COLLECTION L'APPROFONDI

MATHÉMATIQUES

Term D

RECUEIL D'ACTIVITÉS

VISAMATH

APPROCHE PAR COMPETENCES

- ACTIVITÉS DE CONSTRUCTION DE SAVOIRS
- PLUS 200 ACTIVITÉS DE CONSOLIDATION
- 45 SUJETS ET EXAMENS BLANCS
- TOUS LES SUJETS DU BAC DE 1995 A 2018

PAR :

Professeurs de mathématiques

AKPO K. Armand - LOKPOE Mawulé

HOUINDO Aubin - VOGNITO Joseph

AOULOU Christian - ALFA W. Dieudonné

ALLADAGBE Anselme - LANDE Yves - DASSOUNDO Landry

Conseiller pédagogique

VISSOH R. Ignace

VISAMATH

RECUEIL D'ACTIVITÉS ET SUJETS DE MATHÉMATIQUES

Approche par Compétences

Classe de Tle D

- ACTIVITÉS DE CONSTRUCTION DE SAVOIRS
- PLUS DE 200 ACTIVITÉS DE CONSOLIDATION
- 45 SUJETS ET EXAMENS BLANCS POUR LE RENFORCEMENT DES CAPACITÉS
- TOUS LES SUJETS DU BAC SERIE D DE 1995 à 2018

Tél : (+229) 97 23 56 00 / 97 21 37 17 / 67 73 82 85 / 97 29 14 41

PRÉSENTATION

Le recueil VISAMATH est spécialement conçu pour aider les apprenants à préparer efficacement Baccalauréat et à poursuivre l'apprentissage du travail mathématique (stratégies de recherches, raisonnement, résultats et méthodes) par de fréquents aller et retour entre le cours, les activités de consolidation et les sujets d'évaluations et examens blancs. Il n'y a qu'ainsi que les notions s'éclairent, se comprennent et que les connaissances se fixent dans la mémoire car il est impossible de progresser sur fond d'ignorances.

Il aidera aussi les collègues enseignants à bien conduire le processus d'enseignement / apprentissage / évaluations dans leurs classes.

Vous trouverez dans ces pages :

- Des activités concises, claires et structurées de découverte, de décontextualisation et d'approfondissement par contenu notionnel
- Les vérités scientifiques découlant de ces activités (définitions, propriétés , règles et procédures à retenir strictement conforme au contenu du guide du programme d'études)
- Des activités de consolidation très variées et classées qui permettent aux apprenants de s'exercer et s'assurer que les outils de base ont été acquis
- Des situations d'évaluations, Examens blancs et Sujets de BAC série D de 1990 à 2016 pour renforcer les capacités des apprenants.

En somme, tout ce qui peut aider le candidat à retrouver, à mieux comprendre ou à approfondir les connaissances acquises en classe.

VISAMATH est, à la fois, un outil pour le travail personnel et pour le travail en classe.

Pour son usage en classe, il est conseillé aux collègues enseignants que les vérités scientifiques à savoir : définitions, propriétés , règles etc.... soient systématiquement recopiées et non collées directement dans le cahier de cours.

Pour l'amélioration des prochaines éditions de VISAMATH, nous attendons des collègues enseignants de Mathématiques et autres utilisateurs avertis leurs observations, remarques, critiques et suggestions. Nous vous remercions par avance.

BON COURAGE, BON TRAVAIL ET SURTOUT BONNE RÉUSSITE AUX APPRENANTS.

Les auteurs

IDENTIFICATION DE L'ELEVE

NOM : ....

PRENOMS : ....

....

CLASSE : ....

ETABLISSEMENT : ....

ANNEE SCOLAIRE...

ADRESSE DES PARENTS : ....

....

NOM ET CONCTACT DU PROFESSEUR : ....

....

SOMMAIRE

Planification des situations d'apprentissage

SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Séquence 1 : Vecteurs de l'espace, repérage d'un point de l'espace.
Séquence 2 : Barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)
Séquence 3: Produit scalaire
Séquence 4 : Représentations paramétriques et équations cartésiennes : Droites et plans
Séquence 5 : Système d'équations linéaires
Séquence 6 : Produit Vectoriel

SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

Séquence 1 : Nombres complexes
Séquence 2 : Limites et continuité
Séquence 3 : Dérivée - Etude de fonctions
Séquence 4 : Primitives
Séquence 5 : Fonction logarithme népérien
Séquence 6 : Fonction exponentielle népérienne
Séquence 7 : Fonctions exponentielles- Fonctions puissances
Séquence 8 : Calcul intégral
Séquence 9 : Equations différentielles linéaires à coefficients constants.
Séquence 10: Probabilité
Séquence11 : Suites numériques
Séquence 12 : Statistique

SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

Séquence 1 : Ecriture complexe d'une transformation plane
Séquence 2 : Similitude plane directe

SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ : Le pont de Codji

Reliant les deux rives d'un fleuve, le pont réalisé par l'ingénieur PIKO est un chef d'œuvre que les pêcheurs contemplent chaque jour. Les travaux ont duré deux ans et une vingtaine de pêcheurs riverains ont été des ouvriers spécialisés en plongée. Sonon, l'un des ouvriers, a du plaisir à raconter à la jeune génération les longues journées de travail sur le chantier.

L'ingénieur PIKO dirigeait simultanément tous les ateliers : il exigeait partout la précision dans les mesures et s'en assurait. La qualité du sol, la qualité du béton, les précisions du dosage, la forme et la qualité des poutres, l'implantation des piliers, le flux et le reflux du cours d'eau; rien n'échappait au contrôle de l'ingénieur PIKO. Les travaux achevés, le pont fut livré à la circulation. Les riverains sont encore fiers de ce pont qui n'a rien perdu de sa solidité des décennies durant.

Sonon s'interroge encore aujourd'hui sur les méthodes et les procédés qui ont permis à l'ingénieur PIKO de réussir ce chef d'œuvre.

Tâche

Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique ; pour cela tu auras, tout au long de cette S.A., à exécuter les activités suivantes :

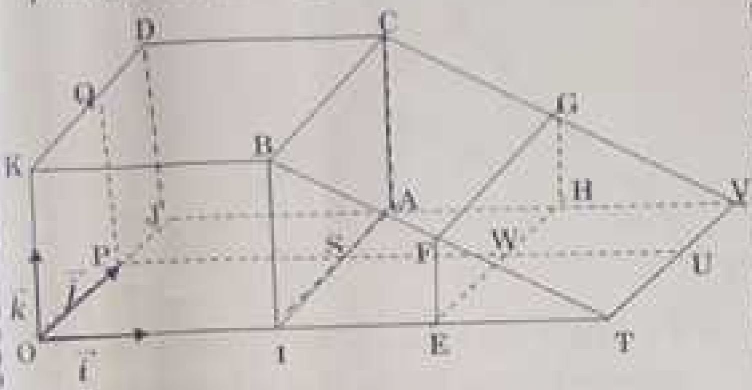
Activité 0

Lis le texte de la situation de départ : Reformule le problème en tes propres termes. Formule toutes les idées et questions que t'inspirent la situation de départ. Evoque des situations similaires

Séquence1 : Vecteurs de l'espace. Repérage d'un point de l'espace.

Activité 1

Lors d'une séance de pêche sous le pont, Mahouton, élève en classe de Tle D interroge son père Sonon sur le plan de construction qui a servi à la réalisation du pont. De retour à la maison, le père lui remet un document contenant le dessin d'une partie de ce plan dont voici une figure



Sur ce dessin :

- OIAJKBCD est un cube d'arête de longueur 2 cm
- IT = 3 cm
- Q, P, S, W, U, E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments [KD], [OJ], [IA], [EH], [TV], [IT], [BT], [CV] et [AV]
- $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$

En observant le dessin, Mahouton se rappelle de certaines notions sur les vecteurs et repérage de points de l'espace qu'il souhaite approfondir.

Consigne 1

1) Identifie à l'aide du dessin :
   a) deux vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{OS}$
   b) trois vecteurs coplanaires.
   c) Deux vecteurs orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{OJ}$
2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont - ils coplanaires ?
   b) Que peux-tu dire du triplet $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$? et du quadruplet $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$?

Stratégie : **TI– TG – TC à définir par l'enseignant.**

À retenir N° 1.1

Définition et Propriétés : *Vecteurs colinéaires, Vecteurs orthogonaux, combinaison linéaire de vecteurs, vecteurs coplanaires, base et repère de l'espace; coordonnées d'un vecteur ; coordonnées d'un point.*

Consigne 2 : Approfondissement

En considérant le dessin de l'activité 1 :

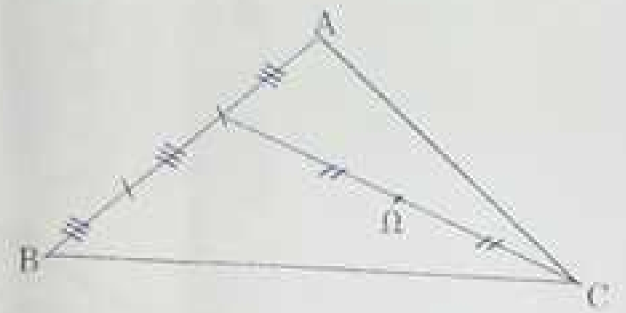
1) Détermine les coordonnées des points I, B, A, T, F et V dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) a) Justifie que $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IT})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace *(Tu pourras utiliser les coordonnées des points I, B, A et T)*
   b) Détermine dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{PG}$ et $\overrightarrow{KV}$

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant.**

SEQUENCE 2 : Barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Activité 2

Dans le document contenant le plan de construction du pont que lui a remis son père, Mahouton découvre la figure ci-dessous, utilisée par l'ingénieur Piko pour indiquer aux ouvriers la position Ω d'un pilier du pont sur une surface ABC du sol.



avec l'information « $2\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$ »
Mahouton décide de vérifier cette information.

Consigne 1 : Notion de barycentre

On désigne par L le point d'intersection des droites (ΩC) et (AB)

1) a) Justifie que $2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega L} + \overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$
   b) Démontre que pour tout point M de l'espace, $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{ML}$
   c) Déduis-en que $2\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$
2) Que représente le point Ω pour les points pondérés $(A; 2), (B; 1)$ et $(C; 3)$?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.1

Définitions et propriétés : *Points pondérés, Barycentre de deux points pondérés, Barycentre de n points pondérés, isobarycentre, réductions de vecteurs*

Consigne 2 : Application

ABCD est un parallélogramme tel que I est le centre de gravité du triangle ABC.

1) Ecris A comme barycentre des points B, C et D
2) Réduis les sommes de vecteurs suivants :
   a) $\vec{u} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
   b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$
3) Détermine les valeurs du nombre réel m pour que les points pondérés $(A; 2-m)$, $(B; -3)$ et $(C; 5+3m)$ admettent de barycentre.

Consigne 3 : Propriétés

Dans l'espace, les notions de barycentre se définissent de la même manière que dans le plan.
Soit $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \ldots, (A_n; \alpha_n)$, n points pondérés de l'espace

a) Démontre que si $G = bar\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \ldots, (A_n; \alpha_n)\}$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ on a :
$$G = bar\{(A_1; k\alpha_1), (A_2; k\alpha_2), \ldots, (A_n; k\alpha_n)\}$$
b) Démontre que si
G$= bar\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \ldots, (A_n; \alpha_n)\}$ $(n \geq 3)$
et si $H = bar\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \ldots, (A_p; \alpha_p)\}$
$(2 \leq p \leq n-1)$ alors
G = bar $\{(H, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p), (A_{p+1}; \alpha_{p+1}), \ldots, (A_n; \alpha_n)\}$
c) Soit $G = bar\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \ldots, (A_n; \alpha_n)\}$.
Détermine dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées de G en fonction de celles des points A_i

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant.

À retenir N° 2.2

Propriétés : *homogénéité – barycentre partiel, Coordonnées du barycentre*

Consigne 4 : Approfondissement

1) Place sur un triangle BOT les points L, M et N tels que : $\overrightarrow{OL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OT}$; $M = bar\{(T; 1), (B; 2)\}$ et $N = bar\{(B; 3), (O; 1)\}$
2) Ecris
   a) L comme barycentre des points O et T
   b) Soit G = bar $\{(O; 2), (T; 3), (B; 6)\}$
Démontre que les droites (TN) ; (OM) et (BL) sont concourantes en G
   c) Détermine les coordonnées de G sachant que dans l'espace rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, O(-1 ;0 ;1) ; T (1 ;-2 ;-1) et B(1 ; 3 ;2)

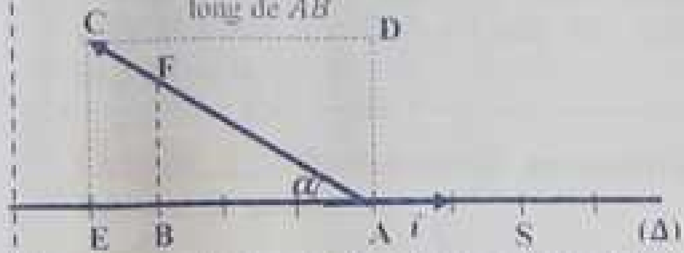
Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant.

SEQUENCE 3 : Produit scalaire

Activité : 3

Dans le document reçu de son père, Mahouton découvre que pour implanter les piliers en ligne droite le long d'une extrémité rectiligne du pont, l'ingénieur Piko fait déplacer la poutre devant contenir le béton armé le long de cette extrémité (Δ), suivant le dispositif représenté par la figure ci-dessous où

- la droite (Δ) est muni du repère $(A; \vec{i})$
- $AB = 8$
- par exemple $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$ représente le travail effectué pour faire déplacer la poutre $\overrightarrow{AC}$ le long de $\overrightarrow{AB}$



En observant la figure, Mahouton se demande si le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$ se calcule de la même manière que dans le plan

Consigne 1 : Notion de produit scalaire dans l'espace

1) Dans l'espace le produit scalaire de deux vecteurs se ramène -t-il au produit scalaire dans le plan ?
(Tu pourras remarquer que deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont nécessairement coplanaires)

2) a) Donne le projeté orthogonal de C sur (AB) puis dis ce que représente $\overline{AE} \times \overline{AB}$
On rappelle que par exemple, la mesure algébrique du couple de points $(A; B)$ notée $\overline{AB}$ est le nombre réel tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$

b) Calcule $\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$

c) Quand peux-tu dire que deux vecteurs sont orthogonaux ?

Stratégie : TI– TG– TC à définir par l'enseignant.

À retenir N° 3.1

Définitions et propriétés *: Produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{W}$ (définition , Expression géométrique, propriétés algébriques ; carré scalaire ; norme d'un vecteur ; vecteur unitaire) ; vecteurs orthogonaux ; base orthonormée*

Consigne 2 : Expression analytique du produit scalaire

Dans l'espace muni d'une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.
Calcule $\vec{u} \bullet \vec{v}$ en fonction de $x; y; z; x'; y'$ et z'.

Stratégie : TI– TC à définir par l'enseignant.

À retenir N° 3.2

Propriété *: Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée*

Consigne 3 : Approfondissement

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point B(-3 ; 3 ; -2) et le plan (P) de repère$(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec A(1 ; 2 ; -3), $\vec{u}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1) Démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires

2) a) Calcule $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{v}$ puis déduis-en que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (P)

b) Que représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour le plan (P) ?

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant.

À retenir N° 3.3

Définitions et propriétés *: vecteur normal à un plan ; Positions relatives de droites et de plan ; lieux géométriques*

Réinvestissement

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur a $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ et O est le centre de la face ABCD

1) Calcule $\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{OC}$

2) a) Ecris A comme barycentre des points B, C et D

b) Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$

3) Détermine l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tels que

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

SEQUENCE 4 : REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES ET EQUATIONS CARTESIENNES : DROITES ET PLANS

Activité 4:

Pour vérifier la forme et la qualité des poutres devant contenir le béton armé, l'ingénieur Piko effectue des calculs pour obtenir des indications précises sur les positions de certains points de ces poutres et sur les positions de certains points de la surface plane du pont où seront placées ces poutres.

Mahouton assimile la poutre à une droite (D) de l'espace et la surface plane du pont à un plan (P) de l'espace et il désire exprimer l'appartenance d'un point M à (D) puis à (P) à l'aide des coordonnées (x, y, z) de M

Consigne 1 : Représentation paramétrique de droite et de plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) On désigne par $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de la droite (D) et par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de (D)

a) Justifie que $M \in (D) \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Cette égalité vectorielle est appelée ***caractérisation vectorielle de la droite (D)***

b) Déduis-en les coordonnées (x, y, z) du point M en fonction des coordonnées du point A et celles du vecteur $\vec{u}$

2) On désigne par $B(x_1; y_1; z_1)$ un point du plan (P) et par $\vec{v}(a, b, c)$ et $\vec{w}(a', b', c')$ deux vecteurs non colinéaires de (P)

a) Justifie que $M \in (P) \Leftrightarrow \exists\, (t, t') \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{BM} = t\vec{v} + t'\vec{w}$

Cette égalité vectorielle est appelée ***caractérisation vectorielle du plan (P)***

b) Déduis-en les coordonnées (x, y, z) du point M en fonction des coordonnées du point B et celles des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant.

À retenir N° 4.1

Définition : *Représentations paramétrique d'une droite-Représentation paramétrique d'un plan*

Consigne 2 : Décontextualisation

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

A(1 ;0 ;1) ; B(0 ;1;2) et C (2 ; -1 ; 3)

1) a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AC)

b) Le point B appartient-il à la droite (AC) ?

c) Que peux-tu en déduire des points A, B et C ?

2) Détermine une représentation paramétrique du plan (ABC)

Stratégie : TI – TG -TC à définir par l'enseignant.

Consigne 3 : Equation cartésienne d'un plan-Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(P) est un plan passant $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal à (P)

1) a) Démontre que pour tout point $M(x, y, z)$:

$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec d à préciser

b) Que représente $ax + by + cz + d = 0$ pour le plan (P) ?

2) Soit $N(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan (P)

En exprimant $|\overrightarrow{NH} \cdot \vec{n}|$ en fonction de NH et $\|\vec{n}\|$ déduis la distance NH puis dis ce qu'elle représente

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 4.2 et 4.3

Définition-Propriétés : *équation cartésienne d'un plan - Distance d'un point à un plan*

Consigne 4 : Approfondissement

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point A(1 ; 0 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}(-1 ; 4 ; -1)$

1) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

2) a) Détermine les coordonnées du point H projeté orthogonal du point D(1 ; 1 ; -1) sur le plan (P)

b) Calcule de deux manières différentes la distance du point D au plan (P).

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant.

Consigne 5 : Système d'équations cartésiennes d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(P) et (P') sont deux plans sécants d'équations cartésiennes respectives :

$x - 2y + z - 1 = 0$ et $3x + y - 2z + 5 = 0$

On désigne par (D) leur droite d'intersection

Le système $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ *est appelé système d'équations cartésiennes de la droite (D)*

a) Détermine une représentation paramétrique de (D)

b) A l'aide de cette représentation paramétrique de (D), établis une autre forme du système d'équations cartésiennes de (D)

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 4.3

Propriétés-Définitions: *Système d'équations cartésiennes d'une droite*

Consigne 6 : Réinvestissement

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le parallélogramme ACBD avec A(1 ;0 ;1) ;B(0 ;1;2) ; C (2 ;-1 ; 3) ; D(-1 ;2 ;0) et la droite (Δ) dont un système d'équations cartésiennes est : $\frac{x+2}{3} = y + 1 = z - 2$

1. a) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (AC)
   b) Détermine un repère de (Δ)
2. Justifie que $D = bar\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ puis détermine l'ensemble (P) des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant.

SEQUENCE 5 : SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

Activité 5 :

Après la construction du pont et pour faciliter la circulation des riverains l'ingénieur Piko a prévu placer, si possible, au moins un feu tricolore à l'intersection de trois voies assimilées aux plans (P) ; (Q) et (R) d'équations respectives :

$x - 5y - 7z - 3 = 0$; $5x + 3y + z - 3 = 0$ et $3x + y - 2z + 1 = 0$

Mahouton se demande si ces trois plans sont vraiment sécants

Consigne1

1) Ecris la condition pour que M(x, y, z) appartienne à l'intersection des plans (P) ; (Q) et (R)
2) Résous le système ainsi obtenu par la méthode de Pivot de Gauss
3) Est-il possible de placer au moins un feu tricolore à l'intersection des plans (P) ; (Q) et (R) ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 5.1

Définition et propriétés : *Résolution d'un système d'equation linéaires à n inconnues* $(n \geq 3)$ *par la méthode de Pivot de Gauss*

Consigne 2: **Approfondissement**

Résous dans $\mathbb{R}^3$ chacun des systèmes suivants d'inconnues (x, y, z) par la méthode de pivot de GAUSS.

(S_1): $\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases}$

(S_3): $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$ (S_4): $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

où m est un paramètre réel

Consigne 3: Problème se ramenant à la résolution d'un système d'équations linéaires

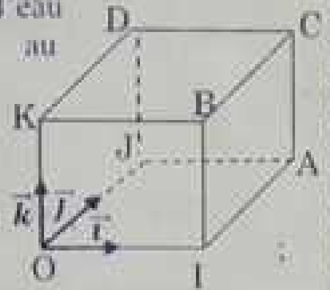
Trois cercles tangents deux à deux et de centres respectifs A, B et C tels que $AB = 345cm$; $AC = 270cm$; $BC = 315cm$ sont dessinés sur le pont.

Détermine le rayon de chaque cercle

SEQUENCE 6 : PRODUIT VECTORIEL

Activité 6

Le flux et le reflux du cours d'eau s'observent respectivement au sommet I et au sommet J du pilier de forme cubique OIAJBCD soutenant le pont, où les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont tels que $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$; $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$; $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$ et $OI = 2$.



Pour contrôler chaque fois le flux et le reflux du cours d'eau, l'ingénieur Piko se place le long de la demi-droite [OK), les pieds en O, la tête vers K et fait face au flux du cours d'eau (le sommet I)

L'un des ouvriers présents sur les lieux lors de ce contrôle affirme que le reflux du cours d'eau (le sommet J) est situé à gauche de l'ingénieur Piko tandis qu'un autre rétorque qu'il est situé à sa droite

Consigne 1 : Orientation de l'espace

1. Lequel des deux ouvriers a raison ?

(on dit dans ce cas que la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est directe ou que le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est direct)

2. Utilise cette méthode de l'observateur pour préciser si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte :

a) $(\overrightarrow{JO}, \overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD})$; b) $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AC})$; c) $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI})$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 6.1

Définition : *Orientation de de l'espace, base et repères directs*

Consigne 2 : Produit vectoriel de deux vecteurs

Pour contrôler la verticalité des piliers du pont par rapport au plan du sol, l'ingénieur Piko utilise très souvent un vecteur $\vec{w}$ formé à partir de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan du sol.

Le vecteur $\vec{w}$ est obtenu de la façon suivante :

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{0}$
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $\vec{w}$ vérifie les trois conditions ci-dessous :
  - $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$
  - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de $\mathcal{W}$
  - $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

1) Que représente $\vec{w}$ pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

(Dans ce cas on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$)

2) A, B, C et D sont quatre points de l'espace

a) Justifie que A, B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) Dans le cas où A, B et C sont non alignés : que représente le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ pour le plan (ABC) ?

c) Justifie que A, B, C et D coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 6.2 et 6.3 : ***Définition - propriétés :***

Produit vectoriel; Propriétés du produit vectoriel ; base orthonormée directe et conséquences

Consigne 3 : Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$

1) a) Sans le reproduire, complète le tableau suivant :

$\wedge$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$			
$\vec{j}$			
$\vec{k}$			

2) Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

a) Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$

b) Déduis-en que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

À retenir N° 6.4

Propriétés : *Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe*

Consigne 4 : Approfondissement

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A (-1 ; -2 ; 1), B (2, 3,1) et C (-3, 1,2).

1. Démontre que les points A, B et C déterminent un plan (P).
2. Détermine une équation cartésienne du plan (P).

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 5 : Distance d'un point à une droite, Aire d'un triangle

Soit (D) une droite de repère $(A ; \vec{u})$. M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D).

1) En remarquant que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, justifie que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$

2) Déduis-en que la distance du point M à la droite (D) est $d(M, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ u.l (u.l=unité de longueur)

3) Utilise ce résultat pour justifier que l'aire d'un triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ u.a (u.a=unité d'aire)

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 6.5

Propriétés : *Distance d'un point à une droite, Aire d'un triangle*

Consigne 6 : Distance d'un point à un plan, volume d'un tétraèdre

Soit M un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ et H le projeté orthogonal du point M sur le plan (ABC).

1) Démontre que la distance du point M au plan (ABC) est: $d(M, (ABC)) = MH = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}$

3) Soit D un point de l'espace n'appartenant pas au plan (ABC). Justifie que le volume V du tétraèdre ABCD est :

$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$ u.v (u.v=unité de volume)

Stratégie : TI - TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 6.6

Propriétés : *Distance d'un point à un plan ; Volume d'un tétraèdre. Lieux géométriques*

Consigne 7 : Approfondissement

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne : A (-2 ; -1, 1), B (1, 0, 3) et C (1, -1, 2)

1. a) Justifie que OABC est un tétraèdre
   b) Calcule l'aire du triangle ABC
   c) Calcule le volume du tétraèdre OABC
2. a) Calcule la distance du point O au plan (ABC).
   b) Calcule la distance du point C à la droite (AB)

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Activité : *Objectivation / auto-évaluation / Projection*

1) Fais le point de tout ce que tu as appris sur :

a) Les vecteurs de $\mathcal{W}$ et sur le repérage d'un point de l'espace

b) Le barycentre de points pondérés

c) Le produit scalaire

d) Les représentations paramétriques et équations cartésiennes de Droites et plans

e) Les systèmes d'équations linéaires

f) Le produit vectoriel

2) Fais le point de tes difficultés et de tes réussites au cours de l'apprentissage.

3) Identifie des situations de la vie courante où tu peux utiliser tes acquis

Stratégie : TI à définir par l'enseignant

SITUATION D'APPRENTISSAGE N° 2 : ORGANISATION DES DONNEES

Situation de départ : Les nombres dans le Fâ.

Dansou est un brillant élève de terminale D. Cependant, à l'approche de son examen du baccalauréat prévu pour le 18 juin 2007, sa maman lui demande de consulter le fâ, comme il est de coutume dans la famille à l'occasion des événements importants. Il se rend le 14 mars 2007 chez Gouton, un devin du Fâ. Pour réaliser la consultation, Gouton utilise quatre cauris dont les dos sont rognés. Après les rituels d'usage, il jette les quatre cauris sur la surface préparée pour la circonstance. Il obtient trois cauris fermés et un ouvert.

Il reprend l'opération et obtient les quatre cauris fermés. Alors il annonce à Dansou qu'il lui faut faire beaucoup de sacrifices avant d'obtenir le baccalauréat. Il lui demande si le marché de Tokpa qui a une périodicité de 4 jours s'animera l'un des trois jours que durera la composition du bac et quel est, le cas échéant, le jour de la semaine qui correspondra à ce marché.

Entre autres sacrifices, il lui demande de disposer de 1069 citrons qu'il amènera au marché d'Adjarra, conditionnés de la façon suivante :

_ avec sept citrons, il constitue un tas,
_ avec sept tas, il constitue un filet,
_ avec sept filets, il constitue un panier.

Dansou, pris de peur, décide d'aller consulter Adandé, un autre devin du Fâ. Adandé utilise également quatre cauris comme Gouton, après les rituels d'usage. Adandé jette ses quatre cauris une première fois. Il obtient deux cauris ouverts et deux cauris fermés. Il jette une deuxième fois les quatre cauris et en obtient trois ouverts et un fermé. Il dit alors à Dansou qu'au vu des signes obtenus, il réussira son baccalauréat avec une très bonne mention. Dansou se pose alors plusieurs questions.

Tâche

Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique ; pour cela tu auras, tout au long de cette S.A., à exécuter les activités suivantes :

Activité 0

Lis le texte de la situation de départ : Reformule le problème en tes propres termes. Formule toutes les idées et questions que t'inspirent la situation de départ. Evoque des situations similaires

SEQUENCE 1 : NOMBRES COMPLEXES

NB

Les consignes en rapport avec la démonstration des propriétés, peuvent ne pas être exécuter en situation de classe si les conditions didactiques ne le permettent pas mais les propriétés qui en découlent doivent obligatoirement figurer dans le cahier de cours de l'apprenant

Activité 1

Après la consultation, Dansou, cherchant à comprendre la façon dont les deux devins interprétaient les nombres, interroge sa maman qui lui explique que :

- après les deux jets, le nombre total de cauris ouverts et celui de cauris fermés sont respectivement les coefficients b et c de l'équation-problème $x^2 + bx + c = 0$
- et lorsque l'équation-problème admet de solutions dans l'ensemble des nombres réels, cela annonce des événements heureux sinon cela signifie que les solutions du problème se trouvent dans un ensemble plus grand que celui des nombres réels.

Consigne 1 : Découverte

On considère l'équation (E) : $x^2 + x + 7 = 0$ obtenue par le devin Gouton après les deux jets

a) L'équation (E) admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

b) On admet qu'il existe un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$

Propose les solutions de l'équation (E) en fonction de i.

Les solutions de (E) sont appelées nombres complexes

c) Quelle est la forme générale de ces solutions ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.1

Définitions et propriétés : *Nombres complexes*

Consigne 2 : Application de la définition

Soit a un nombre réel. On considère le nombre complexe $z = 2a + ia + a^2 + 2i$

1) Ecris z sous forme algébrique
2) Détermine a pour que z soit réel
3) Détermine a pour que $z \in i\mathbb{R}^*$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Opérations sur les nombres complexes

z et z' sont deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b a' et b' des nombres réels

1) Ecris sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

   a) $-z$; b) $z + z'$ c) $z \times z'$

2) Recopie puis complète :

   a) $z = z' \Leftrightarrow a = \cdots$ et $b = \cdots$

   b) $z = 0 \Leftrightarrow a = \cdots$ et $b = \cdots$

   c) $z \times z' = 0 \Leftrightarrow \ldots = 0$ ou $\ldots = 0$

   d) $i^2 = \cdots$; $i^3 = \cdots$; $i^4 = \cdots$; $i^{4k} = \cdots$;

$i^{4k+1} = \cdots$; $i^{4k+2} = \cdots$; $i^{4k+3} = \cdots$; avec $k \in \mathbb{N}$

3) Justifie que si u et v sont deux nombres complexes alors $C_3^0 u^3 + C_3^1 u^2 v + C_3^2 u v^2 + C_3^3 v^3 = (u+v)^3$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.2

Définition et propriétés : *Somme ; produit ; inverse et quotient de nombres complexes; puissances entières de i ; formule du binôme de Newton, triangle de pascal*

Consigne 4 : Approfondissement

On donne $z = 2 - i$ et $z' = -2 + 3i$

1) Ecris sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants

   A= z^5 ; B= $z' \times z^5$ C = $\frac{z}{z'}$

2) Détermine les nombres complexes z vérifiant :

   $(z + i)^2 + (z - 1 + i)^2 = 0$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 5 : Représentation dans le plan d'un nombre complexe - nombre complexe conjugué

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

Tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) peut être représenté par le point $M(x ; y)$ et réciproquement

Le point M est appelé point-image de z et le nombre complexe z est appelé affixe de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

On considère les points A et B d'affixe respectives $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = -3-4i$.

1) a) Représente les points A et B puis construis leurs symétriques respectifs A' et B' par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$

   b) Détermine les affixes respectives z_1' et z_2' des points images A' et B'.

z_1' est appelé conjugué de z_1 et on note $z_1' = \overline{z_1}$

2) Quel est le conjugué de z_2' ?

3) Détermine le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a= 2-i ; b= $-5\sqrt{3}$; c= -2+3i ; d= 3i et $e = 0$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.3

Définition : *Représentation dans le plan d'un nombre complexe et propriétés : plan complexe ; conjugué d'un nombre complexe*

Consigne 6 : Propriétés de nombres complexes conjugués

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1) Démontre que :

a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ b) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

   c) $z \times \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

   d) $\overline{\overline{z}} = z$ e) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

   f) $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\overline{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$

2) Soient z et z' deux nombres complexes. Justifie que :

   a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ b) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

   c) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} (z \neq 0)$ d) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} (z' \neq 0)$

   e) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 1.4 : *Ces Propriétés*

Consigne 7 : Approfondissement

A, B et C sont trois points non alignés d'affixes respectives $z_A = 5 - 2i$; $z_B = 2 + 4i$ et $z_C = -i$

1) Détermine l'affixe :
   a) du vecteur $\overrightarrow{AB}$
   b) du milieu I du segment [BC]
   c) du centre de gravité G du triangle ABC
2) Soit $z_1 = (1+i)^n + (1-i)^n$ et
   $z_2 = (1+i)^n - (1-i)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Prouve que z_1 est un nombre réel et que z_2 est un nombre complexe imaginaire

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 8 : Module d'un nombre complexe

Soit z= a+ib (a,b) $\in$ IR² un nombre complexe d'image le point M dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Calcule OM et $z\bar{z}$.
2) Déduis la distance OM en fonction de z et $\bar{z}$.
3) Que représente OM pour le nombre complexe z ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant
A retenir N° 1.5

Définition *: Module d'un nombre complexe*

Consigne 9 : Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes En posant z=x+iy et z'=x'+iy' avec x, y, x' et y' $\in IR$

Justifie que :

1) $|-z| = |\bar{z}| = |z|$; 2) $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ 5) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6) $|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
7) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

tu pourras utiliser $Re(\bar{z}z') \leq |\bar{z}\, z'|$ *et* $|\bar{z}\, z'| = |z||z'|$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant
A retenir N° 1.6 : *Ces Propriétés*

Consigne 10 : Approfondissement

1) Détermine le module du nombre complexe
   $z = \frac{(1-i)^7 \times (1+i\sqrt{3})^8}{(\sqrt{3}-i)^5}$
2) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(2)$; $B(-i)$; $C(3i)$ et $D(-4-i)$

Détermine et construis dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M du plan d'affixes z vérifiant :

a) $|z + i| = |z - 2|$; c) $|\bar{z} + 3i| = 3$
b) $|iz + 3| = |z + 4 + i|$; d) $|1 - iz| = 2$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 11 : Argument, forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe

Soit z= a+ib (a,b) $\in$ IR² un nombre complexe non nul d'image le point M dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On désigne par θ une mesure, en radian de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}}\right)$.

1) Fais une figure.
2) En utilisant les rapports trigonométriques, écris a et b en fonction du module de z et de θ
3) Prouve que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

cette écriture est appelée forme trigonométrique de z et θ *est appelé un argument de z*

4) On pose $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$; Exprime z en fonction de $|z|$ et de $e^{i\theta}$

cette écriture est appelée forme exponentielle de z

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant
A retenir N° 1.7

Définition *: Argument d'un nombre complexe non nul , forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe*

Consigne 12 : Propriétés

Soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et
$z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes non nuls et n un nombre entier relatif

Détermine l'écriture trigonométrique de :

$-z$; $\bar{z}$; $\frac{1}{z}$; $z \times z'$; $\frac{z}{z'}$ et z^n puis déduis-en l'écriture exponentielle et un argument de ces nombres complexes

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.8

Propriétés *: Argument d'un nombre complexe non nul ; forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe*

Consigne 13 : Approfondissement

a)Ecris sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 2+2i$; $\frac{z_2}{z_1}$ et $u = \frac{(2-2i)^5}{(1+i\sqrt{3})^4}$ *(tu pourras remarquer que* $2-2i = \overline{z_2}$ *et* $1+i\sqrt{3} = \overline{z_1}$ *puis utiliser les formules de conjugués)*

b) Détermine la valeur exacte de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 14 : Formule de Moivre- Formule d'Euler

θ est un nombre réel et n un nombre entier relatif

1) En utilisant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, justifie que :
   a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
   b) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
2) Utilise ces formules pour linéariser $\cos^3 2x$ et $\sin^3 x$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.9

Définitions *: Formule de Moivre-Formules d'Euler*

Consigne 15 : racine carrée d'un nombre complexe

Soit $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe non nul tel que $z^2 = U$.

1) a) Exprime Re(U), $\Im m$ (U) et |U| en fonction de a et b.
   b) Déduis-en l'équivalence :
$$z^2 = U \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = |U| \\ a^2-b^2 = Re(U) \\ 2ab = \Im m(U) \end{cases}$$
2) Détermine les racines carrées du nombre complexe $-5+12i$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.10

Définition – propriétés *: Racine carrée d'un nombre complexe ; équations du 2nd degré dans* $\mathbb{C}$ *; équation se ramenant à des équations du 2nd degré dans* $\mathbb{C}$

Consigne 16 : Approfondissement

1) Résous dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes
   a) $-2z^2 + iz - 3 = 0$
   b) $3z^2 + z - 4 = 0$
   c) $-iz^2 + (2-3i)z + 6 = 0$
2) Soit P(z) le polynôme défini par :
   $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$
   Résous dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 17 : Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul

1) Calcule $(2-i)^4$
2) Que représente le nombre complexe $2-i$ pour le nombre complexe -7-24i ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.11

Définition-Propriété : *Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul*

Consigne 18 : Approfondissement

1) a) Calcule $(3i)^3$
   b) Détermine les racines cubiques de l'unité
   c) Déduis-en les racines cubiques du nombre complexe -27i
2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$ sachant que $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ *(Tu pourras laisser les solutions sous forme exponentielle)*

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 19 : Configuration du plan

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A , B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

1) a) Justifie que :

$mes\left(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{CD}}\right) - mes\left(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$

b) Déduis-en que

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Déduis-en que :

a) A, B et C alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

b) $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

Stratégie : TI- TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.12

Propriété : Configurations planes et nombres complexes

Consigne 20 : Réinvestissement

1) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ les points A ; B et C d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = -3 + 2i$ et $z_C = 1$

a) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

b) Déduis-en la nature du triangle ABC.

c) Détermine une équation cartésienne du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

d) Détermine les coordonnées du point D tel que ACBD soit un rectangle.

Réinvestissement 1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

A tout nombre complexe z distinct de $-2i$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z-1}{z+2i}$

a) Détermine l'ensemble (E_1) des points M du plan d'affixes z tels que Z soit un nombre réel

b) Détermine l'ensemble (E_2) des points M du plan d'affixes z tels que Z soit un nombre imaginaire pur

c) Détermine l'ensemble (E_3) des points M du plan d'affixes z tels que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1

NB : *Tu pourras utiliser la méthode analytique (en posant $z = x + iy$) ou la méthode géométrique (en interprétant le module ou l'argument de Z)*

Réinvestissement 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$(*unité 1cm*). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations :

$$(E): z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i) = 0 \text{ et}$$
$$(E'): z^3 - (8 + 5i)z^2 + (17 + 25i)z - 40i = 0$$

Partie A :

1. Résous l'équation(E).
2. Résous l'équation (E') sachant qu'elle admet une racine dont le point image dans le plan complexe appartient à la droite d'équation : $y = x$.
3. On désigne par E, F et G les points d'affixes respectives :
   $z_E = 4 + 4i$, $z_F = 1 + 2i$ et $z_G = 3 - i$.
   a) On pose $Z = \frac{z_E - z_F}{z_G - z_F}$. Ecris Z sous forme algébrique et déduis-en la nature du triangle EFG.
   b) Soit n un entier naturel. Détermine suivant les valeurs de n, la forme algébrique de Z^n.
   c) Détermine l'affixe du point H tel que le quadruplet $EFGH$ soit un carré.
4. Ecris une équation du cercle circonscrit à ce carré.

Partie B :

Soit M le point d'affixe $z, z \neq 3 - i$; à z on associe le nombre complexe z' tel que: $z' = \frac{z-1-2i}{z-3+i}$.

5. a- Etablis une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MF}}\right)$.

b- Détermine et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

c- Détermine et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

6. Détermine et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $|z'| = 2$
7. Détermine l'affixe du point K intersection de (E_2) et (E_3).

Séquence 2: Limites et continuité

NB :
Les consignes en rapport avec la démonstration des propriétés, peuvent ne pas être exécuter en situation de classe si les conditions didactiques ne le permettent pas mais veillez à leurs exploitations par des activités de consolidation

Activité 2

Avant de réaliser une consultation, Gouton prépare une surface qu'il couvre de poudre blanche et sur laquelle il réalise la représentation graphique d'une fonction qu'il utilise pour interpréter les résultats.
L'aire de la surface préparée pour la consultation de Dansou en fonction de la quantité x de poudre blanche est $s(x) = (2-x)\sqrt{2x-x^2}$ et la représentation graphique réalisée est celle de la fonction $v : x \longmapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$
Dansou se propose de connaître l'aire maximale de la surface préparée et d'étudier la fonction v

Consigne 1 : Limites de référence

1) On suppose que $n > 0$
a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$
b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$ suivant la parité de n
2) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.1

Rappel : limites de référence ;limites trigonométriques limite à l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Consigne 2 : Opérations sur les limites
Complète les tableaux suivants en explicitant les différentes formes d'indétermination

Limites d'une somme :

Soit f ; g des fonctions numériques,x_0 ,l et l' des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty$; $-\infty$ ou x_0

Si f a pour limite	et si g a pour limite	Alors $(f+g)$ a pour limite
$+\infty$	$+\infty$	+∞
$+\infty$	l	+∞
l	l'	l+l'
$-\infty$	l	-∞
$-\infty$	$-\infty$	-∞
$-\infty$	$+\infty$	Indétermination

Limites d'un inverse

Soit f une fonction numériques,x_0 et l des nombres réels.
Lorsque x tend vers $+\infty$; $-\infty$ ou x_0

Si f a pour limite	Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite
$+\infty$ ou $-\infty$	0
l;$(l \neq 0)$	1/l
0 et $f(x) > 0$	+∞
0 et $f(x) < 0$	-∞

Limites d'un produit

Soit f ; g des fonctions numériques,x_0 ,l et l' des nombres réels.
Lorsque x tend vers $+\infty$; $-\infty$ ou x_0

Si f a pour limite	et si g a pour limite	Alors $(f \times g)$ a pour limite
$+\infty$	$+\infty$	+∞
$+\infty$	l;$(l > 0)$	+∞
$+\infty$	l;$(l < 0)$	-∞
l	l'	l×l'
$-\infty$	l;$(l > 0)$	-∞
$-\infty$	l;$(l < 0)$	+∞
$-\infty$	$-\infty$	+∞
$-\infty$	$+\infty$	-∞
$-\infty$ ou $+\infty$	$l = 0$	indétermination

Limites d'un quotient

Soit f ; g des fonctions numériques, x_0, l et l' des nombres réels.
Lorsque x tend vers $+\infty$; $-\infty$ ou x_0

Si f a pour limite	et si g a pour limite	Alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ a pour limite
∞	∞	indétermination
0	0	indétermination
$+\infty$	$l ; (l > 0)$	$+\infty$
$+\infty$	$l ; (l < 0)$	$-\infty$
l	$l' \; (l' \neq 0)$	l/l'
$-\infty$	$l ; (l > 0)$	$-\infty$
$-\infty$	$l ; (l < 0)$	$+\infty$
l	$-\infty$	0...
l	$+\infty$	0...

Stratégie : TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.2

les différentes formes déterminées et indéterminées des limites

Consigne 3 : Approfondissement

1) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\sin(2x)} - \frac{\tan 3x}{\sin(2x)}$;

$\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2x^2 - x - 6}{-x^2 + 5x - 6}\right)$; $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{x} - x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 - x + 2}$

2) Détermine la limite à gauche et à droite en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1+3x}{x-1}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 4 : Limite de fonctions composées

f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$ et a est un élément ou une borne de I, b un nombre réel ou l'infini tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$ avec l un nombre réel ou l'infini. En posant $y = f(x)$ prouve que $\lim\limits_{x \to a} (g o f)(x) = l$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.3

Propriété *: limite de fonctions composées*

Consigne 5 : Approfondissement

Calcule $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(\tan x)}{\tan^2(x)}\right)$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 6 : Limites et inégalités

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et x_0 est une borne de I

1) On suppose dans cette question que f est majorée par M sur I et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

a) Justifie que $\forall x \in I$; $(f + g)(x) \leq M + g(x)$

b) Déduis-en $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$

2) Si la fonction f était minorée par m sur I c'est-à-dire $\forall x \in I$; $f(x) \geq m$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Que donnerait $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.4

Propriétés : *limite de la somme d'une fonction majorée et d'une fonction tendant vers $(-\infty)$; limite de la somme d'une fonction minorée et d'une fonction tendant vers $(+\infty)$; limite d'une fonction croissante et bornée ; limites et comparaison ; théorème des gendarmes*

Consigne 7 : Approfondissement

1) On donne $h(x) = 2x + 1 - 3\cos x$ et $k(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Calcule la limite de h en $-\infty$

b) Justifie que $\forall x \neq 0$; $-x^2 \leq k(x) \leq x^2$ puis déduis-en la limite de k en 0

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 8 : Prolongement par continuité

f est une fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ de domaine de définition D_f

1- a) Justifie que f n'est pas définie en 1.
   b) f admet-elle de limite finie en 1 ?

On dit que f est prolongeable par continuité en 1

2- Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & si\ x \in D_f \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Justifie que g est continue en 1

On dit que g est le prolongement par continuité de f en 1.

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.5

Définition-Propriétés *: Prolongement par continuité :* ***Rappel :*** *continuité en un point ; continuité à gauche et à droite en un point ; continuité d'une fonction sur un intervalle ; opérations sur les fonctions continues ; continuité de fonctions composées*

Consigne 9 : Approfondissement

Soit f et g les fonctions définies respectivement par : :

$$f(x) = \frac{-x^3+8}{x-2} \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x < 0 \\ -2x+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

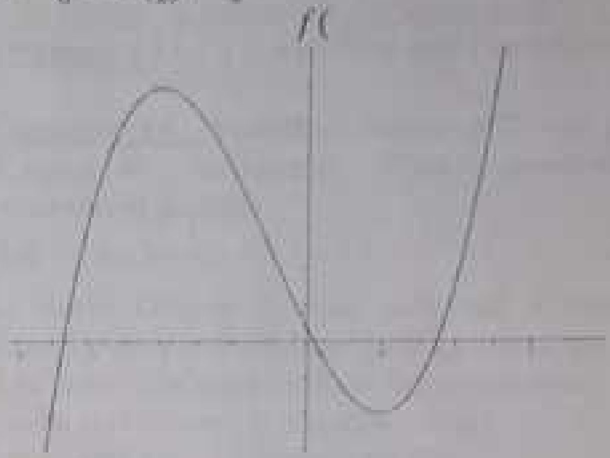
1- Démontre que f admet un prolongement par continuité en **2** que tu définiras

2- a) Détermine l'ensemble de définition E de g
   b) Etudie la continuité de g en 0
   c) Etudie la continuité de g sur E

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 10 : Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{6}$ dont la représentation graphique est illustrée ci-dessous avec $f(-3) = \frac{5}{3}$; $f(-2) = \frac{7}{2}$; $f(1) = -1$; $f(2) = \frac{5}{6}$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}$



1) Dresse le tableau de variation de f

2) Détermine graphiquement l'image par f de chacun des intervalles : $[-3 ; 2]$; $[1 ; \frac{5}{2}]$ et $[1 ; +\infty[$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.6

Propriété *: Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone*

Consigne 11 : Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tel que a<b puis m et M deux nombres réels tels que $f([a;b]) = [m;M]$. Soit c un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1) a) Justifie que $f(a) \in [m;M]$ et $f(b) \in [m;M]$
   b) Déduis-en que $c \in [m;M]$
2) Justifie que l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution appartenant à [a ;b]
3) Justifie que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution appartenant à]a ;b[
4) Recopie puis complète :

« *Si f est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors f garde un signe .... sur I.* »

Stratégie : **TI– TG – TC à définir par l'enseignant**

À retenir N° 2.7

Propriétés: *Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences : sens de variation de fonctions continues*

Consigne 12 : Approfondissement

f et g sont deux fonctions de la variable réelle x définies respectivement par $f(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = -x + 2\sqrt{1+x^2}$ de domaines de définition respectifs $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$

1) a) Démontre que g est continue sur $\mathbb{R}$
   b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$
   c) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$
2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0;1[$

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**

À retenir N° 2.8

Propriétés: *bijection réciproque d'une fonction continue et monotone*

Consigne 13 : Réinvestissement

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2x - 3$

1- a) Etudie les variations de f
   b) Démontre que f définit une bijection g de l'intervalle $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser
2) a) Définis la bijection réciproque de g
   b) Dresse le tableau de variation de g^{-1}

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**

Consigne 14 : Fonction racine $n^{ème}$ et puissant d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

Le devin Gouton avait demandé à Dansou de disposer de 1069 citrons qu'il amènera au marché d'Adjarra, conditionnés de la façon suivante :

_ avec sept citrons, il constitue un tas.
_ avec sept tas, il constitue un filet.
_ avec sept filets, il constitue un panier

1) a) Justifie que chaque panier contient 7^3 citrons puis calcule 7^3
   b) Que représente 7 pour 343 ?
2) On considère l'application

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N} ; n \geq 2)$$

Sachant que f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, justifie que f_n^{-1} (bijection réciproque de f_n) existe puis détermine $f_n^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

(tu pourras utiliser :
$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{i-1}\right)$ et
$\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{i-1} \neq 0, \forall\, a > 0$ *et* $\forall\, b > 0$)

($x^{\frac{1}{n}}$ est appelée racine $n^{ème}$ de x et se note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ avec $\sqrt{2} = x^{\frac{1}{2}}$)

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**

À retenir N° 2.9

Définition –propriétés : *Fonction racine $n^{ème}$ et puissant d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif*

Consigne 15 : Approfondissement

Calcule $A = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[5]{32}$ et $B = \frac{\sqrt[4]{12} \times \sqrt[3]{18}}{\sqrt[4]{18} \times \sqrt{6}}$

SEQUENCE 3 : DERIVEE- ETUDE DE FONCTIONS

Activité 3

Dansou désire connaître la valeur maximale de l'aire $s(x) = (2-x)\sqrt{2x-x^2}$ de la surface préparée pour la consultation

Consigne 1 : Dérivabilité d'une fonction en un point

1) Détermine l'ensemble de définition de s

2) a) Compare $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{s(x)-s(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{s(2+h)-s(2)}{h}$

b) La fonction s est-elle dérivable à gauche en 2 ?

3) Etudie la dérivabilité de s à droite en 0

4) Donne une interprétation géométrique des résultats obtenus en 2b) et 3)

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 3.1

Définitions- Propriétés : *Dérivabilité en un point ; dérivabilité à gauche et à droite en un point ; interprétation géométrique du nombre dérivé ; Point anguleux ; demi-tangentes parallèles à l'axe des ordonnées ;*

Consigne 2 : Approfondissement

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x|x+2|$.

1) a) Etudie la dérivabilité de f en -2

b) Donne une interprétation géométrique des résultats précédents

c) Que représente le point $R(-2\,;0)$ pour la courbe représentative de la fonction f ?

2) Etudie la dérivabilité de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{-x+1}$ à gauche en 1 puis interprète graphiquement le résultat obtenu

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Dérivabilité sur un intervalle ; ensemble de dérivabilité : fonction dérivée

On considère la fonction $s : x \longmapsto (2-x)\sqrt{2x-x^2}$ et on rappelle que s est deux fois dérivable sur $]0;2[$

1) Détermine la fonction dérivée s' de s

2) Calcule $s''(x)$

(s'' est appelée dérivée seconde de s ou dérivée d'ordre 2 de s et l'écriture

$$s(x) = s(0) + \frac{s'(0)}{1!}x + \frac{s''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ est appelée développement limité d'ordre 2 de s au voisinage de 0)

3) Recopie puis complète: « si f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(K) alors gof est …………sur K et pour tout x appartenant à K, $(gof)'(x) =$……………»

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 3.2

Définitions- Propriétés : *dérivées successives; dérivabilité sur un intervalle ; point d'inflexion ; développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage de 0 ; dérivée de fonctions élémentaires ; opérations sur les fonctions dérivées, ; dérivée d'une fonction composée ;*

Consigne 4 : Approfondissement

1) Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes f et g suivantes :

a) $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)^2 \times \cos(-2x)$ où f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$ où g est définie sur $\mathbb{R}$

2) Détermine le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto sinx$ puis calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)$

3) Démontre que le point R d'abscisse 1 est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $h : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 5 : Extremum relatifs

Etudie les variations de la fonction $s : x \longmapsto (2-x)\sqrt{2x-x^2}$ puis aide Dansou à connaître l'aire maximale de la surface préparée pour la consultation

On rappelle que la fonction s est définie sur $[0;2]$, *dérivable sur* $]0;2]$ *et*

$\forall x \in]0;2[$, $s'(x) = \frac{(2-x)(1-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 3.3

Propriétés *: Extremum relatif*

Consigne 6 : Dérivée de la bijection réciproque d'une fonction

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

Soit φ l'application définie de I dans $\varphi(I)$ par $\varphi(x) = f(x)$

En utilisant l'égalité $\varphi o \varphi^{-1} = Id_{f(I)}$, justifie que φ^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et que $\forall y \in f(I)$,

$(\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(y)]}$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 3.4

Propriété *: Dérivée de la bijection réciproque d'une fonction*

Consigne 7 : Approfondissement

Soit $f : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1;1]$

$x \longmapsto \sin x$

Sachant que f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1;1]$ et que $f'(x) = \cos x$

Détermine l'ensemble J sur lequel la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable puis justifie que $\forall x \in J : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 8 : Inégalités des accroissements finis

f est une fonction de la variable réelle x dérivable sur un intervalle I contenant deux nombres réels a et b tel que $a < b$

1) On suppose qu'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout élément x de $[a;b]$,

$m \leq f'(x) \leq M$ et on pose $g(x) = f(x) - mx$ et $h(x) = f(x) - M(x)$

a) Démontre que g est croissante sur $[a;b]$

b) Démontre que h est décroissante sur $[a;b]$

c) Déduis-en des résultats précédents que $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

2) On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel strictement positif M tel que pour tout élément x de $[a;b]$, $|f'(x)| \leq M$

En utilisant les résultats de 1), prouve que $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 3.5

Propriétés *: Inégalités des accroissements finis*

Consigne 9 : Approfondissement

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

a) Justifie que pour tout x élément de $[0;1]$

$0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *(tu pourras remarquer que* $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ *)*

b) Déduis-en que pour tout $x \in [0;1]$,

$1 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 10 : Parité - élément de symétrie – Asymptote

On considère les fonctions : $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$; $g(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ et $h(x) = \sqrt{x^2+x}$ d'ensemble de définition respectifs : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$; $D_g =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ et $D_h =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$

1) Etudie la parité de la fonction f

2) Démontre que le point $\Omega(2;3)$ *est* un centre de symétrie de la courbe (C_g) de la fonction g

3) Démontre que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_h) de la fonction h puis que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 3.6

Etude des branches infinies ; Position d'une courbe par rapport à son asymptote oblique ; parité , périodicité , axe de symétrie ; centre de symétrie et plan d'étude d'une fonction

Consigne 11 : Approfondissement

Soit la fonction f : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{|x^2 - 3x + 2|} \end{array}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudie les variations de f
2) Etudie les branches infinies de (C_f)
3) Construis (C_f)

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Réinvestissement

Soit la fonction $g : x \longmapsto 2\sin x + \cos 2x$ et (C_g) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_g)
2) Justifie que l'ensemble d'étude de g peut-être réduit à $[0; 2\pi]$
3) Etudie les variations de g sur $[0; 2\pi]$
4) Construis (C_g) sur $[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

SEQUENCE 4 : PRIMITIVES

Activité 4 :

De retour à la maison, Dansou est confronté lors d'une séance d'étude à un problème qui consiste à déterminer une fonction F définie sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée est la fonction

$F' : x \longmapsto 2 + x + x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$

Consigne 1 : Découverte

1) Aide Dansou à déterminer F
2) Que représente F pour F' ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 4.1

Définition et propriétés d'existences des Primitives

Consigne 2 : Propriétés

f est une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I et $c \in \mathbb{R}$

1) Démontre que la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c, \forall x \in I$ est une primitive de f sur I
2) G étant une primitive quelconque de f sur I, y_0 un nombre réel donné et x_0 un élément de I, détermine c pour que $G(x_0) = y_0$
3) Détermine la primitive H de la fonction $h : x \longmapsto \tan^2(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{20-\pi}{4}$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 4.2

Propriétés *: Ensemble des primitives ; Primitives de fonctions usuelles ; Opérations sur les primitives*

Consigne 3 : Approfondissement

1) Détermine les primitives des fonctions **définies et continues sur $\mathbb{R}$** suivantes :

$f_1(x) = x^4 - 3x^2 - 3x + 2$; $f_2(x) = \frac{x^5+2x^3-x}{(x^2+1)^2}$ *on remarquera que* $x^5 + 2x^3 - x = x(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x$

$f_3(x) = (x+6)\sqrt{x^2 + 12x + 150}$; $f_4(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$ et $f_5(x) = \cos^3 x$

2) Soit la fonction $g : x \longmapsto \frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

a) Détermine trois nombres réels a, b et c tels que $\forall x \neq 2 ; g(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

b) Détermine la primitive G de g qui s'annule en 4.

Séquence 5: Fonction logarithme népérien

Activité 5

Dansou, très curieux a pu remarquer chez le deuxième devin que les tablettes utilisées par ce dernier portent des symboles dont la fonction inverse, et se demande si cette fonction n'est pas à l'origine de l'inversion de la tendance. Il s'intéresse alors à certaines propriétés de la fonction

$$f: \ ]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

et il constate qu'aucune primitive de la fonction f ne figure dans le tableau des primitives des fonctions usuelles.

Consigne 1 : Découverte

1. Justifie que la fonction f admet des primitives sur $]0;+\infty[$
2. En notant H la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, justifie que H est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction H est appelée fonction logarithme népérien et notée ln.

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 5.1

Définition et conséquences : *fonction logarithme népérien*

Consigne 2 : Propriété fondamentale

Soit q un nombre réel strictement positif et u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = qx$

On pose $h(x) = \ln[u(x)]$ et $g(x) = h(x) - \ln(x)$

1)Sachant que $u(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$ et en utilisant la propriété de la dérivée de fonctions composées, démontre que h est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$

2) a) Détermine $g'(x)$ puis déduis-en qu'il existe un nombre réel c tel que $\forall x \in]0;+\infty[\ ; g(x) = c$

b) A l'aide de $g(1)$, détermine c et déduis que

$$\ln(qx) = \ln(x) + \ln(q)$$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 5.2

Propriétés *: Propriété fondamentale et conséquences ;*

Consigne 3 : Réinvestissement

1) Ecris plus simplement $A = \ln\left(\frac{2^5 \times 5^2}{10^4}\right)$

2) Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble de définition de f

a) $f(x) = ln|x^2 - 2x|$; b) $f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{1-x}\right)$; c) $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\ln x}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 4 : limites ; équations ; étude et représentation de ln

1) On admet que : $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln u = -\infty$ et $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

a) En posant $x = \frac{1}{u}$, justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

b) En utilisant $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) a) Utilise les différentes informations connues sur la fonction logarithme népérien pour dresser son tableau de variation

b) Démontre que la fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

c) Déduis l'existence d'un nombre réel strictement positif e tel que $\ln e = 1$

d) Recopie puis complète :

« La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors $\forall a, b \in]0;+\infty[$,

$a < b \Leftrightarrow \ln a \ldots. \ln b$ »

« La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ alors $\forall a, b \in]0;+\infty[$, $a = b \Leftrightarrow \ln a \ldots \ln b$ »

3) Etudie les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction ln puis construis $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 5.3

Définition- Propriétés *: limites ; équations et inéquations + conséquences ; le nombre e ; dérivée et primitives*

Consigne 5 : Approfondissement

1) Calcule les limites suivantes :
a) $\lim_{x \to +\infty} [3x + 1 - \ln(x+1)]$
b) $\lim_{x \to -\infty} x\ln(1 + \frac{2}{x})$; d) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} [\frac{x}{x-2} + \ln(x-2)]$

2) Résous dans $\mathbb{R}$:
a) $\ln(5x + 2) - \ln(x^2 - 4) = 0$
b) $\ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2 - x)$

3) a) Dans chacun des cas suivants, calcule $f'(x)$
i) $f(x) = \ln(-x^2 + 3x - 2)$ avec $D_f =]1; 2[$;
ii) $f(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$ avec $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}$

b) Détermine une primitive de la fonction
$g : x \longmapsto \frac{2}{(x+2)}$ sur $]-\infty ; -2[$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 6 : Logarithme décimal

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$
Etudie les variations de f puis trace sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 5.4

Définition- Propriétés : *fonction logarithme de base* a ($a \in]0; +\infty[- \{1\}$)

Réinvestissement

Un motif de décoration a l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

1. a) Etudie les variations de la fonction
$g : x \longmapsto -x + 1 - 2\ln x$
b) Calcule $g(1)$ puis déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$ suivant les valeurs de x

2) a) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$
b) Etudie le sens de variations de f
c) Dresse le tableau de variation de f

4) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
a) Démontre que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser
b) On désigne par h^{-1} sa bijection réciproque
Résous l'équation $h^{-1}(x) = e$
c) Calcule $(h^{-1})'(e^{-2} + e^{-1})$ puis construis (C)

SEQUENCE 6 : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Activité 6

Après avoir étudié la fonction
$\ln : \;]0; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln x$
Dansou s'interrese à l'étude de sa bijection réciproque

Consigne 1 : Défintions et propriétés

La fonction ln admet une bijection réciproque
La bijection réciproque de la fonction ln est appelée fonction exponentielle népérienne est notée exp

1) a) Donne l'ensemble de définition de exp puis dresse son tableau de variation à partir de celui de ln

b) Recopie puis complète :
i) « La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Leftrightarrow \exp(a) \dots \exp(b)$ »
ii) « La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$ alors
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a = b \Leftrightarrow \exp(a) \dots \exp(b)$
iii) $\ln(e^r) = r \Leftrightarrow \exp(r) = e^{\dots}$

2) a) Précise le signe de exp ainsi que les limites de exp en $-\infty$ et en $+\infty$
b) En posant $u = e^x$, calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)$ et $\lim_{x \to -\infty} xe^x$

3) Construis la représenation graphique de exp à partir de celle de la fonction ln

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 6.1 *Définition de la fonction exp ; conséquence de la définition ; limites remarquables ; propriétés algébriques ; résolutions d' équations et d' inéquations ; Dérivé et primitives*

Consigne 2 : Approfondissement

1) Ecris plus simplement : $A = \frac{e^{1+\ln 2}}{[\ln(e^{-2})]^2}$

2) Résous dans $\mathbb{R}$:
a) $e^{-x+2} = e^{3x}$; b) $e^{-2x+1} - 2 < 0$;
c) $-e^{2x} + 3e^x - 2 \geq 0$

3) On considère la fonction suivante :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
a) Etudie la continuité de f en 0.
b) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
c) Achève l'étude des variations de la fonction f puis consrtuis sa courbe (C_f) dans un repère orthonormé

Séquence 7: Fonctions exponentielles- Fonctions puissances

Activité 7

Pour les sacrifices, le devin Gouton a demandé à Dansou de disposer de 1069 citrons qu'il doit conditionner de la façon suivante :

- avec sept citrons, il constitue un tas.
- avec sept tas, il constitue un filet
- avec sept filets, il constitue un panier

Consigne 1 : Puissance d'exposant réel d'un nombre réel strictement positif

1) Exprime en fonction d'une puissance de 7 :
   a) Le nombre de citrons nécessaires pour former un filet
   b) Le nombre de citrons nécessaires pour former un panier
   c) Ecris le nombre 1069 sous la forme d'une somme de puissance de 7
2) a) Complète l'équivalence suivante :
   « $\ln 7^3 = \cdots \ln 7 \Leftrightarrow 7^3 = e^{3\cdots}$ »
   b) On étend ce résultat à tout nombre réel x et on considère un nombre réel strictement positif .
   Recopie puis complète : « $a^x = \ldots\ldots\ldots$ »

Stratégie : TI- TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 7.1

Définitions et propriétés : *Puissance d'exposant réel d'un nombre réel strictement positif*

Consigne 2 : Fonction exponentielle de base a

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = a^x$

1) Etudie suivant les valeurs de a, les variations de la fonction $\exp_a$
2) a) Démontre que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   b) Déduis-en que pour tous nombres réels α et β :
      i) $a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
      ii) si $0 < a < 1$ alors $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
      iii) si $a > 1$ alors $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
3) Etudie pour $0 < a < 1$ et pour $a > 1$ les branches infinies de la courbe (C_a) de la fonction $\exp_a$ puis construis (C_a) pour $a = 0,2$; pour $a = 1$ et pour $a = 4$ dans le même repère

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 7.2

Définitions et propriétés : *Fonction exponentielle de base a*

Consigne 3 : Approfondissement

1) Résous dans $\mathbb{R}$
   a) $2^{3x+8} - 2^{x-1} = 0$
   b) $3^{2x+5} < 2^{-x+1}$
2) Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = \exp_3(x^2 - 2x)$;
   $g(x) = \exp_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ et $h(x) = 3^x \ln x$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 4 : Fonction puissance d'exposant α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)

α est un nombre réel non nul . On considère la fonction f_α définie de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$

1) Etudie les variations de f_α pour $\alpha < 0$ et pour $\alpha > 0$ puis déduis-en que f_α est une bijection
2) Deduis-en aussi que pour tous nombres réels strictement positifs a et b :
   i) $a^\alpha = b^\alpha \Leftrightarrow a = b$
   ii) si $\alpha < 0$ alors $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a > b$
   iii) si $\alpha > 0$ alors $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a < b$

Stratégie : TI- TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 7.3

Définitions et propriétés : *Fonction puissance d'exposant α, dérivée et primitives de f_α. Dérivée et primitives de la fonction u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)*

Consigne 5 : Limites de référence- Croissantes comparées

α est un nombre réel strictement positif .

1) En posant $t = \alpha \ln x$ et sachant que $\forall x \in]0;+\infty[$ $x^{\alpha}\ln x = e^{\alpha \ln x} \times \ln x$, calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha}\ln x$
2) En posant $t = \alpha \ln x$ et sachant que $\forall x \in]0;+\infty[$ $\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{\ln x}{e^{\alpha \ln x}}$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$
3) Sachant que $\forall x \in]0;+\infty[$ $\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = e^{x\left(\frac{\alpha \ln x}{x} - 1\right)}$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}}$
4) Sachant que $\forall x \in \mathbb{R}^{*}$, $|x|^{\alpha}.e^{x} = e^{x\left(\frac{\alpha \ln|x|}{x} + 1\right)}$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} |x|^{\alpha}.e^{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha}.e^{x}$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 7.5

Limites de référence et croissantes comparées de ln , exp , f_{α}

Consigne 6 : Approfondissement

On considère les fonctions f , g et h définies respectivement par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ;$$

$$g(x) = x^{x} \text{ et } h(x) = 2^{|x|}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Etudie les variations de la fonction g
3) Etudie les variations de la fonction h puis construis sa courbe

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseigna

Séquence 8 : CALCUL INTEGRAL

Activité 8

Au cours d'une séance d'étude sur les applications pratiques des primitives, un ami de Dansou affirme que si F est une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I avec a et b deux éléments de I, alors le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F.

Dansou désire vérifier cette affirmation

Consigne 1 : Notion d'intégrale

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I avec a et b deux éléments de I.

1) a) En désignant par H une autre primitive de f sur I , justifie que $H(b) - H(a) = F(b) - F(a)$

b) L'affirmation de l'ami de Dansou est-elle vraie ?

c) Comment appelle-t-on $F(b) - F(a)$?

2) On note $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Vérifie que

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

c) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ où $c \in I$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.1

Définitions-Propriétés *: Définitions, notation, vocabulaire et interprétation de l'intégrale d'une fonction continue ;*

Propriétés de l'intégrale (linéarité ; relation de Chasles , signe de l'intégrale, comparaison)

Consigne 2 : Décontextualisation

Calcule chacune des intégrales suivantes

$I = \int_2^3 \left(\frac{x^3 - 4x^2 + x}{x^2}\right)dx$; $J = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)dx$

$K = \int_0^1 (t-1)(t^2 - 2t - 3)^3 dt$

$L = \int_{-1}^0 \left(\frac{4x+6}{(x^2+3x+5)^2}\right)dx$; $M = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Inégalité de la moyenne – Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

1) Sachant que pour tout élément x de I
$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$
Démontre que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
2) Démontre que s'il existe un nombre réel M tel que $\forall\, x \in [a;b]$, $|f(x)| \leq M$ alors
$\int_a^b |f(x)|dx \leq M|b-a|$
3) Démontre que s'il existe deux réels m et M tels que $\forall\, x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors
$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$
4) Justifie qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.2

Propriétés-Définition *: Inégalité de la moyenne – Valeur moyenne d'une fonction*

Consigne 4 : Intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique

Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant 0 et a.

1) Démontre que si f est paire alors :
   a) $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$
   b) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
2) Démontre que si f est impaire alors
   a) $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$
   b) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(tu pourras poser $x = -t$)

3) On suppose que f fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T et a est un nombre réel.
a) Calcule $\int_T^{a+T} f(x)dx$
(Tu pourras poser $x = u + T$)
b) Sachant que : $\int_a^{a+T} f(x)dx =$
$$\int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$
Démontre que $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.3

Propriétés *: Intégrale d'une fonction paire, d'une fonction impaire et d'une fonction périodique*

Consigne 5 : Approfondissement

1) Calcule les intégrales suivantes :
$I = \int_1^{-1}\left(\frac{x^3}{x^4+x^2+1}\right)dx$
$J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,dt$
$K = \int_m^{m+\frac{2\pi}{3}} \sin^2(3x)\,dx$ avec $m \in \mathbb{R}$
2) Calcule la valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto (x^2 + \cos x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 6 : Intégration par parties

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle [a ; b] telles que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur [a ;b].
En utilisant la dérivée de la fonction $u.v$ établis que
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x).v(x)] - \int_a^b v'(x).u(x)dx$$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.4

Propriétés *: formules de l'intégration par parties ; changement de variable affine*

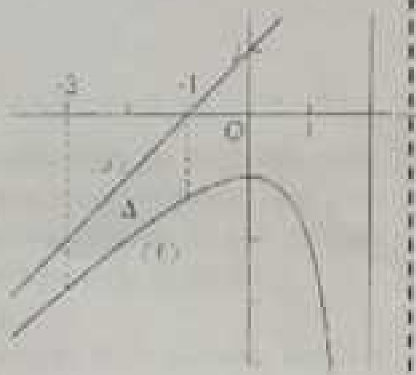
Consigne 7 : Approfondissement

1) Calcule l'intégrale $A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$ à l'aide du changement de variable $u = 2x + 3$
2) Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.
$B = \int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\;dx$
$C = \int_e^{e^2} (2x+1)\ln x\;dx$ et
$D = \int_0^{\ln 3} (x+1)\,e^x\,dx$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 8 : Calcul d'aires, calcul approché d'une intégrale

1) Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x + 1$

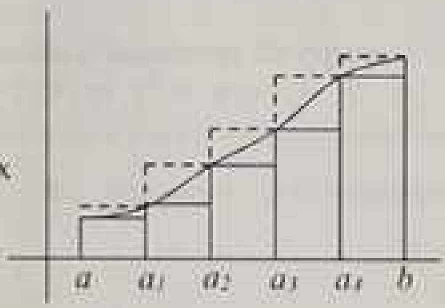


Calcule l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -3$; $x = -1$

2) f est une fonction défini et continue sur l'intervalle [a ;b], on subdivise l'intervalle [a ;b] en 5 intervalles de même amplitude et d'extrémités

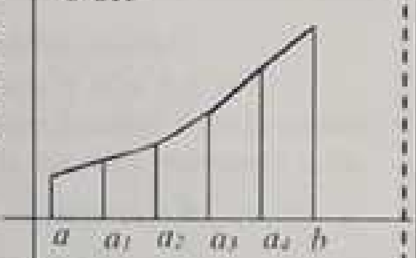
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = b$$

a) Calcule la somme s des aires des petits rectangles (ceux situés en dessous de la courbe) et la



somme S des aires des grands rectangles (ceux obtenus en complétant les petits rectangles par les traits en pointillé) puis propose une valeur approchée de $A = \int_a^b f(x)dx$

b) Calcule la somme S des aires des aires des trapèzes situés en dessous de la courbe puis propose une valeur approchée de $A = \int_a^b f(x)dx$



Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.5

***Propriétés** : Calcul d'aires, valeur approchée d'une intégrale (méthodes des rectangles et méthodes des trapèzes) ; calcul de volumes et études des cas particuliers de solides de révolution (cône, boule et cylindre) :*

Consigne 9 : Approfondissement

On considère l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

En subdivisant l'intervalle [0;1] en 5 intervalles de même amplitude détermine une valeur approchée de A en utilisant :

a) La méthode des trapèzes
b) La méthode des rectangles

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 10 : Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie de ℝ vers ℝ par $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+e^t}dt$

1) Détermine le domaine de définition D_F de F
2) Sans faire de calcul, indique $F'(x)$ et $F(0)$
3) Etudie le sens de variation de F

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 8.6

Fonction définie par une intégrale

SEQUENCE 9 : Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Activité 9

Au cours d'une autre séance d'étude avec ses amis, Dansou se demande si une fonction numérique peut être solution d'une équation et dans le cas échéant comment peut-on appeler une telle équation.

Consigne 1 : Découverte

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = e^{-2x}$

1) Calcule $f'(x) + 2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2) Comment appelle-t-on l'équation $f' + 2f = 0$ d'inconnue f où f est une fonction numérique d'une variable réelle ?

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 9.1

Equations différentielles : Définition, vocabulaire et notation : méthode de résolution d'équation du type $y' = f(x)$

Consigne 2 : Résolution d'équations du type : $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$)

Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' = e^{-2x} + x$
2) $y'' = x^2 + \sin x$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants sans second membre

On considère l'équation différentielle $(E) : ay' + by = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

a) Démontre que pour toute fonction y de la variable réelle x différente de la fonction constante nulle, l'équation différentielle (E) équivaut à $\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$

b) Déduis-en les solutions de (E)

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 9.2

Définition- Propriétés : Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants sans second membre

Consigne 4 : Approfondissement

1) Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(E_1): $2y' - 3y = 0$ *et* (E_2): $y' + y\ln 2 = 0$
2) Détermine la solution f de (E_2) telle que : $f(1) = -2$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 5 : Equations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants sans second membre

On considère l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Détermine une relation que doit vérifier r pour que la fonction $f : x \mapsto e^{rx}$ soit solution de (E)

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 9.3

Définition- Propriétés : Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Consigne 6 : Réinvestissement

On considère les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$
(E_2) : $y'' - 2y' + 5y = 0$
(E_3) : $y'' + 4y + 4y = 0$
(E'_3) : $y'' + 4y + 4y = -4x$

1) Résous sur $\mathbb{R}$, les équations (E_1) ; (E_2) et (E_3)
2) a) Détermine une fonction polynôme du 1er degré P solution de (E'_3)

b) Démontre qu'une fonction f est solution de (E'_3) si et seulement si $(f - P)$ est solution de (E_3)

c) Déduis-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'_3)

d) Détermine la solution h de (E'_3) telle que : $h(0) = 2$ et $h'(0) = -2$

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

SEQUENCE 10 : PROBABILITES

Activité 10 :

Dansou se rappelle que pour réaliser la consultation, chacun des devins a jeté 4 cauris sur la surface préparée pour la circonstance. Sachant que chaque cauris lancé peut tomber ouvert ou fermé, Dansou se demande quelle peut bien être l'issue de ces lancers.

Consigne 1 : *Vocabulaires des probabilités*

1) Peut-on connaitre à l'avance, le résultat d'un lancer des 4 cauris ?
2) a) Combien de résultats possibles peut-on avoir ?
   b) Peut-on avoir 3 cauris ouverts et 2 cauris fermés ?
3) Donne le nombre de cas dans lesquels le lancer présente exactement un cauris ouvert. Quel est le pourcentage de ces cas ?

A l'issue du lancer des 4 cauris, on ne peut pas prédire avec certitude un résultat, on dit qu'on a effectué une expérience aléatoire ou une épreuve. Chacun des résultats possibles est appelé une éventualité et l'ensemble de tous les résultats possibles est appelé l'univers associé à cette expérience aléatoire et est souvent noté Ω

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 10.1a

Définition- Propriétés *: Rappels sur les outils pour dénombrer ;Vocabulaire des probabilités ; Langages des événements ; définition et propriétés de la probabilité d'un évènement ; Définition d'équiprobabilité ;*

Consigne 2 : Propriétés

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω et A et B deux évènements de Ω

En remarquant que $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ et $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$, justifie que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 10.1b

Propriétés – Définition *: propriétés de la probabilité d'un évènement ; Définition d'équiprobabilité ;*

Consigne 3 : Formule d'équiprobabilité

Ω désigne un univers non vide et fini de cardinal n ; A un évènement de Ω et p est une probabilité uniforme définie sur Ω.

Sachant que pour tout $\omega_i \in \Omega$ avec $1 \leq i \leq n$

$p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{card(\Omega)}$ et $p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\{\omega_i\})$

Détermine $p(A)$ en fonction de $card(\Omega)$ et $card(A)$.

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 10.2

Propriété *: Formule d'équiprobabilité*

Consigne 4 : Approfondissement

Le devin Gouton a un sac contenant 5 cauris blancs, 4 cauris noirs et 2 cauris rouges.

1) Il tire simultanément et au hasard 3 cauris du sac

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Les trois cauris tirés sont unicolores »

B : « Les trois cauris tirés sont de différentes couleurs »

C : « Obtenir au moins un cauris blanc »

2) Reprends les questions du 1) en supposant que les tirages sont successifs et sans remise.
3) Reprends les questions du 1) en supposant que les tirages sont successifs avec remise

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 5: Probabilité non uniforme

On lance un dé pipé dont les six faces portent respectivement les numéros 1,2,3,4,5 et 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face marquée i

On suppose que le dé est tel que :

$$6p_1 = 2p_2 = 2p_3 = 3p_4 = 3p_5 = 2p_6$$

a) Calcule la probabilité d'apparition de chaque face
b) Calcule la probabilité d'obtenir un nombre pair

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 6 : Probabilité Conditionnelle

A une demande de volontaires pour nettoyer le tableau dans une classe de 45 élèves dont 36 garçons et 9 filles, on a obtenu les résultats suivants :

	Filles	Garçons	Total
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Total	9	36	45

On choisit un élève au hasard dans la classe et on considère les évènements suivants :
F : « l'élève est une fille » ; G : « l'élève est un garçon » et V : « l'élève est volontaire »

1) Calcule les probabilités $p(F), p(V)$ et $p(F \cap V)$
2) a) Si on choisit une fille au hasard, calcule la probabilité P_0 pour qu'elle soit volontaire
   b) Compare P_0 à $\frac{p(F\cap V)}{p(F)}$

P_0 est appelée probabilité conditionnelle de V sachant F et est notée $p(V/F)$ ou $p_F(V)$)

3) A-t-on $p(F \cap V) = p(F) \times p(V)$? *(on dit que les évènements F et V ne sont pas indépendants)*

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N°10.3

Définition- Propriétés *: Probabilité conditionnelle ; formule des probabilités composées et des probabilités totales ; Définition d'évènements indépendants*

Consigne 7 : Propriétés de deux évènements indépendants

A et B sont deux évènements de Ω tels que : $p(A) \neq 0$ $p(B) \neq 0$.

1) Démontre que :
   (A et B sont indépendants) ⇔ $[p_B(A) = p(A)]$
2) En utilisant le fait que
   $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$

Démontre que A et B sont indépendants ⇔ *A et $\bar{B}$ sont* indépendants.

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 10.4

Propriété et conséquences *: Evènements indépendants*

Consigne 8 : Réinvestissement

Une enquête réalisée dans une ville d'Afrique du Sud a révélé que 25% de ces habitants sont atteints du Sida. Parmi les habitants atteints du Sida, 80% sont atteints du cancer. Parmi les habitants non atteints du sida, 10% sont atteints du cancer. On choisit au hasard un individu dans ce village et on désigne par S l'événement : "être atteint du sida" et par C l'événement : " être atteint du cancer"

1) Calcule la probabilité que l'individu
   a- soit atteint du sida et du cancer.
   b- soit atteint du sida uniquement.
   c- soit atteint du cancer uniquement.
   d- ne soit atteint ni du cancer, ni du Sida.
2) Déduis – en la probabilité que l'individu choisi soit atteint du cancer.
3) Sachant que l'individu choisi est atteint du cancer, quelle est la probabilité qu'il soit atteint du sida ?

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 9 : Variable aléatoire

Dansou désigne par X l'application de l'ensemble Ω (des résultats du lancer des quatre cauris par Gouton) dans ℝ qui , à chaque lancer associe le nombre de cauris ouverts

1) Détermine l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X
2) Calcule la probabilité de chacun des événements $\{X = x_i\}$ où x_i est un élément de $X(\Omega)$

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N°10.5

Définition- Propriétés : *Variable aléatoire réelle ; Loi de probabilité ; Espérance mathématique ; Variance ; Ecart-type ; Fonction de répartition*

Consigne 10 : Approfondissement

Un sac contient 3 boules noires et 2 boules jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules du sac. L'obtention d'une boule jaune fait gagner 2 F au joueur et celle d'une noire lui fait perdre 1F.
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issu d'un tirage de 2 boules.

1.) Etablis la loi de probabilité de X
2.) Calcule (X) , $V(X)$ et $\sigma(X)$
3.) Définis la fonction de répartition F de X puis construis sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère (O, I, J).

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**
À retenir N° 10.6
Définition- Propriétés : *Epreuve de Bernoulli ; schéma de Bernoulli et Loi binomiale*

Consigne 11 : Réinvestissement

Une pièce de monnaie est truquée de telle sorte que pour un lancer de cette pièce, la probabilité p d'apparition du côté "pile" est le double de la probabilité q d'apparition du côté "face".
1.) Calcule p et q.
2.) On lance 5 fois de suite cette pièce.
Calcule la probabilité d'obtenir :
a.) Exactement 3 fois le côté "pile"
b.) Le côté "pile" seulement aux trois premiers lancers.

SEQUENCE 11 : SUITES NUMERIQUES

Activité 11

Dans ses préparatifs afin de réussir brillamment à son examen du Baccalauréat, Dansou désire déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{6(4u_n+3)}{2u_n+15} \end{cases}$$

Consigne 1 : Rappels
1) Calcule u_2 et u_3.
2) a- Démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \frac{u_n-6}{2u_n+3}$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
b- En utilisant sa raison, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge t- elle ?
3) a- Exprime v_n puis u_n en fonction de l'entier naturel n.
b- Détermine alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Stratégie : **TI– TC à définir par l'enseignant**
À retenir N°11.1
Rappels des définition- Propriétés : *suite numérique, suite minorée, suite majorée ; suite bornée ; suite croissante et décroissante ; suite convergente ; suites arithmétiques (définition, expression explicite, somme des termes consécutifs) ; suites géométriques (définition, expression explicite, somme des termes consécutifs) ; Principe du raisonnement par récurrence*

Consigne 2 : Approfondissement

1) (u_n) est la suite numérique définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$
Démontre que pour tout entier naturel n ,
$0 \le u_n \le 2$.
2) Etudie la limite de la suite (V_n) dans chacun des cas suivants :
a) $V_n = \frac{5^n-2^n}{5^n-3^n}$ b) $V_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}$
c) $V_n = \frac{\sin(n^2)}{n+1}$ d) $V_n = \sqrt{\exp\left(\frac{-2n+3}{n-1}\right)}$

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**
À retenir N° 11.2
Propriétés : *Propriétés de comparaison des suites numériques ; Critères de convergence d'une suite numérique ; Propriété du point fixe ; suites divergentes ; croissances comparées*

Consigne 3 : Réinvestissement

Une enquête menée dans le jardin botanique de l'institut de la biodiversité d'une université révèle que le nombre total d'espèces de plantes en voie de disparition disponibles dans ce jardin est dix fois la limite de la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+3} \end{cases}$
1) Etudie le sens de variation de la fonction numérique f de variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par $(x) = \frac{3x+4}{x+3}$.
2)
a- Démontre que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;2]$.
b- Etudie le sens de variation de la suite (u_n).
c- Déduis-en que la suite (u_n) est convergente.
3) Détermine le nombre d'espèce de plantes en voie de disparition disponibles dans ce jardin.

Stratégie : **TI – TC à définir par l'enseignant**

SEQUENCE 12 : STATISTIQUES

Activité 12

Bientôt les examens du Baccalauréat. Dansou consigne dans le tableau ci-dessous, les notes en MATHS (x_i) et en PCT (y_i) qu'il a obtenues au cours des différentes évaluations de l'année en cours et il désire effectuer une étude statistique sur ces différentes notes afin de se faire une idée des notes qu'il pourrait obtenir en MATHS et en PCT au BAC s'il maintient ce rythme de travail.

x_i	3	12	6	6	9	12	14	5	14	9
y_i	5	13	10	8	10	16	16	8	16	10

Consigne 1 : Lecture, utilisation et représentation d'une série statistique à deux caractères

On désigne respectivement par $(x_i ; n_i)$ et $(y_j ; n_j)$ les séries statistiques simples associées respectivement aux notes de MATHS et de PCT.

1) Dresse le tableau à double entrée de la série double (x_i, y_j, n_{ij})
2) Dresse le tableau des effectifs des séries $(x_i ; n_i)$ et $(y_j ; n_j)$

Ces séries sont appelées séries marginales de la série double (x_i, y_j, n_{ij})

3) a) Calcule les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$
   b) Comment appelle-t-on le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$?
   4) Représente dans le plan rapporté à un repère orthogonal, les points M de coordonnées (x_i, y_j) en indiquant à côté de chaque point l'effectif du couple correspondant

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

A retenir N° 12.1

Définition- Propriétés *: série statistique double ; nuage de points ; point moyen ; covariance ; variance ; écart-type ; ajustement affine ; droite de Mayer ; droite de régression par la méthode des moindres carrés ordinaires ; coefficient de corrélation linéaire et interprétation du coefficient de corrélation linéaire.*

Consigne 2 : Approfondissement

En considérant la série statistique de l'activité 12

1) Détermine une équation de la droite (D) de Mayer
2) Détermine une équation de la droite de régression de y en x
3) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de cette série puis interprète le résultat.
4) Estime à l'aide de la droite d'ajustement la note que Dansou pourrait avoir en PCT au BAC s'il avait au BAC 15 en MATHS.

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Réinvestissement

Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x des individus d'une population

Age(x_i)	36	?	48	54	60	66
Tension(y_i)	11,8	14	12,6	?	15,5	15,1

L'âge moyen dans cette population est de 51ans et la valeur moyenne des tensions enregistrées est de 14.

1) Complète le tableau ci- dessus.
2) Représente le nuage de points associé à cette série double.
3) Détermine une équation de la droite de régression de y en x et de x en y.
4) Calcule le coefficient de corrélation linéaire. Interprète le résultat.
5) Estime la tension artérielle d'un individu pris dans cette population et âgé de 70 ans en utilisant
   a) la droite de régression de y en x.
   b) la droite d'ajustement linéaire de Mayer.

Stratégie : TI – TC à définir par l'enseignant

Activité : *Objectivation / auto-évaluation / Projection*

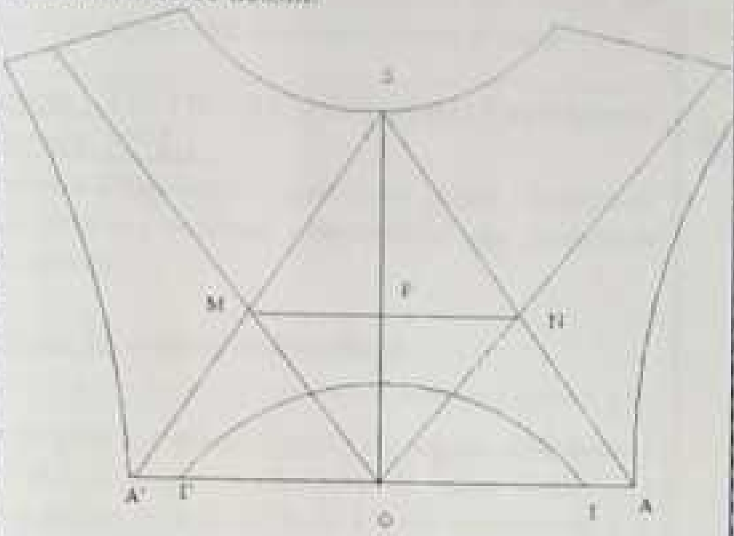
1) Fais le point de tout ce que tu as appris sur la situation d'apprentissage N°2
2) Fais le point de tes difficultés et de tes réussites au cours de l'apprentissage.
3) Identifie des situations de la vie courante où tu peux utiliser tes acquis

Stratégie : TI à définir par l'enseignant

SITUATION D'APPRENTISSAGE N° 3 :

LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ. La coupe d'une tenue.
Codjo est un élève en classe terminale. Son frère aîné Adotévi, un étudiant, l'envoie chez son couturier pour la confection d'un gilet. Il dessine la coupe du gilet sur une feuille de papier et la lui remet avec le tissu. Impressionné, Codjo désire savoir les principes mathématiques qui ont guidé son frère dans la réalisation de ce dessin.



Tâche
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique ; pour cela tu auras, tout au long de cette S.A., à exécuter les activités suivantes :

Activité 0

Lis le texte de la situation de départ : Reformule le problème en tes propres termes. Formule toutes les idées et questions que t'inspirent la situation de départ. Evoque des situations similaires

SEQUENCE 1 : ECRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION PLANE

Activité 1

Après avoir observé minutieusement la coupe du gilet, Codjo remarque que les points S, A *et* A' sont les sommets d'un triangle équilatéral et que la droite (MN) est parallèle à (AA'). Il désire comprendre les principes mathématiques mis en œuvre pour placer les points M, A' *et* N. Pour cela, il munit la feuille de papier d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Consigne 1 : **Découverte**

1) Donne l'image du point O par la translation du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
2) a- Trouve sur le dessin de la coupe de cette tenue un vecteur égal à $2\overrightarrow{SM}$
b- Déduis-en l'image du point M par l'homothétie de centre S et de rapport 2.
3) a- Trouve un vecteur $\vec{u}$ sur le dessin de cette coupe tels que $\|\vec{u}\| = SM$ et une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{SM}, \vec{u}})$ est $\frac{\pi}{3}$.
b- Déduis-en l'image du point M par la rotation de centre S et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.1

Définitions : *Transformation plane ; translation ; homothétie et rotation*

Consigne 2 : *Ecriture complexe des transformations*

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$
f désigne une transformation du plan. M un point du plan d'affixe z *et* M' d'affixe z' son image par f.
Exprime z' en fonction de z dans chacun des cas suivants :
1) f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
2) f est l'homothétie de centre Ω d'affixe z_Ω et de rapport $k, (k \in \mathbb{R}^*)$
3) f est la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle dont une mesure est θ.

Stratégie : TI– TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 1.2

Propriétés : *Ecriture complexe des transformations planes élémentaires*

Consigne 3 : *Approfondissement*

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J)
g est la transformation du plan d'écriture complexe $z' = 2z - 3 + i$ et r est la rotation de centre $S(i\sqrt{3})$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
1) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $-1 + i$.
2) Détermine l'écriture complexe de r.
3) Donne la nature et les éléments caractéristiques de g

SEQUENCE 2 : SIMILITUDE PLANE DIRECTE

Activité 2

Codjo désire connaitre la nature des applications qui permettent de placer les points A et A' de la coupe du gilet respectivement à partir des points N et M.

Consigne 1 : Définition d'une similitude plane

Démontre que $AA' = k \times NM$ où k est un nombre réel strictement positif que tu préciseras

On dit que A et A' sont respectivement les images des points N et M par une similitude plane de rapport k

Stratégie : TI– TG – TC à définir par l'enseignant

À retenir N° 2.1

Définition-Propriétés *: similitude plane ; similitude plane directe ; écriture complexe d'une similitude plane directe*

Consigne 2 : Approfondissement

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère le carré OABC tel que les points A et C ont pour affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i$.

1) a) Détermine l'affixe du point B
2) On désigne par S la transformation du plan telle que $S(A) = C$ et $S(B) = A$
   a) Détermine l'écriture complexe de S
   b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de S
   c) Détermine une équation cartésienne de l'image par S du cercle (Γ) circonscrit au carré OABC

Stratégie : TI– TC à définir par l'enseignant

Consigne 3 : Réinvestissement

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

f est la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$ qui transforme I en O et g l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M(x, y) associe le point $M'(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1)$.

1) Détermine l'écriture complexe de f.
2) a) Détermine l'écriture complexe de g.
   b) Donne la nature précise et les éléments caractéristiques de g.
3) Détermine l'écriture complexe de $h = f o g$

Activité : Objectivation / auto-évaluation / Projection

1) *Fais le point de tout ce que tu as appris sur :*
   a) Les translations, les homothéties, les rotations et leurs écritures complexes
   g) Les similitudes planes directes
2) *Fais le point de tes difficultés et de tes réussites au cours de l'apprentissage.*
3) *Identifie des situations de la vie courante où tu peux utiliser tes acquis.*

Stratégie : TI à définir par l'enseignant

FICHE DE REVISION

Auto - évaluation

Réponds à chacune des questions suivantes

NB : Si les conditions didactiques le permettent, il est possible d'exécuter oralement les activités de ci-dessous

Thème 1 : Géométrie

1) a) Comment démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ? que trois vecteurs sont coplanaires ? que quatre points de l'espace sont non coplanaires ?

b) Comment démontrer qu'un triplet de vecteurs forment une base de $\mathcal{W}$?

2) a) Quand est-ce qu'un système de points pondérés admet-il de barycentre ?

b) comment construit-t-on le barycentre d'un système de points pondérés par exemple $G = bar\{(A;2),(B;4),(C;1)\}$ où ABC est un triangle ?

c) Comment réduit-t-on une somme de vecteurs ? par exemple $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$ et $\vec{w} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$ où ABCD est un carré

d) Rappelles la propriété d'homogénéité et celle des barycentres partiels

e) Comment calcule-t-on les coordonnées du barycentre d'un système de points pondérés par exemple $G = bar\{(A;\lambda),(B;\varphi),(C;\beta)\}$

3) a) Comment calcule-t-on le produit scalaire de deux vecteurs ? (tu donneras les différentes manières)

b) Comment démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux ? qu'un vecteur est unitaire ? qu'une base est orthonormée ?

c) Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(x,y,z)$ dans une base orthonormée

d) A et B sont deux points distincts et k est un nombre réel strictement positif et $\vec{u}$ est un vecteur non nul. Comment déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$MA = k$? $MA = MB$? $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$? $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0$? $\overrightarrow{MA}$ **et $\vec{u}$ soient colinéaires ?**

e) A et B sont deux points distincts et k est un nombre réel strictement positif et $\vec{u}$ est un vecteur non nul. Comment déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$MA = k$? $MA = MB$? $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$? $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0$? ? $\overrightarrow{MA}$ **et $\vec{u}$ soient colinéaires ?**

4) a) Comment traduire vectoriellement qu'un point A par exemple appartient à une droite (D) de repère et $(O;\vec{u})$? à un plan (P) de repère $(I;\vec{v},\vec{w})$?

b) Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite ? d'un plan ?

c) Comment passer d'une représentation paramétrique d'une droite à un système d'équations cartésiennes de cette droite et réciproquement ?

d) Comment passer d'une représentation paramétrique d'un plan à un équation cartésienne de ce plan et réciproquement ?

e) Comment déterminer l'intersection de deux droites ? d'une droite et d'un plan ? de deux plans connaissant leurs représentations paramétriques et/ou leurs équations ou systèmes d'équations cartésiennes ?

f) Comment déterminer le projeté orthogonal H' d'un point H sur un plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$?

5) Comment déterminer l'intersection de trois plans dont on connaît leurs équations cartésiennes ?

6) a) Comment démontrer que trois points A, B, et C sont alignés à l'aide du produit vectoriel ?

b) Comment démontrer que trois points A, B et C déterminent un plan à l'aide du produit vectoriel ?

c) Comment déterminer un vecteur normal à un plan (P) de repère $(A;\vec{u},\vec{v})$?

d) Comment calculer le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(x,y,z)$ dans une base orthonormée directe

e) Comment démontrer que les points A, B , C et D forment un tétraèdre ?

f) Comment démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en utilisant le produit vectoriel ?

g) Comment calculer la distance d'un point M à une droite (D) de repère et $(O;\vec{u})$? à un plan (P) de repère $(I;\vec{v},\vec{w})$?

h) Comment calculer l'aire d'un triangle EFG ? et le volume d'un tétraèdre ABCD ?

7) a) Etant données deux droites (D_1) et (D_2) de repères respectifs $(A_1;\overrightarrow{u_1})$ et $(A_2;\overrightarrow{u_2})$

Comment démontrer que (D_1) et (D_2) sont : parallèles ? strictement parallèles ? confondues ? coplanaires ? non coplanaires ? sécantes ? orthogonales ? perpendiculaires?

b) Etant donnés une droite (D) de repère $(A;\vec{u})$ et un plan (P) passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$

Comment démontrer que (D) et (P) sont : parallèles ? strictement parallèles ? (D) incluse dans (P) ? (D) et (P) sécants ? (D) et (P) perpendiculaires? (Reprendre la question dans le cas où le plan (P) est de repère $(B;\vec{v},\vec{w})$)

c) Etant donnés un plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ et un plan (Q) passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$

Comment démontrer que (P) et (Q) sont : parallèles ? strictement parallèles ? confondus ? sécantes ? perpendiculaires? (Tu pourras reprendre la question en considérant un repère de chaque plan)

<u>BRAVO ET BONNE CONTINUATION A TOI SI TU AS REUSSI A REPRONDRE A TOUTES LES QUESTIONS PRECEDENTES SANS CONSULTER TON CAHIER DE COURS</u>

<u>Activité 1</u> : Géométrie

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

A, B, C et D sont des points de coordonnées respectives $(1;0;2)$, $(1;1;4)$, $(-1;1;1)$ et $(-2;1;3)$. U, V, S, H, et K sont cinq autres points tels que U, V et S sont non alignés et $\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{SK} - 2\overrightarrow{KV} + \overrightarrow{UV}$.

(D_1) et (D_2) sont des droites données par leurs équations respectives :

(D_1): $\frac{2x+1}{2} = \frac{y}{3} = z + 1$ et (D_2) : $\begin{cases} x = -2t \\ y = -6t + 1 \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t - 3 \end{cases}$

1) a) Justifie que les points A, B et C définissent un plan (P) dont tu détermineras une représentation paramétrique

b) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) passant par le point $E(-1;0;2)$ et perpendiculaire à (P)

2) Démontre que ABCD est un tétraèdre puis calcule son volume.

3) a) Justifie que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles

b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) déterminé par les droites (D_1)et (D_2)

4) a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D_3) dont tu préciseras un repère

b) Les droites (Δ) et (D_3) sont-elles coplanaires ?

5) a) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{KU}$, $\overrightarrow{KS}$ et $\overrightarrow{KH}$ sont coplanaires

b) Ecris H comme barycentre des points S, U et K

6) En réalité le point K est situé au croisement des plans (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations cartésiennes respectives $2x - 3y + z = 10$, $x + 2y - z = 26$ et $3x - 2y + 2z = 41$

Détermine les coordonnées de K

7) Le point J est le milieu du segment [UV]. (Γ_1) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}) = 0$. (Γ_2) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $(-\overrightarrow{MS} + 3\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MU}) \wedge \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{MU} \wedge (-\overrightarrow{MS} + 3\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MU})$ et $G = bar\{(A;2),(B;4),(C;2)\}$

a) Justifie l'existence de G

b) Détermine les ensembles (Γ_1) et (Γ_2)

<u>Thème 2</u> : Nombres complexes

a) Comment déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe

b) Comment traduire que le nombre complexe z est réel en termes de conjugué ? en termes d'arguments ? en utilisant la forme algébrique ?

c) Comment traduire que le nombre complexe z est imaginaire (respectivement imaginaire pur) en termes de conjugué ? en termes d'arguments ? en utilisant la forme algébrique ?

d) Comment déterminer la racine carrée d'un nombre complexe et comment résoudre une équation du second degré dans ℂ ?

e) Comment résoudre une équation de degré 3 dans ℂ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure ? une solution réelle ?

f) Comment déterminer les racines n-ièmes de l'unité ? d'un nombre complexe ?

g) Comment démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ? isocèle en B ? équilatéral ? isocèle et rectangle en C ?

h) Comment démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme ? un rectangle ? un carré ? un trapèze ?

Thème 3 : FONCTIONS

1) Soient f et g des fonctions numériques d'une variable réelle

a) Comment déterminer le domaine de définition

i) de f si $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

ii) de g si $g(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

b) Préciser l'ensemble sur lequel chacune des fonctions f et g est continue

c) Comment étudier la continuité d'une fonction en un nombre réel x_0 ?

d) Comment démontrer qu'une fonction admet un prolongement par continuité en x_0 ?

e) Comment lever l'indétermination lors du calcul de la limite de f et de g en $-\infty$?

f) Comment étudier les branches infinies de la courbe d'une fonction h ? ($\lim_{x\to\infty} h(x) = a$; $\lim_{x\to 0} h(x) = \infty$; $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \infty$)

Application 1

i) Démontre que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ puis interprète graphiquement ce résultat

ii) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 3x$ est asymptote à la courbe (C_g) de g au voisinage de $+\infty$

iii) Démontre que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

g) Comment étudier la position relative de la courbe (C_g) et de la droite (Δ) ?

h) Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un nombre réel x_0 ? (Tu donneras les interprétations géométriques suivant les cas)

i) Comment démontrer que le point $A(a;b)$ est un point anguleux de (C_f) ?

Application 2

1) a) Etudie la dérivabilité de la fonction h en 1 puis interprète géométriquement les résultats obtenus avec

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{1-x^2} & si\ x \leq 1 \\ h(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

b) Le point $A(1;0)$ est-il un point anguleux de (C_h) ?

2) Détermine l'équation de la tangente à la courbe (C_h) en -1

j) Comment démonter qu'une fonction admet un maximum ? un minimum ?

k) u et v étant deux fonctions dérivables, rappelle les formules de dérivation de :

$u \times v$; $\frac{u}{v}$; u^n ; $\frac{1}{v}$; $\sqrt{u}$; $u \circ v$; $\cos u$ et $\sin u$

Application 3

On suppose que g est dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et la fonction $u : x \longmapsto \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$ est dérivable sur domaine de définition

1) Calcule $u'(x)$ et $g'(x)$

2) Comment résoudre : $\sqrt{P} = Q$; $\sqrt{P} < Q$ et $\sqrt{P} > Q$?

3) Justifie que

a) $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$;

b) $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$

c) Etudie le signe de $g'(x)$

l) Comment déterminer le développement limité d'ordre 3 d'une fonction v au voisinage de 0 ?

Application 4

Détermine le développement limité d'ordre 3 de la fonction $v : x \longmapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0 puis calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{v(x)+x}{x^2}$

m) Comment démontrer que le point $A(a;b)$ est :

i) un point d'inflexion de (C_f)

ii) un centre de symétrie de (C_f)

iii) la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f)

n) Comment démontrer qu'une fonction h est paire ? impaire ? périodique de période T ?

o) Comment déterminer l'image d'un intervalle par une fonction ?

- **Comment démontrer que l'équation $h(x) = m$ $(m \in \mathbb{R})$ admet une solution unique dans l'intervalle I ? même question pour l'équation $h(x) = x$**
- **Comment déterminer le signe d'une fonction ?**

p) Comment démontrer que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$? (Se rappeler du théorème de l'inégalité des accroissements finis)

q) Comment démontrer que l'application

$$h : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto h(x) = f(x) \end{array}$$

est une bijection ?

- **Comment déterminer par exemple $h^{-1}(2)$?**
- **Comment déterminer l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} ? puis $(h^{-1})'(x)$?**

Application 5

On considère l' application $h : \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$

a) Démontre que h est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

b) On désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h

Calcule $h^{-1}(\sqrt{3})$ et $h^{-1}(1)$

c) Démontre que h^{-1} est dérivable sur J et que $\forall x \in J,\ (h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) Fonction logarithme népérien

Soit u une fonction numérique d'ensemble de définition D_u

a) Comment déterminer le domaine de définition de $\ln u$? de $\ln|u|$?

Application 6

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$h(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$; $u(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)\ln\left|\frac{1-x}{1+2x}\right|$; $v(x) = \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + 2\ln x - 3}$; $w(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $w(0) = 0$

b) Se rappeler :

- **des propriétés algébriques de $\ln$ $\left(\ln(ab); \ln\left(\frac{a}{b}\right); \ln a^r \text{ et } \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)$**
- **de la résolution d'équations et d'inéquations ($\ln a = \ln b$; $\ln a > \ln b$)**
- **des limites remarquables**
- **de la dérivée ($\ln u$; $\ln|u|$) et de la primitive de $\frac{u'}{u}$**

Application 7

a) Sans étudier la dérivabilité, calcule $v'(x)$ et $w'(x)$ avec $v(x) = \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + 2\ln x - 3}$ et

$$w(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} w(x)$

c) Soit f la fonction définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$

Démontre que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $4 < \alpha < 5$ puis déduis-en le signe de $f'(x)$

3) Fonction exponentielle

Soit u une fonction numérique d'ensemble de définition D_u

a) Comment déterminer le domaine de définition de e^u

Application 8

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$p(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$; $q(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$;

$s(x) = e^{\frac{2x-1}{x}} - x$; $r(x) = \frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$;

$f_m(x) = \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right]$ avec m un paramètre réel

b) Se rappeler :

- **des propriétés algébriques de exp**
- **de la résolution d'équations et d'inéquations ($e^a = e^b$; $e^a > e^b$)**
- **des limites remarquables**
- **de la dérivée de e^u et de la primitive de $u'e^u$ et de e^{ax+b} $(a \neq 0)$**

c) <u>Foncions puissances</u> et <u>Croissances comparées</u> (domaine de définition, dérivée et limites)

<u>Application 9</u>

1) Etudie les variations de la fonction q avec $q(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

2) Démontre que la fonction s est prolongeable par continuité à droite en 0 puis définis ce prolongement

3) On désigne par (C_m) la courbe de f_m avec $f_m(x) = \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right]$ où m est un paramètre réel

a) Détermine le(s) antécédent(s) de 1 par f_m

b) Justifie que pour tout nombre réel x,

$f''_m(x) = [(x-m)^2 - 1]\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right]$

c) Vérifie que (C_m) passent par le point de coordonnées $\left(m+2; \frac{1}{e^2}\right)$

<u>Application 10</u>

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c$ passe par l'origine et admet une asymptote d'équation $y = 1$

1) Détermine les nombres réels a b et c sachant que $f'(\ln\frac{3}{4}) = 0$
2) Etudie les variations de f
3) On considère la fonction g définie par :
   $g(x) = \ln(2e^{2x} - 3e^{x} + 1)$
   Etudie les variations de g
4) Etudie les branches infinies de la courbe (C_g) de la fonction g

<u>4) Primitives- Calcul intégral - équation différentielle</u>

a) Comment démontrer qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f ? et quand est-ce qu'une fonction f admet-elle de primitive ?

b) Comment déterminer une primitive de :

$$\left(\frac{u'}{u^n} ; u' \times u^n ; \frac{u'}{\sqrt{u}} ; \frac{u'}{u} ; u'e^u ; u'\cos u ; u'\sin u\right)$$

c) Que représente la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour la fonction f ?

- **Comment déterminer le domaine de définition de F ?**
- **Comment déterminer la dérivée de F ?**

d) Comment calculer $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ et comment choisir $u'(x)$ et $v(x)$ (tu donneras les différents cas)

e) Comment calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ avec $a < b$ (se rappeler aussi du volume) et comment interpréter géométriquement $\int_a^b f(x)dx$

f) Comment déterminer les solutions d'une équation différentielle de type $ay' + by = 0$? de type $ay'' + by' + cy = 0$? $(a \neq 0)$

<u>Application 11</u>

1) a)Détermine les primitives de la fonction

$w : x \mapsto \frac{1}{x+1}\ln(x+1)$ sur $]-1, +\infty[$

b) Calcule l'intégrale

$$G = \int_0^{e-1} \left(\frac{x^2 + x + 2\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$$

2) a) Détermine la solution de l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$ dont la courbe représentative passe par le point $A(0;4)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1

b) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction $p : x \mapsto (ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$ soit une primitive de la fonction $q : x \mapsto (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$

c) A l'aide d'une intégration par parties calcule l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\ln 4} p(x)dx$

Thème 4 : Suite numérique - Probabilité - Statistique

Suite numérique

5) a) Comment démontrer d'une suite (U_n) est arithmétique ? géométrique ?

b) Comment calculer le terme général U_n d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ?

c) Comment calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ? et comment étudier la convergence d' une suite géométrique ?

d) Comment démontrer qu'une suite est convergente ?

e) Comment déterminer la limite d'une suite convergente ? d'une suite dont on connait le terme général u_n ?

e) Enoncer le principe du raisonnement par récurrence

Application 12 : Suites numériques

On considère la suite définie par : $\begin{cases} Uo = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n)\ ,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ où h est la fonction numérique définie sur : $I = [1;2]$ par : $h(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

1°)a) Etudie le sens de variation de h.

b) Démontre que pour tout $x \in I, h(x) \in I$.

c) Déduis-en que pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$.

2°) a) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente puis précise sa limite

Application 13: Suites numériques

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x+3)$

1) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α comprise entre 1 et 2

2) a) Etudie le sens de variation de f

b)On considère l'intervalle $I = [1;2]$;Démontre que $\forall x \in I;\ \ f(x) \in I$

c) Démontre que $\forall x \in I;\ \ |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontre par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \in I$

b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}\ ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

c) Déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$

4) Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et précise sa limite

5) a)Détermine le plus petit entier naturel k pour que u_k soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

Application 14 : Suites numériques

1- Intègre l'équation différentielle $(E_n): y'' + 2ny' + n^2y = 0$ où n est un entier naturel non nul.

2- Détermine la fonction f solution de (E_n) dont la courbe (C_n) dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet en son point d'abscisse O la droite d'équation $y = x$ comme tangente.

3- Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

4- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 xe^{-nx}dx$.

a- Calcule U_0 et U_1

b- Etudie le sens de variation de la suite (U_n)

c- Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ et déduis que la suite (U_n) est convergente.

d- Exprime U_n en fonction de n et calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Probabilité

6) a) Lors d'un tirage, A quelle condition utilise-t-on C_p^n ? A_p^n ? n^p ?

b) Comment calculer la probabilité d'un évènement A dans une situation d'équiprobabilité ? Et lorsqu'il n'y a pas équiprobabilité, comment détermine -t-on la probabilité d'un événement élémentaire ?

c) Comment calculer la probabilité $P(A/B)$ et $P(A \cap B)$ dans une situation de probabilité conditionnelle ?

d) Comment établit -t-on la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?

e) Comment détermine –t-on l'Esperance, la variance , l'écart-type et la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

f) Quand dit-t-on qu'on est en présence d'une épreuve de Bernoulli ? d'un schéma de Bernoulli ?

g) Comment appelle-t-on la loi de probabilité d'un schéma de BERNOULLI ? Ecris la formule générale de cette loi

Application 15 : Probabilité

Un sondage effectué dans une classe de terminale D révèle que : 60% des élèves aiment le Français (F), 45% des élèves aiment l'Anglais (A) et 10% des élèves aiment le Français et l'Anglais

1) on choisit au hasard un élève dans la classe

a) Quelle est la probabilité de l'événement : « Cet élève aime au moins une des langues considérées »

b) Quelle est la probabilité de l'événement : « Cet élève aime une et une seule des langues considérées »

2) On choisit au hasard un élève aimant le Français . Quelle est la probabilité que cet élève aime l'Anglais ?

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit successivement n élèves en remettant chaque fois l'élève choisi.

Détermine le plus petit entier n tel que la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis aime le Français soit supérieure ou égale 0,999

Application 16: Probabilité

Les six faces d'un dé sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est supposé pipé de sorte qu'il existe un nombre réel positif k tel que la probabilité $p(i)$ pour que la face portant le numéro i soit cachée est ki.

1°) Prouve que : $k = \frac{1}{21}$

2°) On lance une fois ce dé et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros visibles.

a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Détermine puis représente la fonction de reparation F de X.

3°) On lance cinq fois de suite ce dé, de façons indépendantes.

Détermine la probabilité pour que l'évènement « X est pair » se réalise au moins une fois.

Application 17: Probabilité

Un établissement scolaire dispose de trois classes terminales A, B et C de même effectif.

Il y a 20% de filles en A, 40% de filles en B et 60% de filles en C.

1) On choisit au hasard un élève dans chacune de ces classes et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de garçons obtenus.

a) Définis la loi de probabilité de X.

b) Détermine l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2) On réunit tous les élèves des trois classes A, B et C dans la cour de l'établissement et on choisit un élève au hasard parmi eux.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) "L'élève choisi est de la terminale A"

b) "L'élève choisi est un garçon de la terminale C".

c) "L'élève choisi est une fille".

Application 18 : Probabilité

1) L'éclairage de certaines salles de classe d'une école de la ville de Dunia nécessite l'emploi de deux lampes différentes L_1 et L_2. La défectuosité de l'une d'entre elles n'affecte pas l'autre. La lampe L_1 tombe en panne une fois sur vingt et la lampe L_2 tombe en panne deux fois sur vingt-cinq

a) Détermine la probabilité qu'une lampe et une seule tombe en panne.

b) Détermine la probabilité qu'une lampe au moins fonctionne.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lampes en panne.

a) Justifie que l'expérience mathématique de X est égale à 0,13

b) Définis et représente la fonction de répartition de X

3) Cette école dispose de deux sacs S_1 et S_2 indiscernables tels que le sac S_1 contient une lampe L_1 et 4 lampes L_2 et le sac S_2 contient 2 lampes L_1 et 3 lampes L_2. Pour augmenter l'éclairage de l'une des salles, l'électricien de l'école choisit un sac au hasard et tire une lampe de ce sac.

a) Calcule la probabilité de tirer la lampe L_1

b) Calcule la probabilité que la lampe provienne du sac S_2 sachant que c'est L_1 qui a été tirée.

4) Le technicien tire successivement avec remise cinq lampes comme précédemment.

Calcule la probabilité de tirer la lampe :

a) L_1 exactement trois fois. b) L_1 au moins 2 fois.
c) L_1 pour la première fois au deuxième tirage.

Statistiques

7) a) **Comment déterminer les coordonnées du point moyen d'une série statistique double ?**

b) **Qu'appelle-t-on nuage de points et comment le représente-t-on ?**

c) **Comment déterminer la droite d'ajustement par la méthode de Mayer ?**

d) **Comment déterminer une équation de la droite de régression de x en y et de y en x ?**

e) **Comment calculer le coefficient de corrélation linéaire et comment l'interprète -t-on ?**

Application 19 : Statistiques

Les notes en maths x_i et en PCT y_i de 05 candidats au BAC sont en corrélation linéaire. L'équation de la droite de régression de y en x est la suivante : $25y = 48x - 318$.
De plus pour ces 05 élèves on a : $\sum x_i^2 = 1290$; $\sum y_i^2 = 1660$ et $V(x) = 2$.
Calcule $\bar{x}$; $\bar{y}$; $cov(x,y)$, $V(y)$, le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréte le résultat

Application 20: Statistiques

On a relevé sur 8 mois les frais de publicité (x_i) et les ventes mensuelles (y_i) réalisées par une petite et moyenne entreprise « PME ». Les résultats obtenus en milliers de francs sont les suivants

x_i	24	30	25	32	35	20	18	30
y_i	380	420	390	400	450	350	340	410

On obtient ainsi une série statistique à deux caractères (x,y)

1) Représente le nuage de points associé à cette série.
2) Détermine le coefficient de corrélation linéaire r de la série et donne une interprétation du résultat obtenu
3) Détermine un équation de la droite de régression de x en y
4) Quels sont les frais prévisibles de publicité pour 500.000 francs de vente ?

Thème 5 : Similitude plane directe

a) **Comment déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0 ?**
b) **Comment déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe z_A et de rapport k ?**
c) **Comment déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A d'affixe z_A et d'angle de mesure θ ?**
d) **Soit f une transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f**
e) **Comment déterminer l'expression analytique d'une similitude plane directe par exemple $f: z' = (-2+i)z - 5 + 3i$?**
f) **Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude plane directe à partir de son expression analytique par exemple celle de** l'application r du plan dans le plan, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$
g) **Comment déterminer l'image d'une droite ou d'un cercle par une similitude plane directe f ?**
h) **Comment déterminer la composée de deux similitudes planes directes ?**

Application 1 : Similitude plane directe

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $3 - i$, $-2i$ et $2 + 2i$ et la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$, $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$,

$(x' \in \mathbb{R}, y' \in \mathbb{R})$, tels que : $\begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} - y + 2 \end{cases}$

1. Détermine l'affixe du centre D de l'homothétie de rapport -3 qui transforme B en C
2. Détermine l'affixe du point E, image de A par la rotation r de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$
3. Soit f la similitude plane directe de centre B et qui transforme A en C.
   a) Détermine le rapport et l'angle de f
   b) Détermine l'écriture complexe de f.
4. a) Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M d'affixe z du tels que $|\bar{z} - 3 - i| = |z + 2i|$

puis l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z du tels que $|iz + 2 - 2i| = |1 - 2i|$

b) Déduis-en les images de (Γ_1) et (Γ_2) par f

5. a) Détermine l'écriture complexe de S

b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de S

6. Détermine l'écriture complexe de $f \circ S$

Application 3 : ***Méthode géométrique***

Dans le plan complexe orienté , on considère le carré ABCD de centre O et de sens direct tel que $AB = 1$

On désigne par I le milieu du segment [CD] et on considère la similitude plane directe S telle que $S(A) = O$ et $S(C) = I$

1) Détermine le rapport et l'angle de S

2) Démontre que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que O des cercles de diamètre [AD] et [OC]

3) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

Détermine l'écriture complexe de S puis déduis-en l'affixe de Ω

Application 4 : Similitude-Probabilité

On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés. Le premier dé a ses faces marquées $0; 1; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les faces du deuxième dé sont marquées : $0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}$

On lance simultanément ces deux dés et on appelle respectivement a et b les nombres lus sur la face supérieure du premier dé et sur celle du second dé au repos. On associe à ce lancer le nombre complexe $u = a + ib$ (i étant le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$).

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la transformation s dont l'écriture complexe est $z' = uz + b$

1) Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "s est une translation".

B : "s est une homothétie".

C : "s est une rotation".

D : "s est une homothétie dont le centre est un point d'ordonné nulle".

E : "s est une similitude plane directe ".

F : " s est une similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$ ".

ACTIVITÉS DE CONSOLIDATION (A.C)

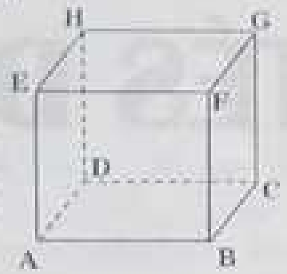
SA N°1 :

Séquence 1 : Vecteurs de l'espace, repérage

A.C N°1 : Pour s'entraîner

Consigne 1 *: Manipulation et construction de vecteurs*

ABCDEFGH est un cube de centre O ; I est le milieu du segment [AD] et J le milieu de [BC]



On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$

1) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{JH}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

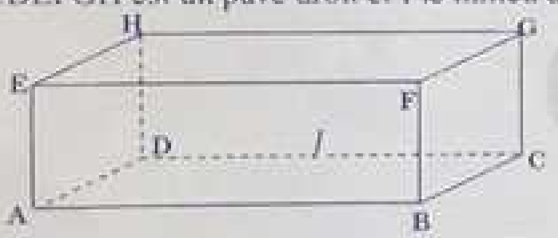
2) Construis les points K et L tels que :

a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}(-\vec{u}) - 2\vec{v} - \vec{w}$

Consigne 2 *: Vecteurs colinéaires - Vecteurs coplanaires*

ABCDEFGH est un pavé droit et I le milieu de [DC]



1) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires

2) Précise dans chacun des cas suivants si les vecteurs sont coplanaires ou non :

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EG}$ b) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$

c) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{GB}$

3) On désigne par O le centre de gravité du triangle AFG et pour tout point M de l'espace, on pose

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ et

$\vec{v} = -3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG})$

a) Justifie que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MO}$

b) Justifie que le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OI}$

Consigne 3 *: Points alignés*

ABC est un triangle.

1) a) Place les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) Démontre que les points A, I et J sont alignés

2) a) Place les points E, F et G tels que E est le symétrique de B par rapport à A ; F le milieu de [EC] et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Démontre que les points B, G et F sont alignés

Consigne 4 *: Droites parallèles*

ABCD est un parallélogramme

1) a) Place les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

b) Démontre que les droites (EF) et (BD) sont parallèles

c) La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en G

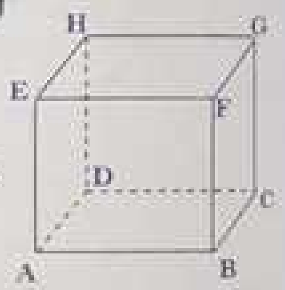
Démontre que les droites (GF) et (AD) sont parallèles

2) a) Place les points I et J tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

b) Démontre que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles

Consigne 5 *: Vecteurs coplanaires*

ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BF] et [BC]



1) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires

2) Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires ?

(*Tu pourras utiliser la base* ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$))

3) Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ sont-ils coplanaires ?

Consigne 6 *: Coordonnées de points*

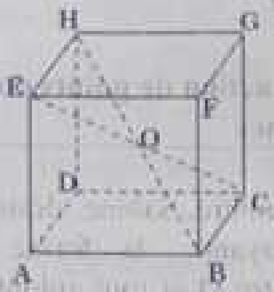
ABCD est un tétraèdre et I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD] et [BD]

1) Détermine les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère (L; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$)

2) Détermine les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère (I; $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$)

Consigne 7: Pour aller avec les coordonnées de point

ABCDEFGH est un cube de centre O.



Détermine les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et O dans chacun des repères suivants

a) le repère $(O; \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

b) le repère $(B; \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BH})$

Consigne 8 : Vecteurs colinéaires

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont -ils colinéaires ?

2) Détermine le nombre réel β pour que le vecteur $\vec{w}(\beta - 1; 3\beta - 23; \beta + 7)$ soit colinéaire à $\vec{u}$

3) Détermine les valeurs du nombre réel a pour que le vecteur $\vec{n}(3a^2 - 2a; -2; 4)$ soit colinéaire à $\vec{v}$

(Tu pourras utiliser $3a^2 = a^2 + 2a^2$)

4) Les vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}(14; -7; 12)$ sont-ils coplanaires ?

A.C N° 2 : Vecteurs coplanaires

Sur un cube OIAJKBCD où les points E et F sont respectivement les milieux des segments [OK] et [IJ]. Sabine veut vérifier certaines propriétés de vecteurs coplanaires ou non.

1) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{KA}$ sont colinéaires

2) a) Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{OI}$

b) Que peux-tu en déduire de $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{OI}$?

3) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{KO}$ sont non coplanaires

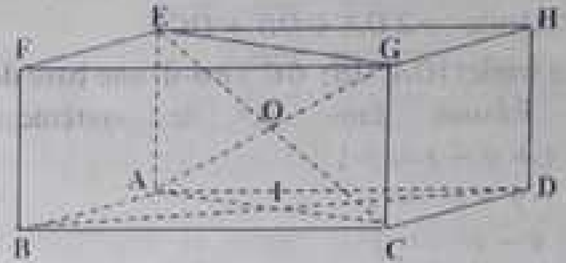
4) On désigne par T le point tel que : $\overrightarrow{TI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$

a) Détermine les coordonnées des points A, F et T dans le repère $(K; \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KO})$

b) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{TD}$ dans la base $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KO})$

A.C N° 3 : Calcul dans un repère de l'espace

Sabine désire déterminer dans des repères bien choisis, les coordonnées de certains points du pavé droit ABCDEFGH dont un dessin est la figure ci-dessous où AB=4cm, AD=8cm et AE=4cm ; I et O sont les centres respectifs des faces ABCD et AEGC



Mais avant, elle veut s'assurer que les quadruplets :

- $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$
- $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$
- et $(I, D; C, O)$ sont bien des repères de l'espace.

Consigne 1

1) a- Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$ sont non coplanaires.

b- Déduis – en que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$ est un repère de l'espace

2) Détermine les coordonnées des points A, B, I, E, C, D, H, F, O et G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$

3) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GI}$; $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{OI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$

Consigne 2

1- Démontre que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace.

2- Détermine les coordonnées des points A, B, I, C, H, F, O et G dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

3- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{GI}$; $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{FO}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

4- Détermine les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PE} = \vec{0}$ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Consigne 3

1- Démontre que le quadruplet $(I, D; C; O)$ est un repère de l'espace

2- Détermine les coordonnées de tous les autres sommets du pavé-droit dans le repère $(I, D; C; O)$

3- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{GI}$; $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IO})$

A.C N° 4 : Changement de repères

Dans l'espace muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, trois amies de Sabine sont placées aux points A, B et C tels que $A(1;1;-1)$; $B(1;2;-3)$ et $C(1;0;1)$

Sabine se demande quelles peuvent bien être leurs coordonnées dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ avec

$\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$; $\vec{v}=-\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{w}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

1) a) Calcule $-2\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

b) Le triplet $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ est-il une base de $\mathcal{W}$?

2) a) Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) :

$$\begin{cases}-x+y-z=-1\\ -y-z\ =1\\ x-z\ =1\end{cases}$$

Tu pourras additionner membre à membre les trois équations du système

b) Déduis-en les coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

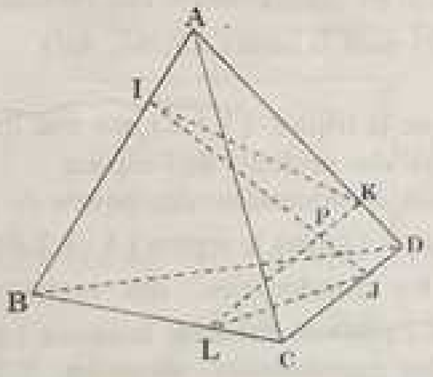
3) Détermine de même les coordonnées des points B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

A.C N° 5 : Dans un tétraèdre

Sabine désire sectionner un savon de lessive qui a la forme d'un tétraèdre ABCD suivant un plan (Π) contenant les points I, J, K et L tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

comme l'illustre la figure ci-dessous



1) On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

a) Justifie que le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace .

On note $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ cette base

b) Exprime chacun des vecteurs, $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ dans la base $\mathcal{B}$

c) Calcule le vecteur $9\,\overrightarrow{IJ}-8\,\overrightarrow{IK}-4\,\overrightarrow{IL}$ puis déduis-en que les points I, J , K et L sont coplanaires

2) Le point P vérifie $2\,\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\,\overrightarrow{PC}+6\,\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

a) Démontre que le point P appartient aux droites (IJ) et (KL)

b) Détermine les coordonnées P dans le repère $(A;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

A.C N° 6 : Construction de points dans l'espace

Dans sa nouvelle chambre, Sabine désire réaliser un autre aquarium ayant la forme d'un cube ABCDEFGH de centre O et tout autour duquel elle souhaite installer

- deux surbrillances de même couleurs en des points P et Q milieux respectifs des segments [AB] et [BC]
- et cinq surbrillances de différentes couleurs respectivement en des points I, J, K , L et M tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AE}$;

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{QO}$ et $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PO}$

1) a) Fais une figure du cube puis place les point O, P et Q

b) Démontre que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

2) Construis les points *I, J et K*

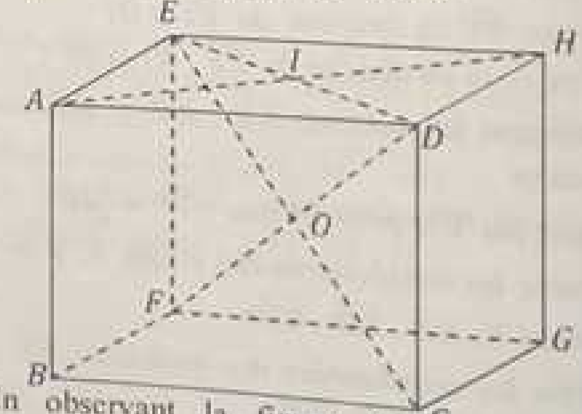
3) a)Démontre que le point O est le milieu de [LM]

b) Démontre que $\overrightarrow{LM}=2\,\overrightarrow{PQ}$

4) Construis alors les points L et M

A.C N° 7 : Changement de repères

Le local principal d'un poste de Police a la forme d'un cube ABCDEFGH de centre O sur le toit duquel il est placé une caméra de surveillance à rayons laser au point I centre de la face ADHE



En observant la figure, Sabine se demande si $(\overrightarrow{FI},\overrightarrow{BG},\overrightarrow{HC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace et si les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires

1) a) Les vecteurs $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils coplanaires ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DO}$ sont-ils coplanaires ?

2) Détermine relativement au repère $(B; \overrightarrow{EI}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OI})$ les coordonnées des points E, I, O, H, D, C, F et G.

3) a) Justifie alors que le triplet $(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{HC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

b) Détermine les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{OG}$ dans la base $(\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OI})$.

4) Vérifie alors si les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires

A.C N° 8 : Un diamant caché

Le grenier du père de Sabine a la forme d'un pavé-droit *ABCDEFGH* de base ABCD à l'intérieur duquel il a caché un diamant placé au point origine d'un repère $R°$ de l'espace dans lequel les coordonnées des sommets *B, A, C* et *F* du grenier sont respectivement $(1; 1; 1)$; $(1; -1; -1)$; $(-1; 1; -1)$ et $(-1; -1; 1)$.

Informée, Sabine se préoccupe du choix du repère $R°$ afin de trouver la position du diamant.

1) Fais une figure du pavé-droit *ABCDEFGH* puis place les points *R, S, T, U, V* et *I* milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CF]$; $[BC]$; $[FA]$; $[BF]$ et $[AC]$

2) a- Démontre que les segments $[RS]$; $[TU]$ et $[VI]$ ont le même milieu noté O.

b- Calcule $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}$

c- Détermine les coordonnées de *O* dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})$.

3) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OR}$; $\overrightarrow{OT}$ et $\overrightarrow{OV}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})$.

4) a-Vérifie que $(O; \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OV})$ est un repère de l'espace.

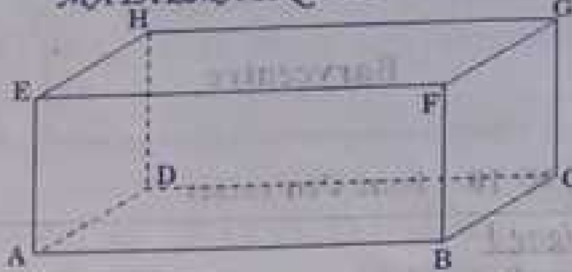
b- Démontre que $R° = (O; \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OV})$

5) Déduis-en la position du diamant.

A.C N° 9 : PARALLELISME A L'AIDE DE VECTEURS

Consigne 1 : Droite parallèle à un plan

La chambre de **Sabine** a la forme du pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous.



1) Place les points I et J milieux respectifs de [AC] et [FH]

2) a) Justifie que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DH}$

b) Déduis-en que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IH}$

c) Justifie que la droite (BJ) est parallèle au plan (ACH)

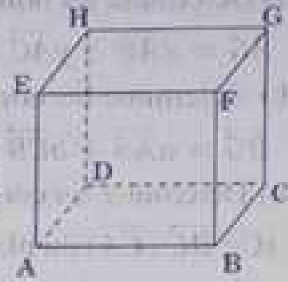
3) Démontre que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O, milieu du segment [DJ]

Consigne 2 : Plans parallèles

ABCDEFGH est un cube.

I et J sont les milieux respectifs de [FG] et [EH].

K est le point d'intersection des droites (HI) et (EG) et L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



1) Démontre que la droite (LK) est parallèle à la droite (BF)

2) Démontre que le plan (KIL) est parallèle au plan (BFJ)

3) Soit (P) le plan passant par K et parallèle au plan (BFH)

a) Démontre que L appartient à (P)

b) (P) coupe la droite (BC) en M. Précise la position du point M sur la droite (BC)

Consigne 3 : POUR ALLER LOIN

ABCD est un tétraèdre et les points I, J et K sont tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1) a) Quel est l'ensemble des points I lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

b) Pour quelle valeur de t le point I appartient-il à la droite (BC) ?

c) Où sont situés les points J et K dans ce cas ?

2) a) Démontre que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + (1-t)\overrightarrow{CD}$$

b) Déduis-en que le point J appartient au plan (P) de repère $(I; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$

3) a) Démontre de même que le point K appartient au plan (P)

b) Quelle est la position relative des plans (IJK) et (BCD) ?

Barycentre

A.C | N° 10 : Pour s'entraîner

Consigne 1

1) A et B sont deux points distincts du plan.

Dans chacun des cas suivants, écris C comme barycentre des points A et B

a) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{CA}$; b) $2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

c) $5\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AB}$

2) On suppose que ABC est un triangle et on désigne par $G = bar\{(A,3);\ (B,1);(C,-2)\}$

a) Détermine les nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

b) Détermine les nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{BG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CB}$

c) Détermine les cordonnées de G dans le repère $(C\ ;\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{CA})$ du plan.

Consigne 2 : *Construction du barycentre*

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=3 et BC=5

Construis le barycentre des points pondérés (A,a) (B,b) et (C,c) dans chacun des cas suivants :

1) $a = 5$; $b = 4$; $c = -3$

2) $a = 1000$; $b = 1000$; $c = 1000$

3) $a = -3$; $b = 0$; $c = 6$

4) $a = 0$; $b = 6$; $c = 6$

5) $a = 625$; $b = 125$; $c = 375$

Consigne 3 : *Détermination des coefficients de pondération*

ABCD est un carré

Soit m un nombre réel différent de -8. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,m), $(B,3)$, $(C,2)$ et $(D,3)$

1) Détermine m pour que G soit le centre du carré ABCD

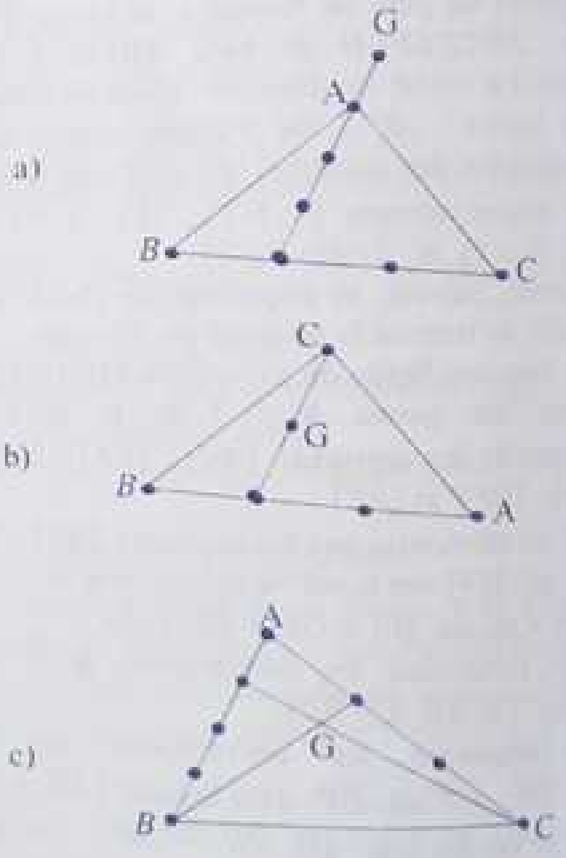
2) Démontre qu'il existe une valeur de m pour laquelle G est le centre de gravité du triangle ABC. Précise cette valeur

Consigne 4 : *Barycentre à partir d'un graphique*

Dans chacun des cas suivants, écris G comme barycentre des points A, B, C

Consigne 5 : *Barycentre à partir d'un graphique*

Dans chacun des cas suivants, écris G comme barycentre des points A, B, C



Consigne 6 : *Théorème du barycentre partiel*

ABCD est un tétraèdre. Le point K est sur l'arête [AB] et $= \frac{1}{3}AB$, le point L est sur l'arête [CD] et $CL = \frac{2}{3}DC$. I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. G est le barycentre des ponts pondérés $(A,2); (B,1); (C,1); (D,2)$.

a) Démontre que les points G, I, J sont alignés.
b) Démontre que les points G, K, L sont alignés.
b)Déduis-en que les points I, J, K, L sont coplanaires.

Consigne 7 : *Théorème du barycentre partiel*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
A, B , C et D sont quatre points et G le barycentre des points pondérés $(A,4)$, $(B,-3)$, $(C,1)$ et $(D,2)$.
Le but de la consigne est de construire le point G
1) a) Démontre que pour tout point M du plan
$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$
b) Détermine $\overrightarrow{AG}$ lorsque M et A sont confondus
c) Construis alors le point G
2) Construis les barycentres G_1 de $(A,4)$ *et* $(B,-3)$; G_2 de $(C,1)$ et $(D,2)$
3) Détermine deux nombres réels a et b pour que G soit le barycentre de (G_1,a) *et* (G_2,b)

Consigne 8 : *Ligne de niveau*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)
ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur 3cm ; K est le milieu du segment [AC] et D le point défini par $4\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$
1) a) Démontre que D est le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,-2)$, $(C,3)$
b) Déduis-en que D appartient à la médiatrice de [AC]
2) Démontre que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BK}$
3) Calcule DA^2 et DB^2
4) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Consigne 9 : *Condition d'existence et coordonnées du barycentre*

Dans l'espace muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle ABC de centre de gravité H et K le point tel que ACKB est un parallélogramme.
Soit m un nombre réel.
1) A quelle condition sur m, les points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et (K,m) admettent-ils de barycentre ?
2) Détermine la valeur de m pour laquelle le milieu G du segment [HK] soit le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et (K,m)
3a) Ecris K comme barycentre des points A , B et C
b) Détermine les coordonnées de H, K et G sachant que $A(3;-2)$, $B(3;-4)$ et $C(-1;0)$

A.C | N° 11 : Réduction de vecteurs

ABCD est carré de centre O et G est le centre de gravité du triangle ABC.
1) a) Ecris A comme barycentre des points B , C et D.
b) Justifie que O est le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,1)$
2) Réduis les sommes de vecteurs suivants :
a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$
c) $\vec{w} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$

A.C | N° 12 : Pour s'entraîner

Dans un plan, ABC est un triangle rectangle isocèle en A
1) A quelle condition les points pondérés (A, 1) ; (B, b) et (C, c) admettent-ils un barycentre G ?
2) Détermine b et c de façon que ABGC soit un carré.
3) Quel est l'ensemble des points M de l'espace lorsque b et c prennent toutes les valeurs réelles telles que b+c+2=0 ?

A.C | N° 13 : Droites parallèles

ABC est un triangle, G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ *et* $(C,2)$. Les points B', $'$, I et J sont tels que : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $2\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{AC'}$;
$I = bar\{(B,2);(C,-3)\}$ et $J = bar\{(A,1);(C,-3)\}$
1) Fais une figure
2) Démontre que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles
3) Démontre que les droites (AI) et (BJ) sont parallèles
4) On désigne par $K = bar\{(B;y);(A;x)\}$. Pour quelles valeurs des nombres réels x et y les droites (AI) et (CK) sont-elles parallèles ?

A.C | N° 14 : Construction de barycentre – Droites concourantes

ABCD est un quadrilatère.

1) a) Construis les points R, S et T tels que

$\overrightarrow{BR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AB}$

1) b) Démontre que les droites (AR) , (BS) et (CT) sont concourantes

2) 2) a) Construis les points E, F, I, J, K et L tels que :

3) $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$;

4) $\overrightarrow{BJ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

5) b) Démontre que les droites (EF) , (IK) et (JL) sont concourantes

A.C | N° 15 : Lieux géométriques

A, B, C, D et E sont cinq points deux à deux distincts de l'espace et m est un nombre réel.

6) Pour tout point M de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ et

$\vec{v} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$. Pour $m = -1$ et $m = -3$ détermine l'ensemble des points M tels que

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

A.C | N° 16 : Existence du barycentre

ABCD est un rectangle tel que $AC = a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit m un nombre réel.

1) Le système de points pondérés $\{(A; 4m), (B; m), (C; m), (D; 6-6m)\}$ admet-il de barycentre ?
2) On considère le système de points pondérés $\{(A, m); (B, -1), (C; 1)\}$ et on note G_m son barycentre lorsqu'il existe
   a) Détermine les valeurs de m pour lesquelles G_m existe
   b) Précise la position de G_1
   c) Détermine l'ensemble (Δ) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$
3) Détermine l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

A.C | N° 17 : Utilisation du barycentre

L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 8 et AC = 4

1) Construis le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -1 et 2.

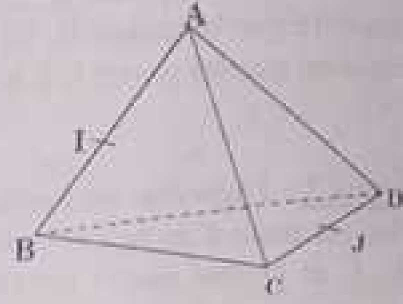
2) Détermine chacun des ensembles E_1 , E_2 et E3 suivants:

a) E_1 est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

b) E_2 est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CA}$ et de même sens

A.C | N° 18 : Utilisation du barycentre

On considère le tétraèdre ABCD ci-contre où I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD]



1) Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, 1)$; $(C, -1)$ et $(D, 1)$ et G_2 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, 1)$ et $(D, 2)$
   a) Exprime $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ puis place le point G_1 sur la figure
   b) Justifie que G_2 est le milieu du segment [DI] puis place G_2 sur la figure
   c) Démontre que DG_1IJ est un parallélogramme.
   d) Déduis-en la positon du point G_2 par rapport aux points G_1 et J
2) Soit m un nombre réel. On note G_m le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, 1)$; $(C, m-2)$ et (D, m) lorsqu'il existe
   a) Précise l'ensemble V des valeurs de m pour lesquelles G_m existe

   Dans les questions qui suivent on suppose que m appartient à V

   b) Démontre que le vecteur $m.\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
   c) Déduis-en l'ensemble (Γ_1) des points G_m lorsque m décrit V
   d) Détermine l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tels que

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|m.\overrightarrow{JG_m}\|$

A.C | N° 19 : Lieux géométriques

ABCD est un losange de centre O tel que : $OB = 2OA$

1) Démontre que le barycentre des points pondérés $(B, 2)$; $(C, -1)$ et $(D, 1)$ est le milieu du segment [AB]
2) Soit m un nombre réel

Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des barycentres G_m des points pondérés (A, m) ; $(B, 2)$; $(C, m-1)$ et $(D, 1-2m)$

3) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires

4) Détermine et construis l'ensemble (Γ_3) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$ aient la même norme

A.C N° 20 : Pour aller loin

ABCD est un tétraèdre, I le milieu de [AB] et G le barycentre des points pondérés (C, 1) et (D, 3)

1) Place les points I et G

On pose $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$

2) Démontre que $\vec{V}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IG}$

3) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires.

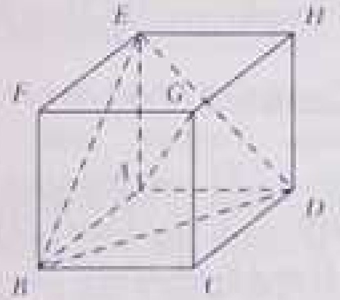
4) Soit E et F les centres de gravité respectifs des faces ABC et ADC

Démontre que les droites (EF) et (BD) sont parallèles

A.C N° 21 : Pour aller très loin

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1 ; O_1 et O_2 sont respectivement les centres des carrés ABCD et EFGH ;

J est le centre de gravité du triangle EBD et Gm le barycentre du système de points pondérés $\{(E\ ;\ 1), (B\ ;\ 1-m), (G\ ;\ 2m-1), (D\ ;\ 1-m)\}$ avec $m \in \mathbb{R}$



1- a) Justifie l'existence du point Gm.

b) Précise la position du point G_1

c) Vérifie que $G_0 = A$ puis déduis-en que les points A, J et G sont alignés.

2- a) Démontre que $\overrightarrow{AG_m} = m\,\overrightarrow{AO_2}$

b) Déduis-en l'ensemble des points Gm lorsque m décrit $\mathbb{R}$

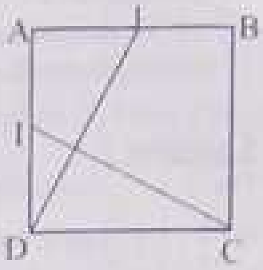
c) Vérifie que les points A, Gm , E et O_1 sont coplanaires.

3- Détermine la valeur de m pour laquelle Gm appartient à la droite (EJ)

Produit scalaire

A.C Pour savoir faire

ABDC est un carré, I le milieu de [AD] et J le milieu de [AB].



a) Calcule $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ}$

b) Déduis-en que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires

Résolution

a) Calculons $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ}$

On a :

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}$ donc

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ})$

$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ}$

$= \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ}$ car $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{AJ}$

$= \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AJ}$ car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$= (\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}) \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} \cdot (-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA})$

$= \frac{1}{2}(DA^2 - BA^2) = 0$ car $AB = AD$

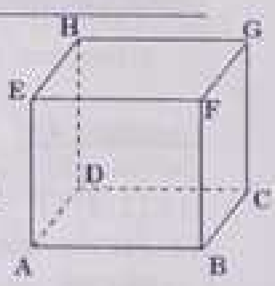
d'où $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$

c) Déduisons que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires

Comme $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$ alors les droites (CI) et (DJ) sont orthogonales or (CI) et (DJ) sont coplanaires d'où (CI) et (DJ) sont perpendiculaires

A.C N° 22 : Pour s'entraîner

ABCDEFGH est cube



1a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ puis calcule $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DE}$

b) Déduis-en que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE)

2) Démontre que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH)

A.C N° 23 : Pour mieux s'entraîner

Dans toutes les consignes ci-après, l'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Consigne 1 :

On considère les vecteurs $\vec{u}(2;1;1)$; $\vec{v}(m;-1;-1)$ et $\vec{w}(0;1;-1)$

1) Justifie que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
2) a)Détermine le nombre réel m pour que $\vec{u}$ soit orthogonal à $\vec{v}$

   b) Déduis-en que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de W

Consigne 2

On considère les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1) Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux
2) a) Détermine un vecteur non nul orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

   b) Déduis-en un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée de W

Consigne 3 :

On considère les points $A(2;1;0)$; $B(-1;4;2)$; $E(0;0;6)$; $F(-3;2;2)$; $G(1;-4;4)$ et $H(-3;-6;6)$

1) a) Détermine les coordonnées d'un point C équidistant de A et B

   b) Détermine le réel a pour que le point $D(1;1;a)$ soit équidistant de A et B.

   c) M un point de coordonnées $(x;y;z)$; Justifie que M est équidistant de A et B équivaut à

   $3x - 3y - 2z + 8 = 0$

   d) Les points E et H sont-ils équidistants de A et B ?
2) Démontre que EFGH est un tétraèdre.
3) Démontre que le point G est le projeté orthogonal du point H sur le plan (EFH)

Consigne 4 :

On considère les points $A(3;1;-2)$; $B(6;5;-4)$ et $C(1;4;1)$

1) Justifie que les points A, B et C sont non alignés.
2) Le point $D(-5;-4;5)$ appartient -t-il au plan (ABC) ?
3) Démontre que D est le projeté orthogonal de $S(31;-14;39)$ sur le plan (ABC)
4) Calcule l'aire du triangle ABC puis le volume du tétraèdre SABC

Consigne 5

On considère les points $A(1;-2;1)$; $B(2;-1;-2)$ et $C(1;0;1)$

1) Justifie que les points A, B et C sont non alignés.
2) $\vec{n}$ est un vecteur de coordonnées $(a;b;c)$

   a) Justifie que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\begin{cases} a = 3c \\ b = 0 \end{cases}$

   b) Détermine alors un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$
3) Que représente le vecteur $\vec{n}$ ainsi déterminé pour le plan (ABC) ?

Consigne 6

On considère les points $A(0;-1;7)$; $B(3;-4;7)$; $C(3;-1;4)$ et $D(1;-3;5)$

1) Justifie que ABD est un triangle isocèle rectangle
2) Justifie que ADC et CDB sont aussi des triangles rectangles isocèles
3) Détermine quatre points qui, avec les points A, B, C , D constituent les sommets d'un cube.

Consigne 7

On considère les points $A(2;3;2)$; $B(5;3;-1)$; $C(1;2;-2)$ et $D(-2;2;1)$

Démontre que ABCD est un losange.

Consigne 8 : *Pour réviser les propriétés du cours*

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(-1;0;0)$, $B(0;-\sqrt{3};1)$, $C(5;\sqrt{3};2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1) a) Ecris I comme barycentre de A, B et C

   b) Détermine les coordonnées de I
2) a) Démontre que les points A, B et C détermine un plan.

   b) Détermine un vecteur normal au plan (ABC)
3) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
4) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -12$

Consigne 9 : *Utilisation des propriétés du produit scalaire.*

ABCDEFGH est un pavé-droit tel que $AB = AE = \frac{1}{2}AD = 2$. Le point I est le centre de la face ABFE et J le milieu du segment [EH]

1) Fais une figure

2) Calcule les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$; $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG}$
3) Détermine à un degré près la mesure de l'angle $\widehat{IJG}$
4) a) Calcule $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EA}$
   b) Déduis-en que les droites (EA) et (DB) sont orthogonales.

A.C | N° 24 : Dans une pyramide

SABCD est une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un carré de côté de longueur 1 et les faces sont des triangles équilatéraux

1) Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}$
2) Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$
3) Etablis que les droites (SA) et (SB) sont respectivement perpendiculaires aux droites (SC) et (SD)
4) Détermine un point I du plan (ABC) tel que la droite (SI) soit orthogonale au plan (SAB)

(Tu pourras exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$)

A.C | N° 25 : Utilisation du produit scalaire pour déterminer les lieux géométriques

Consigne 1

ABCD est un carré

1) a) Ecris A comme barycentre des points B, C et D
   b) Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$
2) On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$
   a) Construis G
   b) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que
   $$\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$
3) On désigne par H le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$ et par (Γ_3) l'ensemble des points M du plan tels que
$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$
   a) Construis H
   b) Vérifie que B appartient à (Γ_3)
   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_3)

Consigne 2 :

ABC est un triangle tel que $AB = 7$ cm ; AC= 5cm ; $BC = 4$cm et I le milieu du segment [BC].

1. Calcule AI^2
2. a) Pour quelle valeur du réel m le vecteur $\vec{u} = m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M ?
   b) Détermine dans ce cas le vecteur $\vec{u}$
3. Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$$
4. Soit D le barycentre du le système $\{(A, -1) ; (B, 1) ; (C, 1)\}$
   a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :
   $$MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$$

Consigne 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de 4 cm de côté et M un point quelconque du plan. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par G le barycentre des points pondérés (A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)

1) Démontre que G est le milieu de $[AI]$.
2) Transforme le réel $2MA^2 + MB^2 + MC^2$ en fonction de MG, GA, GB et GC
3) Calcule GA^2 ; GB^2 et GC^2
4) Détermine l'ensemble E des points M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$; $(k \in \mathbb{R})$.

Consigne 4 :

ABC est un triangle rectangle en A, tel que $AB = 2a$ et $AC = a$ où a est une longueur donnée.

1) Détermine et construis l'ensemble E des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$
2) On désigne par H le point du plan tel que
$$\overrightarrow{AH} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$
   a) Prouve que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que tu détermineras.
   b) On considère l'ensemble des points du plan tels que : $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$. Pour quelle valeur de k cet ensemble contient-il le point A ?

Précise l'ensemble alors obtenu et construis-le.

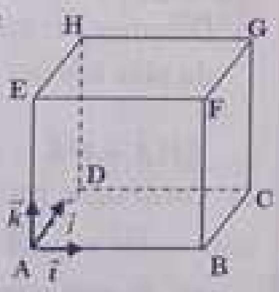
Consigne 5 :

ABC est un triangle rectangle en C tel que $CA = 4$ cm ; $CB = 2$cm ; E le milieu du segment [AC] et I son centre de gravité. Soit t un réel de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

1. Pour quelles valeurs de t le système$\{(A, \cos^2 t) ; (B, \sin^2 t) ; (C, \cos 2t)\}$ possède-t-il un barycentre?
2. Lorsqu'il existe, le barycentre est noté G_t
   a. Démontre que $\forall\, t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\overrightarrow{EG_t} = \frac{1}{2}\tan^2(t)\,\overrightarrow{CB}$
   b. Déduis le lieu géométrique de G_t lorsque t décrit $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
3. On note G le barycentre obtenu pour $t = \frac{\pi}{3}$.
   a. Construis G.
   b. Démontre que $GA^2 = GC^2$.
4. Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
   $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 10$
5. Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :
   $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$
6. Dans le plan on donne $A(2;5); B(-4;5)$ et $C(x;y)$. Détermine x et y pour que $I(-1;2)$ soit le barycentre de ces points pondérés.

A.C N° 26 : Expression analytique du produit scalaire

ABCDEFGH est cube d'arête de longueur a et M désigne le centre de gravité du triangle EBG



Sabine veut vérifier si les points D, M et F sont alignés, si M est le projeté orthogonal de D sur le plan (EBG) et calculer la distance du point D au plan (EBG)

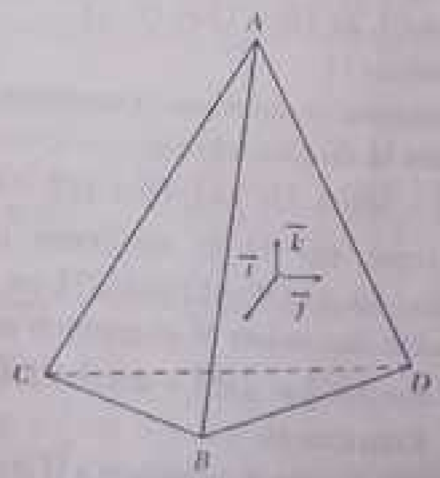
On considère le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = a\vec{k}$

1) a) Démontre que le quadruplet $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé.
   b) Détermine les coordonnées des points D, F, E, B, et G dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) a) Rappelle la relation vectorielle qui définit le point M
   b) Déduis-en les coordonnées de M
3) Démontre que les points D ; M et F sont alignés
4) a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont orthogonaux.
   b) Qu'en résulte-t-il pour les droites (DM) et (EB) ?
5) a)Démontre que les droites (DM) et (EG) sont orthogonales.
   b) Déduis-en que M est le projeté orthogonal de D sur le plan (EBG) puis calcule la distance DM en fonction de a

A.C N° 27 : Calcul de longueurs

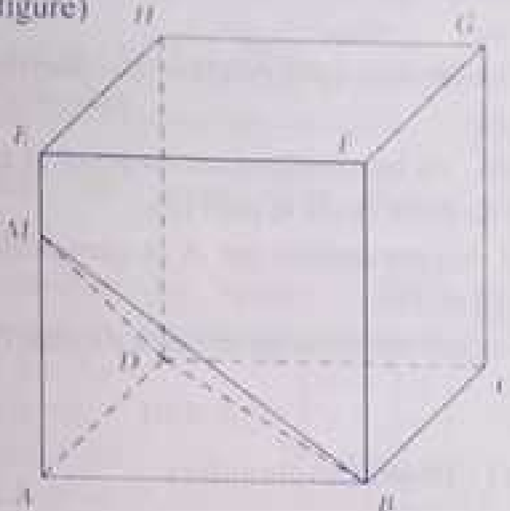
Dans l'espace muni du repère orthonormé repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le points A, B, C et D de coordonnées respectives : $A(0;0;3), B(2\sqrt{2};0;-1), C(-\sqrt{2};-\sqrt{6};-1)$ et $D(-\sqrt{2};\sqrt{6};-1)$

1) Démontre que ABCD est un tétraèdre régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur
2) On désigne par R, D, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC]. Démontre que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3) Ce parallélogramme a -t-il des propriétés supplémentaires ? Explique



A.C N° 28 : Pour aller loin

Sabine veut ranger ses linges salles dans la partie BAMD d'une armoire cubique ABCDEFGH d'arête de longueur 1 où le sommet M est un point de la demi-droite [AE) tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ (voir figure)



Elle s'interroge sur la position du point M qui rend l'aire du triangle BDM égale à l'unité d'aire.

1- Détermine le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2- Soit K le barycentre du système de points pondérés $\{(M, a^2), (B, 1), (D, 1)\}$

a) Exprime $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$

b) Calcule $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis déduis-en que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

c) Démontre que $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

d) Démontre que K est l'orthocentre du triangle BDM

3- a) Démontre que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

b) Justifie que la droite (AK) est perpendiculaire au plan (BDM)

c) Montre que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire

4) Détermine le nombre réel a pour que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire

Représentations paramétriques et équations cartésiennes : Droites et plans

A.C N° 29 : Représentations paramétriques de droites et plans

Consigne 1 : Représentations paramétriques de droites et plans

Pour délimiter sa nouvelle parcelle, M. Acapéo place des piquets par endroits sur le terrain. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trois de ces piquets sont placés en des points A, B et C tels que A (-3, 0, 1), B (-2, 5, 1), C (1, -1, 2)

1) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AB)

2) Les trois piquets sont-ils alignés ?

3) Détermine une représentation paramétrique du plan (P) déterminé par ces trois piquets.

Consigne 2 : Représentations paramétriques de droites

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère : $I(3; -5; 1)$, $\overrightarrow{JO} = -2\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

1) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$

2) a) Détermine les coordonnées du point A d'ordonnée nulle de (Δ)

b) Détermine les coordonnées du point B de (Δ) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

3) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par J et perpendiculaire à (Δ)

Consigne 3 : Droites non coplanaires.

Dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3) de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et

$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 4 - t \\ z = -1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

1) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires
2) Démontre que les droites (D_2) et (D_3) sont strictement parallèles
3) Détermine une représentation paramétrique du plan (P) contenant les droites (D_2) et (D_3)

A.C N° 30 : Représentations paramétriques de droites et plans

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère la droite (D) et le plan (P) :

$$(D): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9t \\ z = -2 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(P): \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 3\lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1) a) Donne un repère de (D) et de (P)
b) Démontre que (D) est parallèle à (P)
2) Détermine une représentation paramétrique d'une droite (D') parallèle à (D) et contenue dans (P).
3) Détermine une représentation paramétrique l'ensemble (Δ) des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation

$$(x + 2y - z)^2 + (x - y + 2z + 6)^2 = 0$$

A.C N° 31 : Cordonnées de vecteur normal

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on associe à tout nombre réel m le plan (P_m) d'équation :

$$(m^2 + m)x + (2m + 3)y + (m^2 - 1)z - 4m - 1 = 0$$

1) Démontre qu'il existe un point A unique appartenant à tous les plans (P_m)
2) Détermine m de manière que :
a- (P_m) passe par l'origine du repère
b- (P_m) passe par le point de coordonnées (1, 0, 1)
c- Une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ soit parallèle à (P_m)
d- (P_m) soit perpendiculaire au plan d'équation cartésienne : $x + y + 3z - 5 = 0$

A.C N° 32 : Equations cartésiennes de plans

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A (1 ; 1 ; 1) et les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x + y + z + 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$.
Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).
1) a. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).
b. Déduis -en les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
2) Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).
Détermine une équation cartésienne du plan (R).

A.C N° 33 : Droites coplanaires

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D_1) passant par $A(2;-5;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;8;2)$
2. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D_2) passant par $B(1;1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1;-4;-1)$
3. Les droites (D_1) et (D_2) ont-elles coplanaires ?

A.C N° 34 : Droites sécantes , non coplanaires et orthogonales

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit (D_1), (D_2) et (D_3) les droites de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

; $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\beta \\ z = -1 + 4\beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$;

1. Démontre que les droites (D_1) et (D_3) sont strictement parallèles.

2. Démontre que les droites (D_2) et (D_3) sont sécantes en un point A dont tu détermineras les coordonnées
3. a) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

   b) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales

A.C N° 35 : Plan déterminé par deux droites sécantes

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3\alpha \\ y = 5 - \alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \; ; \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Soit A le point de coordonnées $(1; 2 - 3)$

1. Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point.
2. Détermine une équation cartésienne du plan déterminé par ces deux droites
3. Le point A appartient-il à (D_1) ? à (D_2) ?
4. Détermine un système d'équations cartésiennes d'une droite (D_3) passant par A et sécante à (D_1)

A.C N° 36 : Equations cartésiennes de plans

Consigne 1 : Identification et détermination d'un vecteur normal à un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points A, B et C tels que A (3, 2, 6), B (1, 2, 4), C (4, -2, 5)

1) a) Démontre que les points A, B, C déterminent un plan dont tu donneras un vecteur normal.

b) Détermine une équation cartésienne un plan (ABC)

2) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $3x + y - 4 = 0$.

a) Détermine un vecteur normal au plan (P)

b) Détermine une équation du plan (Q) passant par $D(1 ; 5 ; 3)$ et parallèle à (P).

c) Détermine une équation cartésienne du plan (R) perpendiculaire à (P) et contenant la droite (AC)

Consigne 2 : Plans sécants

A tout nombre réel m, on associe le plan (P_m) dont une équation cartésienne est :

$mx + y + (m - 1)z + 2m + 1 = 0$

1) Démontre que les plans (P_0) et (P_1) se coupent suivant une droite(Δ).

2) Détermine un repère de (Δ).

3) Démontre que la droite (Δ) est contenue dans chaque plan (P_m)

Consigne 3 : Distances d'un points à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les plans

(P) :$-x - y + z = 0$ et le $A(-3;2;4)$

1. Démontre que le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) d'équation cartésienne $2x - y + z - 3 = 0$
2. Calcule la distance d_1 du point A au plan (P) et la distance d_2 du point A au plan (Q)
3. a) Détermine la distance d du point A à la droite d'intersection des plans (P) et (Q) (tu pourras utiliser le projeté orthogonal)

   b) Justifie que $d^2 = (d_1)^2 + (d_2)^2$

Consigne 4 : Pour aller loin avec les équations cartésiennes de plan

L'espace est muni d'un repère orthonormal. m est un nombre réel et (P_m) est le plan d'équation :

$mx + y + (m - 1)z + 2m + 1 = 0$.

1a) Démontre qu'un point $M(x, y, z)$ appartient à tous les plans (P_m) si et seulement si $x + z + 2 = 0$ et $y - z + 1 = 0$

b) Déduis-en qu'il existe une droite, dont tu donneras un repère, contenue dans tous les plans(P_m).

2) A tout nombre réel m, on associe le plan (Q_m) d'équation :$(m^2 + m)x + (2m + 3)y + (m^2 - 1)z - 4m - 1 = 0$

Démontre qu'il existe un point unique appartenant à tous les plans (Q_m).

Consigne 5 : Equations cartésiennes de plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.Soit $A(1;2;-3)$ un point de l'espace et (D) la droite qui a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

1. a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonal à (D)
   b) Détermine l'intersection de (D) et (P)
2. Soit (D') la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 3 - 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
   a) Démontre que les droites (D) et (D') sont non coplanaires.
   b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant (D') et parallèle à (D)
3. Quelle est la position relative des plans (P) et (Q)

Consigne 6 : Systèmes d'équations cartésiennes de droites

(P) et (Q) sont les plans d'équations cartésiennes respectives : $2x + 3x - z + 5 = 0$ et $x + y + 1 = 0$

1) Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{m}$ respectivement normaux à (P) et (Q).

2) Justifie que les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

3) Vérifie que le point $A(1\,;-2;\,1)$ appartient à la droite (D).

4) Détermine les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) en utilisant le produit scalaire puis en utilisant une représentation paramétrique de (D)

Consigne 7 : Systèmes d'équations cartésiennes de droites

1) Détermine l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) sont telles que : $(x + 2y - z)^2 + (x - y + 2z + 6)^2 = 0$

2) Détermine l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) sont telles que $(x + 2y - 3z)^2 = 1$ et $2x + 3y - 2z = 0$

A.C N° 37 : Intersections de plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère l'ensemble (P_m) : $(2m - 1)x + (m + 1)y + 3mz - m - 1 = 0$ où m est un paramètre réel

1. Démontre que $\forall\, m \in \mathbb{R}$, (P_m) est un plan.
2. Démontre que tous les plans (P_m) contiennent une droite (D) dont tu donneras une représentation paramétrique.
3. Démontre que les plans (P_1) et (P_{-1}) sont sécants suivant une droite (Δ) dont tu préciseras un repère
4. Quelle est la position relative de (D) et (Δ) ?

A.C N°38 : Positions relatives de plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les plans (P) et (Q_m) d'équations cartésiennes respectives : $2x - y + z + 3 = 0$ et $x - my + mz + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Démontre que tous les plans (Q_m) contiennent une droite (D) dont tu préciseras un repère
2. a) Calcule la distance du point $A(1;1;3)$ au plan (Q_{-1}) puis déduis-en que $A \in (Q_{-1})$
   b) Le point A appartient-il à (Q_1) ?
3. Détermine m pour que :
   a) (P) et (Q_m) soient perpendiculaires
   b) (P) et (Q_m) soient parallèles
   c) (P) et (Q_m) soient sécants
   d) (P) et (Q_m) soient confondus.

A.C N° 39 : Positions relatives de droite et plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - y + 3 = 0$ et (D) la droite de systèmes d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$

1. Démontre que (D) est parallèle à (P)
2. Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant (D) et perpendiculaire à (P)
3. Détermine un repère de la droite (D_1) intersection des plans (P) et (Q).
4. Détermine une équation cartésienne du plan (R) passant le point de (D) d'ordonnée 1 et perpendiculaire aux plans (P) et (Q)

A.C N° 40 : Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1;2;3)$, $(2;-1;1)$, $(5;3;8)$ et $(1;1;-1)$

1) Démontre que les points A, B et C déterminent un plan.

2) Démontre que le vecteur $\vec{n}(-1;-1;1)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC)

3) Démontre que le plan (ABC) est perpendiculaire au plan (Q) d'équation cartésienne $2x - y + z - 3 = 0$

4) Calcule la distance d_1 du point D au plan (ABC) et la distance d_2 du point D au plan (Q)

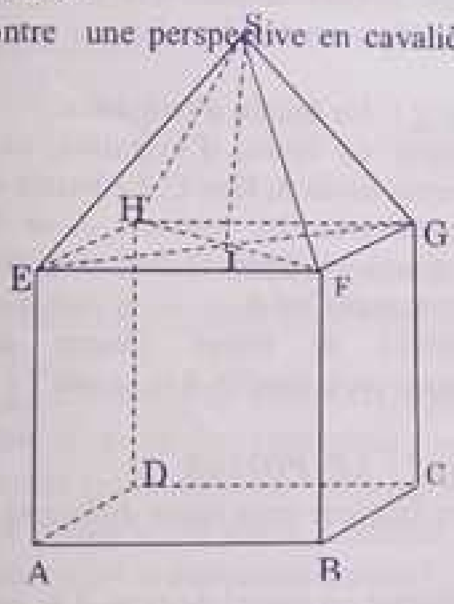
5) a) En désignant par d la distance du point D à la droite d'intersection des plans (ABC) et (Q). Démontre que $d^2 = (d_1)^2 + (d_2)^2$

b) Déduis-en d

A.C | N° 41 : Pour aller loin

Consigne 1: Le père de Sabine fabrique à l'occasion de la fête du Nouvel an, un objet d'art. Cet objet est composé d'un cube d'arête de longueur 1 surmonté d'une pyramide régulière dont la base est une face du cube.

Voici ci-contre une perspective en cavalière de cet objet.



(SI) est perpendiculaire au plan (EFG) tel que SI $= \frac{3}{2}$

Sabine veut en savoir davantage sur la configuration géométrique de cet objet d'art.

1) a- Vérifie que R = (A ; $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA}$) est un repère orthonormé de l'espace.

b- Détermine les coordonnées des points F, I et S relativement au repère R

2) a- Ecris une représentation paramétrique du plan (BEG)

b- Vérifie que la droite (DF) est orthogonale au plan (BEG)

c) Déduis-en une équation cartésienne du plan (BEG)

3) a- Ecris une représentation paramétrique de la droite (DF)

b- Détermine les coordonnées du point d'intersection R_0 de la droite (DF) avec le plan (BEG)

c) Déduis-en la distance du point F au plan (BEG)

4) On désigne par (P_1) le plan passant par S et parallèle au plan (BEG) et par (P_2) le plan contenant la droite (BE) et perpendiculaire à (BEG)

a) Prouve que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

b) Ecris une équation cartésienne de (P_1) et de (P_2)

c) Calcule d $[I;(P_1)]$ et d $[I, (P_2)]$, puis déduis-en la distance du point I à la droite d'intersection (Δ) des plans (P_1) et (P_2)

Consigne 2: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans (P_m), (Q_m), (R_m) et (S_m) d'équations cartésiennes respectives :

(P_m) : $mx + y - (1+m)z - 4 = 0$

(Q_m) : $x + y + mz - 1 = 0$

(R_m) : $x + y + m^2z - m = 0$ et

(S_m) : $(m+3)x + (2m+5)y - (1+m)z + 3m + 1 = 0$.

où m est un paramètre réel.

1. a. Démontre que tous les plans (S_m) contiennent une droite (Δ) dont tu donneras un repère.

Détermine m pour que :

b. (S_m) passe par l'origine du repère.

c. (S_m) passe par le point de coordonnées $(1;0;1)$.

2. a. Démontre que les plans (Q_1) et (R_2) sont sécants puis détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ_1).

b. Démontre que les plans (Q_1) et (P_1) sont perpendiculaires puis détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ_2).

c. Démontre que (Δ_1) et (Δ_2) sont strictement parallèles

3. Détermine suivant les valeurs de m, l'ensemble $(P_m)\cap(Q_m)\cap(R_m)$.

Système d'équations linéaires

A.C N° 42 : Système d'équations linéaires

Consigne 1

On considère le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ d'inconnues $(x\,;y\,;z)$

Dans l'ensemble des solutions de ce système :

1) Existe-t-il des solutions dont les deux premières composantes sont égales ?
2) Existe-t-il des solutions dont les premières composantes sont égales à la troisième ?
3) Existe-t-il des solutions dont les trois composantes sont positives ?

Consigne 2 : *Interprétation géométrique*

Résous dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues $(x\,;y\,;z)$ par la méthode de Pivot de Gauss puis interprète géométriquement les résultats

$$(S_1):\begin{cases} x+2y+5z=4 \\ x+y+2z=6 \\ -2x-3y-7z=-10 \end{cases}$$

$$(S_2):\begin{cases} x-y-z=6 \\ -x+3y-z=12 \\ -x-y+7z=24 \end{cases}$$

$$(S_3):\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ -6x+3y+3z=-6 \\ 4x-2y-2z=4 \end{cases}$$

A.C N° 43 : Résolution de système d'équations linéaires

Résous dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues $(x\,;y\,;z)$ par la méthode de Pivot de Gauss

$$(\Sigma_1):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x+y+2z=-2 \end{cases} \quad (\Sigma_2):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x+y+2z=-2 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=3 \end{cases} \quad (\Sigma_4):\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ -6x+3y+3z=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$$

A.C N° 44 : Problème conduisant à la résolution d'un système d'équations

Consigne 1 : *A la pizzeria*

Trois quiches, cinq pizzas et deux feuilletés coûtent 26,1€. Deux quiches, une pizza et quatre feuilletés coûtent 15,2 €.
Combien coûtent douze quiches, treize pizzas et seize feuilletés ?

Consigne 2 : *Partage d'un héritage*

Lors d'un héritage, on doit partager une somme de 121 200 F entre trois personnes proportionnellement au nombre d'enfants de chacune de ces personnes, respectivement 2, 3 et 5.
Détermine la part de chacun.

Consigne 3 : *Avec les nombres*

En additionnant trois par trois quatre nombres entiers, on obtient respectivement 27, 30, 34, 38.
Combien valent ces nombres ?

Consigne 4 : *Un bassin d'irrigation*

Pour remplir un bassin d'irrigation, on dispose de trois robinets notés A, B et C. Le bassin se remplit en dix minutes avec les robinets A et B, en vingt minutes avec les robinets B et C et en douze minutes avec les robinets C et A.
En combien de temps chacun des robinets fonctionnant seul, remplit-il le bassin ?

Consigne 5 : *LE POTIER*

Un potier fabrique trois types différents A, B et C de canaris.
Pour fabriquer un canari du type A le potier a besoin de : $40\,kg$ d'argile, $60\,litres$ d'eau et $15\,kg$ de bois de chauffage.
Pour fabriquer un canari du type B le potier a besoin de : $18\,kg$ d'argile, $20\,litres$ d'eau et $7\,kg$ de bois de chauffage.
Pour fabriquer un canari du type C le potier a besoin de : $70\,kg$ d'argile, $110\,litres$ d'eau et $35\,kg$ de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3 656 kg d'argile, 5 040 $litres$ d'eau et 1 494 kg de bois de chauffage.
Détermine le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine

Consigne 6 : PROBLEME DES BŒUFS DE NEWTON

75 bœufs ont brouté en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares. 81 bœufs ont brouté en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares.
Combien de bœufs un pré de 96 ares pourra-t-il nourrir pendant 18 jours ?

Indice

Tu pourras considérer constantes

- *La quantité x d'herbe broutée journellement pour chaque animal.*
- *La quantité initiale y d'herbe par are.*
- *La quantité z d'herbe qui pousse journellement par are.*

Et en désignant par t le nombre de bœufs cherché , **prouve que $t = 100$**

A.C N° 45 : Problème conduisant à la résolution d'un système d'équations

Consigne 1 : UN JARDIN ZOOLOGIQUE

Une section d'un jardin zoologique contient des rhinocéros, des antilopes et des serpents. On compte 13 têtes, 14 cornes et 32 pattes. Combien de bête de chaque espèce y a-t-il dans cette section ?

Consigne 2 : DANS UNE USINE

Une usine fabrique trois produits différents A, B et C pour ce jardin. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 $heures$ de travail pour A, 3 $heures$ pour B et 20 $minutes$ pour C.
L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unité du produit B étant le tiers du nombre d'unité de A.
Parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique -t-elle ?

Consigne 3 : Un Jeu très intéressant

Sur le chantier, trois ouvriers jouent ensemble à un jeu dont la règle est qu'à chaque partie, le perdant double la mise de chacun des deux autres joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, ils se sont séparés en ayant chacun de 1600 francs. Combien chaque ouvrier avait-il misé en commençant le jeu ?

A.C N° 46 : Problème conduisant à la résolution d'un système d'équations

Consigne 1 : AUTOUR DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$. On désigne par (C) sa représentation graphique
Détermine les nombres réels a, b et c tels que $f'(3) = \frac{1}{2}$ et que (C) admette pour asymptote la droite (D) $d'équation$ $y = x + 1$

Consigne 2 : CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)
On considère les points $A(-1\,;2)$, $B(2\,;4)$ et $C(4\,;2)$

a) Détermine les nombres réels a, b et c pour que le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit circonscrit au triangle ABC
b) Précise les coordonnées du centre de ce cercle.

Consigne 3 : COORDONNEES DU BARYCENTRE

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :
$A(2; 0; -1)$, $B(1; -4; 8)$, $C(7; -12; 22)$

1) a) Calcule les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
   b) Que peux-tu en déduire?
2) Détermine trois nombres réels a, b et c pour que le point $G\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{11}{6}\right)$ soit le barycentre du système $\{(A; a), (B; b), (C; c)\}$

Consigne 4 : CHANGEMENT DE REPERES

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où D est un point du cube ABCDIJKL et $\vec{i}=\overrightarrow{DA}$; $\vec{j}=\overrightarrow{DC}$; $\vec{k}=\overrightarrow{DL}$, on considère les points $E(1;2;3)$; $F(2;1;2)$; $G(5;7;2)$;

$H(5;0;9)$ et on pose $\vec{u}=\overrightarrow{EF}$; $\vec{v}=\overrightarrow{EG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{EH}$

1) Démontre que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.
2) Détermine les coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$ du point D dans le repère $(E;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

A.C N° 47 : Interprétation géométrique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour chacune des consignes suivantes, résous dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues $(x;y;z)$ par la méthode de Pivot de Gauss puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Consigne 1 :

a) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 3x-3y-5z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 5x-y+z=6 \\ 2x+4y+2z=2 \end{cases}$

Consigne 2 :

c) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-y+3z=-3 \\ -2x-3y+4z=-4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-y-z=7 \\ -x+y-2z=2 \end{cases}$

Consigne 3 :

e) $\begin{cases} 2x-y+3z=-2 \\ 2x-2y+4z=-3 \\ -4x+3y-7z=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 3x-6y-3z=3 \\ -2x+4y+2z=-2 \end{cases}$

A.C N° 48 : Systèmes d'équations linéaires avec paramètre

Consigne 1

Résous dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues $(x;y;z)$ par la méthode de Pivot de Gauss en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m.

a) $\begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ x-my+m^2z=m+1 \\ 2x+my+2mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ 3x+4y+2z=m \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

Consigne 2

Pour couler une dalle, un chef maçon a prévu x tonnes de fer de 14, y tonnes de fer de 12 et z tonnes de fer de 10 tels que x, y et z vérifient le système

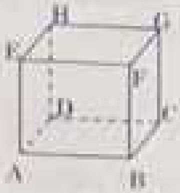
(S) : $\begin{cases} mx+2y=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+nz=3 \end{cases}$ avec $(m,n)\in\mathbb{R}^2$

1) a) Comment ce chef maçon doit-il choisir m et n pour que le système (S) ait un et un seul triplet solution ?
   b) Lorsque m et n sont ainsi choisis, détermine la solution de (S)
2) a) Lorsque la condition du 1a) n'est pas réalisée, quelles sont les valeurs de m et n pour lesquelles (S) admet au moins une solution ?
   b) Lorsque m et n ont ces valeurs, détermine les solutions de (S)
3) Que se passe-t-il lorsque $m=4$ et $n=3$?
4) Donne une interprétation géométrique de chacune des solutions des questions 1-b) ; 2-b) et 3)

Produit Vectoriel

A.C N° 49 : Orientation de l'espace.

ABCDEFGH est un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base directe de $\mathcal{W}$.



Précise si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte

1) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$
2) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$
3) $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB})$
4) $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EH})$
5) $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CD})$
6) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{HE})$
7) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$
8) $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CD})$

A.C N° 50 : Repère orthonormé direct de l'espace

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$; $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\vec{w}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

1) a) Démontre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

   b) Cette base orthonormée est-elle directe ?

On rappelle qu'une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si et seulement si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

A.C N° 51 : Expression analytique du produit vectoriel : équation de plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, calcule les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et déduis-en une équation cartésienne du plan de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$

a) $A(2, -1, 3)$; $\vec{u}(2, 1, 1)$ *et* $\vec{v}(-1, -2, 0)$
b) $A(3, 2, -1)$; $\vec{u}(1, 0, -1)$ *et* $\vec{v}(0, -1, 3)$
c) $A(1, -2, 1)$; $\vec{u}(2, -4, 1)$ *et* $\vec{v}(0, -1, 3)$

A.C N° 52 : Position relatives de droites

L'espace orienté est muni du repère orthonormé direct$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit m un paramètre réel. On considère les points $A(3, 1, 0)$; $B(4, 2, m)$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ tels que :
$\vec{u} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = m\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Soit (D_1) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, (D_2) celle passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
Etudie suivant les valeurs de m la position relative des droites (D_1) et (D_2)

A.C N° 53 : Calcul de distances, d'aires

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A(-3, 0, 1)$; $B(-2, 5, 1)$ et $C(1, -1, 2)$

1) a) Calcule la distance du point A à droite (BC)
   b) Calcule la distance du point B à droite (AC)
   c) Calcule la distance du point C à droite (AB)
2) Calcule l'aire du triangle ABC
3) a) Démontre que OABC est un tétraèdre puis calcule son volume.

A.C N° 54 : Calcul de distances, d'aires

L'espace orienté est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère trois points non alignés E, F et G. soit H le barycentre des points pondérés (E ; -1) ; (F ; 1) et (G ; 1) et K le centre de gravité du triangle EFG.

1) Démontre que :
   a) EFHG est un parallélogramme
   b) L'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que :

$$\left(-\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}\right) \wedge \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}\right) = \vec{0}$$

est une droite et précise un repère de cette droite.

   c) Démontre que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que

$$\left(-\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + G\right) \cdot \left(2\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MG}\right) = 0$$

est un plan

2) En réalité les points E, F et G ont pour triplets respectifs de coordonnées (1, 1, 2) ; (1, 1, -1) et (-2, 1, 2).

a- Détermine les coordonnées des points H et K.

b- Justifie que le plan (P) a pour équation cartésienne : $x + z + 3 = 0$

c- Justifie que la droite (Δ) et le point G déterminent un plan (Q) dont tu donneras une équation cartésienne

d- Détermine un repère de $(P) \cap (Q)$

3) a) Calcule l'aire du triangle EFG

b) Démontre que OEFG est un tétraèdre et calcule son volume

A.C | N° 55 : Intersection de plans

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la famille de plans (P_m) d'équation cartésienne : $mx + (m-1)y + (2m+3)z = 0$, où m est un paramètre réel.

1) Démontre que tous les plans (P_m) contiennent une droite fixe (D) dont tu donneras un système d'équations cartésiennes.

2) Détermine l'intersection de (D) avec le plan (Q) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\beta + 3 \\ z = \alpha - 4\beta + 7 \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

A.C | N° 56 : Géométrie analytique

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites (D) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et (D') dont un système d'équations cartésiennes est : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$

1- Démontre que les droite (D) et (D') sont strictement parallèles.

2- Donne une équation du plan (P) contenant les droites (D) et (D').

3- a) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point I (1 ; 2 ; -1) et orthogonal à (D).

b) Déduis une représentation paramétrique du plan (Q)

4 a) Donne un repère de la droite (D).

b) Déduis la distance du point Mo (0 ; 1 ; -1) à la droite (D)

A.C | N° 57 : Géométrie analytique

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le point A (1 ; 1 ; 1) et les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives : $x + y + z + 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$.

1. a. Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

   b. Donne un repère de leur droite d'intersection (Δ).

2. a. Le point A appartient -il à (Δ) ?

b. Calcule la distance du point A à la droite (Δ).

3. Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).

   a. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).

   b. Déduis -en les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

4. Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).

   a. Détermine une équation cartésienne du plan (R).

   b. Détermine $(P) \cap (Q) \cap (R)$.

A.C **N° 58 : Lieux géométriques à l'aide du produit scalaire**

A, B et C sont trois points distincts de l'espace muni d'un repère orthonormé direct, I le milieu de [AB] et G le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,2)$ et $(C,1)$

Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$

c) $(2\,\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

d) $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

e) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\|$

A.C **N° 59 : Lieux géométriques à l'aide du produit vectoriel**

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace muni d'un repère orthonormé direct, I le milieu de [AB] et G le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,2)$ et $(C,1)$

Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

c) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}) = 0$

e) $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}$

f) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot [(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD})] = 0$

A.C **N° 60 : Trois plans sécants**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les plans (P), (Q) et (R) d'équations respectives : $2x + y + 2z + 3 = 0$; $x - y + 4z = 0$ *et* $x + 2y - 2y + 3 = 0$; les points $A(1;0;2)$, $B(1;1;4)$ *et* $C(-1;1;1)$

1) Démontre que les plans (P), (Q) et (R) sont sécants selon une droite (Δ) dont tu détermineras un système d'équations paramétriques.

2) a) Détermine les coordonnées du point D projeté orthogonal de A sur la droite (Δ).

b) Justifie que ABCD est un tétraèdre dont tu calculeras le volume.

3) Déduis-en la distance d du point D au plan (ABC)

4)

A.C **N° 61 : Droites et plans**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites (D_1) *et* (D_2) définies par : (D_1): $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et (D_2) : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z$ puis le plan (Q_1) d'équation cartésienne (Q_1): $x + y + z + 1 = 0$

1) a) Démontre que les droites (D_1) *et* (D_2) sont sécantes.

b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q_2) contenant (D_1) et (D_2)

2) a) Démontre que $(Q_1) \perp (Q_2)$.

b) Détermine l'équation cartésienne du plan (Q_3) contenant les points O et A(1 ; −2 ; 1) et orthogonale à (Q_1)

3) On désigne par L le projeté orthogonal de O sur (Q_1). Détermine les coordonnées du point L.

A.C **N° 62 : Utilisation d'une unité de longueur**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 5 cm. On considère les points A(1 ; -1 ; 1), B(2 ; -2 ; -3), C (-2 ; 0 ; 3) et les plans :

(P) : $2x + 3y - z - 4 = 0$ *et*

(P'): $3x - 2y + 5z - 6 = 0$.

1. a) Justifie que les plans (P) et (P') sont sécants.

b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (P')

c) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par C et orthogonal à (P) et (P')

d) Calcule la distance de B à (D)

2. a) Détermine les coordonnées du point I intersection de la droite (BC) et du plan (P), puis du point J intersection de (B) et (P')

b) Calcule le volume du tétraèdre OIJC

A.C **N° 63 : Dans un tétraèdre**

OABC est un tétraèdre de base OAB tel que OAB est un triangle rectangle isocèle en B de sens direct et = 1 ; $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BA}$. Les points I et J sont respectivement les projetés orthogonaux du point B sur (AC) et (OC)

1) Justifie que la hauteur du tétraèdre est égale à 2 puis calcule la distance AC
2) a) En prenant 2cm pour unité graphique, représente le triangle ABC puis le point I
b) Démontre que $AI = \frac{\sqrt{5}}{5}$
3) On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ et $2\vec{k} = \overrightarrow{BC}$
a) Ecris une représentation paramétrique de chacune des droites (AC) et (OC)
b) Justifie que les triplets $(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5})$ et $(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ sont respectivement les coordonnées des points I et J dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
4) Calcule le volume du solide (S) de sommet C et de base BIJ

A.C N° 64 : Un vrai baptême

Lors de son baptême , Sabine a sollicité les services de M. Acapéo , un décorateur moderne pour lui décorer trois salles qui vont servi chacune à recevoir les invités. Les différentes séparations effectuées par M. Acapéo dans ces salles sont représentées dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

- les points $A(-2;1;0)$, $B(1;4;2)$, $C(-1;2;1)$, $E(-1;0;1)$ et $F(0;1;1)$.
- le plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z-1=0$ et le plan (Q) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + t + t' \\ y = \quad t + t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad (t;t') \in \mathbb{R}^2$
- les droites (D_1), (D_2) et (D_3) tels que :
- $(D_1) = (P) \cap (Q)$
- $(A;\vec{u})$ est un repère de (D_2) avec $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et
$(D_3) : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Sabine désire profiter de ces données pour renforcer ses capacités à résoudre des problèmes de configurations de l'espace et du plan.

1. a. Vérifie que E et F appartiennent à (Q).
b. Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
c. Détermine un repère de (D_1).
2. a. Démontre que la droite (D_2) est parallèle aux plans (P) et (Q).
b. Calcule la distance du point E à la droite (D_2).
3. a. Démontre que les points A, B et C détermine un plan (R) dont tu donneras une équation cartésienne.
b. Démontre que (D_3) et (R) sont strictement parallèles.
c. Détermine le point T de (D_3) d'ordonnée nulle.
d. Détermine une équation cartésienne du plan (R') contenant (D_3) et perpendiculaire à (R).
e. Calcule la distance du point C au plan (R').
4. Démontre que les droites (D_2) et (D_3) sont non coplanaires

A.C N° 65 : Lieux géométriques

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) des points M de l'espace définis respectivement par tels que : $(\Gamma_1) : \vec{u} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{v}$ avec $\vec{v} = 15\vec{i} - 15\vec{j}$
$(\Gamma_2) : (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 4$
et parallélogramme ABCD tel que

$A(-2;1;0)$, $B(1;4;2)$, $C(-1;2;1)$.

1. Détermine les coordonnées du point D.
b. Détermine les coordonnées du centre G de ABCD.
2. a. Vérifie que le point B est un point de (Γ_1).
b. Démontre que M est un point de (Γ_1) si et seulement si $\vec{u} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$
c. Déduis que (Γ_1) est une droite dont tu donneras un système d'équations cartésiennes.
3. Démontre que (Γ_2) est un plan dont tu donneras une représentation paramétrique

A.C N° 66 : Pour aller loin

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans (P_m), (Q_m), (R_m) et (S_m) d'équations cartésiennes respectives :
$(P_m) : mx + y - (1+m)z - 4 = 0$
$(Q_m) : x + y + mz - 1 = 0$
$(R_m) : x + y + m^2z - m = 0$ et
$(S_m) : (m+3)x + (2m+5)y - (1+m)z + 3m + 1 = 0$.
où m est un paramètre réel.

4. a. Démontre que tous les plans (S_m) contiennent une droite (Δ) dont tu donneras un repère.

Détermine m pour que :

b. (S_m) passe par l'origine du repère.

c. (S_m) passe par le point de coordonnées $(1;0;1)$.

5. a. Démontre que les plans (Q_1) et (R_2) sont sécants puis détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ_1).
   b. Démontre que les plans (Q_1) et (P_1) sont perpendiculaires puis détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ_2).
   c. Démontre que (Δ_1) et (Δ_2) sont strictement parallèles
6. Détermine suivant les valeurs de m, l'ensemble $(P_m) \cap (Q_m) \cap (R_m)$.

A.C N° 67 : Pour aller loin

Dans l'espace orienté, on considère le tétraèdre ABCD tel que ABC, ABD et ACD forment trois triangles rectangles isocèles en A et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$

1) Démontre que $AB = AC = AD = 1$
2) Démontre que $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace

Dans la suite on suppose que l'espace est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

3) Détermine une équation cartésienne du plan (BCD)
4) Soit G le projeté orthogonal de A sur (BCD)
   a) Détermine les coordonnées de G
   b) Vérifie que G est le centre de gravité du triangle BCD
   c) Détermine la nature du triangle BCD

A.C N° 68 : Pour aller très loin

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne : $A(2,1,-3)$; $B(-1,0,1)$; $\vec{u}(3,1,2)$; $\vec{n}(2,1,-3)$; (D) est la droite de repère $(A,\vec{u})$;

$$(D_1): \begin{cases} x = 6t \\ y = 2 - 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - 4t \end{cases}$$

(D_2): $\frac{x-7}{2} = \frac{y-2}{2} = -z - 6$

(P_1) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

(P_2): $x + 4y + 2z - 1 = 0$ et $\{C\} = (D_2) \cap (P_2)$

1) Etudie la position relative des droites (D) et (D_1) et celle de (D) et (D_2)
2) Détermine une équation cartésienne du plan (P_3) parallèle à (P_1) et passant par O
3) Démontre que (P_1) et (P_2) sont orthogonaux
4) Vérifie que B appartient à (P_2) puis déduis-en une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection des plans (P_1) et (P_2)
5) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (P_1) et (P_2)
6) Détermine $d(A,(D_1))$, $d(A,(P_1))$ et $d(A,(P_2))$ puis déduis-en $d(A,(\Delta))$
7) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal de B sur le plan (P_3)
8) Détermine les coordonnées de C
9) (R): $x + my + (m-1)z + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$
   a) Détermine m pour que (P_2) et (R) soit perpendiculaires
   b) Démontre que tous les plans (R) contiennent une droite fixe (Δ_1) dont tu donneras un repère

SA N°2 :

Séquence 1 : Nombres complexes

A.C | N° 69 : Ecrire sous forme algébrique

Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$A = (\sqrt{2} - 3 - 2i)^2$; $B = (1-i)^3$; $C = \frac{1+i}{2-i}$

$D = (2+i)(1-i) - (3-2i)^2 + (5-i)(5+i)$

$E = 3i(2+8i) - 7(5-2i) + (7-3i)(1+5i)$

A.C | N° 70 : Ecrire sous forme algébrique

Écris chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique

$A = \frac{1}{3+2i} + \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$; $B = \frac{5+7i}{1+i} - \frac{4-3i}{i}$

$C = (-3+2i)^3$; $D = (-2-3i)^4$;

$E = (1+i)^6 + (1-2i)^5$

A.C | N° 71 : Ecrire sous forme algébrique

Pour tout nombre complexe , on pose

$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$

Calcule $P(-i)$; $P(-1-i)$ et $P(2-3i)$

A.C | N° 72 : Représentation dans le plan d'un nombre complexe

Consigne 1

1) a) Dans le plan complexe, place les points I, J et K d'affixes: $z_I = \frac{3}{2}i$; $z_J = 2 + \frac{1}{2}i$ et $z_K = 1 - \frac{3}{2}i$

b) Détermine l'affixe du milieu du segment [JK] et celle du centre de gravité du triangle IJK

2) On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1;-3)$, $(4;5)$ et $(-3;2)$.

a) Quelles sont les affixes des points A, B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) On définit les points D et E par : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$. Détermine l'affixe de chacun des points D et E.

c) Démontre que les points A, D et E sont alignés.

Consigne 2 : Utilisation des nombres complexes

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -1 - 5i$, $z_B = 4 - 3i$, $z_C = 3 + 3i$ et $z_D = -2 + i$

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2) Déterminer l'affixe du point C', symétrique du point C par rapport à D.

3) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant

$$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Consigne 3 : Lieu géométrique

A tout nombre complexe z différent de $-2-i$, on associe le complexe : $Z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$

1) Détermine analytiquement l'ensemble E_1 des points M du plan d'affixe z tels que Z soit réel

2) Détermine analytiquement l'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

A.C | N° 73 : Nombres complexes conjugués

Détermine le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$A = 2 + \sqrt{3} + 4i$; $B = 2i(4-i)$;

$C = (3+i)(-5i+3)$; $D = \frac{1}{2+i} + \frac{-5i}{i}$ et

$E = \frac{3-i}{6i-2} - \frac{2+i}{8-i}$

A.C | N° 74 : Utilisation du conjugué d'un nombre complexe

1) On donne $z_1 = \left(\frac{5-i}{3+2i}\right)^n$ et $z_2 = \left(\frac{5+i}{3-2i}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Justifie que

a) $z_1 + z_2$ est un nombre réel

b) $z_1 - z_2$ est un nombre complexe imaginaire

2) On donne $U = z^2 + 2z - 3$. Détermine les nombres complexes z tels que U soit un nombre réel

A.C N° 75 : Module d'un nombre complexe

Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants

$A = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2i(-\sqrt{3}+i)}$; $B = \frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$; $C = \frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(-2-2i)^2}$

A.C N° 76 : Interprétation du module d'un nombre complexe

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Consigne 1 : *INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU MODULE*

1) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

a) $|z-3| = |iz-1+i|$; b) $|2iz-4+6i| = 6$

c) $|\bar{z}+3i| = |z-4-i|$ et $|4+6i+2i\bar{z}| \leq 6$

Consigne 2 : *INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU MODULE*

On pose $Z' = \frac{z+i}{z-2i}$ avec z un nombre complexe différent de $2i$

1) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels $|Z'| = 1$

2) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que le point M' d'affixe Z'

a) soit sur le cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon 1

b) soit sur le cercle de centre O et de rayon 2

Consigne 2 : *METHODE ANALYTIQUE*

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. A tout point M du plan de coordonnées $(x;y)$ on associe son affixe $z = x + iy$

1) Détermine analytiquement l'ensemble (E_1) des points M du plan d'affixes z tels que $|z-3i| = 2$

2) Justifie que l'ensemble (D) des points M du plan dont l'affixe z vérifie :
$|iz - i + 2| = |\bar{z} - 7 - 2i|$ est une droite dont tu donneras une équation cartésienne

3) A tout nombre complexe z différent de $2i$, on associe le complexe : $Z = \frac{z+1}{z-2i}$

a) Détermine analytiquement l'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z tels que Z soit réel.

b) Détermine l'ensemble E_3 des points M images de z tels que Z soit un imaginaire

A.C N° 77 : Ensemble de points

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points $A(4+2i)$ et $B(-2-i)$ et on définit $Z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$ pour tout nombre complexe $z \neq -2-i$:

Détermine l'ensemble des ponts M d'affixes z tels que :

1) Z soit réel

2) Z soit imaginaire pur

3) Z ait un module égal à 1

A.C N° 78 : Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Consigne 1 : *Détermination d'un argument*

1) Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -2-2i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

2) Déduis-en un argument de : $z_1 z_2$; z_3^6 et $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

Consigne 2 : *INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE L'ARGUMENT*

A tout nombre complexe z différent de $-2i$, on associe le complexe : $Z = \frac{iz-1+2i}{z+2i}$ et les points $A(-2i)$, $B(-2-i)$ et $C(-1-i)$

1) Interprète géométriquement $\arg(Z)$

2) Détermine géométriquement l'ensemble E_1 des points M du plan d'affixe z tels que Z soit réel

3) Détermine géométriquement l'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Consigne 3 : *Pour aller loin*

Détermine et représente dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée :

1) $|z-3| = |z-3i|$

2) $|2 \mp 3i + z| = |2+3i|$

3) $|\bar{z} - 4 + i| = 1$

4) $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)\ (2\pi)$

A.C N° 79 : Forme trigonométrique – Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Ecris sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$; $z_3 = -1 - i$ et $z_4 = (1 + i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) On pose $Z = \frac{z_1^2 z_3^4}{z_2^3}$

a) Déduis-en une forme exponentielle du nombre complexe Z.

b) Ecris Z forme algébrique.

A.C N° 80 : Valeur exacte de la mesure d'un angle

Consigne 1

On pose $a = \sqrt{2}(1 + i), b = \sqrt{3} + i$ et $c = a^3 b$.

1) a) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b.

b) Déduis-en le module et un argument de c.

2) Déduis des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Consigne 2

On considère les nombres complexes :

$z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z = \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$

1) Calcule le module et un argument de $z_1, z_2,$ et z

2) Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de z

3) Déduis des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Consigne 3 :

On considère les nombres complexes :

$u = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes u ; v et uv.

2) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

A.C N° 81 : Module et argument

Consigne1

1) Détermine le module et l'argument principal puis donne une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$5\sqrt{2}$; $-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; $-2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

2) α est un nombre réel élément de $]0;\pi[$.

a) Détermine le module et un argument de $1 - e^{i\alpha}$ et de $1 + e^{i\alpha}$.

b) Déduis-en le module et un argument de $\frac{1-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}$ et $(1 - e^{i\alpha})(1 - e^{i\alpha})$

Consigne 2

On considère le complexe Z de module 1 et dont un argument 2θ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$\overline{Z} : 1 + Z, 1 - Z;\ (1 - Z)^2 \text{ et } Z' = \frac{(1 - z)^2}{z(1 + z)}$$

(Tu pourras exprimer $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$).

2) a) Calcule la valeur de θ pour laquelle Z' est réel

b) Donne alors la valeur de Z'

A.C N° 82 : Application (Module et argument)

Consigne 1

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points $A(3 + i)$ et $B(-2i)$ et $C(2 - 2i)$

1) a) Place les points A, B et C

b) Détermine le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

c) Déduis-en que le triangle ABC est isocèle rectangle

2) Détermine l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme

3) Détermine l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu de [BC]

4) Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ?

Consigne 2

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère les nombres complexes $a=\sqrt{3}+i$; $b=-2+2i$; $c=3+3i$ et pour tout nombre complexe z, on note (S) le système

$$\begin{cases} |z|=|z-6| \\ \arg(z^2)=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

1) Parmi les complexes a, b et c, lesquels sont solutions du système (S) ?

3) M étant le point d'affixe z, et A étant le point d'affixe 6.

a) Traduis géométriquement les deux contraintes de (S)

b) Résous le système (S) par la méthode de ton choix

A.C N° 83 : Interprétation géométrique : Module et argument

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

Soit l'application $f(z)=\frac{z-2i}{z+1}$ définie pour les nombres complexes z différents de -1 et à valeur dans $\mathbb{C}$. On désigne par A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives

-1 ; $2i$; z ; $f(z)$

1- Calcule le module et un argument de $f(i)$

2- a) Interprète géométriquement $|f(z)|$ et $\arg(f(z))$ pour $z\neq -1$ et $z\neq 2i$

b) Détermine l'ensemble (E_1) des points du plan d'affixes z tels que $|f(z)|=1$

3- Détermine :

a) L'ensemble (E_2) des points M du plan d'affixes z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif ;

b) L'ensemble (E_3) des points M du plan d'affixes z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

4- a) Calcule, pour tout $z\neq -1$,

$|f(z)-1|\times|z+1|$

b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Montre que M' appartient à un cercle C, que l'on déterminera.

A.C N° 84 : Racine carrée d'un nombre complexe

Consigne1

Détermine les racines carrés des nombres complexes suivants :

$A=5-12i$; $B=-8i$; $C=-26-6i\sqrt{3}$ et $D=7+24i$;

Consigne 2

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$. Soit le nombre complexe

$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{\sqrt{3}+2}$

1) Détermine le module et un argument de a^2

2) Déduis-en le module et un argument de a

3) Place les points A_0 et A_1 images respectives des nombres a et a^2.

Consigne 3 : Racines $n^{ième}$

1) Détermine les racines cubiques de l'unité

2) Calcule $(3i)^3$ puis déduis-en les racines cubiques de $-27i$

3) Détermine les racines quatrièmes de $2(-1+i\sqrt{3})$

A.C N° 85 : Formule de Moivre

1) Ecris sous forme trigonométrique $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

2) Ecris sous forme algébrique de z^{12} et z^{2030}

3) a) Calcule le module et un argument de $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

b) Pour quels entiers naturels n, z^n est-il un nombre réel ?

A.C N° 86 : Linéarisation

Linéarise chacune des expressions suivantes :

$A(x)=\cos^3x\sin^2x$;

$B(x)=\cos^34x$;

$C(x)=\cos^2x\sin^3x-\cos^32x$

A.C | N° 87 : Résolution d'équation

Consigne 1 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \bar{z}$

2) Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

(E_1) : $z^2 - (3-2i)z + 5 - i = 0$

(E_2) : $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$;

(E_3) : $(2+i)z^2 - (9+2i)z + 15 - 5i = 0$

(E_4) : $(z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + z + 1) = 0$

(E_5): $|z| + z - 3 - 4i = 0$

Consigne 2 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+2iz+3=0$

b) $z^2+(1-i\sqrt{3})z - (1+i\sqrt{3}) = 0$

c) $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$

d) $z^2 + (2-im)z + 4 + m\sqrt{3} - im = 0, m \in IR$

Consigne 3 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

1) Calcule $(\sqrt{3}+3)^2$ *et vérifie que* $(1+i)$ est une racine carrée de 2i.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$p(z) = z^2 + (i-1)(\sqrt{3})z - 12i$

a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$

b) Ecris sous forme trigonométrique chacune des racines de cette équation

Consigne 4 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

1. a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$ on désigne par z_1 la solution de partie imaginaire et par z_2 l'autre solution.

b) Donne un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2, puis écris ces deux nombres sous forme algébrique.

2. a) Place dans le plan complexe les points A, B, A' et B' d'affixe respectives :

$1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, -2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$.

b) Détermine la nature du quadrilatère AA'B'B.

c) Montre que le triangle AA'B' est rectangle et qu'il en est de même du triangle BB'A'.

Consigne 5 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 + z + 1 = 0$

Calcule le module et un argument de ses solutions z_1, z_2

a) Soient les nombres complexes

$Z = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, $Z' = z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2$,

$z'' = z_1^3 + z_2^3$

c) Calcule ces trois nombres complexes.

d) Factorise le polynôme p(z) tel que $p(z) = z^3 - 1$.

e)

En déduire rapidement la valeur de z''

Consigne 6 : EQUATIONS DU 2nd DEGRE

$\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes, θ est un réel donné.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation en z :

(E): $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :

(E'): $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$. (Les solutions seront présentées sous forme trigonométrique)

2) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

on considère les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre solutions de l'équation (E').

Pour quelle valeur de θ $(0 < \theta < \pi)$ ces quatre points sont-ils sommets d'un carré?

3) Décompose en un produit de deux facteurs du second degré et à coefficients réels le polynôme en x défini par: $f(x) = x^4 - 2x^2\cos\theta + 1$.

Consigne 7 : POUR ALLER LOIN AVEC LES EQUATIONS DU 2ND DEGRE

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On considère deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 vérifiant $\cos^2\frac{\theta}{4} = \frac{z^2}{4(z-1)}$ avec $\theta \in]0; 2\pi[$

1) a- Démontre que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation (E): $\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{4}\right)z^2 - 2z + 2 = 0$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) a- Détermine en fonction de θ le module et un argument de z_1 et z_2

b- Détermine θ pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O.

3) Pour $\theta = \pi$, détermine la nature du quadrilatère OM_1AM_2 où A est le symétrique de O par rapport au milieu du segment $[M_1 M_2]$

Consigne 8 : POUR ALLER LOIN AVEC LES EQUATIONS DU 2ND DEGRE

On considère les équations

$(E) : z^4 + 2iz^3 - z^2 - 4iz + 4 = 0$

$(E') : z^2 + 2iz - 1 - \frac{4i}{z} + \frac{4}{z^2} = 0$

1) a) 0 est-il une solution de (E) ?

b) Justifie que (E) et (E') sont équivalentes

2) On pose $u = z - \frac{2}{z}$

a) Justifie que si z est une solution de (E') alors u est une solution de l'équation $(E'') : u^2 + 2iu + 3 = 0$

b) Résous (E'').

c) Résous (E)

Consigne 9 : EQUATIONS DU 3ième DEGRE

Le plan complexe muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Résous dans $\mathbb{C}$:

1) $(E_1) : z^3 + (2 - 5i)z^2 - (5 + 3i)z - 6 + 2i = 0$ sachant que (E_1) admet une solution réelle.

2) $(E_2) : iz^3 - 2(2\sqrt{3} + 3i)z^2 - 4(i - 4\sqrt{3})z - 8(2\sqrt{3} - 3i) = 0$

sachant que (E_2) admet une solution imaginaire pure.

3) $(E_3) : z^3 - (2 + 2i)z^2 + 8iz + 8(2 - 2i) = 0$ sachant que (E_3) admet deux solutions symétriques par rapport O

Consigne 10: EQUATIONS DU 4ième DEGRE

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1) α désigne un nombre complexe quelconque. Démontre que si que α est une racine de $P(z)$ alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de $P(z)$

2) Calcule $P(1 - i)$ puis déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$

3) Place les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4) Démontre que tous ces points appartiennent à un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

Consigne 11: Pour s'entraîner

Pour tout nombre complexe z, on définit :

$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1) Calcule P(2). Détermine une factorisation de P(z) par (z-2)

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)= 0

on appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autre que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

Vérifie que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ puis détermine le module et un argument de z_1 et de z_2

3) a- Place dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixe respectives de z_1 et z_2, et I milieu de [AB]

b) Démontre que le triangle OAB est isocèle.

Déduis-en une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$

c) Calcule l'affixe z_I de I, puis le module de z_I

d) Déduis-en des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et de $\sin\frac{3\pi}{8}$

Consigne 12 : EQUATIONS DU 3ième DEGRE

1. le polynôme P est tel que : pour tout z,

$$P(z) = z^3 + (-9 + 4\sqrt{3})z^2 + (43 - 24\sqrt{3})z - 75 + 36\sqrt{3}$$

a) Vérifie que 3 est une racine de $P(z)$

b) Détermine les nombres réels α et β tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta z)$.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On désigne par U, V et W les points du plan complexe d'affixe définies respectivement par : $z_U = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$, $z_V = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$, $z_W = 3$.

a) Détermine le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_V - z_W}{z_U - z_W}$

b) Déduis-en la nature du triangle UVW.

Consigne 13: EQUATIONS DU 4ième DEGRE

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ bdéfinie par :

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$$

1. Compare $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$. Calcule $P(i)$

Déduis-en une, puis deux solutions de l'équation : $(E) : P(z) = 0$.

2. a) Mets $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Calcule la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

Consigne 14: Nature d'n triangle

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit A, B et C trois points de P d'affixes respectives z_A ; z_B ; z_C

Détermine la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants.

1°) $z_A = 1 - i$; $z_B = 1 + 2i$; $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$

2°) $z_A = 2 + 3i$; $z_B = -1 - i$; $z_C = 3 - i$

3°) $z_A = 4e^{i2\theta} - 2e^{i3\theta}$; $z_B = 2e^{i\theta}$; $z_C = 2e^{i2\theta}$ avec $\theta \in]0; \pi[$

4°) $z_A = 2 + i$; $z_B = -2 + 2i$; $z_C = 3 + 5i$

5°) $z_A = 2 + 3i$; $z_B = 6$; $z_C = 4 + i$

6°) $z_A = 4 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i$; $z_B = 5 + 3i$; $z_C = 3 + i$

Tu pourras représenter d'abord les points A, B et C dans le plan (P)

Consigne 15 : EQUATIONS DU 3ème DEGRE

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On considère le polynôme p(z) défini par: $p(z) = z^3 + (3 + 3i)z^2 + (3 + 14i)z - 23 + 11i$, où $z \in \mathbb{C}$

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation p(z) = 0 sachant qu'elle admet deux solutions dont les points images sont symétriques par rapport au point A(-1, 0). (On appellera z_1, z_2 et z_3 les solutions telles que $Re(z_1) < Re(z_2) < Re(z_3)$)

2) On désigne par A, B et C les images respectives de z_1, z_2 et z_3

Détermine une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Consigne 16 : EQUATIONS DU 3ème DEGRE

1) Soient x et y deux nombres réels.

Vérifie que l'expression

$x^3 - 3x^2y + 2xy^2 + x - y$ s'annule pour $x = y$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

(E) : $z^3 - (3i\cos\alpha)z^2 - (\cos 2\alpha + 2)z + i\cos\alpha = 0$ où $\alpha \in]-\pi; 0[$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$

2) a) Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

b) Détermine suivant les valeurs de α le module et un argument de z_0

c) Démontre que l'équation (E) s'écrit: $(z - z_0) f(z) = 0$ ou f(z) est un trinôme du second degré en z.

d) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (On appellera z_1 et z_2 les autres solutions de l'équation (E) telles que $Re(z_1) < Re(z_2)$)

e) Ecris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

A.C N° 88 : Résolution d'équation

Consigne 1:

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

1. Démontre que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ le sont aussi.
2. Calcule $f(1 + i)$ et résous l'équation $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$
3. Ecris $f(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du deuxième degré à coefficients réels.

Consigne 2:

Soient u et v deux nombres complexes tels que $|u| = 3$; $|v| = 5$ et $|u - v| = 7$. Détermine le nombre complexe $w = \frac{u}{v}$

Consigne 3:

On considère $u = e^{i\frac{2\pi}{5}}$; $A = u + u^4$ et $B = u^2 + u^3$

1) a) Calcule u^5 puis démontre que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$

b) Déduis-en que A et B sont les solutions de l'équation $(E): z^2 + z + 1 = 0$

c) Ecris A en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

2) Résous (E) puis détermine la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis de $\cos\frac{\pi}{5}$

A.C N° 89 : Résolution d'équation

1. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $(E_1): z^2 - 2z + 5 = 0$ et $(E_2) : z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ et $z_D = 1 - 2i$

a) Place les points A, B, C et D et précise la nature du quadrilatère ABCD.

b) Vérifie que : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peux-tu en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

3. Prouve que les points A, B et C appartiennent à un même cercle Γ dont tu préciseras le centre et le rayon. Trace (Γ)

A.C N° 90 : Résolution d'équation

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 - 16i$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1) Détermine les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$
2) Résous dans ℂ, l'équation : $P(z) = 0$
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm, On considère les points I, J et K d'affixes respectives :

$z_I = 2i$, $z_J = 3 + i$, $z_K = 2 - 2i$

a- Place les points I, J et K

b- Démontre que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires

c- Détermine l'affixe du barycentre G des points I, J, K affectés respectivement des coefficients $-1; 1; 1$.

d- Détermine l'ensemble (Q) des points M su plan de tels $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 6$

A.C N° 91 : D'après BAC

On considère dans l'ensemble ℂ des nombres complexes le polynôme P(z) défini par :

$P(z) = z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32 - 4i$,

i désignant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$

1°/ Résous dans ℂ l'équation : $u^2 - (-11+i)u + 32 - 4i = 0$

2°/ a) Démontre que pour tout nombre complexe z, l'on a :

$P(z) = [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32 - 4i$.

b) En utilisant les résultats précédents, résous dans ℂ l'équation $P(z) = 0$

3°/ On donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$; $2+i$ et $2-2i$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a) Détermine une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

b) Donne une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC

A.C N° 92 : D'après BAC

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On considère l'application h définie sur ℂ* par : $h(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1°) On désigne par K le point d'affixe $h\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Détermine les coordonnées de K.

2°) On suppose que α est un nombre réel.

Résous dans ℂ l'équation (E): $h(z) = \frac{2}{3}\cos\alpha$.

3°) a) En déduire la résolution dans ℂ de l'équation (E'): $z^4 - 2z^2\cos\alpha + 1 = 0$

(On mettra les solutions sous forme exponentielle)

b) Démontre que (E') admet deux solutions telles que leurs conjuguées sont aussi solutions de (E').

c) Décompose $P(x) = x^4 - 2x^2\cos\alpha + 1$ en produit de deux polynômes de degré deux, à coefficients réels.

A.C N° 93 : Pour tout réviser

On considère dans l'ensemble ℂ des nombres complexes les équations $(E_1) : z^3 - 8 = 0$ et $(E_2) : z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$

1) a) Détermine les racines cubiques de l'unité.

b) Déduis-en les solutions de l'équation (E_1) dans ℂ

2) Résous autrement l'équation (E_1) dans ℂ

3) On pose $u = z - 2$ avec $z \in ℂ$

a) Démontre que u est solution de (E_1) si et seulement si z est solution de (E_2)

b) Résous (E_2)

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points

A ; B et C d'affixes respectives $1 - i\sqrt{3}$; $1 + i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$

a) Place A , B et C dans ce plan puis détermine l'affixe de G=bar {(A ,2) ;(B ,-3) ;(C,-1)}

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

c) Détermine une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

d) Détermine l'affixe du point D telle que le triangle ABD soit équilatéral de sens direct

5) a) Ecris sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$

b) Déduis-en la nature du triangle BOA.

6) Linéarise $\sin 3x \cos^2 x$ et $\cos^3 x \sin^2 x$

A.C | N° 94 : Pour aller loin

1- Soit le nombre complexe

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, *où* α *désigne* un nombre réel.

a) Ecris sous forme trigonométrique $\frac{1}{z}, z^n$ *et* $\frac{1}{z^n}$

b) Déduis-en $z - \frac{1}{z}$ *et* $z^n - \frac{1}{z^n}$ en fonction de $\sin\alpha$ *et* $\sin(n\alpha)$

c) Calcule de deux façons $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$ en fonction de α

d) Résous, dans ℝ, l'équation :

$16\sin^5 x = 10\sin x - 6\sin\ 3x$

2- Soit $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

a) Calcule z^5 et en déduire que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

b) Déduis-en du a) les valeurs de :

$$X = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$$

et

$$Y = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}$$

3- Soit x un nombre réel et z le nombre complexe $\cos x + i\sin x$

a) Exprime $\cos x$ *et* $\sin x$ en fonction de z *et* $\frac{1}{z}$

b) Montre que, pour que le nombre réel x vérifie l'égalité (1)

$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$, il faut, et il suffit, que z soit racine d'une équation du second degré (E) que l'on écrira.

c) Résous l'équation (E). Écrire les solutions sous forme trigonométrique et en déduire les solutions de l'équation (1).

A.C | N° 95 : Pour aller loin

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct : $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$. θ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert : $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z : (E) : z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

1. Résous dans ℂ l'équation (E). On considère deux nombres complexes

$z_1 = 1 + i\tan\theta$ *et* $z_2 = 1 - i\tan\theta$

2. a) Ecris z_2 en fonction de z_1

b) Détermine $z_1 + z_2$ et exprime $z_1^2 + z_2^2$ et $z_1 z_2$ *en fonction de* θ

c) Pour quelles valeurs de θ a – t – on $z_1^2 + z_2^2 = 0$?

d) Calcule le module de z_1 en fonction de $\tan\theta$ puis en fonction de $\cos\theta$

e) Démontre qu'un argument de z_1 *est* θ

f) Déduis-en qu'un argument de z_2 *est* $-\theta$

3. On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 *et* z_2.

a) Détermine un argument α *de* $\frac{z_1}{z_2}$

b) Donne une interprétation géométrique de arg $\frac{z_1}{z_2}$

c) Quelle est la nature du triangle OAB ?

d) Pour quelle(s) valeur(s) de θ, OAB est un triangle équilatéral ?

4. On suppose que : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

a) Prouve que : $z_1 = 1 - i$ *et* $z_2 = 1 + i$

b) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 1 + i| = 2$

A.C N° 96 : Pour aller loin

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})(unité\ 1cm)$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations :

$$(E): z^2-(4+i)z+5(1+i)=0 \text{ et}$$

$$(E'): z^3-(8+5i)z^2+(17+25i)z-40i=0$$

Partie A :

1. Résous l'équation(E).
2. Résous l'équation (E') sachant qu'elle admet une racine dont le point image dans le plan complexe appartient à la droite d'équation : $y=x$.
3. On désigne par E, F et G les points d'affixes respectives $z_E=4+4i$, $z_F=1+2i$ et $z_G=3-i$.
   a) On pose $Z=\frac{z_E-z_F}{z_G-z_F}$. Ecris Z sous forme algébrique et déduis-en la nature du triangle EFG.
   b) Soit n un entier naturel. Détermine suivant les valeurs de n, la forme algébrique de Z^n.
   c) Détermine l'affixe du point H tel que le quadruplet $EFGH$ soit un carré.
4. Ecris une équation du cercle circonscrit à ce carré.

Partie B :

Soit M le point d'affixe $z, z\neq 3-i$; à z on associe le nombre complexe z' tel que: $z'=\frac{z-1-2i}{z-3+i}$.

5. a- Etablis une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{MG},\overrightarrow{MF}}\right)$.

b- Détermine et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

c- Détermine et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

6. Détermine et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $|z'|=2$
7. Détermine l'affixe du point K intersection de (E_2) et (E_3).

Limites et continuité

A.C N° 97 : Ensemble de définition

Consigne 1:

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques f de la variable réelle x suivantes :

1) $f(x)=x^2-x+1$; 2) $f(x)=x|x^2-1|$

3) $f(x)=\frac{x-4}{6x-3}$; 4) $f(x)=\frac{2x+5}{x^2-1}$

5) $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{2x-1}$; 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+x-2}$

Consigne 2:

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques f de variable réelle x suivantes :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ 2) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-\sqrt{x^2+x-2}}$

3) $f(x)=x-\sqrt{|x^2+x-6|}$ 4) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{5-x}}$

Consigne 3:

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques f de la variable réelle x suivantes :

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+2}}$ 2) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-2x}}$

3) $f(x)=\frac{-x+2}{\sqrt{x-1-\sqrt{x-2}}}$ 4) $f(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{2x^2+2}-3+x}}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+9}}$

Consigne 4:

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x<0 \\ f(x)=-2x^2+1 & si\ x\geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} g(x)=\frac{|x^2-1|-1}{x^2-x} & si\ x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} h(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ h(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x+1} & si\ x < 1 \\ u(x) = 1 + (x+1)\sqrt{x^2-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Consigne 5 :

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques f de la variable réelle x suivantes :

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+2} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{2x+1} & si\ 0 < x < 4 \\ f(x) = \dfrac{x-1}{x-3} & si\ x \geq 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{x-1} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = x + 4 - \sqrt{-x} & si\ -1 < x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-4x-8}{x^2-x-2} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x+1}{1-2\cos x}, x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-1}, x \in]-\infty; 0[\end{cases}$

A.C | N° 98 : Calcul de limites

Consigne 1 : Limites en un point

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+3x+4}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$; $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-25}{3-\sqrt{2x-1}}$

; $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{\sqrt{3x+19}-4}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$;

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{-x^2+6x+8}}{\sqrt{2x^2-2x-4}}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-2x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x^3+2x^2-x}{2x^3+5x^2-x-6}$ et $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+x-2}{x^3+5x-6}$

Consigne 2 : Limites en l'infini

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2-2x+5}-2x\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+6}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x+3-\sqrt{5x^2-x+1}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+3\sqrt{5x^2-x+1}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x}+x$

Consigne 3 :

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{\sqrt{3x+19}-4}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-4}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{6-x}}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2-2x-5}\right)$;

Consigne 4 : Limites trigonométriques

1) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où E est la fonction partie entière

2)) Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(2x)}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\cos x-1}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

Consigne 5 : Limites trigonométriques

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(3x)}{7x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(5x)}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x\tan(x)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{x}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos(x)-1}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos(x)}{(x-\pi)^2}$

Consigne 6 : Etude de limite

Soit la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{2x-2-\sqrt{x^2+x-2}}{x-\sqrt{x^2+x-2}}$

1) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f

2) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3) g est la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x}-1+(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Etudie la limite de g en $+\infty$ et en 1.

Consigne 7 : Etude de limite

Etudie les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + mx$ avec $m \in \mathbb{R}$

Consigne 8:

La fonction f est définie par :	Étudie les limites de f en
1° $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5$	$+\infty$ et $-\infty$
2° $f(x) = \frac{4x^2+x}{\lvert x-2\rvert}$	$+\infty, -\infty$ et 2
3° $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$+\infty$ et $-\infty$
4° $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$	$+\infty$ et $-\infty$
5° $f(x) = -2x + \sqrt{3(x^2-1)}$	$+\infty$ et $-\infty$
6° $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x}-2}$	$+\infty$, 0 et 4
7° $f(x) = \sqrt{3}x - 4 + \sqrt{3x^2+4}$	$+\infty$ et $-\infty$
8° $f(x) = \sin x + 2x$	$+\infty$ et $-\infty$

Consigne 9 : Limites trigonométriques

Etudie la limite de f au point x_0 indiqué dans chacun des cas suivant :

1) $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$ au point $x_0 = \pi$

2) $f(x) = \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$ au point $x_0 = \frac{\pi}{2}$

3) $f(x) = \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ au point $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4) $f(x) = \frac{\sin 3x}{2\sin x-\sqrt{3}}$ au point $x_0 = \frac{\pi}{3}$

5) $f(x) = (x-2)\tan\frac{\pi}{x}$ au point $x_0 = 2$

Consigne 10 : Limite de fonctions composées

Etudie la limite en x_0 de la fonction f, dans les cas suivants :

1) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{9x-1}{x+1}}$; $x_0 = -\infty$;

2) $f : x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - x\sin x}{x^2-\sin^2 x}$; $x_0 = 0$

3) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin x-\cos x}{\sin^2 x}}$; $x_0 = 0$;

4) $f : x \mapsto \frac{1-\cos(\tan x)}{\tan^2 x}$; $x_0 = 0$

Consigne 11-a : Comparaison de limites

1) Etudie la limite en $-\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \sin 2x$

2) Etudie la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = -x^3 + 2x - 5 + \sqrt{x}$

3) Etudie la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{2x^3}{x^2-1} + \sin 3x$

Consigne 11-b : Comparaison de limites

Dans chacun des cas suivants, précise la méthode (ou les méthodes) à employer pour étudier la limite demandée de la fonction f. Puis étudie cette limite.

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sin x$. En $+\infty$

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$. En $+\infty$

3) f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$. En $\frac{\pi}{2}$

4) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2+4}$. En $-\infty$

5) f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\sin\frac{2}{x}$. En 0

6) f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ En $+\infty$

7) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - 3x$. En $+\infty$

Consigne 12 : POUR ALLER TRES LOIN

Soit la fonction f_m définie par :

$f_m(x) = \frac{2x^2-7x+6}{\lvert x-2\rvert+m}$; $m \in \mathbb{R}$.

1) Donner le domaine de définition D_m de f_m suivant les valeurs de m.

2) Calculer suivant les valeurs de m les limites de f_m aux bornes de D_m

A.C N° 100 : Continuité en un point

***Consigne 1** : Continuité en un point*

Etudie la continuité en 0 de chacune des fonctions numériques de variable réelle suivantes :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} g(x) = \frac{|x^2-1|-1}{x^2-x} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} h(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ h(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

***Consigne 2** : Continuité en un point*

On considère les fonctions numériques de variable réelle suivantes :

1) $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1} & si\ x < 1 \\ u(x) = 1 + (x+1)\sqrt{x^2-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} v(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2+x-6} & si\ x \neq 2 \\ v(2) = m - 4\ ,\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$

3) $\begin{cases} w(x) = \frac{x-1}{2x+3} & si\ x \leq 0 \\ w(x) = x^2 + x + n & si\ x > 0 \end{cases}$

Etudie la continuité de :

1) u en 1
2) v en 2 (Tu discuteras suivant les valeurs du paramètre réel m)
3) Détermine n pour que w soit continue en 0 .

***Consigne 3** : Continuité en un point*

Etudie la continuité de chacune des fonctions suivantes en x_0 :

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = \sqrt{1+x} & si\ x > -1 \end{cases}$; $x_0 = -1$

2) $g(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{3-x} & si\ x \leq 1 \\ 2x - 1 + \frac{3}{x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

3) $\begin{cases} h(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & si\ x \leq 1 \\ h(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

4) $\begin{cases} u(x) = x + 1 + \sqrt{|x^2+2x|} & si\ x < 0 \\ u(x) = \frac{1-x}{x^2+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

***Consigne 4** : Continuité à gauche et à droite*

Un cours d'eau a l'allure de la courbe représentative (C_f) de la fonction f dénifie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} & si\ x < 1 \\ f(x) = \frac{x+m}{x^2+1} & si\ x > 1 \\ f(1) = n \end{cases}$ où $(m, n) \in \mathbb{R}^2$

1- Détermine l'ensemble de définition D de f
2- Pour quelle valeur de , f est -elle continue à gauche en 1 ?
3- a) Détermine une relation simple entre m et n pour que f soit continue à droite en 1.
b) Déduis-en les valeurs de m et n pour que f soit continue en 1.

***Consigne 5** : Continuité en un point*

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x-2+|x-2|}{x^2-4} & ,si\ x \neq 2 \\ f(2) = \alpha \end{cases}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule la limite à droite et la limite à gauche en 2 de f.
3. Existe-il des valeurs du nombre réel α pour lesquelles f soit continue en 2 ?

***Consigne 6** : Continuité en un point*

Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2\ , & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{2m - x}{x^2 + x + 1}\ , & si\ -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{2x^2 + 2x - 4} - x\ , & si\ x > 1 \end{cases}$$

1. Détermine le domaine de définition de f.
2. Détermine m pour que f soit continue en -1
3. Pour la valeur de m trouver étudie la continuité de f en 1 et détermine le domaine de continuité de f.

A.C N° 101 : Continuité à gauche – Continuité à droite

1) On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{|x|} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Démontre que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \quad si\ x \in \left]-\frac{5}{2};2\right[\cup]2;+\infty[\\ g(2) = m \end{cases}$$

Pour quelle valeur de m la fonction g est-elle continue au point $x_0 = 2$?

3) Soit la fonction h définie sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\pi(cos^2x - cosx)}{2cos^2x - 3cosx + 1} \quad si\ x \neq 0 \\ h(0) = \pi \end{cases}$$

Démontre que h est continue au point $x_0 = 0$

A.C N° 102 : Continuité sur un intervalle

Vérifie si chacune des fonctions numériques f de variable réelle x suivantes est continue sur son ensemble de définition

1) $f(x) = \sqrt{\left|\frac{2x+1}{x^2-x+1}\right|}$

2) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

3) $f(x) = \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$

4) $f(x) = \frac{1-\cos 5x}{3x^2}$

A.C N° 103 : Prolongement par continuité

Consigne 1 :

1) Soient les deux fonctions numériques de variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$ $\quad \begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4} \quad si\ x \in D \\ g(3) = m \end{cases}$

Détermine D et m, pour que la fonction g soit le prolongement par continuité de f au point $x_0 = 3$?

2) Peut-on prolonger par continuité au point $x_0 = 0$ la fonction

$$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$$

Consigne 2 :

Dans chaque cas étudie la limite de la fonction $f\ en\ x_0$ et définis, lorsque cela est possible, le prolongement par continuité de $f\ en\ x_0$

1) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^3+x-2}{2x^2+x-3} \end{array}$; $x_0=1$

2) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \end{array}$; $x_0=1$

3) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2-\sqrt{-2x}}{\sqrt{x+6}-2} \end{array}$; $x_0=-2$

Consigne 3 :

Soit l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{ax+2}{x-1},\ a \in \mathbb{R}$$

1) Etudie suivant les valeurs du paramètre réel a, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

2) Pour quelle valeur de a peut- on prolonger f par continuité au point $x_0 = 1$?

Consigne 4 :

Dans des cas ci-après, E(x) désigne la partie entière du nombre réel x.

Peut-on prolonger f par continuité à droite au point $x_0 = 0$?

a) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ b) $f(x) = \frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$; c) $f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$

A.C N° 104 : Image d'un intervalle par une fonction continue

Consigne 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2 - 4x + 2$
Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants :
$[-2;4]$; $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;6]$

Consigne 2 : *Image à partir d'un tableau de variation*

Le tableau ci-dessous est le tableau des variations d'une fonction numérique f de variable réelle x dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d' unité graphique 2cm est (C)

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1. a) Détermine l'ensemble de définition D de f
   b) Précise les limites de f aux bornes de D
2. La fonction f est de la forme $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+2}$, pour tout nombre réel $x \in D$.
   Détermine les nombres réels a, b et c en utilisant les données du tableau
3. On suppose dans la suite du problème que pour tout nombre réel $x \in D$, $f(x) = \frac{-x^2-2x-1}{x+2}$
   Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-2; 4]$; $[-1; +\infty[$ et $]-\infty; -6]$

A.C	N° 105 : Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Consigne 1

Sabine désire démontrer que l'équation $\cos x = 2x$ admet au moins une solution strictement positive.

Elle considère alors la fonction

$$f : \begin{array}{l}]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x - 2x \end{array}$$

1) Justifie que f est continue sur $]0 ; +\infty[$
2) a) Calcule $f(0)$ puis justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$
   b) Déduis-en que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
3) Prouve alors que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution strictement positive.

Consigne 2

1) Démontre que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ a une unique solution réelle
2) a) Démontre que l'équation $\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 = 0$ a trois solutions réelles
   b) Détermine une valeur approchée à 10^{-2}près de l'une de ces solutions

Consigne 3 : *Equation du type $f(x) = x$*

1) Démontre que l'équation $\cos\frac{\pi x}{2} = x$ admet au moins une solution dans $[0 ;1]$
2) Soit les fonctions numériques de la variable réelle x telles que
   $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}$
   a) Calcule $f(-1)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(0)$ et $f(1)$
   b) Déduis-en que l'équation $g(x) = x$ admet au moins trois solutions réelles distinctes comprises entre -1 et 1.

Consigne 4 : POUR ALLER LOIN

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1 + x^2}$

et la fonction g définie par :

$g(x) = 1 - x\sqrt{1 + x^2}$.

1.a) Etudie les variations de g.
b.) Démontre que l'équation g(x)=0 admet dans IR une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$.
c) Déduis-en le signe de g(x).
d) Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$ et que
$-1,13 < f(\alpha) < -1,10$.
2) Démonter que l'équation g(x) =x admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$.

Consigne 5 : Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

1) Calcule les nombres réels suivants :

$A = \frac{27^{-\frac{2}{3}} \times 49^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{5}{4}}}{(\sqrt[5]{243})^2}$; $B = \frac{\sqrt[15]{3}\ \sqrt[3]{9}\,(\sqrt{9})^3}{\sqrt[5]{27}\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$

2) Calcule la limite en x_0 de la fonction f dans chacun des cas suivants :
   a) $f : x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$; $x_0 = 27$;
   b) $f : x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$; $x_0 = 1$

A.C N° 106 : Bijection réciproque

<u>Consigne 1</u>

Soit la fonction $f : [0;1] \to [-1;0]$
$$x \longmapsto x^4 - 2x^2$$

1) a) Etudie les variations de f

b) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur un ensemble E

2) a) Calcule $(f^{-1})(x)$ pour tout x élément de E.

b) Calcule $(f^{-1})(-\frac{1}{2})$

<u>Consigne 2</u>

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1) Etudie les variations de f

On pose $J = f(\mathbb{R})$. Soit l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers J par $g(x) = f(x)$

2)a) Détermine J

b) Démontre que g est une bijection

3) Etudie les variations de g^{-1}

<u>***Consigne 3 : Pour aller loin***</u>

On considère la fonction

$$f : \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \to f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$$
$$x \longmapsto \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

a- Démontre que f est une bijection de $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ sur $J = f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$

b- Calcule $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f^{-1}(7-4\sqrt{3})$

<u>***Consigne 4 : Pour aller loin***</u>

Considérons la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sin x} \ \ si\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Justifie que f est continue en 0.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \sin x - x\cos x$

a) Etudie le sens de variation de g

b) Dresse le tableau de variation de g et déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) a) Justifie que pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sin^2 x}$

b) Etudie les variations de f et justifie que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

Dérivée et étude de fonctions

A.C N° 107 : Dérivabilité en un point

<u>Consigne 1</u>

a et b sont deux nombres réels et f la fonction numérique de la valeur réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + 1 & si\ x < 1 \\ f(x) = 3x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Détermine a et b pour que la fonction f soit dérivable au point $x_0 = 1$

<u>Consigne 2</u>

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

Etudie la dérivabilité de f aux points d'abscisse 0 et -1

<u>Consigne 3</u> : ***Interprétation géométrique du nombre dérivé***

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x, (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas a) et b) suivants :

1) détermine l'ensemble de définition de f

2) étudie la dérivabilité de f au point x_0 indiqué

3) détermine une équation cartésienne de la tangente ou s'il y a lieu les relations définissant les demi-tangentes éventuelles à (C) au point d'abscisse x_0.

a) $\begin{cases} f(x) = x + 1 + \sqrt{1-x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = 3x - 1 - \sqrt{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 + \sqrt{2-x} & si\ x \leq 2 \\ f(x) = x^2 - 4x + 5 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad x_0 = 2$

<u>Consigne 4</u> : ***Demi-tangentes***

1) La fonction g est définie par
$$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$$
Précise les demi-tangentes, aux points d'abscisse 1 et -1, de la courbe représentative de f

2) La fonction g est définie par $g(x) = |x^2 + x|$

Précise les demi-tangentes, aux points d'abscisse 0 et -1, à la courbe représentative de g.

Consigne 5 : Demi-tangentes

La fonction f est définie par $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 2x|}$

Etudie la dérivabilité de f aux points d'abscisse 0 et 2 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus

Consigne 6

La fonction f est définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+3}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2-4x-3}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$

3) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Détermine une équation cartésienne de la tangente éventuelle ou des demi-tangentes éventuelles à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) En quels points de (C) la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $x - 2y + 10 = 0$? est-elle perpendiculaire à la droite d'équation $y = -3x + 1$?

Consigne 7 : Détermination d'un nombre réel

m est un nombre réel. On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{x^3+x^2+x+m}{x^2}$

Détermine m pour que la représentation graphique de f_m ait, en son point d'abscisse -1, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$

Consigne 8 : Détermination de nombres réels

a et b sont deux nombres réels. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

Détermine a et b pour que la représentation graphique de f :

- passe par le point $A(0; 3)$
- admette en A une tangente d'équation $y = 4x + 3$

Consigne 9 : Extremums

a, b et c sont trois nombres réels. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{cx^2+1}$

Détermine a, b et c pour que f admette un extremum en -2 et un extremum, égal à -2 en 0

A.C N° 108 : Dérivabilité en un point

Consigne 1

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f en x_0

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}, & si\ x < 1 \\ f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & si\ x < 0 \\ f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - x}, & si\ x \geq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

Consigne 2

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f en x_0

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{-m}{x-1} + \sqrt{1-x}, & si\ x < 0 \\ f(x) = (1 - mx)\cos x, & si\ x \in [0; \pi] \end{cases}$; $x_0 = 0$

avec $m \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2+1}, & si\ x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x+1}, & si\ x \in]1; +\infty[\end{cases}$; $x_0 = 1$

A.C N° 109 : Dérivabilité sur un intervalle

Consigne 1

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis détermine sa dérivée

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - \frac{7}{x}$

2) $f(x) = (3x+4)^3(3-x)^5$

3) $f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-5}\right)^3$

4) $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Consigne 2

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis détermine sa dérivée

1) $f(x) = x^2|x|$
2) $f(x) = (x-2)\sqrt{2-x}$
3) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}$
4) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 3x - 4}$

Consigne 3

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f en x_o puis sur son ensemble de définition et détermine sa dérivée

1) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = \sqrt{1+x} & si\ x > -1 \end{cases}$; $x_o = -1$

2) $g(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{3-x} & si\ x \leq 1 \\ 2x - 1 + \frac{3}{x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$; $x_o = 1$

Consigne 4

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f en x_o puis sur son ensemble de définition et détermine sa dérivée

1) $\begin{cases} h(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & si\ x \leq 1 \\ h(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$; $x_o = 1$

2) $\begin{cases} u(x) = x + 1 + \sqrt{|x^2 + 2x|} & si\ x < 0 \\ u(x) = \frac{1-x}{x^3+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$;

$$x_o = 0 \ et\ x_o = -2$$

A.C | N° 110 : Dérivée successive – Développement limité

Consigne 1 : **Dérivée successive**

1) Détermine les dérivées successives de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$
2) Détermine les dérivées d'ordres 1 ; 2 et 3 des fonctions suivantes :
   a) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 1$
   b) $g(x) = \sin 2x \cos 2x$

Consigne 2 : **Développement limité**

1) Ecris un développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes:
   a) $u(x) = \sin x$
   b) $v(x) = \cos x$
2) Déduis-en : $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{-1 + \frac{x^2}{2} + \cos x}{x^4}$

Consigne 3 : **Développement limité**

1) a) Ecris un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $u : x \longmapsto \sqrt{1+x}$
   b) Déduis-en le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $v : x \longmapsto \sqrt{1-x}$
2) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$

A.C | N° 111 : Point d'inflexion

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un cours d'eau a l'allure de la courbe (C) de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$

1) Démontre que le point A d'abscisse 1 de (C) est un point d'inflexion de (C).
2) Démontre que la courbe de la fonction $g : x \longmapsto \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$ admet trois points d'inflexion

A.C | N° 112 : Parité

Étudie la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = x(x^2 - 1)$; $b)\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

$c)\ f(x) = \frac{1+x^4}{4-x^2}$

A.C | N° 113: Axe de symétrie- Centre de symétrie

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) et (C) est la représentation graphique de la fonction f.

1) Démontre, dans chaque cas, que la droite (Δ) est un axe de symétrie de (C).
   $a)\ f(x) = x^2 - 4x - 1$; $(\Delta) : x = 2$
   $b)\ f(x) = \left|\frac{2}{x+1}\right|$; $(\mathcal{D}) : x = -1$
2) Démontre, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie de (C).
   $a)\ f(x) = \frac{3x}{x+1}$; $\Omega(-1 ; 3)$
   $b)\ f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; $\Omega(-2 ; -4)$

A.C N° 114: Extremum

consigne 1

Un routier doit faire un trajet de 150 km. Si sa vitesse moyenne est x kilomètres par heure, alors sa consommation en gas-oil est $6 + \frac{x^2}{100}$ litres par heure.

Le prix du gas-oil est de 400 francs CFA le litre, et le chauffeur est payé 1200 francs CFA de l'heure.

1. a) Exprime, en fonction de x, le salaire du chauffeur et le coût du gas-oil.

b) Déduis-en que le coût du trajet, exprimé en francs CFA, est donné par : $f(x) = 600x + \frac{540\,000}{x}$

2. a) Étudie les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

b) Détermine la vitesse moyenne v pour laquelle le coût du trajet est minimal et calcule ce coût.

consigne 2

le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé où l'unité de longueur est 4cm.

a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1.

b) Déduis-en les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses 1 et -1.

c) Justifie que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calcule $f'(x)$.

d) Etudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f.

e) Calcule f(0) puis précise la valeur maximale de f

A.C N° 115: Accroissements finis

Consigne 1 :

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1) Justifie que pour tout nombre réel x, $0 \le f'(x) \le 1$

2) Déduis-en que pour tout $x \ge 0$, $0 \le f(x) \le x$

Consigne 2 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1) Justifie que pour tout x élément de $[2;3]$, $\frac{1}{4} \le f'(x) \le 1$

2) Déduis-en un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines g et h sur $[2;3]$

Consigne 3 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

1) a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;2[$

b) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ a même ensemble solutions que l'équation $f(x) = x$

2) a) Démontre que $\forall\, x \in [1;+\infty[$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$

b) Déduis-en que $\forall\, x \in [1;+\infty[$, $|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Consigne 4 :

Soit la fonction numérique f de la variation réelle x définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

1) Etudie les variations de f

2) Démontre que : $\forall\, x \in [1;2], 1 \le f(x) \le 2$

3) a) Etudie le sens de variation de f'

b) Déduis-en que si $x \in [1;2]$, alors $|f'(x)| \le \frac{2}{3}$

4) Prouve que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique ℓ dans l'intervalle $[1;2]$

5) Démontre que pour tout nombre réel x de $[1;2]$, on a : $|f(x) - \ell| \le \frac{2}{3}|x - \ell|$.

A.C N° 116 : Signe d'une fonction

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2-1}, & si\ x > 1 \\ f(x) = x^3 + 3x - 2, & si\ x \le 1 \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$

3)

a- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans]-1 ;1[

b- Vérifie que $0{,}5 < \alpha < 0{,}75$

c- Détermine le signe de $f(x)$ sur]-1 ;1[.

A.C N° 117 : Asymptote oblique

Consigne 1 :

Détermine une équation de l'asymptote oblique à la courbe de la fonction f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$

2) $f(x) = -\frac{1}{3}[4(x+1) + 5\sqrt{x^2+2x-2}]$

3) $f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{|x^2-4x+12|}$

Consigne 2 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2+2x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} & si\ x < 0 \end{cases}$$

(C_f) désigne la courbe représentative de f

1) Justifie que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2)

a- Démontre que la droite (D): $y = 2x + 1$ est une assymptote de (C_f)

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à (D)

3) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis nterprète ce résultat.

A.C N° 118 : Pour faire le point sur les éléments d'étude d'une fonction

Consigne 1 :

On considère la fonction f de représentation graphique (Cf) définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2-2x} & si\ x \in]-\infty\,;0] \cup [2\pi\,;+\infty[\\ f(x) = 2\cos\ x - \sin 2x - 2 & si\ x \in]0\,;2\pi[\end{cases}$$

1. a) Étudie la continuité de $f\ en\ x_0 = 0$ puis en $x_0 = 2\pi$

b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Étudie l'existence d'asymptote ou de branches infinies à la courbe (Cf).

2. a) Étudie la dérivabilité de $f\ en\ x_0 = 0$

b) Interprète géométriquement le résultat obtenu.

c) Calcule la fonction dérivée $f'\ de\ f$ pour tout $x \in]-\infty\,;0[\cup]2\pi\,;+\infty[$ puis détermine le signe de $f'(x)$.

d) Écris l'équation des demi-tangentes à la courbe (Cf) au point d'abscisse $x_0 = 2\pi$

Consigne 2 :

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2cm).

1- a) Démontre que la droite (D) d'équation $2y - x + 2 = 0$ est asymptote « oblique » à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Calcule : $\lim\limits_{\substack{h\to0 \\ >}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ puis interprète ce résultat en terme de dérivabilité (à droite) pour $f\ en\ x_0 = 1$.

c) Donne une interprétation graphique de ce résultat.

2- Soit la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = x^2\sqrt{x^2-1} - 2$.

a) Calcule $g(\sqrt{2})$

b) Montre que g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ puis déduis-en de ce qui précède le signe de g sur $]1; +\infty[$.

3- Justifie que f' est du signe de g sur $]1; +\infty[$. Dresse le tableau de variation complète de f sur $[1; +\infty[$

4- Représente graphiquement la courbe (C)

A.C N° 119 : Etude d'une fonction irrationnelle

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm), un motif de décoration a l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

Sabine désire représenter la courbe (C)

Partie A :

1) Etudie les limites aux bornes de la fonction $g : x \longmapsto -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

2) a) Etudie les variations de g

b) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Partie B :

3) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

4) Démontre que la courbe (C) admet deux asymptotes dont tu préciseras les équations
5) Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que tu préciseras
6) Soit (C') la courbe de f^{-1}
   a) Calcule $f^{-1}(2\sqrt{2})$ puis détermine une équation de la tangente à (C') au point de coordonnées $\left(2\sqrt{2}\,; f^{-1}(2\sqrt{2})\right)$
   b) Justifie l'existence d'un nombre réel α tel que $f(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
7) Construis (C) et (C')

A.C	N° 120 : Un canal d'évacuation d'eaux usées

Un canal d'évacuation d'eaux usées à la l'allure de la courbe représentative (C_f) de la fonction f dénifie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+1}$

1)
a- Détermine le domaine de définition E de f et calcule les limites de f aux bornes de E.
b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
c- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f)

2) Soit $I = \left[\frac{1}{4};1\right]$
a- Démontre que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$
b- Démontre qu'il existe un nombre réel $k \in]0;1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
c- Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α *dans* I.
d- Démontre que $\forall x \in I, |f(x)-\alpha| \leq k|x-\alpha|$

3) Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$
$$x \longmapsto g(x) = f(x)$$
a- Démontre g est une bijection et sa bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
b- Calcule $(g^{-1})'(\alpha)$ sans le symbole $\sqrt{\ }$

A.C	N° 121 : Dérivation de la bijection réciproque

Consigne 1 :

Soit l'application f définie de $[0;\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

1) Etudie les variations de f
2) Soit $E = f([0;\frac{\pi}{2}[\ )$ et l'application $g: [0;\frac{\pi}{2}[\to E$
$$x \mapsto f(x)$$
   a) Détermine E
   b) Démontre que g est une bijection
3) a) Détermine l'ensemble de dérivabilité I de g^{-1} la bijection réciproque de g
b) Calcule $g'(x)$ pour que x élément de E.

Consigne 2 :

On considère la fonction g définie par :
$$g: \left[-\frac{\pi}{4};0\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\sin 2x}{\sin 2x - 2}$$
1) Etudie les variations de g.
2) Démontre que g détermine une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ sur un intervalle I à préciser.
3) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g
   a- Détermine l'ensemble de dérivabilité J de g^{-1} et calcule $(g^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$
   b- Calcule $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

A.C	N° 122 : Etude d'une fonction avec paramètre

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; l'unité graphique est 2 *cm*. Soit m un paramètre réel. On considère la fonction f_m définie par :
$$f_m(x) = \begin{cases} -\frac{mx}{x-1} + \sqrt{1-x} & , si\ x \in]-\infty;0[\\ (1-mx)\cos x & , si\ x \in [0;\pi] \end{cases}$$

Partie A :

1. a- Démontre que f_m est continue sur $]-\infty;\pi]$
   b- Etudie la dérivabilité de f_m en 0.
2. Détermine la fonction dérivée f_m' de f_m sur $]-\infty;0[$ *et* $]0;\pi]$.
3. Détermine la valeur m_0 *de* m pour laquelle la courbe représentative de f_m admet en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ une tangente parallèle à la droite d'équation : $2y + (\pi+2)x - 10 = 0$.

Partie B :

On suppose dans cette partie que $m = -1$ et on note g la restriction de f_{-1} à l'intervalle $]-\infty;0[$.

4. a) Démontre que g est une bijection de $]-\infty;0[$ sur un intervalle J que tu préciseras.

Soit h l'application réciproque de g.

b) Détermine l'ensemble de dérivabilité E de h.

c) Calcule $g(-3)$ et $h'\left(\frac{11}{4}\right)$.

5. Dresse le tableau de variations de g.

6. On note par (C) la courbe représentative de g.

a) Etudie les branches infinies de (C).

b) Construis (C) puis la courbe représentative (C') de h dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

A.C N° 123 : Fonction auxiliaire

Soit la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 4x^3+x^2-4x-5$

1) a) Etudie les variations de h.

b) Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0 élément de l'intervalle $]\frac{5}{4};\frac{3}{2}[$

c) Etudie le signe de $h(x)$

2) On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$$

a) Etudie les variations de f.

b) Démontre que l'on a : $\frac{1}{4}<f(x_0)<\frac{1}{2}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Construis (C).

On pose $I=[x_0;+\infty[$ et $J=f(I)$. On considère l'application g définie de I vers J par $g(x)=f(x)$

3) a) Détermine J

b) Démontre que g est une bijection.

Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

c) Détermine l'ensemble de continuité de g^{-1} et l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}.

d) Démontre que le point $A(\frac{3}{10},2)$ appartient à (C').

e) Construis la courbe (C').

f) Ecris une équation cartésienne de la tangente à (C') au point A.

A.C N° 124 : Expression de $g^{-1}(x)$

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{|x|}}$

1) Etudie les variations de f.

2) Démontre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ vers J définie par $g(x)=f(x)$

3) Démontre que g admet une bijection réciproque g^{-1} dérivable sur J

4) Explicite $g^{-1}(x)$ pour que x élément de J.

5) On désigne par (C) la courbe représentative de g^{-1} dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Détermine une équation cartésienne de la tangente à (C) en son point d'abscisse $\frac{1}{2}$

A.C N° 125 : Fonction trigonométrique

Dans le plan muni du repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative (C) d'un signal analogique est celle de la fonction f dénifie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

1) Donne le domaine de définition de f.

2) Démontre que 2π est une période de f.

3) Démontre que le point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est le centre de symétrie de (C).

4) Déduis –en qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I=]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

5)

a- Prouve que $f'(x)=\frac{-1}{1+\sin x}$ pour tout $x\in I$

b- Dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle I

6) Trace la partie de (C) relative à l'intervalle I.

A.C N° 126 : Pour aller loin

Consigne 1 :

Etudie les variations de la fonction

$f:x\mapsto x+\sqrt{|1-x^2|}$ puis construis sa courbe

Consigne 2 :

Dans le plan muni du repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$, un canal d'évacuation d'eaux usées à la l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f dénifie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} & ; \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x} & ; \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $]1;+\infty[$ par :
$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;+\infty[$ et vérifie que $1,28 < \alpha < 1,3$

2) Détermine le signe de g sur $]1;+\infty[$

a- Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1;+\infty[$

b- Etudie la continuité de f en 1.

3)

a- Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 1 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b- Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.

4)

a- Démontre que :

✓ Pour tout x élément de $]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

✓ Pour tout x élément de $]-1;1[$, $f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b- Etudie le signe de f' sur $]-1;1[$

5) Justifie que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha} - \alpha^2$ puis donne un encadrement de $f(\alpha)$

6) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1;+\infty[$

7) Etudie les branches infinies puis trace l'allure de ce canal d'évacuation d'eaux usées

Consigne 2 :

1) Soit u l'application définie par :

$$u \quad]-\infty;0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto u(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

a) Démontre que u est une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle I à préciser.

b) Justifie que $\forall x \in I$, $u^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ où u^{-1} est la bijection réciproque de u

c) Détermine une primitive de u^{-1}

2) Soit v l'application définie par :

$$v \quad [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto v(x) = \frac{5}{4+\cos x}$$

a) Démontre que v est une bijection de $]0;\pi]$ sur un intervalle J à préciser

b) Détermine l'ensemble de dérivabilité E de la bijection réciproque v^{-1} de v

c) Calcule $(v^{-1})'(x)$ pour tout x élément de E.

Consigne 3 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$$

Soit g la fonction définie par :

$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$.

1.a) Etudie les variations de g.

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$.

c) Déduis-en le signe de $g(x)$.

2) Démonte que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$.

b) Etudie le sens de variation de g'. Que représente le point I (0 ; 1) pour la courbe (C_g) ?

c) Justifie que $\forall x \in [0,4 ; 0,5]$, $|g'(x)| \leq \frac{3}{2}$ puis que $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$.

3.a) Etudie le sens de variation de f (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $g(x)$)

b) Dresse le tableau de variation de f.

c) Etudie les branches infinies de (C_f).

4) Soit l'application de $]-\infty;0]$ dans $f(]-\infty;0])$ définie par : $h(x) = f(x)$.

a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} et précise son ensemble de définition E .

b) Etudie la dérivabilité de h^{-1} sur E puis justifie que le point A $(-\sqrt{3}-2 ; -\sqrt{3})$ est un point de $(C_{h^{-1}})$ puis détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à $(C_{h^{-1}})$ au point A.

5) Trace les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Primitives

A.C N° 127 : Notion de primitives

Consigne 1 :

Détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 3x^2 + 6x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sin x - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}; \; I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = (2x-3)^3 + \frac{1}{(2x-3)^3}; \; I = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} \; ; I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x\cos x^2; \quad I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \sin^3 x \cos x \; ; \; I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \sin^3 x \; ; \quad I = \mathbb{R}$

Consigne 2 :

Détermine les primitives sur l'intervalle I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f : x \longmapsto \frac{-3x-1}{(3x^2+2x+1)^2} \; ; \; I = \mathbb{R}$

b) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \; ; \; I = \mathbb{R}$

c) $f : x \longmapsto \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; I =]-1; 1[$

d) $f : x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x} \; ; \; I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

e) $f : x \longmapsto \cos x \cos 2x \; ; \; I = \mathbb{R}$

f) $f : x \longmapsto \frac{x+2}{(x^3+6x)^3} \; ; \; I =]-2; 0[\; ;$

g) $f : x \longmapsto \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \; ; \; I =]0; +\infty[$

Consigne 3 : Linéarisation

Détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$

2) $f(x) = \sin^2 3x \cos^2 x$

A.C N° 128 : Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Détermine la primitive de la fonction f, sur l'intervalle I, qui prend la valeur y_0 en x_0

a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \frac{1}{x^2} \end{array}$; $I =]0; +\infty[$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (4x+2)\sqrt{x^2+x+5} \; ; I = \mathbb{R} \; ;$

$x_0 = 0 \; ; \; y_0 = 1$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{-6x+3}{\sqrt{x^2-x-2}} \; ; I =]-\infty; -1[\; ;$

$x_0 = -2 \; ; \; y_0 = 0$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{\sin 10x}{\sqrt{1+\cos^2 5x}} \; ; \; I = \mathbb{R} \; ;$

$x_0 = \frac{\pi}{2} \; ; \; y_0 = -1$

A.C N° 129 : Primitive d'une fonction

Consigne 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{-2x^4+3x^3-4x^2-2}{(x^3+x)^2}$

1) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) Trouver les nombres réels a *et* b tels que : $\forall x \in D, \; f(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{x^2}$

3) Déduis -en la primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction f qui prend la valeur 1 en -2.

Consigne 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ par :

$f(x) = \frac{6x-1}{(3x+2)^3}$

1°) Détermine deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \neq -\frac{2}{3}$; $f(x) \; \frac{a}{(3x+2)^2} + \frac{b}{(3x+2)^3}$

2°) a- Déduis-en les primitives de f sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$

b- Détermine la primitive F sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$ de f qui vérifie $F(0) = -\frac{5}{4}$

Fonction logarithme népérien

A.C N° 130 : Ensemble de définition

Consigne 1 : *Ecriture simplifiée*

1) Ecris les nombres A , B et C à l'aide d'un seul logarithme :

$A = 2ln2 + ln\sqrt{2} + ln\frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{2}ln81 + \ln\frac{1}{2} - 2ln3$

$C = \ln(e^2) - lne^3 + \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) - 4\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e})$

Consigne 2 :

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$
2) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$
3) $f(x) = (1 - \ln x)^2$
4) $f(x) = x\ln\left(1 - \frac{4}{x}\right)$
5) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2)}$
6) $f(x) = \ln|-x^2 + 5x|$

Consigne 3 :

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{(\ln x)^2 - 1}$
2) $f(x) = \sqrt{\ln x}$
3) $f(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$
4) $f(x) = \frac{x+1}{\ln|x^2-1|}$
5) $f(x) = \ln(\ln|x-2|)$

Consigne 4 :

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \ln(\ln x)$
2) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}\right)$
3) $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2 + 3\ln x - 2}$
4) $f(x) = \ln(\ln|1 - 2x|)$
5) $f(x) = \frac{\ln(3x^4+1)}{1+\ln x}$

A.C N° 131 : Limites

Consigne 1

Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$
2) $f(x) = \frac{\ln(2x-5)}{2x^2-7x+3}$
3) $f(x) = \frac{-x^2-2x}{x+1} + 2\ln(x+1)$
4) $f(x) = \frac{2-\ln x}{\ln(x)-1}$

Consigne 2

Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = (2-x)^2\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
2) $f(x) = x(lnx)^2$
3) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$
4) $f(x) = xln(1 + \frac{1}{x^2})$

A.C N° 132 : Dérivée

Calcule la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -x^2 + 2 + \ln|x|$
2) $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$
3) $f(x) = x(1 - \ln x)^2$
4) $f(x) = \frac{-x^2-2x}{x+1} + 2\ln(x+1)$
5) $f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$
6) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

A.C N° 133 : Primitives

Détermine les primitives de f sur I dans chacun des cas :

1) $f(x) = x^2 - 3 + \frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$
2) $f(x) = x^2 - 3 + \frac{1}{x}$; $I =]-\infty; 0[$
3) $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x-1}$; $I =]1; +\infty[$
4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$
5) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; $I =]1; +\infty[$
6) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$; $I =]1; +\infty[$ (Tu pourras déterminer d'abord deux nombres réels a et b tels que $\forall x \in I, f(x) = a + \frac{b}{1-x}$)

A.C N° 134 : Pour bien étudier une fonction

Dans chacun des cas suivants :

a) Détermine l'ensemble de définition de f
b) Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
c) Calcule la fonction dérivée f' de f

1) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
2) $f(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$
3) $f(x) = \sqrt{(\ln x)^2 - 1}$
4) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$
5) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

A.C N° 135 : Résolution d'équations et systèmes d'équations

Consigne 1 :

A) Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

1) $\ln(x+2) = \ln(8-2x)$
2) $\ln(2x+1) + \ln(x-1) = \ln 2$
3) $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln(-2x^2 + 19x - 24)$
4) $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{4x+3}{2x+5}\right)$

B) Résous dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ \ln(x) \times \ln(y) = 2 \end{cases}$

Consigne 2 :

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1°) $\ln x + \ln(2x-1) = \ln(14 - x^2)$;
2°) $2\ln 2 + \ln(x^2 - 1) = \ln(-4x - 1)$
3°) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x+7)$;
4°) $\ln(2x+1) - \ln(x+2) = \ln(2-x)$;
5°) $\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln(2-x)$
6°) $\ln\left|\frac{2x-1}{x-3}\right| = 1$

A.C N° 136 : Résolution d'inéquations

a) Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

1) $\ln(x+2) \leq \ln(8-2x)$
2) $(\ln x)^2 - 25\ln x \geq 0$
3) $(\ln x)^2 - 3\ln x < 4$
4) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) \geq 0$

A.C N° 137 : Etude de fonctions

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un domaine de la mairie est délimité par la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

1) Détermine le domaine de définition D de f
2) Démontre que f est continue et dérivable en 1
3) Calcule les limites de f aux bornes de D et précise les branches infinies de (C)
4) Etudie les variations de f
5) Démontre que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C)
6) Trace (C)

A.C N° 138 : Détermination d'une fonction

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_f) de la fonction f définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$ passe par le point $A(0;2)$ et est telle que $f'(3) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -1$

1) En utilisant ces informations, détermine chacune des valeurs a, b et c
2) On suppose dans la suite que
$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$

Détermine la dérivée de la fonction
$g : x \longmapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ puis déduis-en les primitives F de f sur $[0;5]$.

3) Dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_g) de la fonction g définie par :
$g(x) = ax + (bx+c)\ln x$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $I(1;1)$ et passe par le point $J(2\,;\,2-3\ln 2)$
Justifie que $a = c = 1$ et $b = -2$

A.C N° 139 : Etude de fonctions

Pour décorer une maison, un artiste décorateur se sert d'une guirlande dont l'allure est celle de la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Etudie la continuité de f en 0
2) a) Démontre que $\forall\, x \in]0;1[$,
$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus

3) Etudie les variations de f
4) Trace (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan

A.C N° 140 : D'après BAC 2002

Un motif de décoration a l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1. a) Etudie les variations de la fonction
$g : x \longmapsto -x + 1 - 2\ln x$

b) Calcule $g(1)$ puis déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$ suivant les valeurs de x

1) a) Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$
b) Etudie le sens de variations de f
c) Dresse le tableau de variation de f

4) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$
a) Démontre que h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser
b) On désigne par h^{-1} sa bijection réciproque
Résous l'équation $h^{-1}(x) = e$
c) Calcule $(h^{-1})'(e^{-2} + e^{-1})$
5) Construis (C) ; et la courbe (Γ) de h^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

A.C N° 141 : Famille de fonctions

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité 2cm
On considère la fonction f_m de la variable réelle x définie par : $f_m(x) = \frac{mx}{x+1} + \ln(1+x)$ où m est un paramètre réel, (C_m) la courbe représentative de f_m.

1) Démontre que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont tu détermineras les coordonnées.
2) Etudie les variations de f_m suivants les valeurs du paramètre réel m.

A.C N° 142 : Etude de fonctions

Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), un jardin public est traversé par une route dont l'allure est assimilable à une portion de la courbe représentative (C) de la fonction f définie par $f(x) = x\ln|x-1|$

1) Etudie les variations de la fonction
$u : x \longmapsto \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$
2) Calcule $u(0)$ puis déduis le signe de u
3) Etudie les variations de f
4)a) Résous l'équation $f(x) = 0$
b) Soit A le point d'intersection de (C) et (OI) d'abscisse non nulle.

Démontre que A est un point d'inflexion de (C) et écris une équation de la tangente (T) à (C) en A

5) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontre que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K à préciser

6) Construis (C) et la courbe (Γ) de h^{-1} dans le repère (O,I,J)

A.C N° 143 : Bénéfice maximal

Une entreprise produit et vend des pièces pour hélicoptères

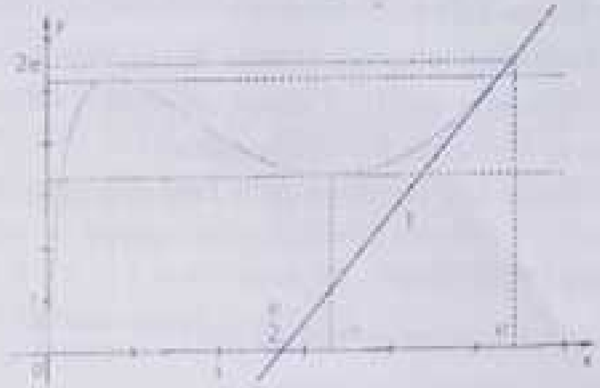
Pour des raisons de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit et le bénéfice mensuel, exprimé en millions de francs obtenu pour la vente de x centaines de pièces est donné par la fonction $f : x \longmapsto -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$

1) Etudie les variations de f
2) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice maximal ?
3) Calcule ce bénéfice arrondi au francs près

A.C N° 144 : A partir d'un graphique

La courbe (C) ci-dessous indique l'évolution de la masse corporelle (exprimée en grammes) d'un jeune goéland en fonction de son âge x, exprimé en dizaine de jours. Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), (C) est la courbe de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c]$ avec $a, b\ et\ c$ des nombres réels. (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse e. Les tangentes à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{e}$ sont horizontales



1) a) Détermine $f'(x)$ en fonction de $a, b\ et\ c$

b) A l'aide des informations précédentes et celles notées sur le graphique, détermine les valeurs de $f'(e)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f'(\sqrt{e})$

2) Justifie que $\forall x \in]0;+\infty[$,
$f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$
3) Etudie les variations de f
4) Détermine la masse corporelle minimale d'un goéland de moins de deux mois

A.C N° 145 : Sens de variation et signe

Consigne 1 :

Soit l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln x}{x} - x \end{array}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- Soit l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 - x^2 - \ln x \end{array}$

Étudie les variations de φ puis déduis-en le signe de $\varphi(x)$

2- Étudie les variations de f.
3- (D) étant la droite d'équation $y = -x$, étudie la position de (C) par rapport à (D).
4- Montre qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente à (C) est parallèle à (D).
5- Détermine les coordonnées de ce point.
6- Construis (C) et (D).

Consigne 2 :

On considère les fonctions $f\ et\ g$ définies par :

$f(x) = x\ln|x-1|\ et\ g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. a) Étudie les variations de g

b) Calcule $g(0)$ et déduis-en le signe de $g(x)$

2. a) Étudie les variations de f.

b) Étudie les branches infinies de (C)

c) Démontre que (C) admet un point d'inflexion A dont tu préciseras les coordonnées.

d) Donne une équation de la tangente (T) à (C) en A.

e) Trace (T) et (C)

3. Soit h l'application définie par : $\begin{array}{l} h :]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) = f(x) \end{array}$

   a) justifie que h est bijective

   b) Calcule $(h^{-1})'(1+e)$

   c) Trace dans le même repère que (C), la courbe (C') de h'

Consigne 3 : *Parité d'une fonction logarithme*

On donne la fonction numérique définie par : $f(x) = -2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) Détermine l'ensemble de définition D de f.
2) Prouve que f est impaire.
3) Etudie les variations de f
4) Démontre que (Δ) *d'équation* $y = -2x$ est asymptote à la courbe (C) de f.
5) Trace (Δ) *et* (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A.C	N° 146 : Pour aller loin

Consigne 1 :

Soit la fonction numérique h définie par :

$h(x) = 2\ln x + 3 + \frac{1}{x^2}$

1) Etudie les variations de h et démontre que pour tout nombre réel x strictement positif, $h(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie par :

$g(x) = 2\ln x + x - \frac{1}{x}$

a) Calcule g(1)

b) Etudie les variations de g et démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique.

c) Etudie le signe de g(x).

3) On considère la fonction numérique f définie par :

$f(x) = (x^2 - 1)\ln|x|$

a) Démontre qu'il suffit d'étudie f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ pour construis sa courbe.

b) Etudie les variations de f et construis sa courbe (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Tu prendras 2 cm comme unité graphique.

c) Détermine suivant les valeurs du paramètre réel m, et graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x^2\ln|x| + m - 1 = \ln|x|$.

4) Soit φ l'application définie de $I =]0;1]$ vers f(I) définie par $\varphi(x) = f(x)$

a) Démontre φ est une bijection.

b) Démontre que la bijection réciproque φ^{-1} de φ est dérivable sur un intervalle que l'on déterminera.

c) Construis la courbe représentative (C') de φ^{-1} dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Consigne 2 :

Après une étude d'un site d'implantation d'un centre de loisirs, le topographe en charge des travaux a spécifié que la voie principale devant relier les différents domaines du site est assimilable à une portion de la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \; si\; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Détermine l'ensemble de définition D de f
2) a) Détermine le développement limite d'ordre 3 en 0 de la fonction $u : x \longmapsto \ln(x+1)$
   b) Démontre que f est continue et dérivable en 0
3) Etudie les variations de la fonction
   $$g : x \longmapsto \frac{-x^2-2x}{x+1} + 2\ln(x+1)$$
4) calcule $g(0)$ puis déduis le signe de $g(x)$ sur son ensemble de définition
5) a) Démontre que $\forall\, x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

6) Achève l'étude des variations de f

7) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$

8) a) Démontre que $\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$ puis que $\forall x \in \left[\frac{1}{4};1\right]; |f'(x)| \leq \frac{4}{5}$

b) Déduis-en que $\forall x \in \left[\frac{1}{4};1\right],$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{4}{5}|x - \alpha|$$

Consigne 3 :

Sabine considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par:

$f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 5cm).

Elle désire étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie A : on considère la fonction g définie sur l'intervalle$]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Calcule la dérivée g' de g.

2. a) Etudie le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$ puis en 0

3)a) Dresse le tableau des variations de g.

b) déduis-en qu'il existe un unique nombre réel $\lambda > 0$ tel que $g(\lambda)=0$.

c) Vérifie que $0,5 < \lambda < 0,6$.

4) Déduis-en des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B :

1.a) calcule la limite quand x tend vers sur $+\infty$ de $xf(x)$ (*Tu pourras poser* $X = \frac{1}{x^2}$)

b) Déduis-en que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

c) Justifie que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$.

2. Etude de f en 0

a. Montre que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$

Que peux-tu en conclure ?

b) Etudie la dérivabilité de f en 0.

c) Précise la tangente à la courbe de f au point 0.

3) Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 1

4.) Dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

5) Donne l'allure de (C)

Consigne 4 : POUR ALLER TRÈS LOIN

La partie cultivable du champ de maïs de Sabine est un vaste domaine limité par la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ et l'axe des abscisses ; la largeur de cette partie du champ s'étend de $x = 1$ à $x = e^2$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A

1- a) Détermine les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$

b) Justifie que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calcule $f'(x)$.

2- Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$

a) Etudie les variations de u.

b) Démontre que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $2,20 < \alpha < 2,21$

c) Justifie que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. Déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}

3- a) Etudie les variations de f.

b) Etudie le signe de $f(x)$.

c) Trace la courbe (C).

Partie B

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4- a) Sans calculer $F(x)$, étudie le sens de variations de F sur $]0;+\infty[$.

b) Que peux-tu dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

5-

a) x étant un réel strictement positif, calcul l'intégrale $\int_1^x \ln t\,dt$ (on pourra faire une intégration par parties) .

b) Démontre que pour tout x strictement positif : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

c) Déduis-en l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

6- a) Calcule la limite de F en 0.

b) Démontre que pour tout x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$

c) Dresse le tableau de variation de F

Calcule en cm^2, l'aire de la partie cultivable du champ de maïs de la très grande Sabine ......

Fonction exponentielle népérienne

A.C N° 147 : Ensemble de définition

Consigne 1 : Ecriture simplifiée

Ecris plus simplement chacun des nombres suivants:

a) $\ln\left(\exp\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; b) $\exp(\ln(3)-1)$

c) $e^{3\ln 2}-3e^{\ln 7}$; d) $\frac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$; e) $\frac{e^{x}}{e^{x+\ln 3}}$

Consigne 2

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=(2x^2+1)e^x+e^{-2x+3}$

2) $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$; 3) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{1}{e^{2x}-4}$

4) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 5) $f(x)=\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

6) $f(x)=\exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$

Consigne 3 :

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\frac{3x}{e^x+1}$; 2) $f(x)=\frac{5}{e^{5x}-2}$; ;

3) $f(x)=\ln(e^{2x}-4)$; 4) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-2e^x}$;

5) $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-3}$; 6) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$;

A.C N° 148 : Limites

Consigne 1 :

Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 2) $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x}{e^x+1}$

3) $f(x)=\frac{e^{2x}}{1-e^{-x}}$; 4) $f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}\ln|2x-1|$

5) $f(x)=\frac{e^{x+1}-x^2-2x-2}{x+1}$

Consigne 2 :

Etudie les limites suivantes :

a) $f(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$ en $+\infty$ et -1

b) $f(x)=(2x+1)e^{x+1}+x-3$ en $-\infty$

c) $f(x)=x^3+8x+8-2\ln x$ en $+\infty$

d) $f(x)=2x-x\ln(x^2)$ en $+\infty$

e) $f(x)=x^2e^{-x}$ en $+\infty$

Consigne 3 :

1) Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3+3x-1}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x+1}{3x-2}}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} e^{\frac{2x+1}{3x-2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$

2)a) Démontre que : pour tout réel $x\neq0$,

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

b) calcule les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1}$

A.C N° 149 : Equations et Inéquations

Consigne 1 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(E_1) : $e^{2x}-4=0$

(E_2) : $e^{2x+1}=e^{2x+1}$

(E_3): $e^{-2+3x}-e^{x^2}=0$

(E_4): $e^{2x}=5e^x-6$

(E_5): $5e^{4x}-13e^{2x}-6=0$

(I_1): $e^{2x-5}-e^{1-x}\geq0$

(I_2): $e^x-9e^{-x}\leq0$

(I_3): $e^{2x}+e^x-2<0$

Consigne 2 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(e^{2x} - 3e^{x} + 2)(e^{-x} - 2e^{x}) = 0$

2) $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^{3} = 0$;

3) $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$

A.C N° 150 : Dérivabilité

Consigne 1 :

Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriquement les résultats dans chacun des cas suivants

1) $\begin{cases} f(x) = -x + 2\ln(x+1), & si\ x \in]-1;0[\\ f(x) = x - 1 + e^{-x}, & si\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$ et $x_0 = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x\ln(-x) & , si\ x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x}, & s\ x \geq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

3) $f(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}, & si\ x \in]-\infty;1] \\ (x-1)e^{-x+1}, & si\ x \in]1;+\infty[\end{cases}$ et $x_0 = 1$

4) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{e^{x} - e^{2x}}, & x \leq 0 \\ x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & si\ x > 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

Consigne 2 :

Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriquement les résultats dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = \begin{cases} -x + e^{\frac{x}{2}} + 3, & si\ x < 0 \\ 2x^2e^{\frac{x}{2}} - 2, & , si\ x \geq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) + 1, & si\ x < 0 \\ x + 1 + xe^{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(-x)}{x-1}, & x < 0 \\ e^{-x} - x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

4) $f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{x-1} - x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{1+x^2}, & si\ x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

Consigne 3 :

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement par :

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = (1 - e^{-x})\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} g(x) = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) & si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et

$\begin{cases} h(-1) = h(1) = 0 \\ h(x) = \exp\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) & si\ x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \end{cases}$

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f
   b) Etudie la continuité et dérivabilité de f en 0
2) a) Détermine l'ensemble de définition de g
   b) Etudie la continuité de g en 0
   c) Démontre que pour $x < 0$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\ e^{\frac{1}{x}}$
   d) Etudie la dérivabilité de g en 0 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.
3) Démontre que h est dérivable à droite en -1 et à gauche en 1

A.C N° 151 : Etude de fonctions

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c$ passe par l'origine et admet une asymptote d'équation $y = 1$

1) Détermine les nombres réels a b et c sachant que $f'(\ln\frac{3}{4}) = 0$
2) Etudie les variations de f
3) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \ln(2e^{2x} - 3e^{x} + 1)$
   Etudie les variations de g
4) Etudie les branches infinies de la courbe (C_g) de la fonction g

A.C N° 152 : Primitives et fonction exponentielle népérienne

1) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = (ax + b)e^{2x}$ admette pour dérivée la fonction : $x \longmapsto -xe^{2x}$

2) Soit $f : x \longmapsto x + 3 - xe^{2x}$ et F la primitive de f qui s'annule en 0

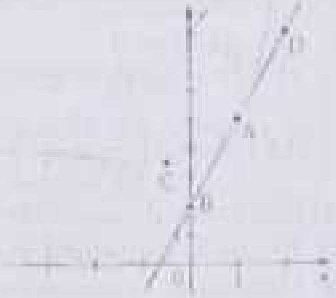
a) Calcule $F(x)$

b) Détermine les limites de F aux bornes de son ensemble de définition

A.C | N° 153 : A partir d'un graphique

Sabine considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c$ où a , b et c sont trois nombres réels que Sabine se propose de déterminer

La courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) est tracée ci-contre. Elle passe par le point $A(1;5)$ et la droite (D) est sa tangente en ce point



Le point $B(0;2)$ appartient à la droite (D). La courbe (C) admet également une tangente horizontale au point C d'abscisse $-\frac{1}{2}$

1) a) Précise les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$

   b) Détermine $f'(1)$

2) a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   b) Justifie que a, b et c vérifient le système (S) :
$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$$

3) Détermine l'expression de la fonction f

4) On admet dans la suite que $f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4$

   a) Etudie les variations de f

   b) Détermine le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

5) a) Démontre que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution β dans $[1;2]$ et donne un encadrement de β d'amplitude 0,1

A.C | N° 154 : Etude de fonctions

Dans le plan du sol muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un échangeur a l'allure de la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{2x} & si\ x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{1+e^{x}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) Etudie la continuité de f en 0

2) a) Détermine le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $u: x \longmapsto \ln(1-x)$

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis déduis-en le comportement graphique de (C) en 0

3) Etudie les variations de f

4) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β tel que $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$

5) Démontre que :

   a) $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

   b) $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$

A.C | N° 155 : Etude de fonctions

Dans le plan vertical muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 4 cm., l'itinéraire d'une fusée lancée par la NASA est assimilable à une portion de la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = e^{x} - \ln x - 2$

1) Étudie sur $]0;+\infty[$ les variations de la fonction $g: x \longmapsto -1 + xe^{x}$.

2) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $]0,5;0,6[$

b) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0;\alpha]$ puis $[\alpha;+\infty[$.

3) a) En remarquant que $f(x) = x(\frac{e^{x}}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x})$, calcule la limite de f en $+\infty$, précise la branche infinie de (C) en $+\infty$.

b) Calcule $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

c) En utilisant 2. b) dresse le tableau de variation de f.

4) a) Démontre que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

   b) Trace (C), tu prendras $\alpha = 0,55$

5) Démontre que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = e^{x} - x\ln x - x$ est une primitive de f

A.C N° 156 : Pour aller loin

Consigne 1

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. a) Etudie les variations de g.

   b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$

   c) Etudie suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

2. On considère la fonction f définie de ℝ vers ℝ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 2 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

   a) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f

   b) Etudie la continuité de f en 1

   c) Démontre que f est continue sur D.

3. a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et donne une interprétation géométrique des résultats obtenus

   b) Achève l'étude des variations de f.

   c) Prouve que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ puis donne un encadrement de $f(\alpha)$

4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

   b) Etudie la position de (C) par rapport à la droite (Δ) dans $]-\infty; 1]$

   c) Précise la branche infinie de (C) en $+\infty$

5. Trace la courbe (C)

Consigne 2

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \ln(-x) + \frac{3}{4}x^2 + x, si\ x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{\ln x}{x}}, si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et dont la courbe est (C)

Partie A :

On considère les fonctions u et v définies par :

$u(x) = x + 1 - \ln(-x)$ et $v(x) = -x + 1 - \ln x$

1) a) Détermine l'ensemble de définition E de u.

   b) Calcule $u'(x)$ pour $x \in E$.

   c) Étudie le signe de $u'(x)$

2) a) Achève l'étude des variations de u.

   b) Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

3) a) Calcule $v'(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$

   b) Déduis-en le sens de variation de v

   c) Calcule $v(1)$ et déduis-en le signe de $v(x)$.

Partie B :

4) a) Étudie la continuité de f en 0

   b) Étudie la dérivabilité de f en 0

   c) Interprète géométriquement les résultats de l'étude de la dérivabilité. (Tu préciseras les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en $x = 0$).

   d) Que représente l'origine O du repère pour la courbe (C) ?

5) a) Précise le domaine de dérivabilité de f et calcule $f'(x)$.

   b) Utilise les résultats des questions 2.b) et 3.c) pour étudier le signe de $f'(x)$

   c) Achève l'étude des variations de f

6) a) Étudie les branches infinies de la courbe (C)

   b) Démontre que le point I de (C) d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C).

   c) Construis (C)

Consigne 3

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x}, si\ x > 0 \\ f(0 = 0 \end{cases}$$

et on désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni à un repère orthogonal (O, I, J) unité : OI=2cm et OJ=4cm

1) Soient u et v deux fonctions définies par :

   $u(x) = e^x - x - 1$ et $v(x) = -x + 1 + \ln x$

   a- Etudie les variations de u et v.

   b- Déduis-en que $\forall x \in]0; +\infty[$,

   $e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$ puis

   $e^x - \ln x \geq 2$

2)

a- Démontre que le domaine D de f est
$D = [0; +\infty[$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3) Détermine la limite de f en $+\infty$ plus interprète graphiquement le résultat.

4) On désigne par g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$

a- Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau.

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1{,}23 \leq \alpha \leq 1{,}24$

c- Etudie le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5) Etudie les variations de f

6)

a- Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha}-1}$

b- Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ puis déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,01 près.

c- Construis dans le carré de coté 10, la courbe (Γ)

Consigne 4 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Sabine utilise comme motif pour broder ses robes la courbe (C) de la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\ln|2x - 1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1.a) Détermine l'ensemble de définition D de f.

b) Calcule les limites de f aux bornes de D.

2.a) Détermine la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de f.

b) Etudie le sens de variation de f'.

c) Etudie le signe de $f'(x)$ pour tout élément de D. (On remarquera que $f'(0) = 0$)

3.a) Dresse le tableau de variation de f

b) Etudie le branches infinies de (c).

4.a) Démontre que la courbe (C) coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point d'abscisses a tel que $1 < a < \frac{3}{2}$

b) Construis la courbe (C).

Consigne 5 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A

Soit f, la fonction définie sur IR par :
$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$

1. Démontre que, pour tout $x \in \mathrm{IR}$: $f(x) > 0$

2. Démontre que, pour tout x de IR :
$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

b) Déduis-en que, pour x de IR : $2 + \cos x + \sin x > 0$

c) Justifie que f est strictement décroissante sur IR

3.a) Justifie que, pour tout x de IR :
$$e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$$

b) Déduis-en les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

c) Interprète géométriquement les résultats obtenus lors du calcul de la limite de f en $+\infty$

4.a) Démontre que sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Consigne 6 :

A.C	N° 157 : **Pour aller loin**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A :

On considère les fonctions u et v définies par :
$u(x) = x + 1 - \ln(-x)$ et $v(x) = -x + 1 - \ln x$

1. a) Détermine l'ensemble de définition E de u.

b) Calcule $u'(x)$ pour $x \in E$.

c) Étudie le signe de $u'(x)$

2. a) Achève l'étude des variations de u.

b) Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

3. a) Calcule $v'(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$

b) Déduis-en le sens de variation de v

c) Calcule v(1) et déduis-en le signe de $v(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2\ln(-x) + \frac{3}{4}x^2 + x, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{\ln x}{x}}, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan.

4. a) Étudie la continuité de f en 0

b) Étudie la dérivabilité de f en 0

c) Interprète géométriquement les résultats de l'étude de la dérivabilité (Tu préciseras les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en $x = 0$).

d) Que représente l'origine O du repère pour la courbe (C) ?

5. a) Précise le domaine de dérivabilité de f et calcule $f'(x)$.

b) Utilise les résultats des questions 2.b) et 3.c) pour étudier le signe de $f'(x)$

c) Achève l'étude des variations de f

6. a) Étudie les branches infinies de la courbe (C)

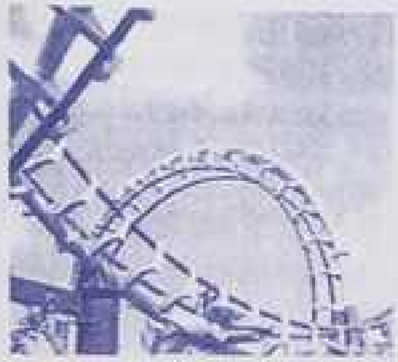
b) Démontre que le point I de (C) d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C).

c) Construis (C)

A.C	N° 158 : Pour aller très loin

Consigne 1 :

Le directeur d'un parc de loisirs désire créer un logo pour son site web symbolisant une rampe de lancement. Pour cela, il prévoit construire dans un repère orthonormé



(O, I, J) d'unité graphique 2cm la courbe représentative (C) de la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = 1 - \ln(x^2+1) & si\ x \leq 0 \\ f(x) = -x^2 + e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Etudie la dérivabilité de f en 0

2) a) Démontre que la courbe (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b) Achève l'étude des branches infinies de (C)

3) Complète l'étude de f puis construis (C) et (Γ)

4) Déduis-en de cette étude que (C) coupe l'axe (OI) en deux points dont l'un a une abscisse négative que tu calculeras

Consigne 2 :

Partie A

Soit la fonction f la fonction dérivable sur ℝ par

$$f(x) = (2-x)e^x - k \text{ où } k$$

et un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$

2) Calcule $f'(x)$, déduis-en le tableau de variation de f

3) a- Etablie que l'équation $f(x) = 0$ deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty; 1]$ et l'autre notée $\beta_k \in]1; +\infty[$

b- Prouver que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$. On admettra que β_k vérifie la même relation c'est-à-dire $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.

4) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

5) Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur ℝ par $u(x) = e^x - kx$.

a- Etudie le sens de variation de u

b- On rappelle que $0 < k < e$. Justifie que la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x - kx > 0$$

6) Soit g_k la fonction définie sur ℝ par : $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$; (C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a- Calcul $\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x)$ et

b- Prouver que $g_k'(x) = \frac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}$

c- Déduis-en le tableau de variation de g_k. Calcule $g_k(1)$

7) On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisse respectives α_k et β_k.

a- En utilisant la question 3) b- de la partie A, Démontre que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$

b- Trouve une expression analogue pour $g_k(\beta_k)$

c- Déduis-en de la question précédente que, lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont tu donneras une équation.

8) a- Détermine la position relative des courbes (C_1) et (C_2)

b- prouve que $\alpha_2 = 0$

c- En prenant comme unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées, construis les courbes (C_1), (C_2) et (H) sur le même graphique.

(tu prendras $\alpha_1 = 1,1$ $\beta_1 = 1,8$ et $\beta_2 = 1,6$)

Fonction exponentielle – Fonctions puissances

A.C N° 159 : Résolution d'équations et d'inéquations

Consigne 1:

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

a) $3^{2x-1} = 27$; b) $5^{x^2-1} = 125$

c) $7^{2x} - 5 \times 7^x + 6 = 0$; d) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

Consigne 2:

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

1) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$;
2) $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1})$
3) $4^{2\ln x - 1} - 5 \times 4^{\ln x} + 16 = 0$
4) $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$

Consigne 3 :

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes

a) $3^{2x-1} \geq 27$; b) $(0,5)^x > 8$

c) $2^x < 2^{-x}$; d) $9^x - 3^{x+1} - 10 > 0$

A.C N° 160 : Ensemble de définition et Limites

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et calcule ses limites aux bornes de cet ensemble

1) $f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{3}} \ln x$
2) $g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$
3) $h(x) = 3^{\left|\frac{x-3}{x+1}\right|}$
4) $\begin{cases} k(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} & si\ x \neq 0 \\ k(0) = 0 \end{cases}$

A.C N° 161 : Dérivées

Dans chacun des cas suivants, détermine la dérivée de la fonction f définie ci-dessous

1) $f(x) = 3^x \ln x$
2) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$
3) $f(x) = \frac{x^{-\ln x}}{x^{1+x}}$
4) $f(x) = x(1+x^2)^{\sqrt{2}}$

A.C N° 162 : Parité

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x}-1}$

1) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}^*$
2) Démontre que f est impaire
3) a) Etudie les variations de f sur $]0;+\infty[$
   b) Déduis-en les variations de f sur $]-\infty;0[$

4) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$
   b) Déduis-en les solutions de l'équation $f(x) = -\frac{2}{3}$

A.C N° 163 : Etude d'une fonction

Etudie la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x3^{-x}$$

A.C N° 164 : Pour aller loin

Consigne 1:

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), Sabine désire tracer la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$

1) Etudie les variations de f.
2) Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle E que tu préciseras.
3) Démontre que O est un point d'inflexion de (C).
4) Construis (C).

Consigne 2:

On considère les fonctions f_m définie comme suit :

$$\begin{cases} f_m(x) = \dfrac{-mx}{x-1} + \ln(-x+1) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f_m(x) = (1 - mx\ln 2)2^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f_m
2) Justifie que f_m est continue en 0.
3) Etudie, suivant les valeurs de m la dérivabilité de f_m en 0.
4) Calcule $f'_m(x)$ pour tout réel non nul x.
5) Etudie les variations de f_1

Consigne 3:

Soit f la fonction définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f
2) Etudie la continuité de f en 0.
3) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète géométriquement le résultat
4) Etudie les variations de f.

Consigne 4:

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \text{ et}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

1) Etudie les variations de g
2) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
b) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
3) a) Etudie la continuité de f en 1
b) Démontre que :
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$
c) Etudie la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats
4) Etudie les variations de f
5) Démontre que $f(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$

CALCUL INTEGRAL

A.C N° 165 : Calculs d'intégrales

Consigne 1 : Utilisation des primitives usuelles

Calcule les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 7\cos 3t\, dt$ 2) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 5t\, dt$

3) $\int_0^y (x + 4 - 2e^x)dx$, où y désigne un nombre réel donné.

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$; 5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2 x\, dx$

6) $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\, dx$; 7) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{4x^2-1}{8x^2} dx$

8) $\int_1^2 \frac{x^3+3x-1}{x^2} dx$

Consigne 2 : Reconnaître la dérivée d'une fonction

Calcule les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 \frac{4x}{(2x^2+1)^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x \cos x\, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

d) $\int_0^1 x\, e^{x^2} dx$

e) $\int_0^\lambda \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ où $\lambda \in]0; +\infty[$

f) $\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$

g) $\int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+1} dx$

h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$

i) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx$

Consigne 3 : Simples transformations

Calcule les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 (2t^5 - 8t^3 + \frac{1}{2} - 1)dt$

b) $\int_2^1 \frac{2t^3+3t-1}{t^3}\,dt$; c) $\int_2^0 (1 - |x-1|)dx$

d) $\int_0^1 t^2\sqrt{t^3+1}\,dt$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$

f) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{1-\cos t}\,dt$

Consigne 4: Autres transformations

Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_3^0 \frac{x^2-5}{x-1}\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$ c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

d) $\int_1^2 \frac{1}{e^x-2}\,dx$ e) $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$

f) $\int_0^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

Consigne 5: Intégrales de fonctions trigonométriques

Calcule les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$;

$K = \int_0^{\pi} \sin^2 x \ \cos^3 x dx$; $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$;

$M = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \ \cos 3x dx$

Consigne 6: Intégrales et propriétés

On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$ et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

a) Calcule $I + J$ et $J - I$

b) Déduis-en les valeurs de I et J.

Consigne 7: Intégrales et propriétés

Sabine se propose de calculer les intégrales :

$I = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

1) Calcule $I + J$

2) Justifie que $I - J = \int_0^{\pi} \cos\ 2x\,dx$ et détermine la valeur $I - J$

3) Déduis les valeurs de I et J

Consigne 8:

Le gain maximal d'un jeux en milliers de francs est $V = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et $J = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$.

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

a- Calcule $g'(x)$

b- Calcule I.

2. a- Vérifie que $2I + J = V$

b- Démontre que $J = \sqrt{2} - V$

c- Déduis la valeur de V.

Consigne 9: Transformer une expression pour calculer des intégrales

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

a) Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$,

$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

b) Calcule $\int_2^3 f(x)dx$

Consigne 10 : Transformer une expression pour calculer des intégrales

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par $g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$

a) Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$g(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}$$

b) Détermine $\int_{-1}^0 g(x)dx$

Consigne 11 : Transformer une expression pour calculer des intégrales

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{e^x-2}{e^x-1}$

a) Détermine deux réels a et b tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = a + \frac{b}{e^x-1}$$

b) Détermine deux nombres réels a' et b' tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = a' + \frac{b'e^x}{e^x-1}$$

c) Calcule $\int_1^2 h(x)dx$

Consigne 12 :

Sabine désire calculer les intégrales suivantes :

I= $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; J= $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$

K= $\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$.

1) calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0, 1] par

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calcule la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$

b) Déduis-en la dérivée f' de f

c) calcule la valeur de I.

2) Calcul de J et de K

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : J + 2I = K.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , justifie que :K= $\sqrt{3} - J$

c) Déduis-en les valeurs de J et de K

A.C | N° 166 : Intégrales et Parité

Consigne 1 : Intégrale de fonction périodique

Soit la fonction f définie sur IR par :

f(x) = $\sin\frac{3}{2}x + \cos x$ et l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{5\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} f(x)dx$$

1) Démontre que f est périodique de période T à déterminer

2) Prouve que I = $\int_0^{4\pi} f(x)dx = 0$

Consigne 2 : Intégrale de fonction paire et impaire

1) Donne la valeur de chacune des intégrales sans les calculer.

$I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; J = $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^4} dx$;

K = $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx$ et L = $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^5 dx}{1+\cos^2 x} dx$

2) A et B sont des nombres réels

Exprime A en fonction de B dans chacun des cas suivants :

a) A = $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; B) = $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

b) A= $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx$; B) = $\int_0^{\pi} \cos^3 x dx$

c) A= $\int_{-2}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} dx$; B) = $\int_0^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} dx$

A.C | N° 167 : Intégration par parties

Consigne 1 :

Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties

I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$; J = $\int_e^1 \ln x\, dx$

K = $\int_0^1 (2x-1)e^x\, dx$

L = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 3x\, dx$; M = $\int_e^1 (x+2)\ln x\, dx$

Consigne 2 : Double intégration par parties

Calcule l'intégrale I en utilisant deux fois la propriété de l'intégration par parties :

1) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin dx$

2) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

3) I = $\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$

Consigne 3 : Intégrations par parties successives

A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 (x+1)^2 e^x dx$

2) $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$

Consigne 4 : Intégrations par parties

On se propose de calculer les intégrales :
$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx$

1. Calcule I + J
2. Justifie que $I - J = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$ et déduis-en à l'aide de deux intégrations par partie la valeur de I – J
3. Déduis-en les valeurs de I et J

Consigne 5 : Intégrations par parties

1. Détermine les nombres réels a et b, tels que pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, on a :
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
2. Calcule $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$
3. En utilisant une intégration par parties calcule $J = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} \, dx$

A.C N° 168 : Valeur moyenne d'une fonction

Consigne 1 :

Soit la fonction $f(x) = e^{-x} \sin x$

1. Exprime $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
2. Étudie les variations de f sur $[0; 2\pi]$
3. Détermine la valeur moyenne de la fonction l sur $[0; 2\pi]$

Consigne 2 :

1) Détermine la valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 3$ sur $[0; 1]$
2) g est une fonction numérique de la variable réelle x. Détermine la valeur moyenne de g sur l'intervalle indiqué.

$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $I = [0; 2]$

A.C N° 169 : Calculs d'aires

Consigne 1 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Étudie la fonction f et construire (C).
b) Détermine l'aire du domaine plan D_1 limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 1,5$
c) Détermine l'aire du domaine plan D_2 limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$
d) Déduis-en l'aire du domaine plan D limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1,5$

Consigne 2 :

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Soit (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)

a) Étudie les variations de la fonction g.
b) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{3}{2}$ est asymptote à (Γ) puis trace (Δ) et (Γ)
c) Calcule, en centimètres carrés, l'aire du domaine plan limité par (Γ), (Δ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$

Consigne 3 :

Soit la fonction f définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Etudie les variations de f et construis sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

2) a-) Démontre que la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f.

b) Calcule en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = -e$.

c) Déduis-en un encadrement de l'aire A du domaine limité par (C), la droite $(\Delta): y = x - 2$ et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 4$

Consigne 5 :

Soit la fonction f : ℝ ⟼ ℝ

$x \longmapsto \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité graphique :2cm

1) Etudie et représenter graphiquement f

Soit (C) la courbe représentative de f

2) Détermine l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = \ln 2$

Consigne 4 : *Méthode des rectangles*

On considère les fonctions g *et* f définies par :

$g(x) = x(\ln x)^2 - e$

$$et \begin{cases} f(x) = xe^x - 2, & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x - 2 + \frac{e}{\ln x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

Partie A

1. Étudie les variations de g
2. Calcule $g(e)$ et déduis-en le signe de $g(x)$

Partie B

3. a) Détermine l'ensemble de définition D de f.

b) Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.

c) Étudie les limites de f aux bornes de D.

d) Étudie le sens de variation de f. (tu exprimeras $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ lorsque $x > 0$)

e) Dresse le tableau de variation de f

f) Étudie les branches infinies de la courbe représentative (C) de f.

g) Construis la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ unité 1 cm.

4. Soit l'intégrale $I = \int_3^4 \frac{e}{\ln x} dx$

a) Donne une interprétation géométrique de I.

b) Donne par la méthode des rectangles, un encadrement de I par deux décimaux d'ordre 3 (tu partages l'intervalles en de même amplitude)

A.C	N° 170 : **Calcul approché d'une intégrale**

Consigne 1 :

En utilisant la méthode des rectangles et partageant l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ en 15 intervalles de même amplitude, détermine une valeur approchée de $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx$

Consigne 2 :

1. En utilisant la méthode des rectangles et partageant l'intervalle $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ en 10 intervalles de même amplitude, détermine un encadrement de $A = \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{3}{5}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$
2. Détermine le nombre d'intervalles nécessaires pour obtenir par cette méthode un encadrement d'amplitude inférieure à 2×10^{-3}

A.C N° 171 : Fonction réciproque et calcul d'aire

Consigne 1 :

On donne l'intégrale suivante : $I = \int_a^b h(x)dx$ où $a = -\ln(1+\sqrt{3})$; $b = -\ln(\sqrt{3}-1)$ *et h* la fonction définie par : $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-2e^{2x}}}$

1) Justifie l'existence de I.
2) Soit l'application f définie de $K = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right[$ dans $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\ln 2\right]$ par $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$
   a- Calcule $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
   b- Justifie que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
   c- Démontre que f est bijective.
   d- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de f^{-1} (f^{-1} la réciproque de f)
3) Justifie que $\forall x \in E, (f^{-1})'(x) = -h(x)$.
4) Calcule alors l'intégrale I.

Consigne 2 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 1$

1) Étudie les variations de f et trace sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3cm)
2) Démontre que la restriction g de f à $]0; 1]$ est une bijection de $]0; 1]$ sur $\mathbb{R}_+$
3) Soit $\alpha \in]0; 1]$
   a) Calcule à l'aide d'une intégration par parties, $\int_\alpha^1 \ln x\, dx$ puis déduis-en $\int_\alpha^1 f(x)dx$
   b) Calcule l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :
   $$\frac{1}{e} \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le f(x)$$
   c) Déduis-en l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient : $0 \le x \le e-2$ et $\frac{1}{e} \le y \le g^{-1}(x)$

Consigne 3 : POUR TOUT REVISER

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x^2} & si\ x \le 0 \\ -x + x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$$
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1,5cm$.

1- a) Etudie la continuité de f en 0
   b) Etudie la dérivabilité f en 0.
   c) Donne une interprétation géométrique des résultats obtenus
2- Etudie les variations de f
3- a) Etudie les branches infinies
   b) Construis la courbe (C) de f
4) Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ *et* $x = e$

A.C N° 172 : Calcul de volumes

Consigne 1 :

Soit la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = 2\cos^2 x + 1$

1) Etudie les variations de g sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. Trace sa courbe représentative (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
2) On désigne par D le domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \pi$
   a) Calcule l'aire du domaine D
   b) Calcule le volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses

Consigne 2 :

1) Trace dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique 4cm) la courbe (C) d'équation $y = \sin 2x, x \in [0; \pi]$
2) Démontre que l'on a $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin^4 x = \frac{3}{8} - + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$
3) Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O; \vec{i})$ du domaine plan défini par : $\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin^2 x \end{cases}$

A.C | N° 173 : Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction numérique F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1°)a) Démontre que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et précise $F'(x)$

c) Déduis-en le sens de variation de F

2°) a) Prouve que pour $t \geq 1$ on a :
$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$

Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I(x)$ et $J(x)$

On pourra écrire pour $t > 0, \frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$ avec a et b des nombres réels à préciser.

c) Déduis-en de ce qui précède que pour tout $x > 1$,

On a : $\ln 2 + \ln\frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \leq 1$

d) Des inégalités précédentes et de 1)b), prouve que F admet une limite finie L en $+\infty$ et prouve que $\ln 2 \leq L \leq 1$

3°) Soit G la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$

a) Calcule $G'(x)$ pour $x > 0$

b) Vérifie que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$

c) Déduis-en de ce qui précède la limite de F en 0.

4°) Dresse le tableau de variation de F et déduis-en le signe de F(x) suivant les valeurs de x.

A.C | N° 174 : Pour aller loin

Consigne 1 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-e^{2x}}, si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right), x > 0 \end{cases}$ On désigne par D son ensemble de définition et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.(Unité graphique 2cm.)

1)

a- Démontre que $D = \mathbb{R}$

b- Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c- Démontre que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

2)

a- Démontre que f est continue sur $\mathbb{R}$

b- Etudie la dérivabilité de f en 0. Déduis –en que la courbe (C) admet à l'origine du repère une tangente dont tu donneras une équation.

3) Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$.

4)

a- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$

b- Détermine le sens de variation de f'. Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

5)

a- Dresse le tableau des variations de f.

b- Déduis-en sur $]0;+\infty[$, la position relative de (C) et de la droite (Δ)d'équation: $y = 2$.

6) Construis (C).

7) Soit α un nombre réel tel que :$0 < \alpha < 1$. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations
$y = 2; x = \alpha$ et $x = \frac{1}{e}$

a- Calcule $A(\alpha)$

b- Calcule $\lim\limits_{x\to0^+} A(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peux-tu donner du résultat.

Consigne 2 : Pour aller loin

Soit $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

1) Justifie que f est définie et croissante sur IR

2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Justifie que (C) passe par l'origine du repère puis donne l'équation de la tangente à (C) en O.

3) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on pose
$g(x) = f(\tan x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt$

a) Démontre que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et détermine $g'(x)$.

b) Déduis-en une expression simple de g(x) en fonction de x

4) Détermine $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$

5) Pour tout $x \neq 0$ on pose

$$h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

a) Justifie que h est constante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ puis détermine cette constante sur chacun de ces intervalles

6) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

7 Démontre que f est une fonction impaire et trace la courbe (C)

Consigne 3 : Pour aller loin

Le plan est muni d'un repère orthonormé (Unité graphique = 1 cm)

On considère la fonction h définie par $\begin{cases} h(x) = \exp_2\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + 1 \ si\ x < 0 \\ h(x) = \ln(x+e) \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative

1) a) Justifie que l'ensemble de définition de la fonction h est IR

b) Calcule les limites de h en $-\infty$ *et* à $+\infty$

2.a) Etudie la continuité de h en 0

b) Démontre que :

i) $\forall x \in]-\infty, 0[$, $\frac{h(x)-1}{x} = \left(\frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}}\right) - 1$

ii) $\forall x \in]0; +\infty[$, $h(x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)$

c) Etudie la dérivabilité de h en 0

c) Démontre que (C) admet au point d'abscisses 0 deux demi tangentes dont tu préciseras les équations.

3.a) Etudie les variations de la fonction h

b) Etudie les branches infinies de la courbe de h

c) Trace sa courbe

4) Calcule l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2e$

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$g(x) = \int_{-1}^{x} \left(2^{\frac{t+1}{t}} - t + 1\right) dt$$

4) a) Justifie que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calcule $g'(x)$

b) Déduis-en le sens de variation de g

5) Calcule une valeur approchée de g (-2) par la méthode des trapèzes (on subdivisera l'intervalle de même amplitude)

6) a) Justifie que la restriction F de f sur $]0, +\infty[$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur une intervalle à préciser.

b) Résous dans $]0, +\infty[$ l'équation $\ln(x + e) = 2$

c) Démontre que F^{-1} est dérivable en 2 et calcule $(F^{-1})'(2)$

Equations différentielles

A.C N° 175 : Équations différentielles du premier ordre $y' = f(x)$

Consigne 1 :

1) Résous sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle $y' = \frac{x}{x^2-1}$

2) Résous sur ℝ l'équation différentielle:

3) $y'' = e^{-3x} + 2$

Consigne 2 :

Résous sur l'intervalle I indiqué, chacune des équations différentielles suivantes :

(E_1): $y' = \sin x \cos^2 x$; I = ℝ;

(E_2): $y' = \ln x$; I = $]0; +\infty[$;

(E_3): $y'' = \sin 3x \cos 5x$; I = ℝ;

(E_4): $y' = (x+1)\ln(x-2)$; I = $]2; +\infty[$

(E_5): $y''=\sin x$; I=ℝ;

(E_6): $y' = \frac{x}{x-1}$; I = $]1; +\infty[$

A.C N° 176 : Équations différentielles du premier ordre $(y' - ay = 0)$

Consigne 1 :

On donne l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ notée (E) dans laquelle l'inconnue est une fonction numérique f définie par $f(x) = y$

a) Détermine toutes les fonctions f vérifiant (E)

b) Détermine la fonction g vérifiant (E) et qui prend la valeur e pour $x = \frac{1}{2}$

Consigne 2 :

1. Résous sur ℝ les équations différentielles suivantes

a) $y' = -y\sqrt{2}$ b) $3y' - 2y = 0$

2) Dans chacun des cas suivants, détermine la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielles vérifiant la condition donnée

a) $y' = -2y$ avec $f(3) = -2$

b) $3y' - y = 0$ avec $f(-6) = 4$

A.C	N° 177 : **Équations différentielles du type $ay' + by = f(x)$ avec a et b des constantes réelles, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**

Consigne 1 :

Soit l'équation différentielles sur $\mathbb{R}$:

(E): $3y' + 4y = x^2 - x$

1) Détermine la fonction polynôme du second degré g solution de (E).

2) Démontre qu'une f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E'): $3y' + 4y = 0$

3) a) Résous sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E').

b) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E).

c) Détermine la solution de (E) dont la courbe intégrale dans un repère orthonormé passe par le point $A(0;-1)$.

Consigne 2 :

On considère l'équation différentielle :

$y' + y = e^{-x}$ (1), où y est une fonction numérique de la variable réelle x.

a) En posant $y = ze^{-x}$, détermine l'équation différentielle (2) vérifiée par la nouvelle fonction inconnue z de la variable réelle x

b) Détermine les solutions de l'équation différentielle (2) et déduis-en toutes les solutions de l'équation différentielle (1).

c) On désigne par f la solution de l'équation différentielle (1) qui s'annule pour $x = 0$

Étudie la fonction f et tracer sa représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Consigne 3 :

Soit l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

$2y' - 3y = \cos 2x$

1) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ soit solution de (E).

2) On pose $f = h + g$.

Démontre que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ (E'): $2y' - 3y = 0$

3) a) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E')

b) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E).

A.C	N° 178 : **Équations différentielles du type $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b, c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$**

Consigne 1 :

1. Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

a) $2y'' - 5y' + 3y = 0$; b) $y'' - 9y = 0$

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$; d) $y'' + 4y = 0$

2. Détermine la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales données

(E): $y'' + 9y = 0$; $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$

Consigne 2 :

Résous et discute suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation différentielle $y'' + my' + y = 0$.

Consigne 3 :

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): y'' - 3y + 2y = x^2 - 1$$

1) Détermine les nombres réels a, b, c pour que la fonction numérique g définie par

$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2) Démontre que la fonction f est solution de l'équation (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E_2).

3) Résous l'équation différentielle (E_2) puis déduis les solutions de l'équation (E_1).

4) Détermine la solution de l'équation (E_1) telle que la représentation graphique dans le plan rapporté à un repère, passe par le point $A(1,0)$ et admet en ce point l'axe des abscisses comme tangente.

Consigne 4 : Avec une intégrale

Soit $f: x \longmapsto f(x) = 1 - x^2e^{-x}$

1) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 2f'(x) + f(x) = ae^{-x} + b$ où a et b sont deux réels à préciser.

2) Déduis-en le calcul de $K = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Consigne 5 : Pour approfondir

Sabine se propose de détermine toutes les fonctions définies et deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$, solution de $(E): y'' + 3y' + 2y = (\frac{x-1}{x^2})e^{-x}$

1) Vérifie que la fonction $f: x \mapsto e^{-x}\ln x$ est solution de (E)

2) Résous l'équation différentielle $(E'): y'' + 3y' + 2y = 0$.

3) Soit q une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontre que q est une solution de (E) si et seulement si $(q - f)$est solution de (E').

4) Déduis-en toutes les solutions de (E).

A.C N° 179 : Pour aller loin

Sabine considère l'équation différentielle suivante : $(E_1): y' + y = 2(x+2)e^{-x}$

a- Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction p définie par $p(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$

b- Soit solution de l'équation (E_1)

c- Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si $(g - p)$ est solution de l'équation différentielle $(E_2): y' + y = 0$

d- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) puis déduis-en la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1)

1) Détermine la fonction f solution de (E_1) dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $A(0;4)$

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = (x+2)e^{-x}, & si\ x \geq 0 \\ h(x) = x\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4, & si\ x < 0 \end{cases}$ et on désigne par (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction h

a- Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0[$

b- Etudie le sens de variation de h' sur $]-\infty;0[$

c- Dresse le tableau de variation de h' sur $]-\infty;0[$

d- Déduis-en le signe de $h'(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0[$

3)

a- Dresse le tableau de variation de h.

b- Construis la courbe (C).

4)

a- Démontre que pour tout x élément de $[0;+\infty[$, $h(x) = (2x+4)e^{-x} - h'(x)$

b- A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $\int_0^3 (2x+4)e^{-x}dx$.

5) Déduis en unité d'aire, l'aire du plan délimité par la courbe représentative (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

A.C N° 180 : Pour aller loin

Consigne 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(1): y' - 2y = xe^{\frac{x}{2}}$

1. Résous l'équation différentielle $(2): y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels, u la fonction définie par $u(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{2}}$

   Détermine a et b pour que u soit une solution de (1)
3. a) Prouve que v est solution de (1) si et seulement si v −u est solution de (2).

   b) Déduis les solutions de (1)

   c) Détermine la solution de (1) qui s'annule en 0.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{\frac{x}{2}}, si\ x \leq 0 \\ x\ln x - x + 1, si\ x > 0 \end{cases}$ et soit $(O, \vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (C_f) la courbe représentative de f dans ce repère.

Détermine l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ (tu pourras utiliser une intégration par partie)

Problème

Partie A

1) Résous l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 0$

2) Soient a et b deux nombres réels et soit u la fonction définie sur IR par $u(x) = ax + b)e^x$

a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (F) : $y' - 2y = xe^x$

b) Démontre que v est solution de l'équation (E) si et seulement si $u + v$ est solution de (F)

c) Déduis-en l'ensemble des solutions de (F)

d) Détermine la solution de l'équation (F) qui s'annule en 0.

Parie B

Soit g la fonction définie sur IR par

$g(x) = 2e^x - x - 2$

3) Détermine la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

4) Etudie le sens de variation de g, puis dresse son tableau de variation

5) Démontre que l'équation g (x) = 0 admet deux solutions réelles, dont l'une est 0 et l'autre β vérifie $-1,6 \leq \beta \leq -1,5$.

6) Détermine le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

Partie C

Soit f la fonction définie sur IR par

$$f(x) = e^x - (x+1)e^x$$

7) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

8) a) Calcule $f'(x)$ et justifie que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe

b) Etudie le sens de variation de f

9) Justifie que $f(\beta) = -\frac{\beta^2+2\beta}{4}$ puis donne un encadrement de $f(\beta)$

10) Dresse le tableau de variations de f

11) Trace la courbe (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

Parie D

12) Soit a un nombre réel négatif. Interprète graphiquement l'intégrale $\int_a^0 f(x)dx$.

13.a) Calcule $\int_a^0 (x+1)e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties

b) Déduis-en $\int_a^0 f(x)dx$.

14) Calcule la limite de $\int_a^0 f(x)dx$ lorsque a tend vers $+\infty$

Probabilités

A.C N° 181 : Dénombrement

Consigne 1

Sabine dispose dans son sac 5 bics bleus, 4 bics verts et 2 bics rouges.

I- Elle tire simultanément 3 bics du sac.

Détermine

1) Le nombre de tirages possibles

2) Le nombre de tirages comportant

a) trois bics de même couleur

b) trois couleurs différentes

c) au plus deux bics verts

d) au moins un bic bleu

e) au plus un bic rouge

f) au plus un bic bleu et au moins un bic vert

II- Reprends les questions de I) en supposant que les tirages sont successifs et sans remise.

III- Reprends les questions du I) en supposant que les tirages successifs sont avec remise.

Consigne 2

Une urne A contient 5 boules numérotées de 1 à 5 et une urne B contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Paul tire deux boules de l'urne A et une boule de l'urne B.

1) Détermine le nombre de tirage possibles.
2) Détermine le nombre de tirages comportant au moins un nombre impair
3) Détermine le nombre de tirages comportant deux nombres impairs et un nombre pair.
4) Détermine le nombre de tirages tel que la somme des trois nombres est paire

Détermine le nombre de tirages tel que le somme des trois nombres est impaire

Consigne 3

Dans le jeu de « Master Mind » un joueur doit deviner une « figure » obtenue en plaçant des pions de couleur dans quatre trous à raison d'un pion par trou.

On dispose de pions jaunes, bleus, rouges, verts, orange et noirs (au moins quatre pions de chaque couleur). Le joueur doit deviner la couleur de chaque pion et sa place dans la rangée.

a) Combien y a-t-il de figures possibles ?
b) Combien y a-t-il de figures n'utilisant qu'une couleur ?
c) Combien y a-t-il de figures qui utilisent quatre couleurs ?
d) Combien y a-t-il de figures qui utilisent deux pions verts et deux pions noirs ?

Consigne 4

Une classe de terminale scientifique est composée de 27 personnes : 15 hommes dont Neba et 12 femmes dont Abénie. On veut former un comité comprenant 3 hommes et 2 femmes dans cet ordre. Le rôle de chaque membre du comité est bien déterminé et il n'y a pas de cumul de postes.

1) Détermine le nombre de comités possibles.
2) Determine le nombre de comités où Neba et Abénie ne siègent pas ensemble.
3) Détermine le nombre de comités où Neba et Abénie ne sont pas côte à côte.

Consigne 5

Sabine décide de visiter 5 quartiers A ,B, C, D et E de la ville.

1) De combien de façons peut-elle organiser sa visite ?
2) De combien de façons peut-elle organiser sa visite si elle décide de :
   a) Commencer par le quartier C.
   b) Visiter les quartiers B et D de manière consécutive.

Consigne 6

En utilisant toutes les lettres du mot ***kardois***

1) Combien de mots (ayant un sens ou non) de sept lettres peut-on former ?
2) Détermine le nombre de mots de sept lettres qu'on peut former :
   a. finissant par une consonne.
   b. commençant par une voyelle.
   c. tels que la première et la dernière lettres soient des voyelles.
   d. tels que la première et la dernière lettres soient des consonnes.
   e. tels que la lettre k précède immédiatement la lettre i.
   f. tels que k et i soient côte à côte.

3. Reprends toutes les questions précédentes en utilisant le mot ***intelligente***

Consigne 7

Une compagnie aérienne doit desservir six villes, chacune étant reliée, sans escale, à chacune des autres.

a) Combien de lignes la compagnie met-elle en service ?
b) Quel serait le nombre de lignes si la compagnie desservait douze villes ?

Consigne 8

On inscrit sur huit cartons les mots ou groupes de mots suivants : « me font », « mourir », « yeux », « Sabine », « belle », « d'amour », « tes » et « beaux ». Les huit cartons sont placés dans une boite ; on les tire les uns après les autres, on les place côte à côte à partir de la gauche dans l'ordre du tirage, de façon à former une « phrase » (ayant un sens ou non). Combien peut-on ainsi former de phrases ?

Consigne 9

Un jury veut attribuer un prix littéraire et demande à ses membres de classer par ordre de préférence trois romans sur dix proposés. Sur ces dix romans, trois sont étrangers, les autres sont français.

a) De combien de façons peut-on faire ce classement ?
b) Un membre M du jury n'a lu aucun de ces romans et fait son classement au hasard, tous les classements ayant la même probabilité d'être donnés. Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Dans le classement de M figure un roman étranger à la première place. »

B : « Dans le classement de M figurent uniquement des livres français. »

C : « Dans le classement de M figure au moins un livre français. »

A.C N° 182 : Probabilité d'un évènement

Consigne 1

Un sac contient douze boules : deux rouges, quatre noires, six jaunes. On tire au hasard des boules du sac. Dans tous les cas les tirages sont équiprobables. On tire, au hasard, simultanément, deux boules du sac. On considère les évènements suivants :

A : « parmi les deux boules tirées, une seule est rouge ».

B : « parmi les deux boules tirées, une seule est noire ».

1) Déterminer les probabilités respectives des évènements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$. On tire, au hasard, simultanément, trois boules du sac. On considère les évènements suivants :

C : « les trois boules tirées sont de même couleur » ;

D : « les trois boules tirées ne sont pas de même couleur » ;

E : « Obtenir trois couleurs différentes » ;

3) Déterminer les probabilités respectives des évènements C, D et E.

Consigne 2

Deux chasseurs A et B font feu simultanément sur un gibier . La probabilité pour A de toucher le gibier est estimée à $\frac{4}{5}$, la probabilité pour B est de $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité pour :

1) Que les deux tireurs touchent tous deux le gibier
2) Que tous deux marquent le gibier.
3) Que le gibier soit atteint par A seulement
4) Que le gibier soit atteint par B seulement
5) Que le gibier soit touché par un tireur
6) Que le gibier soit atteint
7) Que le gibier soit manqué
8) Que le gibier soit touché par un tireur au moins.

Consigne 3

Trois élèves A, B et C passent le même jour un examen. Les trois examens sont différents et se déroule dans les lieux différents. Les parents de ces candidats leurs attribuent les probabilités de succès suivantes :

$p(A) = 0{,}75;\ p(B) = 0{,}35\ et\ p(C) = 0{,}65.$

Calcule la probabilité que :

a- Les élèves soient reçus.
b- Les trois élèves échouent
c- A seulement soit reçu
d- Un élève exactement soit reçu
e- B soit le seul à échouer
f- Deux élèves exactement soient reçus.
g- Au moins un élève soit reçu

Consigne 3

Une urne U_1 contient 5 boules numérotées de 1 à 5. Une urne U_2 contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Les boules de chaque urne sont indiscernables au toucher.

Soit l'épreuve qui consiste à tirer une boule de U_1 et une boule de U_2.

1) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un nombre impair ?

Soit l'épreuve qui consiste à tirer une boule de l'urne U_1 et deux boules de l'urne U_2.

2) Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : ''Deux nombres inscrits sont impairs, l'autre pair''

E_2 : ''La somme des trois nombres inscrits est impaire''

E_3 : ''La somme des trois nombres inscrits est impaire''

Consigne 4

Un dé cubique porte les inscriptions 0, 1, -1, $\sqrt{3}$, 2, (-2). On note: p(O) ; p(1) ; p(-1) ; p($\sqrt{3}$) ; p(2) ; p(-2) les probabilités respectives d'apparition des faces numérotées 0, 1, -1, $\sqrt{3}$, 2 et (-2). Le dé est pipé de la manière suivante :

a) Les évènements élémentaires {0}, {2} ; {-2} sont équiprobables.

b) Les évènements élémentaires {1} ; {-1} et { $\sqrt{3}$ } sont équiprobables.

c) La probabilité de l'évènement {0, 2, -2} est le triple de celle de l'évènement contraire.

1) Détermine la probabilité de chacun des évènements élémentaires

2) On lance deux fois de suite ce dé et on écrit le nombre complexe $z = a + ib$, a étant le nombre obtenu au premier lancer du dé et b celui obtenu au second jet de ce dé.

Détermine la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1: "Le nombre complexe obtenu est réel"

E_2 : "Le nombre complexe obtenu est imaginaire pur"

E_3 : "Le nombre complexe z obtenu est tel que Z^2 soit réel"

E_4 : "Le nombre complexe z obtenu est tel que $|Re(z)| + Im(z) = 0$"
E_5 : "Le nombre complexe obtenu est de module 1"
E_6 : "Le nombre complexe z obtenu est tel que $Re(z) + Im(z) = 0$"
E_7 : "$\frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe obtenu"
E_8 : "Le nombre complexe obtenu a pour argument
E_9 : "Le nombre complexe obtenu a pour argument π"
E_{10} : "Le nombre complexe obtenu est solution de l'équation $(z^3 + z)(z - 2) = 0$"

A.C	N° 183 : Probabilité conditionnelle – événement indépendant

Consigne 1

Dans la production journalière d'une usine, la probabilité pour qu'une pièce soit bonne à la sortie de l'atelier de fabrication est 0,95. Un contrôle rapide est effectué. Si la pièce est bonne elle est acceptée avec une probabilité de 0,96. Si elle est mauvaise, elle est acceptée avec une probabilité de 0,03.
Justifie que la probabilité pour qu'une pièce acceptée au contrôle soit effectivement bonne est 0,99

Consigne 2

Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant des enfants de moins de 10 ans ; une fille et un garçon. On a constaté que 20% des filles sont touchées par la maladie et que 50% des garçons le sont aussi. Par ailleurs, dans les familles où la fille est touchée par la maladie, 70% des garçons le sont aussi. On choisit au hasard une des familles ayant fait l'objet de cette étude.

1) On considère les événements suivants :
A : ''Les deux enfants sont touchés par la maladie''
B : ''Au moins un des enfants est touché''
C : Aucun des enfants n'est touché''
Démontre que $p(A) = \frac{7}{50}$; $p(B) = \frac{14}{25}$ et calcule $p(C)$
2) Sachant que le garçon est touché, quelle est la probabilité pour que la fille le soit aussi ?
3) Sachant que le garçon n'est pas touché, quelle est la probabilité pour que la fille le soit ?

Consigne 3

Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A assure 20% de la production 5% des ampoules fabriquées par A sont défectueuse. La machine B assure 30% de la production et 4% des ampoules fabriquées par B sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production et 1% des ampoules fabriquées par C sont défectueuses.

a) On choisit au hasard une ampoule, calcule les probabilités des évènements suivants :
E : « L'ampoule est défectueuse et produite par A. »
F : « L'ampoule est défectueuse et produite par B. »
G : « L'ampoule est défectueuse et produite par C. »
En déduire la probabilité pour qu'une ampoule prise au hasard soit défectueuse.
b) Calcule la probabilité pour qu'une ampoule provienne de A sachant qu'elle est défectueuse.

Consigne 4 : Evènement indépendants

Deux chasseurs Ali et Moussa aperçoivent simultanément un lapin et tirent de façon indépendante l'un de l'autre. La probabilité pour que l'animal soit tué par l'un au moins des deux chasseurs est $\frac{17}{25}$; celle pour qu'il soit tué simultanément par les deux chasseurs est égale à $\frac{3}{25}$.
Sachant que la probabilité pour que Ali tue le lapin est supérieure à $\frac{1}{2}$, calcule la probabilité :
a) pour que chaque chasseur tue le lapin
b) pour que le lapin soit tué uniquement par l'un des deux chasseurs
c) pour que l'animal ne soit pas tué.

Consigne 5 :

Une urne contient trois jetons blancs (un carré et deux ronds) et quatre jetons noirs (trois carrés et un rond). On tire simultanément trois jetons de l'urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Lors d'un tirage, on note :
A l'évènement : ''Obtenir trois jetons de la même forme''
B l'évènement : ''Obtenir trois jetons la même couleur''
1) Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B et A∩B.

2) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Consigne 6

Une enquête effectuée dans un village d'Afrique centrale montre que 85% des habitants du village sont atteints du sida. Une équipe médicale a effectué un test de dépistage de la maladie et on a pu constater que 5% des habitants non malades ont donné un test positif et 92% des habitants malades ont donné un test positif.

On désigne par M l'événement : « être malade » et par T l'événement : « avoir un test positif »

1) A l'aide des événements M et T, traduis les données de l'énoncé en terme de probabilité
2) a) Calcule la probabilité de chacun des événements : $T \cap M$; $T \cap \overline{M}$; $\overline{T} \cap M$ et $\overline{T} \cap \overline{M}$

   b) Déduis-en la probabilité de l'événement T
3) Calcule la probabilité pour qu'un habitant du village soit malade sachant qu'il a donné un test positif

Consigne 7

Pour ouvrir une porte, un enfant dispose d'un trousseau de six clés dont deux seulement (que l'enfant ignore) ouvrent la porte. Les clés qui ouvrent la porte sont dites ''bonnes'' et les autres '' mauvaises''. On admet que toutes les clés ont la même probabilité d'être essayées.

1) Quelles est la probabilité pour que l'enfant ouvre dès le premier essai ?

2) Dans sa précipitation, l'enfant essaie les clés sans isoler celles qui ont déjà été essayées ?

Quelle est la probabilité pour qu'il n'ouvre la porte qu'au deuxième essai ? Qu'au troisième essai ? Qu'au sixième essai ?

1) L'enfant décide de recommencer les opérations en isolant à chaque fois la mauvaise clé déjà essayée.
2) Quelle est la probabilité qu'il n'ouvre la porte qu'au deuxième essai ? Qu'au troisième essai ? Qu'au cinquième essai ?.

Consigne 8 : Pour aller loin

M. Sourou est un agent d'un site d'exploitation d'un minéral dans un pays africain. le site est favorable à la production de ce minéral pendant la saison pluvieuse. On rencontre M. Sourou en bottes 8 fois sur 10. Il les met systématiquement lorsqu'il pleut, et une fois sur trois lorsqu'il ne plus pas .

a) Justifie que la probabilité qu'il ne pleuve dans la zone du site est $\frac{7}{10}$

b) calcule la probabilité qu'il n'ait pas plu sachant qu'on vient de croiser M. Sourou en bottes.

A.C N° 184 : Variable aléatoire- Loi binomiale

Consigne 1

On jette un dé pipé dont les six faces portent respectivement les numéros : $1, 2, 3, 4, 5$ $et 6$. On appelle Ω l'univers $\{1,2,3,4,5,6\}$ et p_i la probabilité de l'évènement $\{i\}$. Le dé est tels que :
$6p_1 = 2p_2 = 3p_3 = 2p_4 = 3p_5 = 2p_6$.

1. Détermine la probabilité de chacun des évènements élémentaires.
2. Soit X la variable aléatoire réelle définie par : $\begin{cases} X(6) = X(4) = X(2) = 2 \\ X(5) = X(3) = -3 \\ X(1) = k, k \text{ un nombre réel} \end{cases}$.

   Détermine la loi de probabilité de X.
3. Détermine la valeur de k pour laquelle l'espérance mathématique de X est nulle. Trace alors la fonction de répartition de X et calcule sa variance.

Consigne 2a

Une urne contient 10 boules.

Cinq sont blanches et portent les numéros 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 4

Trois sont noires et portent les numéros 1 ; 3 ; 5

Deux sont rouges et portent les numéros 6 ; 6

On suppose les tirages équiprobables.

1) Soit l'expérience E qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a- Calcule les probabilités des évènements suivants :

E_1 : « Les deux boules ont les mêmes couleurs »

E_2 : « Les deux boules sont de couleurs différentes»

E_3 : « Les deux boules portent le même numéro. »

b- Sachant que les deux boules ont la même couleur, calcule la probabilité qu'elles portent le même numéro.

c- Les évènements E_1 et E_3 sont-ils indépendants ?

2) On suppose maintenant que chaque boule tirée, portant un numéro impair fait gagner 5F et chaque boule tirée, portant un numéro pair fait gagner 10F.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules la somme des gains.

a- Détermine la loi de probabilité de X.

b- Calcule l'écart-type de X.

Définis et représente la fonction de répartition de X

Consigne 2b

Les quatre faces d'un dé tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est pipé de telle sorte que la probabilité p(i) pour que la face marquée i soit cachée est proportionnelle au carré de i ; on pourra écrire $p(i) = ki^2$

1) Déterminer k

2) On lance le dé une fois et on appelle X la variable aléatoire : ''somme des nombres visibles''.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de cinq lancers, X soit paire exactement deux fois.

Consigne 3

Un tronçon d'autoroute possède deux péages identiques. Chaque péage comporte deux types de passage :

- Un passage automatique A
- Un passage à monnaie M

65% des usagers utilisent le passage A en payant ;

5% des usagers utilisent le passage A sans payer ;

30% des usagers utilisent le passage M en payant.

Les automobilistes honnêtes perdent à chaque péage, soit 1 minute (passage A), soit 4 minutes (passage M).

Les automobilistes malhonnêtes ne perdent pas de temps.

1) une automobiliste prend ce tronçon d'autoroute. On admettra pour simplifier l'étude que son comportement au $2^{ème}$ péage est indépendant de celui qu'il a eu au 1^{er} péage.

Soit T la variable aléatoire égale au temps perdu à l'issue des péages.

a) Détermine la loi de probabilité de T.

b) Calcule son espérance mathématique Interprétation

2) Dix voitures se présentent successivement aux deux péages.

Quelle est la probabilité pour que six des 10 véhicules perdent exactement 5 minutes ?

Consigne 4

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces ont numérotées de 1 à 6.On dit que l'on obtient un ''double'' si les faces deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques. A chaque lancé, si le joueur fait un double, il gagne 1000F sinon il perd 300F.

1) On lance les dés une fois. Calcule la probabilité de gagner.

2) On lance les dés trois fois soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancées.

a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X

b- Etablis la loi de probabilité de X

3) On lance les dés n fois.

a- Calcule en fonction de n, la probabilité notée p_n de ne jamais faire un double.

b- Calcule en fonction de n la probabilité notée p_n de faire au moins un double.

c- Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait $p_n \geq 0,84$

Consigne 5

Un sondage est effectué dans une classe de terminale scientifique

. 60% des élèves aiment le Français (F).

45% des élèves aiment l'Anglais (A)

10% des élèves aiment le Français et l'Anglais

1) on choisit un élève au hasard dans cette classe

a) Quelle est la probabilité de l'événement

« Cet élève aime au moins une des langues considérées »

b) Quelle est la probabilité de l'événement

« Cet élève aime une et une seule des langues considérées »

2) On choisit au hasard un élève aimant le Français . Quelle est la probabilité pour que cet élève aime l'Anglais ?

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On Choisit au hasard n élèves.
On suppose que le nombre d'élèves de la classe est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un élève aimant un type de langue donnée soit constante au cours du sondage.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis aime le Français ?
b) Détermine le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$

Consigne 6

Lors d'un jeu, un joueur mise $10F$. Il peut gagner $20F, 15F, 5F$ ou ne rien gagner. Une étude statistique a établit qu'un joueur gagne : $20F$ une fois sur 6 ; $15F$ une fois sur 4 et $5F$ une fois sur 3.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain final du joueur à l'issu du jeu.

1. Détermine l'ensemble des valeurs prises par X.
2. a- Détermine la loi de probabilité de X ; présente les résultats en tableau puis sur un diagramme en bâtons.

b- Calcule l'espérance de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?
c- Sur 10 parties, quel est le gain moyen du joueur ?

3. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y définie par : $Y = 2X^2 - 3$?

Consigne 7 : Loi binomiale

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un représentant ce commerce doit rencontrer n clients distincts. Chacune de ces visiteurs est indépendante des autres.
Quelle que soit la visite considérée, on désigne par p la probabilité de l'évènement suivant : le représentant rencontre son client. On appelle q la probabilité de l'évènement contraire (le client n'est pas rencontré soit parce qu'il est absent, soit qu'il est occupé ailleurs,) etc..
1) Soit X le nombre de clients effectivement rencontrés.
Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Soit n=5 et p=0,6
Calcule les probabilités respectives des évènements suivants :
A : Aucun client n'est rencontré
B : Un client au moins est rencontré
C : Tous les clients sont rencontrés.

Consigne 8 :

Dans un aquarium il y a cinq poissons rouges (un mâle et quatre femelles) valant chacun deux francs. Il y a aussi trois poissons blancs (un mâle et deux femelles) valant chacun cinq francs. On tire simultanément trois poissons de cet aquarium en supposant que les huit poissons ont tous la même chance d'être pêchés.

1) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de mâles obtenus parmi les trois poissons. Détermine la loi de probabilité de X puis son espérance E(X) et sa variance V(X).
2) Soit P le prix des poissons tirés et Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $P \in \{6;9\}$ et la valeur 2 si $P \in \{12;15\}$. Détermine la loi de probabilité de Y puis son espérance $E(Y)$.
3) On considère la variable aléatoire XY.
   a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire ?
   b) Détermine la loi de probabilité de XY. Calcule E(XY) et E(X).E(Y).
   c) Qu'en déduis-tu pour les deux variables aléatoires X et Y ?

Consigne 9

Une urne contient trois jetons maqués 1, deux jetons marqué 2 et un jeton marqué 3. Une expérience consiste à tirer de cette urne simultanément 3 jetons. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons marqués 1 obtenus.

1. a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2. On dit qu'on a réussi l'expérience si le nombre de jetons marqué 1 obtenu es supérieur ou égal à deux.
   a) Calcule la probabilité de réussir cette expérience.
   b) On répète 5 fois cette expérience dans des conditions identiques. Calcule la probabilité de réussir cette expérience :
      i) Deux fois exactement
      ii) Au moins une fois
      iii) Pour la 3ème fois à la 5ème répétition.

Suites numériques

A.C N° 185 : Suites arithmétiques et géométriques

Consigne 1

Des sondages sont effectués parmi les clients d'un supermarché afin d'étudier leur fidélité à cette grande surface. Cette enquête conduit à penser que, chaque mois, 70 % des clients du mois précédent restent fidèles à ce supermarché et environ 3 000 nouveaux clients apparaissent.

On note u_n (avec $n \geq 1$) le nombre de clients venus au cours du n-ème mois de l'enquête. On suppose que $u_1 = 9000$.

1) Justifie que pour tout entier n, avec $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 3\,000$.

2) a) Conjecture les propriétés de la suite u, soit graphiquement, soit en calculant de ses premiers termes.

b) Démontre par récurrence que la suite u est monotone, puis elle est majorée.

c) Déduis-en que (u_n) est convergente et détermine sa limite.

d) Interprète ces résultats pour la clientèle du supermarché.

3) On pose, pour tout entier $n \geq 1$,
$v_n = u_n - 10\,000$

a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique.

b) Déduis-en l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Par le Calcul, détermine au bout de combien de mois, ce supermarché aura dépassé 9 990 clients.

Consigne 2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = -2n + 3$

a) Justifie que (u_n) est une suite arithmétique.

b) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calcule S_n en fonction de n.

c) On pose $v_n = e^{u_n}$. Justifie que (v_n) est une suite géométrique.

d) On pose $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Calcule S'_n en fonction de n

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 5u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \frac{5}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique.

b) Exprime v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calcule en fonction de n les sommes :
$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$,
et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Consigne 3

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} U_{0=2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_{n+1} \end{cases}$

1. Détermine le nombre réel a tel que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n + a$ soit géométrique.
2. Déduis-en que (U_n) est convergente et précise sa limite.

Consigne 4

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$U_n = \int_{n-1}^{n} e^{\frac{-1}{4}x}\, dx$

1. Calcule U_n en fonction de n.
2. a) Démontre que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont tu donneras la raison et le premier terme.

b) Détermine la limite de la suite (U_n)

3. On pose, pour tout n élément de N^* :
$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
 a) Calcule, par deux méthodes différentes, S_n.
 b) Détermine la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$
4. On pose $V_n = \ln(U_n)$, pour tout n élément de N^*
 a) Démontre que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.
 b) Soit $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et
 $P_n = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$
 i) Calcule T_n en fonction de n.
 ii) Déduis-en P_n en fonction de n.

Consigne 5

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = -1$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 2}$

1- Calcule les trois premiers termes de la suite (U_n).

2- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n + 2}$
3- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$. En déduire que U_n est définie $\forall n \in \mathbb{N}$
4- Démontre que la suite (U_n) est majorée par $\sqrt{3}$
5- Détermine le sens de variations de la suite (U_n).
6- On considère la suite $(V_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$
a- Démontre que la suite $(V_n)_n$ est une suite géométrique dont tu donneras le préciseras le premier terme et la raison.
b- Calcule la limite de la suite (V_n) puis celle de (U_n).

Consigne 6

Le 1er Janvier 2010, Sabine a placé une somme de 5000 000F à intérêts composés au taux de 9%.(Le capital est placé à un intérêt composé lorsque les intérêts ajoutés à la fin de chaque année sont ajoutés au capital). On notera C_n le capital au premier janvier de l'année $(2010 + n)$

1)
a- Calcule C_1 et C_2
b- Etablie le lien entre C_n et C_{n+1}
c- Déduis-en C_n *en fonction de n*.

2) Au 1er janvier 2019, Sabine aura besoin de 2000 000F pour acheter une parcelle.

Le capital qu'elle possèdera alors sera-t-il suffisant ? Si non combien devra-t-elle emprunter ?

3) A quel taux aurait-elle dû placer son capital le 1er Janvier 2010 pour disposer de 2000 000F au 1er Janvier 2019 ?

A.C	N° 186 : Suites numériques

Consigne 1 : *Sens de variation d'une suite*

Étudie le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n(n-1)$
2) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{e^n + 2^n}{e^n - 2^n}$
3) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

Consigne 2 : *Démonstrations par récurrence*

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
a) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
b) Découvre et démontre par récurrence le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Consigne 3 : *Démonstrations par récurrence*

Pour tout entier naturel n, on pose
$I_n = \int_1^e ln^n x \, dx$
a) Calcule I_0. A l'aide d'une intégration par parties, trouve une relation entre I_n *et* I_{n+1}
b) Justifie par récurrence que $I_n = a_n e + b_n$ où a_n est le terme général d'une suite a définie par $a_0 = 1$ et pour tout naturel n,
$a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n$;
b_n est le terme général d'une suite b définie par $b_0 = -1$ et pour tout naturel n,
$b_n = n!(-1)^{n-1}$

Consigne 4 : Suites positives, bornées, périodiques

1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par : $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$
Démontre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite positive
2) Démontre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et, $\forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$ est strictement croissante et majorée par 3.
3) Démontre que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \sqrt{6 - t_n}$ est bornée.
4) Soit X_n le chiffre des unités de n^2, pour tout entier naturel n. Démontrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique.

Consigne 5 : Convergence d'une suite

1) Démontre que' les suites suivantes sont convergentes

a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{n^3 - n^2}{n^3}$

b) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n^2}$

c) $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$w_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

d) $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{n}{2^n}$

e) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $X_n = \frac{\sin n}{n}$

2) Démontre que les suites suivantes sont divergentes

a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}-\{0;1\}}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-n}$

b) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\ln(2^n v_n) = n$

Consigne 6 : Sens de variation et convergence

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par
$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} sin^2(\pi x)dx$

a) Démontre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

b) Démontre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. Que peux-tu en déduire ?

Consigne 7 : Sens de variation et convergence

Pour tout entier naturel n, on pose :
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x\, dx$

1. Sans calculer I_n,
   a) Démontre que la suite (I_n) est monotone.
   b) Compare I_n *et* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$ puis démontre que la suite (I_n) converge vers une limite que tu détermineras.
2. Calcule I_0 *et* I_1. Exprime I_{n+2} en fonction de I_n *et de* n.

Consigne 8 : Sens de variation et convergence

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

1) a) justifie l'existence de I_n

b) Sans calculer I_n, démontre que la suite (I_n) est une suite décroissante dont tous les termes sont positifs.

2) a) Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, calcule la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n < \frac{1}{n+1}$
en déduire la limite I_n lorsque n tend vers $+\infty$

c) Calcule $I_{n+4} - I_n$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$)

3)- Calcule I_1 et I_2 en déduire I_5 et I_6

Consigne 9 : Comparaison de suites et convergence

1. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$
   a) Justifie que pour tout $x \in [0;1]$ et tout entier naturel n, $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$
   b) Déduis-en que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Que peux-tu en conclure pour I_n ?
2. Justifie pour tout entier naturel n, l'existence de l'intégrale

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$$

3) Démontre que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n$ et $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2(n+1)}$

4) a) Étudie les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
b) Démontre que pour tout entier naturel n,
$0 < u_n < \frac{1}{2(n+1)}$. Que peux-tu en déduire pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Consigne 10 : Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $I = \left[2; \frac{5}{2}\right]$ et telle que pour tout x élément de I , on a

$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ *et* $f(x) \in I$.

Soit U la suite numérique définie par :

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}; \forall\ n \in \mathbb{N}$

a- Démontre que pour tout entier naturel n on a ;$U_n \in I$.

b- Déduis-en que pour tout entier naturel n, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$, *puis*

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c- Déduis-en que la suite U converge vers une limite que tu préciseras.

d- Démontre que pour tout entier naturel , on a : $(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) \leq 0$ et déduis -en que α est compris entre U_n *et* U_{n+1}

e- Trouve un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Consigne 11 : Inégalité des accroissements finis

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x - \sin x$$

1. Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. On désigne par x_0 l'unique solution de l'équation $f(x) = 4$
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x)$
   a) Démontre que si $x \in \mathbb{R}, f(x) = 4$ équivaut à $\varphi(x) = x$
   b) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (φ' désignant la dérivée de φ.)
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que pour tout
   $$n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$$
   b) Déduis-en que
   $$|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - x_0|$$
   c) Démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précise sa limite.

Consigne12 : Inégalité des accroissements finis

Sabine se propose d'étudier la convergence de la suite u définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.

1. Soit f la fonction définie, pour x élément de $[0; 1]$, par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
   a) Détermine $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Etudie le sens de variation de f. Déduis-en l'image de $[0; 1]$ par f.
2. Démontre que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0; 1]$ $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$
3. Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique, α, dans l'intervalle $[0; 1]$
4. Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   Déduis-en la convergence de la suite u.

Consigne 13 : Inégalité des accroissements finis

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + 3)$

1) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α comprise entre 1 et 2
2) a) Etudie le sens de variation de f
   b)On considère l'intervalle $I = [1; 2]$;Démontre que $\forall x \in I;\ \ f(x) \in I$
   c) Démontre que $\forall x \in I;\ \ |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Démontre par récurrence que: $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$
   b) Démontre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$
   c) Déduis en que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$
4) Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers α
5) a)Détermine le plus petit entier naturel k pour que u_k soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

Consigne 14 : Suites et Inégalité

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.) Calcule I_0 et I_1.

2.a) Compare t^n et t^{n+1}, lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $n > 0$.

b) Déduis-en que la suite (I_n) est décroissante.

3.) Etablis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4.a) Démontre que pour tout t élément de $[0\,;1]$, on a $0 \leq \sqrt{2}-\sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

b) Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

c) Détermine la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

A.C N° 187 : Pour aller loin

1- Intègre l'équation différentielle (E_n): $y'' + 2ny' + n^2y = 0$ où n est un entier naturel non nul.

2- Détermine la fonction f solution de (E_n) dont la courbe (C_n) dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet en son point d'abscisse O la droite d'équation $y = x$ comme tangente.

3- En utilisant l'équation différentielle (E_n), détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

4- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 xe^{-nx}dx$.

a- Calcule U_0 et U_1

b- Etudie le sens de variation de la suite (U_n)

c- Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ et déduis que la suite (U_n) est convergente.

d- Exprime U_n en fonction de n et calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

e-

A.C N° 188 : Pour aller loin

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$

1- Pour tout entier naturel non nul n on pose $U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

a- Justifie l'existence de U_n.

b- Donne une interprétation géométrique de U_n.

c- Justifie que $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$

d- Démontre que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $U_n = 2\ln(\frac{n+2}{n+1})$

e- Etudie le sens de variation de (U_n) puis détermine la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

a- A l'aide de la courbe (C), donne une interprétation géométrique de S_n

b- Déduis une expression simple de S_n.

3- Calcule l'aire A(n) du domaine délimité par la courbe (C), la droite d'équation $y = 2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

4- Détermine la limite de A(n) lorsque n tend vers $+\infty$.

A.C N° 189 : Pour aller plus loin

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate que :

- ✓ Qu'il doit intervenir la première semaine,
- ✓ Que s'il est intervenu la $n^{ième}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{ième}$ semaine est égale à $\frac{3}{4}$,
- ✓ Que s'il n'est pas intervenu la $n^{ième}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{ième}$ semaine est égale à $\frac{1}{10}$

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la $n^{ième}$ semaine » et par p_n la probabilité de cet évènement E_n.

1. Détermine les nombres : $p(E_n), p\left(E_{n+1}/E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right)$, en fonction de $p_n, p(E_{n+1} \cap E_n)$ et $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$.
2. Déduis-en que pour tout entier n non nul : $p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$
3. On pose $q_n = p_n - \frac{2}{7}$.
   a) Démontre que la suite (q_n) est une suite géométrique.
   b) Déduis-en l'expression de p_n en fonction de n.
   c) Pour quelles valeurs de l'entier n ; la probabilité que le technicien intervienne la $n^{ième}$ semaine est-elle à inferieure à $\frac{3}{10}$?

A.C N° 190 : Pour aller plus loin

Une étude a révélé que le taux de diminution du nombre d'accouchement par jour à l'hôpital Homel est la limite de la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$ où g est la bijection réciproque de la fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2 - 2x$ tel que $f(0) = 1$

Partie A

1. Détermine deux nombres réels a et b pour que la fonction $v(x) = ax + b$ soit une solution de (E)
2. a) Résous l'équation différentielle
$$(F) : y' - y = 0$$
   b) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - v$ est solution de l'équation différentielle (F)
   c) Déduis-en les solutions de (E)
   d) Détermine f

Partie B

3. a) Etudie les variations de f
   b) Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
   c) Dresse le tableau de variation de g
4. Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α vérifiant $-1 < \alpha < 0$
5. a) Justifie que $g(\alpha) = \alpha$
   b) Démontre que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$;
$$g(x) \in]-\infty ; \alpha]$$
   c) Exprime $g'(x)$ en fonction de $g(x)$
   d) Démontre alors que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$ on a $0 < g'(x) < \frac{1}{2}$
   e) Démontre que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$ on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Partie C

6. a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in]-\infty ; \alpha]$
   b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
   c) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   d) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite
15. Détermine le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près

Statistiques

A.C N° 191 : Registre de naissances égarées

Le tableau suivant donne pour chaque année, le nombre de naissances enregistrées dans une mairie.

Année	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de naissances : y_i	374	m	334	312	n	266

Lors d'un déménagement de cette mairie, les registres de naissances des années 2006 et 2012 ont été égarés, de sorte que le nombre de naissances de ces années reste introuvable. Mais **M. Acapéo**, le stagiaire qui y était affecté avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de Mayer par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage, la droite d'ajustement de y en x d'équation $y = -22x + 397$

1) A combien peux-tu estimer le nombre de naissances lors de l'année 2011.
2) On suppose que l'évolution des naissances reste semblable au cours des années à venir.
   a) Quel sera le nombre de naissances au cours de l'année 2016 ?
   b) A partir de quelle année y aura-t-il deux fois moins de naissances qu'en 2004 ?
3) Détermine m et n.
4) Détermine une équation de la droite de régression de y en x
5) Calcule le coefficient de corrélation r de la série $(x_i ; y_i)$ puis interprète le résultat obtenu

A.C N° 192 : Taux de scolarisation

M. Sat veut étudier le taux de scolarisation des enfants de la capitale d'un pays ouest-africain, quarante années après l'indépendance du pays. Il a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux en % : y_i	10	25	32	53	62	65	69

On muni le plan d'un repère orthogonal (unités : 2cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ; 1cm pour 10% sur l'axe des ordonnées). Les calculs seront effectués à 10^{-2} près

1) Représente le nuage de points de la série double $(x_i ; y_i)$ ainsi que son point moyen G
2) Calcule le coefficient de corrélation r de la série $(x_i ; y_i)$ puis interprète le résultat obtenu
3) a) Détermine une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ordinaires
   b) Déduis-en l'année à partir de laquelle 95% au moins des enfants de la capitale considérée seront scolarisés

A.C N° 193 : Bénéfice maximal

L'entreprise A2K est une entreprise commerciale spécialisée dans la fabrication et la vente des ordinateurs portables (PC) dont on peut varier les caractéristiques en vue d'atteindre le prix de vente optimal. Le PDG de l'entreprise cherche à fixer le prix unitaire d'un ordinateur portable afin de réaliser un bénéfice maximal. Pour cela il observe l'évolution des ventes sur six années. Les résultats des ventes pendant les six années sont indiqués dans le tableau ci-après donnant le nombre y de PC vendus lorsque le prix de l'unité est x

x_i (en centaines de milliers de francs)	0,5	0,5	1	1	2	2,5
y_i (en dizaines d'ordinateurs)	5,5	5	4	4	2,5	3

1) a- Définis les séries marginales (x_i, n_i) et (y_i, n_j)

b- Calcule les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$

2) a- Dresse le tableau à double entrée correspondant à la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$

b- Calcule la covariance du couple de caractères (x ; y).

3) Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Puis apprécie la corrélation linéaire entre x et y.

4) a- Etablis l'équation de la droite de régression donnant y en fonction de x.

b- Les frais de fabrication de chaque ordinateur portable s'élèvent à 0,1 centaine de milliers de francs. Démontre que le bénéfice total B réalisé est donnée par :

$B(x) = -1{,}26x^2 + 5{,}7x - 0{,}56$ lorsque le prix de vente d'un PC est x

5) a- Ecris $B(x)$ sous forme canonique.

b- Démontre que B admet un maximum.

6) a- Précise alors le prix unitaire auquel le PDG doit vendre un ordinateur pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

b- Détermine le nombre de PC vendus pour atteindre le bénéfice maximal ?

A.C N°194 : Famille monoparentale

L'étude de l'évolution du pourcentage de famille (y_j) monoparentale parmi l'ensemble des ménages d'un pays de l'Afrique en fonction du rang de l'année (x_i) est donnée par le tableau suivant :

Rang (x_i)	0	7	a	b	29	30
Part en % (y_j)	2,9	3	3,6	4,6	6,8	6,9

Où a et b sont des nombres entiers naturels

1) Détermine les nombres a et b sachant que la droite (Δ) de régression de y en x a pour équation $y - 0{,}142x - 2{,}22 = 0$ et que $2a - 3b = -38$(les résultats seront arrondis à l'unité supérieure)

2) Pour la suite de l'activité on suppose que $a = 14$ et $b = 22$ et les résultats seront arrondis à 10^{-3}près.

a) Calcule la covariance $cov(x ; y)$ et la variance $V(x)$

b) Détermine une équation de la droite de régression (Δ') de x en y

c) Déduis-en le coefficient de corrélation r puis interprète ce résultat

3) Détermine à partir de quel rang le pourcentage de familles monoparentales pourrait dépasser 7,474%

A.C N° 195 : Revenu mensuel - Epargne

Un échantillon de cent ménages a été prélevé dans une population. En considérant le revenu mensuel (x_i) et l'épargne (y_i) de ces ménages exprimés en milliers de francs, on a pu construire le tableau à double entrée ci-dessous

y \ x	45	75	125
14	4	24	2
25	4	36	0
40	0	12	18

1) Calcule les fréquences marginales de cette série statistique double

2) Calcule la covariance de cette série double

3) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de y en x

4) Détermine l'épargne d'un revenu mensuel de 525000F

5) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de cette série puis apprécie la liaison entre le revenu et l'épargne mensuels des ménages de cet échantillon

A.C N° 196 : Salaire mensuel

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a *et* b.

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1. Détermine a *et* b pour que la moyenne de la série marginale X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$
2. Dans la suite, on suppose que $a = 40$ *et* $b = 20$. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : $Y/X = x_i$. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule

x_i	2	6	10	14	18	22
m_i	80	113	170	189	199	185

a) Calcule le coefficient de corrélation du couple (X ; M) puis interprète le résultat.

b) Détermine l'équation de la droite de régression de M en X

c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

A.C N°197 : Un jury de délibération du BAC série D

Dans un jury de délibération du baccalauréat série D, un professeur a relevé la note x_i de SVT et la note y_i de mathématiques de 10 candidats. Les résultats obtenus se présentent comme suit :

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14	13	13
y_i	1	2	4	4	5	7	8	9	12	14

1°) Représente le nuage de points de cette série. (En abscisses les notes de SVT et en ordonnées les notes de mathématiques

2°) Détermine une équation cartésienne de la droite de régression de y en x.

3°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire et donne une appréciation du nuage de points

4°) Les études statistiques ont montré que l'échantillon des 10 candidats choisis est représentatif de la population formée par les candidats de ce jury.

a) Peut-on estimer la note de mathématiques d'un candidat ayant obtenu 12 en SVT ?

b) Quelle est la note de SVT d'un candidat ayant obtenu 7 en mathématiques ?

Une enquête menée auprès de ces candidats a révélé que :

* le jury est composé de 40% de garçons et 60% de filles

* 60% des filles et 30% des garçons aiment la SVT.

5°) On choisit au hasard un candidat dans ce jury.

a) Quelle est la probabilité que ce candidat aime la SVT ?

b) Sachant que le candidat choisi aime la SVT, quelle est la probabilité qu'il soit une fille ?

NB : Les notes sont entières sinon elles sont arrondies à l'unité supérieure.

SA N°3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquence 1 : Ecriture complexe d'une transformation plane

A.C N°198 : Transformations planes

Consigne 1 : Eléments caractéristiques d'une transformation à partir de son écriture complexe

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui, au point M d'affixe z associe le M' d'affixe z' dans les cas suivants

1) $z' - z = -2i$ 2) $z' = \sqrt{2}\,(z + 3i)$

3) $z' = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)z + 1 + 2i$.

Consigne 2 : Expression analytique

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Sabine désire établir l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}\,(1;\ 2)$, l'homothétie de centre $\Omega(-3; 2)$ et de rapport -5 et la rotation de centre d'affixe $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et d'angle de mesure $-\frac{4\pi}{3}$

1) Détermine l'écriture complexe de t, h et r
2) Détermine l'expression analytique de chacune de ces transformations

Consigne 3 : A partir d'une expression analytique

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On désigne par f l'application qui, à tout point M de (P) de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} 3x' = x - 3 \\ 3y' = y + 6 \end{cases}$

1) Détermine

a) L'affixe z' de M' en fonction de z et M
b) La nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

2) Soit g la translation de vecteur $\vec{u}\,(1,2)$ et h l'homothétie de centre $\Omega(-1;-1)$ et de rapport 3

Détermine l'écriture complexe de chacune des transformations $f\circ g$, $h\circ f$ puis précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

Consigne 4

Détermine l'écriture complexe de:

a) la similitude plane directe de centre A(1,2) qui transforme le pont B (2,-1) en C (-1,-2)

b) la similitude plane qui transforme le point E(1,0) en F (-2 +3i) et G(1,1) en H (-2+i)

Consigne 5 : A partir d'une expression analytique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit $A(1,-1), B(2,0)$, f la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$

1°) Détermine l'écriture complexe de f.

Soit B' l'image du point B par f.

2°) Détermine géométriquement la nature du triangle ABB'

3°) a) Détermine les coordonnées du point B'

Soit z_A, z_B et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B et B'.

b) Calcule $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}$

c) Déduis-en la nature du triangle ABB'.

A.C N°199 : Pour aller loin

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $2 - i$ et $5 + 2i$

1. Détermine l'affixe du point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
2. On note I le milieu de $[AB]$ et D l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 2. Détermine les affixes des points I et D.
3. Calcule $\frac{z_C - z_I}{z_D - z_I}$ puis conclus.
4. On note r la rotation de centre A et d'angle π et h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$

a) Détermine l'écriture complexe de r et de h.
b) Démontre que $h\circ r$ transforme D en I

Similitude plane directe

A.C N°200 : Tout sur similitudes planes directes

Consigne 1 : Détermination de l'écriture complexe d'une similitude plane directe

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$; on donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$ et $3+2i$

Soit s la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.

1. Détermine une mesure de l'angle θ et le rapport k de s.
2. Détermine l'écriture complexe de s.
3. Quelle est l'image de la droite $(D): x+2y+1=0$ par s ?

Consigne 2 : A partir d'une expression analytique

s est la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe $z=x+iy$, du plan complexe associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy$, du plan complexe, tel que : $\begin{cases} x'=x+y\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ y'=-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3} \end{cases}$

1. Détermine z' en fonction de z
2. Donne les éléments caractéristiques de s.
3. (C) est le cercle de centre A (2 ;3) et de rayon 5. Détermine (C') image de (C) par s
4. (D) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z}+i|=|z-1+2i|$ Détermine l'image de (D) par s

Consigne 3 : Composée

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

On désigne par f l'application qui, à tout point M de (P) de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x'=-x-y+3 \\ y'=x-y-2 \end{cases}$

1°) Détermine

a) L'affixe z' de M' en fonction de z et M

b) La nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

2°) Soit g la translation de vecteur $\vec{u}(1,2)$ et h l'homothétie de centre $\Omega(-1;-1)$ et de rappon 3

Détermine l'écriture complexe de chacune des transformations fog ,hof puis précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

Consigne 4 : Construire l'image d'un cercle

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité 1cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $i, 2+2i$ et $1-i$ et on note S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.

a- Détermine l'écriture complexe de S.

b- Précise ses éléments caractéristiques.

c- Construis l'image du cercle d'équation : $x^2+y^2+2x-3y=0$ par S.

Consigne 5 : **Translations – Homothéties – Rotations**

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère la similitude plane directe T qui au point M de coordonnées $(x;y)$ associe le point M' de coordonnées $(x';y')$ telles que : $\begin{cases} x'=ax-by+a' \\ y'=bx+ay+b' \end{cases}$, avec a,a',b,b' étant quatre nombres réels.

1- Démontre que les affixes des points M et M' sont liées par une relation de la forme $z'=mz+p$. m et p étant deux nombres complexes que tu détermineras en fonction de a,b,a' et b'.

2- Détermine les quatre nombres réels a,b,a' et b' pour que T soit la translation de vecteur $\vec{w}=-2\vec{u}+\vec{v}$.

3- Détermine les quatre nombres réels a,b,a' et b' pour que T soit l'homothétie de centre $A(1;2)$ et de rapport 3.

4- Détermine les quatre nombres réels a,b,a' et b' pour que T soit la rotation de centre $I(0;2)$ et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

Consigne 6 : A partir d'une équation du $3^{ème}$ degré

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le polynôme f défini sur $\mathbb{C}$ par : $f(z)=z^3-5iz^2-11z+15i$

SUJETS D'ÉVALUATIONS

ET EXAMENS BLANCS

POUR LE

RENFORCEMENT DES

CAPACITÉS

1) Développe, réduis et ordonne l'expression $(t-3)(t^2-2t+5)$

2)a) Démontre que l'équation $f(z)=0$ admet une solution imaginaire pure notée z_0.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3) Soit h l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $2\left(z-\frac{1}{3}\right)=(1+i)\left(z'-\frac{1}{3}\right)$

Démontre que h est une similitude plane directe dont tu préciseras les éléments caractéristiques

4) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i, -2+i, 2+i$.

a) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle

Soit A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par h.

b) Détermine l'aire du triangle ABC puis déduis-en l'aire du triangle $A'B'C'$.

Consigne 7 : A partir d'une équation du 2nd degré

θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$.

On considère l'équation

$(E_\theta): z^2-(2+2i)(1+e^{i\theta})z+e^{i\theta}(2+2i)^2=0.$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e_2})$.

1. Démontre que le discriminant de l'équation (E_θ) est : $(2+2i)^2\left(1-e^{i\theta}\right)^2$, puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).
2. On note z_1 la solution de (E_θ) indépendant de θ et z_2 l'autre solution. On désigne par A_1 et A_2 les points images respectives de z_1 et z_2
   a) Exprime z_2 en fonction de z_1
   b) Déduis-en que le triangle OA_1A_2 est isocèle en O.
   c) Pour quelle valeur de θ les points A_1 et A_2 sont-ils symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs ?
3. Pour cette question, on donne $\theta=\frac{\pi}{2}$. A et B sont les points d'affixes respectives $2+2i$ et $-2+2i$
   a) Place les points O, A et B dans le plan complexe.
   b) Détermine les affixes respectives des points O' et A' pour que le quadrilatère OO'A'A soit un carré direct.
4. Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe S de centre A et qui transforme A' en O'

Consigne 8 : Autour d'une probabilité

On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés. Le premier dé a ses faces marquées $1; 1; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les faces du deuxième dé sont marquées : $0;\ 0;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2};\ \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

On lance simultanément ces deux dés et on appelle respectivement a et b les nombres lus sur la face supérieure du premier dé et sur celle du second dé au repos. On associe à ce lancer le nombre complexe $u=a+ib$ (i étant le nombre complexe vérifiant $i^2=-1$).

1) Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : "le module du nombre complexe u est 1".

B : "u est un nombre réel".

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on définit la transformation s dont l'écriture complexe est $z'=uz+b$

2) Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : "s est une translation".

D : "s est une homothétie dont le centre est un point d'ordonné nulle".

E : "s est une rotation".

F : "s est une similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$".

Consigne 9 : POUR ALLER LOIN

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$; m étant un nombre complexe, on considère l'application f_m du plan P dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{1}{2}(1-m+i\sqrt{3})z+m\sqrt{3}+i$$

1) Détermine m pour que l'application f_m soit
   a) Une translation
   b) Une homothétie
   c) Une rotation

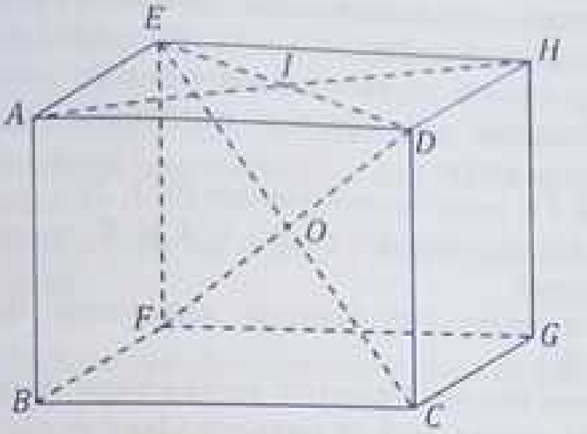
2) Précise la ou les éléments caractéristiques de la transformation f_m dans chaque cas précédent.

3) On considère le cas particulier où m=0
   a) Précise la nature de f_0 et ses éléments caractéristiques.
   b) Détermine l'image (Δ') de la droite (Δ) d'équation cartésienne : $x+y-1=0$ par f_0

SUJET N° 1

Contexte :

La figure ci-dessous est une représentation de l'un des socles réalisés, en béton armé, au fond de l'eau pour la construction du pont de CODJI. Ce socle est en réalité un cube ABCDEFGH de centre O et d'arête 3 mètres. Le point I est le centre de la face ADHE. Pour l'étanchéité du socle l'ensemble (E_1) des points M du plan (ABC) tels que $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = \|-\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$ a été revêtu d'une matière spécifique.



Sabine, élève en classe de terminale scientifique, impressionné par cette représentation que lui a montrée l'ingénieur PIKO désire étudier les positions relatives de certains vecteurs, vérifier si $(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{HC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace et de déterminer la nature de (E_1).

Tâche : Tu es invité(e) à aider Sabine dans ses recherches en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1-

a) Les vecteurs $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{OI}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ sont-ils coplanaires ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{DO}$ sont-ils coplanaires ?

2-

a) Détermine relativement au repère $(I, \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IH}, \overrightarrow{OI})$, les coordonnées des points des points E,D,I,O,H,B,C,G, et F.

b) Justifie alors que le triplet $(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{BG}$ *et* $\overrightarrow{HC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3-

a) Détermine les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{OG}$ dans la base $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IH}, \overrightarrow{OI})$.

b) Vérifie alors si $\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires.

Problème 2

Pour la solidité du socle et l'équilibre du pont, l'ingénieur PIKO a fait passer des barres de fer par les points T,R,Q,P,S et K définis par :

$T = bar\{(A,3),(B,-1),(C,2),(D,-2)\}$;

$R = bar\{(B,-1),(C,2),(D,-2)\}$;

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BS} = 2\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BK}$.

Sabine désire étudier la position relative des droites (PS), (QK) et (AR) puis la nature de l'ensemble (E_1).

4-

a) Dessine le carré ABCD du socle à l'échelle $\frac{1}{100}$.

b) Construis sur la figure de la question 4-a) le point R puis le point T.

5-

a) Exprime :

- ✓ Q comme le barycentre des points A et C
- ✓ P comme barycentre des points A et D
- ✓ S comme barycentre des points B et C
- ✓ K comme barycentre des points B et D.

b) Justifie que les droites (PS) ,(QK) et (AR) sont concourantes .

6-

a) Justifie que le vecteur $\vec{V} = -\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ est constant et écris-le en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

b) Détermine l'ensemble (E_1) et construis-le sur la figure de la question 4-a)

Problème 3

Pour mieux déterminer la position relative d'une droite (Δ) *et du plan* (P) déterminé par les points A,B et C puis la nature de l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tels que

$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$,

SONONVI a utilisé un repère orthonormé de l'espace dans lequel on a : $A(2,1,3); B(-3,-1,7); C(3,2,4)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -3t \\ z = t + 4 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

7-

a) Détermine une représentation paramétrique du plan (P).

b) Détermine un vecteur directeur $\vec{w}$ *de* (Δ)

c) Détermine un système d'équations cartésiennes de (Δ).

8-

a) Calcule $\vec{w}.\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{w}.\overrightarrow{AC}$

b) Déduis-en la position relative de (Δ) *et* (P)

c) Détermine une équation cartésienne de (P).

9- Sabine considère le barycentre L des points pondérés $(A,-2);(B,1)$ et $(C,2)$

a) Détermine les coordonnées de L.

b) A-t-on : $L \in (\Delta)$? $L \in (P)$?

c) Détermine l'ensemble (E_2).

SUJET N° 2

Contexte

Un championnat de mathématiques organisé à l'intention des élèves de niveau Terminale D a porté sur les notions de la première situation d'apprentissage. L'un des supports de l'épreuve soumise aux élèves est une pyramide régulière ABCDE de base carrée ABCD ; G est le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, 1) et (C, 3) ; $\vec{u}$ est le vecteur tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Le trophée à gagner est exposé aux candidats et des questions relatives à l'épreuve y sont rattachées.

Codjo, un candidat à ce championnat rêve de remporter ce trophée.

Tâche : *Tu es invité(e) à trouver des solutions à la préoccupation de Codjo en résolvant les problèmes suivants :*

Problème1

1°) Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$

2°) Justifie que G appartient à la droite de repère $(A, \vec{u})$

3°) L'espace est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

a) Détermine les coordonnées des points C et G

b) Ecris une représentation paramétrique du plan (ACG)

c) Vérifie que le point E n'appartient pas au plan (ACG)

Problème 2

Une autre question du championnat a consisté à déterminer dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ l'ensemble (Q) des points $M(x, y, z)$ tels que :

$d(M, (P)) = \sqrt{14}$ où (P) est le plan contenant les droites (D) et (D') ; (D) est la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et (D') est la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$

4- Démontre que les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.

5- Démontre que (P) a pour équation cartésienne : $-3x + y + 2z - 5 = 0$

6-a) Exprime d(M, (P)) en fonction de $x, y, et\ z$.

b) Détermine (Q)

Problème 3

Le trophée en compétition est un solide de l'espace. Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, une partie du trophée est incluse dans l'ensemble (R) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{KL} = 1$ où $I(1;-2;1)$; K(1 ;3 ;4) et L(5 ;1 ; 3). L'autre partie du trophée est incluse dans l'ensemble contenant les plans (Q_1) et (Q_2) d'équations respectives :

$x - z - 1 = 0$ et $x + z - 5 = 0$

7- Détermine une équation cartésienne de (R) et précise sa nature.

8- Soit J le point de coordonnées (0, 1, 2)

a) Démontre que les points I, J et K ne sont pas alignés

b) Détermine une équation cartésienne du plan (IJK).

c) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par L et perpendiculaire au plan (IJK)

9- En réalité le trophée est un tétraèdre de sommet L dont une base est le triangle IJK. Calcule le volume de ce trophée.

10- Démontre que les plans (Q_1) et (Q_2) sont perpendiculaires.

11- On pose $(\Delta') = (Q_1) \cap (Q_2)$. Donne une représentation paramétrique de (Δ')

SUJET N° 3

Contexte : Lutte contre l'insécurité.

TABOU est un arrondissement qui constitue une cible pour les malfrats. Ainsi les autorités de cet arrondissement décident d'y installer un poste de Police afin de sécuriser les lieux. L'ingénieur AHOU chargé d'exécuter les travaux propose une maquette partielle du local principal du poste de Police. Le chef d'arrondissement du TABOU, émerveillés par la vue du plan invite son enfant Saliou, élève en classe de Terminale D à faire quelques applications à des fins géométriques.

Tâche : Tu vas aider Saliou à travers la résolution des trois problèmes.

Problème 1 :

On suppose que la maquette est un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 2cm

1- Justifie que (A,B ,D,G) est un repère de l'espace.
2- Détermine les coordonnées des points C, E et D dans ce repère
3- Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
4- Justifie que le point G est le barycentre des points pondérés : (D,-1) ; (C, 1) et (H, 1).

Problème 2 :

On suppose que ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. On note I le centre de la face ADHE , J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ] . L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

5- Détermine les coordonnées de I, J et K dans ce repère
6- Démontre que les points A , K et G ne sont pas alignés.
7-
a) Détermine une équation cartésienne du plan (AKG)
b) Vérifie que le point D appartient au plan (AKG)
8- Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G. Soit L le centre du carré DCGH.
a) Démontre que le point K est le milieu du segment [AL]
b) Démontre que K est le barycentre des points A, D et G affectés des coefficients que l'on précisera.
9- Détermine les ensembles (C_1) et (C_2) des points M de l'espace tels que :
$(C_1) : (2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MG}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$ et
$(C_2) : \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MG}\|=5$

Problème 3 :

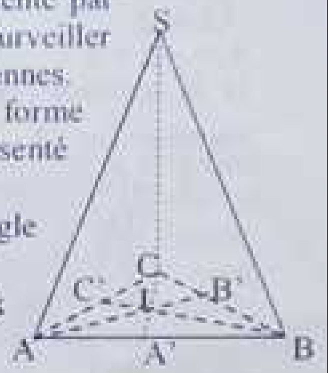
La construction du bâtiment abritant le poste de police étant achevée, le commissaire prend connaissance des lieux et décide de positionner trois policiers à des points stratégiques, P, Q et R tels que : $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ}=4\overrightarrow{AD}$ et R le barycentre des points pondérés : (C ,-1) et (G,2). L'espace est muni du repère orthonormal $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

10- a) Démontre que R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).
b) Démontre que (PQR) est un plan.
11- Démontre qu'une équation du plan (PQR) est : $4x+2y+z-8=0$
12- Vérifier que le point E n'appartient pas au plan (PQR).
13- On appelle K le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
a) Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (EK)
b) Détermine les coordonnées du point K.
c) Calculer la distance du point E au plan (PQR)

SUJET N° 4

Contexte : Réaménagement d'un système de sécurité.

Pour offrir de meilleures conditions de vols à ses clients, une compagnie aérienne décide de réaménager son système de sécurité. Le technicien Dotou est chargé de la modélisation d'une tour de contrôle du trafic aérien surveillant les deux voies aériennes les plus exploitées par la compagnie. Spécifiquement le technicien Effa a pour mission de placer, au sommet S de la tour de contrôle, un appareil qui émet un rayon représenté par une droite (Δ) capable de surveiller simultanément ces deux voies aériennes.



La tour de contrôle a la forme d'un tétraèdre particulier représenté comme suit :

- ABC est un triangle équilatéral
- A' B' et C' sont les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] et [CA] ; I le point d'intersection des droites (AB'), (BC') et (CA')
- Les triangles SAC, SBC et SAB sont isocèles en S

La piste d'atterrissage est assimilable à l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'})\bullet(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=0$

Informé du projet, Efakaka, fils de M. Dotou et élève en classe de terminale D reconnait certaines configurations étudiées en classe et décide d'en savoir davantage sur les contours de ce dessin afin de proposer si possible (Δ) à son père.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Efakaka à satisfaire ses différentes préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. a) Que représente le point I pour les points A, B et C ?
   b) Justifie que $\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}=\vec{0}$
   c) Déduis-en que $\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}=\vec{0}$ puis définis autrement le point I en utilisant les point A', B' et C'
2. a) Justifie que (Γ) est un plan dont tu préciseras un vecteur normal

b) Identifie (Γ) en utilisant les points marqués sur la figure de la tour.

3. a) Démontre que l'ensemble (Γ') des points M de l'espace pour lesquels les vecteurs $(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'})$ et $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA'})$ sont colinéaires est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{A'B'}$

b) Déduis-en que (Γ) et (Γ') sont perpendiculaires.

Problème 2

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux "voies aériennes" à surveiller sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) définies respectivement par (D_1) : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 + 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$ et (D_2) : $\frac{2x-1}{4} = y - 4 = -z + 4$

et le sommet S de la tour de contrôle a pour coordonnées $(3 ; 4 ; \frac{1}{10})$

4. a) Détermine un repère de chacune des droites (D_1) et (D_2)

b) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

5. Justifie que S n'appartient ni à (D_1) et ni à (D_2).

6. (P_1) désigne le plan contenant la droite (D_1) et passant par S et (P_2) le plan contenant la droite (D_2) et passant par S

a) Détermine une équation cartésienne du plan (P_1) et une représentation paramétrique du plan (P_2)

b) Démontre que (D_1) et (P_2) sont sécants puis détermine les coordonnées de leur point d'intersection M_1.

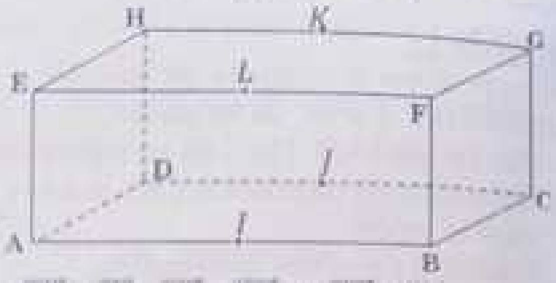
c) Démontre que (D_2) et (P_1) sont également sécants puis justifie que $M_2\left(\frac{-11}{6}, \frac{17}{6}, \frac{31}{6}\right)$ est leur point d'intersection.

7. a) Démontre que M_1 appartient à la droite (SM_2)

b) Propose alors à Efakaka une droite (Δ) qui convient.

Problème 3

Le bâtiment abritant le système de sécurité de la compagnie a la forme du pavé droit ABCDEFGH ci-dessous où $AD = AE = 1$ et $AB = 2$ et comporte les points I, J, K et L milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$, $[HG]$ et $[EF]$



8. Calcule $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$.

9. En considérant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, détermine dans ce repère les coordonnées de tous les points de ce bâtiment

10. a- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{LC}$ sont coplanaires

b- Détermine à un degré près la mesure de l'angle $\widehat{KAJ}$

c- T et S sont deux points du bâtiment tels que $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{JT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI}$.

Justifie que $(HS)//(EKT)$

11. M et N sont aussi deux autres points du bâtiment tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Démontre que $(MN)//(BD)$

SUJET N° 5

Contexte

Jesugnon est un élève de la terminale D qui s'intéresse à l'art. Son frère Jesugo, un brillant professeur des mathématiques lui décrit son objet d'art ABCD de la manière suivante :

C'est un solide de l'espace, où ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4cm$ et $AC = 6cm$. D est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC) tel que AD = 2cm. Un fil lumineux relie le point D à un point H, intersection de la droite (BC) avec le plan (P) passant par D et perpendiculaire à (BC). Jesugnon désire connaître pour cela, le prix du fil lumineux nécessaire pour relier les points D et H. Il sait que $\sqrt{13}$ cm du fil lumineux coûterait 9 500FCFA. Jesugo lui propose de considérer le point E de $[AB]$ tel que AE = 2cm, le point F de $[AC]$ tel que AF = 2cm et de poser $\overrightarrow{AE} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AF} = 2\vec{j}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{k}$ et $R = (A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, avec R étant orthonormé direct

Tâche : *Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Jesugnon en résolvant les trois problèmes suivants :*

Problème1

1. Fais la figure
2. Détermine dans R les coordonnées des points A, B, C, D et G où G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

3. a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
b) Calcule en cm^2, l'aire du triangle ABC.
4. a) Que représente le point H pour le point D ?
b) Ecris une représentation paramétrique de la droite (BC), une équation cartésienne du plan (P) puis détermine les cordonnées de H.
c) Calcule DH et détermine le prix du fil lumineux que Jesugnon achèterait.

Problème 2

L'exposition des objets d'art se tient dans un grand hall de la forme d'une pyramide régulière SIJKL de base IJKL et dont les faces latérales sont entièrement en verre. Jesugnon a ramené les informations suivantes.

Dans un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ l'unité de longueur est 11m

- I(1 ; 2 ; 3) ; J(-1 ; 0 ; 4) ; K(1 ; -1 ; 6)
- L'une des faces latérales est contenue dans le plan (Q) d'équation :

$$11x - 10y + 2z + 3 = 0$$

- Le sommet S appartient à l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LM}) \wedge \vec{u}$$

où $\vec{u}\,(1; -2; -2)$

5. Quelle est en mètres, la longueur du côté de la base carrée de la pyramide SIJKL.
6. a) Détermine les coordonnées du point L.
b) Détermine les coordonnées du point N, isobarycentre des points I, J, K et L.
7. a) Démontre que l'ensemble (Δ) est la droite passant par N et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
b) Ecris une représentation paramétrique de (Δ).
c) Déduis que $S(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6})$
8. a) Calcule en mètre la hauteur de la pyramide SIJKL
b) Calcule la quantité de verres utilisée pour couvrir les faces latérales du hall.

Problème 3

Les objets d'art exposés portent chacun un numéro de quatre chiffres. Le numéro de l'objet d'art décrit par Jesugnon est tels que :

- la somme de ses chiffres est égale à 15 ;
- en permutant à la fois le chiffre des unités et celui des centaines, le chiffre des dizaines et celui des milliers, le numéro diminue de 2772 ;
- en permutant le chiffre des unités et celui des centaines, le numéro augmente de 198 ;
- en permutant le chiffre des unités et celui des dizaines, le numéro diminue de 9.

9. a) Traduis ces informations en un système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et t respectivement chiffre des milliers, centaines, dizaines et des unités du numéro de l'objet d'art.
b) Détermine ce numéro.
10. Pour des raisons de sécurité, deux caméras de surveillance observent suivant des signaux émis les objets précieux suivant l'ensemble (E_m) des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant

$$(S_m): \begin{cases} x + 2y + 4z = -1 \\ x - my + m^2z = m + 1 \\ 2x + my + 2mz = 2 \end{cases}$$

a) Résous dans $\mathbb{R}^3$ suivant les valeurs de m le système (S_m).
b) Déduis-en suivant les valeurs de m la nature de (E_m) ./.

SUJET N° 6

Contexte:

Dans le cadre de ses activités culturelles la sélection '' cuisine'' a confectionné des gâteaux qu'elle se propose de mettre à la vente. Pour des raisons d'hygiène, ces gâteaux sont exposés dans une boîte en plexiglas représentée par le cube ABCDEFGH d'arête de longueur $2\ m$.
I est le centre de la face $BCGF$ et J le milieu de $[BC]$
Les gâteaux couverts de chocolats sont rangés dans le solide de base HFC obtenu en reliant le point A à chacun des sommets de HFC.
Par ailleurs un contre-plaqué assimilé à un plan (P) sert de sepération dans la salle de vente.
Grâce, élève en classe de Terminale D, membre de cette section est très éveillée par cette prouesse. Elle y reconnait certaines configurations étudiées en classe.

Tâche : Tu es invité(e) à résoudre les trois problèmes ci-après pour te rendre compte des concepts mathématiques qui se cachent derrière.

Problème 1 :

On pose $\vec{i} = -\overrightarrow{AD}$; $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$

1. En prenant comme base de la face CD, donne une représentation en perspectives cavalière d'une boîte à l'échelle de $2\ cm$ pour $1\ m$.
2. a- Prouve que $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct.
b- Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FH} \wedge \overrightarrow{FC}$
c- Calcule la distance de A au plan (FHC).

3. a- Justifie que le solide $AHFC$ est un tétraèdre régulier de base HFC.
   b- Calcule le volume de ce solide.
4. a- Justifie que les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.
b- Calcule $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IH}$
c- Déduis-en une valeur approchée de l'angle $\widehat{AIH}$

Problème 2 :

On considère le point G barycentre des points pondérés $(A;2),(B;1)$ et $(C;1)$

5. On désigne par M un point quelconque de l'espace.
a- Justifie que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M et détermine sa norme
b- Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que :
$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$$
6. On considère le système de point pondérés $\{(A;2),(B;m),(C;m)\}$ où m est un entier naturel fixe.
a- Justifie que le barycentre G_m de ce système de points pondérés existe.
b- Justifie que G_m appartient au segment $[AJ]$.
7. Le point A appartient-il à l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tels que
$\|2\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}\| = m\|\vec{V}\|$. Justifie ta réponse.

Problème 3 :

8. a- Soit $I(-1;2;1)$ $N(1;-6;-1)$ et $S(2;2;2)$ trois points du plan (P). Donne une équation de ce plan (P).
b- Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire à (P) passant par $T(1;3;-4)$ puis détermine les coordonnées d'intersection de (Δ) et de (P).
9. Soit la droite (D_1) de système d'équations cartésienne : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ et la droite (D_2) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$$
a- Démontre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.
b- Détermine une équation cartésienne du plan (Q) les contenant.
10. Calcule la distance du point H à (Δ).

SUJET N° 7

Contexte:

La mairie de la commune de Calavi envisage de construire à Cococodji un centre international de Foire. Un tel centre devant refléter son aspect, l'architecte doit vérifier si toutes les contraintes sont respectées.

La chambre du gardien de ce centre a la forme d'un cube ABCDEFGH. Un robinet doit être placé en un point G tel que $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Sabine , une élève en classe de terminale D, a pris connaissance du projet et désire en savoir davantage

Tâche : Tu es invité(e) à aider Sabine en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1- Justifie l'existence de G. Que représente-t-il ?
2- Justifie que les points A, B, C et G coplanaires.
3- Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que :
a) $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
b) $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AB} = 0$
c) $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4$
d) $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$
(On prendra I milieu de $[AC]$)
e) $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 6$
(On prendra K isobarycentre de A, B et C)

Problème 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
On donne
$A(0,0,1)$; $B(-1,0,3)$; $C(1,1,1)$ et $D(-1;2;3)$.

1- Justifie que les points $A; B$ et C déterminent un plan.
2-
a) Prouve que ABCD est un tétraèdre
b) Calcule le volume du tétraèdre
3-
a) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC)
b) Donne une représentation paramétrique de (ABC)
c) Calcule la distance du point D au plan (ABC)
d) En déduire le volume du tétraèdre (ABCD)
4- Calcule l'aire du triangle ABC
5-
a) Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) en A.
b) Détermine $(\Delta) \cap (P)$ où (P) est le plan d'équation $x + y - 3z = 0$

6. Détermine les coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(A,2)$; $(B,-1)$ et $(C,1)$
7. Calcule la distance du point D à la droite (AB)
8. Soient $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) les droites définies respectivement par :
$\begin{cases} 3x-2y+5z+7=0 \\ x-5y+6z-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3+t \\ y=9+3t \\ z=2 \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$
$\begin{cases} x=2\alpha+\frac{1}{2} \\ y=\alpha+4 \\ z=-\alpha+4 \end{cases}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$
   a) Donne une représentation paramétrique de (Δ_1)
   b) Détermine une représentation paramétrique du plan passant par le point $E(-2,4,1)$ et orthogonal à (Δ_1)
   c) Donne un repère de chacune des droites (Δ_2) et (Δ_3)
   d) Démontre que (Δ_2) et (Δ_3) sont non coplanaires
9. On donne $\overrightarrow{e_1}(-1,0,1)$ et $\overrightarrow{e_2}(0,3,0)$
   a) Détermine un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$, de même sens que $\overrightarrow{e_1}$ et unitaire
   b) Détermine un vecteur unitaire $\vec{v}$ colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{e_2}$
   c) Justifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
   d) Détermine un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de l'espace.

Problème 3 :

Sabine constate que dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'autres séparations sont également prévues à l'aide des rubans rectilignes assimilés à des droites (D_1) de système d'équations cartésiennes $\frac{x-1}{2} = \frac{-y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$, (D_2) de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=-\alpha \\ z=1+2\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et (D_3) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=1 \\ 3y-z-8=0 \end{cases}$

10)
   a) Donne un repère de la droite (D_3)
   b) Démontre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.
   c) Détermine une équation cartésienne du plan (P_1) contenant les droites (D_1) et (D_2)

11)
a) Justifie que (D_1) et (D_3) ne sont pas coplanaires
b) Détermine une équation cartésienne du plan (P_2) parallèle à (D_1) et contenant (D_3).

12)
a) Justifie que (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Détermine alors une représentation paramétrique de (D_1).

a) .

SUJET N° 8 (PI)

Exercice 1

Résous par la méthode du pivot de gauss chacune les systèmes d'équations suivants :

$(S1) : \begin{cases} x+y-8z=-1 \\ 3x-4y-3z=-10 \\ -2x+y+7z=5 \end{cases}$

$(S2) : \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ x+4y+9z+16t=3 \\ x+8y+27z+64t=4 \end{cases}$

2) Trois frères ont acheté un objet à 100€. Le cadet dit qu'il pourrait le payer seul si le second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a. Le second dit que, si l'aîné lui donnait le tiers de son argent, il payerait l'objet seul. Enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet pour payer seul l'objet. Combien chacun avait –t-il d'argent ?

Exercice 2

On considère le nombre complexe

$u = \sqrt{8+4\sqrt{3}} + i\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

1) Calcule u^2 ;

2)a) Détermine le module et un argument de u^2 ;

  b) En déduire le module et un argument de u ;

3)a) Détermine les entiers n tels que u^n soit un imaginaire pur ;

  b) En déduire le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que u^n soit un imaginaire pur.

Problème

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A et B sont les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$. On désigne par P^* l'ensemble des point de P distincts de A.

Soit f l'application de P^* dans P qui a tout point M d'affixe z associe le point f(M) d'affixe $Z = \frac{iz+2}{z+i}$.

Partie A

1) a) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives i ; $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$.
Détermine $f(M_1)$ et $f(M_2)$

b) – Détermine le point M_3 de P' tel que $f(M_3)=0$

d) Détermine le point M_4 de P' tel que $f(M_4)=$ N où $z_N = 2-i$.

2) On pose $z = x+iy$ où $x \in$ IR et $y \in$ IR
Exprime Re(Z) et Im(Z) en fonction de x et y.

3) a) Détermine l'ensemble (E_1) des points M(x,y) du plan P' tels que Z soit un imaginaire pur ;

b) Détermine l'ensemble (E_2) des points M(x,y) du plan tels que Z soit réel ;

c) Détermine l'ensemble (E_3) des points M(x,y) du plan tels que $|Z|=1$;

d) Construis dans le même repère les ensembles (E_1) ; (E_2) et (E_3).

Partie B

4) z_M, z_A et z_B sont les affixes respectives des points M ; A et B.

a) Démontre que $Z = i(\frac{z_M - z_A}{z_M + i})$

b) Exprime $|Z|$ en fonction de M, A et B

c) Démontre que $\arg Z = \frac{\pi}{2}$ + mes $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$ $+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5) En déduire de 4) et de façon très claire en utilisant les points A et B. La caractérisation de chacun des ensembles (E_1) et (E_2) et (E_3).

Partie C

6)a) Démontre que (Z-i) (z+i) = 3

b) Détermine l'ensemble (C) des points M de P' tels que $|z+i|=1$

c) En déduire que si M $\in$ (C) alors $f(M)$ appartient à un cercle (C' ') dont on précisera le centre et le rayon.

SUJET N° 9

Contexte

Le plan du carrefour du marché DUNIAN réalisé par l'ingénieur DAKO contient trois figures géométriques (E_1), (E_2) et (E_3) ; des points A, B, C et autres. L'ingénieur DAKO muni le plan (P) du carrefour d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1} ; \vec{e_2})$. Il définit les points A et B comme les points images des nombres complexes

$Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$ et $Z_B = \frac{1}{2}(1+i)$. Aux points A, B et C il a prévu placer des poteaux électriques pour un bon éclairage avec des lampadaires aux points $I(-1;2;3)$ J(-1 ; 2 ; -2) et Q (-3 ; 0 ; 4)

YEVOU un élève de la classe de terminale D au complexe CSGA, ayant vu le plan du carrefour, décide de déterminer et de construire les figures géométriques (E_2) et (E_3)

Tâche : *Tu vas aider YEVOU à construire les figures géométriques (E_2) et (E_3) en résolvant les trois problèmes ci-dessous*

Problème1

1°) a- Ecris le produit $z_A z_B$ sous forme algébrique

b- Ecris sous forme exponentielle les nombre complexes z_A ; z_B et $z_A z_B$

c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2°) On suppose que $z_C = \frac{2 - \sqrt{2}\, z_A}{2}$

d) Vérifie que $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}})$

e) Déduis le module et un argument de Z_C

f) Démontre que z_C^{12} est un nombre réel strictement négatif

3°) Dans le plan (P) muni du repère $(O, \vec{e_1} ; \vec{e_2})$, où l'unité graphique est 2cm

a) Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_A

b) Détermine géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z telle que

$$\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

Problème 2

En fait les figures géométriques (E_1) ; (E_2) et (E_3) sont des voies prévues dans le plan utilisant les points K, P et définies par la relation $Z = \frac{iz - 1 - i\sqrt{3}}{z - 2i}$ où z est l'affixe du point M et est différent de 2i

4°) Justifie que $Z = i\left(\frac{Z_K - Z}{Z_P - Z}\right)$ avec
$Z_K = \sqrt{3} - i$ et $Z_P = 2i$

5°) Démontre que $|Z| = \frac{MK}{MP}$ et
$\arg Z = \frac{\pi}{2} + mes\,(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MK}) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

6°) a- Détermine la figure géométrique (E_1) dont les points M d'affixe z sont tels que $|Z| = 1$

b- Détermine la figure géométrique (E_2) dont les points M d'affixe z sont tels que Z soit un nombre réel non nul

c- Détermine la figure géométrique (E_3) dont les points M d'affixe z sont tel que Z soit imaginaire pur.

7°) On pose $Z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R}^2)$

a- Détermine $Re(Z)$ et $Im(Z)$ en fonction de x et y

b- Déduis alors une équation de chacune des figures (E_2) et (E_3)

c- Construis (E_2) et (E_3) dans un même repère.

Problème 3

Pour utiliser les points I, J et Q, l'ingénieur DAKO muni l'espace du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. et désigne par G_1 le milieu du segment $[IJ]$ et par G_2 le barycentre des points pondérés (I, 1) ; (J ;2) et (Q,1)

8°) Détermine les coordonnées des points G_1 et G_2

9°) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que

$(\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MQ}) \wedge (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = \vec{O}$ Démontre que (D) est une droite dont tu donneras un repère.

10°) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 4\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ Z = 1 - \alpha \end{cases}$

a- Démontre que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

b- Détermine une équation cartésienne du plan (Π) contenant (Δ) et (D)

11°) Soit (T) le plan d'équation cartésienne : $x - 4y = 0$ et $L(1; 2; 0)$

a- Démontre que (Π) et (T) sont perpendiculaires

b- Calcule les distances $d(L; (\Pi))$ et $d(L; (T))$

c- Déduis alors la distance du point L à la droite d'intersection de (Π) et de (T).

SUJET N° 10

Contexte : construction d'un plan de projet

Le projet ci-dessous représente le domaine où la mairie de LAKOU envisage construire un parc de visite touristique sur un domaine triangulaire AIJ tel que : le triplet (O,I, J) est un repère orthonormé direct du plan complexe et le point A a pour affixe

$z_A = \dfrac{(7+i)(1-i)}{2(1-2i)}$.

La mairie pense démarrer par le forage de deux puits P et P' à grand diamètre. La bordure de P est le cercle (C) circonscrit au triangle AIJ et celle de P' est l'ensemble (C ') des points M d'affixe z tels que le point M' d'affixe $(z+1)(\bar{z}+i)$ appartiennent à l'axe (O,J).

Tâche : tu vas aider la mairie de LAKOU dans la mise en place de son projet en résolvant chacun des problèmes ci-après.

I

1) a- Mets sous forme algébrique le nombre complexe z_A.

b- En justifiant ta réponse, donne la nature du triangle AIJ ?

c- Calcule l'affixe du centre de (C).

2) On pose $z = x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

a- Calcule en fonction de x et de y la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de $z' = (z+1)(\bar{z}+i)$.

b- Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de (C ').

3) La mairie veut installer sur ce parc quatre robinets B, C et D tels que $z_D = 3+2i$, BCDE soit un parallélogramme et les affixes de B et C soient solutions de l'équation.

$(2iz+1)(\bar{z}+1-i\sqrt{3}) = 0$ avec $|z_B| < |z_C|$.

Un tuyau destiné à évacuer les eaux usées du parc doit être également placé. Son support est représenté par l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|iz+\frac{1}{2}\right| = \left|z+1+i\sqrt{3}\right|$.

a) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(2iz+1)(\bar{z}+1-i\sqrt{3}) = 0$;

b) Détermine les affixes de chacun des points B, C et E.

c) Justifie que le support du tuyau est la médiatrice du segment [BC].

II

Sur le site, il est prévu la construction d'un hall ayant la forme d'un tétraèdre SOA'B' où dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace, les points A' et B' ont pour coordonnées respectives (4 ;0 ;-2) et (-2 ; 5 ; -4). L'une des faces latérales de ce tétraèdre sera contenue dans le plan (P) : $5x+2y = 0$ et le sommet S appartiendra à l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB'} - 3\overrightarrow{MG}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$, où $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$ et G le centre de gravité du triangle OA'B'.

Le plafond de ce hall aura la forme d'un triangle HFT avec $H(0;0;6)$; $F(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 5)$ et T le point d'intersection de la droite (SA') et de la parallèle (Δ) à (OA') passant par H.

4) a- Démontre que A' est le barycentre des points pondérés (O ; 1) ; (B' ; 1) et (G ; -3).

b- Déduis en la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

c- Ecris une représentation paramétrique de (Γ).

5) Justifie que le sommet S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 8)

6) a- Ecris une représentation paramétrique de chacune des droites (A'S) et (Δ).

b- Déduis en que le point T a pour coordonnées $(1 ; 0 ; \frac{11}{2})$.

7) Quelle est, en unités d'aires, l'aire minimale de contre-plaqué à acheter pour la réalisation du plafond.

III

La mairie envisage la construction et le contrôle de deux routes aériennes dans ce parc. Elles sont représentées par les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques respectives dans un repère orthonormé de l'espace : (D_1) : $\begin{cases} x = 7+2t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$, $t \in IR$; (D_2) : $\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = t' \\ z = 6-t' \end{cases}$, $t' \in IR$

Le maire souhaite placer au point $N(1 ; \frac{2}{3} ; 3)$ un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R).

Soit (P_1) le plan contenant N et (D_1) et soit (P_2) celui contenant N et (D_2).

8) Prouve que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

9) a- Démontre que (D_2) est sécante à (P_1) et détermine les coordonnées de leur point d'intersection U.

b- Démontre que (D_1) est sécante à (P_2) et détermine les coordonnées de leur point d'intersection V.

10) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2) ; ce qui permettra d'envoyer d'un seul coup le même signal sur les deux routes.

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

11) m est un paramètre réel, pour des raisons d'intempéries le signal se propage suivant l'ensemble $(\sum_m) = (P_m) \cap (Q_m) \cap (R_m)$ où (P_m), (Q_m) et (R_m) sont les plans d'équations cartésiennes respectives : $mx + y - (1+m)z - 4 = 0$; $x+y+m^2z - m = 0$ et $x + y + mz - 1 = 0$.

a) Résous dans IR^3 suivant les valeurs de m le système d'équations :

$$(S_m) : \begin{cases} mx + y - (1+m)z - 4 = 0 \\ x + y + m^2z - m = 0 \\ x + y + mz - 1 = 0 \end{cases}$$

b) Déduis-en suivant les valeurs de m la nature de $(\sum_m)$.

SUJET N° 11

Contexte :

Sur le nouveau site aménagé pour sa production de coton, le vieux Jesugnon désire faire construire un magasin de stockage de forme cubique. Informé du projet, son fils Jesuvivi, élève en classe de terminale D, se propose d'utiliser ses connaissances mathématiques pour élaborer un plan d'aménagement du futur magasin.

Dans ses conjectures, Jesuvivi représente le magasin par un cube ABCDEFGH à l'intérieur duquel il a prévu trois lampadaires pour l'éclairage. Ces lampadaires sont matérialisés dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ par les points I, J et K, images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ telles que $\arg(z_I) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arg(z_K) = \frac{5\pi}{6}$ avec

$P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$.

Il suggère aussi que les graines sélectionnées soient expérimentées sur la partie du magasin matérialisée dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par l'ensemble (P) des points M de l'espace tel que

$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MH}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) = 0$

et pour l'aération du magasin, il prévoit un point d'entrée d'air située à l'intersection des ensembles (P) et (Δ) où (Δ) est l'ensemble des points M de l'espace tel que

$(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$.

Impressionné, après avoir pris connaissance du plan, le vieux Jesugnon veut en savoir davantage sur les intentions de son fils.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Jesuvivi à apporter plus de précision à son père à travers la résolution des trois problèmes suivants :

Problème 1

1) Justifie que
$P(z) = (z+i)\left(z^2 + (\sqrt{3} - 3i)z - 8\right)$

2) a) Justifie qu'une racine carrée de $26 - 6\sqrt{3}i$ est $-3\sqrt{3} + i$

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

c) Déduis-en l'affixe des points I, J et K

3) a) Démontre que IJK est un triangle rectangle

b) Détermine le centre Ω et le rayon r du cercle circonscrit au triangle IJK

4) Détermine l'affixe des points U et V pour que JKVU soit un losange de centre I

Problème 2

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le cube ABCDEFGH représenté sur la maquette de Jesuvivi est tel que :
$\overrightarrow{AB} = \vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$; $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ et
$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

5) Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(A,-1)$, $(B,1)$ et $(H,1)$.

6) a) Détermine les coordonnées des points A, B, H, G et K où K désigne le centre de gravité du triangle ABH

b) Démontre que OABG est un tétraèdre puis calcule son volume.

7) a) Démontre que (Δ) est une droite dont tu donneras une représentation paramétrique.

b) Vérifie que $G \in (P)$

c) Démontre que (P) est un plan dont tu donneras une équation cartésienne.

8) Détermine le point d'entrée d'air dans le magasin.

Problème 3

La voie d'accès au magasin est assimilée à une route rectiligne et est matérialisée dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par la droite (D') de systèmes d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$ et un des côtés du magasin est contenu dans le plan (Q) d'équation cartésienne $x - y + 3 = 0$

9) a) Démontre que (D') est parallèle à (Q)

b) Détermine une équation cartésienne du plan (R) contenant (D') et perpendiculaire à (Q)

10) a) Détermine un repère de la droite (D_1) intersection des plans (Q) et (R).

b) Détermine une équation cartésienne du plan (Γ) passant le point de (D') d'ordonnée 1 et perpendiculaire aux plans (Q) et (R)

SUJET N° 12

Contexte :

A l'approche de l'examen du baccalauréat, Dansou élève en classe de Terminale D se rend chez ADANDE un devin du village pour évaluer ses chances de réussir. A l'intérieur de la chambre de Dansou, contre un mur assimilé à un plan (P_1) se tient une corde ornée d'amulettes multicolores, la corde est assimilée à une droite (D_1)

Non loin de ce mur, on peut apercevoir une $2^{ème}$ corde assimilée à une droite (D_2). (D_1) est supposée contenue dans (P_1) et (D_2) parallèle à (P_1)

Des têtes d'oiseaux morts sont accrochées à un deuxième mur représenté par un plan (P_2)

La consultation se fait au moyen de cauris qu'il jette, la position des cauris et leur zone de chute déterminent les résultats de la consultation. Enfin un contre-plaqué représenté par un plan (P_3) sert de séparation dans cette chambre. Voyant tout ceci une peur envahit Dansou. Badou, un ancien élève de la terminale D, venu aider son père pour la circonstance rassure Dansou en lui disant : « Chez nous c'est les mathématiques et rien d'autres, tes connaissances en mathématiques te permettront de comprendre les différentes dispositions, les différentes zones délimités ». Dansou sourit alors.

Tâche : tu vas aider Dansou à découvrir les connaissances mathématiques qui se cachent derrière la chambre

Problème 1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. Les points A(-2 ;1 ;3) et B(1 : 1 ;-1) sont deux points de la droites (D_1). Détermine une représentation paramétrique de (D_1)

2. Une représentation paramétrique de (D_2) est
$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

a) Détermine un repère de (D_2)

b) Justifie que (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

c) Détermine une équation cartésienne de (P_1)

3. Pour toute la suite du problème 1 on a :
$(P_1) : 4x - 7y + 3z + 6 = 0$ et
$(P_2) : 2x + 3y - z + 1 = 0$

a) Détermine une représentation paramétrique de (P_2)

b) Justifie que (P_1) et (P_2) sont sécants.

c) Le point Q(-2 ; 0 ;0) est un point de (P_3) et (P_3) est perpendiculaire à (P_1) et (P_2).

Détermine une équation cartésienne du plan (P_3)

4. Une tête de hibou a été fixée à l'intersection des plans (P_1), (P_2) et (P_3).
   a) Résous dans $\mathbb{R}^3$, par la méthode du pivot de Gauss, le système $\begin{cases} -4x + 7y - 3z = 6 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x - 5y - 13z = -2 \end{cases}$
   b) Détermine la zone ou le point où a été fixée la tête de l'hibou.

Problème 2

ADANDE jette les cauris, ils atterrissent sur le sol en 2 points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. On suppose alors que le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}; \vec{e_2})$ On pose : $z_3 = z_1 \times z_2$

5. Écris sous forme algébrique z_3
6. a) Écris sous forme trigonométrique z_1, z_2 et z_3

b) Déduis-en les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

c) Représente dans le plan, les points images respectifs M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3

7. La consultation nécessitera beaucoup de sacrifice si $z_1^{24} + z_2^{22}$ est un nombre complexe non réel et non imaginaire
   a) Détermine alors la forme algébrique de $z_1^{24} + z_2^{22}$
   b) La consultation nécessitera -t - elle beaucoup de sacrifice ?

Problème 3

Trois ensembles (E_1), (E_2) et (E_3) sont les trois zones de chute des cauris. L'attention est portée sur le point de chute M d'un cauri sacré.

Pour tout point M d'affixe z différent de $-1 + 3i$ on pose :

$(E_1) = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z+1-3i} \in \mathbb{R}\right\}$

$(E_2) = \left\{M(z) / \frac{z+i}{z+1-3i} \in i\mathbb{R}\right\}$ $i\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres imaginaires.

$(E_3) = \left\{M(z) / \left|\frac{z+i}{z+1-3i}\right| = 1\right\}$

(E_1) est la zone où l'on obtient le succès avec la mention « passable »

(E_2) est la zone où on réussit avec la mention « assez-bien »

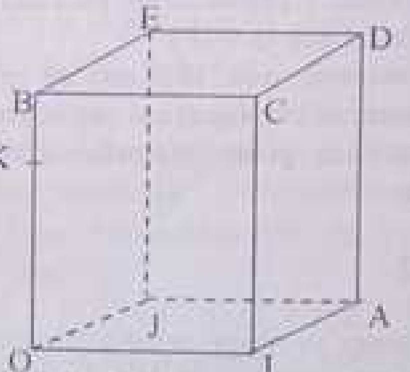
(E_3) est la zone d'échec

8. Détermine la nature de (E_3)
9. On pose $z = x + iy, x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
   a) Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z+i}{z+1-3i}$
   b) Détermine alors la nature de (E_1) puis celle de (E_2)
   c) Si $z = -\frac{1}{2} + i(\frac{2+\sqrt{17}}{2})$ A quel résultat doit s'attendre Dansou ?

SUJET N° 13

Contexte : Fabrication d'une armoire

Le chef du village de BAGNAN commande pour sa fille Gnon, élève en classe de Tle une armoire ayant la forme d'un pavé droit dont la base est un carré comme l'indique la figure ci-dessous. La hauteur de ce pavé droit est trois fois la longueur du côté de la base. K est un point de l'arête $[OB]$ tel que (O, I, J, K) est un repère orthonormé direct de l'espace. Gnon s'intéresse au volume du tétraèdre IABC et à un ensemble de points (Γ) dans l'armoire pour installer ses objets précieux et recherche dans le carré BCDE trois points qui lui serviront d'ornement.



Tâche : Tu vas aider Gnon à trouver des solutions à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1. a) Justifie que les points I, A, B, et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0 ; 0), (1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 3) et (1 ; 0 ; 3)

b) Justifie que les points I, A et C déterminent un plan (P) dont on précisera une équation cartésienne.

c) Détermine une équation cartésienne du plan (OIC).

d) Justifie que (OIC) et (P) sont perpendiculaires.

2. a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Calcule le volume du tétraèdre IABC

Problème 2

(Γ) est l'ensemble des points communs à trois plans (Q), (R) et (S) définis ci-dessous :

On donne les points $A_1(1;0;4)$, $A_2(0;1;4)$, $A_3(2;1;5)$ et $A_4(1;1;1)$ et les droites :

$(D_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 8 - t \end{cases}$ $(D_2): \begin{cases} x = 2k \\ y = -k; \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 3 \end{cases}$

$(L_1): \begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 + 2\alpha ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

$(L_2): \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

3. a) Démontre que A_1, A_2 et A_3 forment un plan (Q) dont tu donneras une équation cartésienne.

b) Détermine les coordonnées du point H projeté orthogonal de A_4 sur le plan (Q).

c) Déduis-en la distance de A_4 sur le plan (Q)

4. a) Démontre que (D_1) et (D_2) sont sécantes en point F dont tu préciseras les coordonnées.

b) Détermine une équation cartésienne du plan (R) contenant (D_1) et (D_2)

5. a) Démontre que les droites (L_1) et (L_2) sont strictement parallèles.

b) (L_1) et (L_2) détermine le plan (S). Donne une équation cartésienne de (S).

c) Calcule la distance de A_3 à la droite (L_2).

6. a) Détermine une représentation paramétrique de (Γ)

b) Étudie la position relative de (AB) et (Γ).

Problème 3

Dans le plan (BCD) muni du repère orthonormé direct (B ; C, E) les trois points qui serviront d'ornement à Gnon sont les images des racines du polynôme complexe de P défini par

$P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$.

Soit l'équation

$(E): z^2 - (5 - i)z + 8 - 4i = 0$

7. a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) Démontre que P admet une racine imaginaire pure z_0 que tu préciseras.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les autres racines de P avec $Im(z_1) > 0$

8. M_0, M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2

a) Justifie que le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle et rectangle en M_1

b) Détermine une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$

c) Détermine l'affixe z_3 du point M_3 tel que $M_0M_1M_2M_3$ soit un parallélogramme

d) Justifie que le quadrilatère $M_0M_1M_2M_3$ est un carré

9. On pose $u = z_0 + z_1$

a) Écris u sous forme exponentielle u^{2011}

b) Calcule sous forme algébrique u^{2011}

c) Détermine $n \in \mathbb{N}$, pour que u^n soit imaginaire pur.

10. Gnon pourra-t-elle utiliser les points M_0, M_1 et M_2 pour l'ornement dans son armoire ?

SUJET N° 14

Contexte : Le gisement d'or de Perma

Un paysan, dans l'Atacora, est à la recherche du gisement d'or de Perma. Selon les informations reçues le gisement est situé dans le plan d'un triangle ABC, dans un plan (P) et dans un troisième plan (Q). Le plan (Q) passe par A et est orthogonal au plan (P) et à un autre plan (P'). Il veut en outre faire une haie circulaire pour sécuriser le domaine où se trouve le gisement d'or.

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ convenablement choisi, d'unité 2 cm, A est de coordonnées (2, 0, 2) les plans (P) et (P') ont respectivement pour équation :

$$x - y + z - 1 = 0 \text{ et } 3x + y - 2z + 5 = 0$$

Tâche : Tu vas aider le paysan à trouver des solutions à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. a) Justifie que (P) et (P') sont sécants.

b) Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) des plans (P) et (P')

2. a) Justifie que (P) et (P') sont orthogonaux

b) Calcule la distance du point A au plan (P) et celle de A à (P')

c) Déduis-en la distance de A à la droite (Δ)

3. Détermine une équation cartésienne du plan (Q)

Problème 2

Dans ses recherches, le paysan a su que les points B et C ont pour coordonnées respectives (1, -2, -2) et (0, 1, -1) et que pour accéder au domaine du gisement il faut utiliser un ensemble (Γ) de point M de l'espace tels que :

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

4. a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, 1) (B, 1) et (C, -1)

b) Justifie que le quadrilatère AGBC est un parallélogramme

c) Détermine (Γ) puis donne une représentation paramétrique de (Γ)

5. a) Justifie que la droite (AC) est sécante à chacun des plans (P) et (P')

b) Détermine les coordonnées du point d'intersection I de la droite (AC) et du plan (P) et celles du point d'intersection J de (AC) et (P')

c) Justifie que OIJG est un tétraèdre puis calcule son volume

6. a) Justifie que les points A, B et C déterminent un plan (R), puis donne une équation cartésienne de ce plan.

b) Calcule l'aire du triangle ABC

7. Détermine avec précision la localisation du gisement d'or recherché par le paysan

Problème 3

La haie circulaire est contenue dans le plan d'équation z = 1. Ce plan est assimilable au plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O_1; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Cette haie passe par trois points dont les affixes sont les solutions de l'équation

$(E): z^3 - z^2(3+2i) + z(3+5i) - 6i - 2 = 0$

8. On considère l'équation $(1): z^2 - 3z + 3 - i = 0$
   a) Résous dans ℂ l'équation (1)
   b) Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0
   c) Résous dans ℂ l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les autres solutions de (E) avec $Im(z_2) < 0$

9. a) Écris z_2 sous forme exponentielle.

b) Calcule sous forme algébrique z_2^{2011}

c) Soit P un entier. Démontre que z_2^{4P} est un réel et précise son signe.

d) Détermine les entiers naturels n tels que z_2^n soit imaginaire pur.

10. On désigne par M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.
   a) Démontre que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle et isocèle
   b) Détermine une équation cartésienne de la haie circulaire
   c) Le gisement d'or est-il bien sécurisé ? Justifie ta réponse.

SUJET N° 15

Contexte : Secours aux riverains du lac Ahémé.

Suite à la crue du lac Ahémé, les autorités de la commune de SEGBOHOUE, dans le souci de secourir les riverains de ce lac, ont sollicité l'ingénieur ZIKO pour l'installation des tentes sur un domaine choisi pour la circonstance. Les tentes à installer sont toutes identiques et assimilables à une pyramide EFGH de sommet E, de base triangulaire FGH telle que les triangles EFG, EGH et EFH soient rectangles et isocèles en E.

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour lequel l'unité de longueur est quatre mètres, les points E, F, G et H ont respectivement pour coordonnées :

(-1 ; 1 ; -1), (0 ; 1 ; -1), (-1 ; 2 ; -1) et (-1 ; 1 ; 0). On désigne par E' le projeté orthogonal de E sur le plan (FGH). Après l'installation des tentes ainsi que l'aire de la surface du domaine sur lequel les tentes seront installées, il est également prévu, l'installation d'un stand de jeu de hasard pour le loisir des riverains et le tracer d'une route pour la circulation.

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes suivants à travers lesquels tu détermineras les différentes grandeurs dont les autorités communales ont besoins pour les archives.

Problème 1

1. Démontre sans utiliser les coordonnées des points F, G et H que le triangle FGH est équilatéral.
2. Vérifie que le triangle EFG est rectangle et isocèle en E.
3. a) Exprime $\overrightarrow{FG} \wedge \overrightarrow{FH}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$

b) Calcule l'aire du triangle FGH en mètre carrés.

c) Détermine une équation cartésienne du plan (FGH). Déduis-en la distance EE'.

d) Calcule le volume en m³ de la pyramide représentant l'une des tentes.

Problème 2

Dans le plan complexe (P) muni du repère orthonormé direct (O ; I, J) on note A et B les points d'affixes respectives 1 et -2i. Le domaine (D) sur lequel les tentes seront installées est délimité par l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $(z+2i)(\bar{z}-2i) = 4$. La route à tracer est assimilable à l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 4$

4. On note z_0 le nombre complexe
$$z_0 = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
   a) Calcule z_0^2 puis détermine le module et un argument de z_0^2
   b) En déduis le module et un argument de z_0
   c) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

5. On désigne par f l'application qui à tout point d'affixe z différent de -2i associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+4i}{z-2i}$
   a) Vérifie que $z' - 1 = \frac{6i}{z-2i}$

b) En déduis que $BM \times AM' = 6$ puis trouve une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}})$

6. a) Détermine les ensembles (Δ) et (C)

   b) Construis (Δ) et (C) dans le repère (O, I, J)

   c) Calcule l'aire de la surface du domaine (D) en mètre carrés sachant que $OI = 100$ mètres.

Problème 3

Le jeu de hasard prévu est doté de deux prix : un prix destiné au premier et autre au deuxième. Le deuxième du jeu reçoit un prix d'un montant de $10.000m$ francs où m est un réel tel que $h(3) = m$ et le premier reçoit un prix d'une valeur α en dizaine de milliers de francs. α est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$; h et f sont des fonctions numériques.

Partie A

Soit une fonction numérique g définie par

$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

7. Détermine l'ensemble de définition D de la fonction g
8. Calcule les limites de g aux bornes de D
9. La fonction h est définie par : $\begin{cases} h(x) = g(x) & si\ x \in D \\ h(3) = m \end{cases}$

   a) Détermine m pour que la fonction h soit le prolongement par continuité de g en 3

   b) Déduis-en le montant du deuxième prix du jeu.

   c) Étudie la dérivabilité de h en 3 en prenant pour valeur de m la valeur précédente trouvée.

Partie B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{|x|}}$

10. Justifie que f est continue sur son ensemble de définition.
11. Écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue
12. Soit a et b deux réels positifs

    a) Démontre que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

    b) Déduis-en le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$

    c) Détermine les limites de f à $+\infty$ et à $-\infty$
13. On pose $I = [0; +\infty[$

    a) Détermine $f(I)$

    b) Soit K l'application de I vers $f(I)$ telle que $k(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. Démontre que K est une bijection.
14. On pose $l(x) = f(x) - \frac{1}{2}$

    a) Démontre que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0{,}8 ; 1{,}1]$. Déduis-en que α est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

    b) Déduis-en une valeur approchée par excès du premier prix à gagner pour le jeu de hasard

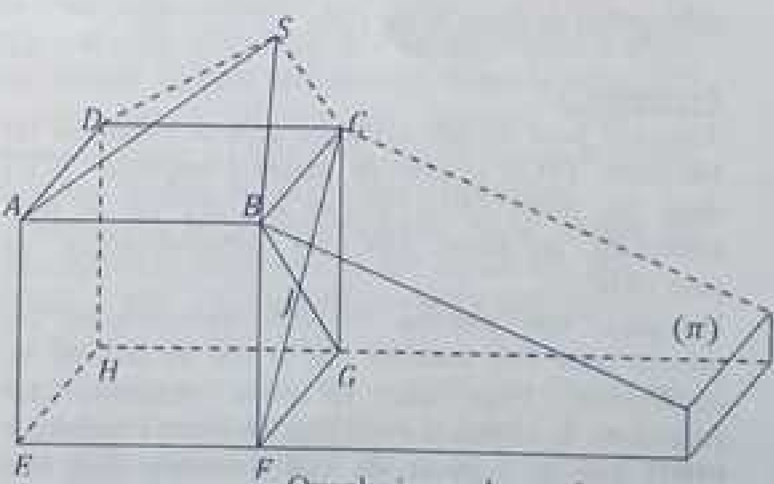
SUJET N° 16

Contexte : Quankpé dans le cabinet de l'ingénieur PIKO

Quankpé, un élève en classe de terminal est allé rendre visite à son oncle PIKO, ingénieur en génie civile. Dans le cabinet de ce dernier il découvre le plan d'une salle de conférence que l'ingénieur projette de construire (Voir figure)

Par rapport à ce plan, PIKO donne les informations suivantes :

- ✓ $ABCDEFGH$ est un cube d'arrêt 2, I et J sont les milieux respectifs de $[HG]$ et $[BG]$
- ✓ $[TQ]$ est le support d'une ampoule destinée à éclairer tout l'intérieur du bâtiment où T et Q sont des points appartenant respectivement au segment $[SA]$ et $[SD]$.
- ✓ On pose $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$; $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$



Quankpé se demande quelles seront dans l'espace les postions relatives de certaines droites et plan de cette figure et se propose d'utiliser ses connaissances en géométrie dans l'espace pour aider son oncle dans ses préoccupations.

Tâche : Tu vas aider l'ingénieur PIKO et Quankpé en résolvant chacun des problèmes suivants.

Problème 1 :

1. a- Justifie que le quadruplet $(H;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère orthonormé.

b- Détermine les coordonnées des points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J dans ce repère.

2. a- Calcule $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG}$

b- Déduis en que la droite (AG) et le plan (BDE) sont perpendiculaires et détermine une équation cartésienne du plan (BDE).

3. K désigne le centre de gravité du triangle BDE. Démontre que $(BDE) \cap (AG) = \{K\}$.

4. Dans le repère $(H;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le point S a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};3\right)$.

a- Etablis une représentation paramétrique de (SAD).

b- Déduis en qu'une équation cartésienne du plan (SAD) est : $2y - 3z + 6 = 0$

c- Calcule la distance du point J au plan (SAD).

Problème 2 :

Pour améliorer l'éclairage dans la salle, PIKO propose de placer deux plaques réfléchissantes dans les plans (Q) et (R) d'équations cartésiennes respectives $x + y + z - 1 = 0$ et $x + y - 2z = 0$

5. a- Démontre que (Q) et (R) sont perpendiculaires.

b- Détermine un repère de la droite (D) intersections des plans (Q) et (R).

6. Soit (D') la droite passant par le point $B(2,2,2)$ et perpendiculaire au plan (Q).

a- Détermine une représentation paramétrique de (D').

b- Déduis en les coordonnées du point L projeté orthogonal du point B sur (Q).

Problème 3 :

Toujours pour un bon éclairage de tout l'intérieur du bâtiment, PIKO décide de placer l'ampoule $[TQ]$ dans les plans (SAD) et (π) où (π) est le plan contenant la droite (BC) et perpendiculaire au plan (BIC).

De plus, une antenne de télécommunication est prévue pour être installée sur le toit de la salle de conférence. Pour une réception optimale des émissions, le technicien sollicité, informe l'ingénieur PIKO que le support de cette antenne doit être l'intersection du plan (SAD) et de l'ensemble (π') des points M de l'espace tels que

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MS}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MS}) = 0$

PIKO décide de choisir pour support de l'antenne la droite (Δ) de repère $(V;\vec{u})$ avec $V(7;-3;0)$ et $\vec{u}(-13;3;2)$. Quankpé se demande si ce choix est convenable.

7. a- Démontre que $\vec{n}(0;4;-2)$ est un vecteur normal au plan (BIC).

b- Deduis que $\vec{n}'(0;4;8)$ est un vecteur normal au plan (π).

c- Ecris une équation cartésienne de (π).

8. a- Prouve que (SAD) et (π) sont sécants et écris une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ').

b- Calcule les coordonnées des points T et Q puis déduis la longueur de l'ampoule $[TQ]$.

9. a- Détermine les coordonnées du point Ω barycentre des points pondérés $(A;1), (D;1)$ et $(S;-1)$.

b- Justifie que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{M\Omega}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{OS}$, où O est le milieu de $[AD]$.

c- Prouve que (π') est un plan dont-on déterminera une équation.

d- Détermine une représentation paramétrique de $(\pi') \cap (SAD)$.

10. Le choix de l'ingénieur PIKO est-il convenable ? Justifie ta réponse.

11. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan (SAD) tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MS}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MS}\|$$

SUJET N° 17

Contexte : Construction d'une salle d'accueil.

Le devin Adandé a invité un chef maçon à lui construire une salle pour accueillir ses clients en respectant les indications ci-après :

- La salle doit avoir la forme d'un pavé-droit de volume $260\,m^3$ et de base ABCD où les sommets A, B, C et D dans le plan complexe orienté muni du repère orthonormé direct $(I,\vec{u},\vec{v})$, sont les images des nombres complexes racines du polynôme $P(z) = z^4 + (6-8i)z^3 + (-3-54i)z^2 + (-108-106i)z + (-340-180i)$ tels que $Re(z_A) > Re(z_D) > Re(z_B) > Re(z_C)$
- A l'extérieur de la salle le chef maçon doit placer une lampe en un point O d'affixe $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
- La salle doit avoir deux entrées.

Conscient des risques qu'il court si la construction de la salle ne respecte pas rigoureusement les indications à lui données par le devin, le chef maçon sollicite son fils Tadagbé élève en classe de terminale D à l'aider à connaitre la hauteur h de la salle ainsi que les coordonnées exactes du point O avant d'exécuter les différents autres travaux pour achever la construction de la salle.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Tadagbé à venir à bout des préoccupations de son père en résolvant les problèmes suivants.

Problème 1

1- Démontre qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z + 1 - 6i)Q(z)$.

2- Justifie que

$Q(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 22i)z + 20 - 60i$

3- a) Démontre que Q admet une racine réelle α que tu détermineras.

b) Détermine le polynôme R de degré 2 vérifiant $Q(z) = (z - \alpha) R(z)$

4- a) Calcule $(4 + 6i)^2$

b) Résous l'équation $R(z) = 0$ puis déduis les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$

5- Justifie alors que $z_A = 2 + 4i$; $z_B = -2 - 2i$; $z_C = -5$ et $z_D = -1 + 6i$

6- a) Démontre que ABCD est un rectangle.

b) L'unité de longueur étant le mètre détermine la hauteur h de la salle.

Problème 2

En réalité l'affixe z_o est une solution de l'équation (E) : $1 - z^5 = 0$

7- Justifie que : $z_o{}^6 = z_o$; $z_o{}^7 = z_o{}^2$ et $z_o{}^8 = z_o{}^3$

8- a) Détermine le module et un argument de $1 - z_o$

b) Déduis-en que $1 - z_o \neq 0$

9- a) Vérifie que $(1 + z_o + z_o{}^2 + z_o{}^3 + z_o{}^4)(1 - z_o) = 1 - z_o{}^5$

b) Déduis-en que $1 + z_o + z_o{}^2 + z_o{}^3 + z_o{}^4 = 0$

10- On pose $z_1 = z_o + z_o{}^4$ et $z_2 = z_o{}^2 + z_o{}^3$

a) Démontre que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

b) Détermine z_1 en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

c) Résous l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduis la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

11- Détermine alors les coordonnées du point O.

Problème 3

Dans le même repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$, les deux entrées de la salle sont situées sur des allées (L_1) et (L_2) assimilables aux courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = \frac{2x-2-\sqrt{x^2+x-2}}{x-\sqrt{x^2+x-2}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + mx$ $(m \in \mathbb{R})$ entre lesquelles se trouvent deux pieds d'arbres aux points E et F tels que

E($\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+3x+4}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$)

F($\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{3-\sqrt{2x-1}}$; $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{\sqrt{3x+19}-4}$)

Détermine les coordonnées de E et de F.

12- a) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Démontre que f admet un prolongement par continuité en 2 puis définis ce prolongement noté h

13- Détermine suivante les valeurs de m la limite de g en $-\infty$

SUJET N° 18

Contexte

Le père de Neba a été récemment nommé responsable du musée de son village. Neba un élève en classe de terminale scientifique veut lui proposer un projet de réfection dudit musée. Dans l'élaboration du plan du projet, il représente le sommet du musée en forme de paillote par un point O et il munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour la résistance de la paillote, il dispose des supports reliant les points $A(1; -2; -1)$, $B(3; -4; -5)$, $C(0; 1; 2)$ et $D(0; 1; 0)$ puis il place une plaque servant de plafond dans le plan (P) passant par le milieu du segment [AB] et perpendiculaire à (AB) dans lequel il prévoit placer aussi des lampes en des points stratégiques.

Le support de la poutre principale de la paillote est l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que : $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MD}$ où $G = bar\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$

Par ailleurs, une tige de support la droite (Δ') perpendiculaire au plafond relie le point C à un point N du plafond où il prévoit placer un projecteur pour éclairer l'intérieur du musée.

Tâche : Tu es invité (e) à participer à la réalisation du projet de Neba en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1) a) Démontre que les points A, B, C et D sont non coplanaires et calcule le volume du tétraèdre ABCD

b) Détermine une équation cartésienne du plan (P)

c) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ')

2) a) Détermine les coordonnées du point N

b) Calcule la distance du point C au plafond.

3) a) Détermine les coordonnées du point G

b) Démontre (Δ) est une droite dont tu donneras un système d'équations cartésiennes

c) Les droites (Δ) et (Δ') sont-elles parallèles ? sont-elles sécantes ? sont-elles coplanaires ?

Problème 2

A l'intérieur du musée, Neba veut aménager un contour en forme d'un quadrilatère EFGH. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$, les contraintes du réaménagement sont telles que les points E, F et G sont les images des solutions de l'équation

(Γ): $z^3 + (2+4i)z^2 + (9+14i)z + 6(6+i) = 0$

Le point H ayant pour affixe $(\sqrt{2}+1) + i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

4) a) Calcule $(4-6i)^2$

b) Démontre que l'équation (Γ) admet une solution imaginaire pure z_0 que tu préciseras.

c) Resous dans $\mathbb{C}$ l'équation (Γ)

5) En réalité les points E, F et G ont pour affixes respectives -3; $2i$ et $1-6i$

a) Démontre que EFG est un triangle rectangle

b) Détermine l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle EFG

6) M un point d'affixe z et on pose $T = \frac{z-1+6i}{z+3}$

a) Donne une interprétation géométrique de $|T|$ et $\arg(T)$

b) Déduis-en une équation cartésienne de la médiatrice du segment [EG]

7) a) Calcule le module et un argument de z_H

b) Ecris sous forme exponentielle les nombres complexes $u = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $v = 1 + i\sqrt{3}$

c) Justifie que pour tout nombre réel θ,

$1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

8)En remarquant que $z_H = u + v = u\left(1 + \frac{v}{u}\right)$, écris z_H sous forme trigonométrique puis déduis-en la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{24}$

Problème 3

Neba prévoit sur certains murs du musée des décorations dont le l'un des motifs à l'allure de la courbe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + x - 1 & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} & si\ 0 < x < 1 \\ f(x) = x - 1 - \sqrt{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

9) a) calcule les limites suivantes :

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1}$

b) Détermine le domaine de définition D de f

10) a) peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

b) Si oui détermine le prolongement par continuité de f en 1.

11) a) calcule les limites de f aux bornes de D

b) Etudie la continuité de f sur D

12) Soit g la fonction définie de K vers $g(K)$ par $g(x) = f(x)$ où $K = [\frac{5}{4}; +\infty[$

Démontre g est une bijection de K sur un intervalle J à préciser.

SUJET N° 19 (PI)

Exercice 1

C désigne l'ensemble des nombres complexes et (P) le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

1) Calculer $(\sqrt{3} - i)^2$

2) Résoudre dans C l'équation :

$-Z^2 + (\sqrt{3}+3i) + 2 - 2\sqrt{3}\,i = 0$

On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$; $2i$; $-2+2i$

a) Déterminer la nature du triangle OAB ;

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle OAB ;

c) f est l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z$; vérifier que f(B) = A ;

d) Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point C', image du point C par f. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice 2

1- Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+x-2}}{x^2-4}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h ;

b) Démontrer que h admet un prolongement par continuité en $x_0 = 2$ et définir ce prolongement.

2- Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{1+x}$

a) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α x ∈]0,4 ; 0,5[

b) En déduire le signe de f(x) sur son ensemble de définition ;

c) Démontrer que $f'(\alpha) = -4 - 6\alpha$ et préciser le signe de $f'(\alpha)$;

d) Démontrer que l'équation f(x) = x admet deux solutions dont l'une est égale à -1 et l'autre $\beta \in]0 ; 1[$

Problème

A- Soient a, b et c trois nombres réels ;

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x^2+1}}$ et on désigne par (μ) sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer les réels a, b et c sachant que (μ) passe par le point $A(2 ; \frac{2\sqrt{5}}{5})$ et admet au point $B(1 ; \frac{\sqrt{2}}{2})$ une tangente de coefficient directeur $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

B- On considère la fonction g de IR vers IR définie par :

$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et on note (C) sa courbe dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Etudier les variations de g ;

2) a- Déterminer g(IR)

b- Justifier que g est une bijection de IR sur]-1 ;1[

3) a- Ecrire l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse O

b- Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) et en déduire que O est un point d'inflexion à la courbe (C) ;

c- Tracer la courbe (C). (prendre $\|\vec{i}\| = 1$cm

4) Soit h la bijection réciproque de g et (C') sa courbe.

a- Déterminer le plus grand intervalle de IR sur lequel h est dérivable et calculer le nombre dérivé de h en $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b- Dresser le tableau de variation de h ;

c- Donner une équation de la tangente à (C') au point d'abscisse O ;

d- Tracer la courbe (C').

5) Définir l'expression de la bijection réciproque de g.

SUJET N° 20

Contexte : Une course d'endurance.

Au cours d'une séance de sport d'une classe de terminale scientifique de CSGA, le chargé des activités se propose d'organiser entre les candidats une épreuve d'endurance dont l'allure de la piste (P) est matérialisée par l'ensemble des points M vérifiant : $h(M) = 18$ où h désigne l'application définie du plan complexe orienté muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ vers ℝ qui, à tout point M du plan, associe le réel :

$\overline{ME}.\overline{MF} + 2\overline{MF}.\overline{MG} + 3\overline{MG}.\overline{ME}$ avec E, F et G les points dont les affixes respectives z_E, z_F et z_G sont les racines du polynôme $f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$ et $Im(z_E) > Im(z_F) > Im(z_G)$.

Tchéké un élève de la classe décide de déterminer la distance à parcourir lors de cette épreuve d'endurance et de connaître les avantages qu'offrent les autres pistes de course représentées sur le terrain de sport.

Tâche : Pour ton évaluation tu vas aider Tchéké à satisfaire certaines de ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-après

Problème 1 :

1) Démontre qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z+4)Q(z)$.

2) a) Détermine Q(z)

b) Résous dans ℂ l'équation $f(z) = 0$.

3) a) Précise z_E, z_F et z_G

b) Quelle est la nature du triangle EFG ?

4) On suppose que $z_E = -1 + 3i$; $z_F = 1 + i$ et $z_G = -4$

Détermine l'affixe du point T barycentre des points E ;F et G affectés respectivement des coefficients 4 ;3 et 5.

5) a) Calcule $h(G)$

b) Exprime $h(M)$ en fonction de MT^2 et de $h(T)$.

c) Détermine l'allure de la piste (P).

d) Quelle est alors la distance à parcourir lors de cette épreuve d'endurance

Problème 2 :

Le terrain de sport est représenté dans le plan par un parallélogramme ABQK tel que :

- le point A est d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$
- le point B est tel que OAB est un triangle équilatéral direct.
- le point Q est le milieu du segment [OB].

6) a) Démontre que le point B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$.

b) Déduis l'affixe q du point Q.

c) Détermine l'affixe k du point K.

7) a) Démontre que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OK};\overrightarrow{AK}}\right) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

b) Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ?

c) Précise la nature du quadrilatère OQAK

8) a) Justifie que $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) Ecris sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) : $z^3 + 2 - 2i = 0$.

9) Démontre que les points dont les affixes sont les solutions de (E) forment un triangle équilatéral.

Problème 3 :

Parmi toutes les pistes de course d'endurance tracées sur le terrain de sport, Tchéké remarque celles dont les allures (C_f) , (C_g) et (C_h) sont les courbes représentatives respectives des fonctions numériques à variables réelle f ; g et h définies par :

$f(x) = \frac{x^2+1}{|x-3|+2x+1}$; $g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-x}$ et

$h(x) = \begin{cases} \frac{x-5\sqrt{x}+4}{x-1} & si\ x \in [0;1[\\ mx+n & si\ x \in [1;2] \\ -x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$ où $(m,n) \in \mathbb{R}^2$

10) Détermine les ensembles de définition Df ; Dg et Dh respectifs des fonctions f ; g et h

11) a) Calcule $h(1)$ et $h(2)$ en fonction de m et n.

b) Justifie que la limite à gauche en 1 de h est égale à $-\frac{3}{2}$.

c) Justifie que h en continue en 1 et en 2 si $m = -\frac{5}{2}$ et $n = 1$.

12) Etudie les branches infinies et précise les asymptotes à la courbe (C_f)

13) Démontre que la fonction i définie par

$\begin{cases} i(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-x}\ si\ x \neq 0\ et\ x \neq 1 \\ i(0) = i(1) = -\pi \end{cases}$

est un prolongement par continuité de g.

SUJET N° 21

Contexte

L'entrepreneur Nonvignon a gagné l'appel d'offre pour la construction d'un bâtiment administratif. Deux décorations sont prévues sur le portail principal du bâtiment : l'une constituée d'un triangle ABC inscrit dans le cercle (C) et l'autre à l'intérieur d'un quadrilatère EFGH. Le portail est situé dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Les points A, B et C sont les points images des racines du polynôme

$P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$ et les points E, F, G et H sont les points dont les affixes sont solutions de l'équation :

(E_2): $z^4 + 119 - 120i = 0$. Un endroit est prévu pour permettre aux usagers de garer leurs motos ou leurs véhicules, cet endroit est couvert d'un toit soutenu par des piliers dont l'un des supports est la droite (D_1) intersection de deux plans (P_1) et (P_2)

Nonvignon fait appel à son jeune frère Thalès élève en classe de terminale scientifique pour l'aider à mieux comprendre certaines données techniques qui sont dans le cahier de charge à savoir : la nature du triangle ABC, l'équation cartésienne du cercle (C), les affixes des points E,F,G,H et autres ...

Tâche : Tu es invité(e) à faire le travail de Thalès, en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1-

a) Mets $P(bi)$ sous forme algébrique où b est un nombre réel non nul.

b) Démontre que l'équation (E_1): $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 à préciser

c) Ecris $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes dont l'un $Q(z)$ de degré deux.

d) Détermine les racines carrées du nombre complexe $u = 26 - 6i\sqrt{3}$

e) Résous alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1).

2- On suppose que les points A, B et C ont pour affixes respectives

$a = \sqrt{3} + i$, $b = -2\sqrt{3} + 2i$ et $c = -i$

a) Détermine une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

b) Détermine alors une équation cartésienne du cercle (C).

c) Détermine les affixes d_1 et d_2 des points D_1 et D_2 pour le quadrilatère AD_1D_2B soit un carré et que

$mes(\widehat{\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et

$mes(\widehat{\overrightarrow{BD_2},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3-

a) Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.
b) Calcule : $(2-3i)^4$ et en déduire les solutions de l'équation (E_2)
c) Donne alors la nature du quadrilatère EFGH sachant qu'il n'est pas croisé.

Problème 2

Pour une étude technique, décorateur veut connaître les racines du polynôme f tel que
$f(z) = -2z^4 + 6z^3 - 9z^2 + 6z - 2$

4-
a) Compare $f(z)$ et $\overline{f(z)}$
b) Démontre que si le nombre complexe z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $z_0 \neq 0; \overline{z_0}; \frac{1}{z_0}; \frac{1}{\overline{z_0}}$ sont solutions de l'équation $f(z) = 0$
c) Démontre qu'une solution de l'équation $f(z) = 0$ est sous forme $a + i$ où $a \in \mathbb{R}$
d) Déduis-en les solutions de l'équation $f(z) = 0$

5- Soit u et v deux nombres complexes non nuls de même module r et d'arguments respectifs α et β. En écrivant u et v sous forme trigonométrique, démontre que le nombre complexe $Z = \frac{(u+v)^2}{uv}$ est un nombre réel positif.

6- Soit l'équation
$$(E_a) : iz^2 - 2(\sin 2a + i)z + 2\sin 2a = 0$$
$$\text{où } a \in [0, 2\pi[$$
a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a)
b) Calcule suivant les valeurs du nombre réel a le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E_a).

Problème 3 :

Les voies qui seront utilisées pour l'avec au bâtiment sont modélisées par les fonctions f, k et g telles que :

✓ f est définie sur $[5\,;8[\cup]8\,;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+1} - x + 3}{\sqrt{x-4} - 2}$$

✓ $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x + \sqrt{4x^2-1}$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^3 + 3x - 1$

Nonvignon voudrait étudier certaines propriétés des fonctions f, k et g.

7)
a) Justifie que f admet un prolongement h par continuité en 8.
b) Définis h.

8)
a) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
b) Déduis-en le nombre de solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g(x) = 0$.
c) Etudie alors le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

9)
a) Justifie que l'ensemble de définition D de k est $D =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.
b) Calcule les limites de k en $-\infty$ et en $+\infty$

10)
a) Justifie que k est continue en tout élément de D.
b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $k(x) = 0$.
c) Déduis-en le signe de $k(x)$ sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

11)
a) Justifie que :
$\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$, $k'(x) = -\frac{2k(x)}{\sqrt{4x^2-1}}$
où k' est la fonction dérivée de k.
b) On pose $I =]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et on considère la fonction φ définie par :
$\varphi: I \to k(I)$
$x \mapsto \varphi(x) = k(x)$
Justifie que φ est une bijection
c) Justifie que le point $F\left(2; -\frac{5}{8}\right)$ est un point de la représentation graphique de la bijection réciproque φ^{-1} de φ
d) Détermine $\varphi^{-1}(x)$ pour tout x élément de $k(I)$.

SUJET N° 22

Contexte : Salle de spectacle.

La mairie de GBADJA dispose d'une salle de spectacle qui est constituée de deux compartiments essentiels : un compartiment pour les spectateurs qui à la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête 12m et le second compartiment est une chambre pour projection de films. L'un des murs de la chambre de projection est la face ABFE de centre O. Une ouverture circulaire faite dans ce mur permet de projeter les films sur l'écran situé dans le plan de la face DCGH.

La trajectoire suivie par l'image projetée sur l'écran est un ensemble (Δ) de points M de l'espace tels que :
$4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \overrightarrow{ML}$ où L est le barycentre des points pondérés (C, 3) et (G, 1). On désigne par I le milieu de $[EH]$. La façade BCGF est décorée à l'aide de deux courbes (Γ) et (Γ'). L'espace est muni du repère orthonormé direct

$(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes suivants pour t'imprégner des préoccupations de la mairie de GBADJA lors de la réalisation de cette salle.

Problème 1 :

1. Détermine les coordonnées des points O, I et L
2. a) Justifie que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

b) Donne une représentation paramétrique de (Δ).

3. a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) de l'écran

b) Justifie que (Δ) et (P) sont sécants, puis détermine les coordonnées de leur point d'intersection A_0.

4. a) Justifie que $OICA_0$ est un tétraèdre, puis calcule son volume ϑ

b) Calcule l'aire du triangle OIC puis déduis la distance de A_0 au plan (OIC)

c) Justifie que les plan (OIC) et (P) sont sécants et détermine les équations cartésiennes de leur droite d'intersection (D)

d) Justifie que (Δ) et (D) sont non coplanaires

Problème 2 :

L'ouverture circulaire faite dans la face ABFE pour la projection des films est l'image par une transformation s du cercle passant par le point O et par deux autres points J et K dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ *de* l'équation

(E): $z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$, *où* α est un nombre complexe. O est l'origine d'un repère orthonormé du plan complexe associé à la face ABFE

5. a) Vérifie que $\alpha + 2i$ est une solution de (E)

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) Détermine α pour que OJK soit un triangle isocèle et rectangle en O

6. En réalité les points J et K sont d'affixes respectives $-\frac{3}{2}(1+i)$ *et* $\frac{3}{2}(-1+i)$ et s est la transformation qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$ avec a et b des nombres complexes.

a) Sachant que s transforme J en K et K en O détermine a et b

b) Détermine une équation cartésienne de l'ouverture circulaire pour la projection des films.

Problème 3

La courbe (Γ) est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$ *et* (Γ') est la courbe de la fonction k^{-1} réciproque d'une application k.

Partie A :

On considère la fonction g définie par :

$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

7. a) Étudie les variations de g

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que $0{,}78 < \alpha < 0{,}79$

c) Déduis-en le signe de $g(x)$

d) Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$ puis encadre $f(\alpha)$

e) Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β telle que $0{,}4 < \beta < 0{,}5$

f) Étudie le sens de variation de g'. Que représente le point $I_1(0,1)$ pour la courbe (C_g)

g) Justifie que $\forall\, x \in [0{,}4 ; 0{,}5]$;

$$|g'(x)| \leq \frac{3}{2} \text{ puis que } |g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$$

Partie B

8. a) Étudie le sens de variation de f (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $g(x)$)

b) Dresse le tableau de variation de f

c) Étudie les branches infinies de (Γ)

9. Soit k l'application de $\mathbb{R}_-$ dans $f(\mathbb{R}_-)$définie par $k(x) = f(x)$

a) Justifie que k admet une application réciproque k^{-1} et précise son ensemble de définition J.

b) Étudie la dérivabilité de k^{-1} sur J justifie que le point $A_1(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3}))$ est un point de (Γ') puis détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ') au point A_1

10. Trace avec soins les courbes qui ont servi à la décoration de la façade BCGF de la salle de spectacle dans un repère orthonormé d'unité 2 cm

SUJET N° 23

Contexte : Une excursion à Nati

Pour la distraction de ses élèves, le collège Catholique les hibiscus » second cycle, organise pour ses élèves de terminales une excursion sur un site touristique à Nati. Le comité d'organisation dont fait parti votre professeur de mathématiques soumet à votre analyse quelques informations. Outre la description de l'itinéraire à suivre, le comité informe que, ce site identifié par un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dispose d'un bar dancing de forme tétraédrique ABCD entièrement sécurisé par une clôture circulaire (C) circonscrit à un triangle IJK dont les points I, J et K matérialisent trois entrées principales du bar, puis un poste de sécurité positionné en un point L tel que le quadrilatère IOKL soit un parallélogramme direct. Dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points I, J et K ont pour affixes respectives $z_0 = \beta i$;

$z_1 = \alpha + \beta i$ *et* $z_2 = \alpha - \beta i$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\beta\ \mathbb{R}_+^*$ où z_0 , z_1, z_2 sont les racines du polynôme complexe :

$$P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(1+i)z - 16i$$

Le censeur du collège, très intéressé par cette description, désire en savoir plus sur le bar dancing et l'itinéraire de l'excursion et sollicite votre aide.

Tâche : Tu es invité(e) à aider le censeur à découvrir les aspects mathématiques de cette description en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1

1. Détermine le nombre réel β.
2. a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

b) Déduis-en les affixes des trois entrées du bar dancing.

3. a) Donne une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JK}})$

b) Précise la nature du triangle IJK

c) Détermine une équation cartésienne de la clôture (C) d bar dancing.

4. a) Détermine l'affixe de la position L du poste de sécurité.

b) Le poste de sécurité est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de la clôture ?

Problème 2

La terrasse du bar dancing est décorée par deux pots de fleurs placés en deux points P et Q tels que CADP et DABQ soient des parallélogrammes. Elle est éclairée par une lampe veilleuse située en un point G d'une tige (Δ) *telle que* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BG}$

5. Démontre que G est le barycentre des points (A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) et (D,1)
6. Démontre que les droites (BP) et (CQ) sont sécantes.
7. En réalité, on a :

$A\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $B\left(0;\frac{2}{3};1\right)$; $C\left(1;\frac{1}{3};1\right)$ *et* $D(1;1;0)$, $(\Delta)=(R)\cap(R')$ où (R) est le plan déterminé par les droites (BP) et (CQ) et (R') l'ensemble des points de l'espace tel que :

$(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}).(-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$

a) Détermine les coordonnées des points G, P et Q

b) Détermine une équation cartésienne de (R)

c) Justifie que (R') est un plan dont tu donneras une équation cartésienne

d) Déduis-en une représentation paramétrique de la tige (Δ)

e) Calcule la distance de chacun des pots de fleurs à la tige (Δ)

Problème 3

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, le dessin de l'itinéraire représenté sur du papier est la courbe représentative (Γ) de la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x+1-\sqrt{-x-1} \ si\ x\in]-\infty;-1[\\ f(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x} \ si\ x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ f(0)=1 \end{cases}$$

Des escales sont prévus dans les localités sont prévus dans les localités représentées par des points dont les abscisses sont solutions éventuelles de l'équation : $(E_m): 2f(x)-x+m=0$ *où* $m\in\mathbb{R}$

Sous tâche : tu es invité(e) à étudier la fonction et représenter (Γ) afin de déterminer graphiquement le nombre d'escales prévus au cour du trajet.

Partie A : Étude des variations de f

8- Etudie la continuité et la dérivabilité de f *en* -1. Précise la tangente éventuelle à (Γ) au point d'abscisse -1.

9- a) Écris le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x\longmapsto\ln(x+1)$

b) Étudie la dérivabilité de f *en* 0.

10- On considère la fonction $\begin{array}{l} u:]-1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\ln(x+1) \end{array}$

a) Étudie les variations de u

b) Étudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

11- Achève l'étude des variations de f.

Partie B : Représentation graphique de (Γ).

Dans cette partie on considère la fonction $\begin{array}{l} v:]-1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x^2 \end{array}$

12. a) Démontre que $\forall x\in]-1;0[$, $v(x)<0$.

b) Étudie sur $[0;+\infty[$, les variations de la fonction v' *de* v

c) Démontre que l'équation $v'(x)=0$ admet dans $[0;+\infty[$ une solution unique a

13- a) Justifie que $\frac{1}{2}<a<2$ *et* $v(a)=a^2+a-1$

b) Étudie le signe de $v'(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+^*$

14- a) Démontre, à l'aide des variations de v que l'équation $v(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique b telle que $1<b<2$

b) Étudie la position relative de (Γ) par rapport à la droite d'équation $y=x$

c) Construis la courbe (Γ)

Partie C : Détermination du nombre d'escales

15 - On considère la fonction $\begin{array}{l} h:]-1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto2x-2\ln(x+1)-x^2 \end{array}$

a) Étudie les variations de h. Déduis-en le signe de h(x) suivant les valeurs de x

b) En quel point de (Γ) la tangente est elle parallèle à la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-3$. Écris une équation cartésienne de cette tangente.

16 – Détermine graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, le nombre d'escales possible au cour de l'excursion.

SUJET N° 24

Contexte : le mérite de la victoire d'une équipe de football

Après la coupe d'Afrique de Nations organisée en février 2013, une interview a été accordée à l'équipe championne afin de prendre connaissance de leur qualité réelle.

Le capitaine de l'équipe qui a été interrogé, a affirmé humblement que la victoire de son équipe à l'issue d'une compétition aussi importante que celle-là n'est pas l'effet du hasard. La préparation lors des entraînements exige que les onze joueurs sur le terrain apprécient la position les uns par rapport aux autres et l'étude de la trajectoire du ballon doit faire l'objet d'une étude minutieuse. Chaque joueur est assimilé à un point M(x,y) dans le plan du terrain de football muni d'un repère donné.

Une enquête réalisée pendant la compétition, a donné les résultats suivants. Certains joueurs correspondent aux points M d'affixe z solutions dans C de l'équation (E) : P(z) = 0.

C étant l'ensemble des nombres complexes

P(z)=

$z^4-2(4-i)z^3+(26-9i)z^2-(43-15i)z+32-4i$

i désigne le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

Pendant les jeux de la demi-finale, la trajectoire du ballon est liée à un paramètre m et définie par une fonction f_m telle que :

$f_m :]m,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$m>0, \quad x \longmapsto f_m(x) = \dfrac{4(2x-1)}{5(x^2-mx)}$

Tâche

Tu es invité à résoudre les trois problèmes suivants afin d'apprécier les efforts fournis par une équipe championne de football.

Problème 1

1) Résous dans C l'équation :

$u^2-(-11+i)u+32-4i=0$

2)a) Démontre que pour tout nombre complexe z, l'on a : P(z) =

$[z^2-(4-i)z]^2-(-11+i)[z^2-(4-i)z]+32-4i$.

b) En utilisant les résultats précédents, résous dans C l'équation P(z) = 0

3) On donne les points E, F et G d'affixes respectives 1+i ; 2+i et 2-2i dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a) Détermine une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG})$

b) Donne une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle EFG

Problème 2

Pour marquer le but qui doit conduire l'équipe à la finale, il faut déterminer une valeur unique de m pour que la tangente à la courbe de f_m au point d'abscisse 2 soit parallèle à la droite d'équation y = -x+7.

4) a) Détermine la fonction dérivée de f_m.

b) On suppose $m \geq \dfrac{1}{2}$. Démontre que f_m est monotone sur $]m,+\infty[$.

c) Détermine m pour que la trajectoire du ballon permette de marquer le but devant conduire l'équipe à la finale.

5) Démontre que toutes les courbes passent par un point fixe que l'on précisera.

6) Dans toute la suite, on prend m = 1 et on note f la fonction correspondante définie sur $]1,+\infty[$.

a) Etudie f et trace sa courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'unité de longueur étant 2 cm.

b) Démontre que f admet une bijection réciproque g. Détermine le domaine de définition de g et précise son sens de variation. Trace la courbe (C') de g dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ (On ne demande pas d'exprimer g(x))

c) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 2.

d) Démontre que le point B de coordonnées $(\frac{6}{5},2)$ appartient à (C') et que (T) est la tangente à (C') au point B. On déterminera $g'(\frac{6}{5})$.

Problème 3

La trajectoire du ballon qui doit conduire au bout de la victoire est définie par la bijection réciproque de la fonction

$g_1 : K \rightarrow f_1(K)$

$x \rightarrow g_1(x) = f_1(x)$

f_1 étant la fonction numérique d'une variable réelle telle que :

$f_1(x) = \dfrac{1}{-x+\sqrt{|x^2-1|}}$ et $K = [\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

7- a) Ecris $u(x) = -x+\sqrt{|x^2-1|}$ sans le symbole de la valeur absolue dans l'ensemble IR.

b) Démontre que : $u(x) = 0$ équivaut à $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) On rappelle que si une fonction est continue sur un intervalle J' et ne s'annule pas sur l'intervalle J', alors elle a un signe constant sur J'.

Etablir alors un tableau de signe de $u(x)$

8- a) Démontre que le domaine de définition D de f_1 est $D =]-\infty\,;\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty[$

a) Ecris $f_1(x)$ sur son domaine sans le symbole de la valeur absolue.

10-a) Calcule $f_1(-1)$ et justifie que :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1} = +\infty$$

et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1} = -\infty$ puis conclus.

b) Donne une interprétation géométrique des résultats précédents.

10) a- Démontre que : $\forall x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$,

$f_1(x) = \frac{u(x)}{(u(x))^2\sqrt{x^2-1}}$ et

$\forall x \in]-1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1[$,

$$f_1'(x) = \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}[-x+\sqrt{1-x^2}]^2}$$

Calcule $f_1'(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ et étudie les variations de f_1 (on ne demande pas de tracer la courbe (Γ) de f_1)

11) Démontre que g_1 est une bijection.

12) Soit h la bijection réciproque de g_1

a) Donne le domaine de dérivabilité E de h.

b) Démontre que le point A $(1+\sqrt{3}\,;\frac{1}{2})$ appartient à la courbe.

c) Détermine une équation de la tangente (T') à la courbe (Γ') en son point A en déterminant $(h)'(1+\sqrt{3})$.

13) Dresse le tableau de variation de h.

SUJET N° 25

Contexte : **Une recherche archéologique**

Des fouilles archéologiques dans une région initialement occupée par une tribu ont permis de découvrir de précieux objets tels que des pierres taillées de forme régulière, des tablettes de formes variées portant sur leurs faces des portions de courbes et des relations. Ces tablettes sont utilisées lors des constructions.

Une des pierres est un tétraèdre ABCD comportant un trou que peut traverser une droite (Δ). Des documents connexes aux objets archéologiques indiquent les informations suivantes :

Dans l'espace ($\mathcal{E}$) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- les sommets du tétraèdre ABCD ont pour coordonnées $(1;1;2)$, $B(3;2;2)$, $C(2;2;0)$ et $D(1;1;1)$
- La droite (Δ) est l'ensemble des points M de ($\mathcal{E}$) tels que $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD})\wedge\overrightarrow{BD} = \vec{0}$
- Un ensemble (Γ) des points M de ($\mathcal{E}$) tels que $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD})\cdot\overrightarrow{BD} = 0$
- Une tablette porte l'inscription $Z = iz^2+(1+i)z+2-2i$

Ghislain, l'un de vos camarades de classe, ayant pris connaissances des documents connexes décide d'en savoir plus.

Tâche : Tu es invité(e) à accompagner Ghislain dans ses recherches en résolvant les trois problèmes suivants

Problème 1

1a) Vérifie que la pierre de sommets A, B, C et D est un tétraèdre puis calcule son volume

b) Calcule l'aire de la surface du triangle BCD et déduis-en la hauteur issue du sommet A

2a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A,1),(B,2),(D,-1)$

b) Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

c) Détermine les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) *et du plan* (Q) de repère $(O;\vec{j},\vec{k})$

d) Démontre que (Γ) est un plan dont tu donneras une équation cartésienne

Problème 2

Une autre tablette porte l'inscription $z' = \frac{1}{z-2}+2$

Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on considère les points E, I et F d'affixes respectives 1; 2 et 3 puis l'application f qui, à tout point M distinct de I et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{z-2}+2$

3) Détermine l'ensemble des points M de $(P)-\{I\}$

tels que $f(M) = M$

4) On suppose que $M \neq E$ et $M \neq F$

a) Vérifie que $\frac{1-zi}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z}$

b) Déduis-en une relation entre $\frac{M'E}{M'F}$ et $\frac{ME}{MF}$ puis entre $mes\left(\widehat{\overrightarrow{M'F}, \overrightarrow{M'E}}\right)$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME}}\right)$

c) Justifie que si M appartient à la médiatrice du segment [EF] alors le point M' aussi appartient à la médiatrice du segment [EF]

5) On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z telle que
$Z = iz^2 + (1+i)z + 2 - 2i$

a) Calcule $(3+5i)^2$

b) Détermine les points M ayant pour image le point A d'affixe $9+2i$ par g

c) Ecris une relation liant les affixes z_1 et z_2 de deux points M_1 et M_2 ayant la même image par g

Problème 3

L'un des courbes observées sur les tablettes est une portion de la représentation graphique de la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = 1 + \ln(-x) & si\ x < 0 \\ h(x) = xe^{1-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

6) a) Justifie que h est définie sur $\mathbb{R}$

b) Etudie la continuité de h en 0

c) Etudie la dérivabilité de h à droite en 0 puis interprète graphiquement la résultat obtenu

7) a) Calcule les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudie le sens de variation de h sur $]-\infty; 0[$ et $[0; +\infty[$

c) Dresse le tableau de variation de h

8) a) Etudie les branches infinies de la courbe (C) de h

b) Trace la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm

SUJET N° 26

Contexte Une cérémonie d'hommage

Pour témoigner leur reconnaissance à l'endroit du fondateur de leur entreprise, les employés de FIMENSOH confectionnent une boite de plexiglas représentée par un cube FIMENSOH, à l'intérieur duquel se trouve sa statue, placée devant l'entreprise. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(F; \overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FN})$ cette boite contient une séparation matérialisée par un plan (Q) d'équation :
$-\frac{1}{3}x - y + \frac{2}{3}z = 0$ et une tige de support de la droite (Δ) orthogonal à (Q) en D et passant par un point C.

Pour cette commémoration, trois places d'honneur assimilées aux points K, R et J dont les affixes sont solutions de l'équation (E) définie par :
$z^3 + (-4 + 2i\sqrt{3})z^2 + (16 - 8i\sqrt{3})z + 32i\sqrt{3} = 0$
sont réservées au père fondateur, sa femme et leur unique fils Tinkpon. Une décoration lumineuse, placée dans un plan à l'arrière du monument, représente une portion d'une courbe (Γ), dans un repère orthonormé.

Tinkpon, élève en classe de Tle D, très émerveillé par cette prouesse des employés de son père, décide d'étudier les configurations liées à cette boite, les positions des places d'honneur et la fonction f dont le représentation graphique est (Γ). Arrivé à la maison, il reproduit sur sa copie à l'échelle de $2m$ pour $1{,}5m$ la boîte cubique d'arête $3m$ et place les points A, B et C tels que A soit le milieu de $[IS]$, B défini par : $\frac{3}{2}\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NH}$ et C le centre de $EMOH$.

Tâche : tu es invité(e) à aider Tinkpon à travers la résolution des trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1-

a) Détermine les coordonnées de A, B et C dans le repère $(F; \overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FN})$.

b) Détermine une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (FAB).

2-

a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AC)

b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ') parallèle à (AC) et passant par I.

3-

a) Donne une représentation paramétrique de (Δ).

b) Détermine les coordonnées du point D.

c) Déduis-en la distance CD.

Problème 2 :

Tinkpon veut maintenant déterminer les affixes des points K, R et J dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct et la nature du triangle KRJ, après avoir étudié les positions de deux points d'affixes
$U = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et
$V = \sin 4\theta - 2i\sin^2 2\theta$, avec $2\theta \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[$, par rapport à l'origine du repère et à l'axe des nombres réels.

4-

a) Ecris U^2 sous forme algébrique puis sous la forme exponentielle.

b) Déduis-en une écriture de U sous la forme exponentielle.

5-

a) Détermine le module et un argument de V.

b) Exprime $U \times V$ en fonction $\sin 2\theta$

6-

a) Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure notée z_0.

b) Résous alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Les deux autres solutions sont notées $z_1 et\ z_2$ avec $Im(z_2) < 0$)

7- Les points K, R et J sont les points images respectifs des nombres complexes $z_0; z_1\ et\ z_2$.

a) Calcule $\frac{z_0 - z_1}{z_1 - z_2}$ et détermine la nature du triangle RJK.

b) Calcule l'aire A de la surface du triangle RJK.

c) Détermine une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle RJK.

Problème 3 :

Pour mieux approcher la courbe (Γ), Tinkpon définit la fonction f par :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c$ dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

8- Détermine les nombres réels $a, b\ et\ c$ sachant que (Γ) passe par O, $f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (Γ) $en - \infty$.

Dans la suite, on suppose que :

$a = 2; b = -3\ et\ c = 1$.

9-

a) Etudie les variations de la fonction f.

b) Détermine les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des abscisses.

c) Construis la courbe (Γ).

SUJET N° 27

Contexte : Construction d'une salle de jeux

L'ingénieur Dansou a gagné un marché de construction d'une salle de jeux après avis d'un appel. Dansou munit le plan d'un appel offre. Dansou munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2). La salle de jeux doit être éclairée par des lampes fixées en six points A, B, C, D, E, F et G. Les points A, B et C ont pour affixes respectives $= 5 + \sqrt{3} - i$; $b = 5 - \sqrt{5} - i\sqrt{15}$; $c = 5$. E, F et G sont les images des nombres complexes solutions de l'équation

$(E_1): z^3 + iz^2 + 2(2 + 5i)z - 20 + 4i = 0$.

Cossi fils de l'ingénieur Dansou et élève en classe de terminale D est curieux de connaître les propriétés mathématiques auxquelles répondent les différents travaux à exécuter pour achever la construction de la salle de jeux.

Tâche : Aide Cossi à venir à bout de ses préoccupations en résolvant les problèmes suivants :

Problème1 :

1-

a) Justifie que l'équation (E_1) admet une solution imaginaire pure

b) Détermine les nombres complexes $s\ et\ r$ tels que $z^3 + iz^2 + 2(2 + 5i)z - 20 + 4i = (z^2 + sz + r)(z + 2i)$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1)

2-

a) Sachant que $Re(z_E) < Re(z_F) < Re(z_G)$ donne les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G.

b) Calcule le module de $\frac{c-a}{c-b}$ et donne une interprétation géométrique de ce résultat.

3-

a) Détermine un argument de $\frac{c-a}{c-b}$ et donne une interprétation géométrique de ce résultat.

b) Donne la nature du triangle ABC.

Problème 2 :

Une ouverture est prévue en haut de la porte d'entrée et représente l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ telle que le nombre complexe $Z = \frac{iz+1}{2-z}$ $(z \neq 2)$ soit un nombre réel.

4- Ecris $Re(Z)\ et\ Im(Z)$ en fonction de $x\ et\ y$.

5- Détermine la nature de l'ouverture prévue

6-

a) On considère le nombre complexe

b) $h = 2 - 2i$. Ecris $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}h$ sous forme exponentielle

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d) Linéarise $\sin^3 x \cos^2 x$

7- $R\ et\ S$ sont des points d'affixe $i\ et$ 2 et on pose $f(z) = \frac{iz+1}{2-z}$

a) Ecris $|f(z)|$ en fonction de $RM\ et\ SM$ et détermine l'ensemble des points M du plan tels que $|f(z)| = 1$

b) Démontre que $|f(z) + i||z - 2| = \sqrt{5}$ et déduis en que le point M appartient au cercle de centre S et de rayon $2\sqrt{5}$. $f(z)$ appartient à un cercle dont-on déterminera le centre et le rayon.

Problème 3 :

Pour accéder à la salle de jeux, on doit emprunter une voie assimilable à la courbe (C_f) de la fonction f définie ci-dessous. Il est prévu sur cette voie l'implantation d'une pompe dont la position α est à identifier.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-2}{x-1} & si\ x < 1 \\ f(x) = \frac{2x^2+1}{3x-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

8-

a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est-elle continue en 1 ?

9- Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

10- Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x + \sqrt{1+x^2}$

a) Détermine l'ensemble de définition de g.

b) Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g puis calcule $g'(x)$

c) Donne le tableau de variation de g et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

d) Déduis-en le signe de g.

SUJET N° 28

Contexte : Le navigateur ''Google''

Le navigateur américain ''Google'' est devenu depuis quelques années le n°1 mondial en matière de navigation sur le web. L'influence de Google est telle qu'un éditeur de dictionnaire américain a créé le verbe to ''google''. Mais cet éditeur a dû retirer ce verbe du dictionnaire suite à une plainte des propriétaires de ''Google'' devant un tribunal américain.

Pour arriver à un tel résultat, les ingénieurs et autres techniciens ont dû opérer un grand nombre d'innovations pour accélérer les recherches, les téléchargements, et les mails.

Au nombre des problèmes formulés par les techniciens figurent les trois problèmes ci-après.

Tâche : Tu vas te substituer à ces techniciens de Google en résolvant ces trois problèmes.

Problème 1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme

$$P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 + (-3+7i)z + 4$$

1- Calculer $P(i)$ et $P(1+i)$

2- Résoudre alors l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

3- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $i ; 1+i ; 2+2i ; 1+i\sqrt{3}$.

a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe s qui transforme A en B et B en C.

b) Déterminer l'affixe du point D', l'image de D par s.

c) En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

d) Donner une équation cartésienne de l'image de la droite (AB) par s.

4-

a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r d'angle orienté $\frac{\pi}{12}$ qui transforme A en B.

b) Déterminer $s \circ r(A)$

c) Vérifier que B est le centre de $s \circ r^{-1}$ où r^{-1} étant la bijection réciproque de r.

Problème 2 :

1- On considère la fonction f définie par

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

a) Montrer que f est une fonction impaire

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = x - 2 + \frac{x-4}{\sqrt{x^2+1}}$. Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x - \ln(x^2+1)}{4x-1} ;$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(\ln x)^2 + 4\ln x}{\sqrt{x^2+3x}-2} ; \lim_{x\to0} \frac{\ln(x^2+4x+e)-1}{x}$$

Problème 3

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x-6}{4(x+2)}$

1- Etudier les variations de g.

2- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

3- Montrer que $\forall x \in [2;3], g(x) < \frac{1}{2}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & si\ x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4- Etudier la continuité de f à droite en 0.

5-

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

6- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

7-

a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$
b) Dresser le tableau de variation de f.

8- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est un asymptote à la courbe (C_f) de f au voisinage de $+\infty$

9- Construire (C_f)

10- On considère la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)\ln(x+2) + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{4} - \ln x\right) + \frac{3}{2}x$$

a) Montrer que H est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
b) Calculer $\int_{e-2}^{1}[f(t)]dt$

SUJET N° 29

Contexte : Championnat scolaire à Tanguiéta.

Les organisations du championnat scolaire de Tanguiéta ont prévu pour cette année un tournoi special de football entre les classes de terminales des collèges de l'Atacora-Donga. Selon le programme établi, chaque élève spectateur de la classe de terminale D doit décoder un nombre avant d'assister à un match à un prix réduit. Ce code est le nombre réel : $I = \int_a^b h(x)dx$ où $a = -\ln(1+\sqrt{3})$, $b = -\ln(\sqrt{3}-1)$ et h la fonction définie par :
$h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

Azizou, un élève en classe de terminale D du CEG Copargo, essaie d'aider ses camarades afin que plusieurs d'entre eux assistent à un taux réduit aux différents matchs. Il est également impressionné par le trophée mis en compétition. Il veut aussi étudier le mouvement du ballon sur le terrain.

Tâche : Comme Azizou, tu es invité(e) à résoudre les problèmes suivants

Problème 1

1. Justifie l'existence du nombre réel I.
2. Soit l'application u définie de $K = \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$ dans $\left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ par
$$u(x) = \ln(\cos x + \sin x)$$

a) Calcule $u\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
b) Justifie que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
c) Démontre que u est bijective. Soit u^{-1} la réciproque de u.
d) Démontre l'ensemble de dérivabilité E de u^{-1}

3. Justifie que $\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -h(x)$. Calcule alors le code qui permet d'assister aux matchs à prix réduit.

Problème 2

Le trophée mis en compétition est un solide de l'espace. Dans cet espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 6 cm. Une partie du trophée est incluse dans l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

4. Détermine l'ensemble (Δ).

Dans toute la suite de ce problème on donne A(0 ; 2 ; 0), B(3 ; 0 ; 4) et $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

5. a) Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

b) Détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonal à (Δ)

c) Calcule les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (P)

6. Soit (Δ') la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{v}(2;1;-1)$
   a) Justifie que (Δ') n'est pas orthogonal à (P)
   b) Détermine une équation cartésienne du plan (P') contenant (Δ') et orthogonal à (P)
   c) Détermine un repère de la droite d'intersection des plans (P) et (P').

7. Le trophée est en réalité un tétraèdre de sommet C(0 ; 1 ; -2) et de base ABI.
Calcule le volume du trophée.

Problème 3 :

La classe de Azizou a gagné le trophée avec un score étriqué d'un but à zéro. Le but de la victoire est survenu lorsque le ballon a suivi une trajectoire identique à la représentation graphique (C) de la fonction f solution de l'équation différentielle :
$(E): y'' + 4y' + 4y = -4x$.

La courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm passe par le point J(0,2) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$

Partie A :

8. a) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction $v: x \longmapsto ax + b$, soit solution de (E)

b) Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'' + 4y' + 4y = 0$

c) Résous l'équation (E') puis détermine la fonction f.

Partie B

En réalité f est la fonction définie par $f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$

9. a) Étudie les variations de la fonction dérivée f' de f.

b.)Démontre que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que

$$-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$$

c) En déduis-en le signe de $f'(x)$.

10. a) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b) Démontre que $f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$ et que $2{,}83 < f(\alpha) < 3{,}16$

c) Justifie que la droite (D): $y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, puis précise la seconde branche infinie.

d) Trace (C) avec soin (prends $\alpha = -0{,}64$)

11. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à -1

a) Calcule l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$

b) Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

SUJET N° 30

Contexte : Le cinquantenaire d'indépendance du Bénin

Plusieurs manifestations ont marqué les cérémonies officielles de l'indépendance du Bénin qui s'étaient déroulées à Porto-Novo. Olina ; élève en terminale D faisait partir des majorettes ayant donné une prestation. L'assistant de l'entraineur, un féru de mathématique, avait donné à Olina quelques informations pour satisfaire sa curiosité.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ;I ;J), le positionnement des majorettes de référence est donné par l'application h défini P- {0} dans P qui à tout point M d'affixe z de $\mathbb{C}^*$ associe le point M' d'affixe $z' = h(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Ainsi, si M_1 d'affixe z_1 est le premier positionnement, alors M_2 d'affixe $z_2 = h(z_1)$ est le deuxième puis M_3 d'affixe $z_3 = h(z_2)$ est le troisième et ainsi de suite. On donne $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Une réalisation à partir des objets verts que tenaient certaines majorettes donne un cube ABCDEFGH. L'organisation informe l'entraineur que l'objet vert positionné en A doit être distant d'au moins 2 mètres (distance de sécurité) de la ligne (Γ) occupée par la garde présidentielle. Cette ligne était définie par l'ensemble des points M de l'espace tel que

$$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$$

La disposition de fin doit avoir une allure qui coupera dans un repère convenablement choisi, l'axe des abscisses et toutes les majorettes doivent occuper à la fin un domaine donné.

Tâche : Tu aideras Olina a mieux comprendre ces informations en résolvant les 3 problèmes suivants.

Problème1 :

1.) Détermine les cordonnées de M_1 et celles du point M_2 d'affixe $h\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2.) On suppose que α est un nombre réel Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $h(z) = \frac{2}{3}\cos\alpha$

3.) a. Déduis- en les solutions de l'équation (E'): $z^4 - 2z^2\cos\alpha + 1 = 0$ (On mettra les solutions sous forme exponentielle)

b) Prouve que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées

c)Décompose : $P(x) = x^4 - 2x^2\cos\alpha + 1$ en un produit de deux polynômes de degré deux à coefficients réels.

4.) On considère l'application k du plan complexe dans lui-même qui à tout points M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1 + i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$$

a)Démontre que k est une similitude plane direct dont tu préciseras le rapport.

b) Démontre que k est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont tu donneras les éléments caractéristiques.

Problème 2 :

5.) Dessine le cube ABCDEFGH réalise par les majorettes.

$(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace, d'unité graphique 2m

6.) Soit I le milieux du segment $[GH]$ et J le centre du carré BCGF

a.)Détermine les coordonnées des points E, I, J.

b.) Donne une équation Cartésienne du plan (EIJ)

c) Justifie que AEIJ est un tétraèdre et calcule son volume.

7.) a) Démontre que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$

b) Démontre que la ligne (Γ) de la garde présidentielle est une droite dont tu donneras un repère.

c) Détermine un système d'équations cartésiennes de (Γ)

d) calcule la distance du point A à la droite (Γ).

8. La distance de sécurité du point A à la ligne présidentielle est-elle respectée ?

Problème 3

La position finale est donner par l'allure de la courbe de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = x\ln(1-x)+1, & si\ x<0 \\ f(x) = u(x) & ,si\ x \geq 0 \end{cases}$
Où u est la fonction numérique vérifiant
$u''+2u'+u=0$ avec $u(0)=1$ et $u'(0)=0$

Partie A

9.) a) Résous sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$

b) Déduis-en que pour tout x élément de $[0;+\infty[$, on a : $u(x)=(x+1)e^{-x}$

10.) Soit la fonction g définie sur : $]-\infty;1[$ par $g(x)=\ln(1-x)+\frac{x}{x-1}$

a) Étudie le sens de variation de g

b) Calcule $g(0)$ puis donne le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0[$

11.) Soit E l'ensemble de définition de f.

a) Justifie que E = $\mathbb{R}$

b) Calcule les limites de f aux bornes de E

12.) a) Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0

b) Donne une interprétation graphique des résultats.

13.) a) Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de $]-\infty;0[$ et pour tout x élément de $[0;+\infty[$

b) Dresse le tableau de variation de f

c) Démontre que la courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses en un point unique P d'abscisse α et que l'on a : $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$

14.) a) Étudie les branches infinies de la courbe de f.

b) Construis la courbe représentative (C) de f

Partie B

Le domaine (D) occupé par les majorettes à la fin est le domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-\frac{6}{5}$ et $x=3$

15.) On considère la fonction numérique h définie sur : $]-\infty;0]$ par :

$$h(x)=\left(\frac{x^2-1}{2}\right)\ln(1-x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$$

a) Justifie que h est une primitive de f sur $]-\infty;0]$

b) Déduis-en $\int_{-\frac{5}{6}}^{0} f(x)dx$

c) A l'aide d'une interprétation par parties, calcule $\int_0^3 (x+1)e^{-x}dx$

16.) Détermine l'aire du domaine occupé par les majorettes à la fin.

SUJET N° 31

Contexte : Une salle d'exposition d'œuvres d'arts

Dans le souci de faire la promotion des œuvres artistiques de sa localité, le maire de la commune de TONAGNON, a décidé de faire construire une grande salle d'exposition d'œuvres d'arts L'architecte ayant en charge la réalisation de l'œuvre a prévu une ouverture circulaire sur l'une de faces du bâtiment en vue de profiter de l'éclairage du jour Le pourtour de cette ouverture est le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit à un triangle ABC .

A, B et C sont les points images, dans le plan de cette face associé à un repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$(E): z^3-(1+7i)z^2-(20-3i)z-4+32i=0$
et A appartient à l'axe des ordonnées, B et C sont tels que $Re(z_B)<Re(z_C)$.

Par ailleurs, pour décorer les murs intérieurs de la salle, l'architecte a sollicité un décorateur qui a prévu représenter sur une face, une famille de courbes. Tadagbé, un enfant de l'architecte, élève en classe de terminale D, qui s'intéresse au travail de son père a vu le plan et veut déterminer l'équation de cercle délimitant l'ouverture circulaire et étudier quelques une des courbes de décoration.

Tâche : Tu vas te mettre à la place de Tadagbé et résoudre les problèmes suivants :

Problème 1 :

1- Justifie que (E) admet une solution imaginaire pure que tu préciseras.

2-
a) Calcule $(5+i)^2$
b) Résous dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)
c) Déduis-en z_A; z_B et z_C

3-
a) Détermine la nature du triangle ABC
b) Détermine une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ délimitant l'ouverture circulaire.

Problème 2 :

Les courbes proposées par le décorateur sont les représentations graphiques des solutions de l'équation différentielle
$(E_1): y''-2y'+2y=2x^2-4x+2$

4- Résous l'équation différentielle
$(E_0): y''-2y'+2y=0$

5-
a) Détermine la fonction polynôme g de degré deux, solution de l'équation différentielle (E_1)
b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est solution de (E_1) si et seulement si $(f-g)$ est solution de (E_0).
c) Déduis-en que les courbes proposées par le décorateur sont les représentations graphiques des fonctions $f_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_{a,b}(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x + x^2$ où a et b sont deux constantes réelles.

6- Pour construire une courbe, le décorateur choisi successivement et sans remise deux jetons dans un sac comportant six jetons indiscernables au toucher. Deux des jetons portent l'inscription 1, trois portent l'inscription 2 et une porte l'inscription 3. Il prend pour a l'inscription obtenue au premier tirage et b l'inscription obtenue au second tirage.

a) Calcule la probabilité p_0 pour que dans la solution $f_{a,b}$ de (E_1) on ait $a = b$.

b) Détermine la probabilité p_1 d'avoir une solution de (E_1) dont la courbe dans un repère plan, admet au point d'abscisse $x = 0$, une tangente d'équation $y = 3x + 1$.

Problème 3 :

Une autre ligne tracé sur un mur est la représentation graphique (Γ) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ de la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = e^x + x - 1 ; & si\ x \leq 0 \\ g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} + x - 1 ; & si\ x > 0 \end{cases}$$

7-

a) Etudier la continuité de g en 0.

b) Détermine le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction v: $x \longmapsto \ln(x+1)$

c) Etudie la dérivabilité de g en 0.

d) Donne une interprétation géométrique du résultat.

8-

a) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (Γ).

b) Etudie la position relative de (Γ) et (Δ).

9-

a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ avec $u(x) = \frac{x^3+x^2+x}{x+1} - \ln(x+1)$.

b) Etudie le sens de variation de u sur $]0; +\infty[$.

10-

a) Justifie que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Dresse le tableau de variation de g.

c) Trace (Γ) et (Δ).

11-

a) Justifie que g est une bijection.

b) Trace la courbe représentative (Γ') de g^{-1} la bijection réciproque de g.

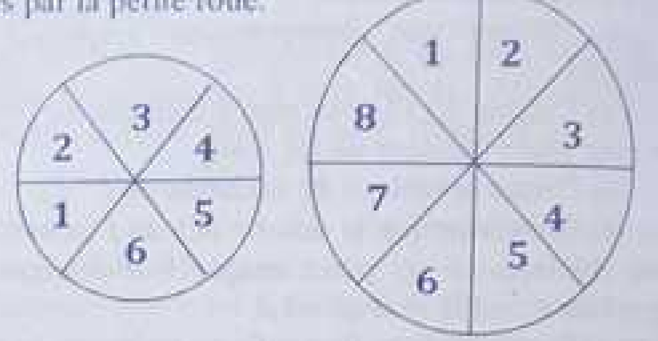
SUJET N° 32

Contexte : Les journées culturelles au CEG ALAFIA

Les organisateurs des journées culturelles au CEG ALAFIA ont organisé un tournoi de football doté au terme duquel deux classes sont arrivées en finale. Outre ce tournoi, une classe a mis au point une loterie composée de deux roues fonctionnant de manière indépendante

- ✓ Une grande roue porte les numéros 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8. Sur cette roue, la probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de celle d'un nombre impaire.
- ✓ Une petite roue porte les numéros 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. Sur cette roue, tous les nombres ont la même probabilité d'apparition.

Une partie consiste à faire tourner les deux roues pour obtenir un nombre à deux chiffres. Celui des dizaines est affiché par la grande roue et celui des unités par la petite roue.



Cossi, un élève en classe de terminale D veut étudier les chances d'un participant à gagner un lot et certaines formes de trophée mis en jeu pour la finale du tournoi de football qu'il a suivi avec attention.

Tâche : En te mettant à la place de Cossi, tu vas résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

Les résultats dans ce problème seront présentés sous forme de fractions irréductibles.

1. a- On désigne par p_p la probabilité d'apparition d'un chiffre pair et p_i la probabilité d'apparition d'un chiffre impair sur la grande roue. Calculer p_p et p_i

b- Calcule la probabilité d'obtenir 55 à l'issue d'une partie.

c- Calcule la probabilité d'obtenir 56 à l'issue d'une partie.

2. Pour gagner un lot, il faut obtenir un nombre supérieur ou égal à 55. Démontre que la probabilité de gagner un lot à l'issue d'une partie est $\frac{4}{9}$.

3. Un joueur joue cinq parties indépendantes les unes après les autres. Calcule la probabilité que ce joueur gagne exactement trois lots.
4. On désigne par X la variable aléatoire réelle qui à une série de cinq parties associe le nombre de lots gagnés.

a- Précise l'univers image de cette variable aléatoire réelle $X(\Omega)$.

b- Détermine la loi de probabilité de X.

c- Calcule $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$.

d- Pour quelle valeur de n, la probabilité de gagner au moins un lot sur n parties sera supérieur ou égale à 95 ?

Problème 2 :

Le trophée mis en jeu est un solide de l'espace. Dans cet espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité $9\ cm$, une partie de trophée est incluse dans l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$, où A, B et C sont trois points non alignés du trophée et I le milieu de segment $[BC]$.

5. Démontre que (Δ) est une droite d'équation dont on précisera un repère.
6. On donne : $A(1;-1;0), B(3;0;1)$ et $C(1;2;-1)$

a- Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

b- Ecris une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les points A, B et C.

c- Détermine une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant la droite (D) définie par (D): $\frac{2x+1}{2}=-y=z-1$

d- Détermine un système d'équation paramétrique de la droite $(D_1)=(P)\cap(Q)$.

7. En réalité, le trophée est un tétraèdre de sommet $E(-8;7;9)$ et dont une base est le triangle ABC. Calcule en $litre$ le volume du trophée.
8. Détermine par son équation cartésienne l'ensemble (π) : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\|=\|-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{ME}\|$

Problème 3 :

La classe de Cossi a gagné le trophée avec un score d'un but à zéro. Le but de la victoire est arrivée après que le ballon ait suivi une trajectoire identique à la représentation graphique de la fonction f à variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x)=-x+x\ln x & ; si\ x>0 \\ f(x)=xe^{1-x^2} & ; si\ x\leq 0\end{cases}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité $2\ cm$.

9. a- Justifie que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité de f en 0.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0. Précise l'équation de la tangente ou des demi-tangentes éventuelles au point d'abscisse $x=0$.

10. a- Calcule $f'(x)$ pour tout nombre réel x de son ensemble de dérivabilité.

b- Etudie suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

c- Calcule les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f.

11. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f

a- Etudie les branches infinies de (C_f).

b- Construis la courbe (C_f) de même que ses tangentes ou ses demi-tangentes au point d'abscisse $x=0$.

12. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
13. On considère la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par $F(t)=\int_0^t f(x)dx$.

a- Etudie le sens de variation de F.

b- Démontre que pour tout $t\leq 0$:

$F(t)=\frac{e}{2}(1-e^{-t^2})$

c- Calcule la limite de $F(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$ et dresser son tableau de variations.

SUJET N°.33

Contexte

Un motocycliste assimilable à un point mobile G est en mouvement rectiligne uniformément accéléré. Sur la grande voie empruntée, sont disposées des grandes plaques planes matérialisant des plants. L'espace C étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, une des plaques (R) contient les points $A(1;0;3), B(2;2;0)$ et $C(1;1;2)$.

En un temps t_1, le mobile G est au point $H(1;-1;0)$ et au temps t_2, il est au point $F(2;0;1)$, $t_1\neq t_2$

Voyant le motocycliste à vive allure, un passant se pose des questions : « A cette allure, le motocycliste ne risque-t- il pas de percuter une des plaques ? » « Pourrais-je alors joindre à temps les sapeurs-pompiers ? Et seront-ils à temps sur les lieux ? »

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations du passant en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1. Détermine une équation cartésienne du plan (P) matérialisé par la plaque (R).

2. Justifie que la trajectoire du mobile G est représentée par la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \ ; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$
3. Justifie que la droite (Δ) et le plan (P) sont perpendiculaires.
4. Détermine les coordonnées du point K où se produira eventuelement le choc entre le mobile G et la plaque matérialisant le plan (P).
5. Calcule la distance à parcourir par le mobile G depuis l'instant t_1 jusqu'au moment du choc éventuel.

Problème 2 :

Le choc s'est effectivement produit et a provoqué un incendie dont le passant a été témoin.

Le passant dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers mais ce jour là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros. Les sapeurs pompiers ont parcouru une distance $d(en\ dizaine\ de\ kilomètres)$ avant d'atteindre les lieux de l'accident. Le plan complexe étant muni de repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

- ✓ L'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que $\frac{z}{2+iz}$ soient un nombre réel est un cercle $(\mathcal{C})$ privé d'un point ; par ailleurs la distance d est le rayon du cercle $(\mathcal{C})$
- ✓ L'angle de tir des jets d'eaux ayant servi à éteindre l'incendie est celui de la similitude plane directe s laissant invariant O et transformant le point I d'affixe $2i$ en le point J d'affixe $-2+2i$.

6. Calcule la probabilité pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

a- Au prémier essai.

b- Au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

7. Détermine :
   a- l'écriture complexe de s
   b- l'ensemble (Γ)
8. Calcule :
   a- l'angle de tir
   b- la distance d.

Problème 3 :

Pour se rendre sur les lieux, les sapeurs pompiers doivent suivre un trajet matérialisant la courbe représentative (C_f) de la fonction f definie de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par ; $f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$

9. a- Justifie que l'ensemble de définition $D_f\ de\ f\ est\ \mathbb{R} - \{1;2\}$

b- Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

c- Etudie le sens de variations de f.

d- Dresse le tableau de variations de f

10. a- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f).

b- Construis(C_f).

SUJET N° 34

Contexte

La ferme agro pastorale de BIGNON est située dans la commune de Towé. Dans cette ferme, il est expérimenté la culture en pépinières de plusieurs variétés de légumes. Les techniciens ont estimé que la suivie de certaines jeunes pousses varient selon la suite numérique (I_n) définie par

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan\ x)^n dx$. Par ailleurs, cette ferme dispose d'un réseau de canaux d'irrigation dont l'un a l'allure de la courbe de la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \quad ; \ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(x) = e^x - e^{-x} \quad ; si\ x \in]-\infty; 0] \\ f(1) = 1 \end{cases}$

En visite ce cette ferme, Victoire, élève en classe de Terminale D est émerveillée par les travaux qui s'y mènent et se préoccupe de connaitre la survie des jeunes pousses, des ouvriers ainsi qu'à l'étude de la fonction f.

Tâche : En utilisant les informations contenues dans ce texte, résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1. a- Justifie que la suite (I_n) existe.
   b- Sans exprimer I_n, démontre que la suite est une suite décroissante sont tous les termes sont positifs.
2. a- Pour tout entier naturel , calcule la dérivée première de la fonction $x \mapsto (\tan x)^{n+1}$
   b- Déduis-en que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$
3. a- Démontre que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
   b- Exprime $I_{n+4} - I_n$ en fonction de n.
   c- Calcule I_1 , I_2 , I_5 et I_6.

Problème 2 :

Dans cette ferme, travaillent trois catégories d'ouvriers : La catégorie A des ouvriers parlant le Fongbé ; la catégorie B des ouvriers parlent le Dindi et la catégorie C des ouvriers parlant le Français. BIGNON a recruté le même nombre d'ouvrier dans chaque catégorie. Un enquête sur le nombre de fille et de garçon recrutés donne les pourcentages suivants : 20% de filles dans la catégorie A ; 60% de garçon dans la ctégorie B et 60% de fille dans la catégorie C.

4. On choisit au hasard un ouvrier dans chaque catégorie et on désigne par X la variable aléatoires prenant pour valeur le nombre de filles choisies.

a- Définis la loi de probabilité de X.

b- Détermine l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

5. On réunit tous les ouvriers et on choisit au hasard parmi eux un ouvrier.

a- Calcule la probabilité pour que l'ouvrier choisi soit dans la catégorie A.

b- Calcule la probabilité pour que l'ouvrier choisi soit un garçon.

c- Sachant que l'ouvrier choisi est un garçon, calcule la probabilité pour qu'il soit dans la catégorie B.

d- Sachant que l'ouvrier choisi est une fille, calcule la probabilité pour qu'elle soit dans la catégorie C.

Problème 3 :

6. On désigne par D l'ensemble de définition de f et $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé.

a- Démontre que $D = \mathbb{R}$.

b- Démontre que f est continue en 0 et en 1.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0 et déduis-en une interprétation géométrique des résultats.

7. a- Vérifie que pour tout

$h \in]-1;0[\cup]0;1[$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h-\ln(1+h)}{h\ln(1+h)}$

b- En utilisant le développement limité d'ordre 2 en 0 de $h \longmapsto \ln(1+h)$ démontre que f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

c- Démontre que pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que la fonction g définie par $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$

d- Etudie sur $]0;+\infty[$ les variations de de g puis déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

8. a- Etudie les variations de f.

b- Etudie les branches infinies de (C_f)

c- Construis (C_f).

9. On pose $I =]-\infty;0[$ et $J = f(I)$ et on considère l'application $h: I \longrightarrow J$
$x \longmapsto h(x) = f(x)$

a- Démontre que h est bijective.

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa courbe représentative.

b- Etudie la dérivabilité de h^{-1} sur J.

c- Vérifie que le point $A(-\frac{8}{3};-\ln 3)$ appartient à la courbe (Γ) puis détermine une équation de la tangente à (Γ) en A.

d- Démontre que $h^{-1}(x) \in J$

e- Construis (Γ) dans le même repère que (C_f).

SUJET N° 35

Contexte

Texte : l'inauguration de l'échangeur de Godomey

Pour inaugurer l'échangeur de Godomey, les organisateurs ont prévu l'installation de la tribune officielle , la remise d'un cadeau à la société chinoise qui a réalisé ce chef d'œuvre .

Par ailleurs, dans son discours adressé au chef de l'Etat, le technicien des ponts et chaussés affirme qu'une partie de l'échangeur a le même comportement graphique que la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2e^{\frac{-1}{x}} & ; x > 0 \\ f(x) = -1 - \frac{2\ln(-x+1)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Tâche : Tu vas évaluer tes compétences en mathématique. Pour cela, tu vas résoudre les problèmes suivants :

Problème 1 :

Le responsable de la garde présidentielle, décide d'installer le président de république au point I dans le plan du sol muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm tel que I soit sur $(O;\vec{j})$

1. a- Sachant que l'affixe de I est solution de l'équation
$(E): z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i = 0$; Détermine l'affixe de I.

b- Déduis-en les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

2. Deux gardes rapprochés se trouvent aux points J et K d'affixes respectives : $1 - i$ et $2 + i$.

a- Place les points I , J et K à l'échelle de $1\ cm$ pour $1\ m$

b- Détermine la nature du triangle IJK.

3. Le responsable de la garde présidentielle positionne ensuite les autres gardes de telle sorte qu'à toute position $M(z)$ d'un garde associe la position $M'(z')$ d'un autre garde vérifiant $z' = (1-i)z - 2$.

a- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application s ainsi définie.

b- Par ailleurs, autre dispositifs de sécurité mis en place par le responsable est l'ensemble (C) des positions M d'affixe z telles que $|2\bar{z} + 4i| = |8i - 4|$. Détermine par son équation, l'image (C') de (C) par s.

Problème 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 2 cm . Les rubans à couper pour déclarer pratiquement l'échangeur sont définis par les ensembles :

$(D) : 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \wedge (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$ et

$(D') : \frac{-x-1}{2} = \frac{-y+2}{2} = z + 2$

avec $A(-1; 2; 3)$ $B(-1; 2; 2)$ et $C(-3; 0; 4)$.

4. Soit $I = bar\{(A; 2), (B; 3)\}$. Détermine les coordonnées de I.
5. Détermine la nature et un repère de chacun des rubans (D) et (D').
6. a- Démontre que (D) et (D') sont strictement parallèles.

   b- Détermine une équation du plan (P) contenant (D) et (D').
7. Détermine une équation du plan (Q) contenant (D') et perpendiculaire à (P).
8. En réalité, les points A, B, C et D sont des sommets du cadeau que le chef de l'Etat remet au responsable de la société chinoise avec $D(1; 3; -2)$. Démontre que le cadeau a la forme d'un tétraèdre puis calcule son volume en dm^3.

Tailles x_i / Ages y_j	150	160	165	170	175	180
16	4	0	0	1	0	0
17	0	3	0	2	0	0
18	0	2	4	0	0	0
19	0	0	4	2	0	0
20	0	0	0	0	2	1

Problème 3 :

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans la repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

9. a- Détermine le domaine de définition de f

   b- Etudie la continuité de f en 0.

10. a-Etudie la dérivabilité à droite en 0 de f.

    b- Détermine le développement limité d'ordre 2 de $u : x \longmapsto \ln(-x+1)$ sur $]-\infty; 1[$ puis déduis-en que f est dérivable à gauche en 0.

    c- Détermine les relations définissants les demi-tangentes éventuelles en 0.

11. Démontre que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et que $\forall x \in]-\infty; 0[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) = \frac{x}{-x+1} + \ln(-x+1)$

12. a- Etudie les variations de g sur $]-\infty; 0[$

    b- Déduis-en le signe de $g(x)$.

13. a- Achève l'étude des variations de f.

    b- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ telle que $-3 \leq \alpha \leq -2$.

    c- Démontre que $\alpha = 1 - e^{\frac{-1}{2}\alpha}$

14. a- Construis la courbe (C) avec soins.

    b- Le technicien des ponts et chaussées a-t-il raison ? Justifie ta réponse.

15. Calcule l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{\ln 2}$ et $x = \frac{1}{2}$ par la méthode des trapèzes en subdivisant $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\ln 2}\right]$ en 5 segments de même longueur.

16. On considère la fonction $h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$; $x \in [-3; -2]$

a- Démontre que $\forall x \in [-3; -2]$; $h(x) \in [-3; -2]$

b- Démontre que $\forall x \in [-3; -2]$; $|h(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.

SUJET N° 36

Contexte

Texte : coupe de l'indépendance.

Le Bénin a accédé à son indépendance le 1er Août 1960. Pour fêter ce grand événement tous les ans, il est organisé un tournoi de football doté d'un trophée (coupe de l'indépendance) dont la finale se joue le 1er Août de chaque année dans l'après-midi.

Par ailleurs, une étude statistique sur les âges et les tailles des 22 joueurs et les trois arbitres permet de dresser le tableau suivant.

A l'issue de la finale 2011, le seul but de la partie est marqué par l'équipe des buffles de Borgou. Le staff technique affirme que la trajectoire du ballon à partir du point de frappe jusqu'au filet est identique à la courbe représentative de la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + e^{1+\frac{1}{x}} & ; si\ x < 0 \\ f(x) = \ln(x + e) & ; si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Tâche : Tu vas évaluer tes connaissances en mathématiques. Pour cela, tu vas résoudre obligatoirement les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1. En vu d'étudier quelques aspects géométriques du solide de l'espace que représente le trophée, on munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité $2\ cm$. Les points $A(-1; 0; 1)$; $B(0; 1; 1)$; $C(0; 0; -1)$ et $D(-1; 0; 2)$ sont les sommets du trophée.

a- Justifie que le trophée est un tétraèdre puis calcule son volume.

b- Le trophée de part sa positon devant le staff, peut être situé par rapport aux ensembles.

$(D): \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\right) \wedge \vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

et $(P): \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$

Reconnais (D) et (P) puis détermine une équation du plan (Q) contenant (D) et perpendiculaire à (P).

2. a- Détermine une équation de la droite de régression de y en x de la série double considérée dans le texte.

b- Quelle est la taille d'un joueur ayant 22ans ?

c- Calcule le coefficient de corrélation r puis apprécie l'intensité de la liaison entre la taille x et l'âge y des 25 acteurs.

Problème 2 :

A l'instant t où le but de la victoire des buffles fut arrivé ; le tireur, le gardien et l'arbitre se trouvent respectivement aux points E, F et G images respectives des solutions de l'équation :

$(E): z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$

3. Résoudre l'équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)
4. On considère les nombres complexes $z_E + 2i$; $z_F = \sqrt{3} - i$ et $z_G = \sqrt{3} + i$ et on définie la position des autres joueurs par la transformation $s: z' = 2iz + \sqrt{3} + i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de s.
5. Une urne contenant 9 jetons indiscernable au toucher dont 3 sont marquées z_F ; 4 sont marquées z_G et 2 sont marquées z_E, on tire successivement et sans remise deux jetons et on forme la transformation $t: z' = az + b$ où a et b désignent respectivement les marques des jetons obtenues au 1er et au 2ème tirage .

a- Détermine la probabilité $p(A)$ pour que t soit une simultude plane directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b- Détermine la probabilité pour que t soit une similitude plane directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre d'affixe $\frac{\sqrt{3}-2}{5} + i\frac{2\sqrt{3}+1}{5}$.

Problème 3 :

1ère Partie :

1. a- Etudie la continuité de f en 0.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats.

2. Etudie les variations de f
3. a- Etudie les branches infinies de (C_f).

b- Construis (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

c- En subdivisant le segment $[0; 3]$ en 10 segments de même longueur, calculer par la méthode des rectangles, l'aire du domaine délimité par, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

2ème Partie :

Soit g la fonction définie sur $I = [1; 2]$ par $g(x) = f(x) - x$

4. A l'aide des variations de g, démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans I puis déduis-en que $\alpha = f(\alpha)$.
5. a- Démontre que $\forall x \in I ; |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

b- Déduis-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

6. a- Démontre que $\alpha = -e + e^{\alpha}$

b- Justifie que g admet une bijection reciproque g^{-1} dérivable sur $g(I)$ puis démontre que

$(g^{-1})'(0) = \frac{e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}}$

c- Démontre que $\forall x \in I ; f(x) \in I$.

3ème Partie :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $(n \in \mathbb{N})$

7. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in I$.
8. a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$;

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

b- Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$

c- Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers α puis détermine une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

SUJET N° 37

Contexte

Pour réviser l'épreuve de mathématiques, l'atelier de Mathématiques décide de mettre dans une boîte 20 textes différents : 8 sont des problèmes notés sur 10 ; 5 sont des exercices de probabilités notés sur 5 et 7 sont des exercices autres que de probabilités notés sur 5.

Un professeur tire simultanément et au hasard 3 textes de la boîte, il obtient alors un « sujet ».

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Tâche : tu es invité (e) à résoudre ces trois problèmes

Problème 1

1- Combien y-a-t-il de sujets possibles ?

2- Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « le sujet tiré est composé de 3 problèmes »

B : « le sujet tiré est composé d'un problème, d'un exercice de probabilité et d'un exercice autre que probabilité »

3- Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage de 3 textes associe le total des points du barème obtenus. (Exemple : un tirage de 3 problèmes donne un « sujet » sur 30 points).

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

Problème 2

1) a- Ecrire $[2 - i(\sqrt{3}-1)]^2$ sous forme algébrique

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$(E) : z^2 - i(1+\sqrt{3})z - 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1) = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions avec $|z_1| \le |z_2|$

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

2) On pose $z_3 = z_1 \times z_2$

a) Justifier que $z_3 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$

b) Déterminer les entiers naturels n tels que

$\arg(z_3^n) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in Z$

Problème 3

On veut étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} \text{ si } x \in]-\infty ; 1] \\ f(x) = x - 1 - \sqrt{x-1} \text{ si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On considère la fonction $u : IR \to IR$

$u \to -x^3 + x^2 + x + 1$

1) Etudier les variations de u.

2) a- Démontrer que l'équation u(x) = 0 admet dans IR une solution unique α et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

a- Déterminer le signe de u(x).

Partie B

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$

4) Achever l'étude des variations de f.

5) a- Interpréter géométriquement les résultats de la question 3)

b- Etudier les branches infinies de (C)

c- Préciser la position de (C) par rapport à la droite d'équation y = x-1, dans le demi-plan défini par : $x \ge 1$

d- Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses

e- Construire (C).

Partie C

On considère l'application

$g :]-\infty ; -1[\to J = f(]-\infty ; -1[$

$x \longmapsto f(x)$

6) Calculer J et démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}

7) a- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}. Soit E cet ensemble.

b- Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c- Démontre que le point $A(\frac{3}{5} ; -2)$ appartient à la courbe (C') de g^{-1}

d- Calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.

SUJET N° 38

Contexte : La ferme de Sodji

Sodji est un riche éleveur de lapins, installé dans un village de la commune de GRAND POPO. Il dispose d'un vaste domaine plan, ayant la forme d'un quadrilatère, sur lequel il a implanté un bâtiment pour l'élevage de deux races de lapins : une race locale et une race importée.

Pour amoindrir le coût d'alimentation des lapins, Sodji envisage de cultiver des céréales sur une portion de son domaine afin de produire des provendes. Il fait alors appel à un géomètre topographe pour la réalisation du levé topographique de son domaine et pour la délimitation de la quantité de provende qu'il peut espérer produire par an.

A l'approche de la fête de « Nonvitcha », Sodji a demandé à son employé Fiosi, de lui faire le point des lapins susceptibles d'être vendus. Il ressort de ce point que :

- 80% des lapins susceptibles d'être vendus sont de la race importée et 20% sont de la race locale ;
- Parmi les lapins susceptibles d'être vendus de la race importée, 75% sont des femelles et parmi ceux de la race locale, 15% sont des mâles ;
- Exactement 616 lapins susceptibles d'être vendus sont des femelles.

Au démarrage de la vente des lapins, à l'occasion de la fête de « Nonvitcha » Fiosi est appelé à servir un restaurant qui a commandé dix lapins et qui souhaite avoir au moins un lapins de la race locale.

Tâche : Tu es invité(e) à résoudre les trois problèmes ci-après pour :

- Déterminer le nombre de lapins susceptibles d'être vendus par Sodji à l'occasion de la fête de « Nonvitcha » ;
- Déterminer l'aire du domaine de Sodji ainsi que celle du champ de céréale ;
- Trouver une estimation de la quantité annuelle de provende que Sodji peut produire.

Problème 1 :

1. Pour servir le restaurant, Fiosi choisit au hasard un lapin, tous les lapins ayant la même probabilité d'être choisis.

   Soit F l'évènement : « le lapin est une femelle » et I l'évènement : « le lapin est de la race importée ». Les évènements contraires respectifs de F et I sont notés $\bar{F}$ et $\bar{I}$.

a) Calcule la probabilité de chacun des évènements : $I \cap F, I \cap \bar{F}, \bar{I} \cap F, \bar{I} \cap \bar{F}$

b) Déduis-en le nombre de lapins susceptibles d'être vendus à l'occasion de la fête de « Nonvitcha ».

2. Pour son restaurant, Fiosi choisit dix fois de suite un lapin parmi les lapins susceptibles d'être vendus. On admet que le nombre de lapins est suffisamment important pour que la probabilité de tirer un lapin soit identique pour chacun des choix supposés indépendants les uns des autres.

   Calcule la probabilité que le souhait du restaurant soit réalisé.

Problème 2

Au terme de son travail, le géomètre a expliqué que les bornes du domaine de Sodji occupent des positions régulières dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Il a en effet signifié que les affixes respectives u, v , w des positions A, B, C de trois bornes du domaine sont les solutions de l'équation : (E) : $z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-4i)z + 16 - 8i = 0$, et l'emplacement D de la quatrième borne est l'image de C par la similitide plane directe S de centre A qui transforme B en C.

Soit P(z) le polynôme complexe défini par :

$P(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-4i)z + 16 - 8i$

3. a) Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que tu détermineras.

b) Détermine le polynôme Q(z) tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

c) Déduis l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. On donne $u = 2, v = mi$ et $w = 2 + 4i$ où m est nombre entier naturel.

a) Détermine la valeur m pour que l'écriture complexe de la similitude S soit : $z' = (1-i)z + 2i$

b) Donne la nature de S puis précise ses éléments caractéristiques.

c) Détermine l'affixe du point D.

5. On suppose que : $m = 2$.

a)Détermine la nature du triangle ABC.

b) Sachant que l'unité de longueur est l'hectomètre, calcule en hectares l'aire de la portion ABC

c) Déduis-en l'aire du domaine de Sodji

Problème 3

Le plan du domaine de Sodji, réalisé à une échelle de $\frac{1}{10.000}$ par le géomètre, est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$, d'unité graphique 1 cm. Le champ de céréales est délimité par la courbe représentative (C) d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = 2\sqrt{2}$. La fonction f est la solution qui prend la valeur 1 en 0 de l'équation différentielle : $(E_1): y' + y = 2e^{-x}(x+1)$

6. a) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = e^{-x}(ax^2 + bx)$, soit solution de l'équation (E_1)

b) Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E_1) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2): y' + y = 0$

c) Résous l'équation (E_2) puis déduis la résolution de l'équation (E_1)

7. Démontre que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$

8. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

9. a) Étudie le sens de variation de f

   b) Dresse le tableau de variation de f

10. a) Étudie les branches infinies de la courbe (C)

    b) Construis (C) et hachure la partie représentant le champ de céréales de Sodji.

11. a) Démontre pour tout réel x,

    $f(x) = e^{-x}(2x+2) - f'(x)$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calcule le nombre L suivant : $L = \int_0^{2\sqrt{2}} e^{-x}(2x+2)dx$

c) Déduis-en, en hectares, l'aire du champ de céréales.

12. a) Démontre que l'équation : $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α et que l'on a : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

b) Démontre que pour tout

$x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], f(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ et $|f'(x)| \leq \frac{5}{4e}$

c) Déduis-en que pour tout x élément de $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ on a: $|f(x)-\alpha| \leq \frac{5}{4e}|x-\alpha|$

13. Après une étude sérieuse du champ de céréale de Sodji, les agents du CERPA ont estimé que Sodji peut produire en toute année $2012+n$, $(n \in \mathbb{N})$ une quantité de provende u_n exprimée en dizaine de tonnes et vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

a) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[1;\frac{3}{2}\right]$

b) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{5}{4e}|u_n-\alpha|$ et $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4e}\right)^n$

c) Déduis-en que la production annuelle de provende va se stabiliser à long terme à une valeur que tu préciseras.

SUJET N° 39

Contexte : Un concert de solidarité.

Un concert de solidarité est organisé dans une salle du complexe scolaire ''La Grande Académie ''. Cette salle a la forme d'un cube $OIRJKLMN$ d'arête 1. Parmi les neuf musiciens de renommée conviés à ce concert, Odéra, un des musiciens, refuse de jouer avec les autres. Pour éviter les aléas, l'organisateur du concert fait appel à l'architecte Waïdi pour qu'il effectue des séparations à l'intérieur de la salle afin que chaque musicien dispose d'un espace de spectacle de même volume.

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$ du cube, Waïdi place trois rideaux dont deux sont représentés par les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $x+y+z-1=0$ et $x+y-2z-4=0$ et le troisième représenté par le plan (P_3) passant par le sommet O du cube, le point A milieu de l'arête [LI] et le point B barycentre des points pondérés $(K,1)$ et $(N,2)$. Après ces séparations effectuées par Waïdi, le musicien Odéra se retrouve avec un espace ayant le même volume que le volume du tétraèdre OABK et veut s'assurer que le partage est équitable. Pour cela il décide d'en savoir plus sur l'ensemble des travaux effectués par Waïdi.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Odéra dans sa quête en résolvant les trois problèmes ci-après

Problème 1

1. a. Démontre que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

   b. Donne un repère de leur droite d'intersection (Δ_1).

2. a. Représente le cube $OIRJKLMN$ (unité 3cm) puis place les points A et B

   b. Justifie que $M(1;1;1)$, $A(1;0;\frac{1}{2})$ et $B(0;\frac{2}{3};1)$ dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$

   c. Justifie que le point M n'appartient pas à (Δ_1).

3. a. Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ_2) passant par M et perpendiculaire au plan (P_1).

   b. En déduis les coordonnées du point M' projeté orthogonal du point M sur le plan (P_1).

4. a. Détermine une équation cartésienne du plan (P_3).

   b. Détermine $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)$.

5. a. Calcule le volume du tétraèdre OABK. Le partage est-il équitable ? justifie ta réponse.

Problème 2

Waïdi a réservé pour lui et l'organisateur du concert deux places d'honneur assimilées aux points M_1 et M_2 dont les affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ sont les racines du polynôme $P(z)=(1+i)z^2-2i(m+1)z+(-1+i)(m^2+1)$ où m est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$

6. Détermine la valeur de m pour que $P(z)$ admet une racine double. Précise cette racine double.

7. On suppose dans cette question uniquement que $m \in]1;+\infty[$.

   a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ puis détermine z_1 et z_2 sachant que $Re(z_1) > Re(z_2)$.

   b. Justifie qu'une relation indépendante de m liant z_1 et z_2 est : $z_2 = iz_1+2$.

   c. $M_2(z_2)$ et $M_1(z_1)$ sont deux points du plan complexe. Justifie que M_2 est l'image de M_1 par une transformation dont tu préciseras la nature et les éléments caractéristiques

8. Waïdi s'est amusé à évaluer ses chances d'obtenir une racine double du polynôme $P(z)$ en tirant m dans l'ensemble des nombres : $-1;1;2$ et 3.

a. Détermine la probabilité $p(m)$ d'obtenir m sachant que $p(1)=3p(2)=2p(3)=4p(-1)$

b. Détermine la probabilité d'obtenir exactement trois fois une racine double après quatre tirages en remettant chaque fois le nombre tiré.

Problème 3

Le motif de décoration observé à l'entrée de la salle de concert est une portion de la représentation graphique de la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

9. a. Etudie les variations de g sur $[0;+\infty[$ avec $g(x)=x+2-e^x$.
   b. Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$ et que $1{,}14<\alpha<1{,}15$.
   c. En déduis suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
10. a. Montre que , $\forall x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b. En déduis le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

c. Montre que , $\forall x\in[0;+\infty[$, $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

d. En déduis la limite de f en $+\infty$ puis dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

e. Etablis que $(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

f. En utilisant l'encadrement de α donne un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

g. Trace la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$ 11. a. Détermine une primitive F de f sur $[0;+\infty[$. Tu pourras utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question 10.c)

b. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$. Calcule U_0, U_1 et U_2

c. Démontre que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $f(n+1)\leq U_n\leq f(n)$

d. Déduis la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

SUJET N° 40 : REVISION

Contexte : L'Homel

A l'Homel, l'infirmier Dotou a relevé pour chacune des 10 naissances d'une journée l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-né et a obtenu le tableau ci-dessous

Age x en année	18	22	26	18	20	20	22	16	18	20
Poids y en kg	2,4	3	3,2	2,6	3	2,8	3	2,4	2,6	2,8

L'infirmier Dotou souhaite connaître une estimation de poids du bébé que lui donnera sa femme de 24 ans afin de mieux préparer l'arrivée du futur bébé

Tâche : Tu es invité (e) à aider Dotou à venir à bout de ses différentes préoccupations à travers la résolution des trois problèmes ci- après.

Problème 1 :

1. a) Comment appelle-t-on le tableau ainsi obtenu ?
   b) Dresse le tableau à double entrée de la série (x ; y)
   c) Dresse le tableau des séries marginales associées aux caractères x et y.
2. Représente le nuage de points associé à cette série statistique puis détermine le point moyen G du nuage
3. Calcule le coefficient de corrélation linéaire de cette série et interprète le résultat.
4. a) Détermine une équation de la droite de régression de y en x.
   b) A partir de l'équation trouvée en 4a) donne une estimation du poids du futur bébé de Dotou

Problème 2

Dotou veut acheter un lit pour son futur bébé. Le vendeur lui informe que les lits disponibles ont chacun la forme du solide OEFG tel que dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; $E(4;0;0)$; $F(0;4;0)$ et $G(0;0;4)$.

Dotou veut avoir une idée sur le volume de ces lits

5. a) Démontre que les points E ; F et G déterminent un unique plan (P)

b) Détermine une équation cartésienne du plan (P)

6. a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) orthogonale à (P) et passant par O.

b) Détermine les coordonnées du point d'intersection I du plan (P) et de la droite (D)

7. Soit J l'isobarycentre des points E ; F et G
   a) Démontre que J et I sont confondus.
   b) Détermine l'ensemble (Δ) des points M de l'espace vérifiant
   $(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$
   c) Détermine l'ensemble (Q) des points M de l'espace vérifiant
   $(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) . \overrightarrow{OJ} = 0$
   d) Donne un système d'équation cartésiennes de (Δ) et une représentation paramétrique de (Q)
8. a) Calcule l'aire du triangle EFG
   b) Calcule la distance du point O au plan (P)
   c) Calcule le volume d'un lit.

Problème 3

Le taux de diminution du nombre d'accouchement par jour à l'hôpital Homel est la limite de la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$ où g est la bijection réciproque de la fonction f solution de l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2 - 2x$ tel que $f(0) = 1$

Partie A

9. Détermine deux nombres réels a et b pour que la fonction $v(x) = ax + b$ soit une solution de (E)
10. a) Résous l'équation différentielle $(F) : y' - y = 0$
    b) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - v$ est solution de l'équation différentielle (F)
    c) Déduis-en les solutions de (E)
    d) Détermine f

Partie B

11. a) Etudie les variations de f
    b) Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
    c) Dresse le tableau de variation de g
12. Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α vérifiant $-1 < \alpha < 0$
13. a) Justifie que $g(\alpha) = \alpha$
    b) Démontre que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$: $g(x) \in]-\infty ; \alpha]$
    c) Exprime $g'(x)$ en fonction de $g(x)$
    d) Démontre alors que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$ on a $0 < g'(x) < \frac{1}{2}$
    e) Démontre que $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$ on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Partie C

14. a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in]-\infty ; \alpha]$
    b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
    c) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ puis que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
    d) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite
15. a) Détermine le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près

SUJET N° 41 : REVISION

Contexte

Lors de la sortie pédagogique des élèves du complexe scolaire « La Grande Académie » en Avril dernier, certains élèves de la classe de terminale D dont Fifamè ont visité la ferme agricole NOUDOUDOU dans la ville de Sèmè.

Des nombreuses explications du responsable de la ferme, Fifamè a retenu que :

- dans la ville de Sèmè, on cultive principalement les noix de coco, la tomate, l'oignon et le maïs et 31% des fermiers de cette ville cultivent les noix de coco ; 18% cultivent la tomate ; 5% cultivent l'oignon et 46% cultivent le maïs.

- Indépendamment de la culture, un fermier peut aussi cultiver l'arachide. Parmi les fermiers qui cultivent le maïs, 9% cultivent l'arachide et les fermiers qui cultivent le maïs et l'arachide sont communément appelés « fermier abocoun »

- Les échantillons des produits récoltés sur la ferme NOUDOUDOU sont souvent exposés dans une salle et dans l'espace de cette salle rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les différentes variétés de noix de coco et de tomates sont étalées sur une surface contenue dans un plan (Q) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + \sqrt{2} \\ y = -3t' + \pi \\ z = -1 \end{cases}$, $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ tandis que les autres produits sont accrochés à une tige portée par l'ensemble (Δ) des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x - y + z - 2)^2 + (2x + y - z + 1)^2 = 0$

- un mur de la salle contenu dans un plan (P) est bien décoré à l'aide de certaines figures planes et de leurs images par une transformation plane φ précise.

- Les allées de la ferme sont assimilables à des portions d'une courbe (Γ) représentative des variations d'une fonction numérique f d'une variable réelle dans un plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$
- à partir d'un certain moment, la productivité annuelle des nombreux cocotiers se trouvant dans la ferme n'est plus systématiquement croissante.

Sidérée par les explications reçues, Fifamè se pose néanmoins certaines questions notamment sur le nombre moyen de « fermiers abocouns » de la ville de Sèmè, sur la nature de la transformation plane φ, sur l'allure de la courbe (Γ) et sur la production annuelle à long terme en noix de coco de la ferme.

Tâche : Tu es invité(e) à partager les préoccupations de Fifamè à travers la résolution des trois problèmes suivants :

Problème 1

1) Détermine une équation cartésienne du plan (Q)

2) a) Démontre que l'ensemble (Δ) est une droite

b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Détermine l'intersection de (Q) et (Δ)

3) On choisit quatre fermiers dans la ville de Sèmè

a) Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre fermiers cultive le maïs ?

b) Quelle est la probabilité que chacun des quatre fermiers cultive une et une seule culture parmi les quatre principales cultures de Sèmè ?

4) a) Justifie que la probabilité qu'un fermier de Sèmè soit un « fermier abocoun » est 0,0414

b) Détermine le nombre moyen de « fermiers abocouns » parmi 10.000 fermiers de Sèmè.

Problème 2

Le plan (P) du mur décoré est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega;\vec{e_1},\vec{e_2})$ et la transformation plane φ est la composée de l'homothétie h de centre $K\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rapport -2 et d'une application r du plan dans le plan, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

5) a) Détermine l'écriture complexe de l'application r

b) Donne la nature précise de r puis précise ses éléments caractéristiques.

6) a) Détermine l'écriture complexe de $h \circ r$

b) Prouve que φ est une similitude plane directe dont tu préciseras les éléments caractéristiques

c) Détermine les affixes des images par φ des points dont les affixes sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^3 = \frac{1}{(-1-i\sqrt{3})^2}$

Problème 3

En réalité f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Partie A

Le domaine de la ferme compris entre la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est couvert exclusivement de cultures d'arachides

7) a) Démontre que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0

c) Donne une interprétation graphique de la dérivabilité de f en 0

8) a) Etudie les variations de f

b) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ)

c) Construis la courbe (Γ)

d) Calcule en unité d'aire, l'aire de la surface occupée par la culture d'arachides.

Partie B

Le responsable de la ferme a ajouté dans ses explications qu'à partir de l'année 2010, la production annuelle de la ferme en noix de coco de l'année $(2010+n)$ en million de francs est d'environ $|U_n|$ où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

9) Calcule les montants de la production annuelle de noix de coco en 2010 et en 2011.

10) a) Etudie le sens de variation de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ sur $]-\infty;0]$

b) Démontre que l'équation $g(x) = 2$ admet dans $]-\infty;0]$ une solution unique x_0

c) Justifie que $-2 \leq x_0 \leq -1$

d) Vérifie que $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$

11) On pose $I = [-2;-1]$

a) Démontre que pour tout élément x de , $f(x)$ appartient à I

b) Démontre que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$

c) Déduis-en que pour tout élément x de I, $|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}|x - x_0|$

12) a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, U_n appartient à I

b) Justifie que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}|U_n - x_0|$

c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $|U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^n$

d) Autour de quel montant stabilisera à long terme la production annuelle de noix de coco si d'autres plants de cocotiers n'étaient plus mis en terre sur la ferme NOUDOUDOU ?

SUJET N° 42 : REVISION

Contexte :

L'entreprise Dounou produit 112 *litres* de chocolat par jour à un coût total de 200.000F. Pour sa nouvelle marque de chocolat, le PDG de l'entreprise commande un nouvel emballage à une société de fabrication d'emballage. Le dessin du nouvel emballage proposé au PDG a la forme d'un tétraèdre DABC tel que dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est égale à $2cm$:

- les sommets A, B, C et D ont pour coordonnées : $A(1;2;3)$, $B(5;0;9)$, $C(5;7;2)$ et $D(2;1;2)$
- l'une de ses faces latérales est contenue dans l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$
- le point H de l'ensemble (P) appartient à la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -1 - 2\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 12 + 6\alpha \end{cases}$

Pour promouvoir la vente de ces nouveaux chocolats, le PDG de l'entreprise décide d'offrir des bons de places de cinéma aux clients. Ces bons sont insérés à l'intérieur des emballages des chocolats. Le tiers des chocolats mis en vente ne contient pas de bon de places de cinéma et parmi les chocolats contenant un bon de places de cinéma, 60% de bons permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

Le PDG sollicite sa fille Cardie, élève en classe de terminale scientifique, à l'aider à connaître entre autres, le prix auquel chaque nouveau chocolat doit être vendu afin de réaliser un bénéfice journalier de 50.000F, la chance d'un client de gagner exactement quatre places de cinéma après l'achat de trois chocolats.

Tâche : Tu es invité(e) à te joindre à Cardie afin de trouver des solutions aux préoccupations de son père en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. a. Démontre que ABGC est un parallélogramme où le point G est le barycentre des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

   b. Détermine les coordonnées du point G.
2. a. Démontre que l'ensemble (P) est un plan et précise un repère de (P)

   b. Détermine une équation cartésienne de (P)
3. Détermine une équation cartésienne du plan (Q) déterminé par les points A, B et C
4. a. Démontre que $(\Delta) = (AB)$

   b. Démontre que la droite (Δ) et le plan (P) sont sécants.

   c. Détermine les coordonnées du point H.
5. a. Démontre que (P) et (Q) sont perpendiculaires

   b. Détermine un repère de $(P) \cap (Q)$
6. a. Calcule, en *littres* le volume de l'emballage proposé à l'entreprise Dounou

   b. Détermine alors le prix de vente d'un nouveau chocolat.

Problème 2

Partie I

Pour évaluer les chances d'un client de gagner un bon de place de cinéma après un achat Cardie désigne par : B l'événement "le client achète un chocolat contenant un bon", par U l'événement : " le client gagne exactement une place de cinéma" et par D l'événement : " le client gagne exactement deux places de cinéma"

7. a. A l'aide des événements B, U et D, traduis en termes de probabilités les données du contexte.

   b. Montre que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
8. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par Cardie.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

   c. Trace la fonction de répartition de X

9. Détermine la probabilité pour qu'un client gagne exactement deux places de cinéma après un achat de deux chocolats.

Partie II

Le rayon réservé à l'exposition des nouveaux chocolats dans l'entreprise a la forme d'un triangle dont les sommets représentés par les points I, J et K dans le plan complexe orienté muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$,$\vec{v}$) ont pour affixes respectives z_I , z_J et z_K racines du polynôme $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des nombres complexes et $Im(z_I) > Im(z_K) > Im(z_J)$.

10. Détermine les nombres complexes a, b et c sachant que $P(0) = 8i$;
$P(1) = (5 - 2\sqrt{3}) + i(10 - 4\sqrt{3})$ et
$P(-1) = (-5 - 2\sqrt{3}) + i(10 + 4\sqrt{3})$

11. En réalité $P(z) = z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 - (-4 + 4i\sqrt{3})z + 8i$

a. Démontre que $P(z)$ admet une racine imaginaire pur z_0 que tu détermineras.

b. Détermine le polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z + 2i)Q(z)$.

c. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

d. Justifie alors que $z_I = \sqrt{3} + i$, $z_J = -2i$ et $z_K = \sqrt{3} - i$

12. a. Quelle est la nature du triangle JIK ?

b. Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui laisse invariant le milieu du segment [IK] et qui transforme I en O. Quelle est sa nature et ses éléments caractéristiques ?

Problème 3

Le motif de décoration observé sur l'emballage est une portion de la représentation graphique de la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x+x^2} & si\ x \in [0 ; +\infty[\\ f(x) = -x - x^2\ln(-x) & si\ x \in]-\infty ; 0[\end{cases}$$

dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unité graphique 2cm.

13. a. Démontre que f est définie sur $\mathbb{R}$

b. Démontre que f est continue en 0

c. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

15 a. Etudie les variations de la fonction $v : x \longmapsto -x - 1 + 2\ln(-x)$

b. Calcule $v(-1)$ puis déduis suivant les valeurs de x le signe de $v(x)$ sur $]-\infty ; 0[$

c. En déduis que si $x \in]-1; 0[$ alors $v\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et si $x \in]-\infty; -1[$ alors $v\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

d. Démontre que $\forall x \in]-\infty ; 0[$: $f'(x) = xv(\frac{1}{x})$

16. a. Etudie les variations de f sur son ensemble de définition.

b. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty ; 0[$ une unique solution α telle que $-2 < \alpha < -1{,}75$

b. Détermine l'image de l'intervalle $I = [0 ; 1]$ par f.

17. On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} = f(U_n)$

a. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \in I$

b. Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} < U_n$

c. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

d. Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$

e. Justifie que la suite (U_n) est convergente et détermine sa limite.

17. Construis la courbe (C) de f

SUJET N° 43 : REVISION

Contexte : Le tournoi de football.

Le tournoi inter-classes organisé cette année dans la commune de Calavi a connu la victoire de l'équipe de Dotou. Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) unité graphique 2cm, le trophée remporté par l'équipe de Dotou est assimilable au solide de l'espace engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (D) délimité par la courbe (C) de la fonction u solution de l'équation différentielle (E) : $-y'' + y = (4x + 2)e^{-x}$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, et $x = 1$.

Le terrain de foot est assimilable à l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x \cos 2x \end{cases}$$

Dotou s'intéresse au volume V du trophée, à l'aire du terrain et au comité d'organisation du tournoi.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Dotou en résolvant les trois problèmes ci- après.

Problème 1 :

1) Démontre que la fonction v définie par $v(x) = e^x + (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E).

2) Démontre qu'une fonction β est solution de (E) si et seulement si $(\beta - v)$ est solution de l'équation différentielle (E') : $-y'' + y = 0$.

3) a-Résous l'équation différentielle (E') puis déduis les solutions de (E).

b- Détermine la fonction u sachant que (C) admet au point I(0 ;1) une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$.

4) On suppose dans la suite que la fonction u est définie par $u(x) = (x+1)^2e^{-x}$.

Prouve que pour tout nombre réel x, on a $u(x) = (2x+2)e^{-x} - u'(x)$.

5) a- A l'aide d'une intégration par parties calcule l'intégrale $J = \int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$.

b- Calcule l'aire du domaine (D).

6) Démontre que la fonction $U : x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 - \frac{15}{2}x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{21}{4}\right)e^{-2x}$ est une primitive de u^2 sur $\mathbb{R}$ puis déduis le volume V de ce trophée.

7) a- Linéarise $\sin x \cos 2x$ pour tout réel x.

b- En déduire que la fonction $Q : x \mapsto -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $q : x \mapsto \sin x \cos 2x$.

c- Déduis en cm^2 l'aire du terrain de foot.

Problème 2

8) Un match est assisté par trois arbitres dont les positions sur le terrain de foot sont représentés dans le plan complexe par des points d'affixe z racines du polynôme

$P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$.

Détermine les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

9) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3+i$; $2i$ et $2-2i$

a- Démontre que le triangle ABC est isocèle rectangle.

b- Donne l'écriture complexe de la rotation r de centre A qui transforme B en C.

c- Donne l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

d- Déduire que l'écriture complexe de la transformation S = hor est : $z' = 2iz + 5 - 5i$ puis caractérise S.

e- Détermine l'équation cartésienne de l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par S

10) L'espace occupé par les chaises des spectateurs au cours d'une rencontre pendant le tournoi est représentée dans l'espace par le plan (P) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

et celui occupé par les chaises du comité d'organisation est représenté par le plan (Q) d'équation cartésienne : $x + y + z = 1$. On considère les points $D(-1;0;1)$ et $E(0;0;-1)$.

a- Vérifie que le point D appartient à (P).

b- Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

c- On pose $(\Delta) = (P) \cap (Q)$. Détermine un repère de (Δ).

11) En réalité le tournoi inter-classes a lieu chaque année et chaque équipe qui souhaite participer doit payer une quote-part qui varie en fonction du nombre d'équipes. Le comité d'organisation cherche à fixer le prix de la quote-part afin de réaliser un revenu maximal. Le tableau suivant donne l'évolution sur 6 années du nombre y d'équipes ayant participé au tournoi en fonction du prix de la quote-part de l'année correspondante

x_i(en milliers de francs)	1	1	2	2	4	5
y_j	11	10	8	8	5	6

a- Calcule les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$

b- Dresse le tableau à double entrée correspondant à la série double $(x_i ; y_j ; n_{ij})$

c- Calcule la covariance du couple de caractères (x ; y).

d- Etablis l'équation de la droite de régression donnant y en fonction de x.

e- Les frais d'organisation des rencontres au cours d'un tournoi s'élève à 500 francs par équipe.

Démontre que le revenu total R obtenu est donnée par $R(x) = -1{,}259x^2 + 11{,}778x - 5{,}574$.

f- A quel prix le comité doit-il fixer la quote-part pour réaliser un revenu maximal. Calcul ce revenu puis précise le nombre d'équipe qui doit participer au tournoi pour réaliser ce revenu.

Problème 3

12) Le gain des équipes perdantes est la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 xe^{-nx}dx$.

a- Calcule U_0 et U_1

b- Etudie le sens de variation de la suite (U_n)

c- Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ et déduis que la suite (U_n) est convergente .

d- Exprime U_n en fonction de n et calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

e- Combien gagne chaque équipe perdante ?

13) Au cours d'un match, l'une des trajectoires décrites par le ballon lors de son déplacement est une portion de la représentation graphique (C_f) de

la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -x + x\ln(-x) & si\ x < 0 \\ f(x) = x\exp(1 - x^2) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a- Détermine le domaine de définition D de f.
b- Etudie la continuité de f en 0.
c- Etudie la dérivabilité de f en 0. Puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
d- Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
e- Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$ et $]0;+\infty[$ puis dresse le tableau de variation de f sur D

Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) puis trace (C_f) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

SUJET N° 44 : REVISION

Contexte : Expérimentation d'un sérum.

Le taux de glycémie reste stable dans le sang. Cet équilibre est assuré par un processus géré par le cerveau qui envoie des messages pour corriger ce taux dès qu'il décèle un changement. Ce taux est dit normal lorsqu'il est inférieur à 1,1.

Des examens menés dans un laboratoire par le docteur-chercheur M. Fonblehoun sur le patient M. Egan ont permis de dresser le tableau ci-dessous qui indique la durée x_i de l'observation en minutes et le taux y_i de glycémie de M. Egan.

x_i	0	5	10	15	20	25
y_i	2	1,83	1,67	1,53	1,40	1,28
x_i	30	35	40	45	50	
y_i	1,17	1,07	0,97	0,89	0,81	

Pour soulager les malades en cas de disfonctionnement du processus qui assure la stabilité du taux de glycémie dans le sang, M. Fonblehoun a mis au point un sérum. L'effet du sérum se mesure au taux y de glycémie présent dans le sang, x dizaines de minutes après l'injection du sérum suivant l'ensemble (Γ) des points M du plan de coordonnées $(x;y)$.

Dans le plan, (Γ) est parallèle à l'ensemble (Δ) et passe par le point $H\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ où l'ensemble (Δ) est l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MC}\right) = 12$$

Informé, N'nandi, fils de M. Egan et élève en classe de terminale scientifique, se demande au bout de combien de minutes le taux de glycémie de son père est-il redevenu normal et désire en savoir davantage sur le sérum du docteur.

Tâche : Tu es invité(e) à aider N'nandi à trouver des réponses à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série double $(x_i\,;y_i)$ puis justifie qu'un ajustement affine est envisageable.
2) Comme pour la santé on préfère allier rigueur et précision, on envisage un ajustement plus fin. Pour cela on pose $z_i = \ln y_i$
   a) Dresse le tableau linéaire de la nouvelle série double $(x_i\,;z_i)$ ainsi obtenue
   (Tu donneras les arrondis des z_i à 10^{-5} près)
   b) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r_2 de la série double $(x_i\,;z_i)$
   c) Déduis-en qu'en ajustement affine est convenable entre x et z
   d) Détermine une équation de la droite de régression de z en x
3) Justifie que l'on peut écrire y sous la forme $y = Ke^{mx}$ où K est un arrondi entier et m l'arrondi à 10^{-3} près d'un nombre décimal.
4) Au bout de combien de minutes le taux de glycémie de M. Egan est-il redevenu normal ?

Problème 2

En réalité, dans le plan complexe orienté muni du repère orthonormé direct $(\Omega\,;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C de l'ensemble (Δ) sont les images des nombres complexes racines du polynôme
$P(z) = z^3 + 1 - 3z^2 + 3z + 6$ tel que $Im(z_B) > Im(z_A) > Im(z_C)$

5) Vérifie que pour tous nombres réels a et b on a : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ et $a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$
6) a) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0
   b) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
   c) Déduis-en que : $z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $z_A = -1$ et $z_C = 2 - i\sqrt{3}$
7) a) Détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_H - z_C}$.
   b) Déduis-en la nature du triangle HAC
8) a) Démontre que le point H est barycentre du système de points pondérés $\{(A;-1)\,,\,(B;2)\,,\,(C;2)\}$
   b) Justifie que le point A appartient à l'ensemble (Δ)

c) Démontre que $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$

d) Déduis-en l'ensemble (Δ) puis l'ensemble (Γ)

9) a) Si M. Egan avait reçu le sérum du docteur, à partir de combien de minutes son taux de glycémie redeviendrait-il normal ? (Tu donneras l'arrondi entier du résultat)

b) Comparer à l'usage naturel du cerveau, le sérum de M. Fonblehoun est-il efficace?

Problème 3

La bouteille du sérum est assimilable au solide de l'espace engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (D) délimité dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ unité graphique 2cm, par la courbe (C_h) de la fonction $h : x \mapsto f(x) - x + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ où $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

10) a) Etudie les variations de la fonction $g : x \mapsto 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$

b) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

11) Calcule les limites de f sur son ensemble de définition

12) a) Justifie que $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b) Achève l'étude des variations de f

13) a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C_f) de la fonction f

b) Etudie la position relative de (C_f) et (Δ)

14) Calcule en cm^3, le volume d'une bouteille de sérum.

SUJET N° 45 : REVISION

Contexte : La culture de produits vivriers.

M. Azanvor est le propriétaire d'une boutique de vente de produits vivriers, construite devant son domicile. Après les travaux de libération des espaces publics qui ont occasionnés la démolition de sa boutique, M. Azanvor décide d'exploiter sa ferme pour la culture de riz et de l'ananas.

Il réserve une portion de la ferme ayant la forme d'un quadrilatère EFGH à la culture de riz et le reste à la culture de l'ananas. Pour irriguer la ferme en cas de manque de précipitations, M. Azanvor sollicite les services d'une agence de forage qui a prescrit la construction d'un puits à l'intersection de (P) et (Δ) où dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
(P) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 5$ et (Δ) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{OB}$ avec $A(1;2;-4)$, $\vec{u}(3;-2;1)$ et $\overrightarrow{AB}(3\,;5;6)$.

Informé, Espoir, fils de M. Azanvor et élève en classe de terminale D désire localiser la positon du puits et évaluer la quantité de riz et d'ananas que son père peut espérer après culture.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Espoir à trouver des solutions à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. Justifie que $\overrightarrow{OB}(4\,;7;2)$.
2. a) Démontre que
$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 6 \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
b) Déduis-en la nature de (Δ) et donne un repère de (Δ).
3. a) Démontre que $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0$
b) Détermine alors l'ensemble (P) puis donne une équation cartésienne de (P).
4. a) Etudie la position relative de (Δ) et (P)
b) Détermine les coordonnées du point où sera construit le puits.

Problème 2

Dans le plan de la portion de la ferme réservée à la culture de riz muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité l'hectomètre, les affixes z_0, z_1 et z_2 des bornes E, F et G respectives sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ avec $P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 - 4(1-4i)z + 16 - 8i$ et la borne H est l'image de G par la similitude plane directe S de centre E qui transforme F en G.

5. Détermine z_0, z_1 et z_2 sachant que $\overline{z_1} = -z_1$ et $|z_0| = z_0$
6. a) Justifie que l'écriture complexe de S est : $z' = (1-i)z + 2i$
b) Détermine l'affixe de la borne H.
c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S.
d) Détermine l'image par S de l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z telles que
$$|-z + 2i| = |iz - 2i + 4|$$
7. a) Détermine la nature du triangle EFG
b) Calcule en hectares l'aire de la portion EFGH.
8. Quelle est en tonnes la quantité de riz que M. Azanvor peut espérer après culture si chaque hectare produit 250 kilogrammes de riz ?

Problème 3

Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité l'hectomètre, la portion réservée à la culture de l'ananas est délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$; $x = 2$ et une frontière modélisée par la courbe (C_1) appartenant à la famille des courbes (C_t) des fonctions f_t définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_t(x) = x^t\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right)$ où t est un nombre entier naturel impair. Le millième du nombre d'ananas qu'on peut espérer par are (décamètre carré) est la limite de la suite numérique (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ où φ est la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{1}{2}\right]$ par

$$\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$$

Partie A

9. a) Calcule la limite de f_t en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_t'(x) = x^{t-1}g_t(x)$ avec $g_t(x) = (t-x)e^{-x} - \frac{t}{2}$

10. a) Etudie les variations de g_t

b) Déduis-en que l'équation $g_t(x) = 0$ admet une unique solution α_t dans $\mathbb{R}$ telle que $\alpha_t > 0$

c) Détermine le signe de g_t suivant les valeurs de x

d) Déduis-en le signe de $f_t'(x)$ suivant les valeurs de x.

e) Dresse le tableau de variations de f_t.

Partie B

Dans cette partie on prend $t = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$; $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$ et (C_1) est la courbe représentative de f_1

11. a) Démontre que $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$

b) Démontre que $f_1(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)^2}{2(1-\alpha_1)}$

c) Déduis-en de la question 10) e) le tableau de variation de f_1

d) Démontre que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont tu préciseras une équation.

12. a) Démontre que α_1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$

b) Démontre que $\forall x \in I$, $\varphi(x) \in I$.

c) Démontre que $\forall x \in I$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$

d) Déduis-en que

$\forall x \in I, |\varphi(x) - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|x - \alpha_1|$

Partie C

13. a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|U_n - \alpha_1|$

c) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$

d) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite

14. On donne $\alpha_1 \approx 0,315$

a) Construis (C_1) et (D) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à l'échelle de $\frac{1}{10000}$

b) Détermine les nombres réels a et b tels que , la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit solution de l'équation différentielle $y' = xe^{-x}$

c) Calcule en hectares l'aire de la portion réservée à la culture de l'ananas.

Détermine à l'unité près le nombre d'ananas que M. Azafvor peut espérer après culture

TOUS LES SUJETS DU BAC SERIE D DE 1990 à 2018

BAC 1995 série D session normale (partiel)

Exercice I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations :

$(E_1): 9z^2 + 6(2-3i)z - 5 - 12i = 0$

$(E_2): 9z^2 + 6(2-3i)z - 5 - 12i = 3\bar{z} + 2 + 3i$.

où i est tel que $i^2 = -1$ et $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1)a) Résoudre l'équation (E_1)

b) En déduire que pour tout nombre complexe z solution de l'équation (E_2), il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que :

$(\varphi(z))^2 = \overline{\varphi(z)}$

c) En posant $\varphi(z) = T$, démontrer que $T = 0$ ou $|T| = 1$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $T^2 = \overline{T}$ d'inconnu T

2) Résoudre l'équation (E_2).

3) On donne dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points A, B, C d'affixes respectives : $z_1 = -\frac{1}{3} + i$; $z_2 = -\frac{5}{6} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$; $z_3 = -\frac{5}{6} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

a) Préciser la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un losange.

Exercice II

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(1;-2;3)$, $B(2;0;-3)$, $C(-1;1;0)$, $D(3;1;-2)$.

1) Déterminer le barycentre G des points pondérés $(A,-1)$, $(B,2)$ et le barycentre H des points pondérés $(C,3)$ et $(D,2)$.

2) Démontrer géométriquement que l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que :

$\left(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \wedge \left(3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$ est une droite.

3) Déterminer une représentation paramétrique de Γ

4) Le points $I(0;0;-1)$ appartient-il à Γ ?

5) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant la droite Γ et le point I.

Problème

Partie A

1) Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant les valeurs du paramètre m l'équation : $|x + 1 - m| + m = 0$, où x désigne l'inconnue.

2) Préciser suivant les valeurs de m l'ensemble de définition D_m de la fonction f_m de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = \exp\left(\frac{2(x-m+1)}{|x+1-m|+m}\right)$;

3) On suppose dans cette question que m est strictement positif.

a) Ecrire $f_m(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Déterminer la fonction dérivée première de f_m sur chacun des intervalles $]-\infty; m-1[$ et $]m-1; +\infty[$

Etudier la dérivabilité de f_m au point $m-1$ (on pourra étudier la limite de $f'_m(x)$ à gauche et à droite au point $m-1$).

c) Dresser le tableau de variation de f_m.

Partie B

On prend $m = 1$ et on désigne par f la fonction f_m correspondante

4) a) Etudier la variabilité de f au point $x_0 = 0$

b) Etudier les variations de la fonction f.

5) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $R = (O;\vec{i},\vec{j})$. Tracer la tangente Δ à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse $x_0 = 0$.

6) L'objet de cette question est de déterminer la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ. Pour cela, on considère la fonction φ définie sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ par $\varphi(x) = \frac{2x}{|x|+1} - \ln(2x+1)$ pour $x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$.

a) A l'aide des variations de φ, étudier le signe de φ(x).

b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ pour x élément de $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$.

7) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

8) Soit g l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $E = f(\mathbb{R})$ par $g(x) = f(x)$.

a) Déterminer l'expression E et démontrer que g est une bijection

Déterminer l'expression $g^{-1}(x)$ pour x élément de E.

b) Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

BAC 1996 série D session normale (partiel)

Exercice I

On considère un entier naturel non nul P_0. Soit la suite numérique (U_n) définie par : $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = \ln(1{,}032)^n + \ln P_0$.

1) Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera.

2) On considère la suite (P_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = e^{U_n}$

Exprimer P_n en fonction de n et de P_0, puis en déduire que la suite (P_n) est géométrique. En préciser la raison q et le 1er terme.

3) P_n représente la population béninoise au premier août de l'année 1960 + n avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, et $r = q - 1$ représente le taux d'accroissement naturel de la population du Bénin, c'est-à-dire que la population augmente chaque année de 100r %.

a) Déterminer la période T au bout de laquelle la population double

b) D'après le recensement général de février 1992, la population béninoise s'élève au 1er août 1992 à 4.845.359 habitants.

Déterminer la population du Bénin d'abord au 1er août de l'an 2014, puis au 1er août de l'an 1960, c'est-à-dire P_0.

Exercice II

Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(a;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(0;0;3a)$; a étant un nombre réel strictement positif.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC).

2) Le point $I(a;2a;3a)$ appartient-il au plan (ABC) ?

3) Soit P le plan contenant les points I et C et pependiculaire au plan (ACB). Déterminer :

a) Une équation cartésienne de P ;

b) Une représentation paramétrique de l'intersection Δ des plans P et (ABC).

4) Calculer la distance du point A à la droite Δ.

Problème

Partie A

Soit m un nombre réel ; on considère la fonction f_m de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = mx(\ln x)$, où ln est le symbole du logarithme népérien.

Déterminer m pour que la fonction F définie par :

$F(x) = \frac{1}{4}(2x^2 \ln x - x^2)$ soit une primitive de la fonction f_m sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Et on désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $R = (O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite au point $x_0 = 0$;

b) Etudier les variations de la fonction f ;

c) Tracer la courbe Γ

2) Soit g l'application définie de $\left[0;\frac{1}{e}\right]$ vers $f\left(\left[0;\frac{1}{e}\right]\right) = I$ par $g(x) = f(x)$ et h l'application définie de $[\frac{1}{e};+\infty[$ vers $f([\frac{1}{e};+\infty[) = J$ par $h(x) = f(x)$.

a) Déterminer I et J et démontrer que g et h sont des bijections

b) La fonction h^{-1} (bijection réciproque de h) est-elle continue sur J ?

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel h^{-1} est dérivable et calculer le nombre dérivé de h^{-1} au point $x = e$.

3) Soit Γ_1 et Γ_2 les courbes représentatives respectives des fonctions g^{-1} et h^{-1} (g^{-1} étant la bijection réciproque de g). On note $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

a) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ' en son point d'abscisse e.

b) Tracer la courbe Γ' dans le repère R.

c) Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < e$.

Calculer l'aire $S(\alpha)$ du domaine plan fermé délimité par la courbe Γ et les droites d'équations $x = \alpha, x = e, y = x$.

Trouver la limite de $S(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

En déduire l'aire du domaine plan délimité par les courbes Γ et Γ'.

BAC 1997 série D session normale

Exercice I

1) Déterminer les trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sachant qu'on a les relations suivantes :

$z_1z_2z_3 = 15; iz_3 = -\bar{z}_2; z_1z_2 = -3(1+2i)$.

($\bar{z}_2$ est le nombre complexe conjugué de z_2 et i est tel que $i^2 = -1$)

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $R = (O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère les points A, B et C défínis respectivement par :

$\overrightarrow{OA} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$; $\overrightarrow{OB} = 2\vec{e_2} - \vec{e_2}$ et $\overrightarrow{OC} = -3\vec{e_2}$.

Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Soit C' le symétrique ce C par rapport à B et A' le point du plan tel que le quadrilatère ACA'C' soit un parallélogramme.

Déterminer les affixes des points A' et C'.

4) On désigne par F l'application du plan P dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \alpha z + \beta$ où α et β sont des nombres complexes donnés.

Calculer α et β sachant que $F(A') = A'$ et $F(C) = C'$ (les nombres complexes α et β seront donnés sous la forme algébrique)

Exercice II

Le code confidentiel d'un billet de loterie est composé soit par la lettre A soit par la lettre B et d'un nombre de six chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Les lettres figurent seulement au début du code.

Le code d'un billet est choisi au hasard sur ordinateur. Calculer les probabilités des évènements suivants :

1) E : "Le code est écrit avec des chiffres distincts"

2) F : "Le code n'est composé que par des chiffres impairs et commence par la lettre A".

3) G : "Le code contient une seule fois le chiffre 2"

Problème

Partie A

Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle (E) ci-après

(E): $4y'' + 4y' + y = x + 2$

1) Prouver que la fonction g définie sur IR par : $g(x) = x - 2$ est une solution de (E).

2) On note (E_1) l'équation différentielles : $4y'' + 4y' + y = 0$

Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation (E_1).

3) Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

4) Déterminer la fonction f_0 solution de (E) qui vérifie les conditions $f_0(0) = 0$ et $f'_0(0) = 1$.

Partie B

Soit n un entier non nul. On note f_n la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f_n(x) = (x+2).e^{-\frac{1}{2}x} + nx - 2 \text{ si } x \leq 0 \\ f_n(x) = x^n.e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité de f_n en 0

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n en 0.

2)a) Etudier les variations de la fonction f_n.

b) Etudier les branches infinies à (C_n).

3)a) Justifier que (C_1) admet une tangente au point O et écrire une équation de cette tangente.

b) Tracer (C_1).

4) On pose $I = \int_{-2}^{0}[f_1(x) - (x-2)]dx$

a) Donner une interprétation géométrique de I.

b) Calculer I en utilisant une intégration par parties.

5) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = f_1(n)$.

a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que (u_n) est une suite convergente.

BAC 1998 série D session normale

Exercice I

Un établissement scolaire dispose de trois classes terminales A, B et C de même effectif.

Il y a 20% de filles en A, 40% de filles en B et 60% de filles en C.

1) On choisit au hasard un élève dans chacune de ces classes et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de filles obtenues.

a) Définir la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2) On réunit tous les élèves des trois classes A, B et C dans la cour de l'établissement et on choisit un élève au hasard parmi eux.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) "L'élève choisi est de la terminale A"

b) "L'élève choisi est une fille".

Exercice II

Le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Calculer : $(2 - \sqrt{3} - i)^2$.

2) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$2Z^2 - (2 + \sqrt{3} - 3i)Z - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}) = 0$$

On désignera par Z_0 et Z_1 les solutions de cette équation, Z_0 étant celle qui a la plus petite partie réelle.

b) Ecrire sous forme algébrique, le nombre complexe Z_0^{1998}.

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1, 1 - i$ et $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Problème

On considère l'équation différentielle :

$(E_\lambda) y'' - 2\lambda y' + y = 0$, où λ est une constante réelle.

1) Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_0) vérifiant : $\varphi_0(0) = -1$ et $\varphi'_0(0) = \sqrt{3}$

2) Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par : $f(x) = \sqrt{3}.\sin x - \cos x$

a) Etudier les variables de f et construire sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité de longueur : 2cm).

b) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{-5\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ *et* (C') la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
la révolution de (C') autour de l'axe des abscisses engendre un solide (S) de l'espace.
Calculer le volume de (S).

Partie II

3) Déterminer la solution φ_1 de l'équation (E_1) vérifiant :
$\varphi_1(0) = 1$ et $\varphi'_1(0) = 0$.
4) Soit m un paramètre réel non nul. On considère la fonction h_m de la variable réelle x définie par $h_m(x) = x + m(x+1)e^{-x}$.
a) Etudier les variations de la fonction dérivée première h'_m de h_m.
(On distinguera les cas : $m < 0$ *et* $m > 0$).
b) Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $h'_m(x) = 0$.
On précisera la position de ces solutions par rapport à 0 et 1.
c) En déduire les sens de variations de h_m.
(On distinguera les cas : $m < 0$; $0 < m < e$; $m = e$; $m > e$).
5) On suppose que m vérifie la double inégale $-\frac{1}{e} < m < 0$.
a) Démontrer que l'unique solution x_0 de l'équation $h'_m(x) = 0$ est strictement inférieure à -1.
b) En déduire, que si x est un réel tel que $-1 < x < 0$, alors on a : $-1 < h_m(x) < 0$.
c) On considère la suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ définie par :
$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h_m(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < U_n < 0$ et que la suite (U_n) est décroissante.
d) Après avoir justifié la convergence de la suite (U_n), déterminer la limite de cette suite.

BAC 1999 série D session normale (partiel)

Exercice I

L'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les plans (P), (Q), (R) de $\mathcal{E}$ définis par des équations cartésiennes :
$(P): 2x - 3y + z - 1 = 0$;
$(Q): 3x - 4y + 2z - 1 = 0$; $(R): x - y + z - 1 = 0$
1) a) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
b) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection des plans (P) et (Q).
2)a) Démontrer que la droite (Δ) est strictement parallèle au plan (R).
b) Vérifier que le point $A(-1,-1,0)$ appartient à (Δ).
c) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan (R) et calculer la distance AH.

Exercice II

On considère le polynôme complexe suivant :
$P(z) = z^3 + 6(1+i)z^2 - 9(1-2i)z - 4(11+7i)$.
1) Démontrer qu'il existe un polynôme $Q(z)$ de degré deux tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z+4+i)Q(z)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3) Déterminer la nature du triangle formé par les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Problème

Partie A

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$u(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.
1) Etudier les variations de u et démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution réelle x_0 et une seule.
2) Démontrer que x_0 appartient à l'intervalle $]-\frac{1}{2};0[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = 2x - 3 - xe^{-x}$.
3)a) Etudier en s'aidant de la partie A, le signe de la dérivée première de f.
b) Etudier les variations de f. (On explicitera les recherche des limites).
4) Calculer $f(-1)$ et en déduire le signe de $f(x_0)$; x_0 étant le nombre réel déterminé dans la partie A 1ère question (On pourrait utiliser les variations de f sur l'intervalle $]-\infty; x_0[$).
5) On désigne par $\mathcal{L}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan
Etudier les branches infinies de $\mathcal{L}$.
a) Prouver que $\mathcal{L}$ possède un point d'inflexion que l'on précisera.
6) En prenant $-\frac{1}{4}$ comme valeur approchée de x_0, construire $\mathcal{L}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec 2 cm comme unité graphique.
7) α étant un nombre réel positif, on désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{L}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$; $x = \alpha$ et $y = 2x - 3$.

Calculer $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

a) Etablir une équation cartésienne de la tangente à C en son point d'abscisse -1.

b) e désignant la base de la fonction logarithme népérien, discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de l'équation : $f(x) = (2 - 2e)x + m$.

BAC 2000 série D session normale

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\vec{v})$. On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$P(z) = z^3 + \sqrt{2}(1+\sqrt{2})(1+i)z^2 + 4i(\sqrt{2}+1)z - 4\sqrt{2}(1-i)$

1. Calculer $P(-2i)$ et $P(1+i)$
2. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
4. Soit M_0, M_1, M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 avec $z_0 = -2$; $z_1 = -2i$ et $z_2 = -2-2i$.
On pose : $u = z_0 \times z_1 \times z_2$
   a) Ecrire u sous forme trigonométrique
   b) Ecrire u^{2000} sous forme algébrique.
   c) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$

Exercice 2

Dans l'espace C muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{\iota},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :
(P) : $x - 2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0$; (Q) : $x - 2y + 3z - 1 = 0$

1. Vérifier que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
2. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q). Déterminer une représentation paramétrique de (D).
3. Déterminer une équation du plan (R) de C, passant par A(1 ; -1 ; 0) et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).
4. a) Le point A appartient –il au plan (Q)
   b) Calculer la distance de A au plan (Q)

Problème 3 :

Partie A :

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - y = 2 - 2x$
a et b étant des nombres réels, déterminer a et b, a et b étant des nombres réels, pour que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par: $p(x) = ax + b$ soit solution de (E)

2. Soit φ une fonction de variable réelle.
   a) Démontrer que φ est une solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - p$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$
   b) Résoudre (E')
   c) Déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\iota},\vec{j})$. On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + e^x$ et $g(x) = f(x) - x$

3. a) Etudier les variations de f
   b) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
   c) On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (C ') celle de f^{-1} dans le repère $(O;\vec{\iota},\vec{j})$.
   - Etudier les branches infinies de (C)
   - Construire (C) et (C ') (on pourra calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0, vérifiant : $-1 < x_0 < 0$.
Dans tout ce qui suit, on pose $h = f^{-1}$
5. a) Justifier que : $h(x_0) = x_0$
   b) Démontre que pour tout x appartenant à $]-\infty; x_0]$, $h(x)$ appartient à $]-\infty; x_0]$.
6. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty; x_0]$,
On a : $0 < h'(x) < \frac{1}{2}$
   b) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty; x_0]$, on a :
$|h(x) - x_0| \le \frac{1}{2}|x - x_0|$

Partie C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

7. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ U_n \in]-\infty; x_0]$
8. a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|U_{n+1} - x_0| \le \frac{1}{2}|U_n - x_0|$
b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|U_{n+1} - x_0| \le (\frac{1}{2})^n |U_0 - x_0|$
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

BAC 2001 série D session normale

Exercice 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme P(z) défini par :

$P(z) = z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32 - 4i$

i désignant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $u^2 - (-11+i)u + 32 - 4i = 0$
2. a) Démontrer que pour tout nombre complexe z, l'on a : $P(z) = [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32 - 4i$

   b) En utilisant les résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
3. On donne les points A, B et C d'affixes respectives 1+i, 2+i et 2-2i dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

   a) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$

   b) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts de l'espace orienté C et $\vec{u}$ un vecteur non nul de C

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M et E tels que l'on ait : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Pour la suite de l'exercice, l'espace C est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $A(0 ;2 ;0)$; $B(3 ; 0 ;4)$ et $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Donner une représentation paramétrique de (Δ)
3. a) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonal à (Δ)

   b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (P).
4. Soit (Δ') la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

   a) Démontrer que (Δ') n'est pas orthogonal à (P)

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P') contenant (Δ') et perpendiculaire à (P).

   c) Déterminer un repère de la droite d'intersection des plans (P) et (P').

Problème :

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par : $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$

Partie A :

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f

   b) Déterminer les limites de f aux bornes de D

   c) Déterminer la fonction dérivée première f' de f

   d) Dresser le tableau de variation de f

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. a) Étudier les branches infinies de (C)

   b) Construire (C)
3. a) Déterminer l'intervalle $K = f(\mathbb{R})$

   b) Soit l'application g de $\mathbb{R}$ dans K définie par : $g(x) = f(x)$ pour tout réel x. Démontrer que g est une bijection. On désigne par (Γ) la courbe représentative de la fonction g^{-1} de g

   c) Construire (Γ) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie B :

Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = ln[f(x)]$.

4. Démontrer que pour tout élément x de $\left[\frac{1}{4} ; 1\right]$ on a : $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$
5. Démontrer qu'il existe un élément k de l'intervalle $]0 ; 1[$ tel que l'on ait : $\forall x \in \left[\frac{1}{4} ; 1\right], |g'(x)| \leq k$
6. Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{4} ; 1\right]$
7. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a) Démontrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$.

   b) Démontrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a: $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$

   c) En déduire que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a: $|u_n - \alpha| \leq k^n$

   d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

BAC 2002 série D session normale

Exercice 1

L'espace C est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points I et A définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OI} = -2\vec{i}$. Soient les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$.

On considère l'ensemble (D) des points M de C tels que : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}$

1. a) Vérifier que I est un point de (D)

   b) Démontrer que M est un point de (D) si et seulement si $\vec{u} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{0}$

   c) Déduire de la question b-, que (D) est une droite dont on précisera un repère.

2. Soit (Δ) la droite de E d'équations cartésiennes : $x+2=y=z$ et soit (P) le plan d'équation : $x+y+z+2-3\sqrt{3}=0$.

Soit B et C deux points distincts de (Δ)

a) Démontrer que (Δ) est perpendiculaire à (P)

b) On pose : $\{H\}=(\Delta)\cap(P)$. Calculer les coordonnées de H.

3. a) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même plan (Q)

b) Déterminer une équation cartésienne de (Q)

Exercice 2 :

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $V_n=\int_0^1 t^n\ln(1+t)\,dt$

1. Justifier que V_n existe
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$0\le x^n\ln(1+x)\le x^n\ln 2 \text{ et } (x-1)\ln(1+x)\le 0$$

b) Justifier que (V_n) est une suite décroissante

c) En déduire que (V_n) est une suite convergente.

3. a) Déduire du a) de la question 2. que pour tout entier naturel n non nul :

$$0\le V_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$$

b) Calculer la limite de la suite (V_n)

Problème

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^2}(x+\ln x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé **R** $=(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

Partie A

Soit h la fonction définie sur I par :

$h(x)=-x+1-2\ln x$

1. a) Calculer les limites de h aux bornes de I

b) Dresser le tableau de variation de h

2. Calculer h(1) et déduire le signe de h(x) pour x élément de I.

Partie B

3. a) Calculer les limites de f aux bornes de I

b) Étudier le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f

4. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que l'on a: $0{,}5<\alpha<0{,}6$

5. On pose $J=f([1;+\infty[)$. Soit g l'application définie de $[1;+\infty[$ vers J par $g(x)=f(x)$

a) Déterminer J et démontrer que g est une bijection

On désigne par g^{-1}, l'application réciproque de g

b) Résoudre dans J, l'équation $g^{-1}(x)=e$

c) Calculer $(g^{-1})'(e^{-2}+e^{-1})$

6. Construire la courbe (C) et la courbe (Γ) de g^{-1} dans le repère **R**

BAC 2003 série D session normale

Exercice 1

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et (P) le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

1. Calculer $(\sqrt{3}-i)^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(\sqrt{3}+3i)z-2+2\sqrt{3}i=0$. On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique
3. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$, $2i$ et $-2+2i$

a)- Déterminer la nature du triangle OAB

b) f est l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$. Vérifie que $f(B)=A$

c) Écrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point C', image du point C par f. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice 2

A l'issue des épreuves d'une session du baccalauréat, l'on s'est intéressé aux notes conjointement attribuées à un groupe de candidats de la série D par un professeur de français et par un professeur d'anglais. Les notes varient de 0 à 5. Désignant respectivement par X et par Y les notes de français et d'anglais obtenues par chaque candidat du groupe-cible, on a réalisé le tableau à double entrée suivant :

Valeurs \ Valeurs	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	2	0	0
2	0	2	1	1	0	0
3	0	2	1	4	0	1
4	0	0	3	1	1	0
5	0	1	1	0	0	0

1. Dresser les tableaux des effectifs variables statistiques X et Y.
2. Représenter le nuage de points des coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. On placera en abscisses les notes de français et en ordonnées les notes d'anglais.
3. a) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage

   b) Calculer cov(X, Y) et V(X)
4. a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X.

   b) Trace la droite (D) dans le même repère orthonormé de la question n°2 ci-dessus
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y), interpréter le résultat obtenu.

Problème :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}ln|2x-1|$. On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

   b) Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. a) Déterminer la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f.

   b) Étudier le sens de variation de f.

   c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout élément de D. (on remarquera que $f'(0) = 0$)
3. a) Dresser le tableau de variation de f

   b) Étudier les branches infinies de (C)
4. a) Démontrer que la courbe (C) coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point d'abscisse α telle que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

   b) Construire la courbe (C)
5. Exprimer uniquement en fonction de α et de $e^{-\alpha}$ l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives

   $x = 1$ et $x = \alpha$; (α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses)
6. On considère l'application g définie de $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ vers $[1; +\infty[$ par $g(x) = f(x)$.

   Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}

   On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
7. a) Justifie que (C') admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 1.

   b) Préciser les branches infinies de (C')

   c) Construire (C')

BAC 2004 série D session normale

Exercice 1

1. Déterminer trois nombres réels α, β, γ tels que l'équation différentielle

   (E) : $\alpha z'' + \beta z' + \gamma z = 0$ ait pour équation caractéristique associée : $(2r+1)^2 = 0$.
2. On pose $\alpha = \beta = 4\gamma = 4$

a) Écrire et résoudre l'équation (E)

b) Déterminer la solution y de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan admet en son point $M_0(0 ; 2)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3. On pose $h(x) = (x+2)e^{\frac{-x}{2}}$ et $U_n = \int_0^n h(x)dx$

a) Calculer U_n en fonction de l'entier naturel n

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 8$

c) Pour tout entier naturel n, déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$. On considère l'application h définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $h(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

1. On désigne par K le point d'affixe $h(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

   Déterminer les coordonnées de K.
2. On suppose que α est un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E): $h(z) = \frac{2}{3}cos\alpha$
3. a) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') : $z^4 - 2z^2\cos\alpha + 1 = 0$. (On mettra les solutions sous forme exponentielle)

b) Démontrer que (E') admet deux solutions telles que leurs conjuguées sont aussi solutions de (E')

c) Décomposer $P(x) = x^4 - 2x^2cos\alpha + 1$ en produit de deux polynômes de degré deux, à coefficient réels.

4. On considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

   $2(z - \frac{1}{3}) = (1+i)(z' - \frac{1}{3})$

a) Démontrer que f est une similitude plane directe dont on précisera le rapport

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Problème :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$\begin{cases} f(x) = exp_2(x^2 - 3x + 2), si\ x \in [0;2] \\ f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)}, si\ x \in]2; +\infty[\end{cases}$ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. (On prendra pour unité 2 cm)

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D = [0;3[\cup]3; +\infty[$
2. a) Étudier la continuité de f en $x = 2$
   b) Étudier la dérivabilité de f en $x = 2$
   c) Préciser les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
3. a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et détermine la fonction dérivée f' de f
   b) Étudier le sens de variation de f
4. a) Calculer les limites de f aux bornes de D
   b) Dresser le tableau de variation de f
5. a) Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C)
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et prouver que α appartient à l'intervalle $\left]\frac{17}{5}; \frac{7}{2}\right[$.
   c) Construire la courbe (C) dans le repère $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
6. On considère la fonction F définie et dérivable par $F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)}$
   a) Justifier que F est définie et dérivable sur $[4;+\infty[$?
   b) Quel est le sens de variation F sur $[4; +\infty[$?
   c) Par la méthode des rectangles, donne un encadrement de F(5) par deux nombres décimaux d'ordre 3. (On subdivisera l'intervalle [4; 5] en cinq intervalles de même longueur).
   d) En déduire un encadrement de l'aire en centimètres carrés de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1, x = 4\ et\ x = 4$
7. Soit l'application $g : \left[\frac{3}{2}; 2\right] \to \left[2^{\frac{-1}{4}}; 1\right]$;
   $x \longmapsto g(x) = f(x)$
   a) Démontrer que g admet une application réciproque g^{-1}
   b) Déterminer l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable.
8. On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{\imath}; \vec{k})$
   a) Démontrer que le point A(1 ; 2) appartient à (Γ) et écrire un système qui définit la demi-tangente à la courbe (Γ) au point A.
   b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $\left[2^{\frac{-1}{4}}; 1\right]$
   c) Construire (Γ) dans le même repère que (C)

BAC 2005 série D session normale

Exercice 1

Une entreprise fabrique des postes téléviseurs dont on peut faire varier les caractéristiques en vue d'atteindre le prix de vente voulu. On cherche à fixer le prix unitaire d'un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximum. Les résultats des ventes sont indiqués dans le tableau ci-après donnant le nombre y de téléviseurs vendus lorsque le prix de l'unité est x.

x_i (en centaines de milliers de francs	0,5	0,5	1	1	2	2,5
y_i(en dizaines de téléviseurs)	5,5	5	4	4	2,5	3

1. a) Définir les séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j)
   b) Calculer les moyennes $\bar{x}\ et\ \bar{y}$.
2. a) Dresser le tableau à double entrée correspondant à la série double (x_i, y_j, n_{ij}).
   b) Déterminer la covariance du couple de caractères (x, y).
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire en $x\ et\ y$. Apprécier la corrélation linéaire entre $x\ et\ y$.
4. Établir l'équation de la droite de régression donnant y en fonction de x.
5. Les frais de fabrication de chaque téléviseur s'élèvent à 0,1 centaine de milliers de francs.
   a) Démontrer que le bénéfice total b réalisé est donné par :
   $b(x) = -1,26x^2 + 5,701x - 0,5575$ lorsque le prix de vente d'un téléviseur est x.
   b) A quel prix l'entreprise doit-elle vendre un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximal ? Calculer ce bénéfice en francs. Combien de téléviseur l'entreprise devra-t-elle vendre pour atteindre le bénéfice maximal ?

Exercice 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle

$$I = \left[0; \frac{1}{2}\right]\ par : f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$$

1. a) Étudier le sens de variation de f sur I.
   b) Démontrer que $\forall\ x \in I,\ f(x) \in I$

2. (U_n) est la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ *par* :
$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{3U_n+1}{2U_n+4} \end{cases}$
   a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$
   b) Étudier le sens de variation de (U_n)
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite l

Problème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $R = (O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la fonction numérique f de la dérivable réelle x définie par :
$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & ; si\ x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & , si\ x > 0 \end{cases}$

Partie A

Soit g la fonction sur $]-\infty; 0]$ *par* : $g(x) = xe^x - x$

1. Calculer $\lim\limits_{-\infty} g$
2. a) Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-\infty; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ (g' *et* g'' sont respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g)

b) Démontrer que la courbe représentative (C_g) *de* g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g' ; en déduire le signe de $g'(x)$

Partie B

3. Quel est l'ensemble de définition de f ?
4. Démontre que f est continue en 0.
5. a) Étudier la dérivabilité de f *en* 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ et étudier son signe.

6. Dresser le tableau de variation de f
7. Soit φ l'application définie par :
$\varphi : J \to f(J)$
$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$, où $J = [1; +\infty[$
   a) Démontrer que φ est une bijection. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ.
   b) Prouver que la fonction dérivée première$(\varphi^{-1})'$ *de* φ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$

Partie C

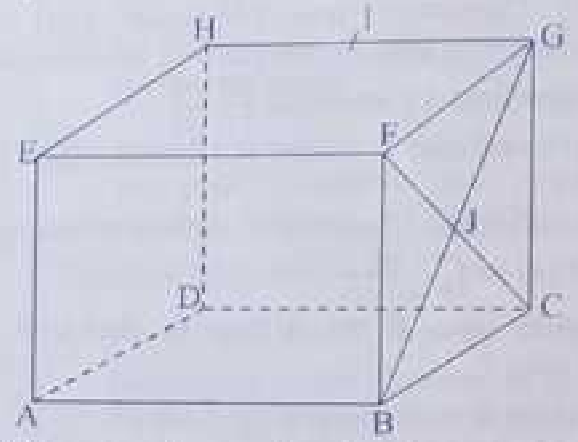
(C_f) est la courbe représentative de la fonction f, dans le repère R.

8. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$
9. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure.
10. (C_h) désigne la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$. Construire les courbes (C_f) et (C_h) et les tangentes en O sur une même figure.
11. Soit $H(x) = \int_1^x h(t)dt, \forall x \in J$
   a) Démontrer que la fonction H est définie et continue sur J.
   b) Calculer H(e), en donner une interprétation géométrique.
   c) Calculer en cm, l'aire A du domaine plan délimité par (C_f), (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ *et* $x = e$

BAC 2006 série D session normale

Exercice 1

Dans l'espace orienté (C) on considère le cube ABCDEFGH. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct (C). I est le milieu du segment $[GH]$ et J est le centre du carré BCGF.



1. Déterminer les coordonnées des points E, I, J.
2. a) Donner une équation cartésienne du plan (EIJ)
   b) Justifier que AEIJ est un tétraèdre et calculer son volume.
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$
   a) Démontrer que : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MJ}$ *et* $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$
   b) En déduire que (Γ) est une droite dont on donnera un repère.
4. Soit (Δ) la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $x - \frac{1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$
Calculer la distance du point A à la droite (Δ).

Exercice 2

1. On considère le polynôme P défini de $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *par* :
$P(z) = z^3 + (-2 - i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$
   a) Calculer P(-i) et P(i)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0

2. On considère dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $1-i$
   a) Déterminer la nature du triangle ABC
   b) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC
3. On considère sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes :
   (E_1): $y''-2y'+2y=0$
   (E_2): $y''-2y'+2y=10e^{-x}$
   a) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction $g: x \longmapsto me^{-x}$ soit solution de (E_2)
   b) Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_2) si et seulement si $f-g$ est solution de (E_1)
   c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2)

Problème

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2}{1+e^{-x}}$

Première partie

1. a) Justifier que le domaine de définition D de la fonction f est $\mathbb{R}$
   b) Étudier les variations de f.
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)
   a) Démontrer que le point A(0 ;1) est un centre de symétrie de la courbe (C).
   b) Vérifier que le point A appartient à (C) puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) en A.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1,6<\alpha<1,7$
4. Construire la courbe (C) et la tangente (T)
5. Soit $J=f(\mathbb{R})$ et on considère la fonction $g: \mathbb{R}\to J$, $x\mapsto f(x)$
   a) Démontrer que g est une bijection. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') la courbe de g^{-1}.
   b) Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J puis déterminer une équation de la tangente (T') à la courbe (C') en point d'abscisse 1.
   c) Construire la coure (C') et (T') dans le même repère que (C)
   d) Calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout x élément de J où g^{-1} est dérivable.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$U_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

6. a) Justifier l'existence de U_n
   b) Donner une interprétation géométrique de U_n
   c) En remarquant que $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$. Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a: $U_n=2\ln(\frac{n+2}{n+1})$
   d) Etudier le sens de variation de (U_n) puis déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$
7. On pose $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$
   a) A l'aide de la courbe (C), donner une interprétation géométrique de S_n
   b) En déduire une expression simple de S_n
8. Calculer l'aire $A(n)$ du domaine délimité par la courbe (C) la droite d'équation $y=2$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(n+1)$.
Déterminer la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

BAC 2007 série D session normale

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M_1 et M_2 deux à deux distincts d'affixes respectives $-i$, z_1 et z_2 telles que :
$\frac{z_1+i}{z_2+i}=re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$, avec $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $r\in\mathbb{R}^*_+$.

1. a) Déterminer, respectivement en fonction de r et θ, le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_1+i}{z_2+i}$
   b) En déduire alors $\frac{z_1+i}{z_2+i}$ sous forme trigonométrique.
2. Déterminer les valeurs de θ pour que les points A, M_1 et M_2 soient alignés
3. a) Déterminer θ pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle en A
   b) On suppose AM_1M_2 rectangle en A.
   i) Vérifier que $z_2+i=\frac{i}{r}(z_1+i)$
   ii) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une similitude plane directe dont on précisera le rapport, le centre et l'angle.

Exercice 2

L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne A(-1 ;0 ;1), B(0 ;1 ;1), C(0 ;0 ;-1) et I(-1 ; 0 ; 2). On note (P) le plan d'équation cartésienne $x+y+z-1=0$ et (Q) le plan dont une représentation paramétrique est la suivante :

$$\begin{cases} x=-1+\alpha+\beta \\ y=\alpha+\beta, (\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=1+\beta \end{cases}$$

1. a) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Q)

b) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires

c) On pose $(\Delta) = (P) \cap (Q)$. Déterminer un repère de (Δ).

2. Soit (D) la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

a) Démontrer que (D) est parallèle aux plans (P) et (Q)

b) Calculer la distance du point A à la droite (D)

c) Calculer le volume du tétraèdre ABIC

3. Un sac contient six jetons dont quatre portent le chiffre 1 et les deux autres portent le chiffre 0. Les jetons sont indiscernables au toucher. On tire successivement au hasard et sans remise 3 jetons du sac et on désigne par a, b et c les chiffres tirés dans l'ordre. On forme ainsi l'équation $ax + by + z - 1 = 0$. Déterminer la probabilité P_0 pour que l'équation formée soit une équation cartésienne du plan (P)

Problème :

Soit la fonction numérique f_n de variable réelle x définies par : $f_n(x) = \frac{2x+3}{x+2}e^{\frac{x}{n}}$ où n est un entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unité graphique : 1 cm)

Partie A

1. Soit D l'ensemble de définition de f_n
   a) Déterminer D
   b) Étudier les limites de f_n aux bornes de D.
   c) Étudier les branches infinies de (C_n)
2. Étudier le sens de variations de f_n
3. Dresser le tableau de variations de f_n
4. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_1) avec les axes de coordonnées
   b) Construire (C_1)
5. On pose $I =]-2; +\infty[$ et $J = f_n(I)$
   a) Déterminer J
   b) Soit l'application $\begin{matrix} g_n : I \to J \\ x \mapsto f_n(x) \end{matrix}$. Démontrer que g_n est une bijection
   c) Construire la courbe représentative (Γ) de la bijection réciproque g_1^{-1} de g_1 dans le même repère que (C_1)

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^2 f_n(x)dx$

6. Donner une interprétation géométrique de U_n
7. Étudier le sens de variation de (U_n) $n \in \mathbb{N}^*$
8. a) Démontrer que pour tout x élément de $[0;2]$ on a: $\frac{2x+3}{x+2} \le f_n(x) \le \frac{2x+3}{x+2}e^{\frac{2}{n}}$
   b) On pose $I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2}dx$
9. Vérifier que pour tout x élément de $[0;2]$, on a: $\frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$ en déduire I.
   a) Démontrer que $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}}.I$
   b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

BAC 2008 série D session normale

Exercice 1

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$; $\vec{k}$), on considère le point A(1 ;1 ;1) et les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$x + y + z - 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$

1. a) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b) Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ).
2. a) Le point A appartient t-il à (Δ) ?
   b) Calculer la distance du point A à la droite (Δ)
3. Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).

a) Déterminer une représentation paramétrique de (D)

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

4. Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaire aux plans (P) et (Q)
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan (R).
   b) Déterminer $(P) \cap (Q) \cap (R)$

Exercice 2

1. a) Linéariser $sin\,x\,cos2x$, pour tout réel x.

b) En déduire que la fonction : $U : x \mapsto -\frac{1}{6}cos3x + \frac{1}{2}\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $U : x \mapsto sinxcos2x$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$
   a) Calculer I_n en fonction de n
   b) En déduire I_1, I_2 et I_3
3. A l'aide d'une intégration par parties, déduire la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\pi} x^2\, sinx \cos 2x\, dx$$

Problème

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -ln|e^x - 1|$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Partie A :

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est : $E =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
2. Calculer les limites de f aux bornes de E
3. a) Etudier le sens de variation de f

   b) Dresser le tableau des variations de f.
4. a) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

b) Étudier la position de (C) par rapport à la droite (D) sur $]0; +\infty[$

c) Achever l'étude des branches infinies de (C)

d) Tracer la courbe (C).

Partie B

On pose $K =]0; +\infty[$ et on considère la fonction $h: K \to f(K)$;

$x \longmapsto h(x) = f(x)$

5. a) Déterminer $f(K)$

   b) Démontrer que h est une bijection
6. On désigne par g la bijection réciproque de h et (C ') sa courbe représentative.

a) Tracer (C') dans le même repère que (C)

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité E' de g

c) Établir que pour tout x appartenant à $E': g'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$

d) Démontrer que, pour tout x élément de $]0; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

e) En déduire que, pour tous éléments a et b de $]0; +\infty[$ $on\ a: |g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$

Partie C

On considère la suite (U_n) $définie\ par$:

$\begin{cases} U_0 = \ln 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$ $pour\ tout\ n\ de\ \mathbb{N}$

7. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_n > 0$
8. On pose : $\alpha = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Démontrer que $g(\alpha) = \alpha$
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   a) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

   b) $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n|U_0 - \alpha|$
10. En déduire que la suite (U_n)converge vers α

BAC 2009 série D session normale

Exercice 1

On considère les nombres complexes ci-après : $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

1. a) Écrire le produit z_1z_2 sous forme algébrique.

   b) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1, z_2 et z_1z_2

   c) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$
2. On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1$

   a) Vérifier que $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}})$

   b) En déduire le module et un argument de z_3.

   c) Démontrer que z_3^{12} est un nombre réel strictement négatif
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2

   a) Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_1

   b) Placer le point B, puis le point A en utilisant la question 3.a)

   c) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixes z telle que : $\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right|$

Exercice 2

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$; $\vec{k}$), on considère les points A(0 ;1 ;-2), B(-1 ;0 ;-1), C(0 ;-5 ;-5), D(2 ;0 ;-2) et E(1 ;-4 ;-6)

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCE est un rectangle.
3. a) Donner une équation cartésienne du plan (ABC)

   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC)
4. On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

   a) Déterminer les coordonnées du point H.

   b) Calculer la distance du point D au plan (ABC)

   c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5cm)

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur : $]0;+\infty[\ par : g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a :
   $$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$
   b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$
3. a) Déterminer le tableau des variations de g

   b) En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que :
   $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

5. a) Démontrer que, pour tout x élément de $]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$
   b) En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$
6. On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$
   a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$)
   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
7. a) Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire
   $$x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x)$$
   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
8. a) Dresser le tableau des variations de f.
   b) Donner l'allure de la courbe (C) (on prendra $f(\alpha) = 0{,}805$)
9. Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$
   a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $J_\lambda = \int_\lambda^1 f(x)dx$
   b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$
   c) Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\\lambda>0}} A(\lambda)$

BAC 2010 série D session normale

Exercice 1

1. Déterminer les nombres complexes u et v vérifiant $\begin{cases} u - v = i \\ u - 2iv = 3 \end{cases}$
2. On considère le polynôme P(z) définie par :
   $P(z) = z^3 - (9+13i)z^2 + (-30+73i)z + 124 - 22i$
   a) Vérifier que : $P(z) = (z-2-3i)[z^2 - (7+10i)z - 14 + 32i]$
   b) Calculer $(3+2i)^2$
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $1+2i$, $2+3i$, $1+i$, $5+6i$ et $2+4i$
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S de centre A qui transforme B en C.
   b) Les points A, B, C, D, E constituent le nuage de points d'une série statistique double (X,Y).

   Calculer le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y). On fera figurer sur la copie les étapes du calcul.

Exercice 2

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$, on considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives
   $$(P_1) : x - 2y + z - 1 = 0\ et$$
   $$(P_2) : x - 2y - 5z = 7$$
   a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants
   b) Soit (Δ) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Donner une représentation paramétrique de (Δ)
   c) Calculer la distance du point A(1 ;1 ;1) à la droite (Δ)
2. Soit a un paramètre réel. On considère le système (S_a) d'inconnue (x, y, z)
   $$(S_a) : \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - 5z - 7 = 0 \\ ax + y + z + a = 0 \end{cases}$$
   a) Justifier que (S_a) est équivalent au système ci-après : $\begin{cases} (2a+1)x = 4 - 2a \\ y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$
   b) En discutant suivant les valeurs de a, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_a)
3. Dans une urne, on dispose de trois boules rouges numérotées 1, 2, $-\frac{1}{2}$ et deux boules noires numérotées -3, $-\frac{1}{2}$ indiscernable au toucher. Une

expérience consiste à tirer au hasard une boule de l'urne et à prendre son numéro comme valeur du paramètre a du système (S_a)

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants :

A : « le numéro de la boule tirée permet à (S_a) d'admettre une solution unique $(x_0; y_0; z_0)$ »

B : « le numéro de la boule tirée permet à (S_a) d'admettre le triplet (0, -1 ; -1) comme solution unique »

b) La boule tirée est rouge. Calculer la probabilité pour que (S) n'admette aucune solution.

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]1;+\infty[$ $par : g(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)$

1. Déterminer le sens de variation de g
2. Calculer $g(2)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1;+\infty[$

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x-2|\ln(x-1)$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$

3. Soit D l'ensemble de définition de f

a) Justifier que $D =]1;+\infty[$

b) Étudier les limites de f aux bornes de D

c) Étudier la dérivabilité de f en 2 et donner une interprétation géométrique du résultat.

4. a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]1;2[$, puis pour $x \in]2;+\infty[$

b) Vérifier que, pour tout $x \in]1;2[$, $f'(x) = -g(x)$ et que, pour tout $x \in]2;+\infty[, f'(x) = g(x)$

c) En déduire que, pour tout $x \in]1;2[\cup]2;+\infty[, f'(x) > 0$

d) Dresser le tableau des variations de f.

5. a) Étudier les branches infinie de (C)

b) Tracer (C)

6. On considère la fonction $h:]1;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

a) Démontrer que h est une bijection. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C ') la courbe représentative de h^{-1}.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}

c) Tracer (C ') dans le même repère que (C)

7. a) Vérifier que, pour tout $x \in]1;+\infty[$,
$$\frac{x^2-4x}{x-1} = x - 3 - \frac{3}{x-1}$$

b) À l'aide d'une intégration par partie, calculer l'aire du domaine délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = e+1$

BAC 2011 série D session normale

Exercice 1

On joue à un jeu dont voici les règles : on mise x francs CFA pour avoir le droit de jouer une fois, puis on lance un dé parfaitement équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on observe le numéro apparu sur la face supérieure du dé.

Si on obtient un numéro pair, on gagne 500F.

Si on obtient 7, 9 ou 11, on gagne 800F.

Si on obtient 1, 3 ou 5 on gagne 300F

Soit X la variable aléatoire représentant le gain diminué de la mise.

1. Exprimer en fonction de x les différentes valeurs que peut prendre X
2. Déterminer la loi de probabilité de X
3. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X
4. On dit que le jeu est équitable si E(X) = 0. Déterminer la mise x pour que le jeu soit équitable. Déterminer dans ce cas l'écart-type de X.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$$(E): z^3 - 6iz^2 - 18z + 40i = 0$$

a) Développer et réduire l'expression : $u(x) = (x-4)(-x^2+2x-10)$.

b) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur z_0 que l'on précisera.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives
$$z_A = 4i,\ z_B = 3 + i \text{ et } z_C = -3 + i.$$
Soit f la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Déterminer l'écriture complexe de f

c) En déduire la nature de la similitude f ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. On considère les transformations g et φ du plan dont les écritures complexes sont respectivements :
$$z_1 = -2z + 12i \text{ et } z_2 = -iz - 4 + 4i$$

et on pose $S = go\varphi$

a) Déterminer l'écriture complexe de S

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

Problème

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction : $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$

Première partie

1. Dresser le tableau des variations de u puis construire la courbe (C) avec soin.
2. Soit α un réel de l'intervalle $]0;1[$, on désigne par D_α le domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

   La rotation de D_α autour de l'axe des abscisses, engendre un solide S_α

a) Démontrer que la fonction U définie sur $]0;+\infty[$ par $U(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$

b) Calculer le volume V_α du solide S_α

c) Déterminer la limite de V_α, lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures.

Deuxième partie

3. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + \ln x$

   a) Étudier les variations de g.

   b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β et que $0{,}65 < \beta < 0{,}66$

   c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

4. On se propose de déterminer, s'il existe le point de la courbe (C) de la fonction u, le plus proche du point O.

   Soit M le point de (C) d'abscisse x $(x > 0)$ et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

   $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$

a) Calculer la distance OM

b) Démontrer que si un point A de (C) d'abscisse a est le plus proche de O, alors $f(a)$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$

c) Démontre que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe

d) Démontrer que $f(\beta)$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$. En déduire les coordonnées du point B de (C) qui est le plus proche de O

e) Donner l'expression de $f(\beta)$ sous forme d'un polynôme en β. En déduire un encadrement de la distance OB

Troisième partie

5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{n}$

   b) En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n} \text{ et}$$
$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

6. On pose $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Étudier le sens de variation de (V_n)

b) Calculer la limite de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

BAC 2012 série D session normale

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$. Soit T la transformation qui associe au point M de coordonnées $(x; y)$, le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -x - y + 4 \\ y' = x - y + 8 \end{cases}$

1. On désigne par z l'affixe du point M et par z' celle de M', donner l'écriture complexe de la transformation T.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que : $|z'| = 2\sqrt{2}$

Exercice 2

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires, 3 boules rouges. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On considère le jeu suivant :

- Le tirage d'une boule noire rapporte 7 points ;
- Le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points ;
- Le tirage d'une boule blanche fait perdre 2 points

Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à tout tirage de 2 boules, le nombre de points obtenus.

1. Déterminer l'ensemble de valeurs prises par X
2. Donner la loi de probabilité de X
3. Dans cette partie, on suppose que l'urne contient n boules blanches $(n \neq 0)$, deux boules noires et trois boules rouges. On

extrait simultanément, avec équiprobabilité deux boules de l'urne.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir :
   i) 2 boules noires ;
   ii) Aucune boule blanche

b) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?

c) Comment choisir n pour que cette probabilité soit égale à $\frac{2}{11}$?

Problème :

Partie A

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = x^3 + 1 - ln|x|$

1. a) Vérifier que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, a et b étant des nombres réels.

b) Étudier les variations de u (ensemble de définitions, limites aux bornes, dérivée, sens de variation, tableau des variations)

2. a) Calculer u(-1)

b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^*$ n'admet qu'une seule solution que l'on précisera.

c) En déduire le signe de $u(x)$, suivant les valeurs de x.

Partie B

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{ln|x|}{x}$ et on. désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}; \vec{j})$

3. Étudier les variations de f

4. a) Étudier les branches infinies de (C)

   b) Démontrer que la courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α telle que $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

   c) Tracer la courbe (C)

Partie C

Soit M et M' les points du plan de coordonnées respectives $(x\,; y)$ et $(x'\,; y')$ dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ et telles que $x' = -x$ et $y' = y$

5. a) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient le point M' lorsque M décrit la courbe (C) est : $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{ln|x|}{x}$

b) Étudier la position relative des courbes (C) et (Γ)

c) Calculer l'aire A de la portion du plan délimitée par la courbe (C) et (Γ), et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$

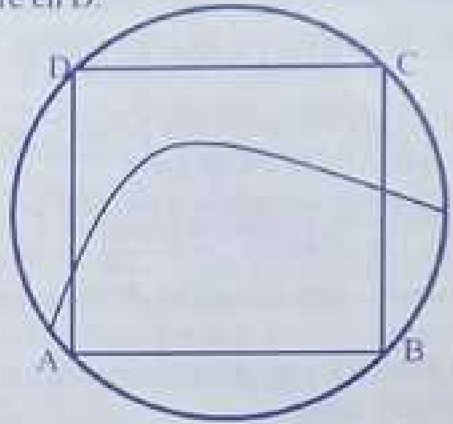
d) Exprimer cette aire A comme polynôme de variable α

BAC 2009 série D session normale selon APC

Texte : Construction de logements sociaux.

Les autorités municipales d'une ville envisagent de construire des logements sociaux au profit des agents de la mairie sur l'un des domaines de la commune. Consulté pour réaliser le plan d'aménagement, l'urbaniste Gandonou a prévu :

- La construction des logements sur une partie du terrain représentée par le quadrilatère ABCD ;
- L'aménagement des espaces verts ;
- La construction d'une haie circulaire qui servira de clôture au domaine et représentée par le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD avec une ouverture en D.



En vue de fixer le prix de cession des logements, le comptable de la mairie a relevé les salaires xi et les propositions de loyer yi d'un échantillon représentatif de huit agents. Les résultats, exprimés en milliers de francs CFA, sont présentés dans le tableau ci-après :

Xi	50	100	60	120	120	100	150	160
Yi	15	20	15	30	25	25	40	35

Avant de soumettre l'ensemble du projet au conseil municipal, le comptable a voulu savoir s'il existe un lien entre le salaire et la proposition correspondante de loyer. Il s'intéresse également sur la façon de tracer la voie qui va traverser le domaine et l'aire de la portion réservée aux espaces verts.

Tâche : Tu vas trouver des solutions aux préoccupations du comptable en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

Les données du tableau ci-dessus définissent une série statistique double de caractère (X, Y) où X est le salaire et Y la proposition de loyer.

1°) a- Dans un repère orthogonal du plan, représente le nuage de points associé à cette série statistique.

b- Détermine les coordonnées du point moyen de ce nuage.

2°) a- Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série.

b- Le salaire permet-il d'expliquer la proposition de loyer ?

3°) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X.

Problème 1 :

Pour réaliser son dessin, l'urbaniste a muni le plan d'un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel le point B a pour coordonnées (-2 ; 6). Il construit le point C comme étant l'image de B par la translation t de vecteur $\vec{u}(6\,;2)$ et le point D comme étant l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

1°) a- Détermine l'écriture complexe de la translation t.

b- Justifie que la rotation r a pour écriture complexe : $z' = -iz$

c- Détermine les coordonnées des points C et D.

d- Démontre que ABCD est un carré.

2°) Pour tout nombre complexe z élément de $\mathbb{C} - \{6 + 2i\}$; On pose : $z' = \frac{z+2-6i}{z-6-2i}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; $x, y, x' et\ y'$ étant des nombres réels.

a- Exprime $x' et\ y'$ en fonction de x et y

b- Détermine l'ensemble $(\mathcal{C})$.

c- Justifie que le tracé de $(\mathcal{C})$ permet d'obtenir une représentation de la haie-circulaire.

Problème 3 :

La voie traversant le domaine a été tracée sur le plan par l'urbaniste en représentant, dans un repère orthonormé $(O;\vec{\iota},\vec{\jmath})$ convenablement choisi, la courbe (Γ) de la fonction f de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1-x) + 1, si\ x < 0 \\ f(x) = u \qquad\qquad ,si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où u est la fonction numérique vérifiant : $u'' + 2u' + u = 0,\ u(0) = 1\ et\ u'(0) = 0$

Partie A :

1°) a- Résous sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$

b- Déduis-en que pour tout x élément de $[0; +\infty[$, on a : $u(x) = (x+1)e^{-x}$

2°) Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 1[$ par $g(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{x-1}$

a- Etudie le sens de variation de g

b- Déduis-en que : g(x) > 0, pour tout $x \in\ ]-\infty; 0[$

3°) Soit E l'ensemble de définition de f.

a- Justifie que E=$\mathbb{R}$.

b- Calcule les limites de f aux bornes de E.

b- Etudie la variabilité de f en 0.

4°) a- Etudie la variabilité de f en 0.

b-Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de$]-\infty;0[$ et pour tout x élément de $[0; +\infty[$.

c-Dresse le tableau des variations de f.

5°) Démontre que l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1{,}3 < \alpha < -1{,}2$.

6°) a- Etudie les branches infinies de la courbe (Γ).

b-Construis (Γ)

Partie B :

La partie réservée pour l'aménagement des espaces verts correspond sur le dessin au domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -\frac{6}{5}$ et x=3.

7°) a- Soit la fonction numérique h définie sur $]-\infty; 0]$ par : $h(x) = \frac{x^2-1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

Justifie que h est une primitive de f sur $]-\infty; 0]$

b-A l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_0^a (x+1)e^{-x}dx$

8°) a- Justifie que :

$$\int_a^3 f(x)dx = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2a} - 5e^{-3} + 2$$

b- En prenant $= -1{,}25$, donne une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire exprimée en unité d'aire, de la partie du domaine réservée pour l'aménagement des espaces verts.

BAC 2010 série D session normale selon APC

Texte : le meilleur dessinateur

Sélectionné pour représenter le BENIN au concours international de dessin (CID), qui a eu lieu à Paris en France, Yori a remporté le premier prix avec le dessin d'une maison TATA composée de quatre cases reliées par un mur de base circulaire.

Les expositions de dessins pour le CID ont eu lieu dans la pyramide du Louvre, grand hall ayant la forme d'une pyramide régulière SABCD de base ABCD et dont les faces latérales sont entièrement en verre. Yori a ramené, sur la pyramide du Louvre, des informations qui peuvent se traduire comme suit :

Dans un repère orthonormé direct $(\Omega\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est égale à 11 mètres :

- Les sommets A, B, C ont pour coordonnées A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 0 ; 4), C(1 ; -1 ; 6)
- l'une des faces latérales est contenue dans le plan (P) d'équation : $11x - 10y + 2z + 3 = 0$
- le sommet S appartient à l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}) \wedge \vec{u}$ où
$\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

Alassane jeune frère de Yori et élève dans classe de terminale scientifique ; se propose d'utiliser ces informations pour déterminer la quantité de verre ayant servi à couvrir la Pyramide du Louvre ; mais il est surtout intéressé par la valeur du prix remporté par Yori.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Alassane en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) Quelle est, en mètres, la longueur du côté de la base de la pyramide du Louvre ?

2°) a) Détermine les coordonnées du point D.

b) Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

3°) a) Démontre que l'ensemble (E) est la droite passant par le point H, milieu du segment [AC], et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

b) Ecris une représentation paramétrique de (E).

4°) Démontre qu'on a : $S\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6}\right)$.

5°) a) Calcule en mètres la hauteur de la pyramide du Louvre.

b) Calcule, en mètre carrés, l'aire de la surface latérale de la pyramide du Louvre.

Problème 2 :

Alassane a représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(R ; \vec{v}, \vec{w})$, les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire (Γ) du mur.

Les affixes des points K, L, M sont les solutions de l'équation $p(z) = 0$ où
$p(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 22i)z + 20 - 60i$, avec $z \in \mathbb{C}$

6°) Démontre que p(z) admet une racine réelle α que tu détermineras.

7°) Détermine un polynôme Q(z) tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $p(z) = (z - a)Q(z)$

8°) a) Calcule $(4 + 6i)^2$

b) Résous l'équation $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$ dans $\mathbb{C}$

c) Résous l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

9°) En réalité les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire du mur ont respectivement pour affixes :
$z_1 = 2 + 4i$; $z_2 = -2 - 2i$; $z_3 = -5$ et $z_4 = -1 + 6i$

a) Démontre que KLMN est un rectangle.
b) Détermine une équation cartésienne de (Γ)
c) Représente (Γ)

Problème 3 :

La valeur correspondant au premier prix du CID est, en dizaines de milliers d'euros, de la limite de la suite (u_n) définie par :
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n + 1 = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$

Où f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$
Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$$

10°) Etudie le sens de variation de g.

11°) Calcule g(0) et déduis-en le signe de g(x).

12°) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

13°) a) Démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = g(x).$$
b) Dresse le tableau des variations de f

14°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f.

a) Etudie les branches infinies de (C).
b) Construis la courbe (C) et trace la droite (Δ) d'équation $y = x$.

15°) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$

Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α vérifiant $2 < \alpha < 3$.

16°) Démontre que, pour tout $x \in [2 ; 3]$, $f(x) \in [2 ; 3]$.

17°) a) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2 ; 3]$.

b) Prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente.

18°) Justifie que le prix remporté par Yori au CID dépasse 20 000 euros.

BAC 2011 série D session normale selon APC

Contexte :

La société OLUWA s'occupe de la vente de portables G. S. M.

A l'approche des fêtes de fin d'année, elle décide d'organiser une tombola et d'embellir sa boutique.

Le chargé de marketing fait construire, en plexiglas transparent, un solide en forme de pyramide ABCDE destiné à contenir deux types de portables de dernière génération. Il choisit, en outre, de réaliser des décorations lumineuses en forme de portions de courbes et de placer une ampoule à l'intérieur de la pyramide pour l'illuminer.

La pyramide ABCDE est telle que :

- ABCD est un carré

- La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC)
- AB = AD = AE = 1 m

Le solide est séparé en deux compartiments par le plan $(\mathcal{P})$ passant par le milieu I du segment [ED] et les points A et C.
L'ampoule est placée au point S ; intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la droite (Δ) de systèmes d'équations cartésiennes $x-1=-y+\frac{1}{6}=z-\frac{5}{6}$ dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
En visite en ville lors des fêtes, Firmin, un élève de la terminale D, est émerveillé par les décorations de la boutique. Il y reconnaît certaines configurations étudiées en classe.
Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci-après pour te rendre compte des concepts mathématiques qui se cachent derrière les différentes décorations.

I

1°) Détermine dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées des points D, C et I.
2°) Justifie que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation

$$x-y+z=0$$

3°) Déduis-en les coordonnées du point S.
4°) Calcule l'aire de la surface de séparation.
5°) a) Calcule le volume du compartiment en forme de tétraèdre ACDI.
b) Déduis-en le volume du second compartiment.

II

Cinq motos constituent les lots à gagner. Firmin joue cinq fois à la tombola.
On suppose qu'il y a indépendance entre deux jeux quelconques et que la probabilité pour que Firmin gagne une moto lors d'un jeu est 0,1.
1°) Détermine la probabilité pour que Firmin :
  a) Ne gagne aucune moto ;
  b) Gagne au moins une moto ;
  c) Gagne exactement trois motos.
2°) soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de motos gagnées par Firmin.
  a) Détermine la loi de probabilité de X
  b) Détermine l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

III

Le décorateur décide de donner aux décorations lumineuses l'allure des courbes (Γ_m) représentatives des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f_m(x)=(2x+m)\ln(x^2+mx-3)\,,\ m\in[0;2] \\ f_m(x)\geq 0\end{cases}$$

On te propose d'étudier ces courbes pour m = 0 et pour m = 2. On note (Γ_0) la courbe de f_0 et (Γ_2) la courbe de f_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1°) a)En posant $J_m=\left]-\infty;\frac{-m-\sqrt{m^2+12}}{2}\right[$ et $J'_m=\left]\frac{-m+\sqrt{m^2+12}}{2};+\infty\right[$ Prouve que l'ensemble de définition D_m de f_m est $J_m\cup J'_m$.
b) Prouve que f_m est une fonction dérivable et détermine sa fonction dérivée f'_m.
2°) Etudie les limites de f_0 aux bornes de D_0 et celles de f_2 aux bornes de D_2.
3°) a) Etudie le sens de variation de f'_0 puis celui de f'_2.
b) Précise le signe de chacun des nombres $f'_0(-3)$; $f'_0(3)$; $f'_2(-1+2\sqrt{3})$ et $f'_2(-1-2\sqrt{3})$ et dresse le tableau des variations de chacune des fonctions f_0 et f_2
4°) a) Justifie que l'équation $f_0(x)=4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4\,;-\sqrt{3}[$.
b) Justifie que l'équation $f_2(x)=4$ admet une solution unique β dans l'intervalle $[-4\,;-3[$.
c)Résous dans $\mathbb{R}$ les équations : $f_0(x)=0$ et $f_2(x)=0$ et construis les courbes (Γ_0) et (Γ_2) dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5°) On projette de calculer l'aire d'une partie de la décoration dans le cas où la hauteur du mur est de 4 unités.
On prend $\alpha=-1{,}82$ et $\beta=-3{,}14$.
a) On pose :

$$F_m(x)=(x^2+mx-3)[\ln(x^2+mx-3)-1]$$

Justifie que Fm est une primitive de f_m sur chacun des intervalles J_m et J'_m.
b-i) Calcul l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases}0\leq y\leq f_2(x)\\ -3{,}24\leq x\leq \beta\end{cases}$$

ii)Calcule l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases}0\leq y\leq f_0(x)\\ -2\leq x\leq \alpha\end{cases}$$

BAC 2012 série D session normale selon APC

Contexte :
Un motocycliste assimilable à un point mobile G est en mouvement rectiligne uniformément accéléré.
Sur la grande voie empruntée, sont disposées de grandes plaques planes matérialisant des plans. L'espace E étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, une des plaques (R) contient les points A(1 ; 0 ; 3), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 1 ; 2).

En un temps t_1, le mobile G est au point H(1 ; -1 ; 0) et au temps t_2, il est au point F(2 ; 0 ; 1), $t_1 \neq t_2$

Voyant le motocycliste à vive allure, un passant se pose des questions :

"A cette allure, le motocycliste ne risque-t-il pas de percuter une des plaques ?"

"Pourrai-je alors joindre à temps les sapeurs-pompiers ? Et seront-ils à temps sur les lieux ?"

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations du passant en résolvant les trois problèmes suivants.

I

1°) Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ matérialisé par la plaque (R).

2°) Justifie que la trajectoire du mobile G est représentée par la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \ (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases}$

3°) Justifie que la droite (Δ) et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

4°) Détermine les coordonnées du point K où se produira éventuellement le choc entre le mobile G et la plaque matérialisant le plan $(\mathcal{P})$.

5°) Calcule la distance à parcourir par le mobile G depuis l'instant t_1 jusqu'au moment du choc éventuel.

II

Le choc s'est effectivement produit et a provoqué un incident dont le passant a été témoin.

Le passant dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros. Les sapeurs-pompiers ont parcouru une distance d (en dizaine de kilomètres) avant d'atteindre les lieux de l'accident. Le plan complexe étant muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

L'ensemble (Γ) des points M d'affixes z telle que $\frac{z}{2+iz}$ soit un nombre réel est un cercle $(\mathcal{C})$ privé d'un point ; par ailleurs la distance d est le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

L'angle de tir des jets d'eau ayant servi à éteindre l'incendie est celui de la similitude plane directe s laissant invariant O et transformant le point I d'affixe 2i en le point J d'affixe -2+2i.

6°) Calcule la probabilité pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

a) Au premier essai.
b) Au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

7°) Détermine :

a) L'écriture complexe de s.
b) L'ensemble (Γ)

8°) Calcule :

a) L'angle de tir
b) La distance d.

III

Pour se rendre sur les lieux, les sapeurs-pompiers doivent suivre un trajet matérialisant la courbe représentative (C_f) de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ln|x^2 - 3x + 2|$ dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

9°) a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1 ; 2\}$.

b) Etudie les limites de f aux bornes de ensemble de définition.

c) Etudie le sens de variations de f.

d) Dresse le tableau de variation de f.

10°) a) Etudie les branches infinies de la courbes$(\mathcal{C}f)$.

b) Construis $(\mathcal{C}f)$.

BAC 2013 série D session normale selon APC

Contexte : Le jardin botanique de Tatapia

Le village de Tatapia dispose d'un jardin botanique où l'on retrouve plusieurs espèces de plantes médicales dont une en voie de disparition. A l'intérieur du jardin se trouve un plan d'eau qui sert à arroser les plantes. Le jardin occupe un domaine ayant la forme d'un quadrilatère ABCD.

Lors d'une visite le jardin de Tatapia, Prima, élève en classe de terminale série D, a voulu connaître le nombre d'espèces de plantes d'espèces en voie de disparition. Le gérant du jardin a tendu un document dans lequel on peut lire :

« l'unité de longueur est 50 mètres, et dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les affixes respectives z_A, z_B et z_C des sommets A, B, C sont les solutions de l'équation d'inconnue complexe z,

$z^3 - (3 + 5i)z^2 + 14iz + 22 + 6i = 0$ avec $Re(z_A) < Re(z_B) < Re(z_C)$.

- Le sommet D est l'image de C par la similitude plane directe S de centre B qui transforme A en C ;
- L'espace en voie de disparition se trouve sur les $\frac{2}{3}$ de la terre ferme à raison de 100 plants par hectare. »

Tâche : Tu es invité à résoudre les problèmes ci-après, afin de trouver des solutions aux préoccupations de Prima.

I

1°) a) Calcule $(2 - 6i)^2$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$z^2 - 4(1+i)z + 8 + 14i = 0$.

2°) a) Justifie que $-1+i$ est une racine du polynôme :
$P(z) = z^3 - (3+5i)z^2 + 14iz + 22 + 6i = 0$

b) Démontre que $Z_A = -1 + i$, $Z_B = 1 + 5i$ et $Z_C = 3 - i$

3°) a) Prouve que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

b) Calcule, en hectares, l'aire A de la portion ABC du jardin.

4°) a) Détermine l'écriture complexe de la similitude S.

b) Détermine l'affixe du sommet D.

5°) Démontre que l'aire du domaine occupé par le jardin botanique de Tatapia est égale à 3 $\mathcal{A}$.

II

Exprimé en centaines d'unités, le nombre total d'espèces est la limite de la suite définie par :
$\begin{cases} Uo = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$ où h est la fonction numérique définie sur : $I = [1;2]$ par : $h(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

.

6°)a) Etudie le sens de variation de h.

b) Démontre que pour tout $x \in I, h(x) \in I$.

c) Déduis-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

7°) a) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente

8°) Détermine le nombre total d'espèces de plantes médicales disponibles dans le jardin botanique de Tatapia.

III

Pour aider Prima à trouver l'aire de la terre ferme, le gérant lui a fourni les informations complémentaires suivantes, obtenues après une étude topographique du jardin :

- L'aire de tout le domaine est estimée à 7,5 ha ;
- Sur le dessin du jardin, réalisé à une échelle de $\frac{1}{5000}$, le plan d'eau matérialise la portion du plan délimitée par les axes de coordonnées d'un repère orthonormé

(O ; $\vec{i}, \vec{j}$)la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative $(\mathcal{C})$, dans ce repère, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (4x^3 - 2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$$

9°) a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calcule les limites de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

10°) a) Soit f' la fonction dérivée de f.
Démontre que pour tout x élément de D_f,
$f'(x) = -8x(x-1)^2e^{-2x}$

b) Etudie le sens de variation de f

c) Dresse le tableau des variations de f.

11°) a) Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Construis la courbe $(\mathcal{C})$, l'unité graphique étant le centimètre.

12°) a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (ax^3 = bx^2 + cx + d)e^{-2x}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

a) Détermine les nombres a, b, c et d pour que F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

b) Détermine, en hectares l'aire du plan d'eau.

13°)
Détermine le nombre de plants de l'espace en voie de disparition.

BAC 2014 série D session normale selon APC

Contexte : A la découverte d'un livre de mathématiques.

En visite dans une librairie, Julien, un élève de la classe terminale D, a acheté un livre de mathématiques. Sur la couverture de cet ouvrage on trouve :

- Deux cercles (C_1) et (C_2).
- Un repère orthonormé direct : $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et trois points $A(0;-1), (\sqrt{3};1)$ et $(-2\sqrt{3};2)$ sur le cercle (C_1) .
- Le polynôme
$p(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$
écrit à l'intérieur du cercle (C_1).
  - $(C_2) = s(C_1)$, $s(A) = B$ et $s(B) = C$ avec s une similitude plane directe.
  - Une courbe (Γ) représentative d'une fonction numérique f.

Une fois à la maison, Julien se préoccupe des liens qui existent entre certaines des indications de la couverture ainsi qu'à un exercice sur un dé de forme tétraédrique dessiné également sur la couverture.

Tâche: Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Julien en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1°) a) Justifie que :
$$p(z) = (z+i)(z^2 + (\sqrt{3} - 3i)z - 8)$$

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

c) Existe-il une relation entre $p(z)$ et d'autre éléments de la couverture du livre ?

2°) a) Place les points A, B et C.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle.

c) Précise le centre et le rayon de (C_1)

3°) a) Détermine l'écriture complexe de la similitude s.

b) Détermine les éléments caractéristiques de s.

c) Détermine le centre et le rayon de (C_2).

4°) Trace (C_1) et (C_2) sur la même figure.

Problème 2 :

Les quatre faces du dé de forme tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est supposé pipé de sorte qu'il existe un nombre réel positif k tel que la probabilité $p(i)$ pour que la face portant le numéro i soit cachée est ki.

5°) Prouve que : $k = \frac{1}{10}$.

6°) On lance une fois ce dé et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros visibles.

a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Détermine puis représente la fonction de réparation F de X.

7°) On lance cinq fois de suite ce dé, de façons indépendantes.

Détermine la probabilité pour que l'événement « X est pair » se réalise au moins une fois.

Problème 3 :

La fonction numérique f est définie pour tout nombre réel $x > 0$, par :

$f(x) = x[a(lnx)^2 + blnx + c]$ avec a, b et c des nombres réels.

8°) a) Pour tout $x > 0$, calcule $f'(x)$

b) Détermine a, b et c sachant que : $f(e) = 0$, $f'(e) = 0$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{9}{4\sqrt{e}}$; e étant le nombre réel tel que : $lne = 1$.

9°) Dans la suite du problème on suppose que f est définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x[(lnx)^2 - 2lnx + 1], \ si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Démontre que $\lim_{x \to 0^+} x(lnx)^2 = 0$

b) Démontre f est continue sur $[0 ; +\infty[$

c) Etudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

d) Justifie que pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = (lnx - 1)(lnx + 1)$

10°) a) Etudie le sens de variation de f.

b) Calcule la limite f en $+\infty$

c) Dresse le tableau des variations de f.

11°) a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donne une interprétation géométrique du résultat.

b) Trace la courbe (Γ).

12°) a) Calcule, en utilisant une intégration par parties, intégrale $\int_{\frac{1}{e}}^{e} xlnxdx$ puis $\int_{\frac{1}{e}}^{e} x(lnx)^2dx$

b) Calcule l'aire du domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

BAC 2015 série D session normale selon APC

Contexte : Préparatifs pour le festival de Kari.

Gounou est un artisan qui compte réaliser et exposer ses tableaux à l'occasion du festival des arts et de la clôture de la commune de Kari. Pour réduire le coût de réalisation d'un tableau, il doit se rendre chez au moins deux fournisseurs pour négocier le prix du matériel. La probabilité pour que la négociation réussisse avec un fournisseur est 0,7.

Gounou décide de fabriquer des tableaux luxueux inédits dont la vente pourrait faire grimper son chiffre d'affaires.

Ce type de tableau contiendra des lignes courbes sur lesquelles seront minutieusement disposés des cristaux de marbre et de petites pièces de bois vernis. Pour l'acquisition du matériel nécessaire à la réalisation de ces tableaux, Gounou a dû négocier le prix, de façon indépendante, avec cinq fournisseurs.

Bio, fils de Gounou et élève en classe terminale scientifique, s'interroge sur les chances de son père de réussir les négociations en vue de se procurer le matériel de travail. Il désire par ailleurs représenter les points et les lignes courbes des tableaux.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Bio à trouver une réponse à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) calcule la probabilité pour que Gounou réussisse exactement trois négociations sur les cinq.

2) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de négociations réussies sur les cinq.

3°) Détermine la probabilité pour que Gounou réussisse toutes les cinq négociations avec les fournisseurs.

Problème 2 :

Six petites pièces de bois sont représentées par les points A, B, C, D, E et F. les points A, B et C sont les images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$(H): z^3 + (-6 + 5i)z^2 + (9 - 12i)z + 6 + 13i = 0$

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points D, E et F sont les images respectives des points A, B et C par la similitude plane directe S d'écriture complexe $z' = iz + 1 + i$.

4°) a) Démontre que l'équation (H) admet une solution imaginaire pure. Tu prendras le point A comme image de cette solution.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (H). Tu désigneras par B et C les images des autres solutions telles que $OB < OC$.

5°) a) Détermine l'affixe du point E.

b) Précise la nature du triangle DEF.

Problème 3 :

L'une des lignes courbes est une portion de la représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans le plan (P) de la fonction f de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} f(x) = x + \ln(-x) \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 1 + u(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ où u est la fonction de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ qui vérifie les conditions $u(0) = -1$ *et* $u'(0) = 2$.

6°) Justifie que : $u(x) = (x-1)e^{-x}$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

7°) a) Détermine l'ensemble de définition D_f *de* f.

b) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie la continuité de f *en* 0.

8°) a) Prouve que f est dérivable à droite en 0 puis précise la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à droite en son point d'abscisse 0.

b) Détermine $f'(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, puis étudie son signe suivant les valeurs de x.

c) Dresse le tableau des variations de f.

9°) a) Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

b) Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

10°) Une autre ligne courbe du tableau est la représentation graphique $(\mathcal{C}')$ déduite de celle de la fonction g de I vers J définie par : $g(x) = f(x)$ où $I =]-\infty; -1]$ *et* $J = f(I)$.

a) Détermine J.
b) Justifie que g est une bijection.
c) Etudie la dérivabilité de la bijection réciproque g^{-1} sur J.
d) La courbe $(\mathcal{C}')$ est en réalité celle de g^{-1}. Représente l'allure de $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

BAC 2016 série D session normale selon APC

Contexte : Plaisirs partagés d'une retraite bien préparée.

En vue de garantir une retraite paisible à ses clients fonctionnaires, IDEALBANK offre à ces derniers un service d'épargne consistant à ouvrir un compte et à y faire annuellement de nouveaux versements pendant au moins dix ans, sans aucun retrait durant cette période. Le taux d'intérêt appliqué par cette banque et les différents montants déposés chaque année dans le compte sont tels que si u_n et u_{n+1} représentent, en millions de francs, les montants dans le compte respectivement au 1er Janvier de la n^e année et au 1er janvier de la $(n+1)^e$ année, on a : $u_{n+1} = \frac{6(4u_n+3)}{2u_n+15}$. On définit ainsi une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Monsieur OWOLAGBA, fonctionnaire devant être admis à la retraite le 1er Janvier 2016, a souscrit à ce service d'épargne de IDEALBANK par ouverture d'un compte avec un premier dépôt de 3 millions de francs CFA effectué le 1er Janvier 2005.

Lors, de la cérémonie de réception organisée en son honneur le 1er janvier 2016, monsieur OWOLAGBA a reçu de ses collègues et amis plusieurs cadeaux dont un objet en verre et une tenue traditionnelle sur laquelle a été réalisée une décoration artistique suivant une configuration très particulière.

Monsieur OWOLAGBA veut se faire une idée de son avoir dans le compte au 1er Janvier 2016.

Par ailleurs, son frère Tony élève en classe de terminale scientifique, impressionné par les cadeaux, se propose d'étudier certaines propriétés de l'objet en verre et de reproduire la configuration représentée sur la tenue traditionnelle.

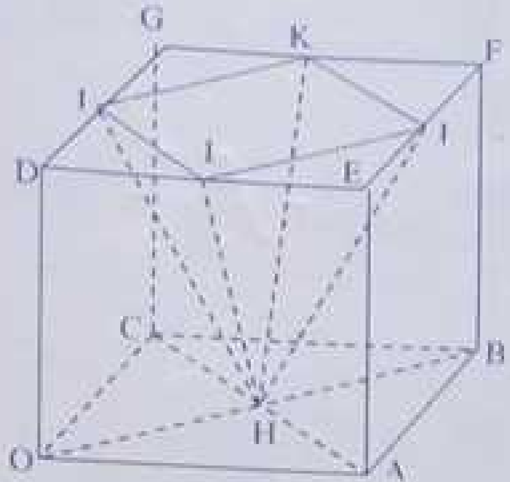
Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de monsieur OWOLAGBA et de Tony en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1 :

1- Justifie que $u_1 = 3$ puis calcule u_2 *et* u_3.
2- Démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel non nul n par $v_n = \frac{u_n - 6}{2u_n + 3}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et dont tu préciseras le premier terme.
3-
a) Exprime v_n, *puis* u_n en fonction de n.
b) Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4- Détermine, en millions de francs CFA, le montant du compte au 1er janvier 2016.

Problème 2

Le cadeau en verre reçu par monsieur OWOLAGBA est modélisé par un cube $OABCDEFG$ comme l'indique la figure ci-après.



I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[DE], [EF], [FG]$ et $[GD]$. H est le centre du carré $OABC$. La partie matérialisée par la pyramide $HIJKL$ est le creuse et la porte sur la face HJK une décoration. L'isobarycentre P des points H, I et L se projette orthogonalement sur le plan (HJK) en un point N considéré comme un point très important de la pyramide dans l'Egypte de l'ère des pharaons.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

5- Détermine les coordonnées des points H, I, J, K et L.

6-

a) Détermine la nature du quadrilatère $IJKL$.

b) Calcule l'aire du triangle HJK.

c) Calcule le volume de la partie creuse. Déduis-en le volume de la partie restante du cube.

7- a) Justifie que l'on a $P\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

b) Démontre qu'une équation cartésienne du plan (HJK) est $2x + 2y - z - 2 = 0$.

c) Détermine une représentation paramétrique de la droite passant par P et perpendiculaire au plan (HJK).

d) Détermine les coordonnées du point N

Problème 3 :

La configuration représentée sur la tenue traditionnelle est modélisée par une portion de la courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln|g(x)|$ où g est la solution de l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 0$ qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = 0$.

8-

a) Résous l'équation différentielle(E).

b) Justifie que pour tout nombre réel$x$, $g(x) = e^{2x} - 2e^{x}$.

c) Etudie le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9- Soit D l'ensemble de définition de f.

a) Justifie que $D =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$.

b) Etudie les limites de f aux bornes de D.

10- Démontre que l'on a :

a) Pour tout x élément de $]-\infty; \ln 2[$, $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2}e^{x}\right)$.

b) Pour tout x élément de $]\ln 2; +\infty[$, $f(x) = 2x + \ln(1 - 2e^{-x})$.

11- Justifie que la courbe (Γ) admet trois asymptotes que tu préciseras.

12-

a) Etudie le sens de variation de f.

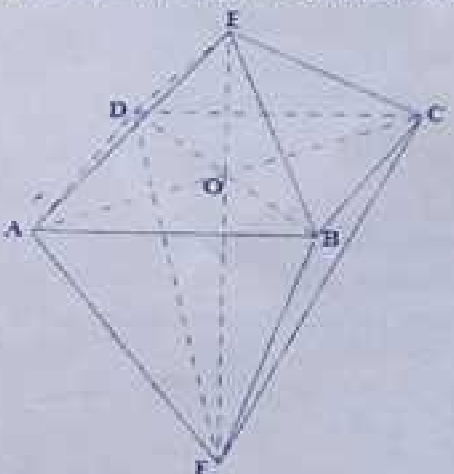
b) Dresse le tableau des variations de f.

c) Trace la courbe (Γ)

BAC 2017 série D session normale selon APC

Contexte : Un système d'éclairage peu ordinaire.

Tafé est un sculpteur passionné des mathématiques. Il a conçu, pour éclairer son salon, un lampadaire représenté par le solide (S) suivant :



Le solide (S) est tel que :

- La quadrilatère ABCD est un carré de centre O.
- La droite (EF) est perpendiculaire au plan (ABC) en O.
- $OA = OB = OE = 1$ et $OF = 2OE$, l'unité de longueur étant $2dm$
- La face FBC a été décorée avec des configurations planes.
- Deux ampoules ont été placées en des endroits qui sont assimilés aux points H et K projetés orthogonaux de A respectivement sur le plan (FBC) et sur la droite (ED)

Vidaho, fils de Tafe, a été toujours émerveillé par le lampadaire. A présent qu'il est en classe de terminale scientifique, il veut utiliser ses connaissances pour étudier certaines informations reçues de son père et qui ont servi à sa conception.
Afin de connaître certaines caractéristiques du lampadaire, Vidaho a supposé que l'espace est muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE})$.

Tâche

Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Vidaho, en résolvant les trois problèmes ci-après :

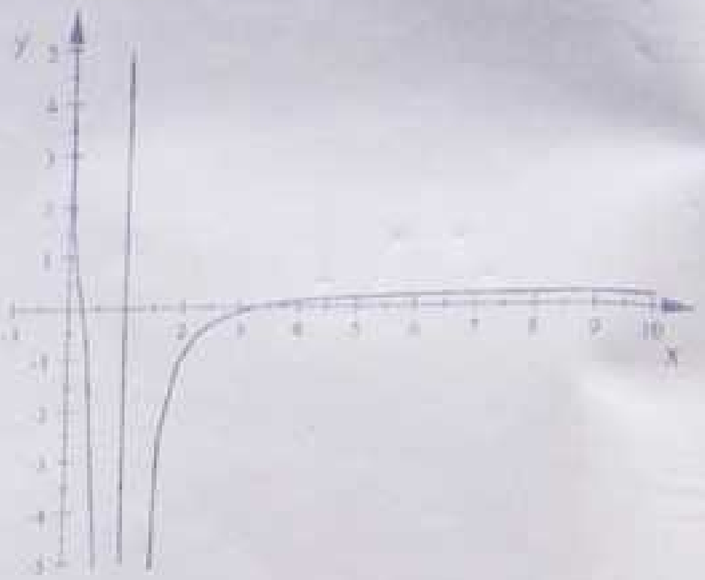
Problème 1

1) Détermine dans le repère $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE})$ les coordonnées des points C, D et F.
2) a) Démontre que le plan (FCB) a pour équation cartésienne
$$2x-2y+z+2=0$$
b) Détermine une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan (FCB).
c) Détermine les coordonnées du point H.
3) a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par A et perpendiculaire à la droite (DE).
b) Détermine les coordonnées du point K.
c) Calcule la distance KH.
4) Calcule le volume du solide (S).

Problème 2

La configuration représentée dans le plan (FCB) a été obtenue à partir de la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x-\ln x}+\frac{x}{\ln x} & si \;\; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

5) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-\ln x$
a) Etudie le sens de variation de g
b) Déduis-en que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, on a : $g(x)\geq 1$.
6) Soit D_f l'ensemble de définition de f.
a) En utilisant la question 5-b), démontre que $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$
b) Justifie que f est continue sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$
c) Etudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.
d) Détermine les limites de f aux bornes de D_f.
7) Sur le dessin ci-après, on a représenté la courbe (Γ) de la fonction dérivée f' de f et son asymptote d'équation $x=1$.



A partir de la courbe (Γ) :
a) Justifie que l'équation $f'(x)=0$ admet dans $]0;1[\cup]1;+\infty[$ deux solutions α et β avec $\alpha<\beta$.
b) Détermine le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
8) Détermine le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
9) Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) puis trace (C_f)
Tu prendras $\alpha=0{,}25$ et $\beta=3{,}4$

Problème 3

L'installation électrique à l'intérieur du lampadaire est configurée pour qu'au déclenchement de l'interrupteur pour l'allumer, les deux ampoules A_1 et A_2 qui s'y trouvent puissent être allumée ou éteintes, et cela indépendamment l'une de l'autre.
Après de nombreuses observations, Vidaho a pu établir que la probabilité pour que l'ampoule A_1 s'allume est 0,8 alors que la probabilité pour que A_2 s'allume est 0,6.

10) Détermine la probabilité pour qu'à un déclenchement donné de l'interrupteur pour allumer le lampadaire :
a) une et une seule des deux ampoules soit allumée.
b) les deux ampoules soient simultanément allumées.
11) Pendant le réveillon de la Saint-Sylvestre, l'interrupteur a été déclenché n fois pour allumer le lampadaire, n étant un entier naturel supérieur à 1.

a) Détermine la probabilité p_n pour qu'à chaque fois les deux ampoules soient allumées.

b) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,01$.

BAC 2018 série D session normale selon APC

Contexte : Contribution de la jeunesse à la réalisation d'un projet communautaire

En vue de réaliser un parc d'attraction, le conseil communal de Dodji a initié un concours circonscrit aux élèves des collèges de la commune et visant à recueillir leur projets d'architecture du parc. Dossou, un élève en classe terminale D, décide d'y participer. Il imagine un parc circulaire, traversé par une grande voie rectiligne, deux lampadaires géants, plusieurs voies secondaires ainsi qu'une rubrique « embellissement » où il suggérait de planter une fleur dont il a lu l'extraordinaire qualité d'expansion dans une revue spécialisée.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le pourtour (C) du domaine circulaire, la voie rectiligne et les deux lampadaires sont définis de la façon suivante :

Etant donné un nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, différents de $-2-3i$, et en notant $f(z)$ le nombre complexe $\frac{z-4-3i}{z+2+3i}$.

- (C) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre imaginaire,
- (Δ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel,
- Les deux lampadaires sont représentés par les points A et B d'affixes z_A et z_B tels que $z_A = f(-2-i)$ et $f(z_B) = -i$

Dossou veut formaliser son projet et y mettre un dessin de tout ce qu'il a conçu ainsi que les résultats de l'étude sur l'évolution de la fleur à planter.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Dossou en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1 :

1- Détermine z_A et z_B

2- Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y

3-a) Démontre que (C) est une partie d'un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon

b) Détermine (Δ).

c) Construis (Δ), (C) et les points A et B sur une même figure.

Problème 2 :

L'une des voies secondaires a l'allure de a courbe (Γ), représentative dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln(x^2+2x+1), \ si\ x \neq -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Les fleurs seront initialement plantées sur le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

4- Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

5-a) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudie la dérivabilité de f en -1 et donne une interprétation géométrique du résultat.

6-a) Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) Etudie le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

c) Dresse le tableau des variations de f.

7-a) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ).

b) Trace (Γ).

8-a) Justifie que la fonction F définie sur $[-1;0]$ par $F(t) = \int_t^0 f(x)dx$, est continue sur $[-1,0]$.

b) Justifie que pour tout $t \in]-1;0]$,

$F(t) = -(t+1)^2\ln(1+t) + \frac{1}{2}t(2+t)$.

c) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} F(t)$ et justifie que cette limite est égale à $F(-1)$.

d) Calcule l'aire du domaine initial sur lequel les fleurs seront plantées.

Problème 3 :

Selon les informations lues par *Dossou*, la surface occupée par la fleur évolue en fonction du temps. En désignant par u_n la surface occupée par la fleur après n années, $n \geq 1$, la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est telle que $U_{n+1} = \frac{nU_n+4}{n+1}$

On suppose que $U_1 = \frac{1}{2}$(unités d'aire).

9- Calcule U_2 et U_3.

10- On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $v_n = nU_n$.

a) Démontre que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

b) Déduis-en v_n puis U_n en fonction de n.

c) Démontre que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.

11- Démontre que l'aire du domaine occupé par la fleur au cours de son expansion a une limite que tu préciseras.

Sept qualités indispensables pour réussir en mathématiques

1- La concentration

2- L'observation

3- L'imagination

4- La mémoire

5- L'intuition

6- Le raisonnement

7- Le travail méthodique
(Apprendre le cours et faire assez d'exercices)

Que Dieu vous inspire et vous comble de succès.