ldots\ldots + 16384$ ;

b) $R = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots + \frac{1}{59049}$.

### 3.2.2. Convergence d'une suite géométrique

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique non constante de raison $q$.

1. Supposons que $q > 0$.
   a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times e^{n\ln q}$.
   b) Étudie la convergence de $(v_n)$ dans les cas suivants :
   1er cas : $0 < q < 1$; 2ème cas : $v_0 > 0$ et $q > 1$ ; 3ème cas : $v_0 < 0$ et $q > 1$.
2. Supposons que $q < 0$.
   a) En posant $p = -q$, justifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n \times v_0 \times e^{n\ln p}$.
   b) Déduis-en une expression de $v_{2n}$ et $v_{2n+1}$.
   c) Étudie la convergence de $(v_n)$ dans les cas suivants :
   1er cas : $-1 < q < 0$ ; 2ème cas : $v_0 > 0$ et $q < -1$ ; 3ème cas : $v_0 < 0$ et $q < -1$.
3. Déduis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $-1 < q < 1$ et donne sa limite.

**Synthèse**

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non constante de raison $q \neq 1$.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $-1 < q < 1$ et on a : $\lim v_n = 0$.

**Exercices de fixation**

**3.2.2.1** Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

1. La suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 2$ est convergente.
2. La suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $q = 0{,}2$ est divergente.
3. La suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 0{,}3$ est convergente.
4. La suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $q = 3$ est divergente.

[illegible] On donne les suites géométriques ci-dessous.
Étudie leur convergence.
a) $(u_n)$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
b) $(v_n)$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{4}$.
c) $(w_n)$ de premier terme $w_0 = -5$ et de raison $q = \frac{12}{11}$.
d) $(x_n)$ de premier terme $x_0 = -2$ et de raison $q = 0{,}01$.
e) $(y_n)$ est définie, pour tout entier naturel $n$ par : $y_n = 3e^{-2n}$.
f) $(z_n)$ est définie, pour tout entier naturel $n$ par : $z_n = -\frac{2}{5^n}$.

## Activité 4 Suite $n^\alpha$, $b^n$, $\ln(n)$ et croissance comparée

### 4.1. Convergence des suites $n^\alpha$ et $b^n$

1. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = b^n$, avec $b > 0$.
   a) Démontre l'inégalité de Bernoulli : pour tout $x$ positif et tout entier naturel $n$, on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
   b) Déduis-en l'étude de la convergence de $(u_n)$ dans les cas où $b > 1$ ; $b = 1$ et $0 < b < 1$.
2. Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_n = n^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^\alpha$.
Étudie la convergence de la suite $(v_n)$.

**Synthèse**

- La suite $(b^n)$, avec $b > 0$ est convergente si et seulement si $0 < b \leq 1$ et on a :
  $\lim b^n = 0$ (pour $0 < b < 1$) et $\lim(b^n) = 1$ (pour $b = 1$).
- La suite $(n^\alpha)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente si et seulement si $\alpha \leq 0$ et on a :
  $\lim(n^\alpha) = 0$ (pour $\alpha < 0$) et $\lim(n^\alpha) = 1$ (pour $\alpha = 0$).

**Exercices de fixation**

Les suites aux termes généraux suivants sont-elles convergentes ou divergentes ?
$u_n = 2^n$ ; $v_n = n^{-0,3}$ ; $w_n = n\ln 0{,}5$ ; $x_n = \frac{1}{3^n}$.

### 4.2. Croissances comparées

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $[0 ; +\infty[$ respectivement par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}$ et $g(x) = \frac{x^\alpha}{b^x}$.
1. Justifie que, si $\alpha > 0$, alors $\lim \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.
2. a) Justifie que $\forall x > 0$, $g(x) = e^{x\left(\frac{\alpha\ln x}{x} - \ln b\right)}$.
   b) Justifie que, si $b > 1$ et $\alpha > 0$, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = 0$.
   c) Justifie que, si $0 < b < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = +\infty$.

**Synthèse**

1. Si $\alpha > 0$, alors $\lim \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.
2. Si $b > 1$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = 0$.
3. Si $0 < b < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = +\infty$.

## Exercices de fixation

**1** Reproduis le tableau ci-dessous et mets une croix dans la case qui convient.

| N° | La limite de la suite de terme général | est nulle | est infinie | n'existe pas |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $u_n = \frac{n^3}{2^n}$ | | | |
| 2 | $u_n = \frac{0,4^n}{n^3}$ | | | |
| 3 | $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{3}}}$ | | | |
| 4 | $u_n = \frac{n^3}{3^n}$ | | | |

**2** Calcule la limite de chaque suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ définie ci-dessous :

a) $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ ; b) $u_n = 2^n - 3^n$ ; c) $u_n = \frac{2^n n^5}{3^n}$ ; d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{0,3}}$ ; e) $u_n = \frac{n^{-3}}{5^n}$ ;

f) $u_n = \frac{n^2}{\ln n}$ ; g) $u_n = \frac{2^n - 5^n}{5^n + 4^n}$.

## APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

### Exercice 1 Utiliser le raisonnement par récurrence

Démontre par récurrence que :

- La suite $(u_n)$ définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ est majorée par 3.
- Pour tout entier naturel $n$, le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

**Corrigé**

- Soit $P_n$ la propriété « $u_n \leq 3$ ».

**Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 < 3$ donc $P_0$ est vraie.

**Hérédité**

Supposons que, pour un entier naturel $k$, $k > 0$, la propriété $P_k$ est vraie c'est-à-dire $u_k \leq 3$ puis démontrons que $P_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 3$.

$u_k \leq 3 \Leftrightarrow -u_k \geq -3$

$\Leftrightarrow 6 - u_k \geq 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6 - u_k} \leq \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{6 - u_k} \leq 3$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq 3$

Ainsi $P_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion**

Donc pour tout entier naturel $n$, la suite $(u_n)$ est majorée par 3.

- Soit $Q_n$ la propriété « $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22. »

**Méthode**

Le raisonnement par récurrence comporte trois étapes : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

**Initialisation**

Pour $n = 0$, $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ or 0 est un multiple de 22, donc $Q_0$ est vraie.

**Hérédité**

Supposons que, pour un entier naturel $n$, $n > 0$, la propriété $Q_n$ est vraie puis montrons que $Q_{n+1}$ est vraie.

$5^{2(n+1)} - 3^{(n+1)} = 5^{2n+2} - 3^{n+1} = 5^{2n} \times 5^2 - 3^n \times 3$

$= (22 + 3) \times 5^{2n} - 3 \times 3^n = 22 \times 5^{2n} + 3(5^{2n} - 3^n)$.

On sait que d'après l'hypothèse de récurrence $Q_n$ est vraie c'est-à-dire que $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22 donc $3(5^{2n} - 3^n)$ est un multiple de 22 ; aussi $22 \times 5^{2n}$ est un multiple de 22.

Par conséquent $5^{2(n+1)} - 3^{(n+1)}$ étant la somme de deux multiples de 22 est un multiple de 22.

Donc $Q_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion**

Donc pour tout entier naturel $n$, le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

## Exercice 2 Étudier le sens de variation d'une suite

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par : $u_n = \dfrac{-2}{\ln(3+n)}$ et $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Étudie la monotonie de ces suites.

**Corrigé**

• Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{\ln(4+n)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{\ln(4+n)} + \frac{2}{\ln(3+n)}$$

Pour tout entier naturel $n$, $4+n > 3+n$ donc $\ln(4+n) > \ln(3+n)$.

$$\frac{1}{\ln(4+n)} < \frac{1}{\ln(3+n)}$$

$$\frac{-2}{\ln(4+n)} > \frac{-2}{\ln(3+n)}$$

Ainsi pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite $(u_n)$ est croissante.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^n > 0$ et $n! > 0$ donc tous les $u_n$ sont strictement positifs donc on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!}$$

$$\frac{(n+1) \times n! \times n^n}{(n+1)(n+1)^n \times n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

On sait que $n < n+1$ donc $\dfrac{n}{n+1} < 1$ or la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$ et par conséquent $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

On conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

**Méthode**

Pour étudier le sens d'une suite $(u_n)$, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ;
- comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, lorsque $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 3 Étudier la convergence d'une suite récurrente

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1. Démontre que l'équation (E) : $f(x) = x$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique $\alpha$ appartenant à $I = ]3\,;4[$.

2. a) Démontre que $f(I) \subset I$.

   b) Démontre que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$.

3. Soit $w_n$ la suite définie par : $w_0 = \dfrac{7}{2}$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{12^n}|w_0 - \alpha|$.

   b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{12^n}\right)$, puis que $\lim w_n = \alpha$.

   c) Détermine une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

**Corrigé**

1. Soit la fonction $h : x \mapsto x - f(x)$.

$h$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{4x}$.

$\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $h'(x) > 0$ donc $h$ est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ par conséquent l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

On a $h(3) = -0{,}725$ et $h(4) = 0{,}366$ ;

$h(3) \times h(4) < 0$ donc $3 < \alpha < 4$.

2. a) La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{4x}$.

$\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ ;

**Méthode**

3. b) Utiliser une démonstration par récurrence ou un produit membre à membre.

On a : $f(3) \approx 3{,}725$ et $f(4) \approx 3{,}65$ ;
$f(4) > 3$ et $f(3) < 4$ donc si $x \in ]3\,;4[$,
$3 < f(4) < f(x) < f(3) < 4$ d'où $f(I) \subset I$.

b) La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $f''(x) = \frac{1}{4x^2}$ donc $f'$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On a : $f'(3) = -\frac{1}{12}$ et $f'(4) = -\frac{1}{16}$

Donc : $\forall x \in I,\ -\frac{1}{12} < f'(x) < -\frac{1}{16}$.

On en déduit que $|f'(x)| < \frac{1}{12}$.

3. Soit $(w_n)$ la suite définie par :
$w_0 = \frac{7}{2}$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

a) On a : $w_0 \in I$ et $f(I) \subset I$ donc si $u_k \in I$, alors $u_{k+1} \in I$. On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

On sait que $|f'(x)| < \frac{1}{12}$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $f$ sur $I$, on a :
$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{12}\ |x - \alpha|$.

Puisque $w_{n+1} = f(w_n)$ et on a :
$|f(w_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{12}\ |w_n - \alpha|$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |w_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_n - \alpha|$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, |w_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_k - \alpha|$ ;

Pour $k = 0$, on a : $|w_1 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_0 - \alpha|$ ;

Pour $k = 1$, on a : $|w_2 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_1 - \alpha|$ ;

Pour $k = 2$, on a : $|w_3 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_2 - \alpha|$.

..................................................................

Pour $k = n - 1$, on a : $|w_n - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |w_{n-1} - \alpha|$

On fait le produit membre à membre et on simplifie, on aura : $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |w_0 - \alpha|$.

b) On a : $w_0 = \frac{7}{2} = 3{,}5$ et $3 < \alpha < 4$ donc $|w - \alpha| < \frac{1}{2}$ et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|w_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right)$

On a : $\lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right) = 0$ donc $\lim w_n = \alpha$.

c) Pour que $|w_n - \alpha| \leq 10^{-5}$, il suffit que
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right) \leq 10^{-5}$.

$12^n \geq 50000$.

$n \ln 12 \geq \ln 50000$

$n \geq 4{,}35$

La plus petite valeur qui convient est $n = 5$ et $w_5 \approx 3{,}674637$.

## Exercice 4 Utiliser une suite arithmétique pour résoudre un problème

Pendant les vacances scolaires, Kaelly se trouve un petit emploi. Cet emploi lui rapporte 18 000 F CFA la première semaine et 4 500 F CFA de plus chacune des semaines qui suivent.

Kaelly désire dépenser 10000 F CFA par semaine (transport et nourriture) et faire des économies pour ses courses de la nouvelle rentrée scolaire (ordinateur, fournitures scolaires, tenue, chaussures, ...) qu'elle évalue à 315 000 FCFA.

Après trois mois de vacances scolaires, penses-tu que Kaelly pourra arriver à ses fins ?
En utilisant tes connaissances sur les suites numériques, propose une réponse à Kaelly.

**Corrigé**

Soit $u_n$ le gain de Kaelly au bout de n semaines.
Le salaire de Kaelly :
la première semaine est $u_1 = 18\,000$ ;
la deuxième semaine est $u_2 = u_1 + 4500 = 22\,500$ ;
la troisième semaine est $u_3 = u_2 + 4500 = 27\,000$.

On voit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 4500$ donc $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 4500$ et de premier terme 18000.

$\forall n \geq 1,\ u_n = 18000 + (n-1) \times 4500$
$= 13500 + 4500n$.

Les trois mois de vacances font 12 semaines donc le gain total (sans dépenses) de Kaelly est :
$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{12} = \frac{12}{2}(u_1 + u_{12})$

**Méthode**

Il faut calculer le salaire de Kaelly sur les 12 semaines puis retrancher les dépenses totales.

On a $\forall n \geq 1,\ u_n = 13500 + 4500n$

donc $u_{12} = 13500 + 4500 \times 12 = 67\,500$.

Ainsi $S = \frac{12}{2}\ (13500 + 67500) = 486\,000$.

Ses dépenses étant de $10000 \times 12 = 120000$ ses économies seront $486000 - 120000 = 366000$ FCFA

$366000 > 315000$ donc Kaelly, peut, à la fin des vacances scolaires, préparer sa rentrée scolaire.

**Exercice 5 Utiliser une suite géométrique pour résoudre un problème**

Tano et Bosson ont été embauchés au premier janvier 2020 dans deux entreprises différentes, sous deux contrats différents à durée indéterminée.
Bosson débute avec un salaire annuel de 4,5 millions de francs CFA net et une augmentation de 4% par an, au premier janvier de chaque année.
Tano débute avec un salaire annuel de 5 millions de francs CFA net et une augmentation de 3% par an, au premier janvier de chaque année.
Avec une telle différence dans les contrats, Bosson veut savoir en quelle année son salaire deviendra-t-il supérieur à celui de Tano.

**Corrigé**

On désigne respectivement par $u_n$ et $v_n$ les salaires annuels de Bosson et de Tano au premier janvier de l'année $2020 + n$.
Le salaire de Bosson :
- au premier janvier 2020 est $u_0 = 4\,500\,000$ ;
- au premier janvier 2021 sera
$u_1 = u_0 + \frac{4}{100} u_0 = 1{,}04\, u_0 = 4\,680\,000$ ;
- au premier janvier 2022 sera
$u_2 = u_1 + \frac{4}{100} u_1 = 1{,}04\, u_1 + \frac{4}{100} u_1 = 4\,867\,200$ ;

On voit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n$ donc la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 1,04 et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1{,}04^n u_0$.
Le salaire de Tano :
- au premier janvier 2020 est $v_0 = 5\,000\,000$ ;
- au premier janvier 2021 sera
$v_1 = v_0 + \frac{3}{100} v_0 = 1{,}03 v_0 = 5\,150\,000$ ;
- au premier janvier 2022 sera
$v_2 = v_1 + \frac{3}{100} v_1 = 1{,}03 v_1 = 5\,304\,500$ ;

**Méthode**

Faire attention au signe du logarithme dans la résolution des inéquations.

On voit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}03 v_n$ donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 1,03 et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1{,}03^n v_0$.
Le salaire de Bosson sera supérieur à celui de Tano si $u_n > v_n$.

$u_n > v_n \Leftrightarrow 1{,}04^n u_0 > 1{,}03^n v_0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right) > \frac{v_0}{u_0}$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right) > \ln\frac{v_0}{u_0}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\frac{v_0}{u_0}}{\ln\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)}$

$\Leftrightarrow n > 11$.

Le salaire de Bosson sera supérieur à celui de Tano en 2020 + 11 donc en 2031.

## Résumé de cours

Dans ce résumé de cours, $\mathcal{E}$ désigne une partie de $\mathbb{N}$.

## 1 Généralités sur les suites numériques et raisonnement par récurrence

### 1.1. Définition

**Définition** Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Une suite peut être définie par :
- la donnée de son terme général en fonction de $n$ ; on dit alors que la suite est définie par une formule explicite ;
- la donnée d'un terme et une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ; on dit que la suite est définie par une formule de récurrence.

### 1.2. Raisonnement par récurrence

**Définition** En mathématique, le raisonnement par récurrence est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété dépendant de $n$ où $n$ est un entier naturel.

**Principe du raisonnement par récurrence**

Lorsque la propriété dépend d'un entier naturel $n$, on peut la noter P($n$).
Principe : Soit P($n$) une propriété dépendant de l'entier naturel $n$. Pour démontrer que P($n$) est vraie pour tout $n$ supérieur ou égal à un entier $n_0$ donné, on procède comme suit :
- **Initialisation** : On vérifie que P($n_0$) est vraie.
- **Hérédité** : On établit que : « Si pour un entier $k \geq n_0$, P($k$) est vraie » alors « P($k$ + 1) est vraie ».
- **Conclusion** : On conclut que : P($n$) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

### 1.3. Sens de variation d'une suite

**Propriété 1** Soit $(u_n)_{n\in\mathcal{E}}$ une suite numérique. On dit que :
- La suite $(u_n)$ est **croissante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)$ est **décroissante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)$ est **constante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

**Remarque**

Avec des inégalités strictes, on dira que la suite est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Comment étudier le sens de variation d'une suite ?**

**- Points méthodes**
- Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une formule explicite, on peut :

**Méthode 1** : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

**Méthode 2** : Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si les termes de la suite sont strictement positifs).

**Méthode 3** : Étudier le sens de variation sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction $f$ telle que : $u_n = f(n)$.
- Pour une suite définie par une formule de récurrence, on peut :

**Méthode 1** : Utiliser la méthode 1 précédente si possible.

**Méthode 2** : Utiliser le raisonnement par récurrence.

## Résumé de cours

**Définition**
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

**Propriété 2** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique dont le terme général est du type $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même sens de variation que la fonction $f$ sur $[0 ; +\infty[$.

### 1.4. Suites majorées - suites minorées

**Définition** Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique. On dit que :
1. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est minorée s'il existe un nombre réel $m$ tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$.
2. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$.
3. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
$(\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in E, m \leq u_n \leq M)$.

__Remarques__
- Toute suite $(u_n)$ croissante est minorée par son premier terme et on a : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots$
- Toute suite $(v_n)$ décroissante est majorée par son premier terme et on a : $v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq \cdots$

## 2 Convergence d'une suite numérique

### 2.1. Notion de convergence

**Définition** Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
1. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est converge si elle admet une limite finie.
2. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est divergente si elle n'est pas convergente (ou si elle n'admet pas de limite finie).

La limite de la suite $(u_n)_{n \in E}$ est notée : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$ ou simplement $\lim(u_n)$.

__Remarques__
- On ne calcule la limite d'une suite que pour $n$ tendant vers $+\infty$.
- On admet que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

### 2.2. Suite définie par une formule explicite

#### 2.2.1. Limite d'une suite définie par une formule explicite

**Propriété** $\ell$ est soit un nombre réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$. Si $f$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors la suite $(u_n)$ définie par $u_n = f(n)$ admet pour limite $\ell$.

__Remarques__
La réciproque est fausse. Prenons $f(x) = \sin(\pi x)$ et $u_n = \sin(\pi n)$.
$\lim u_n = 0$ alors que $f$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

- Pour certaines suites numériques $(u_n)$ tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel $\ell$. Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $\ell$ et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou simplement $\lim(u_n) = \ell$.

## Résumé de cours

- Pour certaines suites numériques $(u_n)$, tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi grands (resp. petit) que l'on veut. Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$) ou simplement $\lim(u_n) = +\infty$ (resp. $\lim(u_n) = -\infty$).

### 2.2.2. Propriétés de comparaison

***Dans les propriétés ci-dessous, $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont trois suites et $l$ et $l'$ des nombres réels.***

**Propriété 1**
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

**Propriété 2**
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$ alors $\lim u_n = \ell$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n = \ell$.

**Propriété 3** Soit $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$. Si, à partir d'un certain rang on a : $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.

### 2.3. Suites récurrentes

**Propriété 1** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $a$ et $f$ une fonction continue en $a$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

**Propriété 2** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dont le terme général est du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ et si $f$ est continue en $\ell$, alors $\ell$ est solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$

#### Remarques

- Une solution $\ell$ de l'équation $f(x) = x$ est appelé point fixe de $f$.
- L'existence d'un point fixe n'implique pas la convergence d'une suite récurrente.
- Cette propriété est utilisée pour calculer la limite après avoir prouvé la convergence.
- Elle peut aussi prouver la divergence par un raisonnement par l'absurde (si l'équation n'a pas de solution la suite est divergente).

### 2.4. Suites monotones

**Propriété 1**
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Propriété 2**
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

## Résumé de cours

### 3 Suite arithmétique - Suite géométrique

#### 3.1. Suite arithmétique

##### 3.1.1. Généralités

**Définition** Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
$(u_n)_{n \in E}$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel $r$ tel que :
$\forall n \in E, u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel $r$ est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in E}$.

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.

Formule explicite : $\forall n \in E, u_n = u_0 + nr$.
$\forall n \in E$ et $p \in E$, $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Sens de variation

Si $r < 0$ alors $(u_n)$ est décroissante; si $r = 0$ alors $(u_n)$ est constante; si $r > 0$ alors $(u_n)$ est croissante.

Somme de termes consécutifs

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ......+ u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} = \frac{n}{2}(2u_0 + (n-1)r).$$

Exemples

a) Somme des entiers naturels inférieurs ou égaux à $n$ : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
b) Somme des nombres pairs : $2 + 4 + 6 + ...+ (2p) = p(p + 1)$.
c) Somme des nombres impairs : $1 + 3 + 5 + ... + (2p + 1) = (p + 1)^2$.

##### 3.1.2. Convergence d'une suite arithmétique

**Propriété** Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.
- Si $r = 0$ alors $(u_n)$ converge et $\lim u_n = u_0$.
- Si $r \neq 0$ alors $(u_n)$ diverge et $\lim u_n = -\infty$, $(r < 0)$ ; $\lim u_n = +\infty$ $(r > 0)$.

#### 3.2. Suites géométriques

##### 3.2.1. Généralités

**Définition** Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
$(v_n)_{n \in E}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel $q$ tel que :
$\forall n \in E, v_{n+1} = qv_n$.
Le nombre réel $q$ est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n \in E}$.

Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$.

Formule explicite : $\forall n \in E, v_n = v_0 \times q^n$.
$\forall n \in E$ et $p \in E$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Sens de variation

Pour $v_0 < 0$, $(v_n)$ est décroissante si $q > 1$ et croissante si $0 < q < 1$.
Pour $v_0 > 0$, $(v_n)$ est croissante si $q > 1$ et décroissante si $0 < q < 1$.

## Résumé de cours

**Somme de termes consécutifs**

- $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ......+ v_{n-1} = v_0 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ si $q \neq 1$.
- $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ......+ v_{n-1} = n \times v_0$ si $q = 1$.

**Exemples**

- La somme de puissances d'un nombre réel $x$, ($x \neq 1$), pour $n \geq 1$ est :

$1 + x + x^2 + ...+ x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

En particulier, une factorisation de $1 - x^n$ est : $(1 - x)(1 + x + \cdots... + x^{n-1})$.

- Un capital $C_0$, placé à intérêts composés pendant $n$ années au taux annuel $i$, produit $C_n$ capital où $C_n = (1 + i)^n C_0$.

#### 3.2.2. Convergence d'une suite géométrique

**Propriété** Soit $(v_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$, avec $q \neq 0$ et $v_0 \neq 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $-1 < q \leq 1$ | $(v_n)$ est convergente | $\lim v_n = 0$ si $-1 < q < 1$ |
| | | $\lim v_n = v_0$ si $q = 1$ |
| $q \leq -1$ ou $q > 1$ | $(v_n)$ est divergente | $\lim v_n = +\infty$ si $q > 1$ et $v_0 > 0$ |
| | | $\lim v_n = -\infty$ si $q > 1$ et $v_0 < 0$ |
| | | $\lim v_n$ n'existe pas si $q \leq -1$ |

## 4 Suite $n^\alpha$, $b^n$, $\ln(n)$ et croissance comparée

### 4.1. Convergence des suites $(b^n)_n$, $(n^\alpha)_n$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$

**Propriété 1** La suite $(b^n)_n$ est convergente si et seulement si $0 < b \leq 1$ et on a :
$\lim b^n = 0$ (pour $0 < b < 1$) et $\lim(b^n) = 1$ (pour $b = 1$).

**Propriété 2** La suite $(n^\alpha)_n$ est convergente si et seulement si $\alpha \leq 0$ et on a :
$\lim n^\alpha = 0$ (pour $\alpha < 0$) et $\lim(n^\alpha) = 1$ (pour $\alpha = 0$).

### 4.2. Croissances comparées

**Propriété**
1. Si $\alpha > 0$, alors $\lim \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$ ;
2. Si $b > 1$ et $\alpha$ est quelconque, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = 0$ ;
3. Si $0 < b < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim \frac{n^\alpha}{b^n} = +\infty$.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Dans chacun des cas suivants, démontre par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $2n \geq n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n+1} + 2^{n+1}$ est un multiple de 5.
5. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

**2** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :
$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2^n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 12} \end{cases}$
Démontre par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2^n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < 4$.

**3** Étudie la monotonie de chacune des suites $(u_n)$ de terme général suivant :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n-1}{3n-2}$ ; 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n}{n}$ ;
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{4^n}{3^n+1}$ ; 4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^n}{n!}$ ;
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

**4** Démontre par récurrence que la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$ est décroissante.

**5** 1. Démontre que la suite $(u_n)$ définie par :
$u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ est majorée par 1.
2. Démontre que la suite $(w_n)$ définie par $\forall n > 0$ et $w_n = \sqrt{n^2+2} - n$ est minorée par 0.

**6** Dans chacun des cas suivants, démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

a) $v_n = \frac{\ln n}{n}$ ; b) $v_n = \frac{n}{e^n}$ ;
c) $v_n = \ln(n^2+1) - 2\ln(n)$.

**7** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$v_n = -n^3 - \sqrt{n^2+5}$.

1. Justifie que $v_n \leq -n^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déduis-en la limite de la suite $(v_n)$.

**8** Soit $(z_n)$ la suite définie, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par : $z_n = \frac{11n^2}{4\sin(2n) - 7}$.

1. Démontre que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $z_n \leq -n^2$.
2. Déduis-en la limite de la suite $(z_n)$.

**9** Soit la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n \geq 4$, par : $v_n = \frac{2n + (-1)^n \cos(n)}{3-n}$.

1. Pour tout entier naturel $n \geq 4$, démontre que : $\frac{2n-1}{3-n} \geq v_n \geq \frac{2n+1}{3-n}$.
2. a) Détermine les limites $\lim \frac{2n-1}{3-n}$ et $\lim \frac{2n+1}{3-n}$.
b) Déduis-en la limite de la suite $(v_n)$.

**10** Soit la suite $(x_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $x_n = \frac{1-\cos^2(n)}{3n^2 - 2n + 2 + (-1)^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n$, détermine un encadrement de $x_n$.
2. Déduis-en la limite de la suite $(x_n)$.

**11** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel non nul, par : $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$.

1. Encadre le terme général de la suite par les termes généraux de deux suites convergentes.
2. Déduis-en que la suite $(v_n)$ converge et précise la valeur de sa limite.

**12** Dans chaque cas ci-dessous, compare les termes généraux des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ puis détermine leurs limites.

1. $u_n = 2n + (-1)^n$ et $v_n = 2n - 1$ ;
2. $u_n = n + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ et $v_n = n - 1$ ;
3. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$ et $v_n = 1 - n$ ;
4. $u_n = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n+1}$ et $v_n = \frac{2}{n-1}$.
5. $u_n = n^2 - 2n(-1)^n + 1$ et $v_n = (n-1)^2$ ;
6. $u_n = \frac{1}{n + e^{-n}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

**13** Calcule :

1. $\lim \frac{-3n}{2e^{-n}}$ ; 2. $\lim \frac{2^n n^3}{5^n}$ ; 3. $\lim e^{\sin n - n}$ ;
4. $\lim(2^n - n^3)$ ; 5. $\lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$.

**14** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

1. a) Démontre que l'on peut écrire $u_{n+1}$ sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction à déterminer.

b) Déduis-en les variations et la limite de la suite $(u_n)$.

2. Résous l'équation $f(x) = x$.

3. Soit la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

a) Calcule $v_0$.

b) Calcule $\dfrac{2v_n}{1+v_n}$ et déduis-en une expression de $(u_n)$ en fonction de $n$.

c) Démontre que $u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2^n}}$.

Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.

**15** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$.

1. Calcule $u_1$ et $u_2$ puis conjecture le sens de variation de $(u_n)$.
2. Démontre par récurrence que $u_n \geq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6$.
4. Conclus le sens de variation de la suite $(u_n)$.
5. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**16** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudie la monotonie de la suite $(u_n)$.
2. a) Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

3. Conjecture une expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis démontre la propriété ainsi conjecturée.

**17** On considère une suite $(u_n)$ telle que, pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$ et $u_0 = 9$.

**PARTIE A :**

1. Démontre que cette suite est minorée par 9.
2. Déduis-en son sens de variation.
3. Que peut-on dire du comportement de la suite $(u_n)$ en l'infini ?

**PARTIE B :** On pose $v_n = u_n - 4$.

1. Justifie que la suite $(v_n)$ est géométrique puis détermine ses caractéristiques.
2. Justifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 2^n + 4$.
3. Déduis-en la limite de la suite $(v_n)$.

**18** On considère la suite $(p_n)$ définie par : $p_0 = 2$ et $p_{n+1} = \sqrt{2p_n + 3}$ pour tout entier naturel $n$.

1. Détermine $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (on donnera une valeur approchée à $10^{-3}$ près).
2. Démontre que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $0 \leq p_n \leq 3$.
3. Démontre que la suite $(p_n)$ est convergente puis détermine sa limite.

**19** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Calcule les six premiers termes de la suite $(u_n)$ et place les points correspondants sur une droite graduée.
2. Démontre que la suite $(u_n)$ est majorée par 2.
3. Démontre que la suite $(u_n)$ est croissante.
4. Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite $(u_n)$ ?

**20** $(u_n)$ et $(v_n)$ sont les suites définies pour tout entier naturel $n$ par : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Démontre par récurrence que pour entier naturel $n$, $u_n > 0$.

a) Démontre que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Exprime $v_n$, puis $u_n$ en fonction $n$.

c) Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.

**21** Considérons la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$p_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sqrt{p_n^2 + 2}$.

1. Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n > 0$.
2. Étudie la monotonie de $(u_n)$.
3. On pose : $q_n = p_n^2$.

a) Prouve que $(q_n)$ est une suite arithmétique.

b) Exprime $q_n$ puis $p_n$ en fonction de $n$.

4. Étudie ainsi la convergence de $(p_n)$.

**22** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_1 = 1$ et $(v_{n+1})^2 = 4u_n$.

1. Calcule $v_2, v_3, v_4, v_5$ (on donnera les résultats sous la forme $2^n$).
2. On considère la suite $(w_n)$ définie par : $w_n = \ln(v_n) - \ln 4$.

Démontre que $(w_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

3. a) Exprime $w_n$ en fonction de $n$.

b) Déduis $v_n$ puis calcule $\lim v_n$.

4. Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $u_n > 3{,}96$ ?

**23** On considère les suites $u$ et $v$ définies par, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = \sqrt{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$$

1. On définit la suite $(w_n)$ par $w_n = v_n - u_n$.

Démontre que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

2. Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$.
3. Démontre que la suite $v$ est décroissante et que la suite $u$ est croissante.
4. Déduis-en que $u$ et $v$ sont convergentes et ont la même limite.

**24** Soit la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représente sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$ de la suite $(u_n)$. (Unité graphique 2 cm.)
2. a) Démontre par récurrence que la suite $(u_n)$ est majorée par $\frac{5}{2}$.
   b) Démontre que la suite $(u_n)$ converge.
3. Soit la suite $(v_n)$ définie par :
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{5}{2}$.
   a) Démontre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprime $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
   c) Détermine la limite de la suite $(u_n)$.

**25** Une salle de sport a ouvert en 2019 et 3500 personnes se sont inscrites dès la première année. Chaque année, 80% des inscrits renouvellent leur abonnement et 450 nouvelles inscriptions sont enregistrées. Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ le nombre d'abonnement au cours de l'année 2019 + $n$.

1. a) Donne $a_0$.
   b) Exprime $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $b_n = a_n - 2250$.
   a) Démontre que la suite $(b_n)$ est géométrique de raison 0,8. Précise son premier terme.
   b) Exprime $b_n$ en fonction de $n$.
   c) Déduis-en que $a_n = 1252 \times 0{,}8^n + 2250$.
3. Détermine $\lim a_n$ ; interprète le résultat.

## Exercices d'approfondissement

**26** On définit la suite réelle $(u_n)$ par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}^*$,
$u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$, où $p \in \mathbb{R}\setminus\{0 ; 1 ; 2\}$

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$. Démontre que $(w_n)$ est une suite géométrique et calcule $w_n$ en fonction de $p$, $n$ et $a$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$. Démontre que $(t_n)$ est une suite constante et calcule $t_n$ en fonction de $a$.
3. Exprime $u_n$ en fonction de $w_n$ et $t_n$ puis en fonction de $p$, $n$ et $a$.

**27** Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par : $v_n = \cos(n)(4\cos^2(n) - 3) + \sqrt{n} + 1$.

1. Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $\cos(3n) = \cos(n)(4\cos^2(n) - 3)$.
2. Détermine alors la limite de la suite $(v_n)$.

**28** Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels. Soit la suite $(S_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
On considère la proposition $(P_n)$ :
« Si la suite $(u_n)$ converge vers 0, alors la suite $(S_n)$ converge ».
$(P_n)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifie ta réponse.

**29** 1. Démontre que : $\forall x > 0$, $\forall n \geq 2$, on a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2. Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{n+1}{2^n}$.
   a) Prouve que : $\forall n \geq 2$, $u_n \leq \frac{2(n+1)}{n^2 - n}$.
   b) Étudie la convergence de $(u_n)$.

**30** On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 8$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

1. Calcule $a_1$ et $b_1$.
2. Soit la suite $(d_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$.
   a) Démontre que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique.
   b) Exprime $d_n$ en fonction de $n$, puis démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.
   c) Détermine la limite de la suite $(d_n)$.
3. a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{d_n}{4}$.
   b) Déduis-en les variations des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.
   c) Démontre que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_0 < a_n < b_n < b_0$.
   d) Déduis-en que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes.
4. a) Déduis de la question 3. a) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + ... + d_{n-1})$.
   b) Déduis la limite des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

**31** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
On pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = \ln u_n$.

1. a) Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ puis déduis-en que $v_n$ est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b) Donne l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ ; déduis-en celle de $u_n$ en fonction de $n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$.

a) Démontre que $P_n = e^{S_n}$.

b) Exprime $S_n$ en fonction de $n$.

c) Déduis-en l'expression de $P_n$ en fonction de $n$.

3. Détermine la limite de la suite $(S_n)$ puis déduis-en celle de la suite $(P_n)$.

**32** Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1. Prouve, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'équivalence suivante :
$u_{n+1} \leq 0,95 u_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

2. On considère la fonction $f$ définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

a) Étudie le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction $f$.

b) Démontre qu'il existe dans l'intervalle un unique nombre réel $\alpha$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c) Détermine l'entier naturel $n_0$ tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.

d) Démontre que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3. a) Détermine le sens de variation de la suite $(u_n)$ à partir du rang 16.

b) Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$.
Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.

**33** On considère une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$.

**PARTIE A** : Conjecture

1. Calcule les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.

2. Donne une valeur approchée à $10^{-5}$ près de $u_3$ et $u_4$.

3. Conjecture le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$.

**PARTIE B** : Validation des conjectures

On considère la suite numérique $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 3$.

1. Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ ; $-1 \leq v_n \leq 0$.

3. a) Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

b) Déduis-en le sens de variation de la suite $(v_n)$.

4. Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(v_n)$ converge ?

5. On note $\alpha$ la limite de la suite $(v_n)$ et on admet que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha^2$.
Détermine la valeur de $\alpha$.

**34** On considère la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

1. Calcule $u_1$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm).

a) Trace les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{4}x + 3$ et $y = x$.

b) Utilise les pour placer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$ sur l'axe des abscisses (on laissera les traits de construction en pointillé sur le dessin).

c) Que conjecturer quant à la convergence de la suite $(u_n)$ ?

3. a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$.

b) Démontre que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

c) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifie ta réponse.

4. On pose : pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 4$.

a) Démontre que $(v_n)$ est une suite géométrique et donne sa raison et son premier terme.

b) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $v_n = -\frac{2}{4^{n-1}}$.

c) Détermine la limite de la suite $(v_n)$.

d) Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.

5. a) Exprime $u_n$ en fonction de $n$.

b) Détermine une valeur de l'entier $k$ telle que $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

**35** Soit $f$ une fonction définie par : $f(x) = \ln(x+3)$.

1. Démontre que l'équation (E) : $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une solution unique $\alpha$ et $1 < \alpha < 2$.

2. a) Démontre que $f([1 ; 2]) \subset [1 ; 2]$.

b) Démontre que $\forall x \in [1 ; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c) Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$.

d) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$.

e) Déduis-en que $\lim u_n = \alpha$.

f) Détermine une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

**36** **Partie A** : Étant donné deux points distincts $A_0$ et $B_0$ d'une droite, on définit les points :

$A_1$ milieu du segment $[A_0 B_0]$ et $B_1$ barycentre sur $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$. Pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1}$ est le milieu du segment $[A_n B_n]$ et $B_{n+1}$ barycentre sur $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Place les points $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$ pour $A_0B_0 = 12$ cm. Quelle conjecture peut-on faire sur les points $A_n$ et $B_n$ quand $n$ dévient très grand ?

2. On munit la droite $(A_0B_0)$ du repère $(A_0 ; \vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soient $u_n$ et $v_n$ les abscisses respectives des points $A_n$ et $B_n$. Justifie que pour tout entier naturel $n$ strictement positif, on a :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

**Partie B** : On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = 0$ ; $v_0 = 12$ ;

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontre que la suite $(w_n)$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Démontre que la suite $(u_n)$ est croissante puis que a suite $(v_n)$ est décroissante.

3. Déduis des deux questions précédentes que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite $(t_n)$ définie par : $t_n = 2u_n + v_n$. Démontre qu'elle est constante.

**Partie C** : On considère des résultats obtenus dans les parties A et B. Précise la position limite des points $A_n$ et $B_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**37** Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z - 2 + 8i$.

1. a) Soit $x$ un nombre réel. Détermine $A(x)$ et $B(x)$ tels que $P(x) = A(x) + iB(x)$.

b) Déduis-en que l'équation $P(z) = 0$ admet un zéro réel $z_0$ que l'on calculera puis détermine les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$ sachant que la partie imaginaire de $z_1$ est positive.

2. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les points $G_0$, A et B d'affixes respectifs $z_0$, $z_1$ et $z_2$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on appelle $G_n$ l'isobarycentre de A, B et $G_{n-1}$.

a) Détermine l'affixe de $G_1$.

b) Soit $z_n$ l'affixe de $G_n$. Exprime $z_n$ en fonction de $z_{n-1}$ et déduis-en que si $z_{n-1}$ est réel, $z_n$ l'est aussi.

3. On pose : $u_n = z_n + 1$. Démontre que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera la raison et le premier terme.

4. a) Exprime $u_n$ en fonction de $n$ puis en déduire qu'elle convergente.

b) Calcule la limite de la suite $(z_n)$.

**38** Un gardien de but doit faire face lors d'une démonstration à certains nombres de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- S'il a arrêté le $n^{\text{ème}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{\text{ème}}$) est 0,8.
- S'il a laissé passer le $n^{\text{ème}}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,6.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note $A_n$ l'évènement « Le gardien arrête le $n^{\text{ème}}$ tir ». On a donc $P(A_1) = 0{,}7$.

1. a) Donne pour $n \geq 1$, les valeurs de $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

b) Exprime $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de $P(A_n)$.

c) Déduis-en que pour tout $n \geq 1$, $P(A_{n+1}) = 0{,}2P(A_n) + 0{,}6$.

2. On pose à présent pour $n \geq 1$, $P_n = P(A_n)$ et $u_n = P_n - 0{,}75$.

a) Démontre que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,2.

b) Déduis-en une expression de $p_n$ en fonction de $n$.

c) Démontre que $(P_n)$ admet une limite que l'on calculera.

**39** On s'intéresse à une suite de rectangles $(R_n)$. On note $L_n$ la longueur du rectangle $R_n$ et $l_n$ sa largeur.

On pose $L_0 = 2020$ et $l_0 = 1$.

Tous les rectangles $R_n$ ont la même aire et l'une des dimensions de $R_{n+1}$ est la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle $R_n$.

1. Justifie que pour tout entier naturel $n$, $L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2}$ et $l_{n+1} = \dfrac{4000}{L_n + l_n}$.

On justifiera en particulier que c'est la longueur du rectangle $R_{n+1}$ qui est égale à la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle $R_n$.

2. Démontre que, pour tout entier naturel $n$ :
$l_n \leq \sqrt{2020} \leq L_n$.
3. Justifie que la suite $(L_n)$ est décroissante.
Déduis-en son comportement lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
4. Justifie que la suite $(l_n)$ est croissante.
Déduis-en son comportement lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

5. a) En utilisant le fait que $L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2}$, pour tout entier naturel $n$, démontre que les suites $(L_n)$ et $(l_n)$ convergent vers la même limite.

b) Que vaut cette limite commune ?
Justifie ta réponse.

6. Interprète géométriquement le résultat de la question précédente.

**40** Au 1^er^ janvier 2020, M. MBRAH fait installer 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Ils produisent environ 95 kWh/m² au cours de la première année, puis l'usure et la salissure engendrent une perte de rendement de 3% par an. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2020 + n$.

1. a) Détermine la nature de la suite $(u_n)$ et précise ses éléments caractéristiques.

b) Déduis-en, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

2. Que devient la quantité d'énergie produite au bout d'un nombre d'années ?

3. Pour tout entier naturel $n$, on note
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

a) Calcule $S_{14}$ et interprète le résultat.

b) En gardant son installation pendant très longtemps, M. MBRAH peut-il espérer produire plus de 70 MWh.

**41** Un planteur place à la banque pendant 10 ans un capital de 100 000 F au taux d'intérêt de 4%.

1. Calcule l'avoir du planteur au bout d'un an ; deux ans et trois ans.

2. Soit $C_0$ le capital initial et $C_n$ le capital au bout de $n$ année. Les capitaux successifs déterminent une suite.

a) Définie cette suite par la formule de récurrence.

b) Exprime $(C_n)$ en fonction de $C_0$ et $n$.

3. À la fin de la dixième année, la banque lui accorde une prime égale à la somme des intérêts produits en 10 ans. Quel est le capital du planteur après la dixième année ?
4. Une autre banque lui propose un taux d'intérêt de 8%, mais n'accorde pas de prime à la fin de la dixième année. Laquelle des deux banques est avantageuse pour le planteur ? Justifie ta réponse.

**42** Afin d'acquérir et d'aménager un magasin pour son épouse dans le centre-ville, M. GNOANKA décide de contracter un emprunt d'un montant de 1 000 000 F. Dans le but d'obtenir les meilleures conditions pour ce prêt, il a contacté deux banques X et Y.
• La banque X lui propose de rembourser ce prêt sur 7 ans, en 7 annuités, chacune des annuités étant un des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 150\,000$ F (montant du premier remboursement) et de raison $a = 18\,000$ F.
• La banque Y lui propose également de rembourser ce prêt sur 7 ans en 7 versements mais à des conditions différentes de celles de la banque X. Le premier remboursement annuel, noté $v_0$, serait d'un montant de 200 000 F ; les remboursements suivants notés $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$, $v_6$, seraient chacun en augmentation de 2% par rapport au remboursement précédent.
Quelle banque offre à M. GNOANKA la solution la plus avantageuse ? Justifie ta réponse par des calculs détaillés.

**43** **Partie A :** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$f(x) = 2\ln x - x + 2$.

1. a) Étudie les variations de $f$.

b) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $\alpha$ la solution de $f(x) = 0$ supérieure à 2.

a) Vérifie que : $5 < \alpha < 6$.
b) Si l'on considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = 2\ln x + 2$, démontre que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

**Partie B :** Pour trouver une approximation de $\alpha$, on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = 5$ ; $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ où $\varphi$ est la fonction définie dans la partie A.
1. a) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $u_n \in [5 ; 6]$.

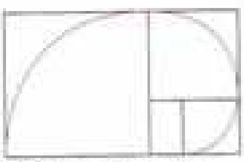
b) Démontre que la suite $(u_n)$ est croissante.

2. a) Démontre que, pour tout $x \in [5\,;6]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$.
   b) Déduis-en que, pour tout entier naturel $n$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5}|u_n - \alpha|$.
   c) Démontre alors que, pour tout entier naturel $n$, on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
   d) Conclus-en que la suite $(u_n)$ converge et précise sa limite.
3. a) Détermine un entier naturel $p$ tel que $u_p$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
   b) Déduis-en alors une approximation de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

**44** Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Étudie les variations de $f$ et dresse son tableau de variation.
   b) Démontre que $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle I que l'on précisera.
   c) Explicite $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de I.
   d) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$ et que $\alpha \in ]1, 2[$.
2. Trace les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère. (Précise la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.)
3. Démontre que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
4. Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
   b) Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
   c) Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   Déduis-en que $(u_n)$ converge vers une limite que l'on précisera.

**45** **A. Quelques propriétés du nombre d'or**



On considère un rectangle de longueur L et de largeur $\ell$ tel que, si l'on découpe ce rectangle en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu a pour longueur $\ell$ et pour largeur $\ell_1$ tel que : $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\ell_1}$ (le rapport des dimensions est conservé).

On redécoupe ce petit rectangle en un carré et un rectangle de dimensions $\ell_1$ et $\ell_2$.

1. Démontre que : $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l}{l_1}$.

On pose : $\varphi = \frac{l_1}{L_2} = \frac{l}{l_1}$. Démontre que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ( appelé nombre d'or ).

2. Écris $\varphi^2$ sous la forme $a_2\varphi + b_2$ où $a_2$ et $b_2$ sont des entiers ; écris $\phi^3$ sous la forme $a_3\varphi + b_3$ où $a_3$ et $b_3$ sont des entiers.

**B. Étude d'une suite**

1. Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $\varphi^n$ s'écrit $a_n\varphi + b_n$, où $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ et $b_n = a_{n-1}$.
2. On considère alors la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $v_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
   Calcule les 5 premiers termes de cette suite ainsi que leurs valeurs approchées au millième.
3. Démontre que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_{n+1} = f(v_n)$ où $f$ est la fonction définie sur $]0\,; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
4. Dans un repère orthonormé (unité : 5 cm), utilise la représentation graphique de la fonction $f$ et la droite (D) d'équation $y = x$ pour représenter les cinq premiers termes de la suite $(v_n)$.
5. Quelle conjecture peut-on faire sur la suite $(v_n)$ ?
6. Quelle serait la limite de la suite $(v_n)$ ?

**C. Longueur d'une courbe dans la suite si l = 1**

1. Dans le rectangle de la partie A, démontre que, $\ell_1 = \frac{1}{\varphi}$ et que $\ell_2 = \frac{1}{\varphi^2}$ et $\ell_n = \frac{1}{\varphi^n}$.
2. On construit les quarts de cercle dans chaque carré, formant ainsi une courbe.
   On note $C_n$ la longueur du $n^{\text{ème}}$ quart de cercle. Calcule $c_1$ et $c_2$.
3. Détermine $C_n$ puis la longueur de la courbe sur les $n$ premiers quarts de cercle : $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$.
4. Quelle est la limite de cette somme ?
   Quelle est l'interprétation géométrique de cette limite ?

# Exercices

**46** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{2u_{n-1}+3}$ et $u_0 = 0$.

1. On considère la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x+3}$. À l'aide de la courbe représentative de $g$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les 6 premiers termes de la suite $(u_n)$ et conjecturer les variations et la convergence de cette suite. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite $(u_n)$ en utilisant deux méthodes différentes :

**Première méthode :**

2. a) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq 3$.
b) Démontre que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
c) Déduis-en que $(u_n)$ converge et détermine sa limite.

**Deuxième méthode :**

3. a) Démontre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - u_n)$.
b) Démontre que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (3 - u_0)$.
c) Déduis-en la limite de la suite $(u_n)$.

**47** On considère, pour tout entier naturel $n$ non nul la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Démontre que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.
b) Démontre que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.
c) Trouve le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.
d) Déduis-en que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2. On pose pour tout entier $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \ldots + u_n$.
a) Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$ : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.
b) Démontre que, pour tout entier $n \geq 5$ : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.
c) Déduis-en que, pour tout entier $n \geq 5$ : $S_n \leq 4u_5$.

3. Démontre que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et déduis-en qu'elle converge.

**48** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n$ non nul par $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 1$.
2. Démontre que pour tout entier naturel $n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$. Déduis-en la nature de la suite $(u_n)$.
3. Exprime $u_n$ en fonction de $n$ puis déterminer la limite de $(u_n)$.
4. a) On pose : $v_n = \ln u_n$.
Exprime la somme $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de $n$.
b) Déduis-en l'expression du produit $s_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.
Étudie la limite de $(s_n)$.

## Situation complexe

**49** Après ses études en Marketing, KOHOUA est embauchée par une entreprise de la place.
Le DRH lui propose deux contrats.
1er contrat : Pour commencer 300 000 FCFA mensuels puis une augmentation de 10% chaque année.
2ème contrat : Pour commencer 350 000 FCFA, puis une augmentation de 20 000 FCFA chaque année.
KOHOUA vérifie les deux contrats et affirme que le deuxième contrat est préférable au 1er. Après les trois premières années, elle se demande au bout de combien de temps le 1er contrat serait intéressant que le 2ème.
Elle te sollicite. Aide-la.

## Coup de Pouce

**44** $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_{n-1} - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_0 - \alpha|.$$

On sait que $\alpha \in ]1\,;\,2[$, on en déduit $|U_0 - \alpha| < 1$.

Leçon

# 8 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les études sur les équations différentielles et plus généralement sur les équations aux dérivées partielles, permettent de prévoir la trajectoire de certaines comètes de notre système solaire.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'un cours de physique-chimie en oscillation mécanique, le professeur affirme que l'élongation $x(t)$ d'un ressort obéit à la loi : $x''(t)+\frac{k}{m}x(t) = 0$ (1) ; où $x''(t)$ est la dérivée seconde de l'élongation $x(t)$ en fonction du temps $t$, $k$ est la constante de raideur du ressort et $m$ la masse de l'objet en mouvement. Le professeur de physique-chimie dit également que la relation (1) est une équation différentielle. Soucieux d'approfondir leur connaissance sur cette notion, les élèves s'adressent à leur professeur de mathématiques.

## HABILETÉS ET CONTENUS

**1 Définition d'une équation différentielle**

*Connaître :*

la définition d'une équation différentielle

*Identifier :*

une équation différentielle

*Justifier :*

qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

**2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants**

*Connaître :*

les solutions de chaque équation du premier ordre à coefficients constants

*Résoudre :*

- une équation différentielle du type $f' = af$ ($a$ réel)
- une équation différentielle du type $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réels et $a \neq 0$)

*Déterminer :*

la solution d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réel) satisfaisant à une condition initiale donnée.

**3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**

*Connaître :*

les solutions de chaque équation différentielle du second ordre au programme ;

*Résoudre :*

- une équation différentielle du type $f'' = 0$
- une équation différentielle du type $f'' = \omega^2 f$ ($\omega$ réel non nul)
- une équation différentielle du type $f'' = -\omega^2 f$ ($\omega$ réel non nul)

*Déterminer :*

la solution d'une équation différentielle du type $f'' = mf$ ($m$ réel) satisfaisant à des conditions initiales données

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Définition d'une équation différentielle

**1.1. Définition**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{2x}$.

a) Justifie que : $f'(x) = 6e^{2x}$ ; pour tout nombre réel $x$.

b) Justifie que : $f'(x) - 2f(x) = 0$ ; pour tout nombre réel $x$.

c) Justifie que : $f''(x) - 4f(x) = 0$ ; pour tout nombre réel $x$.

**Synthèse**

- Les équations $f'(x) = 6e^{2x}$, $f'(x) - 2f(x) = 0$ et $f''(x) - 4f(x) = 0$ sont des équations différentielles.
- Le plus grand ordre de dérivée de la fonction $f$ dans les équations $f'(x) = 6e^{2x}$ et $f'(x) - 2f'(x) = 0$ est 1. Ces équations différentielles sont dites d'ordre 1 ou du premier ordre.
- Le plus grand ordre de dérivée de la fonction $f$ dans l'équation $f''(x) - 12f(x) = 0$ est 2. Cette équation différentielle est dite d'ordre 2 ou du second ordre.

## Exercices de fixation

**1.1.1** Écris le numéro de l'affirmation suivi de vrai (V) si l'affirmation est vraie ou de faux (F) si elle est fausse.

1. L'équation (E) : $g'(x) = 3g(x) + 5$ est une équation différentielle.
2. L'expression (A) : $y' - y$ est une équation différentielle.
3. L'équation (B) : $y'' + 4y = 0$ est une équation différentielle.
4. L'équation (C) : $(x - 1)g''(x) - 2xg'(x) + g(x) = x + 2$ n'est pas une équation différentielle.
5. L'équation (D) $x''(t) = 0$ est une équation différentielle.
6. L'équation (F) : $(x + 1)y(x) = 1$ est une équation différentielle.

**1.1.2** Précise l'ordre de chacune des équations différentielles ci-dessous :

a) $f' - 3f = 0$.
b) $y''' + 2y' + 3y = 0$.
c) $x = 4x''$.
d) $y' - 2y'' = x^3 + x$.

**1.1.3** Soit l'équation différentielle (A) :
$(x + 1) f'(x) - f(x) = 3$.
Détermine parmi les fonctions ci-dessous celle qui est une solution de l'équation (A).

a) $f(x)) = 4x + 7$.
b) $f(x) = -5x + 3$.
c) $f(x) = -5x - 8$.

## Activité 2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

### 2.1. Équation différentielle du type $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$

Soit l'équation différentielle (A) : $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$.

1. Justifie que la fonction $f_1(x) = ke^{ax}$ ; $k \in \mathbb{R}$ est solution de (A).
2. On considère une fonction $f$ solution de (A) et la fonction $h$ définie par $h(x) = e^{-ax}f(x)$.
   a) Justifie que : $h'(x) = (f'(x) - af(x))e^{-ax}$.
   b) Déduis-en que : $h'(x) = 0$ ; et que $h(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, pour tout nombre réel $x$.
   c) Conclus alors que $f(x) = ke^{ax}$ ; $k \in \mathbb{R}$.
   d) Déduis-en les solutions de (A).

**Synthèse**

Les solutions de l'équation différentielle $f' = af$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

## Exercices de fixation

**2.1.1** Parmi les fonctions ci-dessous, lesquelles sont des solutions de l'équation (A) :
$y' = ay$, où $a \in \mathbb{R}$ ?

a) $f(x) = ke^{ax}$ ; $k \in \mathbb{R}$.
b) $h(x) = kae^{x}$ ; $k \in \mathbb{R}$.
c) $p(x) = 0$.
d) $y(x) = ke^{-ax}$ ; $k \in \mathbb{R}$.
e) $t(x) = -kae^{ax}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**2.1.2** Résous les équations différentielles suivantes :

a) $y' = y$ ; b) $y' = \sqrt{2}\,y$ ;
c) $-3y' = y$ ; d) $3y = 2y'$.

**2.1.3** Associe à chaque équation différentielle, ses solutions.

| Équations | Solutions |
|---|---|
| (A) : $f' = 3f$ | (1) : $x \mapsto ke^{-x}$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (B) : $f' = -0{,}5f$ | (2) : $x \mapsto ke^{3x}$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (C) : $f' = -f$ | (3) : $x \mapsto k$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (D) : $f' = 0$ | (4) : $x \mapsto ke^{-0{,}5x}$ ; $k \in \mathbb{R}$ |

### 2.2. Équation différentielle du type $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réels ; $a \neq 0$)

Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$ ($a$ et $b$ nombres réels avec $a \neq 0$).

1. Justifie que la fonction $g(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ est solution de (E).

2. a) Démontre qu'une fonction $f$ est solution de (E) équivaut à : $f'(x) - g'(x) = a\,(f(x) - g(x))$ ; pour tout réel $x$.

   b) Justifie alors que : $f(x) - g(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   c) Déduis-en que $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ ; pour tout nombre réel $x$.

**Synthèse**

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$ sont les fonctions de la forme :
$x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**Exercices de fixation**

**2.2.1** Identifie les fonctions qui sont solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels et $a$ non nul.

a) $f(x) = e^{ax} + \dfrac{b}{a}$ ; b) $g(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$ ;

c) $h(x) = -\dfrac{b}{a}$ ; d) $r(x) = ae^{kx} - \dfrac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$.

**2.2.2** Résous chacune des équations différentielles suivantes :

a) $f' = -2f + 6$ ; b) $f' = 3f + 9$ ;

c) $2y = 5 - y'$ ; d) $2y' + 3y = 7$.

**2.2.3** Associe à chaque équation différentielle ses solutions.

| Équations |
|---|
| (A) : $f' = -4f + 8$ |
| (B) : $f' = 0{,}5f + 2$ |
| (C) : $f' = -f - 1$ |
| (D) : $f' = 5f + 1$ |

| Solutions |
|---|
| (1) : $x \mapsto ke^{-x} - 1$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (2) : $x \mapsto ke^{5x} - \dfrac{1}{5}$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (3) : $x \mapsto ke^{-4x} + 2$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| (4) : $x \mapsto ke^{0,5x} - 4$ ; $k \in \mathbb{R}$ |

### 2.3. Équation différentielle du type $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réels) satisfaisant à une condition initiale donnée

Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$ où $a$ et $b$ des nombres réels, $a \neq 0$ ; $x_0$ et $y_0$ des nombres réels.

On sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

a) Détermine $k$ pour que $f_k(x_0) = y_0$.

b) Combien y a-t-il de fonctions $f$, solutions de ( E) et vérifiant $f'(x_0) = y_0$.

**Synthèse**

- Il existe une unique solution $f$ de l'équation (E) vérifiant : $f(x_0) = y_0$
- Pour déterminer cette solution, on résout l'équation (E) puis on détermine la valeur de $k$ avec la condition donnée.

**Exercices de fixation**

**2.3.1** Soit l'équation différentielle (A) : $y' = 2y - 4$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $y_k(x) = ke^{2x} + 2$ ; $k \in \mathbb{R}$.
On donne la condition $y(0) = 0$.
Parmi les fonctions suivantes : $f(x) = -2e^{2x} + 2$ ; $g(x) = 3e^{2x} + 2$ ; $h(x) = e^{2x} - 2$ ; $p(x) = -2e^{x} + 2$, laquelle est une solution de (A) et vérifie la condition donnée ?

**2.3.2** Les fonctions $y_k$ définies par $y_k(x) = ke^{3x}$ ; $k \in \mathbb{R}$ sont les solutions de l'équation (A) : $y' - 3y = 0$.

1. Détermine $k$ telle que : $y_k(\ln 2) = 1$.
2. Détermine alors la fonction $f$ solution de (A) telle que : $f(\ln 2) = 1$.

**2.3.1** Détermine dans chacun des cas suivants la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée.

a) $y' = -3y$ ; $y(0) = 5$ ;  b) $y' = 2y$ ; $y(-3) = 1$ ;

c) $y' = \frac{1}{2}y + 1$ ; $y(0) = 1$ ;  d) $y' = -4y - 2$ ; $y(0,25) = 0$.

## Activité 3 Équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants

### 3.1. Définitions et propriétés

Soit l'équation (E) : $f'' = mf$ où $m$ est un nombre réel.

1. Justifie que si $m = 0$, alors les fonctions $f_{ab}(x) = ax + b$ ($a$ et $b$ des nombres réels quelconques) sont solutions de l'équation (E) : $f'' = 0$.
2. Justifier que si $m = \omega^2$ ; ($\omega \in \mathbb{R}^*$) alors les fonctions $f_{ab}(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels, sont solutions de l'équation(E) : $f'' = \omega^2 f$.
3. Justifier que si $m = -\omega^2$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) alors les fonctions $f_{ab}(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels, sont solutions de l'équation (E) : $f'' = -\omega^2 f$.

**Synthèse**

On admet que l'équation (E) : $f'' = mf$, ($m \in \mathbb{R}$) a pour solutions les fonctions :

a) $x \mapsto ax + b$, si $m = 0$.

b) $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, si $m = \omega^2$, ($\omega \in \mathbb{R}^*$); (autrement dit : $m > 0$).

c) $x \mapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$, si $m = -\omega^2$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) ; (autrement dit : $m < 0$).

**Exercices de fixation**

**3.1.1** Associe à chaque équation, ses solutions.

| Équations | Solutions |
|---|---|
| A : $y'' = \omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ | 1 : $y(x) = ax + b$ ; $a$ et $b$ réels |
| B : $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ | 2 : $y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ ; $a$ et $b$ réels |
| C : $y'' = 0$ | 3 : $y(x) = a\omega\cos x + b\omega\sin x$ ; $a$ et $b$ réels |

**3.1.2** Résous les équations différentielles ci-dessous :

a) $y'' = 16y$ ; b) $y'' = -9y$ ; c) $2y'' = -8y$ ;
d) $y'' - \frac{1}{9}y = 0$ ; e) $4y'' + 25y = 0$

**3.1.3** Soit l'équation (E) : $y'' - 25y = 0$.
Reproduis puis réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

1. La fonction $f(x) = 3e^{5x} - 2e^{-5x}$ est solution de l'équation (E).
2. La fonction $g(x) = e^{-5x}$ est solution de l'équation (E).
3. La fonction $h(x) = 5e^{x} - 5e^{-x}$ est solution de l'équation (E).
4. La fonction $t(x) = -100e^{5x}$ est solution de l'équation (E).
5. La fonction $q(x) = 0$ est solution de l'équation (E).

### 3.2. La solution d'une équation différentielle du type (E) : $f'' = mf$ avec conditions initiales

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$ dont les solutions sont les fonctions $f_{ab}(x) = ax + b$, avec $a$ et $b$ des nombres réels.
Détermine la fonction $f$ solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$, avec $x_0$ ; $y_0$ et $z_0$ des nombres réels.

**Synthèse**

On admet que l'équation différentielle (E) : $f'' = mf$, ($m \in \mathbb{R}$) admet une unique solution $f$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$ où $x_0$ ; $y_0$ et $z_0$ sont des nombres réels donnés.

## Exercices de fixation

**3-2-1** On donne l'équation différentielle (E) : $y'' = 4y$ dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y_{ab}(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$ ; $a$ et $b$ des nombres réels. On donne les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Détermine parmi les fonctions suivantes : $f(x) = -3e^{2x} + 3e^{-2x}$ ; $h(x) = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$ ; $g(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$, la solution de (E) qui vérifie les conditions données.

**3-2-2** On considère l'équation différentielle (E) : $f'' = -9f$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $f_{ab}(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$, « où $a$ et $b$ sont des nombres réels ».

1. Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels $f_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0$ et $f'_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1$.
2. Détermine alors la fonction $f$ solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1$.

**3-2-3** Détermine dans chaque cas la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions données :

a) $y'' = y$ ; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
b) $y'' = -y$ ; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
c) $y'' = 0$ ; $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.
d) $y'' - 4y = 0$ ; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

# APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

## Exercice 1 Décharger un condensateur

Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R.
La tension $u$ est une fonction du temps $t$, ($t$ en secondes), et vérifie l'équation différentielle (E) : $RCu'(t) + u(t) = 0$.


1. En prenant $C = 15 \times 10^{-5}$ farads et $R = 2 \times 10^{4}$ ohms, justifie que la tension $u$ vérifie l'équation différentielle (E) : $3u' + u = 0$.
2. Résous (E).
3. Détermine la fonction $u$ solution de (E) et telle que $u(t_0) = u_0$.
4. À partir de quel instant $t_1$ la tension $u$ devient-elle inférieure au dixième de sa valeur initiale ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde.
5. Calcule la valeur moyenne de $u$ entre les instants $t_0$ et $t_1$.
6. L'énergie emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t$ est, en joules, $W(t) = \frac{1}{2}C[u(t)]^2$.
Calcule la valeur moyenne $W_m$ de cette fonction entre $t_0$ et $t_1$.

**Méthode**

On utilise les équations différentielles pour résoudre les problèmes de RLC, en physique.

**Corrigé**

1. La tension $u$ vérifie l'équation différentielle (E) : $RCu' + u = 0$ ; en remplaçant R et C par leurs valeurs respectives, on obtient l'équation différentielle (E) : $3u' + u = 0$.
2. L'équation (E) : $3u' + u = 0$ est équivalente à l'équation différentielle $u' = -\frac{1}{3}u$.

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme : $u_k(t) = ke^{-\frac{1}{3}t}$ où $k$ est un nombre réel.

3. On a $u(t_0) = u_0$ équivaut à $u(0) = 10$ ce qui équivaut à : $ke^{-\frac{1}{3}\times 0} = 10$ ; et donc $k = 10$.
La fonction $u$ solution de (E) telle que $u(t_0) = u_0$ est : $u(t) = 10e^{-\frac{1}{3}t}$.
4. La valeur initiale de $u$ est $u_0 = 10$ volts donc le dixième est 1 volt.
Donc $u(t) \leq 1$ équivaut à $10e^{-\frac{1}{3}t} \leq 1$ ce qui équivaut à $t \geq 3\ln 10$ ; donc $t_1 = 3\ln 10$.
$t_1 = 6.9$s

5. La valeur moyenne de $u$ entre $t_0$ et $t_1$ est :

$$u_m = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt = \frac{1}{6,9}\int_0^{6,9} 10e^{-\frac{1}{3}t}\,dt = \frac{10}{6,9}\left[-3e^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^{6,9} = \frac{10}{2,3}(1 - e^{-2,3})\text{volts}.$$

6. La valeur moyenne de $w_m$ entre $t_0$ et $t_1$ est :

$$w_m = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} w(t)\,dt = \frac{1}{6,9}\int_0^{6,9} \times\frac{1}{2}\times 15\times 10^{-6}\times(10e^{-\frac{1}{3}t})^2\,dt = \frac{15}{2\times 6,9}\times 10^{-3}\int_0^{6,9} e^{-\frac{2}{3}t}\,dt$$

$$= \frac{45}{27,6}\times 10^{-3}(1 - e^{-4,6}).$$

## Exercice 2 Résoudre une équation différentielle du type : $y'' + my = g$(E)

Soit l'équation différentielle (A) : $y'' - 9y = 5t + 1$.

1. Détermine un polynôme $p$ de degré 1, solution de (A).
2. Démontre qu'une fonction $f$ est solution de (A) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation différentielle (A') : $y'' - 9y = 0$.
3. Résous (A') et déduis-en les solutions de (A).
4. Détermine la solution de (A) qui s'annule en 0 et dont la dérivée s'annule en 0.

**Méthode**

Utiliser la méthode de résolution d'une équation différentielle du type $f'' = 10^2 f$, puis celle vérifiant les conditions initiales.

**Corrigé**

1. $p$ étant un polynôme de degré 1 alors $p(t)$ est de la forme $p(t) = at + b$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

On a : $p$ solution de (A) équivaut à :

$p''(t) - 9p(t) = 5t + 1$ ;

soit $-9(at + b) = 5t + 1$.

Ce qui donne $-9at - 9b = 5t + 1$ et donc $\begin{cases} -9a = 5 \\ -9b = 1 \end{cases}$ ; d'où $\begin{cases} a = -\frac{5}{9} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$ et donc $p(t) = -\frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

2. $f$ est solution de (A) si et seulement si $f'' - 9f = 5t + 1$. Or $p'' - 9p = 5t + 1$, donc $f$ est solution de (A) si et seulement si $f'' - 9f = p'' - 9p$, ce qui équivaut à $(f - p)'' - 9(f - p) = 0$. Ce qui équivaut à $f - p$ est solution de l'équation différentielle (A') : $y'' - 9y = 0$.

3. On a : (A') : $y'' - 9y = 0$ équivaut à $y'' = 3^2 y$. Donc les solutions de l'équation différentielle (A') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $y_{ab}(t) = ae^{3t} + be^{-3t}$.

$f$ est solution de (A) équivaut à $f - p$ est solution de (A'), ce qui équivaut à $(f - p)(t) = ae^{3t} + be^{-3t}$ ; ce qui équivaut à $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} + p(t)$.

Donc les solutions de l'équation différentielle (A) sont les fonctions $f$ de la forme $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

4. On a $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$ et donc $f'(t) = 3ae^{3t} - 3be^{-3t} - \frac{5}{9}$.

$f(0) = 0$ équivaut à $a + b - \frac{1}{9} = 0$ et $f'(0) = 0$ équivaut à $3a - 3b - \frac{5}{9} = 0$.

On obtient donc le système : $\begin{cases} a + b - \frac{1}{9} = 0 \\ 3a - 3b - \frac{5}{9} = 0 \end{cases}$ ; qui a pour solution $\begin{cases} a = \frac{4}{27} \\ b = -\frac{1}{27} \end{cases}$.

La fonction $f$, solution de l'équation différentielle (A) qui s'annule et dont la dérivée s'annule en 0, est : $f(t) = \frac{4}{27}e^{3t} - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

## Résumé de cours

### 1 Définition d'une équation différentielle

**Définition** On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction $f$ et dans laquelle figure au moins une dérivée successive $f'$, $f''$, $f'''$..., de la fonction inconnue.

NB :
- L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre des dérivées intervenant dans celle-ci.
- Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I et qui vérifient l'équation (dans ce cours, généralement $I = \mathbb{R}$).

### 2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

**Définition** Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme : $f' = af + b$ avec $a$ et $b$ des nombres réels.

#### 2.1. Équations du type : $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$

**a) Définition**

**Définition** On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme : $f' = af$ où $a$ est un nombre réel.

**b) Propriété**

**Propriété** Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $f_k$ définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, par $f_k(x) = ke^{ax}$ ; où $k$ est un nombre réel quelconque.

*Remarque :*
On dit que l'ensemble des fonctions $f_k$ est une famille de fonctions.

#### 2.2. Équations du type : $f' = af + b$ avec $a$ et $b$ des nombres réels et $a \neq 0$

**Propriété** Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réels avec $a \neq 0$). Les solutions de (E) sont les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ; où $k$ est un nombre réel quelconque.

#### 2.3. Les solutions d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ et vérifiant une condition

**Propriété** Soit $x_0$ et $y_0$ des nombres réels. Il existe une unique solution $h$ de l'équation (E) : $f' = af + b$ ($a$ et $b$ réels) telle que $h(x_0) = y_0$.

## Résumé de cours

### 3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

#### 3.1. Définition et propriété

**Définition** On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme (E) : $f'' = af' + bf + c$ où $a$, $b$ et c sont des nombres réels.

NB : Dans ce cours, on ne traitera que le cas (E) : $f'' = mf$, où $m \in \mathbb{R}$.

**Propriété** L'équation différentielle (E) : $f'' = mf$, où $m \in \mathbb{R}$ a pour solutions :
a) les fonctions $x \mapsto ax + b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels quelconques, si $m = 0$.
b) les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, si $m = \omega^2$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$.
c) les fonctions $x \mapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$, si $m = -\omega^2$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$.

#### 3.2. La solution d'une équation différentielle du type : $f'' = mf$ avec conditions initiales

**Propriété** Soient $x_0$, $y_0$ et $z_0$ des nombres réels. L'équation différentielle (E) : $f'' = mf$ où $m \in \mathbb{R}$ admet une unique solution $f$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Relie chaque équation différentielle à ses solutions.

| Équation différentielle |
|---|
| $f' = af,\ a \in \mathbb{R}$ • |
| $f' = af = af + b,$ $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$ • |
| $f' = 0$ • |
| $f'' = \omega^2 f, \omega \in \mathbb{R}^*$ • |
| $f' = -\omega^2 f, \omega \in \mathbb{R}^*$ • |

| Solutions |
|---|
| • $x \mapsto ke^{-ax} - \frac{b}{a}$ ; $k \in \mathbb{R}$ |
| • $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ ; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| • $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| • $x \mapsto Ax + B$ ; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ |
| • $x \mapsto ke^{-ax}$ |

**2** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5e^{2x}$.

1. Démontre que $f$ est solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$.
2. Démontre que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - 3x - \frac{3}{2}$ est solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 6x$.

**3** On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2x^2 - 3x + 1$.
Détermine parmi les trois fonctions définies ci-dessous, celle qui est une solution de (E).
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ; $g(x) = 2x^2 - x - 2$ ; $h(x) = -2x^2 - x - 2$

**4** Démontre, dans chaque cas, que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle (E).

1. $f(x) = \cos(2x + 3)$ ; (E) : $y'' = 16y$
2. $f(x) = \sin(2x)$ ; (E) : $y'' + 3y = -2\sin x\cos x$
3. $f(x) = xe^x$ ; (E) : $y' - y = e^x$
4. $f(x) = e^x \ln x$ ; (E) : $y'' - 2y' + y = \frac{-1}{x^2}e^x$

**5** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-2x+4}$.
Détermine une équation différentielle (E) du type $y' - ay = 0$ dont $f$ est une solution.

**6** L'équation différentielle $y' = 7y$ admet pour solutions les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = ke^{-7x}$, $k \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = ke^{7x}$, $k \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = 0$.
d) $f(x) = e^{7x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
Choisis la bonne réponse.

**7** L'équation différentielle $y' + 3y = 0$ admet pour solutions les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par

a) $f(x) = ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) = a\cos \sqrt{3}x + b\sin \sqrt{3}x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Choisis la bonne réponse.

**8** La solution $f$ de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $f(1) = 2$ est :

a) la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$.
b) la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
c) la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{x-1}$.
d) la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x - 1$.
Choisis la bonne réponse.

**9** Les solutions de l'équation différentielle : $y' = 3y + 2$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par

a) $f(x) = ke^{3x} + 2$, $k \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = ke^{3x} + \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = ke^{3x} + 2x$, $k \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) = ke^{3x} - \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.
Choisis la bonne réponse.

**10** L'équation différentielle $y'' + 5y = 0$ admet pour solutions les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = ae^{5x} + be^{-5x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = ae^{\sqrt{5}x} + be^{-\sqrt{5}x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = a\cos(\sqrt{5}x) + b\sin(\sqrt{5}x)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) = a\cos(5x) + b\sin(5x)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Choisis la bonne réponse.

**11** Les solutions de l'équation différentielle $4y'' - 9y = 0$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = a\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + b\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$f(x) = a\cos\left(\frac{9x}{4}\right) + b\sin\left(\frac{9x}{4}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$f(x) = ae^{\frac{3x}{2}} + be^{-\frac{3x}{2}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$f(x) = ae^{\frac{9x}{4}} + be^{-\frac{9x}{4}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Choisis la bonne réponse.

**12** 1. $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-3x}$.
Détermine une équation différentielle pour laquelle $f$ est solution.
2. $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3e^{-2x} - 4$.
Détermine une équation différentielle pour laquelle $f$ est solution.

**13** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $\frac{\sqrt{2}}{2} f' - 2f + 1 = 0$.
b) $\frac{2}{3} f' - \frac{3}{4} f + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
c) $\pi f' + f - 3\pi = 2\pi$.
d) $\cos\alpha f' - \sin\alpha f = 1$ ; avec $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

**14** Détermine dans chacun des cas, la fonction solution de l'équation différentielle et vérifiant la condition donnée.
a) $y' + \sqrt{2}\, y = 0$ ; $y(0) = 1$.
b) $f' - 2\pi f = \pi$ ; $f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0$.
c) $3f' - 2f + 6 = 0$ ; et la courbe de la fonction $f$ coupe l'axe des abscisses en 1.

**15** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $y' = 3y$
b) $y' + 2y = 0$
c) $y = -5y'$ ; $y(-2) = 1$
d) $2y' = y - 1$

**16** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $y = -5y'$ ; $y(-2) = 1$
b) $y + 2y' = 0$ ; $y(-2) = \frac{1}{2}$
c) $y' = 2y + 1$ ; $y(0) = 0$
d) $2y + 3y' - 1 = 0$ ; $y(0) = 1$

**17** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $y'' - 2y = 0$
b) $2y'' - y = 0$
c) $-9y'' + 4y = 0$
d) $-5y'' - 25y = 0$

**18** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $y = 25y''$
b) $f = -9f''$
c) $\frac{1}{9} f'' + \frac{1}{4} f = 0$
d) $\pi f'' + 2f = 0$

**19** Résous chacune des équations différentielles suivantes :
a) $4y'' + 9y = 0$ ; $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$
b) $16y'' = 25y$ ; $y(0) = 0, y'(0) = 1$
c) $y'' = 0$ ; $y(\pi) = 1, y'(\pi) = -1$
d) $y'' = -4y$ ; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

**20** Résous les équations différentielles suivantes :
a) $y' = -7y$
b) $7y' + y = 0$
c) $8y' - 5y + 2 = 0$
d) $y'' = -5y$

**21** On considère l'équation différentielle (E) :
$y'' + \frac{1}{9} y = 0$.
1. Résous (E).
2. Détermine la solution $f$ de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
3. Vérifie que, pour tout nombre réel $t$,
$f(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

## Exercices d'approfondissement

**22** 1. Résous l'équation différentielle (E) : $y' = -2y$.
2. Déduis-en la solution de (E) dont la courbe représentative admet, au point d'abscisse 0, une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -4x + 1$.

**23** 1. Résous l'équation différentielle (E) :
$y' = 3y$.
2. Détermine la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2 ; 3).

**24** On considère l'équation différentielle (E) :
$4y'' + \pi^2 y = 0$.
1. Résous (E) sur $\mathbb{R}$.
2. On sait de plus que la courbe représentative de la fonction $f$ solution de(E), passe par le point $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et a une tangente en $K$ parallèle à l'axe des abscisses. Détermine la fonction $f$.

**25** On considère l'équation différentielle (E) :
$25y'' - 16y = 0$.
1. Résous l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Détermine la fonction $f$ solution de (E) et dont la courbe admet au point A(0 ; 1) une tangente perpendiculaire à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

**26** On considère la fonction $f$ définie sur R par :
$f(x) = (3x + 8)e^{2x}$.
1. Démontre que $f$ est solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 3e^{2x}$.
2. Déduis-en le calcul de l'intégral $\int_0^{-\ln 2} f(x)\,dx$

**27** On considère l'équation différentielle (E) :
$g' - 2g = (x + 1)e^x$
1. Détermine les nombres réels $a$ et $b$ pour que la fonction $f(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E).
2. Démontre qu'une fonction $g$ est solution de (E) équivaut à $g - f$ est solution de l'équation (E') : $y' - 2y = 0$.
3. Résous (E') et déduis-en les solutions de (E).

**28** On considère l'équation différentielle (A) :
$2y' + 6y = x^2 + 2x - 1$.
1. Détermine le polynôme P($x$) du second degré solution de (A).
2. Démontre qu'une fonction $f(x)$ est solution de (A) si et seulement si la fonction $f(x)$ − P($x$) est solution de l'équation (A') : $2y' + 6y = 0$.
3. Résous (A') et déduis-en les solutions de (A).
4. Détermine la fonction $g$, solution de (A) et qui s'annule en 0.

**29** Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \sin x$.
1. Résous l'équation différentielle (E') :
$y' - 3y = 0$.
2. Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).
3. Démontre qu'une fonction $f$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E').
4. Déduis-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

**30** On considère l'équation différentielle (E) :
$y'' = ay' + b$ où a et b sont des nombres réels, avec a non nul.
1. En posant $z = y'$, justifie que (E) est équivalente à (E') : $z' = az + b$.
2. Résous (E').
3. Déduis-en les solutions de (E).
4. Détermine l'unique solution de (E) vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

**31** On considère l'équation différentielle (E) :
$y'' + 4y = -\sin 2x$.
1. Justifie que $g(x) = \frac{1}{4}x\cos 2x$ est solution de (E).
2. Justifie qu'une fonction $f$ est solution de (E) équivaut à $f - g$ est solution de (E') : $y'' + 4y = 0$.
3. Résous (E') puis en déduis les solutions de (E).

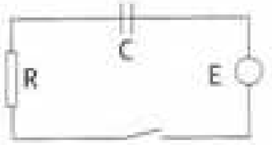
**32** Soit l'équation différentielle (E) :
$y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$
1. Résous l'équation (E') : $y'' - 4y = 0$.
2. Vérifie que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution de (E).
3. Démontre qu'une fonction $f$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
4. Déduis-en les solutions de (E).
5. Détermine la solution particulière $h$ de (E) vérifiant : $h(0) = \frac{4}{3}$.

**33** Une substance se dissout dans l'eau.
On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute.
À l'instant $t = 0$ ($t$ en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.
Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, détermine une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de $t$.

**34** Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même.
On sait que cette grandeur double tous les dix ans.
Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

**35** On sort un poulet du four et on note que sa température est de 180°C. On suppose que la température ambiante de la cuisine est constante à 20°C. La température du poulet est donnée par une fonction g du temps $t$, exprimé en heures, qui est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 1{,}38y = 27{,}6$.
1. Résous l'équation différentielle (E) et donne sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 180$.
2. En utilisant l'expression trouvée à la question précédente, détermine la température, arrondie au degré près, de la tarte 30 minutes après l'avoir sorti du four.
3. Détermine le temps nécessaire pour atteindre une température inférieure à 25°C.

**36** On considère le montage électrique représenté par le schéma ci-dessous :




Le condensateur de capacité $C = 4 \times 10^{-4}$ F (farads) est monté en série avec un générateur dont la tension aux bornes est E = 6 V et un conducteur ohmique de résistance R = 88 Ω (ohms).
À l'instant initial, le condensateur est déchargé et la tension est nulle à ses bornes.
On ferme le circuit, et on s'intéresse à l'évolution de la tension $u_c$ aux bornes du condensateur.
D'après la loi d'Ohm et la loi d'addition des tensions, la tension $u_c$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :
$E = R \times C \times \frac{du}{dt} + u$, où t est le temps en secondes.
1. Écris l'équation sous la forme $y' = ay + b$.
2. Résous cette équation en tenant compte des conditions initiales.
3. Détermine la valeur de uc au bout de 100 ms.

**37** La vitesse d'un objet soumis à son poids et aux frottements de l'air vérifie l'équation (E) :
$v'(t) + 140v(t) = 10$ ; où la fonction vitesse $v(t)$, exprimée en m/s, est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

1. Résous l'équation différentielle (E).
2. Détermine la solution $v$ de (E) qui s'annule pour $t = 0$.
3. Étudie la limite de $v$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Interprète ce résultat.
4. À quel instant $t_1$ l'objet atteint-il 95% de sa vitesse limite ?

**38** **(Désintégration du Thorium$^{227}$)**
On étudie la désintégration d'un corps radioactif, le *Thorium*$^{227}$ qui donne du *Radium*$^{223}$, lequel se désintègre à son tour en donnant du *Radon*$^{219}$.
À l'instant $t = 0$, on isole $N_0$ atomes de *Thorium*. On note $R(t)$ le nombre d'atomes de *Radium* à l'instant $t$, pour $t \in [0 ; +\infty[$. À l'instant $t = 0$, il n'y a aucun atome de *Radium*.
On admet que la fonction $R(t)$ est la solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle
(E) : $y' + 0.062y = 0{,}038N_0 e^{-0{,}038t}$ qui vérifie la condition $R(0) = 0$.
1. a) Démontre que la fonction
$y_1(t) = \frac{19}{12} N_0 e^{-0{,}038t}$ est solution de (E) .
b) Démontre que $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si $y(t) - y_1(t)$ est solution de l'équation (E') : $y' + 0{,}062y = 0$.
c) Résous (E') puis déduis-en les solutions de (E).
d) Détermine alors la fonction $R$.

**39** **(Évolution d'une température en chimie)**
1. On note $y(t)$ la température en degrés Celsius d'une réaction chimique en fonction du temps $t$, $t$ étant exprimé en heures. Après étude, on constate que la température est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-0{,}25t}$ avec la condition initiale $y(0) = 20$.
a) Résous l'équation $(E_0)$ : $y' + y = 0$.
b) Détermine le nombre réel $k$ tel que la fonction $g$ définie par $g(t) = ke^{-0{,}25t}$ soit une solution de l'équation (E).
c) Démontre que $f$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $(E_0)$.
d) Déduis les solutions de (E).
e) Détermine la solution de (E) satisfaisant la condition initiale donnée.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{3}(56e^{-t} + 4e^{-0{,}25t})$.
a) Détermine la limite de $f$ quand t tend vers $+\infty$.
b) Détermine la fonction dérivée de $f$.
c) Étudie le signe de $f'(t)$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.
d) Déduis-en le tableau de variation de $f$.

**40** **(Taux d'alcoolémie)**
Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (quantité d'alcool par gramme de sang, en g/L) d'une personne ayant absorbé, à jeun une quantité d'alcool , vérifie l'équation différentielle (E) :
$y'+y=ae^{-t}$ où $t$ est le temps écoulé après absorption, exprimé en heures et $a$ une constante.
1. On pose pour tout $t$, $g(t)=f(t)e^{t}$.
Démontre que $g'(t)=a$ et déduis-en l'expression de $g(t)$ en fonction de $a$ et de $t$ sachant que : $g(0)=0$.
2. Exprime $f(t)$ en fonction de $t$ et de $a$.
3. Dans cette question on suppose que $a=5$.
   a) Étudie les variations de $f$.
   b) Détermine le taux d'alcoolémie maximale et le temps au bout duquel il est atteint.
4. Donne une valeur du délai T(à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 g/L après qu'il est atteint le taux maximal.

**41** On considère l'équation différentielle (E) :
$y'-2y=(x-1)e^{x}$.
1. Détermine les réels a et b pour que la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(ax+b)e^{x}$ soit solution de (E).
2. Démontre que v est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u-v$ est solution de l'équation différentielle (E') :
$y'-2y=0$.
3. Déduis-en toutes les solutions de (E).
4. Trouve la solution $f$ de (E) vérifiant $f(0)=1$.
5. Calcule $\int_{0}^{\ln 3} f(x)dx$.
Donne le résultat sous la forme $a+\ln b$ où $a$ et $b$ sont des entiers.

**42** **PARTIE A**
On considère l'équation différentielle $(E_1)$ définie par : $y'-2y=3e^{x}-4x+2$.
a) Résous l'équation différentielle $(E_2)$ définie par $y'-2y=0$.
b) Démontre que la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=-3e^{x}+2x$ est solution de $(E_1)$.
c) Démontre qu'une fonction $v$ est solution de $(E_2)$ si et seulement si $u+v$ est solution de $(E_1)$.
d) Déduis-en toutes les solutions de $(E_1)$.
e) Détermine la solution $f$ de $(E_1)$ telle que la courbe représentative de $f$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

**PARTIE B**
1. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-3e^{x}+2$ et (C$g$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
   a) Détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Montre que la droite (D) d'équation : $y=2x$ est asymptote à la courbe $(C_g)$.
   Précise la position relative de (D) et $(C_g)$.
   c) Étudie les variations de la fonction.
   Dresse son tableau de variations.
   d) Calcule l'aire comprise entre (D), (C$g$) et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 2$.
   On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $u_0=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour ≥1,
   $u_n=\int_{0}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur [0 ; 1] par :
$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
   a) Calcule $f'(x)$ et déduis-en $u_0$.
   b) Calcule $u_1$.
   c) Pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout $x$ de [0 ; 1], compare $x^n$ et $x^{n+1}$.
   Déduis-en que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   d) Démontre que, pour tout $x$ de [0 ; 1], $1\leq\sqrt{1+x^2}\leq 2$.
   e) Déduis-en que, pour tout entier $n\geq 1$,
   $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq u_n\leq\frac{1}{(n+1)}$.
   f) Déduis-en que $(u_n)$ converge et détermine sa limite.

**43** On se propose de déterminer les fonctions dérivables solutions de l'équation différentielle :
(E) : $2y'+y=x^2+2x-2$
1. Démontre qu'il existe une fonction polynôme $g$ du second degré solution de (E) et détermine laquelle.
2. Démontre que $f$ est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de l'équation différentielle :
$2y'+y=0$ (E')
3. Résous (E') et déduis-en toutes les solutions de (E).
4. Détermine les solutions dont la représentation graphique passe par l'origine du repère.

**44** On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1. a) Démontre que si $f$ est solution de (E) alors la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.

b) Démontre que si $h$ est solution de (E') alors la fonction $f$ définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résous (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Existe-t-il une fonction $f$ solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A (ln2, 0) ? Si oui, précise-la.

**45** Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

**PARTIE A**

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction $f$ du temps $t$ (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction $f$ est dérivable, strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

(E) $y' = -\dfrac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1. Démontre l'équivalence suivante :
une fonction $f$, dérivable, strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$, vérifie, pour tout $t$ de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout $t$ de $[0\,;\,+\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2. Donne la solution générale de l'équation différentielle : (H) $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.

3. Déduis-en qu'il existe un réel C tel que pour tout $t$ de $[0\,;\,+\infty[$ : $f(t) = \left(3 + C\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right)$ (la notation exp désigne la fonction exponentielle).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction $f$ définie par $f(t) = \left(3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right)$.

a) Détermine la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

b) Détermine le sens de variation de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

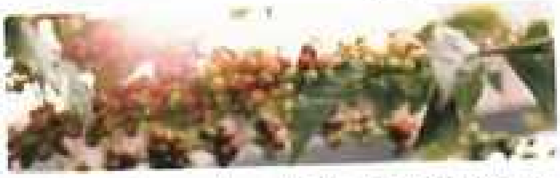
c) Résous dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

**Situations complexes**

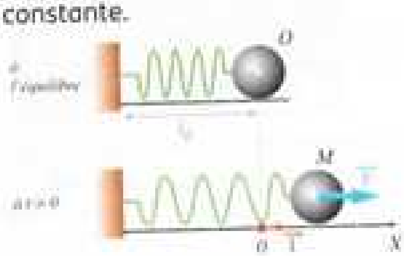
**46** Le bassin d'une piscine municipale a une capacité de 600000 L d'eau. Afin de respecter les normes d'hygiène et de sécurité, 30000 L d'eau de la piscine sont renouvelées chaque heure et le taux de chlore maximum autorisé est de 0,25 mg/L . Un soir, après la fermeture de la piscine, alors que le taux de chlore est indétectable, 1 kg de chlore est déversé par erreur dans le bassin à 20 h. Le directeur de la piscine souhaiterait savoir quand il pourra ouvrir à nouveau la piscine au public. On modélise la concentration massique du chlore présent dans la piscine par une fonction $f$.
$t$ désigne le temps écoulé depuis l'accident, exprimé en heures, $f(t)$ représente la concentration massique du chlore présent dans la piscine en mg/l. On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle (E ) : $y' + 0{,}05y = 0$ où $y$ est une fonction de la variable $t$.
Le directeur te sollicite.
Détermine le moment où la piscine sera ouverte au public.

**47** Pour résoudre le problème de leurs champs de caféiers vieillissants et peu productifs, des planteurs d'une région du pays s'adressent à un institut d'excellence d'agronomie qui leur propose une nouvelle variété qui rentre en production lorsque la plante atteint 0,90 m.
On repique alors des plants de café de 10 cm de haut dans un champ expérimental.
On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $f(t)$ la taille en m d'un plant après $t$ semaines ; on a donc : $f(0) = 0{,}1$.
Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue

suivant la relation : $f'(t) = af(t)(1 - f(t))$, où $a$ est une constante dépendant des conditions expérimentales.
Autrement dit, $f$ est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay(1 - y)$.
Détermine le temps au bout duquel la plante rentrera en production.
On utilisera pour tout $t$, $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.



**48** Des élèves d'une classe de Terminale D décident de vérifier la conservation de l'énergie mécanique vue au cours de Physique-Chimie en oscillation mécanique.
Pour cela, ils fixent à l'extrémité d'un ressort horizontal, un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan. On repère l'objet par sa position $X(t)$ qui varie en fonction du temps $t$.
On admet que la fonction $X$ est solution de l'équation différentielle (E) : $X'' + 100X = 0$.
Démontre que l'énergie mécanique $W$ du système.
1. Résous l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Détermine la solution $X$ de (E) telle que : $X(0) = 0.1$ et $X'(0) = 1$.
3. Vérifie que, pour tout réel $t$,
$X(t) = 0{,}1\sqrt{2}\sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Démontre que l'énergie mécanique $W$ du système, définie pour tout nombre réel $t \in [0\,;+\infty[$ par $W(t) = 0{,}1\,[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2$, est constante.




**Coup de Pouce**

**27** 1. Poser que $f'(x) - 2f(x) = (x + 1)e^x$.
$f'(x) = (ax + a + b)e^x$.
Par identification on trouve
$a = -1$ et $b = -2$.
2. On sait que $f$ est solution de l'équation différentielle et $g$ aussi est solution.
$f' - 2f = (x + 1)e^x$.
$g' - 2g = (x + 1)e^x$.
$(g - f)' - 2(g - f) = 0$.
Donc $(g - f)$ est solution de $y' - 2y = 0$.
Réciproquement si $(g - f)$ est solution de $y' - 2y = 0$, alors $(g - f)' - 2(g - f) = 0$.
Soit $g' - 2g = f' - 2f$ or $f' - 2f = (x + 1)e^x$ entraîne $g' - 2g = (x + 1)e^x$.
Donc $g$ est solution de $g' - 2g = (x + 1)e^x$.
3. $(g - f)(x) = ke^{2x}$
$g(x) = ke^{2x} + f(x)$.

**33** Les solutions de (E') sont :
1. $f_{ab}(x) = ae^2x + be^{-2x}$
2. On vérifie $g''(x) - 4\,g(x) = -\frac{16}{3}e^{-2x}$
3. $f$ est solution de (E), $g$ est aussi solution de (E). Ainsi $(f - g)'' - 4(f - g) = 0 \Leftrightarrow f - g$ est solution de (E') par équivalence.
4. Les solutions de (E) sont :
$f(x) = ae^2x + be^{-2x} + g(x)$.

**45** 1. $f_k(t) = ke^{-0{,}05t}$
2. $f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$
$f(t) = e^{-0{,}05t}$
3. $f(t) \leq 0{,}25$
$e^{-0{,}05t} \leq 0{,}25 \Leftrightarrow k = -0{,}05t \leq \ln(0{,}25)$
$t = \dfrac{\ln(0{,}25)}{-0{,}05}$ ; $t = 27{,}72$
$t = 28$
Après 28 h la piscine peut s'ouvrir.

Leçon 9

# NOMBRES COMPLEXES

La théorie du signal, celle des ondes, l'étude des systèmes électriques et électroniques, etc. peuvent être traités beaucoup plus élégamment avec les nombres complexes.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le club « ARTS » d'un lycée a demandé au proviseur l'autorisation de réaliser une statue dans la cour de l'école.

Le proviseur apprécie l'idée et promet au club un espace à cet effet. Il précise toutefois que, compte tenu d'un projet de construction de nouvelles salles de classe, cet espace aura une forme rectangulaire, un périmètre de 20 m et une aire de 40 m$^2$.

Le président du club, en classe de Terminale D, est très ravi mais se demande quelles seront les dimensions du terrain.

Il décide, avec ses camarades de classe de déterminer la longueur et la largeur de l'espace.

# HABILETÉS ET CONTENUS

## 1 Forme algébrique

*Identifier :*

- la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe
- la forme algébrique d'un nombre complexe

*Connaître :*

- la définition du module ; d'un argument d'un nombre complexe
- les propriétés relatives au module et un argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe
- les propriétés relatives à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes
- la définition du conjugué d'un nombre complexe
- les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe
- la propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes
- l'affixe d'un point ; d'un vecteur
- le point image ; le vecteur image d'un nombre complexe

*Déterminer :*

- la forme algébrique, la forme trigonométrique d'un nombre complexe
- la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe
- le conjugué d'un nombre complexe
- le module et un argument d'un nombre complexe non nul

*Placer :*

le point image d'un nombre complexe dans le plan muni d'un repère

*Calculer :*

- la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes
- la puissance d'un nombre complexe

## 2 Forme trigonométrique - Forme exponentielle

*Identifier :*

- la forme trigonométrique d'un nombre complexe
- la forme exponentielle d'un nombre complexe

*Connaître :*

- la formule de Moivre
- les formules d'Euler

*Utiliser :*

les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des produits en somme dans des expressions trigonométriques

*Linéariser :*

des puissances de $\cos x$ et $\sin x$

## 3 Résolutions d'équations

*Connaître :*

- la définition d'une racine carrée d'un nombre complexe
- la définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul
- les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

*Déterminer :*

- les racines carrées d'un nombre complexe
- les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul

*Résoudre :*

- une équation du second degré à coefficients complexes ainsi que des équations s'y ramenant
- une équation se ramenant au second degré à coefficients complexes

*Placer :*

- les points images des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, sur le cercle trigonométrique, connaissant l'une d'elles

## 4 Cercles, droites, demi-droites et nombres complexes

*Connaître :*

les caractérisations complexes d'un cercle ; d'une droite ; d'une demi-droite

## Activité 1 Forme algébrique d'un nombre complexe

### 1.1. Ensemble des nombres complexes

a) Recopie et complète le tableau ci-dessous par $\in$ ou $\notin$.

| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-7$ | | | | |
| $\frac{7}{13}$ | | | | |
| 0,379 | | | | |
| 43 | | | | |
| $\frac{\pi}{7}$ | | | | |

b) L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. On admettra que cette équation a une solution notée $i$.
On suppose qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et le nombre $i$ tel que $i^2 = -1$. Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x + yi$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels.
Justifie que les nombres $0$ ; $-7$ ; $\frac{7}{13}$ ; $0{,}379$ ; $43$ ; $\frac{\pi}{7}$ ; $2i$ ; $2 + \pi i$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

**Synthèse**

- Un nombre complexe $z$ s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.
- $a$ est appelé la partie réelle de $z$ et $b$ sa partie imaginaire.
- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- L'écriture $z = a + bi$ est appelé forme algébrique de $z$.
- Pour tout nombre complexe $z$ tel que $z = x + yi$, où $x$ et $y$ sont des nombres réels, on dit que $z$ est imaginaire pur lorsque $x = 0$ et $z$ est un nombre réel lorsque $y = 0$.
- L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

**Exercices de fixation**

**1.1.1** a) Recopie et complète le tableau suivant :

| | Partie réelle | Partie imaginaire |
|---|---|---|
| $2 + 2i$ | | |
| $i\sqrt{11}$ | | |
| $-41$ | | |
| $\frac{5}{3} - \frac{i\sqrt{7}}{4}$ | | |
| $i\sqrt{6} - 5$ | | |

b) Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles le nombre complexe $z = x^2 - x + 6 + i(x^2 - 5)$ est un imaginaire pur. Calcule $z$ le cas échéant.
c) Détermine les valeurs de $x$ pour lesquelles le nombre complexe $z = x + 2 + i(x^2 - 1)$ est un nombre réel.
Calcule $z$ dans ce cas.

**1.1.2** Soit $x$ un nombre réel. On considère les nombres complexes $z$ et $z'$ définis par
$z = x^2 + 1 + ix$ et $z' = -2x + i(x^2 - 2)$ :
Détermine si possible les valeurs de $x$ pour lesquelles :

1. $z$ est un imaginaire pur.
2. $z'$ est un nombre réel. Calcule $z'$.
3. $z$ et $z'$ sont égaux. Calcule z et $z'$.

**1.1.3** Recopie et mets une croix dans la case qui convient pour indiquer que le nombre appartient à l'ensemble.

| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| $-4$ | | | | | |
| $-\frac{2}{3}$ | | | | | |
| $\pi$ | | | | | |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | | |
| $1 + i$ | | | | | |
| $-3i$ | | | | | |

**1.1.4** 1. Cite trois nombres complexes de partie réelle 7.
2. Cite trois nombres complexes de partie imaginaire $-24$.

### 1.2. Calculs dans $\mathbb{C}$

On admet que les calculs dans $\mathbb{C}$ se font comme dans $\mathbb{R}$.

Soient $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = 3 + 2i$.

1. Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 + z_2$ ; $z_1 - z_2$ ; $z_1 \times z_3$ ; $z_1^2$ ; $z_2^2$ ; $z_2 \times z_3 - z_1^2$.

2. Calcule $i^2$ ; $i^3$ ; $i^4$ ; $i^5$ ; $i^6$ ; $i^{2021}$ ; $i^{2022}$.

3. a) Soient deux nombres complexes $z = a + ib$ ; $z' = x + iy$ où $a$, $b$, $x$ et $y$ sont des nombres réels non nuls.

Justifie que si $z$ et $z'$ sont inverses l'un et l'outre, on a :

$$z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}.$$

b) Calcule $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{1}{z_2}$.

4. En supposant que $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$, calcule $\frac{z_1}{z_2}$ ; $\frac{z_2}{z_1}$.

**Synthèse**

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.
- $z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.
- Si $z_2 \neq 0$, alors $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}[(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)]$.

**Exercices de fixation**

**101** Effectue les opérations suivantes puis donne les résultats sous forme algébrique.

a) $(3 - 4i) + (2 + 3i)$ ; b) $(5 + 6i) - (-2 + 7i)$ ;

c) $(2 - i)(3 - 4i)$ ; d) $\frac{3 + 2i}{1 - i}$ ; e) $(2 - i)^2$.

**102** Effectue les opérations suivantes puis donne les résultats sous forme algébrique.

a) $(2 - i)(2 + 3i) + 5 - 2i$ ;

b) $(4 - i\sqrt{3})(\sqrt{7} + i\sqrt{5})$ ;

c) $(\sqrt{2} - i)^3$.

### 1.3. Conjugué d'un nombre complexe

Dans chacun des cas suivants, écris le nombre complexe $z'$ qui a la même partie réelle que $z$ et qui a pour partie imaginaire l'opposé de celle de $z$.

1. $z = 4 + 3i$ ; 2. $z = 5 - 2i$ ; 3. $z = -1 - i$ ; 4. $z = x + iy$ ; 5. $z = 5$ ; 6. $z = 2i$.

**Synthèse**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

Le nombre complexe $x - iy$ est appelé le conjugué de $z$ et est noté $\overline{z}$.

**Exercice de fixation**

Détermine les conjugués des nombres suivants :

a) $1 + i$ ; b) $5 - 3i$ ; c) $1 - i\sqrt{11}$ ; d) $\sqrt{2} - i\pi$.

### 1.4. Propriétés

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Détermine la forme algébrique de : $\overline{z}$ ; $z \times \overline{z}$ ; $z + \overline{z}$ ; $z - \overline{z}$.
2. Compare.

a) $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$ ; b) $\overline{z \times z'}$ et $\overline{z} \times \overline{z'}$ ; c) $(\overline{z})^2$ et $\overline{(z^2)}$ ; d) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ et $\frac{1}{\overline{z}}$ ; e) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}$ et $\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

**Synthèse**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.
$\overline{\overline{z}} = z$ ; $z \times \overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$ ; $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ ; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ;
$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ ; $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ; si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

## Exercices de fixation

**1.4.1** Détermine les conjugués des nombres complexes suivants.

a) $(1 - i)(2 + 3i)$ ; b) $\dfrac{2 + i}{3 - 2i}$.

**1.4.2** Soit $z$ un nombre complexe. Détermine pour les différentes valeurs de $z$ le nombre $\overline{z}$.

a) $z = (2 - i)(1 + 2i)$ ;

b) $z = \dfrac{2 + 2i}{1 + i\sqrt{3}}$ ; c) $z = \dfrac{2}{1 + i}$.

**1.4.3** Détermine $z$ tels que :

a) $\overline{z} = -4 - 3i$ ;

b) $2\overline{z} - 3 = 5\overline{z} - 6i$ ;

c) $i\overline{z} - 2z = -5 - 2i$.

### 1.5. Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
Justifie que $z\overline{z}$ est un nombre réel positif.

**Synthèse**

Étant donné un nombre complexe $z$, le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le module de $z$ et est noté $|z|$. On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$.

## Exercices de fixation

**1.6.1** Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $4 + 3i$ ; b) $1 - i$ ; c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**1.6.2** Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $2i$ ; b) $-121$ ; c) $0$.

### 1.6. Propriétés

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

1. Compare les quatre nombres : $|z|$ ; $|-z|$ ; $|\overline{z}|$ et $|-\overline{z}|$.
2. Trouve une condition nécessaire et suffisante pour que $|z| = 0$.
3. Compare :

a) $|zz'|$ et $|z| \times |z'|$ ; b) $|z^n|$ et $|z|^n$ ; c) $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ et $\dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$ ;

d) $\left|\dfrac{z'}{z}\right|$ et $\dfrac{|z'|}{|z|}$ ; e) $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$.

**Synthèse**

$z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z| \times |z'|$ ; $|z^n| = |z|^n$ ; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

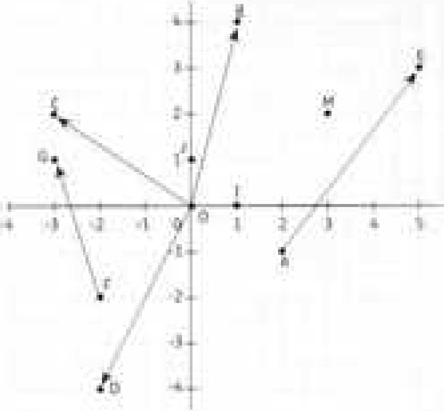
Si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

## Exercice de fixation

Calcule :

a) $|3 - 2i|$ ; b) $|-5i(1 - 2i)|$ ; c) $|(1 - i)(1 + 2i)|$ ; d) $\left|\dfrac{1}{-3 + i}\right|$ ; e) $\left|\dfrac{1 - 2i}{4 - i}\right|$.

### 1.7. Représentation géométrique d'un nombre complexe



On rapporte le plan orienté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
À tout **point** M$(x ; y)$ du plan est associé le **nombre complexe** $z_M = x + iy$.
$z_M$ est appelé **affixe** du **point** M. M est appelé **point image** de $z_M$.
On considère les points A, B, C, E, F et G de la figure ci-dessous.

1. a) Détermine l'affixe des points A, B, C et E.
   b) Détermine les points images des nombres complexes $-3 + i$ ; $2 - i$ ; $-2 - 2i$.

2. Soit $z_M$ l'affixe du point M$(x ; y)$ dans le plan complexe muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $z_N$ celle du point N$(x' ; y')$. On suppose que : $z_M - z_N$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{NM}$ et que $\overrightarrow{NM}$ est le vecteur image du nombre complexe $z_M - z_N$.
   a) Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.
   b) Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FG}$.
   c) Recopie et relie chaque nombre complexe à son vecteur image.

| | | |
|---|---|---|
| | • | $\overrightarrow{BE}$ |
| $-4 - i$ • | | |
| | • | $\overrightarrow{AG}$ |
| $-5 + 2i$ • | | |
| | • | $\overrightarrow{AF}$ |

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne A et B, alors $|z_A| = OA$ et $AB = |z_B - z_A|$.
Détermine $|z_A|$ et $|z_B - z_A|$.

**Synthèse**

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l' affixe du point M$(x ; y)$ représente le nombre complexe $z$ tel que $z = x + iy$. Le point M est le point image du nombre complexe $z$.

## Exercices de fixation

**1.7.1** On rapporte le plan orienté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient $1 - 2i$ ; $3 + i$ et $-3 + 4i$, les affixes respectives des points A, B et C.
Détermine $z_{AB}$ ; $z_{AC}$ ; $z_{BC}$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{BC}$.

**1.7.2** On rapporte le plan orienté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient $1 - 2i$ ; $3 + i$, $c$ et $d$ les affixes respectives des points A, B, C et D.
1. Détermine $c$ sachant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0 ; 2)$.
2. Détermine $d$ sachant que D est le milieu du segment [AB].

**1.7.3** On rapporte le plan orienté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient $1 - 2i$ ; $3 + i$ et $-3 + 4i$, les affixes respectives des points A, B et C.
1. Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$ ; $\|\overrightarrow{AC}\|$ ; $\|\overrightarrow{BC}\|$.
2. Détermine l'ensemble des points M d'affixes $z$ tel que $|z - 1 + 2i| = 2$.

## Activité 2 Forme trigonométrique - Forme exponentielle

### 2.1. Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne : $1 + \sqrt{3}\,i$, $3 + 3i$ les affixes respectives des points A et B.

1. Place les points A et B.
2. a) Justifie que : $\cos(\widehat{\vec{OI}; \vec{OA}}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\widehat{\vec{OI}; \vec{OA}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) Détermine $\text{Mes}(\widehat{\vec{OI}; \vec{OA}})$.
3. Justifie que $\text{Mes}(\widehat{\vec{OI}; \vec{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.

**Synthèse**

$\text{Mes}(\widehat{\vec{OI}; \vec{OA}})$ est l'argument principal de $1 + \sqrt{3}\,i$, il est noté $\text{ARG}(1 + \sqrt{3}\,i)$ ou $\text{Arg}(1 + \sqrt{3}\,i)$.

$\text{ARG}(3 + 3i) = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout point M d'affixe $z$, $\text{ARG}(z) = \text{Mes}(\widehat{\vec{OI}, \vec{OM}})$.

**Exercices de fixation**

**2.1.1** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Détermine l'argument de chacun des nombres complexes :

a) $-1 + i$ ; b) $\sqrt{3} - i$ ; c) $-1 - i$

**2.1.2** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Détermine dans chaque cas l'ensemble des points M d'affixe $z$ tel que :

a) $\text{ARG}(z) = \pi$ ; b) $\text{ARG}(z) = \frac{\pi}{4}$.

### 2.2. Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les nombres complexe non nuls $z$ et $z'$ tel que : $z = 2i$ ; $z' = 1 - \sqrt{3}\,i$.

1. Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes $zz'$ ; $\frac{1}{z'}$ ; $\frac{z}{z'}$.
2. Détermine l'argument principal de $z$ et de $z'$.
3. Vérifie que :
   a) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ;
   b) $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Déduis de la question 3) que :
   $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Synthèse**

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Exercices de fixation**

**2.2.1** On donne deux nombres complexes $z$ et $z'$ tels que $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ et $\arg(z') = \frac{\pi}{3}$.
Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $zz'$ ; b) $\frac{1}{z'}$ ; c) $\frac{z}{z'}$.

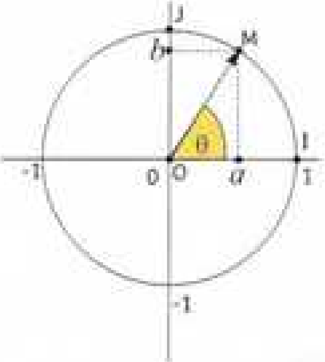
**2.2.2** Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $1 - \sqrt{3}\,i$ ; b) $\frac{1}{1+i}$ ;

c) $(1 - \sqrt{3}\,i)(1 + i)$ ; d) $\frac{1 - \sqrt{3}\,i}{1+i}$.

### 2.3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
$a$ et $b$ sont des nombres réels.
M est un point du plan d'affixe $z$ tel que $z = a + bi$.




1. À l'aide de la figure ci-contre, justifie que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
2. Écris le nombre complexe $\alpha$ de forme algébrique $1 - i\sqrt{3}$ sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r = |\alpha|$ et $\theta = \mathrm{ARG}(\alpha)$.
3. Soit $\beta$ le nombre complexe donné par :
$\beta = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
Justifie que : $\beta = 1 + i\sqrt{3}$.

**Synthèse**

Soit $z$ un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, on peut alors mettre $z$ sous la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

**Exercices de fixation**

**2.3.1** Soit $z$ un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument principal $\frac{\pi}{12}$.
Écris $z$ sous forme trigonométrique.

**2.3.2** Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre complexe $z$ sous forme trigonométrique.

a) $z = \sqrt{2}(1 + i)$ ; b) $z = \sqrt{3} + i$ ;
c) $z = (1 - i)(\sqrt{3} + i)$ ; d) $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

**2.3.3** Dans chacun des cas suivants, des nombres complexes sont donnés sous forme trigonométrique, détermine la forme algébrique de chacun d'eux.

a) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ ;

b) $\sqrt{6}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

### 2.4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Dans cet exercice, on admettra que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.
On rappelle que :
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

1. Soit $z$ un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
   Justifie que : $z = re^{i\theta}$.
   L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de $z$.
2. Écris sous forme exponentielle le nombre complexe $\sqrt{3} + i$.
3. On donne les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ tels que : $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Écris chacun des nombres $z_1$ et $z_2$ sous forme algébrique.
4. θ et θ' sont des nombres réels.
   a) Démontre que : $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$.
   b) Démontre que : $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
   c) Démontre que : $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$.

**Synthèse**

Soit $z$ un nombre complexe non nul de module r et d'argument $\theta$.
La forme exponentielle de $z$ est $re^{i\theta}$.

**Exercices de fixation**

**241** Dans chacun des cas, mets le nombre complexes sous forme exponentielle :

a) $1 + i$ ; b) $7i$ ; c) $\sqrt{3} - i$ ; d) 1.

**242** Dans chacun des cas, mets le nombre complexe sous forme exponentielle :

a) $z = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{1 - i}$ ; b) $z = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 2i)$.

**243** Écris les nombres complexes $z$ suivants sous forme algébrique :

a) $z = e^{i\pi}$ ; b) $z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$; c) $z = -5e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; d) $z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

### 2.5. Formule de Moivre : Formules de Euler

1. Démontre par récurrence que :
Pour tout nombre réel $\theta$, et pour tout entier naturel $n$, on a :
   a) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
   b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
2. Pour tout nombre réel $\theta$, et pour tout entier naturel $n$, justifie que :
   a) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
   b) $\cos n\theta = \dfrac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ et $\sin n\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$.
3. a) $\theta$ étant un nombre réel, exprime $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
   b) $\theta$ étant un nombre réel, exprime $\sin^3\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ ($n$ étant un nombre entier relatif).

**Synthèse**

- On admettra que pour tout nombre réel $\theta$, pour tout nombre entier relatif $n$,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
- $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
- $\cos n\theta = \dfrac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ et $\sin n\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$.

**Exercices de fixation**

**261** En utilisant les formules d'Euler, établis les identités suivantes :

a) $\cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$ ; b) $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ ; c) $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos 4\theta}{8}$.

**262** Démontre que : $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$.

## Activité 3 Résolutions d'équations

### 3.1. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Détermine les nombres complexes $\delta$ tels que $\delta^2 = -9$.
2. Soit $\delta$ le nombre complexe tel que : $\delta^2 = 3 + 4i$.
Posons $\delta = a + ib$ ($a$ et $b$ étant deux nombres réels).

a) Justifie que : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$.

b) Justifie que : $a^2 + b^2 = 5$.

c) Détermine tous les nombres complexes $\delta$ tels que $\delta^2 = 3 + 4i$.

3. Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation ( E ) : $az^2 + bz + c = 0$, et où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

a) Démontre que $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$.

b) Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta$ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Justifie que $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right)$.

c) Déduis-en les solutions de (E).

4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z(-1 + i) + 2 + i = 0$.

**Synthèse**

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b + \delta}{2a}$ et $\frac{-b - \delta}{2a}$, où $\delta$ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

## Exercices de fixation

**3.1.1** Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -3$ ; b) $z^2 = 6 + 8i$ ; c) $z^2 = 1 + i$.

**3.1.2** Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ ; b) $z^2 + iz = -1 - 3i$ ; c) $\frac{z+3}{3-z} = z$.

### 3.2. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul

Soit le nombre complexe $\delta$ tel que $\delta^3 = 1$.

1. Détermine le module de $\delta$.

Posons $\delta = e^{i\theta}$.

a) Démontre que $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Trouve les trois nombres complexes tels que $\delta^3 = 1$.

c) Place les points images des solutions de l'équation $\delta^3 = 1$ sur le cercle trigonométrique.

d) On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vérifie que $1 + j + j^2 = 0$.

3. a) Écris le nombre complexe $4 + 4i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

b) En utilisant les méthodes précédentes, détermine les nombres complexes $\delta$ tels que $\delta^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.

4. Donne une méthode pour déterminer les racines nième d'un nombre complexe non nul.

**Synthèse**

Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les racines cubiques de 1 sont 1, $j$ et $\overline{j}$, où $\overline{j}$ est le conjugué de $j$.

Les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul $z$ de module $\rho$ et d'argument $\theta$ sont les nombres complexes $\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

## Exercices de fixation

**3-1** Détermine les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - i$ ; $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ; $z = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

**3-2** Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E_1) : z^4 = 1$ ; $(E_2) : z^5 = -\sqrt{3} + i$ ;

**3-3** On donne $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Détermine les racines cubiques de ce nombre complexes puis construis les points-images obtenus dans un repère orthonormé.

## Activité 4 Cercle, droite, demi-droite et nombres complexes

### Définitions

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé orienté (O, I, J).

On considère les points A, B, D et E d'affixes : $z_A = -3 + i$, $z_B = -1 + 4i$, $z_D = 2 + 2i$ et $z_E = -5 - 2i$.

a) Place ses points dans le plan muni du repère (O, I, J).

b) Démontre que le quotient $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel, puis vérifie que les points A, B et E sont alignés.

c) Détermine l'affixe $z_C$ du point C tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

d) Démontre que le quotient $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ est un imaginaire pur, puis vérifie que le triangle ABD est un triangle rectangle.

e) Démontre que pour tous points A, B et M du plan complexe orienté, on a :

Le point M, différent de A et B, d'affixe $z$ appartient au cercle (C) de diamètre [AB] si, et seulement si le complexe $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ est imaginaire pur.

**Synthèse**

On considère, dans le plan complexe les points A,B,C et D distincts d'affixes $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.
On a les propriétés suivantes :

- Les points A, B et C sont alignés signifie que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABD est un triangle rectangle en B signifie que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} \in i\mathbb{R}^*$.

## Exercices de fixation

**4-1** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J).
On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -3 + i$, $z_B = 4i$, $z_C = 2 + 2i$.

a) Réalise une figure et place les points A, B, C.

b) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

**4-2** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J).
On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -3 + i$ , $z_B = 4i$ , $z_C = 2 + 2i$.
Détermine le point D tel que ABCD soit un rectangle.

## Exercice 1 Résoudre une équation

Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue $z$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

a) $2z - 3i + 1 = 1 + z$ ; b) $\frac{2z - i}{iz + 1} = 2i$ ; c) $2i - \bar{z} + 1 = -2i\bar{z}$ ; d) $(2 + 5i)z - 3 = i + 2i\bar{z} + 1$.

**Corrigé**

a) $2z - 3i + 1 = 1 + z$

$2z - z = 1 + 3i - 1$

$z = 3i$

$S = \{3i\}$.

b) $\frac{2z - i}{iz + 1} = 2i$, $z \neq i$

$2z - i = 2i(iz + 1)$

$2z - i = -2z + 2i$

$4z = 3i$

$z = \frac{3}{4}i$ ; $S = \left\{\frac{3}{4}i\right\}$.

c) $2i - \bar{z} + 1 = -2i\bar{z}$

$(1 - 2i)\bar{z} = 1 + 2i$

$\bar{z} = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

$\bar{z} = \frac{(1 + 2i)(1 + 2i)}{1 + 4}$

$\bar{z} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

$z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

$S = \left\{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right\}$

d) On pose $z = x + iy$. Alors $\bar{z} = x - iy$

$(2 + 5i)(x + yi) - 3 = i + 2i(x - yi) + 1$

$2x + 2yi + 5xi - 5y - 3 = i + 2xi + 2y + 1$

$(2x - 5y - 3 - 2y - 1) + (2y + 5x - 2x - 1)i = 0$

$(2x - 7y - 4) + (3x + 2y - 1)i = 0$

$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Par résolution du système, on trouve :

$x = \frac{3}{5}$ et $y = \frac{-2}{5}$

$S = \left\{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$

**Méthode**

Lorsque dans une équation figurent à la fois $z$ et $\bar{z}$, il faut écrire $z$ sous forme algébrique.

## Exercice 2 Déterminer un lieu géométrique

Détermine dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que :

a) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ ; b) $|z - 1 + i| = |iz + 2|$ ; c) $z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R}$.

**Corrigé**

a) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$.

$|z| = 2 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 2 et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$ M appartient à la demi-droite [OK) telle que Mes $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}) = \frac{2\pi}{3}$.

M est le point du cercle (C) et de la demi-droite [OK) telle que Mes $\frac{2\pi}{3}$.

b) $|z - 1 + i| = |iz + 2|$

$|z - 1 + i| = |i(z - 2i)|$

$|z - 1 + i| = |z - 2i|$

Soit A$(1 - i)$ et B$(2i)$ et M$(z)$

$|z - 1 + i| = |z - 2i| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble solution est la médiatrice du segment [AB] où A et B ont pour affixes respectives $1 - i$ et $2i$.

c) En posant $z = x + iy$

$z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y + \frac{9y}{x^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 + 9 = 0$ (pas de solutions)

$\Leftrightarrow y = 0$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = 0$ privée du point O (o, o).

**Méthode**

Pour rechercher un ensemble de points on peut utiliser une interprétation géométrique ou remplacer le nombre complexe $z$ par $x + yi$.

## Exercice 3 Résoudre une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$ ; Déterminer la nature d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.
   a) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle que tu détermineras.
   b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. a) Représente les points A, B et C d'affixes respectives $1$ ; $2+2i$ et $1-i$.
   b) Détermine le module et l'argument principal de $\frac{1-i}{2+2i}$. Déduis-en la nature du triangle OBC.
   c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

**Corrigé**

1. a) Soit $\alpha$ un nombre réel.

$\alpha^3 - (4+i)\alpha^2 + (7+i)\alpha - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ est solution de $(E)$

$\alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 + i(-\alpha^2 + \alpha) = 0$

$\alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 + i(-\alpha^2 + \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 = 0 & (E_1) \\ -\alpha^2 + \alpha = 0 & (E_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 \\ \alpha_1 = 0 \text{ ou } \alpha_2 = 1 \end{cases}$

$\alpha_1$ ne vérifie pas $(E_1)$, $\alpha_2$ vérifie $(E_2)$ donc le réel $\alpha$ cherché est $\alpha = 1$.

b) Résolution de (E)

$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - (3+i)z + 4)$

$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

Résolution de l'équation $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

$\Delta = -8 + 6i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta$.

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On a :

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ xy = 3 \end{cases}$

On a : $\delta_1 = -1 - 3i$ et $\delta_2 = 1 + 3i$

$z_1 = 2 + 2i$ ; $z_2 = -1 - i$

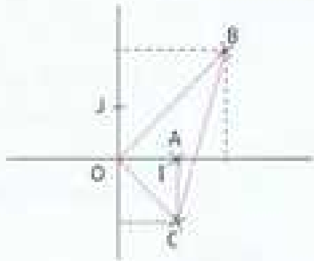
$S_{\mathbb{C}} = \{1 ; 2+2i ; 1-i\}$

**Méthode**

Pour démontrer qu'une équation complexe $P(z) = 0$ admet une solution réelle $\alpha$ il faut écrire sous forme algébrique : $P(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha)i$ puis résoudre le système $\begin{cases} P_1(\alpha) = 0 \\ P_2(\alpha) = 0 \end{cases}$

On résout l'équation qui est la plus facile à résoudre et on vérifie les résultats dans l'autre.

2. a)




b) $\left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{1-i}{2+2i}\right) = \text{Arg}(1-i) - \text{Arg}(2-2i)$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

Donc $\left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \frac{1}{2}$ et $\text{Arg}\left(\frac{1-i}{2+2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Le triangle OBC est rectangle en O.

c) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \text{Arg}(2-2i) = \frac{\pi}{4}$

Donc la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$ du triangle OBC.

## Exercice 4 Linéariser

Linéariser $\sin^5 x$.

**Corrigé**

En utilisant une formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5$. On a :

$(e^{ix} - e^{-ix})^5 = (e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})$.

$\frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5 = \frac{1}{16}\frac{1}{(2i)}[(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(3^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})]$

Il en résulte que $\sin^5 x = \frac{1}{16}[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x]$.

**Méthode**

Pour linéariser $\sin^n x$ ou $\cos^n x$, on utilise les formules d'Euler, de Moivre et du binôme de Newton.

## Résumé de cours

### 1 Forme algébrique d'un nombre complexe

#### 1.1. Ensemble des nombres complexes

**Définition** On appelle nombre complexe tout nombre $z$ de la forme : $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.
Le nombre réel $a$ s'appelle la partie réelle de $z$ et se note : $\mathrm{Re}(z)$.
Le nombre réel $b$ s'appelle la partie imaginaire de $z$ et se note : $\mathrm{Im}(z)$.
Cette écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de $z$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout nombre réel appartient à $\mathbb{C}$ ( il suffit que $\mathrm{Im}(z) = 0$).
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ le nombre complexe $z$ est appelé imaginaire pur.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

**Propriétés** $a, b, a', b'$ sont des nombres réels, $z$ et $z'$ sont des nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ :

- $z = 0$ signifie que $a = b = 0$.
- $z = z'$ signifie que $a = a'$ et $b = b'$.
- $z$ est élément de $\mathbb{R}$ signifie que $b = 0$.
- $z$ est élément de $i\mathbb{R}$ signifie que $a = 0$.

#### 1.2. Calculs dans $\mathbb{C}$

Dans l'ensemble des nombres complexes, on a :

a) Addition

- Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Méthode

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ étant deux nombres complexes :

- on a : $(z - z') = z +$ (opposé de $z'$) $= z + (-z')$. Où opposé de $z'$ égal à $-z' = -a' - ib'$

b) Produit

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ étant deux nombres complexes et $z \neq 0$.

c) Inverse d'un nombre complexe non nul. Pour $z \neq 0$, $z = a + bi$.

On a $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = (a - ib) \times \frac{1}{a^2 + b^2}$.

On a aussi : $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

d) Produit nul

**Propriété** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $z \times z' = 0$ signifie que $z = 0$ ou $z' = 0$.

e) Puissance entière d'un nombre complexe

- Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

**Définition** $z$ étant un nombre complexe non nul, $n$ un nombre entier naturel non nul,
(1) $z^0 = 1$ ; (2) $0^n = 0$ ; (3) $z^{n+1} = z^n \times z$ ; (4) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

## Résumé de cours

- Puissance entière de $i$

**Propriété** Pour tout nombre entier naturel $n$, on a :
$i^{4n} = 1$ ; $i^{4n+1} = i$ ; $i^{4n+2} = -1$ ; $i^{4n+3} = -i$

### 1.3. Conjugué d'un nombre complexe

**Définition** Soit $z$ un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$.
On appelle le nombre conjugué de $z$, le nombre noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.

### 1.4. Propriétés

**Propriétés** Pour tout nombre complexe $z$ :

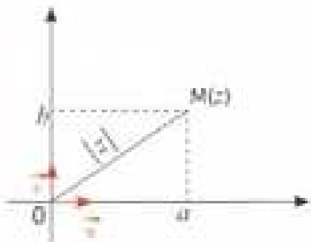
- $\bar{\bar{z}} = z$, on dit que « les complexes $z$ et $\bar{z}$ sont conjugués ».
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$.
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$.
- $z \times \bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- $\bar{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

**Propriétés** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ (avec $z$ non nul).

### 1.5. Module d'un nombre complexe

**Définition** Soit $z$ un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$. On appelle « module de $z$ », noté $|z|$, le réel positif : $\sqrt{a^2 + b^2}$.
On a : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$




### 1.6. Propriétés

**Propriété** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;
$|\bar{z}| = |-\bar{z}| = |-z| = |z|$ ;
$|\text{Re}(z)| \leq |z|$ ;
$|\text{Im}(z)| \leq |z|$ ;
$|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ;
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$ ;
Lorsque $z \neq 0$, on a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ; et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

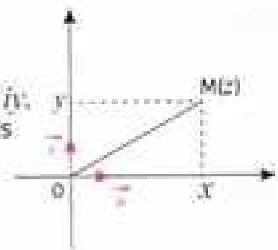
## Résumé de cours

### 1.7. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

#### a) Affixe. Point image

$x$ et $y$ sont des nombres réels.
À tout point $M(x ; y)$ du plan est associé le nombre complexe $z = x + iy$.
Ainsi l'axe des abscisses est tout simplement l'axe des nombres réels tandis que l'axe des ordonnées est celui des imaginaires purs.




- $z_M$ est l'affixe du point $M(z)$.
- $M(z)$ est le point image de $z$.

#### b) Vecteur image

$x$ et $y$ sont des nombres réels.
À tout vecteur $\vec{w}\,(x ; y)$ du plan est associé le nombre complexe $x + iy$.

- $x + iy$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.
- $\vec{w}$ est le vecteur image du nombre complexe $x + iy$.

#### c) Propriété

**Propriété** Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

#### d) Interprétation graphique du module

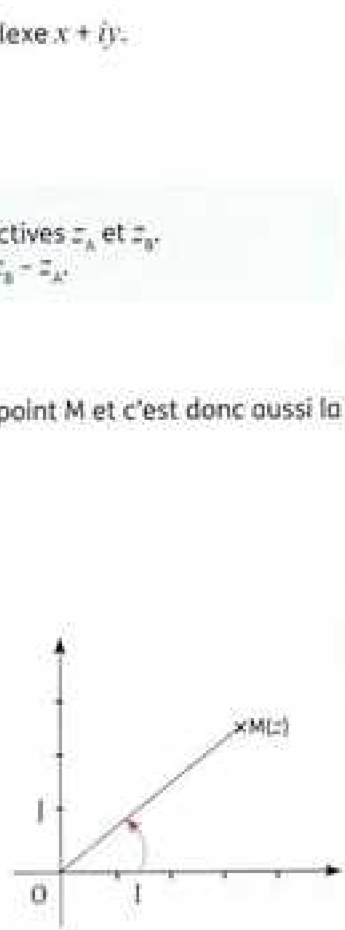
Dans un repère orthonormé (O, I, J).
Si M est Le point d'affixe $z$, $|z|$ est la distance du point O au point M et c'est donc aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
$|z| = d(OM) = \|\overrightarrow{OM}\|$

## 2 Forme trigonométrique - Forme exponentielle

### 2.1. Argument d'un nombre complexe non reel

#### a) Définition

$z$ est un nombre complexe non nul, M le point-image de $z$ dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).




- La mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée l'argument principal de $z$, noté : ARG($z$).
- Toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée un argument de $z$ noté : arg($z$).
- $\theta$ étant un argument d'un nombre complexe non nul $z$, tout autre argument de z est de la forme $\theta + k2\pi$ [ $k \in \mathbb{Z}$].

### 2.2. Propriétés

**Propriété** Pour tous nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, pour tout nombre entier relatif $n$,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Propriété** Pour tous A, B, C et D tels que (A ≠ B) et (C ≠ D), on a :
- $mes(\widehat{\vec{OI}, \vec{AB}}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ [ $k \in \mathbb{Z}$ ].
- $mes(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

### 2.3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété – Définition

**Propriétés**
- Soit $z$ un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$. On peut alors mettre $z$ sous la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$
- On appelle forme trigonométrique du nombre complexe non nul $z$ l'écriture : $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ ; $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$ et $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

### 2.4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Propriété – Définition

**Propriétés**
- Tout nombre complexe non nul $z$, de module $r$ et d'argument $\theta$ peut s'écrire : $z = re^{i\theta}$.
- On appelle forme exponentielle du nombre complexe non nul $z$ de module $r$ et d'argument $\theta$ l'écriture $re^{i\theta}$.

*Remarque*

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$ s'écrit $e^{i\theta}$.

### 2.5. Formule de Moivre - Formules de Euler

Formule de Moivre

**Propriété** Pour tout nombre réel $\theta$, pour tout nombre entier relatif $n$,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Formules d'Euler

**Propriétés** $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ et $\sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$.

## 3 Résolution d'équations

### 3.1. Équations du second degré dans ℂ

**Définition** On appelle équation du second degré dans ℂ, l'équation d'inconnue $z$ définie par $az^2 + bz + c = 0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres complexes.

## Résumé de cours

a) Détermination des racines carrées d'un nombre complexe

L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

- Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions :

  $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$

  $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ si $a < 0$

- Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose : $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ 2xy = Im(a) \end{cases}$$

b) Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Pour résoudre une équation du second degré $az^2 + bz + c$ dans $\mathbb{C}$ (avec $a \neq 0$), on peut procéder comme suit.

- On calcule le discriminant noté généralement $\Delta$, ($\Delta = b^2 - 4ac$).
- On détermine les racines carrées du discriminant $\Delta$ selon que celui-ci est un nombre réel ou non.
- On détermine les solutions de cette équation.

- Si cette équation à un discriminant $\Delta \in \mathbb{R}$ alors :
  - Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes en posant $\Delta = i^2|\Delta|$, $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si cette équation à un discriminant $\Delta \notin \mathbb{R}$ alors :
  - détermine les racines carrées de $\Delta$ notées : $\delta$ et $-\delta$.
  - les deux solutions $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.
- Si $z_1$ et $z_2$ sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ (où $a \neq 0$), alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$,

  $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

### 3.2. Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul

a) Définition

**Définition** $n$ étant un nombre entier naturel non nul et $Z$ un nombre complexe non nul, on appelle racine $n^{ième}$ de $Z$, tout nombre complexe $z$ tel que : $z^n = Z$.

### b) Propriétés

**Propriétés** • L'équation complexe $z^n = Z$ admet $n$ racines distinctes. Son ensemble solution est donné par $S_n = \left\{ \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, ..., n-1\} \right\}$ où $\theta = \arg(Z)$ et $\rho = |Z|$.

• Le plan étant muni du repère orthonormé direct (O, I, J), les points-images des $n$ racines $n^{\text{ième}}$ sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon $\rho^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}$.

• Lorsque $n = 2$, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur (C).

• Lorsque $n > 2$, les points images des $n$ racines $n^{\text{ième}}$ sont les sommets d'un polygone régulier de $n$ côtés, inscrit dans un cercle (C).

### c) Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

• $n$ étant un nombre entier non nul, on appelle racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, les solutions de l'équation : $z^n = 1$.

• Les racines cubiques de 1 sont 1, $j$ et $\overline{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On a : $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.

• L'ensemble des solutions est donné par : $\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, ..., n-1\}\}$.

• La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à 0.

## 4 Cercle, droite, demi-droite et nombres complexes

**Le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).**

**Propriétés** On considère, dans le plan complexe les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$. On a les propriétés suivantes :

• Les points A, B et C sont alignés signifie que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

• Le triangle ABC est rectangle en A signifie que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$.

• Les droites (AB) et (CD) sont parallèles signifie que $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

• $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$.

• Le point M, différent de A et B, d'affixe $z$ appartient au cercle (C) de diamètre [AB] si, et seulement si le complexe $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ est imaginaire pur.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Recopie et écris la réponse juste à la place des pointillés.

a) La partie réelle du nombre complexe $z = (1 + 2i)^2$ est .........

b) La partie imaginaire du nombre complexe $z = (1 + 2i)^2$ est .........

**2** Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

a) si $z = 5 - 12i$, alors $\overline{z} = -5 + 12i$.

b) $z$ est un nombre complexe on a $z\overline{z}$ est un nombre réel.

c) Le module du nombre complexe $3 - 4i$ est 5.

d) Soit $z$ le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

La forme algébrique de $z$ est $\sqrt{3} + i$.

**3** Recopie et relie chaque nombre complexe à son argument principal.

| Nombre complexe | Argument |
|---|---|
| $1 - i$ • | • $\frac{\pi}{4}$ |
| $1 + i$ • | • $-\frac{\pi}{4}$ |
| $-1 + i$ • | • $\frac{3\pi}{4}$ |
| $-1 - i$ • | • $-\frac{3\pi}{4}$ |

**4** Recopie et relie chaque nombre complexe à sa forme trigonométrique.

| Nombre complexe | Argument |
|---|---|
| $1 - \sqrt{3}i$ • | • $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$ |
| $1 + \sqrt{3}i$ • | • $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ |
| $-1 + \sqrt{3}i$ • | • $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ |
| $-1 - \sqrt{3}i$ • | • $2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$ |

**5** Recopie et relie chaque nombre complexe à sa forme exponentielle.

| Nombre complexe | Argument |
|---|---|
| $\sqrt{3} - i$ • | • $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ |
| $\sqrt{3} + i$ • | • $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ |
| $-\sqrt{3} + i$ • | • $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ |
| $-\sqrt{3} - i$ • | • $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ |

**6** Recopie et relie chaque nombre complexe à son argument principal.

| Nombre complexe | Argument |
|---|---|
| $-i$ • | • $0$ |
| $i$ • | • $\frac{\pi}{2}$ |
| $7$ • | • $-\frac{\pi}{2}$ |
| $-7$ • | • $\pi$ |

**7** Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste. Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

| | | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| N° | Énoncés | A | B | C |
| 1 | On sait que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 3i$. On peut en déduire que : | les points A, B et C sont alignés. | les points A, B et C ne sont pas alignés. | les points A, B et C sont confondus. |
| 2 | On sait que : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 7$. On peut en déduire que : | les droites (AB) et (CD) sont sécantes. | les droites (AB) et (CD) sont parallèles. | les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. |
| 3 | On sait que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On peut en déduire que : | les droites (AB) et (CD) sont parallèles. | les droites (AB) et (CD) sont confondues. | les droites (AB) et (CD) sont sécantes et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$. |

# Exercices

**8** Écris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = (1+i)^2$ ; b) $z_2 = (2-3i)(1-i)$ ; c) $z_3 = i(3+2i)$ ;
d) $z_4 = 5i(2-i) - (4-3i)^2$ ; e) $z_5 = (5-2i)(5+2i)$

**9** Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{1-i}{i}$ ; b) $z_2 = \frac{2}{1+i}$ ; c) $z_3 = \frac{2-i}{1+2i}$ ;
d) $z_4 = 1 + \frac{3+i}{2-i}$ ; e) $z_5 = \frac{1-i}{2+3i} + \frac{1+i}{3-2i}$.

**10** Écris sous la forme $a + ib$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \left(\frac{i}{2-i}\right)^2$ ; b) $z_2 = \left(\frac{3-2i}{1+i}\right)^2$ ;
c) $z_3 = \left(2i - \frac{3}{i}\right)^2$ ; d) $z_4 = \frac{-3}{(1-i)(2+i)}$.

**11** Détermine les conjugués des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 4+3i$ ; b) $z_2 = 1-2i$ ; c) $z_3 = 7i$ ; d) $z_4 = 23$.

**12** Détermine les conjugués des nombres complexes $z_1$ ; $z_2$ et $z_3$ suivants puis écris les sous leurs formes algébriques.

a) $z_1 = (2-3i)(1+2i)$ ; b) $z_2 = \frac{2+i}{1-2i}$ ; c) $z_3 = 2i(3-5i)$.

**13** On considère les nombres complexes : $z_1$ et $z_2$ définis par : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 3 - 2i$.
Détermine la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$ ; b) $z_1 - z_2$ ; c) $3z_1 + z_2$ ; d) $iz_1 - 2z_2$ ;
e) $z_1 \times z_2$ ; f) $\frac{z_2}{z_1}$ ; g) $\frac{z_2}{iz_1 - 2z_2}$.

**14** Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1+i$ ; b) $z_2 = -2+i$ ; c) $z_3 = -7i$ ;
d) $z_4 = 3-4i$ ; e) $z_5 = -3-5i$.

**15** Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{i}{1-i}$ ; b) $z_2 = \frac{2-i}{1+2i}$ ;
c) $z_3 = \frac{(2-i)^2}{(5+2i)(3-i)}$.

**16** Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -1+i$ ; b) $z_2 = -3i$ ; c) $z_3 = \sqrt{27} + 3i$ ;
d) $z_4 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ ; e) $z_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2i}$ ;
f) $z_6 = (1+i)(2-2i)$.

**17** Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z + iz = i$ ; b) $z - 3iz = (3-i)z$ ; c) $z + 2 - i(z+1) = 1$ ;
d) $2iz - 3 = z + 1$ ; e) $3z - 4 + 2iz = 2i - z(1+3i)$ ;
f) $3iz + 2i - (1-i)z = 0$ ; g) $3i - z + 2 = i(iz+2) - i$.

**18** Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\frac{z-3}{z-i} = 2$ ; b) $\frac{z+2i}{z+3} = i$ ;
c) $\frac{z-1}{iz+3} = -2i$ ; d) $\frac{iz-2i}{z-1-i} = 3$.

**19** Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $(2-3i)\bar{z} - (4+i) = 2\bar{z} + 5i$ ; b) $(3-i)\bar{z} = 3 + 2\bar{z}$ ;
c) $\frac{2\bar{z}-i}{i\bar{z}} = 1 - 3i$.

**20** Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $(2-3i)\bar{z} - (2+i) = 2\bar{z} + i$ ;
b) $(1-i)\bar{z} = 3 + 2\bar{z}$ ;
c) $\frac{2\bar{z}-i}{i\bar{z}+1} = 1 + i$.

**21** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, détermine, puis construis, l'ensemble des points M d'affixe $z$ vérifiant :

a) $|z+i| = 3$ ; b) $|z-i+2| = 4$ ; c) $|z-2+i| = |z|$ ;
d) $|z-1| = |z+i|$ ; e) $|z-1+2i| = |iz+2|$.

**22** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, représente l'ensemble des points M dont l'affixe $z$ satisfait la condition proposée.

a) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ; b) $\arg(z+2-i) = -\frac{\pi}{6}$ ;
c) $\arg\left(\frac{z+2-i}{z-2i}\right) = -\frac{\pi}{3}$ ; d) $|z| = 4$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$.

**23** Détermine l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $z$ tels que :

a) $\frac{z-3}{z+2i} + 1 \in \mathbb{R}$ ; b) $\frac{z+i}{z-2} - 2i \in \mathbb{R}$ ;
c) $z - \frac{4}{z} \in \mathbb{R}$ ; d) $\frac{z-3}{z+1} + 1 \in i\mathbb{R}$ ;
e) $iz - \frac{1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

**24** Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Détermine dans chaque cas le lieu géométrique des points M($z$), où $z$ est un nombre complexe :

a) $z^2 - 2z + 1 \in \mathbb{R}$ ; b) $|1 + 2iz| = 2$ ; c) $\left|z + \frac{1}{2}i\right| = 2$.

**25** Écris sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ ; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ ; $z_3 = 1 + i$ ; $z_4 = 2 - 2i$ ;
$z_5 = -3 - i\sqrt{3}$.

**26** Détermine la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$ ; $z_2 = (2+2i)(3-i\sqrt{3})$ ; $z_3 = (3+i\sqrt{3})^{\text{[illegible]}}$ ;

$z_4 = -i\sqrt{7}$ ; $z_5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2i}\right)^{\text{[illegible]}}$ ; $z_6 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}}$.

**27** Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ;

$z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ;

$z_3 = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ;

$z_4 = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$.

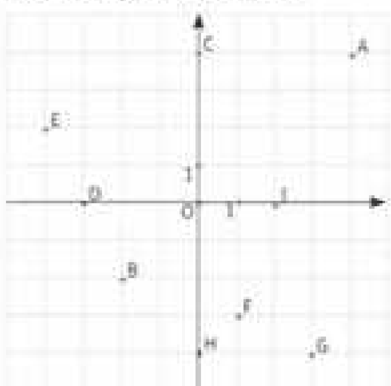
**28** Représente dans le plan complexe les points images des nombres complexes suivants :

$z_A = 3+4i$ ; $z_B = -1+2i$ ; $z_C = 7-3i$ ;
$z_D = 2+2i$ ; $z_E = -3-5i$.

**29** Représente dans le plan complexe les points images d'affixes suivants :

$z_A = 1-i\sqrt{3}$ ; $z_B = 1+i\sqrt{3}$ ; $z_C = 1+i$ ;
$z_D = 2-2i$ ; $z_E = -3-i$.

**30** On donne la figure ci-dessous :




a) Détermine les affixes des points de la figure ci-dessus.

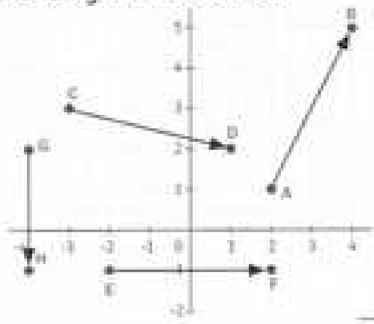
b) Place les points T, S, K et P d'affixes respectives :
$z_T = -1-3i$ ; $z_S = -2+4i$ ; $z_K = 2+3i$ ; $z_P = 4-5i$.

**31** 1. Place les points A, B et C dont les affixes respectives sont : $z_A = -3-2i$, $z_B = 5+2i$ et $z_C = 1-3i$ dans le plan complexe.

2. Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ? Justifie ta réponse.

**32** On donne la figure ci-dessous :




1. Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, et $\overrightarrow{GH}$.
2. Calcule leurs modules.

**33** Dans le plan complexe, détermine et représente, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M dont les affixes $z$ remplissent la condition donnée :

a) $|z| = 3$ ; b) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ ; c) $|z| = 5$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$.

**34** Dans le plan complexe, détermine et représente l'ensemble des points M dont les affixes $z$ remplissent la condition donnée :

a) $|z-2| = 3$ ; b) $|z-i| = 2$ ;
c) $\arg(z-2) = \frac{\pi}{3}$ ; d) $3\arg(z) = 0$.

**35** Dans le plan complexe, détermine et représente, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M dont les affixes $z$ remplissant la condition donnée :

a) $|z-2| = |z-i|$ ; b) $\left|\dfrac{2z-3}{iz-4}\right| = 1$ ;

c) $\left|\dfrac{z+1}{z-2}\right| = 2$ ; d) $\arg(3iz) = \frac{\pi}{3}$.

**36** Dans chacun des cas suivants, détermine de deux manières différentes le module et l'argument du nombre complexe donné :

a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})(1-i)$ ; b) $z_2 = -2i(1-i\sqrt{3})$ ;

c) $z_3 = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$.

**37** Écris les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $z_1 = 5$ ; b) $z_2 = 3-i\sqrt{3}$ ; c) $z_3 = 3+3i$ ;
d) $z_4 = -2i$ ; e) $z_5 = 1+i\sqrt{3}$.

**38** Écris les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $z_1 = 2i(1-i)$ ; b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$ ;

c) $z_3 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

**39** Écris les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique puis algébrique :

a) $z_1 = -5e^{\text{[illegible]}}$ ; b) $z_2 = 3e^{\text{[illegible]}}$ ; c) $z_3 = 2e^{\text{[illegible]}}$ ;

d) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$ ; e) $z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ ;

f) $z_6 = \dfrac{5e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{6e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

**40** Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2 = -4$ ; b) $z^2 = -7$ ; b) $z^2 - z + 10 = 0$ ;

c) $z^2 - 5z + 9 = 0$ ; g) $z^2 - 5z = 0$ ; h) $\dfrac{3 - z^2}{z} = 3$.

**41** Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $(z - i)^2 = -9$ ; b) $(z + 2)^2 = (1 + iz)^2$ ;

c) $z^2 = 3iz$ ; d) $\dfrac{z + 3}{z - 3} = -z$.

**42** Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$ ;

b) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$.

c) $\left(\dfrac{z - 2}{z + i}\right)^2 = 2i$.

d) $(iz + 1 + 2i)^2 + 4z^2 = 0$.

**43** Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2 - 3z + 4 = 0$ ; b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ ;

c) $z^2 + z + 1 = 0$ ; d) $4z^2 - 4z + 5 = 0$.

**44** On se propose de résoudre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$

$z^2 + 2iz - 2 = 0$.

a) Développe $(z + i)^2$.

b) Déduis-en que l'équation (E) est équivalente à $(z + i)^2 - 1 = 0$.

c) Déduis-en les solutions de (E).

**45** On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

(E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a) Détermine deux réels $a$ et $b$ tels que l'équation s'écrive :

(E): $(z - 2)(z^2 + az + b) = 0$.

b) Résous l'équation (E).

**46** Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

a) Calcule $P(i)$.

b) Trouve deux nombres réels $a$ et $b$ tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

d) Démontre que les solutions de $P(z) = 0$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

## Exercices d'approfondissement

**47** On considère le nombre complexe $z$ tel que :

$z = (-\sqrt{3} + i)^{2019}$.

1. Détermine la forme exponentielle de $-\sqrt{3} + i$.
2. Démontre que $z$ est un nombre imaginaire pur.

**48** 1. Écris sous forme algébrique : $z = \dfrac{7 + 4i}{3 - 2i}$.

2. Soit l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ :

$z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a) Justifie que 2 est solution de l'équation (E).

b) Résous alors l'équation (E).

3. On donne le nombre complexe :

$u = (-\sqrt{3} + i)^{2020}$.

Démontre que le nombre $u$ est un nombre réel.

4. Détermine et représente les ensembles des points M d'affixe $z$ dans les cas suivants : On prendra comme unité 2 cm sur les deux axes du plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

a) $|z - 1| = |z - i|$ b) $|z + i| = 2$.

**49** On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme P tel que :

$P(z) = z^3 + z^2 + (1 - i)z + 2 + 2i$.

1. Démontre que P admet une racine réelle $z_0$ que l'on déterminera.
2. Détermine les réels $a$ et $b$ tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + a + b)$.
3. Résous l'équation : $P(z) = 0$.
4. On considère dans le plan complexe les points A, B et C tels que $z_A = -2$ ; $z_B = i$ et $z_C = 1 - i$.

a) Détermine le module et un argument du nombre complexe $T = \dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.

b) Donne la nature du triangle ABC.

c) Détermine l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

**50** $f$ est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (2 + 4i)z + 2 - 4i$.

1. a) Vérifie que : $f(i) = 0$.

b) Détermine les nombres complexes $a$ et $b$ tels que : $f(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

2. On considère l'application $g$ du plan dans le plan qui, à tout point M d'affixe $z$, associe le point M' d'affixe $z'$ tel que : $z' = \dfrac{1}{2}(1 - i)z - 1 + 2i$.

a) Soit A le point d'affixe $1 + 3i$.

Détermine l'affixe de A' image de A par $g$.

b) On note $z_A$ l'affixe du point A et $z_{A'}$ l'affixe du point A'. Pour tout $z$ différent de A, détermine le nombre complexe $\dfrac{z' - z_{A'}}{z - z_A}$.

c) Pour tout M distinct de A, détermine

Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AM'}}\right)$ puis $\dfrac{AM'}{AM}$.

d) Déduis-en les éléments caractéristiques de $g$.

3. Démontre que pour tout M différent de A, le triangle AMM' est rectangle isocèle en M'.

**51** On considère les nombres complexes $z_n$ définis, pour tout entier naturel $n$, par :

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$.

On note $A_n$ le point d'affixe $z_n$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. a) Vérifie que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b) Déduis-en $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.
2. a) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, $A_0$ et $A_n$ sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Interprète géométriquement $d_n$.
   b) Calcule $d_0$.
   c) Démontre que pour tout entier naturel $n$ non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$
   d) Déduis-en que la suite $(d_n)$ est géométrique puis que pour tout entier naturel $n$, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.
4. a) Démontre que pour tout entier naturel $n$, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.
   b) Déduis-en que, pour tout entier naturel $n$, le triangle $A_0 A_n A_{n+1}$ est rectangle en $A_n$.
   c) Construis, à la règle non graduée et au compas, le point $A_5$ sur la figure.
   d) Justifie cette construction.

**52** On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) :
$z^3 - (1 + 4i)z^2 - 7z + 7 + 4i = 0$.
a) Vérifie que $z_1 = 1$ est une solution de l'équation (E).
b) Trouve deux nombres réels a et b tels que $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$.
c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
d) Démontre que les solutions de l'équation (E) sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

**53** On pose $U = \{1, j, j^2\}$.
Démontre que U est une partie stable de $\mathbb{C}$ pour la multiplication des nombres complexes, c'est-à-dire que le produit de deux éléments de U est aussi un élément de U.

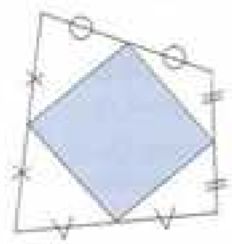
**54** On considère l'équation : $z^5 - 1 = 0$.
1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. Démontre que pour tout nombre complexe $z$ : $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

Démontre que $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ si et seulement si $\begin{cases} z \neq 0 \\ u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 + u - 1 = 0 \end{cases}$

a) Résous l'équation $u^2 + u - 1 = 0$.
b) Démontre que les deux solutions trouvées sont respectivement égales à $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$.
c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ ; $\cos\frac{4\pi}{5}$ ; $\cos\frac{6\pi}{5}$ ; $\cos\frac{8\pi}{5}$.

## Situation complexe

**55** Sur le sol de la bibliothèque du lycée, on peut voir la figure ci-dessous.
Un élève affirme que le quadrilatère en bleu est un parallélogramme, ce qui n'est pas de l'avis des autres.
En utilisant tes connaissances sur les nombres complexes, dis si cet élève a raison.



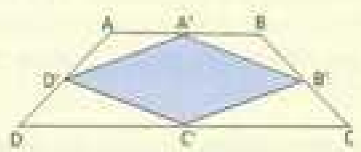
## Coup de Pouce

**53** Utiliser le tableau ci-contre :

| × | 1 | j | $j^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| j | | | |
| $j^2$ | | | |

**54** $\frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

**55** Nomme les points de la figure exemple

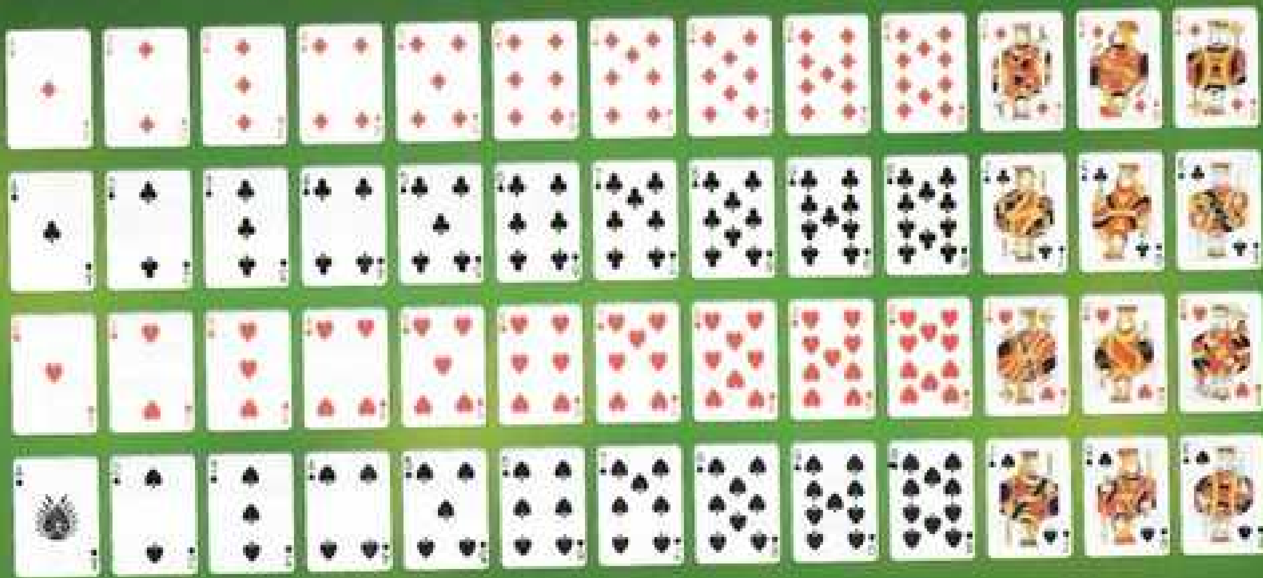



Choisis $a$, $b$, $c$ et $d$ les affixes respectives de A, B, C et D.
Détermine les affixe de A', B', C' et D' en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

Leçon

10

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET VARIABLES ALÉATOIRES



1. Quelle est la probabilité de tirer un cœur ?
2. On tire un cœur. Quelle est la probabilité que ce soit la Dame ?
3. On tire un roi. Quelle est la probabilité que ce soit un trèfle ?

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les festivités de fin d'année scolaire d'une école, une filiale de la loterie nationale, sponsor de l'évènement, propose un jeu aux élèves. Le jeu est dénommé « Roue de la loterie ».

La roue se compose de douze (12) secteurs : trois rouges, quatre blancs et cinq verts.

« On fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 1500 F, s'il est blanc il perd 1000 F, s'il est vert, il lance une seconde fois la roue. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 800 F, s'il est blanc il perd 250 F et s'il est vert, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.

Sachant que le joueur mise 1000 F avant de tourner la roue, les élèves d'une classe de Terminale veulent y jouer. L'un d'eux les en dissuade car il estime que le jeu n'est pas profitable à un joueur. Pour ne pas être perdant, ces élèves souhaitent déterminer le gain algébrique d'un joueur à l'issue d'une partie.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Probabilités conditionnelles

*Connaître :*
- la définition la définition d'une probabilité conditionnelle
- la formule des probabilités totales

*Noter :*
- une probabilité conditionnelle : P(A/B) ou $P_B(A)$

*Calculer :*
- la probabilité d'un événement
- la probabilité d'un événement en utilisant la formule des probabilités totales

*Justifier :*
- que deux événements sont indépendants ou non

*Construire :*
- un arbre pondéré

### 2 Variable aléatoire

*Connaître :*
- la définition d'une variable aléatoire
- la définition d'une fonction de répartition
- la définition d'une loi de probabilité
- la définition de l'espérance mathématique de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire

*Calculer :*
- l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire donnée

*Déterminer :*
- la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée
- la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée

*Construire :*
- la fonction de répartition d'une variable aléatoire donnée

### 3 Loi Binomiale

*Connaître :*
- la définition d'une épreuve de Bernoulli
- la définition d'un schéma de Bernoulli
- la définition de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$
- la propriété relative à l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$
- la propriété relative à la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$

*Calculer :*
- la probabilité d'obtenir $k$ succès dans une suite de $n$ épreuves de Bernoulli ($0 \leq k \leq n$)

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Probabilités conditionnelles

#### 1.1. Définition d'une probabilité conditionnelle

Dans une classe de Terminale D de 52 élèves, 22 élèves ont 17 ans, 45 élèves sont des garçons et 09 garçons ont 17 ans. On choisit au hasard un élève dans cette classe.
Soit : A : « L'élève a 17 ans », B : « L'élève est un garçon ».

1. Justifie que $P(A)=\frac{22}{52}$ , $P(B) = \frac{45}{52}$.
2. Définis l'événement $A \cap B$ et justifie que $P(A \cap B) = \frac{9}{52}$.
3. Justifie que, si on sait que l'élève est un garçon, la probabilité qu'il ait 17 ans est $P' = \frac{1}{5}$.
4. Justifie que : $P' = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

**Synthèse**

Le nombre $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ s'appelle la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B.
Elle se note P(A/B) ou $P_B(A)$.

## Exercices de fixation

**1.1.1** Soit H et F deux évènements d'un univers $\Omega$ de probabilités non nulles. Réponds par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations suivantes :

1. La probabilité conditionnelle de H sachant F se note $P_H(F)$.
2. La probabilité conditionnelle de F sachant H est $\frac{P(H \cap F)}{P(H)}$.
3. La probabilité conditionnelle de F sachant H égale 0.

**1.1.2** Dans une ville, la probabilité d'avoir un véhicule au panneau stop est de $\frac{1}{3}$ et la probabilité d'être un homme et d'avoir un véhicule au panneau stop est de $\frac{2}{27}$.

Calcule la probabilité d'être un homme sachant qu'on a eu un véhicule au panneau stop.

**1.1.3** Soit E et F deux évènements d'un univers $\Omega$ de probabilités non nulles.

1. Calcule la probabilité conditionnelle $P_E(E)$.
2. Supposons que $E \subset F$.
Calcule la probabilité conditionnelle $P_F(E)$ de E sachant F.

### 1.2. Évènements indépendants

On considère un jeu de 32 cartes. Dans un jeu de 32 cartes, on a quatre couleurs : trèfle, carreau, cœur, pique. Chaque couleur est composée de huit cartes : 10 ; 9 ; 7 ; as et trois figures qui sont : valet, dame et roi. On tire au hasard une carte.

Soient les évènements : A : « La carte tirée est une Dame » et B : « La carte tirée est un cœur ».

Soit $\Omega$ l'univers associé à cette expérience aléatoire et P la probabilité sur $\Omega$.

1. Détermine $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Calcule $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
3. Compare $P(A)$ et $P_B(A)$ puis $P(B)$ et $P_A(B)$.
4. Compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.
5. Compare $P(\overline{A})$ et $P_B(\overline{A})$ puis $P(\overline{B})$ et $P_A(\overline{B})$.
6. Compare $P(\overline{A})$ et $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

**Synthèse**

- On dit que les évènements A et B sont indépendants.
On a : $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$ ; $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B}) = P(\overline{B})$ ; $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = P(\overline{A})$.

## Exercices de fixation

**1.2.1** Soit une famille de deux enfants.
On considère les évènements suivants :
A : "La famille a des enfants des 2 sexes ",
B : "La famille a, au plus, une fille" .
A et B sont-ils indépendants ?

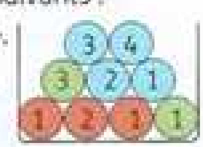
**1.2.2** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements :
A : "Obtenir une figure (valet, dame ou roi)"
B : "Obtenir un carreau".
Justifie que A et B sont indépendants.

**1.2.3** On lance un dé à 6 faces et on note A l'événement "Obtenir un nombre pair", et B l'événement "Obtenir un multiple de 3". Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

**1.2.4** On lance deux dés, un rouge et un vert, et on note A l'événement " La somme des numéros fait 6 " et B l'événement "Sur le dé rouge, on obtient un nombre pair ".
Les deux événements sont-ils indépendants ?

**1.2.5** Dans l'urne ci-dessous, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs. On tire au hasard un jeton dans cette urne. On considère les évènements suivants :

R : « Le jeton tiré est rouge ».
B : « Le jeton tiré est bleu ».




I : « Le numéro du jeton tiré est impair ».
1. Les évènements R et I sont-ils indépendants ?
2. Les évènements B et I sont-ils indépendants ?

**1.2.6** Un club de Karaté de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont le Judo et le Taekwondo. Douze membres s'inscrivent pour Judo, trente-deux pour le Taekwondo et quatre pour les deux. On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note J et T les événements :
J « L'adhérent est inscrit pour le Judo » ;
T « L'adhérent est inscrit pour le Taekwondo ».
Les événements J et T sont-ils indépendants ?
En est-il de même pour J et $\overline{T}$ ?

### 1.3. Arbre de probabilité ou pondéré

On considère une urne contenant 8 boules indiscernables au toucher : une rouge, trois jaunes et quatre vertes.
On tire une boule au hasard. On considère les évènements :
R : « obtenir une boule rouge » ; J : « obtenir une boule jaune » et V : « obtenir une boule verte ».
1. Calcule les probabilités des événements R ; J et V.
2. Fais un arbre de choix et écris les probabilités obtenues à la question 1) sur les branches de l'arbre. Fais la somme des probabilités des trois branches issues de l'origine.
3. On tire encore une boule au hasard sans remise de la première boule tirée dans l'urne.
 a) Calcule les probabilités des évènements R ; J et V en tenant compte de la boule déjà tirée.
 b) Complète l'arbre de choix puis les probabilités obtenues à la question 3-a) sur les branches de l'arbre.
4. Fais la somme des probabilités des trois branches issues de R ; issue de J ; issue de V.

**Synthèse**

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité inscrite sur une branche entre deux événements A et B est la probabilité conditionnelle de B sachant A.

$$A \xrightarrow{\;p_A(B)\;} B$$

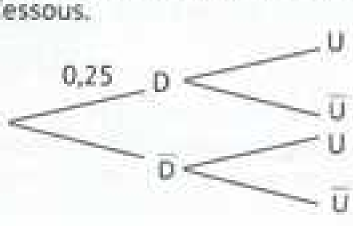
- Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un chemin.
Au bout d'un chemin se trouve un évènement, qui correspond à l'intersection des évènements rencontrés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

$$\bullet \xrightarrow{\;p(A)\;} A \xrightarrow{\;p_A(B)\;} B$$

Ainsi la probabilité de l'événement $A \cap B$ est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

## Exercices de fixation

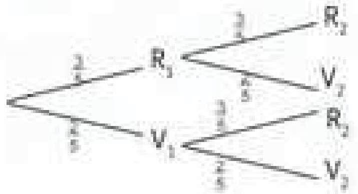
**1.3.1** La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés. Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production africaine et les autres. On choisit au hasard un de ces DVD. On considère les évènements :
D : « Le DVD est une dotation » et
U : « Le DVD est une production africaine ».
Sachant que $P(U/\overline{D}) = 0{,}8$ et $P(U/D) = 0{,}75$.
Recopie et complète l'arbre pondéré ci-dessous.




**1.3.2** On considère une urne contenant 3 jetons rouges et 2 jetons bleus. Tous sont indiscernables au toucher. Une expérience aléatoire consiste à tirer successivement et sans remise deux jetons. Représente cette expérience par un arbre pondéré.

**1.3.3** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
On tire successivement deux boules avec remise de l'urne. Soit :
$R_1$ : l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
$R_2$ : l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;

$V_1$ : l'événement : « La première boule tirée est verte » ; et $V_2$ : l'événement : « La deuxième boule tirée est verte ».
On a alors l'arbre pondéré suivant :



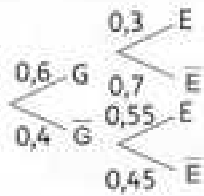

1. Donne : $P(R_1)$ ; $P(R_2/V_1)$ ; $P(R_2/R_1)$ ; $P(V_2/R_1)$.
2. Calcule : $P(R_1 \cap V_2)$ ; $P(V_1 \cap V_2)$.

**134** Un sondage a été effectué auprès des médecins après un mois de pandémie COVID19.
- 85% des patients ont été atteints de COVID19 dont 36% en sont décédés.
- 30% de ceux qui n'ont pas été atteints de COVID19 sont décédés.

On souhaite faire des prélèvements pour des analyses et on choisit au hasard le dossier d'un patient.
Considérons les évènements C : « Le patient est atteint de COVID19 » et D : « Le patient est décédé ».
Établis deux arbres pondérés (différents) de cette expérience.

### 1.4. Formule des probabilités totales

L'arbre de probabilité ci-contre représente une situation de probabilité dans un univers $\Omega$.
1. Donne $P(G \cap E)$ et $P(\overline{G} \cap E)$.
2. Sachant que $G$ et $\overline{G}$ forment une partition de $\Omega$, détermine $P(E)$.




**Synthèse**

Soient $A_1$ et $A_2$ deux évènements formants une partition de $\Omega$. Pour tout évènement B de $\Omega$, on a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$.

## Exercices de fixation

**141** Soient A, B, C et D des évènements d'un univers $\Omega$ tels que A, B et C forment une partition de $\Omega$.
Écris chaque numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| | | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $A \cap B$ | $\Omega$ | $\emptyset$ | C |
| 2 | $A \cap C$ | B | $\Omega$ | $\emptyset$ |
| 3 | $C \cap B$ | $\emptyset$ | A | $\Omega$ |
| 4 | $A \cup B \cup C$ | $\emptyset$ | $\Omega$ | D |
| 5 | $P(D)$ | $P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(B \cap C)$ | $P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)$ | $P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$ |
| 6 | $P(A \cup B)$ | $P(A) + P(B)$ | $P(A) - P(B)$ | $P(A) \times P(B)$ |

**142** Soient A et B deux évènements.
On sait que $P(A) = 0,4$ ; $P_A(\overline{B}) = 0,7$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,9$. Calcule $P(B)$.

**143** Une compagnie d'assurances a deux catégories de clients : les jeunes conducteurs qui ont une probabilité d'accident de 40% (sur 5 ans), les autres, dont la probabilité d'accident est 20%.
Les jeunes conducteurs représentent 30% de la clientèle de la compagnie.
Détermine la probabilité d'avoir un accident pour un client quelconque.

**144** On dispose de 3 urnes $U_1$, $U_2$, $U_3$. Chacune contient 10 boules ; parmi elles, $U_1$ contient 1 blanche, $U_2$ contient 2 blanches, et $U_3$ contient 6 blanches. On tire au hasard une boule.
Détermine la probabilité d'obtenir une blanche.

## Activité 2 Variable aléatoire

### 2.1. Variable aléatoire et loi de probabilité

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Pour chaque lancer, le joueur gagne 100 F s'il obtient « pile » mais perd 50 F s'il obtient « face ».
Alidou, après avoir pris connaissance des règles, joue à une partie de trois lancers.

1. En notant P pour pile et F pour face, fais un arbre de choix et écris en extension l'univers $\Omega$ des possibles.
2. Détermine les gains possibles d'Alidou.
3. Pour chaque éventualité $\omega$ de $\Omega$, on note $X(\omega)$ le gain algébrique d'Alidou associé à $\omega$.
   a) Détermine les éventualités $\omega$ pour lesquelles, $X(\omega) = 150$.
   L'ensemble de ces éventualités est noté : $(X = 150)$.
   b) Calcule : $P(X = 150)$.
   c) Détermine pour chaque valeur de $k$ prise par X, la probabilité $P(X = k)$.

**Synthèse**

Une variable aléatoire X est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.
La loi de probabilité de X, et l'application qui à chaque valeur $x_i$ prise par X associent la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

### Exercices de fixation

**2.1.1** Soit X une variable aléatoire sur un univers $\Omega$, $x_1, x_2 ..., x_n$ les valeurs prises par X.
Réponds par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations suivantes :

1. L'ensemble des valeurs prises par X est $\Omega(X)$.
2. Une variable aléatoire X est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.
3. Une loi de probabilité de X est une application de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'évènement $(X = a)$ est constitué de tous les résultats pour lesquels la variable aléatoire X prend la valeur $a$.
5. $(X< a)$ désigne l'évènement : « X prend une valeur strictement supérieure à $a$ ».
6. $P(X = x_1)+ P(X = x_2) + ...... + P(X = x_n)= \frac{1}{x_i}$.

**2.1.2** À chaque début d'année scolaire, un établissement propose au major de l'année précédente de choisir sa future classe parmi les classes qu'on lui propose ; voici le récapitulatif du volume horaire des différentes classes proposées :

| Volume horaire de la classe | 19 | 23 | 25 | 28 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de classes correspondant au volume horaire | 3 | 8 | 2 | 5 | 1 |

Le major de l'année scolaire 2020-2021 choisi au hasard un emploi du temps.
On note X la variable aléatoire égale au volume horaire de la classe.

1. Donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
2. Établis la loi de probabilité de X.

**2.1.3** Soit Y la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

| $y_i$ | -100 | 0 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | 0,30 | 0,15 | | 0,20 | 0,10 |

Recopie et complète le tableau ci-dessus.

### 2.2. Fonction de répartition

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |

1. Écris chacun des évènements suivants comme la réunion de plusieurs évènements $(X \leq 0)$ ; $(X \leq 1)$ ; $(X \leq 2)$ ; $(X \leq 3)$.
2. Calcule la probabilité des évènements ci-dessus.
3. Représente dans un repère orthogonal (O, I, J) ; la courbe de la fonction de la fonction $F : x \mapsto P(X \leq x)$.

**Synthèse**

- On appelle fonction de répartition de X, l'application F de $\mathbb{R}$ vers [0;1] définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.
- C'est une fonction en escalier, constante par intervalles et croissante sur $\mathbb{R}$.
- La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique dans le cas d'une variable discrète.

**Exercices de fixation**

**2.2.1** Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,25 | 0,1 | 0,25 | 0,2 |

1. Définis la fonction de répartition F.
2. Représente graphiquement F.

**2.2.2** Le graphique ci-après est la représentation de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire Z.
1. Définis la fonction de répartition F de Z.
2. Détermine la loi de probabilité de Z.

### 2.3. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 1600 F, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse 100 fois le carré du nombre obtenu. On veut savoir si ce jeu est avantageux pour le joueur.

Désignons par X le gain, en Francs, du joueur pour une partie.

1. Définis l'univers $\Omega$ et $X(\Omega)$.
2. Établis la loi de probabilité de X.
3. Calcule le nombre réel $x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots x_6P_6$.

**Synthèse**

L'espérance mathématique de X est le nombre réel $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ où les $x_i$ sont des nombres réels et $p_i$ les probabilités.

**Exercices de fixation**

**2.3.1** Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |
| $x_i P(X = x_i)$ | | | | | |

1. Complète le tableau ci-dessus.
2. Calcule l'espérance mathématique E(X).

**2.3.2** On donne le tableau ci-dessous, dans lequel on a la loi de probabilité d'une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire.

| $x_i$ | -2 | 0 | 1 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{5}{16}$ |

Calcule l'espérance mathématique de X.

**2.3.3** On considère une variable aléatoire Y qui compte le gain (en F CFA) d'un joueur qui participe à un jeu de hasard. Voici la loi de probabilité de Y :

| $y_i$ | -500 | -300 | 200 | 800 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | 0,25 | 0,51 | 0,1 | 0,14 |

1. Calcule E(Y).
2. Interprète ce résultat.

### 2.4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | −2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

1. Calcule l'espérance mathématique E(X).
2. a) Calcule le nombre $V_1(X) = (x_1 - E(X))^2P_1 + (x_2 - E(X))^2P_2 + (x_3 - E(X))^2P_3 + (x_4 - E(X))^2P_4$.
   b) Calcule le nombre $V_2(x) = (P_1x_1^2 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4) - ((E(x))^2$.
   c) Compare $V_1$ et $V_2$.
3. Déduis-en le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

**Synthèse**

On appelle variance de X, le nombre réel positif noté V(X) défini par :

$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$.

Autrement $V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

On appelle **écart-type** de X, le nombre réel positif noté σ(X) défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

## Exercices de fixation

**2.4.1** Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

| $x_i$ | -3 | 0 | 2 | 3 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

Calcule la variance et l'écart-type de X.

**2.4.2** L'espérance d'une variable aléatoire Y est 24 et celle de $Y^2$ est 601.

1. Calcule la variance de la variable aléatoire Y.
2. Déduis-en son écart-type.

## Activité 3 Loi binomiale

### 3.1. Épreuve et schéma de Bernoulli

1. On lance une fois une pièce de monnaie équilibrée. Détermine le nombre de résultats possibles.
2. On lance 5 fois de suite cette même pièce de monnaie.
   a) Combien de résultats possibles avons-nous ?
   b) Décris cette expérience en tenant compte de la première expérience.

**Synthèse**

On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une appelée « succès » et l'autre « échec ».
On appelle **schéma de Bernoulli** une suite de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Le nombre $n$ d'épreuves et la probabilité $p$ du succès sont appelés **paramètre**s du schéma de Bernoulli.

## Exercices de fixation

**3.1.1** Pour chacune des épreuves suivantes, indique s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.
   - On vérifie que la carte est un as.
   - On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet).
   - On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau ou trèfle).
   - On regarde si la carte n'est pas un pique.
   - On vérifie que la carte est un pique.
   - On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.).
2. Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées.
   - On regarde si le véhicule est électrique.
   - On regarde la couleur du véhicule.
   - On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z.
   - On regarde la longueur du véhicule en centimètre.
   - On regarde si la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres.

**3.1.2** On considère une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5.
Définis deux expériences qui sont des épreuves de Bernoulli, puis deux autres qui n'en sont pas.

**3.1.3** Pour chacun des événements ci dessous, précise si un schéma de Bernoulli peut modéliser l'expérience.
On effectue dix tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant trois boules rouges, quatre boules noires et une boule verte, toutes indiscernables au toucher.
On regarde la couleur des boules tirées.
- La première boule tirée est verte.
- On a obtenu exactement trois boules noires.
- La cinquième boule tirée est rouge.
- C'est au cinquième tirage qu'on a tiré une boule noire pour la première fois.
- On a obtenu au plus cinq boules rouges.

**3.1.4** Pour chaque cas ci-dessous, justifie que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et sa probabilité.

**Cas 1 :** Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table.
Jennifer retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte (et seulement une) représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier.

**Cas 2 :** Dans un jeu télévisé, un candidat doit piocher au hasard une boule dans une urne contenant 20 boules indiscernables au toucher dont une seule est noire. Le candidat perd s'il pioche la boule noire.

**Cas 3 :** Gérard possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher.
Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.

### 3.2. Loi binomiale

Soit une suite finie de $n$ expériences aléatoires identiques 1, 2, ..., $n$, indépendantes deux à deux ayant chacune deux issues possibles : un évènement A se réalise ( succès ) ou ne se réalise pas (échec ).
Notons p la probabilité de l'évènement A.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement $\overline{A}$.
2. $A_k$ l'événement "A se réalise exactement $k$ fois durant les $n$ expériences".
   a) Justifie qu'il y a $C_n^k$ façons de placer les $k$ évènements A parmi les $n$ expériences aléatoires.
   b) Puisque les expériences sont indépendantes, quelle est la probabilité de l'une de ses façons ?
   c) Justifie que la probabilité de $A_k$ est $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
   d) Sachant que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, démontre que $E(X) = np$.

**Synthèse**

Dans un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves, lorsque la probabilité de succès d'une épreuve est $p$ la probabilité d'obtenir exactement $k$ succès au cours des $n$ épreuves est :
$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
La variable aléatoire égale au nombre de succès est appelée loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Aussi, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

## Exercices de fixation

**3-2-1** On donne les expériences ci-dessous. Justifie que la variable X suit une loi binomiale et détermine ses paramètres.

**Exp 1 :** On jette un dé équilibré 10 fois de suite et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de réalisations de l'événement A : "Obtenir 5 ou 6".

**Exp 2 :** Un QCM est composé de 5 questions et chacune d'elle comporte 3 réponses au choix A, B ou C dont une seule est correcte. Poka décide de répondre au hasard à toutes les questions.
On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses de Poka.

**Exp 3 :** Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur sont conformes. On suppose que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à 0,9. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

**3-2-2** Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}32$.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.
3. Calcule l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

**3-2-3** On lance 10 fois un dé bien équilibré.
Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le chiffre 1 au cours des 10 lancers ?

**3-2-4** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}15$.
Calcule $P(X = 16)$, $P(X \leq 16)$ et $P(X > 16)$.

# APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

## Exercice 1 Calculer des probabilités conditionnelles

Au Lycée de Garçons de Bingerville, on repartit les élèves candidats au baccalauréat série A2 en trois langues vivantes 1 (LV1) : Anglais, Allemand et Espagnol. Nous savons de plus que :
- 37% des candidats ont choisi l'anglais ;
- 25% des candidats ont choisi l'espagnol ;
- 21% des candidats ont choisi l'anglais et ont obtenu le baccalauréat ;
- 32,5% des candidats ont choisi l'allemand et ont obtenu le baccalauréat ;
- De plus, parmi les candidats ayant choisi l'espagnol, 72,5% ont obtenu le baccalauréat.

On interroge un candidat pris au hasard. On note :
A l'événement « Le candidat a choisi l'anglais » ;
D l'événement « Le candidat a choisi l'allemand » ;
E l'événement « Le candidat a choisi l'espagnol » ;
B l'événement « Le candidat a obtenu le baccalauréat ».

1. Traduis en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.
2. a) Justifie que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'allemand est 0,38.
   b) Justifie que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait obtenu le baccalauréat est 0,181.
3. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait échoué au baccalauréat ?
4. Supposons que le candidat a choisi l'anglais. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5. Justifie que le taux de réussite au baccalauréat pour les candidats de la série $A_2$ du Lycée Garçons de Bingerville est 71,6%.

**Corrigé**

1. Traduction en probabilités :
37% des candidats ont choisi l'anglais c'est-à-dire 37 personnes sur 100 interrogées d'où $P(A) = 0{,}37$ ;
25% des candidats ont choisi l'espagnol c'est-à-dire 25 personnes sur 100 d'où $P(E) = 0{,}25$ ;

**Méthode**

$P(E \cap B) = P_E(B) \times P(E)$

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(D \cap B) + P(E \cap B)$

21% des candidats ont choisi l'anglais et ont obtenu le baccalauréat d'où $P(A \cap B) = 0,21$ ;
32,5% des candidats ont choisi l'allemand et ont obtenu le baccalauréat d'où $P(D \cap B) = 0,325$.
Parmi les candidats ayant choisi l'espagnol, 72,5% ont obtenu le baccalauréat d'où $P_E(B) = 0,725$.

2. a) Justifions que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'allemand est 0,38.

$P(A) + P(D) + P(E) = 1$ donc

$P(D) = 1 - [P(A) + P(E)] = 1 - 0,62 = 0,38$.

b) Justifions que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait obtenu le baccalauréat est 0,181.

L'évènement : « Le candidat a choisi l'espagnol et a obtenu le baccalauréat » est l'intersection des évènements E et B. On sait que :

$P_E(B) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(E)}$

donc $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B)$.

Ainsi $P(E) = 0,25 \times 0,725 = 0,181$.

3. Calculons la probabilité pour que ce candidat ait à choisir l'espagnol et à échouer au baccalauréat.

L'évènement : « Le candidat a choisi l'espagnol et a échoué le baccalauréat » est l'intersection des évènements E et $\overline{B}$.

Ainsi : $P(E \cap \overline{B}) = P(E) \times P_E(\overline{B}) = P(E) \times (1 - P_E(B))$
$= 0,25 \times (1 - 0,725) = 0,069$.

4. Calculons la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat sachant qu'il a choisi l'anglais.

On sait que $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ et $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et

donc : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{0,27}{0,37} = 0,432$.

5. Justifions que le taux de réussite au baccalauréat pour les candidats de la série $A_2$ du lycée garçons de Bingerville est 71,6%.

Les évènements A, D et E forment une partition $\Omega$ donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P(D \cap B) + P(E \cap B)$

$P(B) = 0,181 + 0,325 + 0,21 = 0,716$.

## Exercice 2 Déterminer et construire une fonction de répartition

Un ranch possède 17 chevaux (5 blancs , 4 noirs et 8 gris) et une calèche. Le cochet choisit au hasard pour une journée de travail les 2 chevaux de l'attelage parmi ces 17 chevaux.

1. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « Les 2 chevaux sont gris ».
   B : « L'un des chevaux au moins est gris ».
   C : « Les 2 chevaux ont la même couleur ».

2. Pour des raisons climatiques, la durée de travail quotidien d'un cheval est 2 heures s'il est noir, 1 heure s'il est blanc et 3 heures s'il est gris et le cochet arrête l'attelage lorsque au moins l'un des 2 chevaux atteint sa durée de travail.

On désigne par X la durée de travail quotidien des 2 chevaux choisis.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule la durée moyenne de travail quotidien des 2 chevaux.
   c) Détermine et construis la fonction de répartition de X.

**Corrigé**

Soit U l'univers associé à cette expérience aléatoire. Le choix des deux chevaux au hasard de ce ranch correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 17.

*card* $(U) = C_{17}^{2} = 136$.

Le choix étant fait au hasard, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Calcul de probabilité

• A : « Les 2 chevaux sont gris »

Les deux chevaux étant gris alors on choisit les deux chevaux parmi 8 chevaux gris.

$card(A) = C_8^2 = 28$

Ainsi $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(U)} = \dfrac{28}{136} = \dfrac{7}{34}$.

• B : « L'un des chevaux au moins est gris ».

L'un des deux chevaux au moins étant gris alors on choisit soit exactement un cheval parmi les chevaux gris et un cheval parmi les 9 autres chevaux soit deux chevaux parmi 8 chevaux gris.

$card(B) = C_8^1 \times C_9^1 + C_8^2 = 100$.

**Méthode**

• La durée moyenne de travail E(X).

• Utiliser la loi de probabilité pour définir et construire la fonction de répétition.

Ainsi $P(B) = \frac{card(B)}{card(U)} = \frac{100}{136} = \frac{25}{34}$

• C : « Les 2 chevaux ont la même couleur »

Choisir deux chevaux de même couleur revient à choisir deux chevaux parmi les chevaux blancs ou deux chevaux parmi les chevaux noirs ou deux chevaux parmi les chevaux gris.

$card(C) = C_5^2 + C_4^2 + C_8^2 = 44.$

Ainsi $P(C) = \frac{card(C)}{card(U)} = \frac{44}{136} = \frac{11}{34}$

2. Soit X la variable aléatoire donnant la durée de travail quotidien des 2 chevaux choisis.

a) Loi de probabilité de X : $X \in \{1 ; 2 ; 3\}$

• X = 1 si l'un au moins des deux chevaux est blanc

donc $P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_{12}^1 + C_5^2}{C_{17}^2} = \frac{70}{136}$.

• X = 2 si l'un des deux chevaux est noir et l'autre gris ou les deux sont noirs donc

$P(X = 2) = \frac{C_4^1 \times C_8^1 + C_4^2}{C_{17}^2} = \frac{38}{136}$.

• X = 3 si les deux chevaux sont gris

donc $P(X = 3) = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = \frac{28}{136}$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{70}{136}$ | $\frac{38}{136}$ | $\frac{28}{136}$ | 1 |

b) La durée moyenne de travail quotidien

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) +$
$3 \times P(X = 3) = 1,70.$

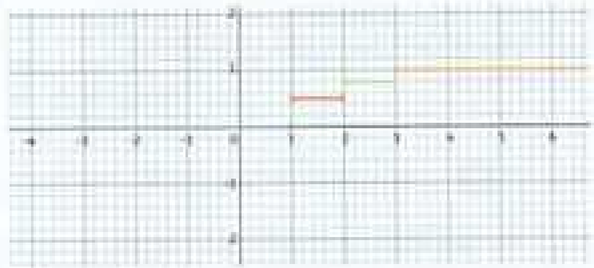
La durée moyenne de travail quotidien est 1h42min.

c) Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition de X

$$\begin{cases} x < 1, F(x) = 0 \\ 1 \leq x < 2, F(x) = P(X = 1) = \frac{70}{136} \\ 2 \leq x < 3, F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{108}{136} \\ 3 \leq x, F(x) = 1 \end{cases}$$

Construction de F



## Exercice 3 Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une loterie comporte 20 billets, parmi eux il y a 1 billet gagnant 100 F ; 2 billets gagnant 50 F ; 3 billets gagnant 20 F, les autres billets ne gagnent rien. Abi achète 2 billets. La probabilité de chacun des 20 billets de sortir au tirage est la même.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme obtenue par Abi.

1. Détermine toutes les valeurs prises par X.
2. Détermine la loi de probabilité de X.
3. Calcule la probabilité pour que Abi gagne :
   a) au moins 100 F.
   b) une somme comprise entre 50 F et 120 F.

**Corrigé**

Soit $\Omega$ l'univers associé à cette expérience aléatoire. L'achat des deux billets de loterie correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 20.

$card(\Omega) = C_{20}^2$

Le choix étant fait au hasard donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Déterminons les valeurs prises par X.

Les éventualités de $\Omega$ sont :
(100 ; 50) ; (100 ; 20), (100 ; 0), (50 ; 50) (50 ; 20), (50 ; 0) , (20 ; 20) (20 ; 0) et (0 ; 0).

**Méthode**

X est la somme des gains possibles.
Gagner au moins 100 f c'est calculer.
$P(X \geq 100) = P(X = 100) + P(X = 120) + P(P(X = 150)$.

Les valeurs pises par :

$X(\Omega) = \{0 ; 20 ; 40 ; 50 ; 70 ; 100 ; 120 ; 150\}$.

2. Loi de probabilité

• X = 0 lorsque Abi achète deux billets sans valeur donc $card(X = 0) = C_{14}^2$ et on a :

$P(X = 0) = \dfrac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{91}{190}$ ;

X = 20 lorsque Abi achète un billet sans valeur et un billet de 20F donc card(X = 20) = $C_{14}^{1} \times C_{3}^{1}$ et $P(X = 20) = \dfrac{\text{card}(X = 20)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{42}{190}$ ;

• X = 40 lorsque Abi achète deux billets gagnants 20 F donc card(X = 40) = $C_{3}^{2}$ et :

$P(X = 40) = \dfrac{\text{card}(X = 40)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{190}$ ;

• X = 50 lorsque Abi achète un billet sans valeur et un billet gagnant 50F donc card(X = 50) = $C_{14}^{1} \times C_{2}^{1}$ et $P(X = 50) = \dfrac{\text{card}(X = 50)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{28}{190}$ ;

• X = 70 lorsque Abi achète un billet gagnant 50F et un billet gagnant 20F donc card(X = 70) = $C_{2}^{1} \times C_{3}^{1}$ et $P(X = 70) = \dfrac{\text{card}(X = 70)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{6}{190}$ ;

• X = 100 lorsque Abi achète soit un billet sans valeur et un billet gagnant 100F soit deux billets gagnant 50F donc card(X = 100) = $C_{14}^{1} \times C_{1}^{1} + C_{2}^{2}$ et

$P(X = 100) = \dfrac{\text{card}(X = 100)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{15}{190}$ ;

• X = 120 lorsque Abi achète un billet gagnant 100F et un billet de 20 F donc card(X = 120) = $C_{1}^{1} \times C_{3}^{1}$ et $P(X = 120) = \dfrac{\text{card}(X = 120)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{190}$ ;

• X = 150 lorsque Abi achète un billet gagnant 100 F et un billet gagnant 50F donc card(X = 150) = $C_{1}^{1} \times C_{2}^{1}$ et $P(X = 150) = (\dfrac{\text{card}(X = 150)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{190}$ ;

Ainsi, on a :

| $x$ | 0 | 20 | 40 | 50 | 70 | 100 | 120 | 150 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{91}{190}$ | $\frac{42}{190}$ | $\frac{3}{190}$ | $\frac{28}{190}$ | $\frac{6}{190}$ | $\frac{15}{190}$ | $\frac{3}{190}$ | $\frac{2}{190}$ | 1 |

3. Probabilités pour que Abi gagne :
   a) Au moins 100 F.

Abi gagne au moins 100F signifie qu'il peut gagner soit 100 F, soit 120 F soit 150 F.

$P(X \geq 100) = P(X = 100) + P(X = 120) + P(X = 150)$

$P(X \geq 100) = \dfrac{15}{190} + \dfrac{3}{190} + \dfrac{2}{190} = \dfrac{20}{190} = \dfrac{2}{19}$.

b)Une somme comprise entre 50 F et 120 F.

Abi gagne une somme comprise entre 50F et 120 F s'il gagne soit 50 F, soit 70 F, soit 100, soit 120 F.

$P(50 \leq X \leq 120) = P(X = 50) + P(X = 70) + P(X =100) + P(X = 120)$

$P(50 \leq X \leq 100) = \dfrac{28}{190} + \dfrac{6}{190} + \dfrac{15}{190} + \dfrac{3}{190} = \dfrac{52}{190}$

## Exercice 4 Justifie qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale

Sur une route deux carrefours sont munis de deux feux tricolores $F_1$ et $F_2$. On supposera que ces deux feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur est un pur hasard. On admet que la probabilité pour que le feu $F_1$ soit vert est $\dfrac{3}{4}$ et la probabilité pour le feu $F_2$ soit vert est $\dfrac{1}{2}$.

Les deux feux $F_1$ et $F_2$ fonctionnent de manière indépendante.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.
   a) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.
   b) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre au moins un feu vert.
2. Un automobiliste passe 5 fois au carrefour muni du feu $F_1$. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.
   a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
   b) Calcule la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.
   c) Calcule l'espérance mathématique et donne une interprétation du résultat.
   d) Calcule la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

**Corrigé**

1. a) Calculons la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.

Soit A l'évènement : « L'automobiliste rencontre feu vert au feu $F_1$ » et B l'évènement : « L'automobiliste rencontre feu vert au feu $F_2$ ».

**Méthode**

1. Utiliser les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Utiliser la loi Binomiale de paramètres 5 et $p = \dfrac{3}{4}$.

L'évènement : « L'automobiliste rencontre deux feux verts » est l'intersection des évènements A et B. Comme les évènements A et B sont indépendants, on a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

b) Soit l'évènement C : « L'automobiliste rencontre au moins un feu vert » et $\overline{C}$ son évènement contraire. On a donc : $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Puisque A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants. Par conséquent :

$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

2. a) Lorsque L'automobiliste se présente au feu $F_1$, il rencontre le feu vert ou non. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli et puisqu'elle est répétée 5 fois de façon indépendante, nous avons un schéma de Bernoulli. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$.

b) Calculons la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert :

X suit une loi binomiale donc la loi de probabilité de X est : $P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$.

Pour $k = 3$, on a : $P(X = 3)$

$= C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{5-3} = \frac{135}{512}$.

c) Calculons l'espérance mathématique E(X) :
X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$ donc $E(X) = np$.

$E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = 3{,}75 \approx 4$

E(X) = 4 donc l'automobiliste peut espérer rencontrer le feu vert $F_1$ quatre fois en 5 passages.

d) Calculons la variance V(X) :

$V(X) = np(1 - p) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

e) Calculons l'écart-type (X) :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{15}{16}} = 0{,}968$.

## Exercice 5 Traiter une situation complexe

Une pandémie a été détectée dans une ville. Les autorités sanitaires disent qu'elle touche 5 personnes sur 100. Ton père, Monsieur SIDIBE, responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage qui selon lui :
- Si une personne est malade, le test est positif à 98%.
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Toutefois, avant d'autoriser la commercialisation de ce test, Monsieur Sidibé doit présenter les chiffres de son test au ministère : la rencontre a lieu demain à 8H00.
Pour que le test de votre père ne soit pas refoulé au cours de la réunion, il faut qu'une personne testée positive, soit malade à plus de 60%. Vous décidez de calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.
Votre père doit-il présenter son test aux autorités sanitaires ?

**Corrigé**

Soit les évènements :
M : « La personne est malade » et
T : « Le test est positif ».
Pour répondre à la question. Nous allons :
- utiliser la formule des probabilités totales ;
- calculer P(T) et $P_T(M)$ ;
- comparer le résultat de $P_T(M)$ à 60% ;
- puis conclure.

On a : $P(M) = \frac{5}{100} = 0{,}05$

donc $P(\overline{M}) = \frac{95}{100} = 0{,}95$.

Aussi $P_M(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$.

On veut calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

On sait que $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ et

$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$ d'où $P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)}$.

**Méthode**

Utiliser un arbre de choix pour faire les calculs.

D'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$

Par conséquent :

$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)}$

$P_T(M) = \frac{0{,}05 \times 0{,}98}{0{,}05 \times 0{,}98 + 0{,}95 \times 0{,}001}$

$= \frac{0{,}049}{0{,}049 + 0{,}00095} = 0{,}98098$.

Il y a donc 98% de chances qu'une personne positive soit malade. Mon père peut présenter son test aux autorités sanitaires.

## Résumé de cours

# 1 Probabilités conditionnelles

### 1.1. Définition d'une probabilité conditionnelle

**Définition** Soit $\Omega$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Soient A et B deux évènements de $\Omega$, tels que $P(B) \neq 0$.
On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $P_B(A)$ ou encore $P(A/B)$, par la relation $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Cette probabilité est appelée la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou plus simplement la probabilité de A sachant B.

__Conséquence :__

Pour deux évènements A et B de $\Omega$ de probabilités non nulles, on a :

| | |
|---|---|
| $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ | $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (On sait que $A \cap B = B \cap A$) |
| $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$<br>$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ | $P_B(B) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ |

### 1.2. Évènements indépendants

**Définition** Soient A et B deux évènements d'un même univers $\Omega$ et P une probabilité sur $\Omega$.
On dit que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas (ne modifie pas) la réalisation de l'autre.
Autrement dit : A et B sont indépendants signifie que $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

__Conséquence :__

Deux évènements A et B de $\Omega$ sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

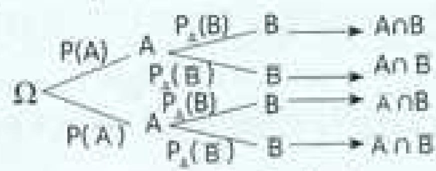
__Remarques :__

1. La conséquence ci-dessus signifie que la probabilité de l'intersection de deux évènements indépendants est égale au produit de leurs probabilités respectives.
2. Dans la pratique, c'est cette conséquence qu'on utilise pour démontrer que deux évènements sont indépendants.
3. Ne pas confondre des évènements indépendants et des évènements incompatibles, dont l'intersection est vide.

**Propriété** A et B sont des évènements d'un même univers $\Omega$ de probabilités non nulles.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B (resp. A et $\overline{B}$) sont indépendants.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

### 1.3. Arbre de probabilité

**Définition** Un arbre de probabilité (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.
Il se présente par exemple comme suit :




L'arbre pondéré s'apparente à un arbre de choix.

## Résumé de cours

*Règles et vocabulaire sur les arbres de probabilité*

- L'origine de l'arbre est $\Omega$ (ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité inscrite sur une branche entre deux événements A et B est la probabilité conditionnelle de B sachant A.

$$A \xrightarrow{p_A(B)} B$$

- Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un chemin. Au bout d'un chemin se trouve un événement, qui correspond à l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

$$\bullet \xrightarrow{p(A)} A \xrightarrow{p_A(B)} B$$

Ainsi la probabilité de l'évènement $A \cap B$ est $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

*Tableau de probabilités*

L'arbre précédent correspond au tableau ci-dessous :

| | B | $\overline{B}$ | Total |
|---|---|---|---|
| A | $P(A \cap B)$ | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(A)$ |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A})$ |
| Total | $P(B)$ | $P(\overline{B})$ | 1 |

*Règles de calcul dans un tableau de probabilités*

- Dans une case du tableau qui se trouve à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on écrit la probabilité de l'intersection des événements correspondants.
- La somme des probabilités d'une ligne est dans la colonne de droite.
- La somme des probabilités d'une colonne est dans la ligne du bas.
- La somme des probabilités est à l'intersection de la colonne de droite et de la ligne du bas.

### 1.4. Formule des probabilités totales

**Définition** $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers $\Omega$ signifie que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

*Remarque*

A et B d'un univers $\Omega$ forment une partition de $\Omega$ signifie $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

**Propriété** Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements d'un l'univers $\Omega$ formant une partition de $\Omega$.
Pour tout évènement B de $\Omega$, on a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$.

*Remarque*

Comme $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ on peut réécrire la propriété ci-dessus sous la forme

$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$ ou encore $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.

Pour deux événements A et B, on a donc : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

## Résumé de cours

# 2 Variable aléatoire

## 2.1. Variable aléatoire et loi de probabilité

### 2.1.1. Variable aléatoire

**Définition** Soit $\Omega$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire X sur $\Omega$ toute application de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$.
Définir une variable aléatoire X sur $\Omega$, c'est associer à chaque résultat de l'expérience un nombre réel $x_i$.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\Omega \mapsto X(\Omega)$$

*Notation et Vocabulaire*

- L'ensemble des valeurs prises par X se note $X(\Omega)$.
- $(X = x_i)$ désigne l'évènement : « X prend la valeur $x_i$ ». Il est constitué de tous les résultats pour lesquels la variable aléatoire X prend la valeur $x_i$.
- $(X < a)$ désigne l'évènement : « X prend une valeur strictement inférieure à $a$ ».

### 2.1.2. Loi de probabilité

**Définition** Soit X une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ lié à une expérience aléatoire. On appelle **loi de probabilité** de X (ou distribution de X), l'application de $\mathbb{R}$ vers $[0 ; 1]$ qui à chaque valeur $x_i$ prise par X associe la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau (il est préférable de ranger les valeurs prises par X dans l'ordre croissant) ou représentée par un diagramme en bâtons.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $x_n$ |

Il est recommandé de vérifier que : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

## 2.2. Fonction de répartition

**Définition** Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire. Soit $\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
On appelle **fonction de répartition** de X, l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0 ; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$. On a :
Pour $x < x_1$, $F(x) = 0$.
Pour $x_i \leq x < x_{i+1}$, $F(x) = F(x_{i-1}) + P(x = x_i)$, $1$ « $i$ « $n - 1$.
Pour $x \geq x_n$, $F(x) = 1$.

*Remarques*

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction en escalier, croissante, constante par intervalle dont la représentation graphique présente des « sauts ».
- La fonction de répartition correspond aux fréquences cumulées croissantes d'une variable aléatoire discrète.
- L'évènement $(X > x)$ est le contraire de l'évènement $(X \leq x)$ donc :
$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.
- Pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ on a : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

## Résumé de cours

### 2.3. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

**Définition** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1$ ; $x_2$ ;...; $x_n$, avec les probabilités respectives $p_1$ ; $p_2$ ;...; $p_n$.
On appelle espérance mathématique de X, le nombre réel noté E(X) défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

*Remarques*

- L'Espérance E(X) est la moyenne des valeurs $x_i$ de la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités $p_i$. On la note souvent $\overline{X}$.
- Dans les jeux, lorsque X désigne le gain du joueur, l'espérance mathématique E(X) représente le gain moyen que peut espérer le joueur sur un « très grand nombre de parties ».
  - Lorsque E(X) > 0, le jeu est **avantageux pour le joueur**.
  - Lorsque E (X) < 0, le jeu est **désavantageux pour le joueur (profitable à l'organisateur).**
  - Lorsque E(X) = 0, le jeu est **équitable.**

### 2.4. Variance et écart-type

**Définition** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1$ ; $x_2$ ;...; $x_n$ avec les probabilités respectives $p_1$ ; $p_2$ ;...; $p_n$ et E(X) l'espérance mathématique de X.

- On appelle **variance** de X, le nombre réel positif noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

**Autre expression de la variance**

$$V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

- On appelle **écart-type** de X, le nombre réel positif noté σ(X) défini par :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

*Remarques*

- La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; on a donc introduit sa racine carrée, l'écart-type, pour mieux rendre compte de la dispersion.
- L'écart-type σ(X) mesure donc la dispersion des valeurs de X autour de sa moyenne E(X).
- La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands, plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.

## 3 Loi binomiale

### 3.1. Épreuve et schéma de Bernoulli

**Définition** On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une appelée « succès » et l'autre « échec ».
On appelle **schéma de Bernoulli** une suite de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre $n$ d'épreuves et la probabilité $p$ du succès sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

*Remarque*

Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

*Exemples :*

- Les expériences suivantes sont des épreuves de Bernoulli.
  - Le sexe d'un bébé à sa naissance.
  - Le résultat d'un examen.
- Les expériences suivantes sont des schémas de Bernoulli.
  - Le lancer 10 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
  - Présenter 3 fois de suite un même concours.

### 3.2. Loi binomiale

**Définition** Soit E un schéma de Bernoulli à n épreuves.
Pour une épreuve, on note $p$ la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité de E, associe le nombre $k$ de succès $(0 \leq k \leq n)$. On a :

- L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0 ; 1 ; ... ; n\}$.
- La probabilité d'obtenir exactement $k$ succès au cours des $n$ épreuves est :
$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$.

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.
On la note $B(n ; p)$.

*Remarque*

$C_n^k$ est un coefficient binomial. Il correspond au nombre de possibilités de placer $k$ succès sur $n$ expériences.

**Propriété** Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. On a :

- $E(X) = np$.
- $V(X) = np(1 - p) = npq$.

## Exercices de renforcement

**1** Le tableau suivant donne la répartition de 150 élèves en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

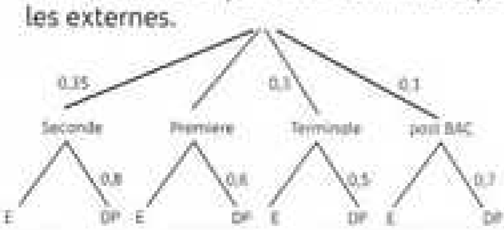
| | Basketball | Football | Tennis |
|---|---|---|---|
| Anglais | 18 | 27 | 45 |
| Allemand | 9 | 18 | 33 |

On choisit un élève au hasard.
1. Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
2. Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer le football » sont-ils indépendants ?

**2** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les évènements :
C : « La carte tirée est un cœur » ;
R : « La carte tirée est un roi » ;
F : « La carte tirée est une dame ou un pique ».
1. a) Calcule la probabilité des évènements C, R et $C \cap R$.
   b) Les évènements C et R sont-ils indépendants ?
2. a) Cite toutes les éventualités de l'évènement F. Déduis-en le cardinal F.
   b) Les évènements C et F sont-ils indépendants ?

**3** Dans un groupe de 80 personnes, le quart a les yeux bleus et 50% sont des fumeurs. De plus, 10 personnes sont fumeurs et ont les yeux bleus.
On choisit une personne au hasard.
On considère les évènements :
B : « La personne a les yeux bleus » ;
F : « La personne est fumeur ».
Construis l'arbre pondéré lié à cette expérience.

**4** Dans un lycée, quel que soit le niveau, un élève peut être externe ou demi-pensionnaire.
L'arbre pondéré ci-dessous indique la répartition selon le niveau et la qualité de l'élève (E : externe ; DP : demi-pensionnaire)
1. Recopie et complète cet arbre.
2. a) Détermine le pourcentage d'élèves externes dans ce lycée.
   b) Détermine la part des Terminales parmi les externes.




**5** On sait que 36 % des ménages d'un quartier ont un chien et que dans 22 % de ces ménages où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% de ces ménages ont un chat.
1. Quelle est la proportion de ces ménages dans lesquels on trouve un chien et un chat ?
2. Quelle est la probabilité qu'un ménage possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

**6** Dans une forêt, 70 % des arbres sont des chênes, les autres sont des hêtres. Par ailleurs 20 % des arbres sont atteints par une maladie et elle touche un hêtre sur trois. On choisit un arbre au hasard. On note :
C l'évènement : « L'arbre est un chêne » ;
M l'évènement « L'arbre est malade ».
1. Dresse le tableau des effectifs représentant la situation.
2. Calcule les probabilités de M et de C.
3. Un chêne est choisi.
Calcule la probabilité qu'il ne soit pas malade.
4. On choisit un arbre sain.
Quelle est la probabilité qu'il soit un chêne ?

**7** Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75%. Il réussit sa seconde balle de service à 90%. Quelle est la probabilité pour que ce joueur commette une double faute (service faute à la seconde balle) ?

**8** Trois coffres notés $C_1$, $C_2$, $C_3$ ont chacun deux tiroirs, et dans chaque tiroir, il y a une pièce. Le coffre $C_1$ contient 2 pièces d'or, $C_2$ contient 2 pièces d'argent et $C_3$ une pièce d'or et une d'argent.
1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on trouve une pièce d'argent.
Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert un tiroir du coffre $C_3$ ?
2. On ouvre à nouveau et indépendamment de la première fois l'un des 6 tiroirs et on trouve encore une pièce d'argent.
Quelle est la probabilité pour que l'on ait ouvert deux fois le même coffre ?

**9** Deux photocopieurs A et B ont été mis à la disposition des élèves. En utilisation normale, la probabilité de tomber en panne un jour est de 0,04 pour le photocopieur A et de 0,08 pour le photocopieur B, plus sophistiqué.

Mais si A est en panne, l'affluence qui se porte sur B fait que la probabilité que B tombe en panne est de 0,25.
Calcule la probabilité que les deux photocopieurs soient en panne un jour donné, puis que les deux photocopieurs fonctionnent en même temps.

**10** Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40 % des hommes.
1. Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?
2. Une personne quitte la réunion en fumant. Détermine la probabilité qu'il s'agisse d'une femme.

**11** *Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.*
Dans une entreprise comprenant 70% d'employés, (dont 80% sont mariés) et 30% de cadres (dont 40% sont célibataires), on contacte un salarié pour une enquête.
1. a) Quelle est la probabilité pour que ce salarié soit un cadre célibataire ? soit un employé célibataire ?
b) Déduis-en la probabilité pour que ce salarié soit un célibataire.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un célibataire soit un cadre ? pour qu'un salarié marié soit un employé ?

**12** Un questionnaire à choix multiple (QCM) comporte 10 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est correcte. Pour être reçu, il faut au moins huit réponses exactes.
Calcule la probabilité pour qu'un candidat qui a répondu au hasard réussisse

**13** Un professeur donne à ses élèves une interrogation qui comporte quatre questions.
Pour chaque question, le professeur propose deux réponses : l'une juste et l'autre fausse et l'élève doit choisir parmi les deux réponses. Un élève, qui n'a rien appris, répond au hasard à chacune des quatre questions.
1. Détermine le nombre de manières différentes de répondre à ces quatre questions.
2. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants.
A : « Tous les résultats sont corrects ».
B : « Tous les résultats sont faux ».
C : « Il y a exactement une réponse juste ».
D : « Il y a au moins une réponse juste ».
3. Le professeur met 5 points pour chacune des réponses justes et enlève 3 points par réponse fausse. Si le total est négatif, il met 0.
On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Détermine la loi de probabilité de X ?
c) Calcule l'espérance de X.

**14** Une urne contient 3 pièces équilibrées.
Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ».
La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ». On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les événements suivants :
B : « La pièce prise est normale » ;
$\overline{B}$ : « La pièce prise est truquée ».
P : « On obtient « Pile » au premier lancer ».
$F_n$ : « On obtient « Face » pour les n premiers lancers ».
1. a) Quelle est la probabilité de l'événement B ?
b) Quelle est la probabilité de l'événement P sachant que B est réalisé ?
2. Calcule la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'événement $P \cap \overline{B}$.
Déduis-en la probabilité de l'événement P.
3. Calcule la probabilité de l'événement $F_n \cap B$ puis de l'événement $F_n \cap \overline{B}$.
4. Déduis-en la probabilité de l'événement $F_n$.

**15** Une urne A contient six jetons marqués respectivement 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.
Une urne B contient quatre jetons marqués respectivement 0 ; 0 ; 0 ; 5.
On tire un jeton de l'urne A, puis un jeton de l'urne B. On suppose que chaque tirage est équiprobable. Le résultat de ce double tirage détermine une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines le chiffre marqué sur le jeton tiré de l'urne A et pour chiffre des unités, celui marqué sur le jeton tiré de l'urne B.

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. Représenté graphiquement la fonction de répartition F de X.
3. Justifie que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à $\frac{275}{12}$.

**16** On considère la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y ci-dessous.

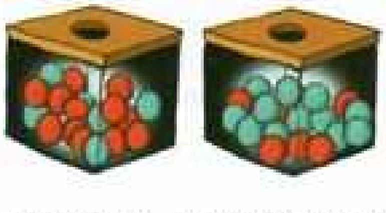
| $x$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,25 | 0,3 | 0,15 | $a$ | $b$ |

Calcule $a$ et $b$ pour que l'espérance E(X) soit nulle.

**17** On dispose d'une urne $U_1$ contenant trois boules blanches et deux boules noires, d'une urne $U_2$ contenant deux boules blanches et quatre boules noires et d'un dé équilibré à six faces numérotées 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3.

1. On tire au hasard et simultanément trois boules de $U_1$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique de X et son écart-type.
2. De l'une des deux urnes $U_1$ et $U_2$ choisie au hasard, calcule la probabilité pour que l'urne où s'est fait le tirage soit $U_1$.
3. On lance une fois le dé. Si le numéro 3 apparaît, on tire simultanément trois de $U_1$, si non on tire successivement et sans remise deux boules de $U_2$. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir une seule boule blanche ».
B : « Tirer au moins une boule noire ».



**18** Pendant 100 jours, un vendeur de livres à domicile a relevé le nombre de contrats qu'il a signé par jour.
Les données sont consignées dans le tableau ci-dessous :

| Nombre de contrats signés $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de jours | 25 | 37 | 22 | 10 | 06 |

L'employeur de ce vendeur estime que la probabilité pour que son collaborateur obtienne un nombre $x$ de contrats un jour donné, est égale à la fréquence de ce nombre de contrat $x$ pour les 100 jours étudiés.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de contrats.

1. Détermine la fonction de répartition F de la variable X et représente cette fonction.
   a) Calcule l'espérance de X.
   Interprète ce résultat.
   b) Calcule l'écart-type $\sigma$ de X.
2. Calcule la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[E(X) - \sigma ; E(X) + \sigma]$.

**19** Une boîte contient deux boules numérotées 1, puis deux boules numérotées (−1) et trois boules numérotées 0.
On dispose en réserve d'une boule numérotée (−1). Le jeu consiste à tirer une boule de la boîte (tous les tirages sont supposés équiprobables).
- Si la boule porte le numéro 1, le joueur gagne 1000 F et la partie s'arrête.
- Si la boule porte le numéro (−1), le joueur perd 1000 F et la partie s'arrête.
- Si la boule porte le numéro 0, on met à part cette boule et on introduit dans la boîte la troisième boule portant le numéro (−1) ; le joueur tire à nouveau une boule et la partie s'arrête.
- Si cette boule porte le numéro 1, le joueur gagne 1000 F.
- Si cette boule porte le numéro (−1), le joueur perd 1000 F.
- Si elle porte le numéro 0, le joueur gagne 500 F.

Soit X la variable aléatoire associant, à chaque partie, le gain algébrique du joueur.

1. a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Vérifie que la probabilité pour que le joueur soit perdant est égale à $\frac{23}{49}$.
2. Le joueur effectue une série de trois parties (indépendantes), chacune d'elle étant réalisée en reprenant les mêmes conditions initiales. Calcule la probabilité pour que le joueur soit gagnant dans deux parties exactement sur les trois.

**20** On considère le jeu suivant : le joueur place une mise $m$ sur la table ($m > 0$) puis tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
Si la carte tirée est :
- un as, le joueur récupère sa mise et gagne 150 F.
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise et ne récupère pas sa mise.

- une dame, le joueur récupère sa mise.
- un valet, le joueur récupère sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.

On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée et on note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (en fonction de $m$).

1. Détermine la loi de probabilité de X.

2. Calcule E(X) en fonction de $m$.

3. Existe-t-il des valeurs de $m$ pour lesquelles le jeu est équitable ? Si oui, détermine-les.

**21** Un démarcheur prospecte par téléphone trois clients potentiels en une demi-heure. Les comportements des clients sont indépendants. La probabilité pour qu'une personne contactée ne soit pas intéressée est $\frac{4}{5}$.

1. Détermine la probabilité que sur les trois clients démarchés :
   a) aucun ne soit intéressé ;
   b) au moins un soit intéressé ;
   c) au plus un soit intéressé.

2. Quelle est la probabilité que sur les trois clients démarchés, deux exactement soient intéressés ?

**22** Un parking pour voitures comporte 10 places numérotées de 1 à 10 délimitées pour le stationnement des véhicules.

La probabilité d'occupation d'une place quelconque est égale à 70%. On admet de plus que chaque place a la même probabilité d'être occupée. Un conducteur veut garer au hasard son véhicule sur ce parking.

1. Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 places libres quand il se présente à l'entrée du parking.

2. Quelle est la probabilité pour que les places numérotées 3, 6 et 9 soient libres quand le conducteur se présente à l'entrée du parking ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places libres dont le numéro est multiple de 3.
   a) Donne la loi de probabilité de X.
   b) Détermine l'espérance mathématique de X.
   c) Représente la fonction de répartition de X.

**23** Un tireur a une probabilité d'atteindre sa cible égale à 0,7. Il tire dix fois de suite.

On considère ces tirs comme des épreuves identiques et indépendantes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirs qui atteignent la cible.

1. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 6 fois.

2. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible au plus 3 fois.

3. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible plus de 5 fois.

**24** La boule d'un billard électrique arrivant en un emplacement A peut emprunter six trajectoires équiprobables. Trois de ces trajectoires la mènent en un emplacement B ; deux en D et la sixième en C. Pour jouer une partie ; Kpalou mise 500 F. Il gagne :

- 300 F si la boule arrive en B.
- 400 F si la boule arrive en D.
- 1000 F si la boule arrive en C.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de Kpalou.

1. a) Détermine les valeurs prises par X ; puis la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'expérience mathématique de X. Interprète le résultat obtenu.

2. Lorsque le gain est négatif, on dit que le joueur a perdu la partie.
Calcule la probabilité p de l'événement : « Kpalou gagne la partie ».

3. Kpalou joue deux parties consécutives (les parties sont indépendantes).
   a) Détermine les gains possibles de Kpalou.
   b) Calcule la probabilité des événements :
   E : « Kpalou perd les deux parties » ;
   F : « Kpalou gagne au moins 300 F ».
   c) Combien de parties doit-il jouer pour être sûr de gagner au moins une partie à 50% ?

**25** Une boîte contient 8 cubes :

- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur. Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. On note A l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'événement : "Obtenir au plus un petit cube".
   a) Calcule la probabilité de A.
   b) Vérifie que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "Tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'évènement B soit réalisé.
   a) Détermine la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.
   b) Détermine la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

## Exercices d'approfondissement

**26** Une expérience consiste à lancer deux dés à 4 faces, un bleu et un rouge, que l'on suppose équilibrés.
On note a le résultat obtenu par le dé bleu et b le résultat obtenu par le rouge.
On considère l'équation $ax^2 + bx + 1 = 0$.
1. Combien d'équations différentes obtient-on ? Justifie qu'elles sont équiprobables.
2. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de solutions de l'équation.
Détermine la loi de probabilité de X.

**27** Abi joue avec deux dés cubiques non pipés.
Les faces de l'un des dés sont numérotées :
$0\ ;\ 0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}$.
Les faces de l'autre sont numérotées :
$0 ; 0 ; \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}$.
Abi lance les deux dés simultanément et note $\alpha$ et $\beta$ les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures des dés.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer, associe le nombre $\sin(\alpha + \beta)$.
1. Détermine toutes les valeurs prises par X.
2. Établis la loi de probabilité de X.

**28** Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par $a$ et $b$. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut $b$.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :
A : « La montre tirée présente le défaut $a$ » ;
B : « La montre tirée présente le défaut $b$ » ;
C : « La montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « La montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».
On suppose que les évènements A et B sont indépendants.
1. Justifie que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calcule la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.
On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
Calcule la probabilité de l'évènement E.
*On en donnera une valeur approchée à $10^{-3}$ près.*

**29** **PARTIE A**
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 6 boules blanches et 4 boules rouges.
On tire 2 boules simultanément.
1. Soit X la variable qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
   a) Donne la loi de probabilité de X.
   b) Calcule l'Espérance mathématique de X.
2. Calcule la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de même couleur.

**PARTIE B**
Soit un entier n tel que $2 \leq n \leq 8$.
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : $n$ boules blanches.
On tire deux boules simultanément.
1. Démontre que la probabilité P($n$) de tirer 2 boules de la même couleur est :
$$P(n)= \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}$$

2. Quel doit être le nombre $n$ de boules blanches pour que $P(n)$ soit minimum ? Calcule ce minimum.

**30** Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.

Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

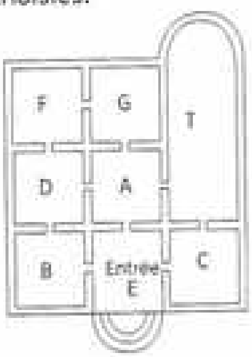
Le visiteur passe au hasard d'une salle à une salle voisine.

Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

– Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.

– Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.




1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a) Construis l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b) Montre que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c) Détermine la probabilité $p_1$ de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d) Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Détermine la probabilité $p_2$ de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a) Calcule la probabilité de l'évènement (X = 1).

b) Calcule la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donne le résultat arrondi au millième.)

c) Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.

Prouve qu'il a tort.

**31** Une animation doit être organisée par le comité des fêtes de Djomanville. Chaque joueur achètera un double coupon qui lui permettra de participer à deux loteries.

La première loterie doit comporter un billet gagnant pour n billets perdants et la seconde doit comporter deux billets gagnants pour n perdants.

1. Construis un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Détermine n de façon que la probabilité pour un joueur de gagner les deux fois soit égale à $\frac{1}{3}$.

**32** Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 ou à 4 moteurs sont plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante. Soit p la probabilité pour qu'un moteur en panne.

**PARTIE A** (Dans cette partie $p = 0,1$)

1. Calcule la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

2. Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

3. Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.

4. Déduis-en la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

**PARTIE B** (On revient au cas général)

1. Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontre que $f(p) = p^2$.

2. Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontre que : $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$.

3. On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.

a) Étudie le signe de $h(p)$ en fonction de $p$.

b) Déduis-en, suivant les valeurs de $p$, dans quels avions il vaut mieux monter.

**33** Un concours de fléchettes lancées les yeux bandés a été organisé à Ellinzué.

La cible ressemble à celle représentée par la figure ci-dessous :


On admettra que :

- les rayons des cercles qui structurent la cible mesurent 1, 2, 3 et 4.
- la probabilité de rater la cible est d'un risque sur cinq et que celle d'atteindre une zone est strictement proportionnelle à la surface de celle-ci.

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de points à un lancer.

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. Calcule son espérance et interprète le résultat.
3. Calcule son écart-type.

**34** On dispose d'une urne contenant $(n + 2)$ boules dont 2 vertes et n jaunes $(n \geq 3)$ indiscernables au toucher et d'une roue divisée en 3 secteurs inégaux numérotés 1 ; 2 et 3. La roue est telle que lorsqu'on la tourne les probabilités de s'arrêter sur les secteurs 1 ; 2 et 3 sont respectivement $p_1$, $p_2$ et $p_3$. Les réels $p_1$, $p_2$ et $p_3$ forment dans cet ordre une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1. Calcule $p_1$, $p_2$ et $p_3$.

2. Gnadré mise 500 F et tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.
- S'il tire deux boules de couleurs différentes, il ne reçoit rien.
- S'il tire deux boules jaunes il reçoit 500F ;
- S'il tire deux boules vertes, il continue le jeu sans miser à nouveau.

On lui fait tourner la roue.
- S'il obtient le secteur 1 il ne reçoit rien.
- S'il obtient le secteur 2 il reçoit 500 F.
- S'il obtient le secteur 3 il reçoit 1000 F.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain de Gnadré.

a) Quels sont les gains possibles de Gnadré ?

b) Détermine en fonction de $n$, la loi de probabilité de X.

3. On prend maintenant $n = 5$.

a) Calcule E(X).

b) Détermine et construis la fonction de répartition F de X.

**35** Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement « Avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement « Être atteint de cette maladie ».

a) Représente par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b) Calcule la probabilité de l'événement T.

c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

**36** Un jeu consiste à miser un euro, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré. Si le joueur obtient un 6, il gagne 5 euros, et s'il obtient deux 6, il gagne 10 euros.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Démontre que les valeurs prises par X sont $-1$, 4 et 9.
2. Détermine la loi de probabilité de X.
3. Calcule l'espérance mathématique de X.

**37** On étudie une culture de bactéries.

Le comportement de chaque bactérie est le suivant : si à l'instant $t$, une bactérie vit, à l'instant $t + 1$, cette bactérie peut mourir avec une probabilité $P_1$, continuer à vivre avec une probabilité $P_2$, se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $P_3$.

De plus, $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

On suppose que les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres.

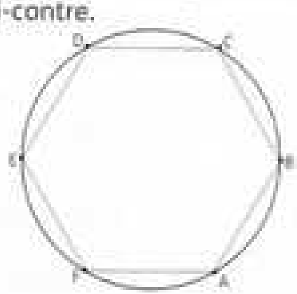
1. À l'instant $t$, deux bactéries $b_1$ et $b_2$ sont présentes dans le milieu de culture.
On appelle X le nombre total de bactéries à l'instant $t + 1$.
Détermine la loi de probabilité de X.
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.
   a) À l'aide d'un arbre de probabilité, donner le nombre de bactéries possibles aux instants $t = 1$ et $t = 2$.
   b) On désigne par $A_1$ l'événement « À l'instant $t = 1$, il y a une bactérie » ; et par $B_2$ l'événement « À l'instant $t = 2$, il y a deux bactéries ».
   Calcule la probabilité de $A_1 \cap B_2$ ; déduis-en la probabilité de $B_2$.
   c) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bactéries à l'instant $t = 2$.
   Détermine la loi de probabilité de Y.

**38** Dans une région ostréicole, on s'intéresse à la production d'huîtres. Une partie de la production est conditionnée par calibre, en bourriches étiquetées : P (petite), M (moyenne) et G (grande). La probabilité d'erreur lors d'un tri est estimée en fonction de la catégorie et donnée dans le tableau ci-dessous :

| Catégorie | P | M | G |
|---|---|---|---|
| Probabilité d'erreur | 0,0 35 | 0,06 | 0,045 |

Par ailleurs, la proportion d'huîtres de chaque catégorie est :
pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %.
a) Dessine l'arbre de probabilités correspondants.
b) On appelle E l'événement : « Une huître a été mal triée ».
Calcule la probabilité de E.
c) Quelle est la probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée ?

**39** Une urne contient six jetons portant les lettres A, B, C, D, E, F.
Ces six lettres sont aussi les sommets d'un hexagone régulier (inscriptible dans un cercle) dessin ci-contre.




1. On tire au hasard de l'urne un paquet de trois jetons.
   a) Précise l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.
   b) Calcule card $\Omega$ .
2. À chaque tirage correspond un triangle (T) ayant comme sommets, les sommets de l'hexagone écrits sur les jetons tirés.
   a) Démontre que la probabilité de l'événement R : " (T) est rectangle " est égale à $\frac{3}{5}$.
   b) Détermine la probabilité des événements suivants :
   L : " (T) est un triangle équilatéral " ;
   I : " (T) est un triangle isocèle et non équilatéral " ;
   Q : " (T) est un triangle quelconque, c'est-à-dire d'aucun des types précédents ".
3. On réitère dix fois cette expérience de tirer trois jetons de l'urne, en remettant les jetons dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois triangles rectangles ?

**40** Une boîte contient 4 boules vertes et $n$ boules blanches. Un jeu consiste à miser 100 F puis à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne 500 F ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd sa mise.
Les tirages sont équiprobables.
1. Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
Calcule les probabilités d'obtenir :
   a) Deux boules de la même couleur.
   b) Deux boules de couleurs différentes.
2. Dans cette question l'entier $n$ est quelconque supérieur ou égal à 2 et on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.
   a) Exprime en fonction de $n$ la loi de probabilité de X.
   b) Détermine l'espérance mathématique de X en fonction de $n$.
   c) Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on E(X) = 0 ?

**41** Une association organise une loterie pour laquelle le prix de participation est m euros.
Un joueur doit tirer simultanément et au hasard deux boules dans une urne contenant 4 boules vertes et 6 boules jaunes. Si les deux boules sont de couleurs différentes, le joueur perd sa mise ; si les deux boules sont jaunes, il est remboursé de sa participation ; si les deux boules sont vertes, le joueur continue le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

Sur 1/8 de la roue, le gain est de 10 000 F ; sur ¼ de la roue, le gain est de 2000 F ; sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation.
On appelle V l'événement : « Le joueur a obtenu deux boules vertes » ; J l'événement : « Le joueur a obtenu deux boules jaunes » ; R l'événement : « Le joueur est remboursé de sa participation ».

1. Calcule les probabilités des événements V, J et R.
2. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule E(X).
3. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en Francs. Quelle est la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

**42** Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit $n$ un entier naturel vérifiant $0 < n < 50$.
On définit les évènements suivants :
- A : « Le jardinier a choisi le lot 1 ».
- B : « Le jardinier a choisi le lot 2 ».
- Jn : « Le jardinier obtient $n$ tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
   a) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
   b) Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
   c) Donne une expression de la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes.
   d) Calcule la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. Tu donneras l'arrondi au millième du résultat.
2. Probabilités conditionnelles
   a) Démontre que : $P_B(J_n) = C_{50}^{n} \times 2^{-50}$.
   b) Déduis-en la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes.
   c) On note $p_n$ la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que $J_n$ est réalisé.
   Établis que : $p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.
   d) Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $p_n \geq 0{,}9$ ? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

**43** Une urne contient 8 boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.
On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note $A_0$ l'événement « On n'a obtenu aucune boule noire » ; $A_1$ l'événement « On a obtenu une seule boule noire » ; $A_2$ l'événement « On a obtenu deux boules noires ».

1. Calcule les probabilités de $A_0$, $A_1$, $A_2$.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 8 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note $B_0$ l'événement « On n'a obtenu aucune boule noire » ; $B_1$ l'événement « On a obtenu une seule boule noire » ; $B_2$ l'événement « On a obtenu deux boules noires ».
   a) Calcule les probabilités conditionnelles $P(B_0/A_0)$, $P(B_1/A_0)$ et $P(B_2/A_0)$.
   b) Déduis-en $P(B_0)$.
   c) Calcule $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
   d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage.
Calcule la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire au premier tirage.
3. On considère l'événement R : « Il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ».
Calcule P(R).

**44** Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, dont 7 sont rouges et 3 blanches. Un joueur tire simultanément quatre boules de cette urne.

1. On note les événements A : « Obtenir exactement trois boules rouges » ; B « Obtenir au plus deux boules rouges ».
Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.
2. Le joueur mise 500 F, et effectue un tirage. S'il tire 4 boules rouges, il gagne 1500 F ; s'il tire 3 boules rouges, il gagne 500 F et sinon il ne gagne rien.
   a) On note X le gain algébrique du joueur (son gain moins sa mise).
   Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Le jeu est-il équitable ?

**45** Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise ; s'il est en retard, il prend le bus de ville, il lui en coûte 500 F.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on appelle $R_n$ l'événement : « L'employé est en retard le jour $n$ ».

On note $P_n$ la probabilité de $R_n$ et $q_n$ celle de $\overline{R_n}$, événement contraire de $R_n$.

On suppose que $P_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence :
   a) Détermine les probabilités conditionnelles : $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   b) Détermine $P(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de $P_n$ et $P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de $q_n$.
   c) Détermine $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ et $q_n$.
   d) Déduis-en que $P_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} P_n$.
2. Étude de la suite : Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = P_n - \frac{4}{23}$.
   a) Démontre que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $-\frac{3}{20}$ et précise son premier terme.
   b) Exprime $v_n$ puis $P_n$ en fonction de $n$.
   c) Étudie la convergence de la suite $(P_n)$.

**46** Le personnel d'un grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique ).

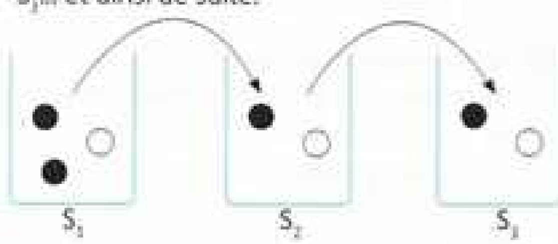
12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

Tu donneras une valeur approchée de tous les résultats à $10^{-4}$ près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
On note les événements :
M : « La personne interrogée est médecin ».
S : « La personne interrogée est soignante ».
A : « La personne interrogée est un personnel AT ».
F : « La personne interrogée est une femme ».
H : « La personne interrogée est un homme ».
   a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
2. On sait que 80% du personnel est féminin.
   a) Calcule la probabilité d'interroger une femme AT.
   b) Réalise un arbre pondéré.
   c) Détermine la probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT.

**47** On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère $n$ sacs de jetons $S_1, S_2, ...S_n$.
Au départ le sac $S_1$ contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :
Première étape : on tire au hasard un jeton de $S_1$.
Deuxième étape : on place ce jeton dans $S_2$ et on tire au hasard un jeton de $S_2$.
Troisième étape : après avoir placé dans $S_3$, le jeton sorti de $S_2$, on tire, au hasard, un jeton de $S_3$... et ainsi de suite.




Pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leq k \leq n$, on note $E_k$ l'événement : « Le jeton sorti de $S_k$ est blanc », et $\overline{E_k}$ l'événement contraire de $E_k$.

1. a) Détermine la probabilité de $E_1$, notée $P(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $P_{E_1}(E_2)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2)$.
   Déduis-en la probabilité de $E_2$, notée $P(E_2)$.
   b) Pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de $E_k$ est notée $p_k$.
   Justifie la relation de récurrence suivante :
   $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$.
2. Étude d'une suite $(u_k)$ :
On note $(u_k)$ la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel $k$ tel que $k > 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3} u_k + \frac{1}{3}$.
   a) On considère la suite $(v_k)$ définie, pour tout élément $k$ de $\mathbb{N}^*$ par, $v_{k+1} = u_k - \frac{1}{2}$.
   Démontre que $(v_k)$ est une suite géométrique.
   b) Déduis-en l'expression de $u_k$ en fonction $k$, démontre que $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = \frac{1}{2}$.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Pour quelles valeurs de $k$ a-t-on : $0,4999 \leq p_k \leq 0,5$.

**48** On lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Dans cette question, on lance deux fois la pièce.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir un pile et un face sachant que le premier lancer a donné un pile ?
   c) On considère les événements : A : « On a obtenu un pile et un face » ; B : « On a obtenu au plus un pile ».
   Calcule la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.
   Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Dans cette question, on lance trois fois la pièce ; on note X le nombre de piles.
   a) Précise l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Détermine l'espérance mathématique de X.

**49** Un mélange de graines de fleurs contient :
50 graines de type A, 90 graines de type B,
60 graines de type C.

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.

On considère que la probabilité qu'une graine germe correctement est égale à :

- 0,5 pour une graine de type A,
- 0,8 pour une graine de type B,
- 0,6 pour une graine de type C.

1. On sème une graine prise au hasard dans le mélange.
   Détermine :
   a) la probabilité que ce soit une graine de type A ;
   b) la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement ;
   c) la probabilité que la graine germe correctement ;
   d) la probabilité que la graine soit une graine de type C qui ne germe pas correctement.
2. On sème une graine du mélange et elle germe correctement. Quelle est la probabilité qu'elle soit de type A ?
3. On sème quatre graines prises au hasard dans le mélange. Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces graines germe correctement ?

**50** Une étude statistique sur de longues années a permis de faire, dans une zone géographique bien définie, les prévisions météorologiques suivantes :

- s'il fait beau temps un jour, il fera beau temps le lendemain avec la probabilité de 5/6 ;
- s'il fait mauvais temps un jour, il fera mauvais temps le lendemain avec la probabilité de 1/3.

(On admet qu'il fait soit beau temps, soit mauvais, temps pas les deux à la fois ).

On est dimanche et il fait beau temps.

1. Construis un arbre de probabilités permettant de déterminer les probabilités du beau temps et du mauvais temps pour lundi, mardi et mercredi.
2. On appelle $P_n$ la probabilité qu'il fasse beau temps le jour $n$, et $q_n$ la probabilité qu'il fasse mauvais temps le jour $n$.
   Calcule $P_n$ et $q_n$ en fonction de $P_{n-1}$ et $q_{n-1}$, puis $P_n$ en fonction de $P_{n-1}$.
   On suppose que $P_0 = 1$.
3. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = P_n - 0{,}8$.
   Démontre que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Écrire alors $P_n$ en fonction de $n$.
   Étudie la convergence de la suite $(P_n)$.

**51** Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur la chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut.

Des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur (sans qu'il y ait d'incident ) est égale à $\frac{1}{50}$ ;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$ ;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à 0,01.

On note A l'événement :
« L'alarme se déclenche » ;
I l'événement : « Un incident se produit » et $\overline{A}$, $\overline{I}$ leurs événements contraires.

**PARTIE A :**

1. a) Réalise un arbre résumant les données.
   b) Calcule la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
   c) Déduis-en la probabilité que l'alarme se déclenche.

2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

**PARTIE B :**

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :
- 100 000 F pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;
- 150 000 F pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;
- 10 000 F lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour. X est la variable aléatoire représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.
1. Donne la loi de probabilité de X.
2. Détermine l'espérance mathématique de X. Interprète ce résultat.

**52** Un test médical sert à dépister une certaine maladie dans une population donnée. Soit M l'événement « Un individu est atteint de cette maladie » et T l'événement : « Le test est positif pour un individu donné ».
Après une étude statistique, on admet les résultats suivants :

$P_M(T) = 0,96$ ; $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,94$ ; $P(M) = 0,01$.

a) Exprime par des phrases chacune de ces égalités.
b) Traduis l'énoncé au moyen d'un arbre de probabilité.
c) Calcule la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit atteint de la maladie.
d) Calcule la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit en bonne santé.

**53** Trois machines A, B, C produisent respectivement 60 %, 30 %, 10 % du nombre total de boulons fabriqués dans une entreprise.
Les pourcentages d'objets défectueux par machine sont respectivement : 2% , 3%, 4%.
Dans un lot de boulons, on en choisit un au hasard : il est défectueux.
Détermine la probabilité que ce boulon ait été fabriqué par la machine C.

**54** On lance $2n$ fois une pièce de monnaie équilibrée, où $n$ est un entier naturel non nul.
A-t-on plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce ?
1. On note $P(n)$ la probabilité d'obtenir $n$ piles en lançant $2n$ fois la pièce.
a) Exprime $P(n)$ en fonction de $n$.
b) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

2. On désigne par X le nombre de piles en lançant $2n$ fois la pièce.
a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calcule son espérance mathématique.

**55** Tous les résultats seront donnés à $10^{-3}$ près.
Trois machines fabriquent des ampoules halogènes dans les proportions suivantes :
50% pour la machine A, 30% pour la machine B, 20% pour la machine C.
L'usine procède à des tests pour déterminer la fiabilité des différentes machines.
Les résultats montrent que la fiabilité des machines A, B, C est respectivement :
0,95 ; 0,90 ; 0,85.
Dire que la fiabilité de A est de 0,95 signifie que la probabilité qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est de 0,95.
On choisit une ampoule au hasard dans un lot fabriqué par l'usine. L'événement : « L'ampoule est bonne » est noté G.

a) Représente la situation proposée à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Détermine la probabilité de l'événement :
« L'ampoule est bonne et fabriquée par A ».
c) Démontre que la probabilité de l'événement :
« L'ampoule est bonne » est égale à 0,915.
d) On achète une ampoule, elle est bonne. Détermine la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A .
e) On achète deux ampoules. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules bonnes. Détermine la loi de probabilité de X.
Calcule son espérance mathématique.

**56** Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 boules rouges toutes numérotées 1 et 3 boules jaunes toutes numérotées 0.
On tire simultanément 2 boules de cette urne.
On considère les événements A : « Les deux boules sont de la même couleur » et
B : « Les deux boules sont de couleurs différentes ».
1. Détermine les probabilités P(A) et P(B).

2. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres des deux boules.

a) Détermine la loi de probabilité de X.
b) Calcule son espérance mathématique.

**Situation complexe**

**57** Des élèves d'une école se préparent à faire un devoir de niveau pour lequel quatre compétences A, B, C et D sont au programme. La compétence A reste pour beaucoup d'élèves une partie du programme difficile à maîtriser. Un cours de rattrapage est alors proposé pour travailler cette compétence. Lors du devoir de niveau, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur la compétence A :

- 30% des élèves n'ayant pas suivi le cours de rattrapage ne traitent pas l'exercice.
- $\frac{5}{6}$ des élèves ayant suivi le cours de rattrapage l'ont traité.

On sait de plus que 20% des élèves participent au cours de rattrapage.

Lors de la distribution des copies après correction, l'élève Soukroumdé s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité la compétence A ». Le chef de classe veut savoir la probabilité que Soukroumdé ait suivi le cours de rattrapage. Étant élève de cette classe, la tâche t'incombe d'éclairer la lanterne de ton chef de classe. *(On arrondira le résultat à 0,001 près).*

## Coup de Pouce

**29** A : 1.a) $\{0 ; 1 ; 2\}$

B : 1. $P(n) = \dfrac{C_n^2 + C_{10-n}^2}{C_{10}^2}$

2. Étudie la fonction P(n).

**32** A) 2. Utiliser la loi binomiale de paramètres 4 et $p$.

3. $P(X = 4) = C_4^3 (0,1)^3(0,9)^1$

4. $P(X = 3) + P(X = 4)$.

B) 1. $P(X = 2) = C_2^2 P^2 = P^2 = f(P)$

2. $g(P) = C_4^3 P^3(1 - P) + C_4^4 P^4$
$= P^2(-3P^2 + 4P)$.

**57** Faire l'arbre de choix et répondre à la préoccupation.

Leçon

11

# STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Les données statistiques peuvent être représentées de différentes façons afin de faciliter la lecture et l'interprétation.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le gestionnaire d'un centre commercial observe attentivement pendant six mois successifs, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA de son commerce. Le résultat de son observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 62 | 73 | 95 | 110 | 132 | 170 |

Pour mieux ajuster ses dépenses, le gestionnaire est soucieux de savoir combien il obtiendrait en chiffre d'affaires le huitième mois. Tu es désigné à le rassurer en lui communiquant une estimation de ce chiffre d'affaires. Avec l'aide de tes camarades de classe, vous décidez de faire des calculs pour estimer le chiffre d'affaires.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Série statistique double

*Connaître :*

- la définition d'une série statistique à deux caractères
- la définition du point moyen

*Établir :*

les séries marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique à deux caractères

*Représenter :*

un nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal

*Placer :*

le point moyen

### 2 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

*Connaître :*

- la formule de la covariance
- la formule du coefficient de corrélationlinéaire
- les formules de calcul de $a$ et $b$ (resp. $a'$ et $b'$) dans l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = a'y+b'$) d'une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrées de $y$ en $x$ (resp. $x$ en $y$)

*Représenter :*

- une droite d'ajustement de Y en fonction de X
- une droite d'ajustement de X en fonction de Y

*Calculer :*

- la variance
- la covariance
- le coefficient de corrélation linéaire

*Interpréter :*

le coefficient de corrélation linéaire

*Déterminer :*

- une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés
- la valeur de l'un des caractères connaissant la valeur correspondante de l'autre caractère :
  - à l'aide d'une équation d'une droite d'ajustement
  - à l'aide de la représentation graphique d'une droite d'ajustement

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Série statistique double

#### 1.1. Définition - Séries statistiques marginales

Les données recueillies dans le tableau suivant présentent huit élèves dont on donne la moyenne trimestrielle X et l'âge Y de chacun.

| Élève | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Moyenne (X) | 10 | 11 | 9 | 7 | 9 | 14 | 9 | 11 |
| Âge (Y) | 17 | 16 | 15 | 16 | 15 | 16 | 15 | 15 |

1. L'ensemble des modalités de X est $M_X = \{7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 14\}$.
Détermine l'ensemble $M_Y$ des modalités de Y.

2. a) Recopie et complète le tableau suivant.

| Âge $(y_j)$ | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|
| Effectif $(n_j)$ | | | |

Ce tableau est la série statistique associée au caractère Y.

b) Détermine la série statistique associée au caractère X.

3. À partir du tableau linéaire, dresse le tableau à double entrée représentant le produit cartésien $M_x \times M_y$ (celui-ci supprime l'identité des éléments de la population et $n_{ij}$ représente l'effectif du couple $(x_i\ ,\ y_j)$.

| $M_y$ \ $M_x$ | $x_1$ 7 | $x_2$ 9 | $x_3$ 10 | $x_4$ 11 | $x_5$ 14 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ 15 | $n_{11}$......... | $n_{21}$......... | $n_{31}$......... | $n_{41}$......... | $n_{51}$......... | ......... |
| $y_2$ 16 | $n_{12}$......... | $n_{22}$......... | $n_{32}$......... | $n_{42}$......... | $n_{52}$......... | ......... |
| $y_3$ 17 | $n_{13}$......... | $n_{23}$......... | $n_{33}$......... | $n_{43}$......... | $n_{53}$......... | ......... |
| Total | ......... | ......... | ......... | ......... | ......... | |

**Synthèse**

1. On considère deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population de N individus. On note :
$x_1, x_2, x_3, ..., x_p$ les valeurs ( ou les modalités) du caractère X ;
$y_1, y_2, y_3, ..., y_p$ les valeurs du caractère Y. On appelle série statistique double de caractère (X, Y), l'ensemble des triplets $(x_i\ , y_j\ , n_{ij})$ où $x_i$ est le terme de $i$-ème modalité de X et $y_j$ est le terme de la $j$-ème modalité de Y et $n_{ij}$ l'effectif du couple $(x_i\ ;\ y_j)$
2. À partir du tableau à double entrée, on peut reconstituer les séries dites marginales associées à chaque caractère X et Y.

**Exercice de fixation**

À l'oral d'un concours, deux examinateurs A et B s'entretiennent avec 100 candidats, et attribuent à chacun une note prise dans l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}. Soit X le caractère « Note attribuée par l'examinateur A » et Y le caractère « Note attribuée par l'examinateur B ». Les résultats sont donnés par le tableau à double entrée ci-dessous.

| $M_y$ \ $M_x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 4 | 15 | 13 | 5 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 10 | 7 | 3 | 3 |
| 4 | 0 | 0 | 3 | 6 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |

1.1. Réponds par vrai ( V ) ou Faux ( F ) aux affirmations suivantes.

1. Il y a 13 candidats qui ont pour couple de notes (3 ; 2).

2. Il n' y a aucun candidat qui a pour couple de notes (2 ; 5).

3. Le nombre de couples ayant pour premier composante 1 est 13.

4. L'effectif de la modalité 2 du caractère Y est 37.

5. Le couple ( 5 ; 3) a pour effectif 8.

1.2. À partir du tableau à double entrée, détermine les séries marginales associées aux caractères X et Y.

1.3 Détermine les tableaux des fréquences marginales des séries de caractères X et de Y.

### 1.2. Nuage de points

Dans un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement tous les points de couple de coordonnées $(x_i\ ;\ y_j)$ d'effectifs non nuls de l'exemple 1.1 ci-dessus.

**Synthèse**

À partir du tableau linéaire on peut construire le nuage de points dans le plan muni d'un repère (O, I, J ).

## Exercices de fixation

**1.2.1** Le tableau suivant indique l'évolution des prix d'un paquet de 20 marchandises de 2012 à 2019.

| Année | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $(x_i)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Prix en milliers de francs | 2,36 | 2,59 | 2,74 | 2,94 | 2,96 | 3,05 | 3,20 | 3,60 |

Représente dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points de cette série statistique.

**1.2.2** On donne le tableau statistique suivant :

| Frais de publicité $(x_i)$ | 22 | 24 | 25 | 27 | 30 | 32 | 35 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taux d'occupation $(y_i)$ | 48 | 32 | 55 | 45 | 52 | 67 | 72 | 76 |

Représente le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal.

### 1.3. Point moyen

La mutuelle des cadres de Konankpinkro ( MUCAKO ) a été crée le 1er Janvier 2005. Le 1er Janvier de chaque nouvelle année, le secrétaire général calcule le taux d'adhésion à la mutuelle. Le tableau ci-dessous donne les taux respectifs obtenus sur la période 2006-2011.

| | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Âge X de la MUCAKO ( en année) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Taux global d'adhésion Y ( en pourcentage ) | 75 | 77 | 77,3 | 78,2 | 79,3 | 80 |

Calcule les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des caractères X et Y de cette série statistique.

On rappelle que : $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$ et $\overline{y} = \frac{\sum n_j y_j}{N}$.

**Synthèse**

Le point de coordonnées ( $\overline{x}$ , $\overline{y}$ ) est le point moyen de cette série statistique.

## Exercices de fixation

**1.3.1** Détermine les coordonnées du point moyen de l'exercice 1.2.1.

**1.3.2** Détermine les coordonnées du point moyen de l'exercice 1.2.2.

## Activité 2 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

### 2.1. Covariance

On considère la série statistique de l'activité 1, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont respectivement les moyennes des $x_i$ et $y_i$.

Calcule $\dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_8y_8}{8} - \overline{x}.\overline{y}$.

**Synthèse**

Le nombre $\dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_8y_8}{8} - \overline{x}.\overline{y}$ est la covariance de la série statistique (X,Y), on la note COV(X,Y), Cov(X,Y).

## Exercices de fixation

**2.1.1** Lors d'une étude sur une série double portant sur 12 points on a :

$\overline{x} = 9{,}75$ ; $\overline{y} = 1{,}85$ ; $\sum_{i=1}^{12} x_iy_i = 255{,}8$.

Calcule cov(X, Y)

**2.1.2** Calcule la covariance de la série statistique suivante :

| $x_i$ | 70 | 74 | 75 | 81 | 82 | 85 | 86 | 86 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 18 | 22,2 | 22 | 26,3 | 25,2 | 27,5 | 26,4 | 35,8 |

### 2.2. Méthode des moindres carrés

Les productions annuelles en tonnes d'un planteur de cacao sur cinq années successives sont résumées dans le tableau suivant.

| Rang ($x$) de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Production ($y$) | 10 | 14 | 16 | 18 | 22 |

Sachant que $\overline{x} = 3$ ; $\overline{y} = 16$ ; V($x$) = 2 ; V($y$) = 16 ; COV (X,Y) = $\dfrac{28}{5}$.

1. Calcule $a = \dfrac{\text{Cov}(X;Y)}{V(x)}$.

2. Calcule $b = \overline{y} - \dfrac{\text{Cov}(X;Y)}{V(x)}.\overline{x}$.

3. Détermine la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

4. On considère la droite (D) d'équation $y = \dfrac{14}{5}x + \dfrac{38}{5}$.

   a) Calcule les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i}^{5}\left(y_i - \frac{8}{3}x_i - \frac{22}{3}\right)^2 ;\ S_2 = \sum_{i}^{5}(y_i - 3x_i - 7)^2 ;\ S_3 = \sum_{i}^{5}\left(y_i - \frac{14}{5}x_i - \frac{38}{5}\right)^2.$$

   b) Compare $S_1$, $S_2$, $S_3$.

   c) Vérifie que la droite (D ) passe par le point moyen G et que le coefficient directeur de (D) est égal à $\dfrac{\text{Cov}(X;Y)}{V(x)}$.

**Synthèse**

- Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est : $y - \bar{Y} = a(x - \bar{X})$, où $a = \dfrac{\text{Cov}(X\,;Y)}{V(X)}$.
- Une équation de la droite de régression (D') de X en Y est :

$x - \bar{X} = a'(y - \bar{Y})$, où $a' = \dfrac{\text{Cov}(X\,;Y)}{V(Y)}$.

**Exercices de fixation**

**221** On considère une série statistique à double variable (X, Y) telle que :
$\bar{X} = 9{,}75$ ; $\bar{Y} = 1{,}85$ ; COV(X,Y) = 3,27 ;
V(X) = 23,35.
Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

**222** On considère la série statistique suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 70 | 74 | 75 | 81 | 82 | 85 | 86 | 96 |
| $y_i$ | 18 | 22,2 | 22 | 26,3 | 25,2 | 27,5 | 26,4 | 35,8 |

Détermine par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ :
a) de Y en X ;
b) de X en Y.

## 2.3. Coefficient de corrélation linéaire

On considère la série statistique suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | 10 | 14 | 16 | 18 | 22 |

1. a) Construis le nuage de points de cette série statistique.
   b) Trace la droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage.
2. a) Sachant que V(X) = 2 ; V(Y) = 16, calcule $r = \dfrac{\text{COV}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$.
   b) Parmi les intervalles suivants, dans lequel se trouve $r$ ?
   [−1 ; 0 [ ; ] 0 ; 0,5] ; ]0,5 ; 0,7] ; [0,87 ; 1].

**Synthèse**

- Le nombre réel $r = \dfrac{\text{COV}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$ est appelé coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
- Il y a une bonne corrélation si $0{,}87 \leq |r| \leq 1$ c'est-à-dire il existe une forte relation entre les variables X et Y.

**Exercice de fixation**

On considère la série statistique à double variable tel que :
V(X) = 23,35 ; V(Y) = 0,47 ; COV(X ,Y) = 3,27.
1. Calcule le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.
2. Y a-t-il une forte relation entre les variables X et Y ? Justifie ta réponse.

## 2.4. Estimation

La consommation maximale de dioxygène ($VO_2$max), exprimée en mL.min$^{-1}$.kg$^{-1}$, d'un individu dépend de l'effort qu'il fournit à son âge. On définit la série statistique double (X, Y), où X est l'âge du sujet (en année) et Y est la quantité de $VO_2$max correspondante. La droite (D) de régression de Y en X est donnée par l'équation : $y = -0{,}42x + 52.9$.

1. Donne une estimation de la quantité de $VO_2$max, d'un sujet âgé de 17 ans.
2. Donne une estimation de l'âge du sujet, au moment où la quantité de $VO_2$max est égale à 30 mL.min$^{-1}$.kg$^{-1}$.

**Synthèse**

S'il y a une forte corrélation entre les variables X et Y, alors, à partir de l'équation de la droite de régression, on peut estimer la valeur d'une variable si on connaît la valeur correspondante de l'autre.

### Exercices de fixation

Le tableau suivant indique l'évolution du paquet de chocolat vendu de 2013 à 2020.

| Année | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang ($x_i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Prix en Euro ($y_i$) | 5,98 | 6,30 | 6,70 | 7 | 7 | 7 | 7,05 | 7,88 |

On sait que le coefficient de corrélation linéaire de $x$ et $y$ est 0,94 et l'équation de la droite de régression est : $y = 0{,}22\,x + 5{,}84$.

1. Détermine le prix du paquet de chocolat en 2025.
2. Détermine en quelle année le prix atteindra 9,8 Euros ?

## APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

### Exercice Faire une prévision à partir d'un ajustement linéaire

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale Y en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur X en mètre, de la flèche.

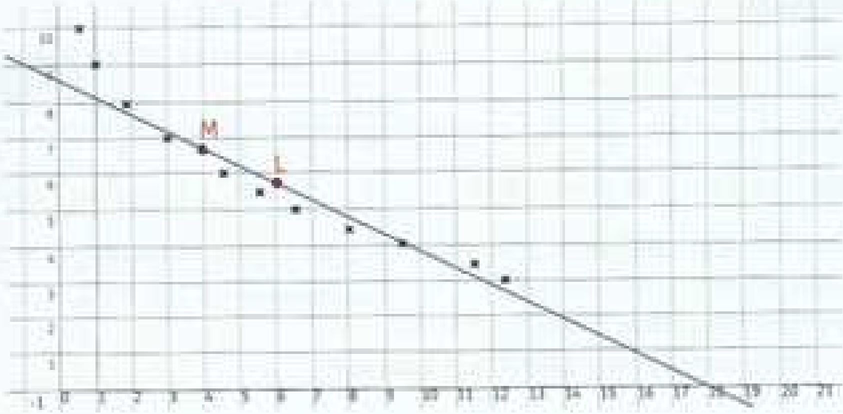
| Longueur ($x_i$) | 16,5 | 18 | 19,8 | 22 | 25 | 27 | 29 | 32 | 35 | 39 | 41,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Charge ($y_i$) | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5,5 | 5 | 4,5 | 4 | 3,5 | 3,2 |

Les réponses numériques à cette question seront données à $10^{-2}$ près.

1. Représente le nuage de points $M(x_i\,;\,y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal.
Unités : 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour 1 tonne en ordonnées.
2. Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en X est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
3. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. Trace cette droite sur le graphique précédent.
4. Utilise cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?

**Corrigé**

1. Le nuage de points




**Méthode**

S'il y a une forte corrélation linéaire, on peut estimer une variable connaissant l'autre.

2. $\overline{x} = \dfrac{16{,}5+18+19{,}8+22+25+27+29+32+35+39+41{,}7}{11} = \dfrac{305}{11} \simeq 27{,}73$.

$\overline{y} = \dfrac{10+9+8+7+6+5{,}5+5+4{,}5+4+3{,}5+3{,}2}{11} = \dfrac{65{,}7}{11} \simeq 5{,}97.$

$V(x) = \dfrac{16{,}5^2+18^2+19{,}8^2+22^2+25^2+27^2+29^2+32^2+35^2+39^2+41{,}7^2}{11} - \left(\dfrac{305}{11}\right)^2 = \dfrac{395649}{6050} \simeq 65{,}4$

$V(y) = \dfrac{10^2+9^2+8^2+7^2+6^2+5{,}5^2+5^2+4{,}5^2+4^2+3{,}5^2+3{,}2^2}{11} - \left(\dfrac{657}{110}\right)^2 = \dfrac{2837}{605} \simeq 4{,}69$

$Cov(x;y) = \dfrac{16{,}5(10)+18(9)+19{,}8(8)+22(7)+25(6)+27(5{,}5)+29(5)+32(4{,}5)+35(4)+39(3{,}5)+41{,}7(3{,}2)}{11}$

$- \dfrac{305}{11} \times \dfrac{657}{110} = \dfrac{-101663}{6050} \simeq -16{,}80$

$r = \dfrac{Cov(x;y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}} = \dfrac{-16{,}80}{\sqrt{65{,}4 \times 4{,}69}} \simeq -0{,}96$

On a $0{,}87 < |r| < 1$, donc un ajustement affine est satisfaisant.

3. Une équation de la droite de régression ( D ) de Y en X.

$a = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \dfrac{-16{,}8}{65{,}4} = -0{,}26$ et (D) : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$

(D) : $y - 5{,}97 = -0{,}26(x - 27{,}73)$ soit (D) : $y = -0{,}26x + 13{,}18$.

4. Pour $x = 26$, on a $y = -0{,}26 \times 26 + 13{,}18 = 6{,}42$.

On peut dire que la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres est de 6,42T.

## Résumé de cours

### 2.2. Droites de régression

**Principe de la méthode des moindres carrés**

Étant donné une série statistique double $(x_i\ ;\ y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ où $(x_i)$ est une série non constante et telle que le nuage des points $M_i\ (x_i\ ;\ y_i)$ soit relativement allongé. On cherche une droite (D ) d'équation réduite $y = ax + b$ qui passe le plus près possible des points du nuage.

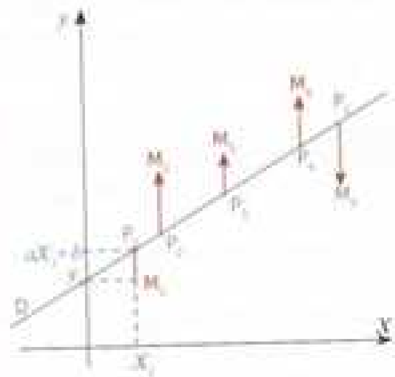
Pour cela :

- On calcule, pour tout, $i = 1, 2, \dots, n$ la distance $M_iP_i$ entre le point $M_i$ du nuage et le point $P_i$ de la droite (D) ayant la même abscisse que $M_i$.
- On cherche les réels $a$ et $b$ pour lesquels la somme $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + M_3P_3^2 + \dots + M_nP_n^2$ des carrés de ces distances est minimale.

La somme $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + M_3P_3^2 + \dots + M_nP_n^2$ est appelée somme des carrées des résidus.

**Définition**

- Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$,
  où $a = \dfrac{\text{Cov}(X\,;Y)}{V(X)} = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2}$.
- Une équation de la droite de régression (D') de X en Y est :
  $x - \overline{x} = a'(y - \overline{y})$,
  où $a' = \dfrac{\text{Cov}(X\,;Y)}{V(Y)} = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$.
- Les droites de régression (D) et (D') passent par le point moyen $G(\overline{x};\overline{y})$.




### 2.3. Coefficient de corrélation linéaire

**Définition** On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double (X ; Y), le nombre réel noté $r$ tel que : $r = \dfrac{\text{Cov}(X\,;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y}$.

**Propriété**

- Si $r^2 = 1$, les droites de régression (D) et (D') sont alors confondues. On dit que l'ajustement est parfait.
- Si $0{,}87 \leq |r| \leq 1$, on dit qu'il y a une bonne corrélation ou une forte corrélation.
- $r^2 = aa'$ d'où $|r| = \sqrt{aa'}$

### 2.4. Estimation

S'il existe une forte corrélation entre deux variables X et Y, alors on peut estimer la valeur d'une variable si l'on connait la valeur correspondante de l'autre.

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** On donne la série statistique suivante :

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 | 7 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 4 | 6 | 9 | 14 | 17 |

1. Représente dans un repère orthogonal le nuage de points associé à cette série statistique.
2. Détermine le point moyen G de ce nuage.

**2** On donne la série double suivante :

| Année $x_i$ | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Part $y_i$ (en %) | 5,9 | 8,9 | 8,6 | 8,5 | 9,2 | 11,1 | 11,2 | 13,5 | 18 | 24,8 |

1. Représente dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique.
2. Détermine une équation la droite de régression de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.

**3** On donne la série statistique double suivante où $k$ remplace $y_5$ .

| $x_i$ | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 13 | 12 | 14 | 16 | $k$ |

Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu une équation de la droite (D) de régression de Y en X, à savoir : $y = 9x + 0,6$. Détermine la valeur de $k$.

**4** On suppose que la quantité offerte sur le marché, exprimée en milliers d'unités, d'un produit fabriqué par une entreprise, est proportionnelle au prix unitaire exprimé en dinars.
1. a) Complète le tableau suivant sachant que pour un prix de 2,5 dinars, la quantité offerte sur le marché est 280000 unités.

| X : prix unitaire | 2,15 | 2,26 | 2,40 | 2,57 | 2,63 | 2,75 | 2,82 | 2,90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y : Quantité offerte | | | | | | | | |

b) Détermine une équation de la droite (D) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.

2. Dans le tableau ci-dessous, on a recueilli le nombre d'unités demandées (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire exprimé en dinars.

| X': prix unitaire | 2,15 | 2,26 | 2,40 | 2,57 | 2,63 | 2,75 | 2,82 | 2,90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y' : Quantité demandée | 360 | 345 | 325 | 300 | 290 | 275 | 265 | 250 |

Détermine une équation de la droite de régression de Y' en X'.
3. Détermine le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

**5** Le tableau suivant donne l'effectif de la population scolaire des élèves des classes de Terminale d'une circonscription du mois d'octobre 2016 au mois d'octobre 2021.

| X : Année | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y : population de terminale | 67755 | 74581 | 79266 | 76138 | 80123 | 90087 |

1. Détermine une équation de la droite (D) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
2. Donne une estimation de la population des classes de terminale au mois d'octobre 2030.

**6** Détermine la droite de régression de Y en X avec les données suivantes :

| $x$ | 0,7 | 1,3 | 1,8 | 2,4 | 2,9 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 5,1 | 6,3 | 8,6 | 9,4 | 11,6 |

**7** Le tableau suivant donne le poids d'un nourrisson, quelques jours après sa naissance.

| $x_i$ | 5 | 7 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,61 | 3,70 | 3,85 | 3,90 | 4,05 | 4,12 | 3,5 |

1. Représente le nuage de points associé à cette série.
2. Calcule le coefficient de corrélation linéaire des caractères X et Y.
3. Détermine une équation de la droite de régression de et représenter cette droite.
4. Donne une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

**8** Le tableau suivant donne la tension artérielle T en fonction de l'âge A d'une population.

| $a_i$ | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 11,8 | 14 | 12,6 | 15 | 15,5 | 15,1 |

1. Représente le nuage de points associé à cette série.
2. Calcule le coefficient de corrélation linéaire. La corrélation est-elle forte ?
3. Détermine une équation de la droite de régression de T en A et une équation de la droite de régression de A en T. Trace ces deux droites.
4. Estime la tension artérielle d'un individu âgé de 70 ans.

## Exercices d'approfondissement

**9** On donne la série double suivante, relative aux voitures selon leur puissance Y et la durée des pneumatiques X (en millier de kilomètres).
1. Calcule le coefficient de corrélation linéaire.
2. Un ajustement affine par les moindres carrés est-il justifié ?
3. Détermine les droites de régressions de Y en X et de X en Y.

| Y \ X | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 8 | 30 | 38 |
| 25 | 5 | 20 | 7 | 32 |
| 30 | 25 | 3 | 2 | 30 |
| Total | 30 | 31 | 39 | 100 |

**10** La résistance à l'avancement d'un poids lourd est une fonction de la vitesse. L'objet de cet exercice est de déterminer la meilleure expression possible de cette fonction dans un intervalle de vitesse compris entre 10 km/h et 100 km/h. Cette résistance est mesurée en kW. Les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau ci-dessous.

| V (km/h) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R (kW) | 2,6 | 5,8 | 9,9 | 15,4 | 23,6 | 34,5 | 49 | 67,2 | 89,1 |

1. Dresse le tableau des valeurs de la série (X,Y), où $X = V^2$ et $Y = \frac{R}{V}$.
2. Donne le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et une équation de la droite de régression de Y en X.
3. Déduis-en une relation entre R et V.
4. Donne une évaluation de la valeur de R pour une vitesse de 100 km/h.

**11*** Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, X désigne la quantité de produit que la clientèle est disposée à acheter, et Y le prix de vente (en millier de FCFA) d'une unité.

| X | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 140 | 120 | 100 | 95 | 85 | 70 |

1. Calcule le coefficient de corrélation.
2. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X. (Les coefficients seront arrondis à $10^{-1}$ près.)
3. Soit $r(x)$ la recette correspondant à la vente de $x$ articles au prix unitaire $y$.
   a) Justifie que : $r(x) = (226,5 - 0,3x)x$.
   b) Étudie les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -0,3x^2 + 226,5x$.
   c) Déduis-en le prix de vente pour lequel la recette est maximale. Calcule cette recette maximale.

**12** Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le rang du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 12 | 13 | 15 | 19 | 21 | 22 |

1. Représente graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G.

2. Calcule la variance V(X) et la cov(X,Y) de X et Y (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).

3. a) Détermine une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X.

b) Trace la droite (D).

4. Donne une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

**13** Les dépenses $x_i$ et les chiffres d'affaires $y_i$ bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 2020 la nomenclature suivante, après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA.

| $x_i$ | 12 | 17 | 11 | 13 | 31 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 99 | 130 | 92 | 108 | 232 | 150 |

1. Construis le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un plan muni d'un repère orthogonal. Tu prendras en abscisse : 1 cm pour une dizaine et en ordonnées 1 cm pour 20 dizaines de millions et comme origine du repère (10 ; 90).

2. Calcule le coefficient de corrélation $r$ de la série statistique. Que peut-on en déduire ?

3. Détermine les équations des deux droites de régression de $y$ en $x$ et de $x$ en $y$ par la méthode des moindres carrés.

4. Quelle sont en deux mois :

a) la dépense si le chiffre d'affaires bimensuel est 2 milliards de FCFA ?

b) le chiffre d'affaires si la dépense bimensuelle est 300 millions ?

**14** Le tableau ci-dessous décrit le nombre moyen $y_i$ d'objets qu'un ouvrier commençant à travailler sur une chaîne de montage produit en un jour, le $x^{ème}$ jour où il travaille sur cette chaîne.

| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 27 | 41 | 46 | 48 | 49 |

1. Le plan (P) est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour un jour en abscisse et 1 cm pour 5 objets en ordonnée. Dans le plan (P), représente le nuage de points associé à la série statistique $(x_i, y_i)$.

2. Détermine les coordonnées du point moyen G de ce nuage et place-le sur le graphique précédent.

3. a) Détermine une valeur approchée à $10^{-2}$ près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X ; Y).

b) Un ajustement affine de ce nuage de points est-il acceptable ? Justifie la réponse.

c) Donne une équation de la droite (Δ) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

d) Représente la droite (Δ) sur le graphique précédent.

4. Détermine le nombre de jours qu'il faut à cet ouvrier pour produire 68 objets ?

**15** Avant de partir en vacances, une personne entreprend un régime afin de perdre du poids, en suivant les conseils d'un nutritionniste. Elle se pèse régulièrement à la fin de chaque semaine de régime, le même jour, à la même heure. Elle note l'évolution de son poids dans un tableau :

| Rang de la semaine : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Poids : $y_i$ (en kg) | 63 | 62,6 | 61,4 | 61 | 61,2 | 60,6 | 60,4 | 59,8 |

1. Représente le nuage de points associé à la série statistique $(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. Tu prendras : 1,5 cm pour 1 semaine en abscisse ; 0,5 cm pour 1 kg en ordonnée.

De plus, tu gradueras l'axe des ordonnées à partir de 59.

2. Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage et place-le sur le graphique précédent.

3. a) Détermine la valeur arrondie à $10^{-2}$ près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i, y_i)$. Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Détermine une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.

4. On admet que cette droite constitue un bon ajustement affine du nuage de points pendant 10 semaines.

a) Construis cette droite sur le graphique.

b) La personne voudrait atteindre le poids de 59 kg. Si son régime dure 9 semaines, selon les conditions ci-dessus, aura-t-elle atteint son objectif ?

**16** On a relevé dans le tableau ci-dessous, les poids (en Kg) respectifs de 6 pères et de leurs fils aînés.

| Poids du père (X) | 62 | 70 | 68 | 69 | 71 |
|---|---|---|---|---|---|
| Poids du fils (Y) | 65 | 68 | 71 | 68 | 73 |

Quel poids devrait avoir le fils aîné d'un homme qui pèse 87 Kg ?

**17** On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'intensité de travail (en Kilojoules par minute) et la fréquence cardiaque de 8 personnes.

| Intensité de travail X | 9,6 | 12,8 | 18,4 | 31,2 | 36,8 | 47,2 | 49,6 | 56,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence cardiaque Y | 70 | 86 | 90 | 104 | 120 | 128 | 144 | 154 |

Quelle devrait être l'intensité de travail d'une personne dont la fréquence cardiaque est égale à 98 ?

**18** On considère la série statistique double ci-après :

| X | 35 | 40 | 35 | 65 | $n$ | 65 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 3 | 4 | 5 | 10 | 8 | 13 | 14 | 15 |

1. Détermine l'entier naturel $n$ sachant que la droite de régression de Y en X passe par le point moyen d'abscisse 65.
2. Calcule le coefficient de corrélation linéaire des caractères X et Y.
3. Détermine une équation de la droite de régression de X en Y.

**19** Soit une série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ à deux variables avec $i \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$. La méthode des moindres carrés a permis de trouver les droites de régression (D) de Y en X et (D') de X en Y telles que : (D') : $y = -0{,}7x + 5{,}6$ et
(D') : $x = -1{,}25y + 2{,}5$.

1. a) Calcule les coordonnées du point moyen associé à cette série.

   b) Déduis-en les valeurs des expressions ; $\sum_{i=1}^{5} x_i$ et $\sum_{i=1}^{5} y_i$.

2. On sait que $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 8130$.

   Déduis-en $\mathrm{Cov}(x\,;y)$ puis $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i$ et $\sum_{i=1}^{5} y_i^2$.

**20** Les droites de régression d'une série double sont :
Droite de régression de X en Y $(D_1) : x = 1{,}25y - 7{,}8$,
Droite de régression de Y en X $(D_2) : y = 0{,}75x + 1{,}3$.
Calcule les coordonnées du point moyen du nuage de points ainsi que le coefficient de corrélation linéaire.

**21** 1, 2, 3, 4 et 5 représentent les cinq valeurs d'une variable X d'une série double $(x_i\,;y_i)$.
On admet que le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0{,}8$ et que la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés a pour coefficient directeur $a = 0{,}425$. Calcule la convariance $\mathrm{Cov}(x, y)$ et la variance de $y$.

**22** On considère le tableau statistique suivant :

| A | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 11,8 | 14 | 12,6 | 15 | 15,5 | 15,1 |

On donne $\bar{X} = 75$ et $\mathrm{Cov}(x, y) = 20$.

1. Trouve $x_3$ et $x_4$.
2. Détermine le coefficient de corrélation linéaire et interprète-le.
3. Établis une équation de la droite de régression de $y$ en fonction de $x$.
4. Quelle serait la valeur de $y$ pour $x = 50$ ?

**23** L'étude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge X a conduit au tableau suivant :

| X (mois) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| P($mg$) | 7 | 13 | 25 | 47 | 88 |

1. On pose $y = \ln P$, où ln désigne le logarithme népérien.

   a) Calcule les différentes valeurs prises par $y$ à $10^{-3}$ près.

   b) Représente le nuage de points représentant la série (X, Y) dans un système d'axes orthonormés (unité 2cm) puis places-y le point moyen G du nuage.

2. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X.
3. Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, détermine le poids de la larve au bout de six mois.

**24** Le mur d'une habitation est constitué par une couche de béton et une couche de polystyrène d'épaisseur variable $x$ en (cm).
On a mesuré la résistance thermique R de ce mur pour différentes valeurs de $x$ et l'on a obtenu les résultats suivants :

| $x$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 2,04 | 2,69 | 3,06 | 3,90 | 4,09 | 6,16 | 2,04 | 6,69 |

1. Représente graphiquement cette série ($x$ en abscisses et R en ordonnées). Peut-on envisager un ajustement affine ?
2. Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre $x$ et R. Conclus.

3. Détermine par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de R en $x$. Représente cette droite (en justifiant sa construction).
4. Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une couche de polystyrène de 23 cm ?

**25** Une épidémie s'est déclarée dans une ville de 200.000 habitants. On a d'abord supposé que chaque malade peut contaminer 5 personnes par jour.
1. Combien faut-il de temps pour que tous les habitants de la ville soient touchés ?
2. On a enregistré chaque jour le nombre de cas qui se sont déclarés. Au septième jour, le tableau des résultats réels a été comme suit :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 13 | 38 | 106 | 330 | 965 | 2920 |
| $\ln(y_i)$ | 1,4 | 2,6 | 3,6 | 4,7 | 5,8 | 6,9 | 8 |

$x_i$ représente le numéro du jour.
$y_i$ représente le numéro de cas enregistrés.
On pose : $z_i = \ln(y_i)$.
a) Donne une équation de la droite de régression de Z en X. Tu arrondiras les coefficients à $10^{-1}$.
b) Déduis-en une relation entre $y$ et $x$ de la forme $Y = B.A^x$.
3. Si la capacité hospitalière de la ville est de 7000 lits, à quel jour les services hospitaliers seront-ils dépassés ?
4. Combien de jours faut-il pour que tous les habitants de la ville soient atteints, si aucune mesure n'est prise pour stopper cette épidémie ?

**26** Le tableau suivant donne le taux y (exprimé en %) de sortants du système éducatif sans aucun diplôme ou avec le niveau de fin de primaire, rapporté au total des sortants.

| Année | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Taux $y_i$ (en %) | 21,3 | 18,5 | 17,2 | 16,6 | 15,4 | 15,3 | 13,2 | 14,2 | 13,6 | 13,4 |

1. a) Représente la série $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.
b) Quel type d'ajustement suggère la forme de ce nuage ?
2. On pose $t_i = \ln(x_i)$ et on considère la série statistique $(t_i\,;y_i)$.
a) Donne une équation de la droite de régression de $y$ en $t$. On arrondira les coefficients à $10^{-2}$.
b) Déduis-en une relation entre $y$ et $x$ de la forme $y = a \ln x + b$.
c) Estime le taux de sortants non diplômés en 2007.

**27** L'entreprise Nile est spécialisée dans la livraison de produits conditionnés en colis cartonnés. On a observé l'évolution du nombre de colis livrés par cette entreprise entre 2005 et 2013 :

| Année | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Nombre $y_i$ de colis | 7438 | 9015 | 9948 | 10854 | 12309 | 12740 | 13622 | 13958 | 14630 |

1. Représente graphiquement la série $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 1000 colis en ordonnée).
2. On pose $t_i = \ln(x_i)$ et $z_i = \ln(y_i)$. On s'intéresse à présent à la série statistique $(t_i\,;z_i)$.
a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t_i\,;z_i)$.
b) Détermine une équation de la droite de régression de $z$ en $t$ par la méthode des moindres carrés.
c) Déduis-en une relation entre $y$ et $x$ de la forme $y = \alpha X \beta$.
d) Déduis-en une estimation du nombre de colis livrés en 2022.

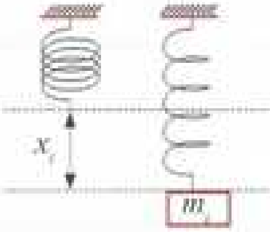
**28** On donne la série statistique suivante :

| X | 1 | 2 | 7 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |

1. Représente le nuage de points.
2. Devine le signe et la valeur du coefficient de corrélation.
3. Calcule le coefficient de corrélation, la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite de régression.

**29** Dans un TP de physique, on a les données suivantes :

| $x_i$ | 0 | 0,5 | 1,1 | 1,5 | 1,9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |




1. Représente le nuage de point.
2. Détermine la droite de régression $m$ en $x$.
3. Détermine $x$ si $m = 51.75$ Kg.

**30** Le tableau suivant donne l'évolution des ventes de lait, en hectolitres, dans une région pendant cinq années consécutives.

| Rang de l'année : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volume des ventes en hectolitres | 114671 | 114772 | 115621 | 114671 | 116321 |

1. Détermine par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ sous la forme $y = ax + b$.
Les coefficients $a$ et $b$ sont à arrondir à $10^{-1}$.
2. À l'aide de l'équation précédente, estime le volume des ventes l'année de rang 6.
Arrondis à l'unité.

**31** Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de clients d'une entreprise de vente par internet pendant cinq années consécutives.

| Rang de l'année : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de clients : $y_i$ | 2463 | 5817 | 11210 | 20620 | 34900 |

1. Détermine par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de $y$ en $x$.
Les coefficients $a$ et $b$ sont à arrondir à $10^{-1}$.
2. À l'aide de l'équation précédente, estime le volume des ventes l'année de rang 7.
Arrondis à l'unité.

**32** Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

| Teneur en carbone : $x_i$ | 70 | 60 | 68 | 64 | 66 | 64 | 62 | 70 | 74 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Charge de rupture (en kg) : $y_i$ | 87 | 71 | 79 | 74 | 79 | 80 | 75 | 86 | 95 | 70 |

1. Représente graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
Tu prendras en abscisse 1 cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60 et en ordonnées 1 cm pour 2kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.
2. Calcule les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3. Détermine la valeur approchée (arrondie à $10^{-3}$) du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables $x$ et $y$.
4. Détermine par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression D de $y$ en $x$. Les coefficients $a$ et $b$ sont à arrondir à $10^{-1}$.
5. Trace la droite (D) sur le graphique.
6. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donne une estimation de sa charge de rupture.

**33** Pour étudier la progression d'une épidémie de grippe, une enquête est faite auprès d'un échantillon de 1000 personnes. Le tableau ci-dessous donne le nombre N($t$) d'individus ayant été contaminés, à la date $t$ et exprimée en jours.

| $t$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N($t$) | 88 | 172 | 306 | 420 | 485 | 500 |

On considère qu'après 20 jours, l'épidémie est terminée. C'est-à-dire que le nombre total de personnes ayant été contaminées ne varie plus.
1. a) Dans un plan muni d'un repère orthogonal, place les points de coordonnées ($t$, N($t$)).

(Unités graphiques 0,5 cm pour 1 jour en abscisse et 1 cm pour 50 individus en ordonnée).

b) Détermine la valeur arrondie $10^{-2}$ du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double donnée dans le tableau. Un ajustement affine est-il envisageable ?

c) Détermine une équation de la droite de régression de N en $t$ et trace-la. Les coefficients seront arrondis à l'unité.

2. On considère la fonction définie sur [0 ; 40] par : $f(x) = 500(1 - e^{-0,2x})$.

a) Recopie et complète le tableau suivant (les résultats seront arrondis à l'unité).

| $t$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | | | | | | | |

b) Trace la courbe représentative de $f$ dans le repère précédent.

c) Détermine graphiquement quelle est, de la droite de la première question ou de la courbe précédente, celle qui ajuste le mieux le nuage et utilise-la pour indiquer la date à laquelle le quart de la population étudiée a déjà été atteint.

**34** Le tableau suivant correspond aux émissions de gaz à effet de serre (en millions de tonnes équivalent $CO_2$) relevées en France.

| Année | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Émissions GES | 565 | 561 | 563 | 554 | 558 | 557 | 561 | 545 | 535 | 532 |

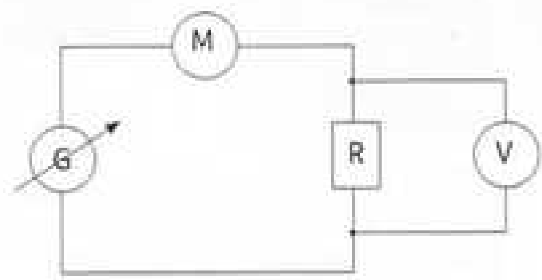
(source : Ifen).

1. Calcule les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du moyen G.
2. On souhaite ajuster le nuage de points par une droite (D) passant par le point G.

a) On admet que (D) a pour coefficient directeur – 3,33.
On note $y = -3,33x + b$ une équation de (D).
Calcule le nombre $b$.

b) En supposant que la tendance observée sur ces dix années se poursuive, estime la quantité d'émissions de gaz à effet de serre en France en 2015.

**35** Dans le circuit électrique ci-dessous, un générateur de tension réglable permet d'obtenir les mesures résumées dans le tableau suivant, où U est la tension (en V) aux bornes du résistor et I l'intensité du courant dans le circuit (en A).




| U($x$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I($y$) | 0 | 0,039 | 0,079 | 0,118 | 0,160 | 0,198 | 0,238 | 0,277 | 0,316 | 0,355 |

a) Détermine une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points
(les résultats seront arrondis à $10^{-1}$).

b) La loi d'Ohm s'écrit U = RI avec U en V, R en W et I en A. Déduis-en la valeur de la résistance R du résistor.

**36** Les chiffres d'affaires d'une entreprise de l'année 2008 à 2012 sont représentés dans le tableau suivant : $x_i$ désigne le rang de l'année et $y_i$ le chiffre d'affaires en millions de francs.

| Année | 2000 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année (X) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Chiffre d'affaires en millions de francs (Y) | 504 | 504 | 504 | $y_1$ | 735 |

Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est : $y = 57{,}3x + 516{,}2$.

1. Détermine les coordonnées du point moyen G.
2. Déduis-en la valeur de $y_1$.
3. En quelle année l'entreprise pourrait-elle atteindre le chiffre d'affaires de un milliard quatre cent trente-trois millions ?

**37** Lors d'un test, les notes obtenues par 4 candidats, aux épreuves de chant et de musique, sont indiquées dans le tableau suivant.

| Musique ($x_i$) | $\alpha$ | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| Chant ($y_i$) | 2 | 4 | 5 | $\beta$ |

1. On sait que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\bar{X} = 5$ et $\bar{Y} = 4{,}5$.
Détermine les notes $\alpha$ et $\beta$ respectivement obtenues par deux candidats différents en musique et en chant.
2. Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interprète le résultat obtenu.
3. Détermine une équation de la droite de régression de $y$ en $x$.

**38** Le tableau suivant indique, pour une même distance les variations des quantités $y_i$ d'essences consommées de certaines voitures suivant leurs puissances $x_i$ ($x_i$ est exprimé en chevaux et $y_i$ en litres).

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10 | 12 | 20 | 23 | 26 | 30 | 32 | 35 |

1. Représente graphiquement le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal : 1 cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval ; 1 cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres.
2. Calcule les coordonnées du point moyen G et place ce point dans le même repère.
3. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire $r$ associé à cette série statistique.
b) Interprète ce résultat.
4. Par la méthode des moindres carrés, détermine une équation de la droite de régression de $y$ en $x$.
5. a) Donne une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance de 12.
b) Donne une estimation de la puissance d'une voiture qui a consommée 50 litres d'essence pour cette distance.

**Situation complexe**

**39** Votre professeur d'Histoire-Géographie vous donne le tableau suivant, publié en août 2019 dans une revue économique, donne la part du temps partiel au sein de la population active (les valeurs pour 2020 et 2024 sont le résultat d'une estimation).

| Année $x_i$ | 2000 | 2005 | 20010 | 2015 | 2017 | 2020 | 2024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Part du temps partiel en % : $y_i$ | 8,3 | 11 | 12 | 15,6 | 16,8 | 18 | 20 |

On étudie la série statistique $(x_i ; y_i)$ pour $2000 \leq x_i \leq 2017$.
En utilisant tes connaissances en statistique, dis si les estimations pour 2020 et 2024 faites par la revue sont exactes.

**Coup de Pouce**

**11** 1. $r = -0{,}98$.
2. $y = 0{,}3x + 226{,}5$
3. a) si $x \to y$
On a $r = (x) = x \times y = (-0{,}3\,x + 226{,}5)\,x$

**14** 2. G(5 ; 42,2)
3. a) $r = 0{,}89$
b) $0{,}87 < |r| \leq 1$ l'ajustement affine est acceptable.
c) (D) $y = 2{,}55\,x + 29{,}45$
4. Pour $g = 68$ il faut 16 jours au moins pour les produire.

Leçon 12

# NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

*Les fractales*

En mathématiques, ces curiosités géométriques sont des figures dont les détails se répètent à toutes les échelles. Autrement dit, si on zoome sur une partie d'une fractale, on retrouve une structure qui se reproduit encore et encore, de plus en plus petite... jusqu'à l'infini. Il existe plusieurs types de fractales. Certains sont définis par une relation de récurrence liant des nombres complexes entre eux.

## SITUATION D'APPRENTISSAGE


Dans un lycée moderne, lors d'une séance de cours, un professeur de mathématiques d'une classe de Terminale D construit quatre points dans un repère orthonormé direct comme sur la figure ci-contre.

Il affirme que l'on peut vérifier que ces points appartiennent à un même cercle ou pas à l'aide des nombres complexes.

Impressionnés par les propos de leur professeur, les élèves de cette classe décident d'étudier le lien entre les nombres complexes et la géométrie.

## HABILETÉS ET CONTENUS

### 1 Nombres complexes et configurations du plan

*Connaître :*

Les caractérisations complexes :

- de points alignés
- de deux droites parallèles
- de deux droites perpendiculaires
- de triangles particuliers
- de points cocycliques

*Déterminer :*

- des lieux géométriques à l'aide de nombres complexes
- la nature d'un triangle, d'un quadrilatère en utilisant les caractérisations complexes

*Construire :*

des lieux géométriques

### 2 Nombres complexes et transformations du plan

*Connaître :*

- la définition d'une similitude directe
- les éléments caractéristiques d'une similitude directe
- les formules relatives à l'écriture complexe :
  - d'une translation
  - d'une symétrie centrale
  - de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses
  - de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées
  - d'une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$
  - d'une rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$
  - d'une similitude directe

*Reconnaître :*

l'écriture complexe :

- d'une translation
- d'une symétrie centrale
- d'une symétrie orthogonale par rapport à l'un des axes de coordonnées
- d'une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées
- d'une homothétie
- d'une rotation
- d'une similitude directe

*Déterminer :*

- l'écriture complexe :
  - d'une translation
  - d'une symétrie centrale
  - d'une symétrie par rapport à l'un des axes de coordonnées
  - d'une homothétie
  - d'une rotation
  - d'une similitude directe
- l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un angle, par une transformation dont on connaît l'écriture complexe
- les éléments caractéristiques, connaissant l'écriture complexe :
  - d'une translation
  - d'une symétrie centrale
  - d'une symétrie par rapport à l'un des axes de coordonnées
  - d'une homothétie
  - d'une rotation
  - d'une similitude directe

*Construire :*

l'image d'un point par une similitude directe

## INSTALLATION DES HABILETÉS

### Activité 1 Nombres complexes et configurations du plan

#### 1.1. Vecteurs du plan et angles orientés

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

1. Soient A et B deux points distincts du plan, repérés par leurs coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ et d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.

a) Compare $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_B - z_A$. Déduis-en AB en fonction de $z_A$ et $z_B$.

b) On admet qu'il existe un unique point M du plan tel que :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

Exprime mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$ en fonction de arg $z_{\overrightarrow{AB}}$ puis de arg$(z_B - z_A)$.

2. Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

a) Exprime $\frac{CD}{AB}$ en fonction de $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

On admet que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$.

b) Exprime mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ en fonction de $\arg \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ puis de $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

**Synthèse**

Pour tous points A, B, C et D du plan, d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ ; $AB = |z_B - z_A|$.
- mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} + 2k\pi = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$.

mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} + 2k\pi = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

## Exercices de fixation

**1.1.1** Réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes.

Soient $E \neq F$ et $G \neq H$ quatre points du plan d'affixes respectives $z_E$, $z_F$, $z_G$ et $z_H$. Alors,

a) $z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E$ ; b) $EF = |z_F| - |z_E|$

c) $\frac{HG}{EF} = \left|\frac{z_G - z_H}{z_F - z_E}\right|$

d) mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{EF}}) = \arg(z_{\overrightarrow{EF}}) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

e) mes$(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}}) = \arg \frac{z_F - z_E}{z_H - z_G} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**1.1.2** A et B sont deux points d'affixes respectives $2 + 3i$ et $3 + 2i$.

Détermine AB et mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$.

**1.1.3** M, N, Q et P sont des points d'affixes respectives $2i$, $-1 + i$, $\sqrt{3} + 2i$ et $\sqrt{3} + i$.

Détermine mes$(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP}})$.

### 1.2. Caractérisations complexes de points alignés, de droites parallèles, de droites perpendiculaires et de points cocycliques

1. On donne la figure 1 ci-contre.

Les points A, B et C sont alignés.

Détermine l'affixe de chacun des points images A, B et C, puis calcule le nombre complexe suivant :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

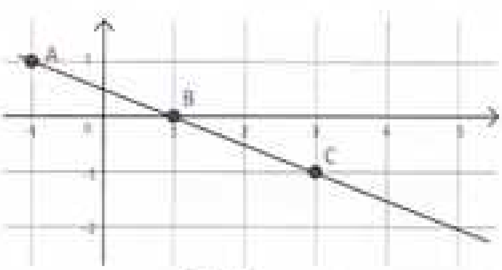



Figure 1

2. On donne la figure 2 ci-contre.

a) Donne la position relative des droites (CF) et (AD).

b) Calcule :

$\frac{z_F - z_C}{z_D - z_A}$.

c) Donne la position relative des droites (ED) et (BC), puis de (CF) et (AB) et détermine $\frac{z_D - z_E}{z_C - z_B}$.

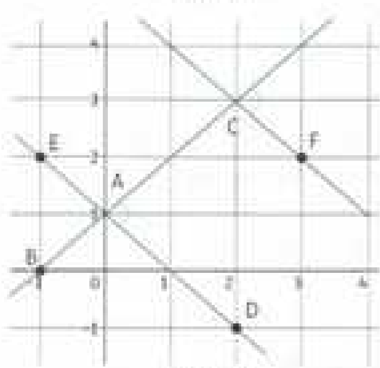



Figure 2

3. On donne M, N, Q et P des points d'affixes respectives $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $-2i$ et 2.

a) Justifie que les points M, N, Q et P sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

b) Détermine $\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_M}$ ; $\frac{z_Q - z_N}{z_P - z_N}$.

Pour tous points A, B, C et D du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$, on admet que :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel non nul.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre réel non nul.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un nombre imaginaire pur non nul.
- Les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ est un nombre réel non nul.

## Exercices de fixation

**121** Soient E, F, G et H quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives $z_E$, $z_F$, $z_G$ et $z_H$.
Recopie et complète chaque phrase par : cocycliques ; alignés ; perpendiculaires ou parallèles.

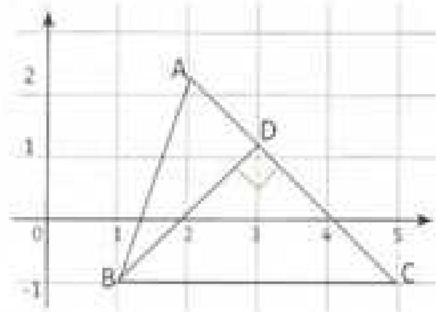
1. $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = -7$, donc E, F et G sont...
2. $\frac{z_H - z_E}{z_G - z_E} : \frac{z_H - z_F}{z_G - z_F} = \frac{1}{2}$, donc E, F, G et H sont...
3. $\frac{z_H - z_F}{z_G - z_E} = 3$, donc les droites (EH) et (FG) sont...
4. $\frac{z_H - z_F}{z_G - z_E} = 2i$, donc les droites (FH) et (EG) sont...

**122** On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$ définies par :
$z_A = -2 - 10i$, $z_B = 8 - 6i$, $z_C = 6 + 6i$ et $z_D = -4 + 2i$.
Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**123** On considère les points L, M, N, Q et P d'affixes respectives $z_L$, $z_M$, $z_N$, $z_Q$ et $z_P$ définies par : $z_L = 9$, $z_M = 3 + 3i$, $z_N = 5 - 3i$, $z_Q = -1 - 5i$ et $z_P = -1$.
1. Démontre que les droites (MQ) et (NP) sont perpendiculaires.
2. Démontre que les points L, M, P et Q sont cocycliques.

### 1.3. Caractérisations complexes des triangles particuliers.

1. Soient E, F et G trois points du plan tels que : $z_E = i$, $z_F = -1 + 2i$ et $z_G = 1 + 2i$.
   a) Détermine $\frac{EG}{EF}$ puis déduis la nature du triangle EFG.
   b) Écris le nombre complexe $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$ sous la forme exponentielle.
2. Soient P, Q et R trois points du plan tels que : $z_P = 2$, $z_Q = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_R = -1 - i\sqrt{3}$.
   a) Détermine $\frac{PR}{PQ}$ et arg $\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}$. Déduis-en la nature du triangle PQR.
   b) Écris le nombre complexe $\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}$ sous la forme exponentielle.
3. On donne la figure ci-contre sur laquelle les triangles ADB et BDC sont tous deux rectangles en D.




   a) Donne les affixes des points A, B, C et D.
   b) Détermine la nature des nombres complexes $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ et $\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}$.
   c) Détermine $\left|\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right|$ et déduis-en la nature finale du triangle BDC.

**Synthèse**

Pour tous points A, B et C du plan deux à deux distincts, d'affixes respectif $z_A$, $z_B$ et $z_C$, on admet que :

- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.

## Exercices de fixation

**[illegible]** Soient M, N et O trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives $z_M$, $z_N$ et $z_O$.
Réponds par vrai ou par faux.

1. $\frac{z_N - z_O}{z_M - z_O} = -i$, donc le triangle OMN est isocèle et rectangle en O.
2. $\frac{z_M - z_O}{z_N - z_O} = 2i$, donc le triangle OMN est isocèle en O.
3. $\frac{z_O - z_N}{z_M - z_N} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc le triangle OMN est équilatéral.
4. $\frac{z_M - z_O}{z_N - z_O} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc le triangle OMN est isocèle en O.

**[illegible]** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$ définies par :
$z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2 + i$, et $z_C = 2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.
Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.

**[illegible]** On considère les points M, N et P d'affixes respectives $z_M$, $z_N$ et $z_P$ définies par :
$z_M = -2 + 4i$, $z_N = 2 + 4i$, et $z_P = 2i$.
Démontre que le triangle MNP est isocèle et rectangle en P.

## Activité 2 Nombres complexes et transformations du plan

### 2.1. Transformations élémentaires du plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. On donne un point M du plan d'affixe $z$ tel que $z = x + iy$ et un point $\Omega$ d'affixe $\omega$.
   a) Place M et exprime en fonction de $z$, les affixes des points $M_1$ et $M_2$, images respectives de M par la symétrie orthogonale d'axe (OI) et symétrie orthogonale d'axe (OJ).
   b) Soient A et A' deux points du plan symétriques par rapport au point $\Omega$.
   On rappelle que A, A' et $\Omega$ vérifient la relation suivante : $\overrightarrow{\Omega A'} = -\overrightarrow{\Omega A}$.
   En utilisant les écritures complexes des deux vecteurs, exprime $z_{A'}$ en fonction de $z_A$ et $\omega$.
   Déduis-en l'écriture complexe de la symétrique centrale de centre O.
2. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$.
On rappelle que pour tous points A et A' du plan, A' = $t_{\vec{u}}$ (A) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.
En utilisant le second membre de l'équivalence, donne l'expression de $z_{A'}$ en fonction de $z_A$ et $b$.
3. Soient $h_{(\Omega,\alpha)}$ l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $\alpha$ et A et A' deux points du plan.
On rappelle que A' = $h_{(\Omega,\alpha)}$(A) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega A'} = \alpha\overrightarrow{\Omega A}$.
En utilisant les écritures complexes des deux vecteurs, exprime $z_{A'}$ en fonction de $z_A$ et $\omega$.
4. Soient $r_{(\Omega,\theta)}$ la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle orienté $\overline{\theta}$ et A et A' deux points du plan.

On rappelle que $A' = r_{(\Omega,\theta)}(A) \Leftrightarrow \Omega A' = \Omega A$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) = \theta + k2\pi \; [k \in \mathbb{Z}]$.
Écris le nombre complexe $\frac{z_{A'} - \omega}{z_A - \omega}$ sous la forme exponentielle et déduis-en l'écriture de $z_{A'}$ en fonction de $z_A$ et $\omega$.

**Synthèse**

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.
- La translation $t_{\vec{u}}$ a pour écriture complexe : $z' = z + b$ où $b$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
- L'homothétie $h_{(\Omega, a)}$ a pour écriture complexe $z' = a(z - \omega) + \omega$ où $\omega$ l'affixe de $\Omega$.
- La rotation $r_{(\Omega, \theta)}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ où $\omega$ l'affixe de $\Omega$.

## Exercices de fixation

**2.1.1** Relie chaque écriture complexe à la transformation correspondante.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ | • | • | symétrie orthogonale d'axe (OI) |
| $z' = z + 2i$ | • | • | symétrie centrale de centre O |
| $z' = \bar{z}$ | • | • | symétrie orthogonale d'axe (OJ) |
| $z' = -\bar{z}$ | • | • | rotation |
| $z' = -3z$ | • | • | translation |
| $z' = -z$ | • | • | homothétie |

**2.1.2** Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations complexes suivantes :
$z' = z + i + 1$, $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 1 - 3i) - 1 + 3i$ et $z' = -2(z - i) + i$.

**2.1.3** $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe $2 - i$, A est le point d'affixe $1 + i$.
$t$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ ; $r$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.
Détermine $t(A)$ et $r(A)$.

### 2.2. Similitudes directes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

#### a) Définition

1. Parmi les nombres complexes suivants, détermine celles qui sont sous la forme $az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ : $4z^2 + 1 + i$ ; $iz - 1$ ; $(1 + i)\bar{z} + 2 - 3i$ et $\sqrt{5}z - 2 - i$.
2. Justifie que l'écriture complexe d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation de centre quelconque, peut s'écrire sous la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
3. On considère la transformation complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
   a) Détermine la transformation complexe pour $a = 1$.
   b) On suppose $a \neq 1$. On pose $\omega = \frac{b}{1 - a}$.
   Détermine l'image de $\Omega$ et compare le à $\Omega$. ($\omega$ est l'affixe de $\Omega$)
   c) Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes distincts d'images respectives $z_1'$ et $z_2'$.
   Détermine le rapport $\frac{|z_1' - z_2'|}{|z_1 - z_2|}$ et Arg $\frac{z_1' - z_2'}{z_1 - z_2}$.

Synthèse

- Les transformations d'écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ sont des similitudes directes.
- Les translations, les homothéties et les rotations sont des similitudes directes.
- Si $a = 1$, alors la similitude directe est une translation.
- Si $a \neq 1$, alors la similitude directe admet pour centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$, pour rapport $|a|$ et pour angle Arg $a$.

## Exercices de fixation

**2.2.1** Dans chaque cas ci-dessous, indique s'il s'agit de l'écriture complexe d'une similitude directe ou non.

a) $z' = z^2 + i + 1$ ; b) $z' = (1 + 2i)\,\overline{z} + 1 - i$ ;

c) $z' = i\sqrt{2}z - 5$ ; d) $z' = (1 - i)\,z$ ;

e) $z' = -2z + 3 + 7i$ ; f) $z' = \overline{z}\,z + 4 - i$.

**2.2.2** Détermine les éléments caractéristiques de chacune des similitudes directes dont les écritures complexes sont :

$z' = -3iz + 1 - i$ et $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 1 + 2i$.

**2.2.3** Soit $f$ la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 1 + 2i$.

Détermine les images des points A($1 - i$), B($-2i$) et C($2$) par $f$.

### b) Propriétés

Soit $s$ la similitude directe qui n'est ni une translation, ni une homothétie, ni une rotation et d'écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On pose $a = ke^{i\alpha}$. On note $\Omega$ le centre de $s$ et $\omega$ l'affixe $\Omega$, et un argument de $a$.

1. Démontre que l'écriture complexe de $s$ s'écrit : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.
2. Démontre que pour tout point M d'image M' par $s$, on a :

$\Omega M' = k\Omega M$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $s$ la similitude directe de centre $\Omega(1 + i)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{9}$.

a) Place le point A($2 - i$).

b) Construis le point P tel que : P ∈ [ΩA) et ΩP = 2 ΩA.

Construis le point E tel que : ΩE = ΩP et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) = -\frac{\pi}{9}$.

c) Construis le point R tel que : ΩR = ΩA et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega R}}\right) = -\frac{\pi}{9}$.

Construis le point T tel que : R ∈ [ΩT) et ΩT = 2ΩR.

d) Que constates-tu par rapport aux positions des points E et T ?

Synthèse

Soit $s$ une similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$, de rapport $k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$) et d'angle $\alpha$.

- L'écriture complexe de $s$ est : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.
- $s(M) = M' \Leftrightarrow \Omega M' = k\Omega M$ et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \alpha$.

### 2.3. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

On définit par $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ l'écriture complexe d'une similitude directe.
Détermine dans chaque cas suivant la nature et les éléments caractéristiques de la similitude.

- $a = 1$
- $a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$
- $|a| = 1$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$
- $|a| \neq 1$ et $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

**Synthèse**

Soit S une similitude directe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$.
- Si $a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, alors S est l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $a$.
- Si $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors S est la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\operatorname{Arg}(a)$.
- Si $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors S est la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $|a|$ et d'angle $\operatorname{Arg}(a)$.

## Exercices de fixation

**2-3-1** Donne la nature des similitudes directes dans chacun des cas suivants.

1. $z' = (1 - i)z$ ; 2. $z' = iz - 5$ ; 3. $z' = -2z + 3$ ; 4. $z' = z + i$.

**2-3-2** Détermine les éléments caractéristiques des transformations complexes suivantes :

a) $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1$ ; b) $z' = -iz - 2 - 3i$ ;
c) $z' = -4z + 2 + 2i$ ; d) $z' = z + 5 - 9i$.

**2-3-3** Soient $f(z) = 2z + i$ et $g(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ deux transformations complexes.

a) Détermine $f o g(z)$.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f o g$.

# APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

**Exercice 1 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires, trois points sont alignés**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $-2i$ ; $3+i$ ; $1+i$ ; $3-i$ et 2.

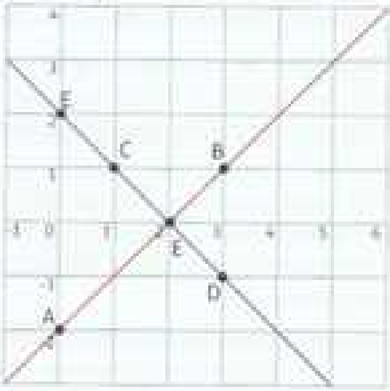
a) Place les points A, B, C, D et E dans le repère.

b) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) Démontre que les points A, E et B sont alignés.

**Corrigé**

a) Plaçons les points A, B, C, D et E.




b) On a D ≠ C et B ≠ A car $z_D \neq z_C$ et $z_B \neq z_A$.

Calculons $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{3 - i - 1 - i}{3 + i + 2i} = -\dfrac{2}{3}i$. Or $-\dfrac{2}{3}i \in i\mathbb{R}^*$,

donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) Calculons : $\dfrac{z_B - z_A}{z_E - z_A}$.

$\dfrac{z_B - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{3 + i + 2i}{2 + 2i} = \dfrac{3(1+i)}{2(1+i)} = \dfrac{3}{2}$.

$\dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc les points A, E et B sont alignés.

**Méthode**

- Pour démontrer que deux droites déterminées chacune d'elle par deux points sont perpendiculaires :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés aux points identifiant chacune de ces droites.
  - Les deux droites sont perpendiculaires si ce rapport est un nombre imaginaire pur non nul.
- Pour démontrer que trois points sont alignés :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés des différents couples de points.
  - Les trois points sont alignés si ce rapport est un nombre réel non nul.

**Exercice 2 Démontrer que quatre points sont cocycliques et qu'un triangle est rectangle isocèle**

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$2+5i$ ; $1-2i$ ; $9-2i$ ; $10+i$ et $7+2i$.

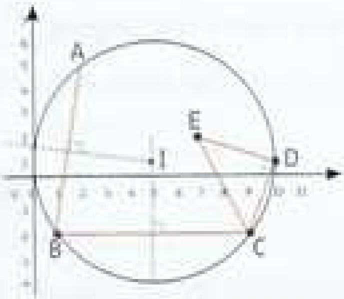
a) Place les points A, B, C, D et E.

b) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

c) Démontre que le triangle CDE est isocèle et rectangle en D.

**Corrigé**

a) Plaçons les points A, B, C, D et E.




b) Les points sont tous distincts, donc on a $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$.

Calculons $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ et $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}$.

$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{10 + i - (2 + 5i)}{9 - 2i - (2 + 5i)} = \frac{8 - 4i}{7 - 7i} = \frac{2(3 + i)}{7}$.

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{10 + i - (1 - 2i)}{9 - 2i - (1 - 2i)} = \frac{9 + 3i}{8} = \frac{3(3 + i)}{8}$

$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{21}{16}$

$\frac{21}{16} \in \mathbb{R}^*$.

Conclusion

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{9 + 3i}{8}$ , donc les points B, D et C sont non alignés et $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \in \mathbb{R}^*$.

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

c) On a : $z_C \neq z_D$ et $z_D \neq z_E$ donc C ≠ E et D ≠ E.

Calculons : $\frac{z_E - z_D}{z_C - z_D}$.

$\frac{z_E - z_D}{z_C - z_D} = \frac{7 + 2i - (10 + i)}{9 - 2i - (10 + i)} = \frac{-3 + i}{-1 - 3i}$

$= \frac{(-3 + i)(-1 + 3i)}{10} = -\frac{10}{10} i = -i$.

Donc le triangle CDE est isocèle et rectangle en D.

**Méthode**

- Il s'agit de démontrer que des points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont le centre n'est pas connu.
  - On vérifie que les points sont distincts deux à deux.
  - On calcule les rapports $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$ et $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$.
  - On vérifie que les points A, B, C et D sont non alignés. C'est le cas lorsque ces rapports ne sont pas des nombres réels.
  - On effectue le rapport des rapports obtenus.
  - Les points sont cocycliques si le rapport de ces rapports est un nombre réel non nul.
- Pour démontrer qu'un triangle est isocèle et rectangle :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés des différents couples de points constitués du probable sommet où le triangle est rectangle.
  - Le triangle est isocèle et rectangle si ce rapport est soit le nombre complexe $-i$ ou $i$.

## Exercice 3 Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques d'une similitude directe

a) Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe $3 + i$ et de rapport $-2$.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation complexe dont l'écriture est :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1 + i$.

c) Détermine la similitude directe de centre A d'affixe $1 - 2i$ qui transforme le point B d'affixe $1 - i$ en C d'affixe $-2i$.

**Corrigé**

a) On a : $z' - z_A = -2(z - z_A)$.

C'est-à-dire $z' - (3 + i) = -2[z - (3 + i)]$.

D'où $z' = -2z + 9 + 3i$.

b) La transformation complexe est sous la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 + i$ ; $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$.

Donc c'est une similitude directe de rapport $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, d'angle $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-(1+i\sqrt{3})}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Comme la transformation complexe est celle d'une similitude directe, elle est sous la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $\begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2i = a(1-2i)+b \\ -2i = a(1-i)+b \end{cases}$

D'où $a = i$ et $b = -1 - 3i$.

L'écriture complexe de cette similitude est donc $z' = iz - 1 - 3i$.

On a : $a = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Cette similitude est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre A d'affixe $1 + 2i$.

**Méthode**

- Pour déterminer l'écriture complexe d'une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$, on applique la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on remplace les vecteurs par leurs affixes.
- Pour déterminer l'écriture complexe $z' = az + b$ d'une similitude directe dont on connaît deux points et leurs et leurs images, on remplace dans l'écriture complexe les affixes des deux points et les affixes de leurs images, puis on résout un système pour trouver $a$ et $b$.
- La nature de la similitude directe dépend de $a$.

## Exercice 4 Déterminer les images de droites et cercles, les lieux géométriques

1. On considère la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 2iz + 1$.
   a) Détermine l'image de la droite (D) d'équation $y = x + 1$ par S.
   b) Détermine l'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A d'affixe $1 + i$ et de rayon 3 par S.
2. Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ tels que : $|z' + 1 - 4i| = 4$.

**Corrigé**

1. a) Posons $z = x + iy$ l'affixe d'un point M appartenant à (D) et $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' image du point M.

En remplaçant $z$ et $z'$ par leurs expressions on obtient :

$z' = 2i(x + iy) + 1$.

D'où $z' = -2y + 1 + i2x$.

On a le système suivant : $\begin{cases} x' = -2y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$

Comme $y = x + 1$, ce système devient :

$$\begin{cases} x' = -2(x+1)+1 \\ y' = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x - 1 \\ y' = 2x \end{cases}$$

On déduit que : $x' = -y' - 1 \Leftrightarrow y' = -x' - 1$.

Ainsi l'image de (D) est la droite d'équation $y = -x - 1$.

b) La transformation complexe est une similitude directe de rapport $|2i| = 2$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $A(1 + i)$ et de rayon 3. On note A' l'image de A par la similitude S.

$S(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = 2i(1 + i) + 1$

$\Leftrightarrow z_{A'} = -1 + 2i$

Donc l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A'(-1 + 2i)$ et de rayon $2 \times 3 = 6$.

**Méthode**

a) Dans l'écriture complexe de la similitude directe, on remplace $z'$ par l'affixe de M' et $z$ par l'affixe de M puis on exprime $y'$ en fonction de $x'$.

b) L'image du cercle $(\mathscr{C})$ par S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre S(A) et de rayon $|2i| \times 3$.

c) Il s'agit d'écrire l'égalité sous la forme $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$.

L'ensemble des points cherché est un cercle.

L'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon $r$ par la similitude directe S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A' et de rayon $kr$ où A' est l'image de A par S et $k$ le rapport de S.

2. Soient M d'affixe $z$ et A un point d'affixe $2 + i$.

$$
\begin{aligned}
|z' + 1 - 4i| = 4 &\Leftrightarrow |2i\,z + 2 - 4i| = 4 \\
&\Leftrightarrow |2i|\left|z + \frac{2-4i}{2i}\right| = 4 \\
&\Leftrightarrow |z - 2 - i| = 2 \\
&\Leftrightarrow |z - z_A| = 2 \\
&\Leftrightarrow \text{AM} = 2.
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble des points recherchés est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 2.

## Résumé de cours

### 1 Nombres complexes et configurations du plan

#### 1.1. Vecteurs du plan et angles orientés

**Propriété** Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}})$.

Autrement dit : mes $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Propriété** Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$ tels que $C \neq D$, alors : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$.

#### 1.2. Caractérisations complexes de points alignés, de droites parallèles et de droites perpendiculaires

##### 1.2.1. Caractérisations complexes de points alignés

**Propriété** A, B et C sont des points tels que $A \neq B$ et $B \neq C$ d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$.
Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

##### 1.2.2. Caractérisations complexes de droites parallèles

**Propriété** A, B, C et D sont des points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

##### 1.2.3. Caractérisations complexes de droites perpendiculaires

**Propriété** A, B, C et D sont des points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

##### 1.2.4. Caractérisations complexes de points cocycliques

**Propriété** A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.
A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

## Résumé de cours

### 1.3. Caractérisations complexes des triangles particuliers

**Propriété** A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

## 2 Nombres complexes et transformations du plan

### 2.1. Définition de transformation du plan et d'écriture complexe

**Définition** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'.

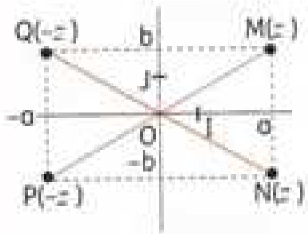
L'application bijective $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe $z$ de M, associe l'affixe $z'$ de M' s'appelle la transformation complexe associée à F.
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à l'application $f$.
L'expression de $z' = f(z)$ s'appelle l'écriture complexe de F.

### 2.2. Transformations élémentaires du plan

#### 2.2.1. Symétries

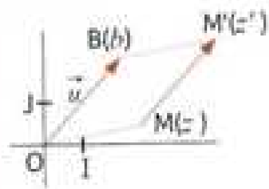
**Propriétés** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\overline{z}$.




#### 2.2.2. Translation

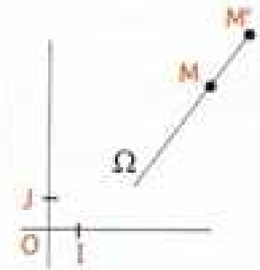
**Propriété** $t_b$ est la translation de vecteur d'affixe $b$.
La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$ a pour écriture complexe : $z' = z + b$.



## Résumé de cours

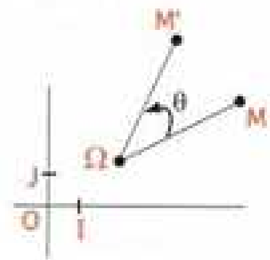
### 2.2.3. Homothétie

**Propriété** H est l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega$ et de rapport $k$, $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega$ et de rapport $k$ a pour écriture complexe : $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$.




### 2.2.4. Rotation

**Propriété** $r$ est la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega$ et d'angle orienté de mesure principale $\theta$.
La rotation de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega$ et d'angle orienté de mesure principale $\theta$ a pour écriture complexe :
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.




### 2.3. Similitudes directes

#### a) Définition

**Définition** Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

*Exemple*

Toute translation, toute homothétie et toute rotation sont une similitude directe.

**Propriétés** Soit s une similitude directe d'écriture complexe :
$z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe $b$.
- Si $a \neq 1$, alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\text{Arg}(a)$.

**Vocabulaire**

Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés ses éléments caractéristiques.

**Remarque**

- Toute rotation d'angle $\alpha$ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\alpha$.
- Toute homothétie de rapport $k$ ($k > 0$) est une similitude directe de rapport $k$ et d'angle nul.
- Toute homothétie de rapport $k$ ($k < 0$) est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle $\pi$.

### b) Propriétés

**Propriétés**

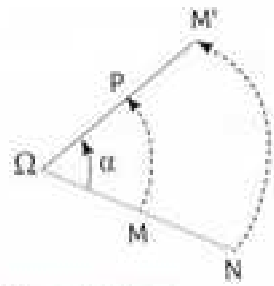
- Toute écriture complexe de la forme : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est celle d'une similitude directe.
- Toute similitude directe est parfaitement déterminée par ses éléments caractéristiques : son centre, son rapport et son angle.
On note $s_{(\Omega, k, \alpha)}$ la similitude directe de centre $\Omega$, de rapport $k (k \in \mathbb{R}^*_+)$ et d'angle $\alpha$.
- L'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$, de rapport $k (k \in \mathbb{R}^*_+)$ et d'angle $\alpha$ est : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.
- Soit $s = s_{(\Omega, k, \alpha)}$. Pour tout point M, on a :

$$s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Point méthode**

Pour construire l'image M' d'un point M par $s_{(\Omega, k, \alpha)}$, on peut :

- soit construire d'abord le point N tel que $\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{\Omega M}$, et ensuite M' tel que $\Omega M' = \Omega N$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \alpha$ ;
- soit construire d'abord le point P tel que $\Omega P = \Omega M$, et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}}\right) = \alpha$, et ensuite M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega P}$.




## 2.4. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

**Propriété** Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Conditions vérifiées par $a$</th><th>Nature et éléments caractéristiques de S</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$</td><td rowspan="2">Si $a \in \mathbb{R}^*$</td><td>$a = 1$</td><td>S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$.</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$</td><td>S est l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $a$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$</td><td>$|a| = 1$</td><td>S est la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\text{Arg}(a)$.</td></tr>
<tr><td>$|a| \neq 1$</td><td>S est la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $|a|$ de d'angle $\text{Arg}(a)$.</td></tr>
</table>

# Exercices

## Exercices de renforcement

**1** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $\frac{5}{3} - 2i$ et $\frac{13}{3} + 6i$.
1. Détermine l'affixe du milieu I de [AB].
2. Détermine les affixes des points U et E tels que AUBE soit un carré (de sens direct).

**2** Dans chaque cas, démontre que les points donnés sont alignés ou non.
1. $A(2 + 6i)$, $B(1 + i)$ et $C(\frac{1}{5} - 3i)$.
2. $D(1 + 2i)$, $E(-1-i)$ et $F(4 + 2i)$.
3. $R(-1)$, $S(-3 + i)$ et $T(2 - \frac{3}{5}i)$.

**3** On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $a = 5 + i$, $b = 3 + i$, $c = -2$, $d = 2 + 6i$ et $e = 32 + 2i$.
1. Calcule $\frac{b-a}{d-c}$. Déduis-en la position relative des droites (AB) et (CD).
2. Calcule $\frac{b-e}{d-c}$. Déduis-en la position relative des droites (EB) et (CD).

**4** On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - 2i$, $b = -2$, $c = 1 + i$ et $d = -4 - 2i$.
Détermine la position relative des droites (AD) et (BC).

**5** On considère les points R, S, T et U d'affixes respectives $r = -3-i$, $s = -2 + 4i$, $t = 3 - i$ et $u = -2$.
Détermine la position relative des droites (RU) et (ST).

**6** On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4i$ et $b = \sqrt{3} + i$.
1. Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Détermine la mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$.

**7** On considère les points $A(2 + i)$, $B(6 + 3i)$, $C(4 + 4i)$ et $D(5 - i)$.
1. Détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u} ; \overrightarrow{AB}})$.
2. Détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}})$.
3. Détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}})$

**8** Détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}})$ dans chaque cas :
a) $A(-1 -i)$, $B(5 + 7i)$, $C(-2 + 2i)$ et $D(2 - i)$.
b) $A(2 + i)$, $B(2 - 3i)$, $C(3i)$ et $D(4 - i)$.

**9** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.
1. Calcule $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2. Déduis-en la nature du triangle ABC.

**10** Détermine la nature du triangle ABC dans chaque cas.
1. $A(-2 + 2i)$, $B(-3 - 6i)$ et $C(1)$.
2. $A(2 - i)$, $B(5 + 2i)$ et $C(1 + 3i)$.
3. $A(1 + i\sqrt{3})$, $B(-1 - i\sqrt{3})$ et $C(-1 + i\sqrt{3})$.

**11** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + \frac{1}{4}i$, $2 - \frac{5}{4}i$ et $3 + \frac{7}{4}i$.
1. Détermine la nature du triangle ABC.
2. Calcule l'affixe du point D tel que ABDC soit un carré.

**12** On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 2-2i$, $b = -1 + 7i$, $c = 4 + 2i$ et $d = -4 - 2i$.
1. Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.
2. a) Détermine l'affixe e du milieu E de [AB].
b) Justifie que : $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$.
c) La droite (AE) est une droite remarquable du triangle CDE. Précise laquelle.

**13** On considère les points $E(-1 - 3i)$, $F(3 - 5i)$ et $G(7 + 3i)$.
1. Détermine la nature du triangle EFG.
2. Soit H le symétrique de E par rapport à l'axe des abscisses.
Démontre que les points E, F, G et H sont cocycliques.

**14** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$ telles que :
$a = 1 + \frac{3}{4}i$ ; $b = 2 - \frac{5}{4}i$ et $c = 3 + \frac{7}{4}i$
1. Place les points A, B et C.
2. Détermine la nature du triangle ABC.
3. Calcule l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

**15** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $-1$ ; $3 + 4i$ et $-3 + 4i$.
a) Détermine l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
b) Démontre que ABDC est un carré.

**16** Soient A, B et C des points non alignés d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

1. Précise la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants : a) $\frac{c-a}{b-a} = -i$ ;
b) $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; c) $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$.

2. Détermine la position des droites (AC) et (AB) dans chacun des cas suivants :
a) $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.
b) $\mathrm{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$.

**17** A et B sont les points d'abscisses respectives $-1$ et $3 - 2i$.
(E) est l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|z - 3 + 2i| = 1$.
(F) est l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|z - 3 + 2i| = |i + 1|$.
Détermine et construis les ensembles (E) et (F).

**18** 1. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|3 - iz| = 5$.
2. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|(2 - i)z - 1 - i| = |(2 - i)z - 1 + 3i|$.
3. Détermine l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}z - 1\right| = |1 - i - iz|$.

**19** Détermine l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $\left|\frac{z-4+i}{z+3i}\right| = 1$.

**20** 1. Détermine l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|(1+2i)z - 2i| = \sqrt{5}$.
2. Détermine l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|\bar{z} + 4 - 3i| = \sqrt{2}$.
3. Détermine l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|z + 7 - \frac{1}{2}i| = |\bar{z} - i|$.

**21** Écris le numéro de chaque question suivi de la lettre qui rend la proposition vraie.
Exemple : 3-c

1. A et B sont les points d'abscisses respectives $2 - i$ et $6 + 5i$.
L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|z - 2 + i| = |z - 6 - 5i|$ est :
a) le milieu du segment [AB] ;
b) la droite (AB) ;
c) la médiatrice du segment [AB] ;
d) le cercle de diamètre [AB].

2. E et F sont les points d'abscisses respectives $i\sqrt{2}$ et $3 - 4i$.
L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que : $|z - 3 + 4i| = \sqrt{2}$ est :
a) le milieu du segment [EF] ;
b) le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{2}$ ;
c) la médiatrice du segment [EF] ;
d) le cercle de centre F et de rayon $\sqrt{2}$.

**22** Détermine l'écriture complexe de :
a) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-4 + 5i$.
b) L'homothétie de centre $A(1 - i)$ et de rapport 2.
c) La rotation de centre $B(3 + 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
d) La symétrie centrale de centre O.

**23** Détermine l'écriture complexe de :
a) la translation de vecteur $\vec{u}\,(-3 ; \sqrt{2} - 1)$ ;
b) l'homothétie de centre $E(1 + 2i)$ et de rapport $-\frac{2}{3}$ ;
c) la rotation de centre $F(-i)$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$ ;
d) la symétrie orthogonale d'axe $(O ; \vec{u})$.

**24** Détermine dans chaque cas la nature et les éléments caractéristiques de l'application ponctuelle s.
a) $s$ a pour écriture complexe : $z' = z + 2 - 3i$ ;
b) $s$ a pour écriture complexe : $z' = -iz + 1$ ;
c) $s$ a pour écriture complexe : $z' = -2z + 3 - 4i$ ;
d) $s$ a pour écriture complexe : $z' = (\sqrt{3} - i)z$.

**25** Détermine dans chaque cas la nature et les éléments caractéristiques l'application ponctuelle $s$.
a) $s$ a pour écriture complexe : $z' = (\sqrt{3} - 1)z + 1$.
b) $s$ a pour écriture complexe : $z' = z - 6 + i$.
c) $s$ a pour écriture complexe : $z' = -z + 2 - 3i$.
d) $s$ a pour écriture complexe : $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.

**26** Détermine dans chaque cas les éléments caractéristiques de la similitude directe $s$.
a) $s$ a pour écriture complexe : $z' = 1z - 1 + 2i$.
b) $s$ a pour écriture complexe :
$z' = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z + 3 - 4i$.
c) $s$ a pour écriture complexe :
$z' = (1 - i)z + 1 + i$.
d) $s$ a pour écriture complexe :
$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

**27** Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.
1. L'application qui au point M d'affixe $z$ associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une homothétie.

2. L'application qui au point M d'affixe $z$ associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont le centre a pour affixe 1.

3. L'application qui au point M d'affixe $z$ associe le point M' d'affixe $z' = (1 - i)z$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

**28** Détermine l'écriture complexe de la similitude directe :
a) de centre O, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ ;
b) de centre $\Omega(-i)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ;
c) de centre $\Omega(1 - 2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

**29** Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :
$z_A = -1 - i$, $z_B = i$, $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 5 + i$.
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

**30** Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :
$z_A = 2 - i\sqrt{3}$, $z_B = 1 - i$, $z_C = 5$ et $z_D = 1 + \sqrt{3} - i$.
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en B et C en D.

**31** Soient A, B et C les points d'affixes respectives $3 - i$, $1 - i$ et $i$.
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A en B et O en C.

**32** 1. Détermine l'ensemble $(\Gamma)$ des points M d'affixe z tels que : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$.
2. Soient E, F et G les points d'affixes respectives $i$, $\sqrt{3}$ et $-4i$.
Détermine l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme E en O et F en G.
3. En utilisant le résultat de la question 2), retrouve l'ensemble $(\Gamma)$ défini au 1).

**33** Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F.
1. F est la rotation de centre $(2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. F est l'homothétie de centre $(1 + 2i)$ et de rapport $\frac{3}{2}$.

**34** Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F.
1. F est l'homothétie de centre $\Omega(3 - i)$ et de rapport $-2$.
2. F est la similitude plane directe de centre $(-2i)$ de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

**35** Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan F dont l'écriture complexe est donnée par :
$z' = (1 - i)z - 2 + i$.

**36** Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2$ ; $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$.
Détermine l'expression complexe de la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

**37** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On considère les points A, C, I et K d'affixes respectives :
$z_A = 0$ ; $z_C = 1 + i$ ; $z_I = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ et $z_K = \frac{1}{2} + i$.
Soit $s$ la similitude plane directe transformant A en I et C en K.
Détermine l'expression complexe et les éléments caractéristiques de $s$.

**38** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives :
$z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$.
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe transformant A en A' et B en B'.

**39** Soit $s$ la similitude directe d'écriture complexe :
$z' = \frac{3+i.3}{4}z + \frac{1-i.3}{2}$
1. Détermine son rapport, son angle et l'affixe de son centre $\Omega$.
2. Démontre que, pour tout point M, distinct de $\Omega$, d'image M' par s, le triangle $\Omega$MM' est rectangle en M'.

**40** Soient A le point de coordonnées (1 ; 0) et B le point de coordonnées (0 ; 1).
1. Soit $f$ la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Détermine l'écriture complexe de $f$.
2. Détermine les points A' et B', images respectives de A et B par $f$.
3. Soit g la similitude directe qui transforme A en B' et B en A'.
a) Détermine l'expression complexe de $g$.
b) Détermine les éléments caractéristiques de $g$.

**41** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 4$ ;
$b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.
1. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

# Exercices

2. On note $k$ le point d'affine $k = -\sqrt{3} + i$, on appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   a) Détermine les affixes de F et G.
   b) Démontre que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
   c) On note H le point tel que COFH soit un parallélogramme. Calcule l'affixe de H.
   d) Le triangle AGH est-il équilatéral ? Justifie ta réponse.

3. On note D le point d'affixe $2i$ et P le centre du cercle circonscrit au triangle OBD. On note R le rayon de ce cercle. Détermine l'affixe de P et le rayon R.

## Exercices d'approfondissement

**42** 1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3(1-i)z + 8i = 0$.
2. Soit A le point du plan complexe d'affixe $2 + 2i$. Soient B et C les points du plan complexe ayant pour affixes les solutions de l'équation précédente.
Représente les trois points A, B, C dans le plan complexe.
Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit M le milieu du segment [BC], et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre M et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
Démontre que les trois points A, B, C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$.
4. a) Détermine les affixes des images des points A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   b) Détermine les affixes des images des points A, B, C par l'homothétie de centre M et de rapport $-1$.

**43** 1. On considère l'équation
(E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
   a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
   b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4)$.
   c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.
   d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
2. On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $-3i$ ; $1-i$ ; $2i$ et $-2-2i$.
   a) Place A, B, C et D dans le plan complexe. (Tu prendras 2 cm pour unité.)
   b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.
3. Soit $s$ la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Démontre que l'écriture complexe de $s$ est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.
   b) Démontre que : $s(B) = C$.
   c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude $s$.

*Extrait BAC 2020, série D, Côte d'Ivoire*

**44** Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$.
On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives $-3$ ; $-1+i$ et $z$.
1. Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de $f(z)$.
2. Détermine et construis :
   a) l'ensemble $(C_1)$ des points M tels que $|f(z)| = 1$ ;
   b) l'ensemble $(C_2)$ des points M tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif ;
   c) l'ensemble $(C_3)$ des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

**45** Dans le plan complexe, on donne les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :
$z_A = -2 + 6i$, $z_B = 1 - 3i$, $z_C = 5 + 5i$, $z_D = 2 + 4i$.
1. Soit S la similitude qui, à tout point M d'affixe $z$, fait correspondre le point M' d'affixe $z'$ déterminée par : $z' = 3iz + 13 - 9i$.
   a) Détermine les éléments caractéristiques de cette similitude.
   b) Détermine l'image par S du point C, du point D.
   c) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
2. Soit R la similitude déterminée par R(B) = C et R(D) = A.
   a) Trouve la relation liant l'affixe $z$ d'un point M et l'affixe $z'$ de son image R(M).
   b) Donne les éléments de cette similitude.
   c) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
   d) Que représente le point D pour le triangle ABC ?

**46** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(E) : $z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i = 0$.
1. a) Démontre que (E) admet une solution réelle, que tu détermineras.
   b) Résous l'équation (E).
2. On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives : $-1+3i$ ; $-2$ ; $-1-i$.

Soit $r$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega$ d'affixe $i$.

a) Place les points A, B et C.

b) Démontre que le point B est l'image du point A par la rotation $r$.

c) Détermine l'antécédent D du point C par $r$. Place D sur la figure.

3. a) Démontre que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

b) Démontre que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

**47** 1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

2. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 + \frac{5}{2}i$.

a) Détermine l'affixe $z_Q$ du point Q, image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.

b) Détermine l'affixe $z_R$ du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Détermine l'affixe $z_S$ du point S, image du point P par la rotation $r$ de centre A et de rapport $-\frac{\pi}{2}$.

d) Place les points P, Q, R et S.

3. a) Démontre que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calcule $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

Déduis-en la nature du parallélogramme PQRS.

c) Démontre que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

**48** Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4 + 4\sqrt{3}i$, $z_B = 4 - 4\sqrt{3}i$ et $z_C = 8i$.

a) Calcule le module et un argument de $z_A$.

b) Donne la forme exponentielle de $z_A$ et $z_B$.

c) Démontre que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont tu préciseras le rayon.

d) Place les points A, B et C dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

2. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A$, $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_B$ et $z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_C$.

a) Démontre $z_{B'} = 8$.

b) Calcule le module et un argument de $z_{A'}$.

3. On note $z_M$, $z_N$ et $z_P$ les affixes des milieux respectifs de M, N et P des segments [A'B], [B'C] et [C'A].

a) Calcule $z_M$ et $z_N$.

b) On admet que $z_P = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$. Donne la nature du triangle M, N et P. Justifie ta réponse.

**49** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifie que l'écriture complexe de la similitude directe S telle que :

S(O) = A, S(A) = B est $z' = (1 - i)z + i$.

2. Précise les éléments caractéristiques de S (on notera $\Omega$ le centre de S).

3. On considère la suite de points $A_n$ telle que :

- $A_0$ est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note $z_n$ l'affixe de $A_n$ (on a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

a) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

b) Détermine, en fonction de $n$, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$. Compare les normes de ces vecteurs et calcule une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}})$.

c) Déduis-en une construction du point $A_{n+1}$, connaissant le point $A_n$.

Construis les points $A_3$ et $A_4$.

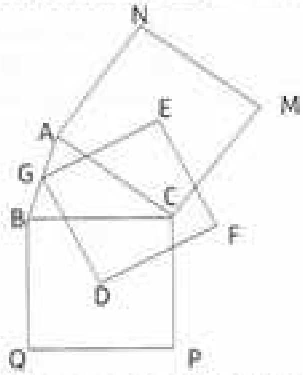
4. Quels sont les points de la suite $(A_n)$ appartenant à la droite $(\Omega_B)$.

## Situation complexe

**50** À l'occasion de la journée Mathématiques organisée par le club Mathématiques d'un lycée, des élèves ont décoré par différentes figures géométriques les murs de la salle du club Mathématiques.

La figure ci-après, représentant l'une d'elles, est constituée d'un triangle ABC de sens direct et de deux carrés BCPQ et ACMN construits sur les côtés [BC] et [AC] du triangle ABC.

Les points D et E sont les centres respectifs de ces deux carrés. Les points G et F sont les milieux respectifs des segments [AB] et [MP].




Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion Terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que le quadrilatère EGDF est un carré. Les autres n'étant pas d'accord, tu es donc sollicité(e) pour vérifier cette affirmation en utilisant les nombres complexes.
En te servant des nombres complexes, vérifie cette affirmation.

## Coup de Pouce

**44** Écris la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction la partie réelle et imaginaire de $z$ pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$.
$f(z)$ est un réel strictement négatif si et seulement si $\text{Im}\, f(z) = 0$ et $\text{Re}\, f(z) < 0$.
$f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}\, f(z) = 0$.

**50** a) Exprime les affixes des milieux de chaque segment en fonction des affixes des extrémités.

Ex : $z_G = \frac{z_A + z_B}{2}$ et prouve que $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{DF}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{GE}$ se déduit de $\overrightarrow{GD}$ par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Utilise les écritures complexes de $R_{(C;\frac{\pi}{2})}(B) = P$ et $R_{(C;\frac{\pi}{2})}(A) = M$ pour exprimer les affixes de $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GD}$ en fonction des affixes de A, B et C.

**Session 2021** **Série D** **Durée : 4H** **Coefficient : 4**

## Exercice 1

Pour chaque énoncé, écris Vrai si l'énoncé est vrai ou bien Faux si l'énoncé est faux.
Aucune justification n'est demandée.

| N° | Énoncé |
|---|---|
| 1 | La fonction ln est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. |
| 2 | La fonction ln est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. |
| 3 | On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$. La suite u est une suite arithmétique. |
| 4 | Soit $f$ est une fonction numérique dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe deux nombres réels $m$ et M tels que pour tout $x$ élément de $[a , b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. |

## Exercice 2

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris sur ta feuille le numéro de chaque énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | Énoncé incomplet | Réponses | |
|---|---|---|---|
| 1 | Soit $u$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ La suite $u$ a pour limite ... | A | $-\infty$ |
| | | B | 0 |
| | | C | 2 |
| | | D | $+\infty$ |
| 2 | L'équation (E) : $x \in \mathbb{N}$, $\ln x \leq 1$ a pour ensemble de solutions ... | A | $]\infty ; e]$ |
| | | B | $]0 ; e]$ |
| | | C | $[e ; +\infty[$ |
| | | D | $\emptyset$ |
| 3 | On pose : $z = -\sqrt{3} + i$. On note $r$ le module de $z$ et l'argument principal de $z$. $r$ et $\theta$ vérifient ... | A | $r = 2$ et $\theta =$ [illegible] |
| | | B | $r = 2$ et $\theta =$ [illegible] |
| | | C | $r = 2$ et $\theta =$ [illegible] |
| | | D | $r = 1$ et $\theta =$ [illegible] |
| 4 | *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct* $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit I et J les points d'affixes respectives 1 et $i$. On note $(\Gamma)$ l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ vérifiant : $\|z - 1\| = \|z - i\|$ $(\Gamma)$ est ... | A | la droite (IJ) privée du segment [IJ] |
| | | B | la droite (IJ) |
| | | C | la médiatrice du segment [IJ] |
| | | D | le cercle de centre I et de rayon 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | La somme $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{121}$ des termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à ... | A | $121\frac{(u_0 + u_{121})}{2}$ |
| | | B | $122\frac{(u_0 + u_{121})}{2}$ |
| | | C | $121\frac{(u_0 + u_{122})}{2}$ |

## Exercice 3

Dans une ville, 30% de la population a un âge supérieur ou égal à 65 ans.

60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

0,1% de personnes de moins de 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

1. On prend une personne au hasard et on donne les évènements :
   S : "La personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans".
   C : "La personne est atteinte de la Covid-19".
   a) Dresse un arbre pondéré qui présente la situation.
   b) Donne la valeur de $P_S$(C) des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans.
   c) Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins de 65 ans et la covid-19.
2. Justifie que la probabilité de l'événement C est 0,1807.
3. On prend au hasard $n(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ personnes dans la ville et on note $P_n$ la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la covid-19.
   a) Justifie que : $\forall_n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $P_n = 1 - (0{,}8193)^n$.
   b) Détermine le nombre minimum de personnes à prendre pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la covid-19 dépasse 99,99%.

## Exercice 4

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{1-x} - x + 1$.

On note (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

L'unité graphique est le centimètre.

1. On admet que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

2. a) Calcule la limite de $f$ en $+\infty$.
   b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3. Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel α élément de [−0,4 ; −0,2] tel que : $g(\alpha) = 0$ et
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$.
   b) Étudie le sens de variation de $f$.
   c) Dresse le tableau de variation de $f$.
4. On admet que (C) est au-dessus de (D) sur $[-1 ; +\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty ; -1]$.
Construis (C), (tu prendras : $\alpha = -0{,}3$ et $f(\alpha) = 3{,}9$).
5. a) Interprète graphiquement l'intégrale K telle que : $K = \int_0^1 (f(x) - (-x + 1))\,dx$.
   b) Justifie, à l'aide d'une intégration par parties, que : $K = 2e - 3$.

### Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique le centimètre.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4 + 4i$.

1. On considère la similitude directe $s$ de centre O telle que : $s(A) = B$.
   a) Justifie que la similitude directe $s$ a pour écriture complexe : $z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z$.
   b) Détermine le rapport et l'angle de $s$.
2. On considère les points $A_n$ tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$

On désigne par $z_n$ l'affixe du point $A_n$.
   a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 8(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$
   b) Justifie que le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en $A_{n+1}$.
3. a) Place successivement les points $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$.
   b) Justifie que l'aire $a_1$, en cm², du triangle $OA_0A_1$ est 16.
   c) Déduis du résultat précédent l'aire $a$, en cm², du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

### Exercice 6

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés, en millions de francs CFA, des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant :

| Frais publicitaires | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre d'affaires | 60 | 66 | 69 | 75 | 81 |

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel dépasse constamment 100 millions de francs CFA.
Fais une proposition argumentée.

## Session 2022 | Série D | Durée : 4H | Coefficient : 4

### Exercice 1

On donne le groupe de mots (la droite de régression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous :

| N° | Phrases incomplètes |
|---|---|
| 1 | Toute fonction $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle K définie ...... de K sur $f$(K). |
| 2 | Soit (X, Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que V(X) ≠ 0. Une équation de ...... de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y. |
| 3 | Toute fonction continue sur un intervalle I admet ...... sur I. |
| 4 | Toute ...... en un point $a$ est continue en $a$. |

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place de pointillés pour que la phrase soit vraie.

## Exercice 2

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

| N° | Énoncé | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -e^{-2x+5}$ est ... | $x \mapsto -2e^{-2x+5}$ | $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$ | $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$ |
| 2 | Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme ... | $x \mapsto ke^{-2x} + k'e^{-2x}$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | $x \mapsto k\cos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ | $x \mapsto ke^{4x} + k'e^{-4x}$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ |
| 3 | $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - e^{x})$ est égale à ... | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
| 4 | La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est ... | $2e^{\frac{\pi}{4}}$ | $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ | $\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$ |

## Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}$ ; $1 + i$ ; $1 - i$ ; $3 + i$ et 1.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1 + i)z + 1 - 3i$.
   a) Justifie que : S(D) = D et S(B) = C.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

## Exercice 4

On donne la fonction numérique $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{5x+2}{4x+7}$.

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$, les quatre premiers termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$ de la suite $(u_n)$ sur l'axe des abscisses.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable et strictement croissant sur $]0 ; +\infty[$.
   a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{1}{2}$.
   b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.
   c) Déduis de 2.a) et 2.b) que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. a) Déduis de 2.a) et 2.c) que la suite $(u_n)$ est convergente.
   b) Justifie que la limite de la suite $(u_n)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que $f$ est continue en 0.

   b) Justifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

   c) Interprète graphiquement le résultat de 1.b).

2. On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprète graphiquement ces résultats.

3. a) On suppose que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   Justifie que : $\forall x \in ]0\,;+\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$.

   b) Étudie les variations de $f$.

   c) Dresse le tableau de variation de $f$.

4. Trace la courbe $(\mathscr{C})$.

*(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).*

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que $K = \int_1^2 x\ln x\,dx$ est égale à $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

   b) On admet que, sur $[1\,;2]$, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de l'axe des abscisses (OI).
   Calcule l'aire en $cm^2$ de la partie du plan limitée par la courbe de $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

## Exercice 6

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.
Le jeu comprend quatre épreuves.
Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.
Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.
Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.
On suppose que les 4 boules lancées sont indépendantes.
À chaque épreuve :
- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.
Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2 500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.
Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2 500 F CFA.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

# Logique et raisonnement

## I- Proposition

Une proposition est un énoncé auquel on peut répondre sans ambiguïté par vrai ou par faux.

On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont « vrai » ou « faux ».

## II- Implication et équivalence

La proposition « si P, alors Q » ou « P implique Q » est appelée implication. Elle est symbolisée par $\Longrightarrow$.

On dit que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion.

La proposition « P si, et seulement si Q » ou « P équivaut à Q » est la proposition « (Si P, alors Q) et (si Q, alors P) ». Elle est symbolisée par $\Leftrightarrow$.

## III- Les quantificateurs

**• Quantificateur universel**

Pour énoncer une propriété vraie dans tous les cas, on utilise le quantificateur « pour tout », noté $\forall$.

**Remarque** : Il signifie « Quel que soit » ou encore « Pour tous ».

« $\forall x \in E$, $P(x)$ » signifie : Pour tout élément $x$ appartenant à l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.

**Exemple :** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ : Quel que soit $x$ élément de $\mathbb{R}$, $x^2$ est positif ou nul.

**• Quantificateur existentiel**

Pour énoncer une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas dans tous les cas, on utilise le quantificateur « il existe », noté $\exists$.

« $\exists x \in E \,/\, P(x)$ » ou « $\exists x \in E$, $P(x)$ » signifie : Il existe au moins un élément $x$ de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

**Exemple :** $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 > 100$ : Il existe des réels $x$ tels que : $x^2 > 100$.

« $\exists! x \in E \,/\, P(x)$ » signifie : Il existe un et un seul élément $x$ de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

**Exemple :** $\exists! n \in \mathbb{N} \,/\, n^2 = 100$ : Il existe un unique entier naturel $n$ tel que : $n^2 = 100$.

## IV- Les différents types de raisonnement

*On peut définir le raisonnement comme un ensemble de propositions organisées pour aboutir à une conclusion.*

**• Le raisonnement inductif :** de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale.

**Exemple :** Deux points A et B étant donnés, détermine l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle.

**• Le raisonnement déductif :** à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété.

**• Raisonnement par l'absurde :** consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire.

**Exemple :** Démontre que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

**• La disjonction des cas :** pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire de l'étudier cas par cas.

**Exemple :** Démontre par disjonction des cas que pour tout entier $n$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

**• Le contre-exemple :** un contre-exemple ou contre-exemple est un exemple particulier et concret qui contredit une affirmation.

**Exemple :** Démontre que l'affirmation « Tout entier positif est somme de trois carrés » est fausse.

# Mémento

## LIMITES ET CONTINUITÉ

- Si $\forall x \in ]a, +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in ]-\infty, a[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

### Théorème des gendarmes

- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

### Limite de la composée de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$.

### Branches paraboliques

- $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

- $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

On définit de même les branches paraboliques en $-\infty$.

### Théorème des valeurs intermédiaires (conséquence)

$f$ est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]a ; b[$.

## DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTION

### Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Une fonction $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche en $a$, dérivable à droite en $a$ et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

### Point d'inflexion

Le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

### Dérivée d'une fonction composée

$(g \circ f)' = f' (g' \circ f)$.

### Nombre dérivé de la réciproque d'une fonction bijective en un point

$$[f^{-1}]'(a) = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$$

### Inégalités des accroissements finis

- Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I. $a$ et $b$ deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe des nombres réels M et $m$ tels que pour tout $x$ élément de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
S'il existe un nombre réel M tel que pour tout $x$ élément de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels $a$ et $b$ de I, $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

## PRIMITIVES

### Primitives de fonctions de référence

| Fonction : $f(x) = \ldots$ | Primitives de $f$ : $F(x) = \ldots$ |
|---|---|
| $a$, $a \in \mathbb{R}$ | $ax + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x^r}$, $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ | $\dfrac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $1 + \tan^2 x$ | $\tan x + c$, $c \in \mathbb{R}$ |

### Calcul de primitives

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

| Fonction | Primitives |
|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $\lambda u'$, $\lambda \in \mathbb{R}$ | $\lambda u + c$, $c \in \mathbb{R}$ |
| $u'v + uv'$ | $u \times v + c$, $c \in \mathbb{R}$ |

| | |
|---|---|
| $u' u^{n} (n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}, u > 0$ | $2\sqrt{u} + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{v'}{v^2}, v \neq 0$ | $-\frac{1}{v} + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{u'}{u^n}, u \neq 0$ et $n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$ | $\frac{u}{v} + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $u' \sin u$ | $-\cos u + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $u' \cos u$ | $+\sin u + c, c \in \mathbb{R}$ |

# FONCTIONS LOGARITHMES

- $\forall x \in ]0\,;+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$, avec $e \simeq 2{,}7182$

### Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ;
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ ;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ ;
- $\ln(a^r) = r\ln a,\ \forall r \in \mathbb{Q}$ ;
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

### Sens de variation

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$.

- Conséquences :

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ ;
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ ;
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ;
- $a \geq 1 \Leftrightarrow \ln a \geq 0$ ;
- $0 < a \leq 1 \Leftrightarrow \ln a \leq 0$.

### Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

### Dérivées

$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\ln \circ |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

### Primitives

| Fonction | Primitives |
|---|---|
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln\lvert x\rvert + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ | $x \mapsto \ln\lvert u(x)\rvert + c, c \in \mathbb{R}$ |

### La fonction logarithme décimal

$\forall x \in ]0\,;+\infty[\,,\ \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

# FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

- $e^0 = 1$ ; $e^1 = e$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

### Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, pour tout nombre rationnel $r$, on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^r = e^{ar}$

### Limites

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, pour tout nombre rationnel $r$, on a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

### Sens de variation

- $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$
- La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Conséquences

Pour tous nombres réels $a$ et $b$,

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$.

### Dérivées

$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

### Primitives

| Fonction | Primitives |
|---|---|
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x + c, c \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ | $x \mapsto e^{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}$ |

### Croissances comparées

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^\alpha}{e^x} = 0$ ;
- $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$ ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$.

## SUITES NUMÉRIQUES

### Convergence

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- $(u_n)$ est une suite telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite $(u_n)$ est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation : $f(X) = X$.

### Convergence de suites arithmétiques

$(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$

- Si $r = 0$, alors $(u_n)$ converge et $\lim u_n = u_0$.
- Si $r \neq 0$, alors $(u_n)$ diverge et $\lim u_n = +\infty$, si $r > 0$ et $\lim u_n = -\infty$ si $r < 0$.

### Convergence de suites géométriques

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $v_0$

| | $v_0 < 0$ | $v_0 = 0$ | $v_0 > 0$ |
|---|---|---|---|
| $q \leq -1$ | $\lim v_n$ n'existe | $\lim v_n = 0$ | $\lim v_n$ n'existe |
| $-1 < q < 1$ | $\lim v_n = 0$ | $\lim v_n = 0$ | $\lim v_n = 0$ |
| $q = 1$ | $\lim v_n = v_0$ | $\lim v_n = 0$ | $\lim v_n = v_0$ |
| $q > 1$ | $\lim v_n = -\infty$ | $\lim v_n = 0$ | $\lim v_n = +\infty$ |

### Croissances comparées des suites $(\ln(n))$, $(n^\alpha)$, $(a^n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$

| Suite | Conditions | Limite |
|---|---|---|
| $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ | | $+\infty$ |
| $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}, \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha < 0$ | 0 |
| | $\alpha = 0$ | 1 |
| | $\alpha > 0$ | $+\infty$ |
| $(a^n)_{n \in \mathbb{N}^*}, a \in \mathbb{R}$ | $a \leq -1$ | n'existe pas |
| | $-1 < a < 1$ | 0 |
| | $a = 1$ | 1 |
| | $a > 1$ | $+\infty$ |

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{a^n} = 0$.
- Si $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
- Si $\alpha < 0$ et $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$.

## CALCUL INTÉGRAL

### Intégrale d'une fonction continue

- $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.

### Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

### Linéarité

- $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$.

### Inégalité et intégrale

Si $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

### Inégalités de la moyenne

Soient $m$ et M des nombres réels.

Si $\forall x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si $\forall x \in [a\,;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$.

### Valeur moyenne d'une fonction continue

Valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$ : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

### Intégration par parties

$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

### Calcul d'aire

Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- $f$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ de courbe représentative $(C_f)$ ;

- Si $f$ est positive sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$, (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(x)dx \times u.a$ ;

- Si $f$ est négative sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$, (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $-\int_a^b f(x)dx \times u.a$ ;

- Si $f$ ne garde pas de signe constant sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$, (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b |f(x)|dx \times u.a$ ;

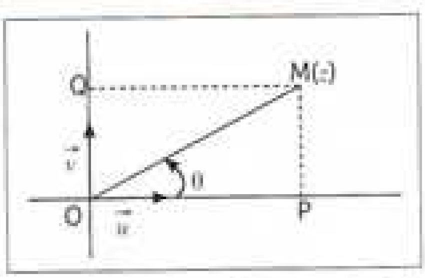
- $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$. $(C_f)$ et $(C_g)$ sont les courbes représentatives respectives de $f$ et $g$.

L'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$, $(C_g)$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times u.a$.

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

| Types d'équations différentielles | Solutions |
|---|---|
| $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$ | $f : x \mapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$ |
| $y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ | $f : x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$ |
| $y'' = 0$ | $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ |
| $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ | $f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ |
| $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ | $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ |

## NOMBRES COMPLEXES




$z$ est un nombre complexe de points image $M(x, y)$

Partie réelle de $z$ : $\text{Re}(z) = x = \overline{OP} = r\cos\theta$

Partie imaginaire de $z$ : $\text{Im}(z) = y = \overline{OQ} = r\sin\theta$.

$z \neq 0$ et $\theta = \arg(z)$

Forme algébrique : $z = x + iy$, avec $i^2 = -1$.

Forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$

### Conjugué

Si $z = x + iy = re^{i\theta}$ ;

$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$ ;

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ;

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ ;

$z\bar{z} = x^2 + y^2$.

### Module et argument

Module de $z$ : $|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argument de $z$ ($z \neq 0$) : $\text{Arg}(z) = \theta = \text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$

Tout nombre de la forme $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est un argument de $z$ et est noté $\arg(z)$

$z = re^{i\theta}$ ; $z' = r'e^{i\theta'}$

$zz' = rr'e^{i(\theta + \theta')}$ ; $z^n = r^n e^{in\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ ; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta - \theta')}$

$-z = re^{i(\theta + \pi)}$ ; $\bar{z} = re^{-i\theta}$

### Formules de Moivre

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

### Formules d'Euler

- $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$
- $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

### Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

(E): $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$, ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$)

- Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution unique : $-\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions distinctes :

$\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$, où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta$.

## PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

### Probabilité conditionnelle

- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

### Espérance mathématique, variance et écart type d'une variable aléatoire

- Espérance mathématique

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

- Variance

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X = x_2) + \dots + (x_n - E(X))^2 \times P(X = x_n)$$

Ou bien :

$$V(X) = x_1^2 \times P(X = x_1) + x_2^2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n^2 \times P(X = x_n) - (E(X))^2$$

- Écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

## STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

### Point moyen

$G(\overline{X}; \overline{Y})$ avec $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N}$ et

$\overline{Y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{N}$

### Ajustement linéaire par la méthode de moindres carrées

- Variance

$$V(X) = \frac{1}{N}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2\right]$$

ou $V(X) = \dfrac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \overline{X}^2$

- Covariance

$$COV(X,Y) = \frac{1}{N}\left[(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{y})(y_2 - \overline{y}) + \dots + (x_n - \overline{x})(x_n - \overline{y})\right]$$

ou

$$V(X,Y) = \frac{1}{N}(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) - \overline{x}\,\overline{y}$$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

**Remarques**

- $-1 \leq r \leq 1$
- Si $0{,}87 \leq r < 1$ ou $-1 < r \leq -0{,}87$, alors il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères.

- **Droite de régression de Y en X**

(D) : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$

et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

- **Droite de régression de X en Y**

(D') : $x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$

et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$

## NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu du segment [AB] est : $\frac{1}{2}(z_A + z_B)$.
- $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$
- $Mes(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = Arg(z_B - z_A)$
- $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

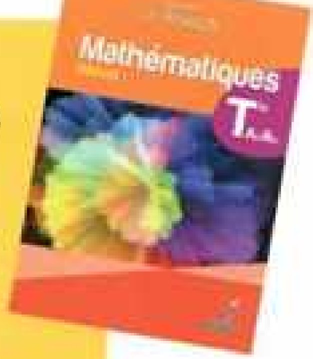
### Similitude directe

| | Conditions vérifiées par $a$ | | Nature et élément(s) caractéristique(s) de S |
|---|---|---|---|
| Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. | Si $a \in \mathbb{R}^*$ | $a = 1$ | S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$. |
| | | $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ | S est l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $a$. |
| | Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ | $\lvert a \rvert = 1$ | S est la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\operatorname{Arg}(a)$. |
| | | $\lvert a \rvert \neq 1$ | S est la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $\lvert a \rvert$ de d'angle $\operatorname{Arg}(a)$. |

- Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.
- Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 22410821/01916125
Maquette couverture : Igraph
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
2ème trimestre 2022
Dépôt légal : N° 18583 du 21 Avril 2022

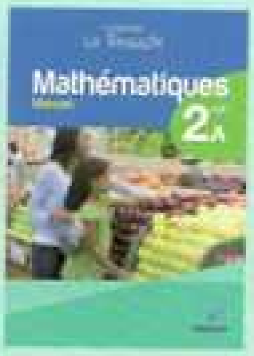
Collection
# La Réussite

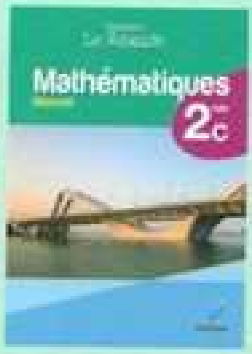


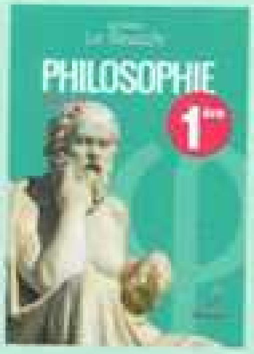

Une collection pour vous conduire sur le chemin de la Réussite.
On y trouve, pour chaque leçon :

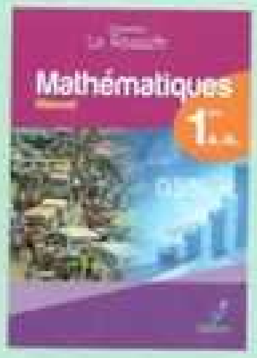
- *Situation d'apprentissage*
- *Habiletés et contenus*
- *Installation des habiletés*
- *Apprentissage de la rédaction*
- *Résumé de cours*
- *Exercices*
- *Coup de pouce*

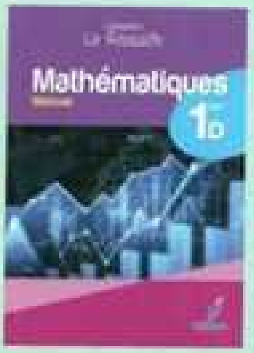
## Nos manuels

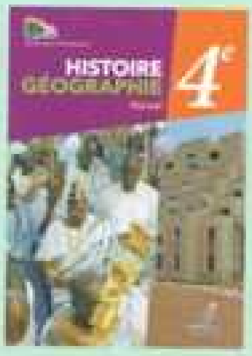



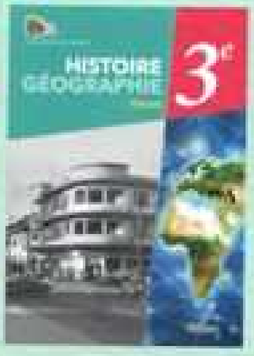




9 782902 594740
ISBN : 978-2-902594-74-0