CARGO

Collection de Mathématiques

2^{nde} S

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

Famille MEZUI M'BANGOUET
Guy Sosthène

CARGO

Collection de Mathématiques

2nde S

Famille MEZUI M'BANGOUET

Guy Sosthène

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

Avant-Propos

Vous avez entre les mains un manuel de mathématiques de la classe de Seconde scientifique.

Il vise, comme les autres ouvrages de la collection **CARGO**, à mettre les mathématiques à la portée du plus grand nombre d'élèves tout en leur assurant des bases solides pour des études scientifiques futures.

L'accès à toutes les carrières qui peuvent contribuer au développement et à l'émergence de l'Afrique dans les années à venir impose l'acquisition de solides compétences en mathématiques.

Réparti en quatorze chapitres, ce manuel s'appuie sur les programmes officiels de mathématiques définis dans plusieurs pays du continent ayant le français comme langue d'enseignement.

Chaque chapitre comprend :

- en page d'ouverture, une grande image de présentation et un bref portrait d'un mathématicien des siècles derniers ou un point d'histoire des mathématiques ;
- des **Activités d'introduction** permettant de mettre l'élève en situation, de se questionner et d'aborder de nouvelles notions ;
- des pages de **Cours** immédiatement suivies de pages **Savoir-faire**, où sont proposés à l'élève des exercices accompagnés de **Solutions commentées** ;
- un grand nombre d'exercices et problèmes allant des **Exercices d'application** aux **Exercices d'approfondissement** sans oublier les tests **Vrai-Faux** et les questions à choix multiples **QCM**, corrigés en fin de manuel, permettant une auto-évaluation ;
- de fréquentes activités interdisciplinaires.

Il était important enfin de donner toute leur place aux TIC dans ce manuel : il initie les élèves au fonctionnement des calculatrices scientifiques, au tableur ainsi qu'aux logiciels de géométrie dynamique et leur apprend à en tirer le meilleur parti.

Les auteurs ont eu à cœur de mettre à la disposition des élèves et de leurs professeurs un outil d'aide à l'apprentissage des mathématiques et à l'acquisition d'une culture scientifique qui, de nos jours, est devenue incontournable.

Walter Paul KOMO

Maquette de couverture : SG Création
Maquette intérieure : ADN

Mise en page et schémas : Catherine Nguyen
Recherche iconographique : Brigitte Hammond

ISBN : 978.2.7531.0744.1

Sommaire

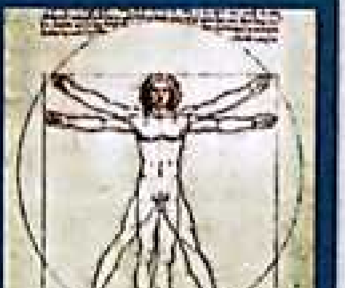
Chapitres	Contenus d'apprentissage	Méthodes et savoir-faire
1. Angles inscrits et polygones inscriptibles **page 5**	1. Angles inscrits 2. Polygnones inscriptibles 3. Relations métriques dans le triangle	• Construire les arcs capables • Utiliser les quadrilatères inscriptibles • Utiliser les relations métriques dans le triangle
2. Angles orientés et trigonométrie **page 21**	1. Angles orientés 2. Trigonométrie	• Conversion radians-degrés • Manipuler des angles orientés • Déterminer la mesure principale d'un angle • Établir le lien entre les coordonnées, le cosinus et le sinus • Utiliser les angles associés • Déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle
3. Vecteurs **page 35**	1. Calcul vectoriel 2. Norme 3. Colinéarité 4. Vecteurs unitaires 5. Combinaisons linéaires 6. Bases 7. Repère du plan	• Représenter graphiquement un vecteur • Démontrer une égalité vectorielle • Démontrer le parallélisme de deux droites • Démontrer l'alignement de points • Démontrer l'alignement de points dans un repère • Changement de base
4. Produit scalaire **page 55**	1. Définition et premières propriétés 2. Produit scalaire et orthogonalité 3. Propriétés et autres formules du produit scalaire 4. Relations métriques dans un triangle	• Calculer le produit scalaire • Déterminer la mesure d'un angle géométrique • Étudier l'orthogonalité de deux droites • Utiliser l'expression analytique du produit scalaire • Calculer la mesure des angles d'un triangle • Calculer la longueur d'une médiane
5. Équations de droites et de cercles **page 75**	1. Droites et vecteurs 2. Équations cartésiennes d'une droite 3. Équation réduite d'une droite 4. Représentation paramétrique d'une droite 5. Positions relatives de droites 6. Équations cartésiennes d'un cercle	• Déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points • Déterminer une équation cartésienne d'une droite à l'aide du déterminant • Déterminer une représentation paramétrique d'une droite • Étudier la position relative de deux droites • Déterminer une équation cartésienne d'un cercle • Reconnaître une équation de cercle
6. Transformations du plan **page 93**	1. Transformations usuelles 2. Rotation 3. Propriétés 4. Homothétie	• Construire l'image d'une droite • Construire l'image d'un triangle • Construire l'image d'un segment • Utiliser les propriétés pour démontrer • Construire l'image d'un point • Utiliser les propriétés pour démontrer
7. Géométrie dans l'espace **page 113**	1. Représentation dans l'espace 2. Propriétés fondamentales 3. Droites et plans de l'espace 4. Parallélisme	• Décrire et représenter l'espace • Étudier la position relative de deux droites • Étudier la position relative de deux plans • Étudier la coplanarité de deux droites • Étudier le parallélisme de deux plans

1

Angles inscrits et polygones inscriptibles

L'œil de la mouche de vinaigre ou drosophile est constitué de milliers de petits yeux, appelés ommatidies, qui ont la forme d'hexagones réguliers.

Génie universel (inventeur, architecte, peintre…), Léonard de Vinci, dans un dessin intitulé Étude des proportions du corps humain selon Vitruve (vers 1492), représente l'homme idéal inscrit à la fois dans un cercle et dans un carré.



les objectifs du chapitre

- Utiliser les propriétés des angles inscrits et de l'angle au centre.
- Construire les arcs capables de mesure donnée.
- Utiliser les relations métriques dans le triangle.
- Construire un polygone régulier.

Cours 1b

1 Angle inscrit et demi-tangente

1 Conjecturer avec le logiciel Geogebra

a. • Ouvrir le logiciel GeoGebra et créer un cercle (𝒞) de centre O et de rayon 3 à l'aide de l'icône **Cercle (centre-rayon)**.

• Placer deux points A et B sur le cercle ; puis tracer $[OA]$, $[OB]$ et $[AB]$.

• Utiliser l'icône pour tracer la tangente en A à (𝒞).

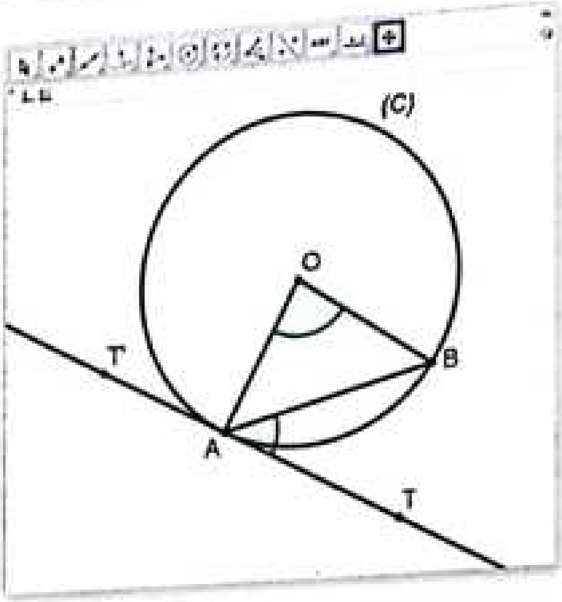
• Placer deux points T et T' de part et d'autre de A sur cette tangente.

• L'icône permet de faire apparaître les angles et leur mesure :

– pour $\widehat{AOB}$: cliquer sur A, puis O, puis B ;

– pour $\widehat{TAB}$: cliquer sur T, puis A, puis B.

b. Déplacer le point A sur le cercle (𝒞).
Que peut-on conjecturer sur les mesures des angles ?



2 Démontrer une conjecture

a. Reproduire une figure analogue sur le cahier et placer le milieu I de $[AB]$.

b. Justifier que (AT) coupe (OI) en un point C.

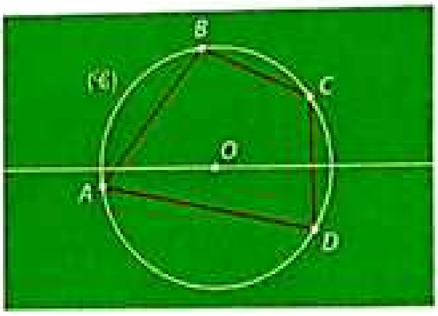
c. Utiliser les triangles AOC et AIC pour montrer que mes $\widehat{AOI}$ + mes $\widehat{OAB}$ = mes $\widehat{CAB}$ + mes $\widehat{OAB} = 90°$.

d. En déduire que mes $\widehat{TAB} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

Cours 2

2 À l'entraînement

Un entraîneur de football souhaite faire travailler la vitesse de course à quatre de ses joueurs notés A, B, C, D.
Au départ, les joueurs se positionnent sur le rond central, à égale distance les uns des autres.
Ils sprintent alors tous dans le même sens en restant sur le cercle, jusqu'à ce qu'un joueur en rattrape un autre.
On observe leurs positions au bout de quelques secondes.



1 Observer une propriété

a. Tracer un cercle (𝒞) et placer quatre points A, B, C, D distincts sur (𝒞).
Tracer le quadrilatère $ABCD$.
Un quadrilatère dont les sommets sont situés sur un même cercle est dit inscriptible.

b. À l'aide du rapporteur, mesurer les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$; puis les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$. Qu'observe-t-on ?

2 Une propriété

a. Démontrer la conjecture précédente en utilisant les angles inscrits.

b. Lors d'un premier jeu, on a constaté que mes $\widehat{B} = 83°$ et mes $\widehat{D} = 98°$.
Expliquer pourquoi l'entraînement s'arrête.

3 Sa réciproque

On suppose maintenant que $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles supplémentaires.

a. Montrer que C appartient à un arc du cercle circonscrit au triangle ABD.

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

3 Sinus d'un angle

Cours 3a

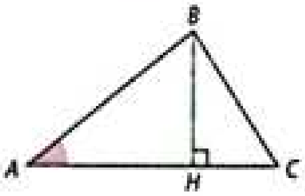
1 Sinus d'un angle aigu

a. ABC désigne un triangle rectangle en B.
Utiliser le rappel ci-contre pour donner l'expression de $\sin \widehat{BAC}$.

b. ABC désigne le triangle quelconque d'aire $\mathcal{A}$ tracé ci-contre.
H est le projeté orthogonal de B sur $[AC]$.
Donner l'expression de $\mathcal{A}$; puis de $\sin \widehat{BAC}$, en utilisant BH.

c. K est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Donner l'expression de $\mathcal{A}$; puis de $\sin \widehat{BAC}$, en utilisant CK.

d. Montrer que les expressions de $\sin \widehat{BAC}$ trouvées au **a.** et au **c.** sont égales.



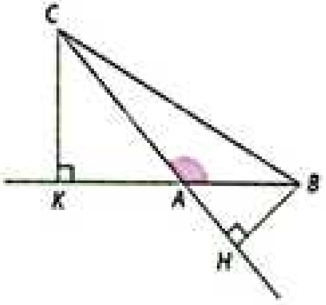
2 Sinus d'un angle obtu

a. ABC désigne le triangle quelconque d'aire $\mathcal{A}$ tracé ci-contre.
H et K sont les projetés orthogonaux de B sur (AC) et de C sur (AB).
Montrer que $2\mathcal{A} = AB \times KC = AC \times HB$.

b. En déduire que $\dfrac{HB}{AB} = \dfrac{KC}{AC}$.

On définit le sinus d'un angle $\widehat{BAC}$ quelconque par $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{HB}{AB}$.

On admet qu'il ne dépend que de $\widehat{BAC}$.



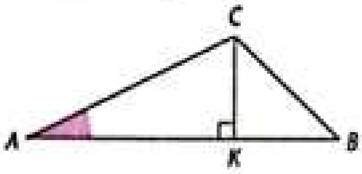
4 Relations métriques dans un triangle

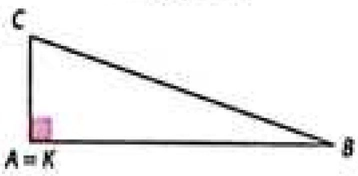
Cours 3b

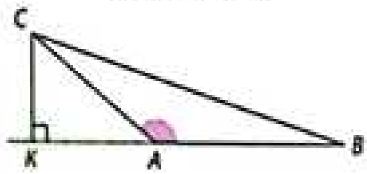
ABC désigne un triangle d'aire $\mathcal{A}$. On pose, pour simplifier les écritures, $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1 Première formule

a. Dans chacun des cas ci-dessous, donner l'expression de $\sin \widehat{A}$.


$\widehat{A}$: angle aigu


$\widehat{A}$: angle droit


$\widehat{A}$: angle obtus

b. En déduire l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de $\sin \widehat{A}$, dans chacun des cas.

c. Écrire une expression analogue donnant $\mathcal{A}$ à l'aide de $\sin \widehat{B}$; puis une dernière expression donnant $\mathcal{A}$ à l'aide de $\sin \widehat{C}$.

2 Seconde formule

a. Utiliser la réponse du 1 b. pour simplifier l'expression $\dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.

b. À l'aide du 1 c., en déduire que $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$.

1 Cours

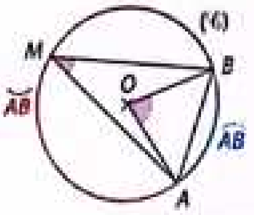
1 Angles inscrits

a Rappels

A et *B* désignent deux points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre *O* tels que $[AB]$ n'est pas un diamètre. La corde $[AB]$ définit deux arcs de cercle. Celui dont la longueur est la plus petite est noté $\overset{\frown}{AB}$, l'autre est noté $\overset{\smile}{AB}$.

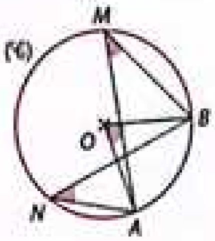
Définitions

- L'angle $\widehat{AOB}$ qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est appelé **angle au centre.**
- *M* est un point de $(\mathscr{C})$ différent de *A* et *B*. L'angle $\widehat{AMB}$ qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas *M* est appelé **angle inscrit.**

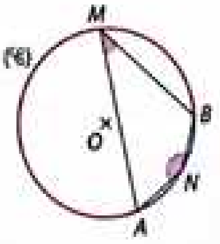


Propriétés

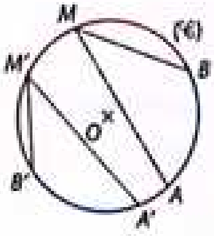
1. Si $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$ et mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.



2. Si $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits interceptant respectivement les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\smile}{AB}$, alors : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$ = 180°.



3. Deux angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont même mesure.

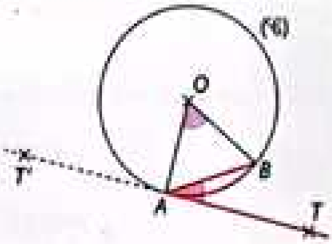


b Angle inscrit et demi-tangente

Propriété

$[AB]$ est une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre *O* qui n'est pas un diamètre. On note $[AT)$ la demi-tangente en *A* à $(\mathscr{C})$ telle que *T* n'est pas dans le demi-plan délimité par (AB) contenant *O*.

On a : mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.



Remarque

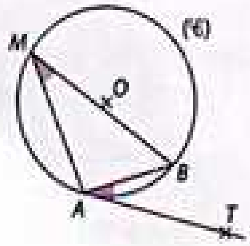
Dans le cas où $[AB]$ est un diamètre de $(\mathscr{C})$, la propriété reste vraie puisque mes $\widehat{TAB}$ = 90° et mes $\widehat{AOB}$ = 180°.

c Conséquences

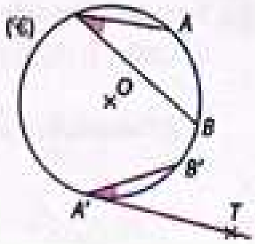
On admet, par convention, que les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont des angles inscrits interceptant respectivement les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\smile}{AB}$. Les propriétés du paragraphe a. restent valables.

Propriétés

1. Si les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{TAB}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{TAB}$.



2. Si les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{TA'B'}$ interceptent des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AB}$ de même longueur, alors : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{TA'B'}$.



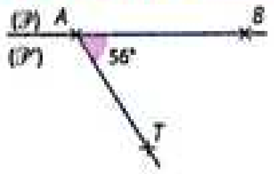
Savoir-faire

1 Construire les arcs capables

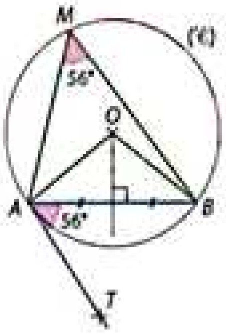
[AB] est le segment ci-contre.
Construire l'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} = 56°$.

Solution commentée

1.



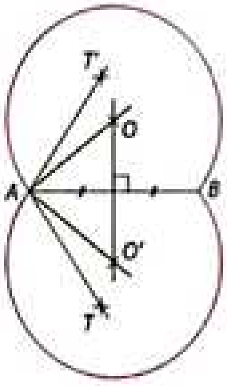
2. • On note M un point de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{AMB} = 56°$.
$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre O circonscrit au triangle AMB.
• Puisque mes $\widehat{AOB} = 112°$ et que le triangle AOB est isocèle en O, mes $\widehat{OAB} = 34°$ et mes $\widehat{OAT} = 90°$.
• Ainsi, (AT) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$.
• Le cercle $(\mathscr{C})$ est unique.
Ainsi, tout point M de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{AMB} = 56°$ appartient à $(\mathscr{C})$.



3. D'après la propriété du cours, tout point M appartenant à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{P})$ (c'est-à-dire situé sur l'arc rouge), intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et vérifie mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{TAB} = 56°$.

4. On procède de même avec un point T' de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{T'AB} = 56°$.

5. Finalement, l'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} = 56°$ est constitué des deux arcs de cercle rouges privés des points A et B.



Méthode

1. $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont les deux demi-plans de frontière (AB). Placer un point T de $(\mathscr{P}')$ tel que mes $\widehat{TAB} = 56°$.

2. • Considérer un point M de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{AMB} = 56°$.
• Montrer que le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABM admet (AT) pour tangente en A.
Tracer $(\mathscr{C})$ en utilisant la médiatrice de $[AB]$.
• Montrer que tout point M de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{AMB} = 56°$ appartient à $(\mathscr{C})$.

3. Réciproquement, vérifier que tout point M appartenant à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{P})$ vérifie mes $\widehat{AMB} = 56°$ (utiliser la propriété 1c).

4. Reprendre les points précédents avec un point T' de $(\mathscr{P})$ tel que mes $\widehat{T'AB} = 56°$.

5. Conclure.

Vocabulaire

Ces deux arcs de cercles rouges privés des points A et B sont appelés arcs capables d'extrémités A et B d'un angle de mesure 56°.

S'exercer

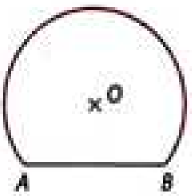
Pour les exercices 2 à 4, construire l'ensemble des points M du plan qui vérifient la condition donnée.

2 $[AB]$ est un segment de longueur 5 cm et mes $\widehat{AMB} = 50°$.

3 $[CD]$ est un segment de longueur 4 cm et mes $\widehat{CMD} = 40°$.

4 $[EF]$ est un segment de longueur 6 cm et mes $\widehat{EMF} = 120°$.

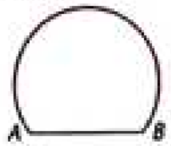
5 Une partie d'un arc capable d'extrémités A et B est tracé en rouge ci-contre.
a. Reproduire la figure.
b. Compléter avec l'autre arc capable en utilisant la règle et le compas.



6 À l'aide du rapporteur, déterminer la condition vérifiée par les points M situés sur les arcs de cercles rouges ci-dessous. On ne demande pas de justifier.

a.

b.



7 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4{,}8$ cm. Construire les ensembles de points M du plan dans les cas particuliers suivants :
a. mes $\widehat{AMB} = 0°$;
b. mes $\widehat{AMB} = 90°$;
c. mes $\widehat{AMB} = 180°$.

2 Polygones inscriptibles

Définition

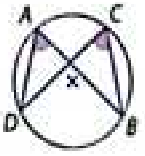
Un **polygone** est dit **inscriptible** dans un cercle lorsqu'il existe un cercle qui passe par chacun de ses sommets.

a Quadrilatères inscriptibles

Propriété

Un quadrilatère croisé est inscriptible si, et seulement si, deux de ses angles opposés ont même mesure.

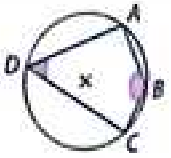
Exemple Le quadrilatère croisé $ABCD$ est inscriptible.
On a :
mes $\widehat{BAD}$ = mes $\widehat{BCD}$.



Propriété

Un quadrilatère convexe est inscriptible si, et seulement si, deux de ses angles opposés sont supplémentaires.

Exemple Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible.
On a :
mes $\widehat{ADC}$ + mes $\widehat{ABC}$ = 180°.

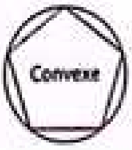


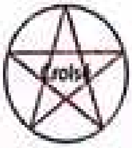
b Polygones réguliers

Définition

Un **polygone** est dit **régulier** lorsqu'il est **inscriptible** et que ses côtés sont de même longueur.

Pentagones réguliers





Hexagones réguliers

Heptagones réguliers

3 Relations métriques dans le triangle

a Sinus d'un angle

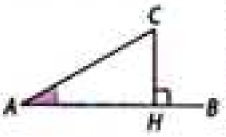
Définition

ABC désigne un triangle et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le **sinus de l'angle** $\widehat{BAC}$ est le nombre $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{HC}{AC}$.

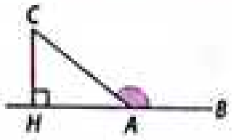
- $\widehat{BAC}$ angle aigu

Remarque
Cela correspond à la propriété vue en classe de 3ᵉ.



- $\widehat{BAC}$ angle obtus

Remarque
Dans ce cas, on a $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{HAC}$.

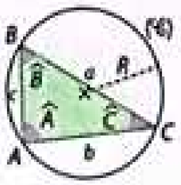


b Relations métriques dans le triangle

Propriétés

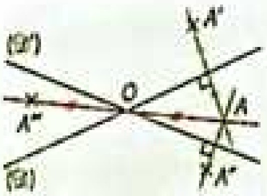
ABC désigne un triangle d'aire $\mathcal{A}$.
On note R le rayon de son cercle circonscrit $(\mathscr{C})$ et $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

- $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \dfrac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.
- $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.



8 Utiliser les quadrilatères inscriptibles

(𝒟) et (𝒟') sont deux droites sécantes en *O* et *A* un point n'appartenant ni à (𝒟), ni à (𝒟').
On note *A'* (respectivement *A''*) le symétrique de *A* par rapport à (𝒟) (respectivement à (𝒟')) et *A'''* le symétrique de *A* par rapport à *O*.
Montrer que mes $\widehat{A'AA''} = 180° -$ mes $\widehat{A'A'''A''}$.



Solution commentée

$OA = OA'$ puisque *A'* est le symétrique de *A* par rapport à (𝒟).

De même, $OA = OA''$ et $OA = OA'''$.

Ainsi, le quadrilatère $AA'A'''A''$ est inscriptible dans le cercle de centre *O* et de rayon *OA*.

Il s'agit d'un quadrilatère non croisé, donc, d'après la propriété, les angles $\widehat{A'AA''}$ et $\widehat{A'A'''A''}$ sont supplémentaires.

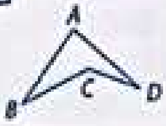
D'où mes $\widehat{A'AA''} = 180° -$ mes $\widehat{A'A'''A''}$.

Méthode

1. Faire une figure pour savoir s'il s'agit d'un quadrilatère croisé ou convexe.
2. Appliquer l'une des propriétés du paragraphe **2. a.**

Remarque

Il existe un troisième type de quadrilatères : non convexe et non croisé.
Ils ne sont pas étudiés ici.



9 Utiliser les relations métriques dans le triangle

Le triangle *ABC* ci-contre est isocèle en *A*.
Son aire est égale à $4\sqrt{3}$ cm².
Calculer la longueur des côtés du triangle.

Solution commentée

Le triangle *ABC* est isocèle en *A*,
donc $b = c$.
De plus, mes $\widehat{B} =$ mes $\widehat{C}$.
Or, mes $\widehat{A} = 120°$,
donc mes $\widehat{B} =$ mes $\widehat{C} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$.

Les angles de mesure 120° et 60° sont supplémentaires, donc,

$\sin 120° = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

De la relation $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$, on déduit que $4\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \times b^2 \times \sin 60°$

c'est-à-dire $b^2 = 16$. Ainsi $b = c = 4$ cm.

De même, puisque $4\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \times a \times 4 \times \sin 30°$, on obtient $a = 4\sqrt{3}$ cm.

Méthode

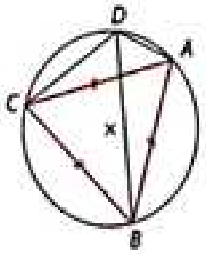
1. Identifier chacun des éléments connus ou déduits rapidement de l'énoncé parmi $a, b, c, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \mathcal{A}$ et R.
2. Utiliser la relation métrique appropriée du paragraphe **3. b.**

Rappel

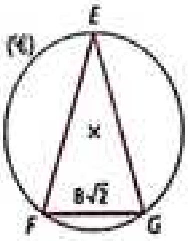
mes $\widehat{A}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \widehat{A}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \widehat{A}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

S'exercer

10 *ABCD* est le quadrilatère inscriptible ci-contre dans lequel *ABC* est un triangle équilatéral.
a. Montrer que (*BD*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.
b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$.



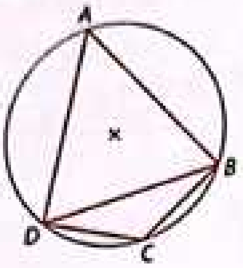
11 Le cercle (𝒞) circonscrit au triangle isocèle *EFG* ci-contre a pour rayon 8.
Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle.



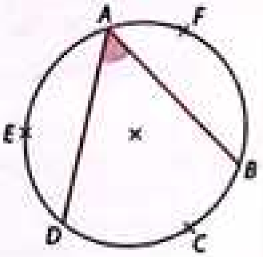
Exercices d'entraînement

Angles inscrits

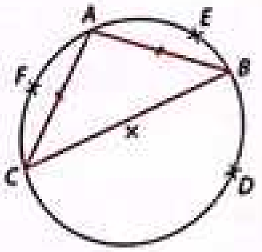
Réponses rapides



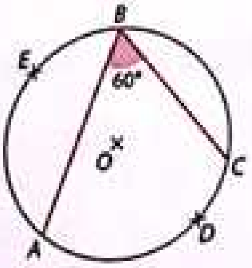
12 Utiliser la figure ci-contre pour citer les arcs interceptés par les angles :
a. $\widehat{BAD}$; b. $\widehat{BCD}$; c. $\widehat{DAC}$.



13 Utiliser la figure ci-contre pour citer des angles de même mesure que $\widehat{BAD}$.



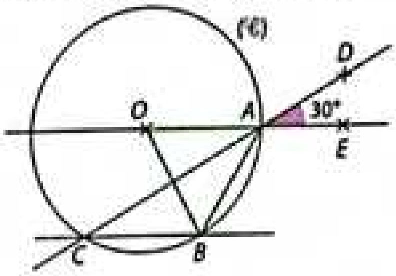
14 Utiliser la figure ci-contre pour justifier chacune des égalités.
a. mes $\widehat{BCA}$ = mes $\widehat{CBA}$;
b. mes $\widehat{BDA}$ = mes $\widehat{ADC}$;
c. mes $\widehat{BEA}$ = mes $\widehat{AFC}$.



15 Utiliser la figure ci-contre pour citer :
a. deux angles de mesure 120° ;
b. deux angles supplémentaires.

16 ABC désigne un triangle et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit. On note A' le milieu de l'arc intercepté par $\widehat{BAC}$; B' le milieu de l'arc intercepté par $\widehat{CBA}$ et C' le milieu de l'arc intercepté par $\widehat{ACB}$.
a. Comment se nomme la droite (AA') pour le triangle ABC ?
b. Justifier que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

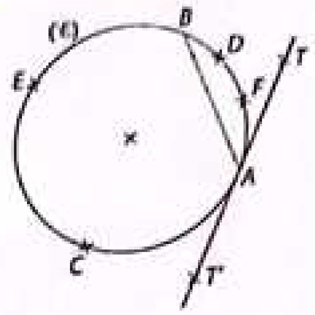
17 Sur la figure ci-dessous, A, B, C désignent trois points du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. Les droites (OA) et (BC) sont parallèles.



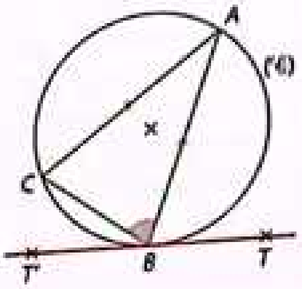
a. Justifier que mes $\widehat{AOB} = 60°$.
b. En déduire la nature du triangle OAB.

Angles inscrits et demi-tangente

Réponses rapides

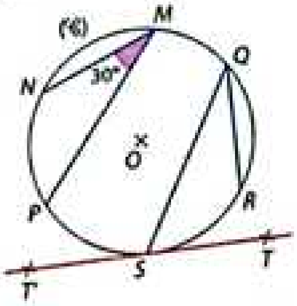


18 Sur la figure ci-contre, la droite (TT') est tangente à $(\mathscr{C})$ en A.
a. Citer deux angles de même mesure que $\widehat{TAB}$.
b. Citer deux angles de même mesure que $\widehat{T'AB}$.



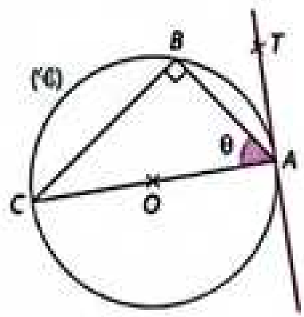
19 Sur la figure ci-contre, la droite (TT') est tangente à $(\mathscr{C})$ en B.
Citer deux angles de même mesure que $\widehat{ABC}$.

20 Sur la figure ci-dessous, les arcs de cercle $\overset{\frown}{NP}$ et $\overset{\frown}{RS}$ sont de même longueur. La droite (TT') est tangente en S à $(\mathscr{C})$.



a. Utiliser les points de la figure pour citer un angle complémentaire à $\widehat{NMP}$. Justifier.
b. Utiliser les points de la figure pour citer un angle supplémentaire à $\widehat{NMP}$. Justifier.

21 A et B sont deux points distincts situés sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. La tangente en A à $(\mathscr{C})$ coupe la tangente en B à $(\mathscr{C})$ au point C.
a. Faire une figure.
b. Justifier que le triangle ABC est isocèle.

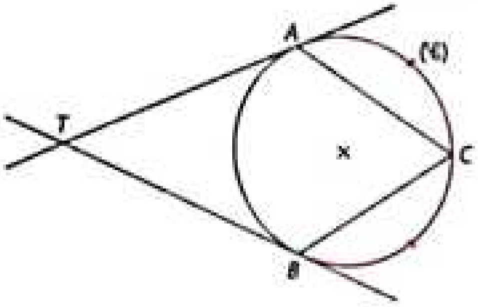


22 Sur la figure ci-contre, le triangle ABC rectangle en B est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$. On note T un point de la tangente en A à $(\mathscr{C})$.
Exprimer mes $\widehat{TAB}$ en fonction de θ (deux cas sont à envisager).

Aide

Envisager deux positions possibles de B, de part et d'autre de A.

23 Sur la figure ci-dessous, les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ ont même longueur. (AT) et (BT) sont les tangentes en A et en B à $(\mathscr{C})$.



Calculer la mesure de chacun des angles du quadrilatère $ATBC$, sachant que mes $\widehat{ACB} = 70°$.

Aide

▸ Penser à utiliser une bissectrice et des triangles isocèles.

24 $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de centre O et O', de même rayon et tangents extérieurement en M.
Une tangente au cercle $(\mathscr{C})$ qui passe par O' coupe $(\mathscr{C}')$ en A.

a. Donner, en justifiant, la nature des triangles OAO', MAO' et MAO.

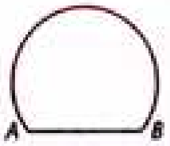
b. Déterminer la mesure des angles $\widehat{AMO'}$ et $\widehat{AO'M}$.

Arcs capables

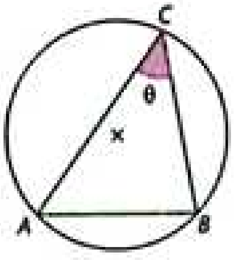
Réponses rapides

25 $[AB]$ est le segment ci-contre.
Décrire l'ensemble des points M du plan qui vérifient mes $\widehat{AMB} = 90°$.

26 Les points M situés sur l'arc rouge ci-contre vérifient mes $\widehat{AMB} = 45°$.
Existe-t-il d'autres points du plan qui vérifient cette condition ?
Si oui, préciser lesquels (sans justifier).



27 Construire les arcs capables d'un angle de mesure 2θ, d'extrémités A et B.



Rappel

▸ Construire les arcs capables de mesure α et d'extrémités A et B, c'est tracer les deux arcs de cercles qui correspondent à l'ensemble des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \alpha$ (voir p. 9).

28 **a.** Tracer un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm ; $AC = 5$ cm et mes $\widehat{BCA} = 40°$.

b. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.

c. Construire l'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{BMA} = 40°$.

29 ABC désigne un triangle.
Construire à la règle et au compas l'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{ACB}$.

30 IJK désigne un triangle tel que :

$$IJ = 6 \text{ cm} \; ; \; \text{mes } \widehat{IJK} = 30° \; \text{ et } \; \text{mes } \widehat{JIK} = 50°.$$

Existe-t-il un point O tel que :

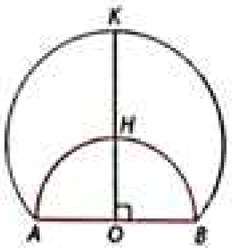
$$\text{mes } \widehat{IOJ} = 30° \; \text{ et } \; \text{mes } \widehat{JOK} = 50° \; ?$$

Justifier par une construction.

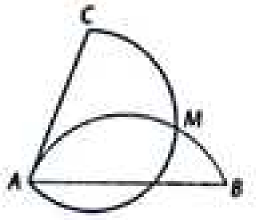
31 La figure ci-contre est constituée d'un demi-cercle de centre O et de rayon 1 et d'un arc capable d'extrémités A et B et de mesure 60°.
Calculer la longueur HK.

Aide

▸ Utiliser une propriété du triangle ABK pour calculer OK.



32 La figure ci-dessous est constituée de deux arcs capables sécants en M : l'un d'extrémités A et B et de mesure 115° ; l'autre d'extrémités A et C et de mesure 65°.



Démontrer que les points B, M, C sont alignés.

33 ABC désigne un triangle dans lequel l'angle $\widehat{BCA}$ est aigu.
Construire à la règle et au compas un point M du plan tel que mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{MAB} =$ mes $\widehat{BAC}$.

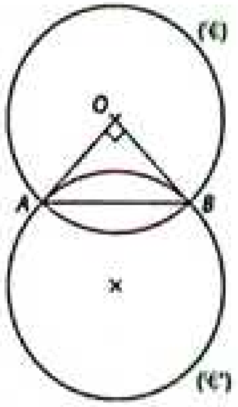
Aide

▸ Penser à (AC) comme une demi-tangente d'un cercle passant par A et B.

34 Sur la figure ci-contre, le cercle $(\mathscr{C}')$ est le symétrique du cercle $(\mathscr{C})$ par rapport à (AB).
O est le centre de $(\mathscr{C})$.

a. Décrire les arcs rouges comme arcs capables d'un angle de mesure à préciser.

b. Décrire les arcs verts comme arcs capables d'un angle de mesure à préciser.



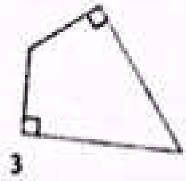
Exercices d'entraînement

Polygones inscriptibles

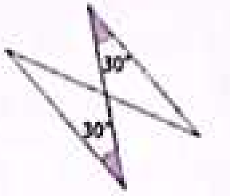
Réponses rapides

35 Peut-on affirmer que les quadrilatères ci-dessous sont inscriptibles ? Justifier la réponse.

a.



b.

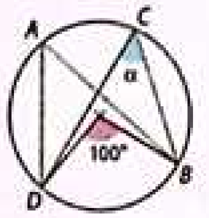


c.

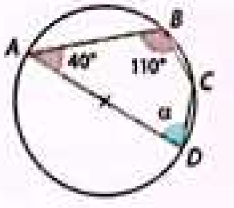
d.

36 Les quadrilatères *ABCD* ci-dessous sont inscriptibles. Déterminer la valeur de α.

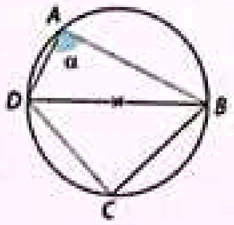
a.



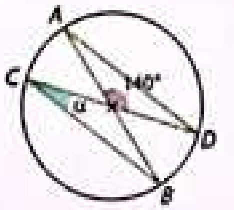
b.



c.



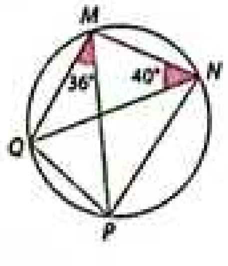
d.



37 Démontrer qu'un parallélogramme est inscriptible si, et seulement si, c'est un rectangle.

38 Démontrer qu'un losange est inscriptible si, et seulement si, c'est un carré.

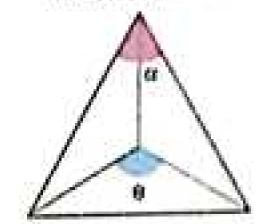
39 Le quadrilatère *MNPQ* est inscrit dans le cercle (𝒞).
Déterminer la mesure des angles suivants :
a. $\widehat{MOP}$;
b. $\widehat{MNP}$.



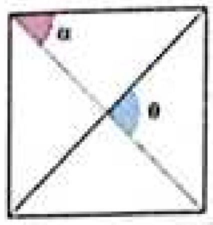
40 *ABCD* désigne un trapèze isocèle de bases [*AB*] et [*CD*] telles que *AB* < *CD*. (*AC*) et (*BD*) se coupent en *M*.
a. Montrer que *ABCD* est inscriptible.
b. On note *O* le centre de son cercle circonscrit.
Justifier que mes $\widehat{DOM}$ = 2 mes $\widehat{DCA}$ + mes $\widehat{ACB}$.
En déduire que le quadrilatère *AMOD* est inscriptible.

41 Pour chacun des polygones réguliers ci-dessous :
a. déterminer, en justifiant, la valeur de α ;
b. en déduire la valeur de θ.

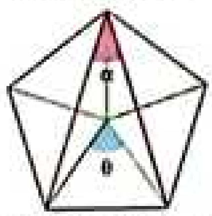
Triangle équilatéral



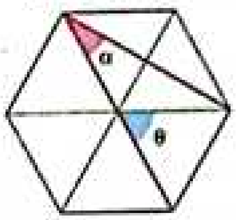
Carré



Pentagone régulier



Hexagone régulier



(Penser à utiliser une propriété des angles inscrits.)

Rappel

Un polygone est régulier lorsqu'il est inscriptible et que tous ses côtés ont même longueur.

42 a. Calculer la longueur des côtés d'un hexagone régulier dont l'aire est égale à $24\sqrt{3}$ dm^2.
b. Calculer le rayon de son cercle inscrit.

Aide

Un hexagone régulier est constitué de triangles équilatéraux.

43 Calculer le rayon du cercle circonscrit d'un pentagone régulier dont l'aire est égale à 5 cm^2.

On admet que $\sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Info

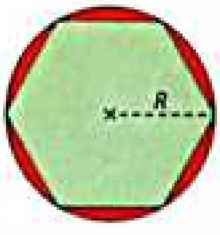
Dans un polygone régulier, le rayon du cercle inscrit est aussi appelé apothème.

44 Calculer la longueur, arrondie au centième, des côtés d'un octogone régulier *ABCDEFGH* de centre *O* dont le rayon du cercle circonscrit est 4 cm.

Aide

Commencer par une figure à main levée. Rappel : $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

45 Le polygone régulier ci-contre est inscrit dans un cercle de rayon *R*. Exprimer, en fonction de *R*, l'aire de la surface colorée en rouge.



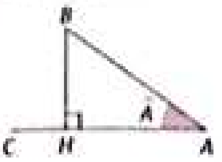
46 Démontrer qu'un trapèze est inscriptible si, et seulement si, c'est un carré.

Relations métriques

Réponses rapides

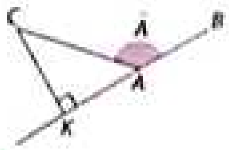
47 Dans chacun des cas ci-dessous, donner l'expression du sinus de l'angle $\hat{A}$.

a.

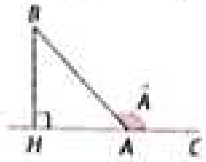


b.

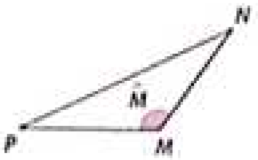
c.



d.



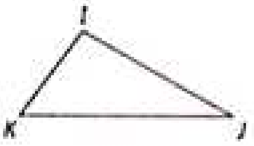
48 Quel point faut-il construire sur la figure ci-contre pour pouvoir donner l'expression de sin $\hat{M}$?



Aide

Il y a deux réponses possibles.

49 Donner l'expression du sinus de chacun des angles du triangle *IJK*. Quand c'est nécessaire, on définira des points qui ne sont pas sur la figure.



Dans les exercices qui suivent, on conserve les notations du cours : *ABC* est un triangle d'aire $\mathcal{A}$ et on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; *R* est le rayon de son cercle circonscrit.

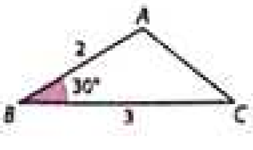
50 Quelle est la nature des triangles pour lesquels $a = 2R$ et $b = c$?

Aide

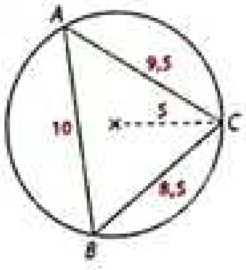
Faire une figure en choisissant des valeurs pour *a* et *b*.

51 Calculer l'aire des triangles ci-dessous.

a.



b.



52 *ABC* est un triangle tel que :

$$a = 3,\quad b = 1 + \sqrt{6},\quad c = 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \frac{(1+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2}.$$

a. Déterminer la mesure de l'angle $\hat{A}$.

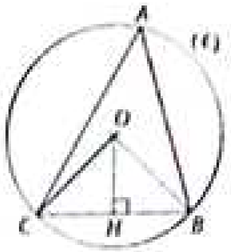
b. Calculer la valeur de *R*.

c. Construire le triangle *ABC* à la règle graduée et au rapporteur.

53 Propriété du cours

1. a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle *ABC* en fonction de *b*, *c* et $\hat{A}$.

b. En déduire que $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$.



2. Justifier qu'un triangle admet toujours au moins un angle aigu. On note cet angle $\hat{A}$.

3. a. Exprimer sin $\widehat{BOH}$ en fonction de *a* et de *R*.

b. Justifier que mes $\widehat{BOH}$ = mes $\hat{A}$.

c. Conclure.

54 Utiliser les formules du cours pour montrer que :

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 2\mathcal{A} \times \frac{a+b+c}{abc}.$$

55 Calculer l'aire du triangle *ABC* dans les cas suivants :

a. triangle 1 : $b = 3$, $c = 2$, mes $\hat{A} = 45°$;

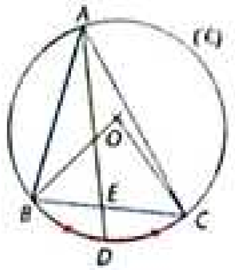
b. triangle 2 : $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$, mes $\hat{C} = 60°$.

56 Sur la figure ci-contre, les arcs de cercle $\overset{\frown}{BD}$ et $\overset{\frown}{DC}$ sont de même longueur.

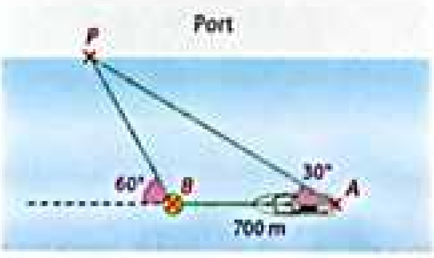
On donne $AB = 10$, $OB = 7$ et mes $\widehat{BOC} = 100°$.

a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.

b. Calculer la longueur de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle *ABC*.



57 Arrivé au point *A*, le cargo, pour rentrer au port, doit passer par la balise *B* car la profondeur d'eau entre *A* et *P* est insuffisante.



Sur le trajet, le capitaine a effectué les relevés de longueur et de mesures d'angles indiquées sur la figure.

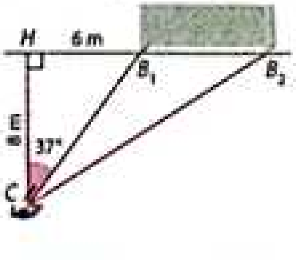
Calculer la longueur *AP*.

58 Un joueur de football doit tirer un coup franc au point *C*.

a. Déterminer la mesure des angles :

· $\widehat{HB_1C}$; · $\widehat{CB_1B_2}$; · $\widehat{B_1B_2C}$.

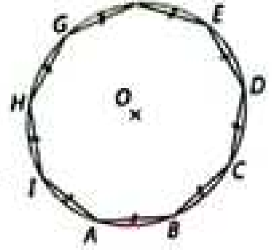
b. Calculer, au dm près, la largeur d'un but de football. (On donne sin 22° ≈ 0,38 et sin 31° ≈ 0,52.)



Faire le point

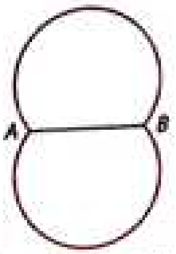
59 Vocabulaire et notation

Utiliser la figure ci-dessous pour compléter chacune des phrases à l'aide de notations ou de définitions du cours.



- L'arc rouge est noté …
et l'arc vert … .
- L'angle $\widehat{EHD}$ est un angle …
et l'angle $\widehat{IOC}$ est un angle … .
- Le polygone *ABCDEFGHI*
est … et … .

60 À un détail près



Fodje a construit ci-contre les arcs capables d'extrémités *A* et *B* d'angle de mesure 63°.

Il a conclu : « *les arcs capables sont les arcs rouges* ».

a. Compléter le dialogue ci-dessous entre Fodje et son professeur.

Professeur : « *Si on place un point M au hasard sur un arc rouge, quelle relation va-t-il vérifier ?* »

Fodje : « … »

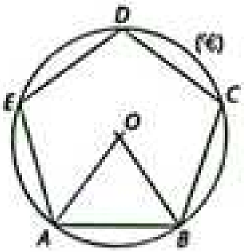
Professeur : « *Si maintenant on place le point M en A ou en B, peut-on parler d'angle* $\widehat{AMB}$ *?* »

Fodje : « … »

b. La conclusion de Fodje était-elle correcte ? Si non, préciser ce qu'il faut ajouter.

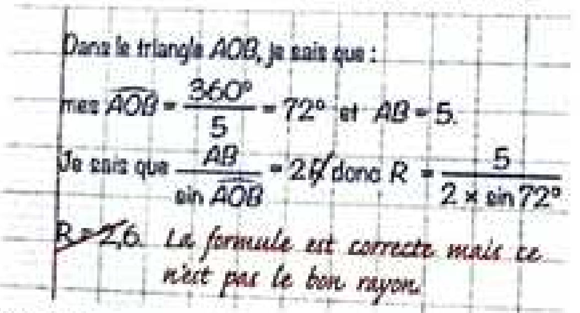
61 Déceler une erreur

ABCDE désigne le pentagone régulier ci-dessous, de côté 5, inscrit dans le cercle (𝒞) de centre *O* et de rayon *R*.



Pour calculer le rayon *R*, un élève a tenu le raisonnement suivant.

Les remarques du professeur sont indiquées en rouge.



Dans le triangle *AOB*, je sais que :

mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$ et $AB = 5$.

Je sais que $\dfrac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = 2R$ donc $R = \dfrac{5}{2 \times \sin 72°}$

~~$R \approx 2{,}6$.~~ *La formule est correcte mais ce n'est pas le bon rayon.*

Expliquer la remarque du professeur et proposer une solution correcte.

62 Les étapes d'une construction

A et *B* désignent deux points distincts du plan.

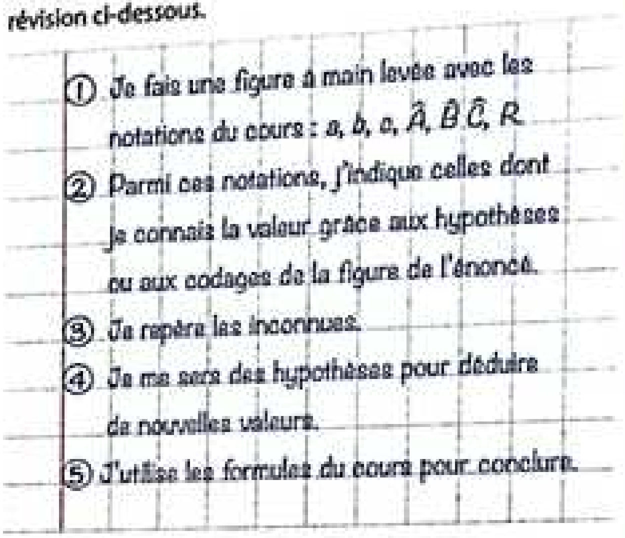
$\theta \in]0\,;180[$.

Le professeur demande à ses élèves de construire les arcs capables d'extrémités *A* et *B* et d'angle de mesure θ.

Rédiger les différentes étapes de la construction de ces arcs capables.

63 Les étapes d'une résolution

Pour s'aider dans la résolution des exercices sur les relations métriques dans les triangles, Kouma a réalisé la fiche de révision ci-dessous.



① Je fais une figure à main levée avec les notations du cours : *a*, *b*, *c*, $\hat{A}$, $\hat{B}$ $\hat{C}$, *R*.

② Parmi ces notations, j'indique celles dont je connais la valeur grâce aux hypothèses ou aux codages de la figure de l'énoncé.

③ Je repère les inconnues.

④ Je me sers des hypothèses pour déduire de nouvelles valeurs.

⑤ J'utilise les formules du cours pour conclure.

ABC désigne le triangle ci-dessous dans lequel :

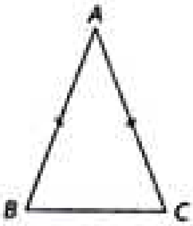
$$AB = 10 \text{ et mes } \widehat{BAC} = 40°.$$

Utiliser la fiche de Kouma pour calculer :

a. l'aire, arrondie au dixième, de ce triangle ;

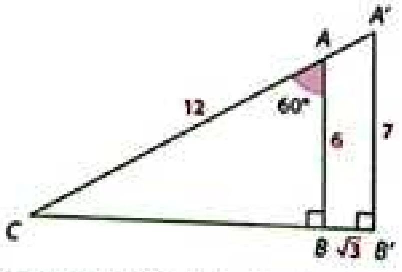
b. une valeur arrondie au dixième de *BC* ;

c. une valeur arrondie au dixième du rayon du cercle circonscrit au triangle *ABC*.



64 Quatre méthodes

ABC désigne le triangle d'aire $36\sqrt{3}$ dessiné ci-dessous.



Utiliser chacune des méthodes indiquées pour calculer *BC*.

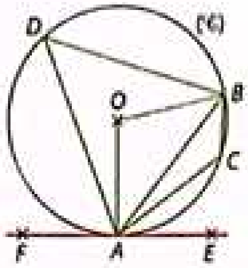
- Propriété de Pythagore ;
- Trigonométrie dans le triangle rectangle ;
- Propriété de Thalès ;
- Relations métriques dans le triangle.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

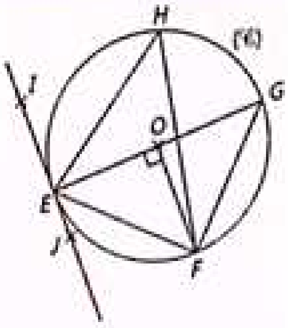
65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Sur la figure ci-contre, les points A, B, C, D sont situés sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
(EF) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$.



	vrai	faux
1. Les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{OAB}$ sont complémentaires.	☐	☐
2. Le pentagone $ADOBC$ est inscriptible dans le cercle $(\mathscr{C})$.	☐	☐
3. $\sin \widehat{FAD} = \sin \widehat{EAD}$.	☐	☐
4. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{ABC}$.	☐	☐

Avec justification

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Sur la figure ci-contre, les points E, F, G, H sont sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon $R = 4$.
(IJ) est la tangente en E à $(\mathscr{C})$.
On donne $EJ = 1,5$.



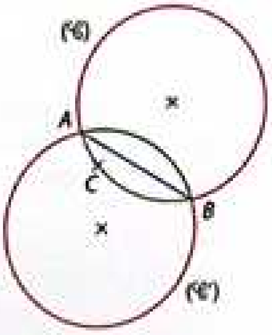
	vrai	faux
1. Les angles $\widehat{EHF}$ et $\widehat{EGF}$ sont complémentaires.	☐	☐
2. (EF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JEG}$.	☐	☐
3. Le quadrilatère $EOFJ$ est inscriptible.	☐	☐
4. L'aire du triangle EFJ est égale à 1,5.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

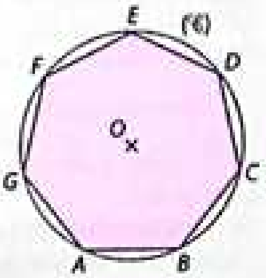
67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centres O et O' sont sécants en A et B.
C est un point de $(\mathscr{C})$ tel que mes $\widehat{ACB} = 138°$.



1. Tout point M situé sur l'arc vert vérifie :
   - a. mes $\widehat{AMB} = 42°$;
   - b. mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{ACB}$;
   - c. mes $\widehat{AMB} =$ mes $\widehat{CAB}$.
2. L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} = 138°$ est (à l'exception des points A et B) :
   a. l'arc vert ; b. les arcs rouges ; c. l'arc vert et l'arc noir.
3. Les arcs capables d'extrémités A et B et d'angle de mesure 42° sont (à l'exception des points A et B) :
   - a. les arcs vert et noir ;
   - b. les arcs rouges ;
   - c. les deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Avec justification

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Sur la figure ci-contre, $ABCDEFG$ est un heptagone régulier de côté 10 inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R.
On donne $\sin 25,5° = 0,43$ et $\sin 51° = 0,78$.



1. a. mes $\widehat{COD} = 69,5°$;
   b. mes $\widehat{COD} = 51°$;
   c. mes $\widehat{COD} = 139°$.
2. a. mes $\widehat{EAC} = 69,5°$;
   b. mes $\widehat{EAC} = 51°$;
   c. mes $\widehat{EAC} = 39°$.
3. a. $R = 12,8$; b. $R = 10,5$; c. $R = 11,6$.
4. L'aire de cet heptagone régulier est environ égale à :
   a. 367 ; b. 215 ; c. 102.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

69 Être ou ne pas être

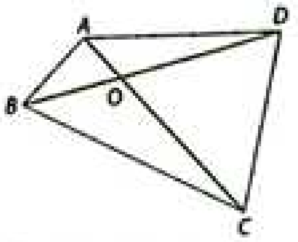
ABC désigne un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et R le rayon de son cercle circonscrit.

1. Existe-t-il un triangle *ABC* tel que :
- la mesure de deux angles est 45° ?
- a, b et c sont des nombres entiers ?
- l'aire du triangle est égale à $3\sqrt{2}$?

2. Existe-t-il un triangle *ABC* tel que :
- la mesure d'un de ses angles est 30° ?
- a, b et c sont des nombres entiers ?
- R est égal à $2\sqrt{3}$?

70 Le géomètre

Yembe est géomètre. L'un de ses clients lui a demandé de déterminer l'aire du terrain dont il vient d'hériter. Ce terrain est représenté par le quadrilatère *ABCD* ci-dessous dont les diagonales se coupent en *O*.



a. Montrer que l'aire du terrain est égale à :

$$\frac{1}{2}AC \times BD \times \sin \widehat{AOD}.$$

b. Sachant que $AC = 56$ m, $BD = 32$ m et mes $\widehat{AOD} = 110°$, déterminer une valeur approchée au m² de l'aire du terrain. (On donne : $\sin 110° = 0{,}94$.)

71 De nouvelles formules

ABC désigne un triangle et *R* le rayon de son cercle circonscrit. On note *H* le pied de la hauteur issue de *A*.

1. Démontrer que $R = \dfrac{AH}{2\sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$.

2. En déduire une formule donnant, en fonction de R, de $\widehat{A}$, de $\widehat{B}$ et de $\widehat{C}$:

a. la somme des trois hauteurs d'un triangle ;

b. le produit des trois hauteurs d'un triangle.

72 Valeur exacte de cos 15° et sin 15°

$A_1A_2A_3\dots A_{12}$ désigne un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et de centre *O*.

On note r le rayon du cercle circonscrit au triangle OA_1A_2 et O' son centre.

1. Quelle est la mesure de l'angle au centre de ce polygone ?

2. On note *H* le pied de la hauteur issue de *O* dans le triangle *OAB*.

a. Utiliser le triangle $O'A_1A_2$ pour justifier que :

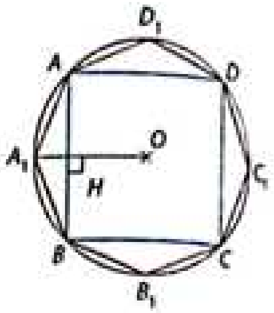
$$OH = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)A_1A_2.$$

b. En déduire que $A_1A_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2\sqrt{3}}$.

c. En déduire les valeurs de cos 15° et de sin 15°.

73 Calcul d'une valeur approchée de π

ABCD désigne un carré inscrit dans un cercle de centre *O* et de rayon 1.



1. c_0 désigne la longueur de chacun des côtés du carré *ABCD*.

Calculer c_0.

2. On note A_1, B_1, C_1, D_1 les milieux respectifs des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ et on appelle c_1 la longueur de chacun des côtés de l'octogone régulier $AA_1BB_1CC_1DD_1$.

Calculer c_1.

Vérifier que :

$$c_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_0^{\,2}}{4}}}.$$

3. On continue en prenant les milieux respectifs des arcs $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{A_1B}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, …, $\overset{\frown}{DD_1}$, $\overset{\frown}{D_1A}$ et on appelle c_2 la longueur de chacun des côtés du polygone régulier à 16 côtés obtenu.

Démontrer que :

$$c_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_1^{\,2}}{4}}}.$$

4. En continuant ainsi de suite, on obtient les nombres c_3, c_4, …, c_n où c_n est la longueur de chacun des côtés du $n^{\text{ème}}$ polygone régulier obtenu au bout de n étapes.

a. Quel est le nombre de côtés du $n^{\text{ème}}$ polygone ?

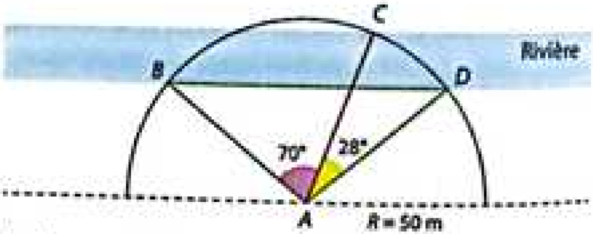
b. On note p_n son demi-périmètre.

Calculer c_n en fonction de c_{n-1} puis p_n en fonction de n et c_n.

c. Donner des valeurs approchées de $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$, puis de $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \dots, p_8$. Que constatez-vous ? Expliquer.

74 La rivière

Manyi aimerait connaître la largeur d'une rivière, schématisée ci-dessous, qui coule à proximité de sa maison. Elle a effectué quelques mesures.



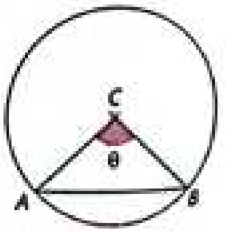
Les longueurs à calculer seront arrondies au dm.

a. Calculer les dimensions des triangles *ACD*, *ABC*, *ABD* puis *BCD*.

b. En déduire la largeur de la rivière.

75 Trois cercles

Construire les arcs capables d'un angle de mesure 2θ, d'extrémités *A* et *B*.



76 Cercles tangents

Un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O est tangent en A à un cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O'. $(\mathscr{D})$ est une droite passant par A, différente de (OO'), qui coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en M'.

1. Dans cette question, $(\mathscr{C}')$ est tangent intérieurement à $(\mathscr{C})$.

a. Faire une figure.

b. Quelle est la nature des triangles OAM et $O'AM'$?

c. Démontrer que la tangente en M à $(\mathscr{C})$ est parallèle à la tangente en M' à $(\mathscr{C}')$.

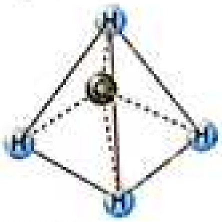
2. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois-ci que $(\mathscr{C}')$ est tangent extérieurement à $(\mathscr{C})$.

3. Utiliser la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles pour proposer une nouvelle démonstration aux questions **1. c.** et **2. c.**

77 En chimie

La molécule de méthane (CH_4) est constituée d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène.

Elle prend la forme d'un tétraèdre régulier (dont toutes les arêtes ont même longueur) schématisé ci-dessous.



Longueur des liaisons entre atomes
carbone – hydrogène 106 pm
hydrogène – hydrogène 174 pm
Rappel : 1 pm = 10^{-12} m

a. Calculer la mesure arrondie au degré d'un angle $\widehat{HCH}$ (l'angle $\widehat{HCH}$ est obtus).

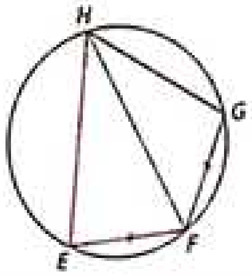
b. En déduire la hauteur, arrondie au dixième de pm, d'une molécule de méthane.

Info

Le méthane est un gaz naturel contribuant au réchauffement climatique de la Terre par effet de serre. On estime qu'une vache produit environ 90 kg de méthane par an.

78 La bonne mesure

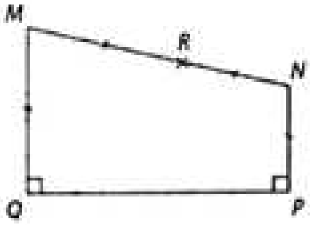
Le quadrilatère $EFGH$ inscriptible ci-dessous est tel que $EF = FG$. On note α la mesure de $\widehat{EFG}$.



Quelle valeur faut-il attribuer à α pour que mes $\widehat{FHG} = 32°$?

79 Reconnaître une figure simple

Sur le trapèze rectangle $MNPQ$ ci-dessous, le point R est tel que $R \in [MN]$; $MR = MQ$ et $NR = NP$.



On cherche à montrer que le triangle PQR est rectangle en R.

1. a. Placer trois points alignés M, R et N dans cet ordre. Construire le cercle $(\mathscr{C})$ de centre M et de rayon MR ; puis le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre N et de rayon NR.

b. Compléter la figure pour retrouver le trapèze rectangle $MNPQ$. Que représente la droite (QP) pour ces cercles ?

2. a. Justifier que les angles $\widehat{QMN}$ et $\widehat{MNP}$ sont supplémentaires.

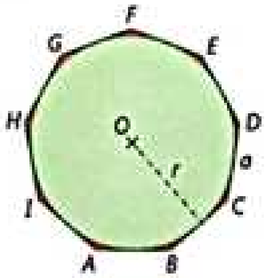
b. Exprimer mes $\widehat{RQP}$ en fonction de mes $\widehat{QMN}$.

c. Exprimer mes $\widehat{RPQ}$ en fonction de mes $\widehat{MNP}$.

d. En déduire que le triangle PQR est rectangle en R.

80 L'apothème du nonagone

Le polygone régulier ci-dessous a pour côté a. On note r le rayon de son cercle inscrit.



a. Exprimer à l'aide de a :
- le rayon r ;
- l'aire du polygone.

On donne tan 40° ≈ 0,36.

b. En déduire l'aire de la partie colorée en rouge à l'aide de a.

Vocabulaire

Un **nonagone** est un polygone à neuf côtés.
L'**apothème** d'un polygone régulier est la longueur du rayon de son cercle inscrit.

Exercices d'approfondissement

11 Pentagone régulier

1. Construction

A et A' désignent deux points distincts du plan.

a. Tracer le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de diamètre $[AA']$.
On note A'' l'un des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la médiatrice de $[AA']$. On note M le point d'intersection de $[OA]$ et du cercle de centre le milieu I de $[OA']$ et de rayon IA''.

b. Placer les points A'', I et M.

c. Construire les points B et E d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la perpendiculaire à (OA) passant par le milieu J de $[OM]$.

d. Construire les points C et D de $(\mathscr{C})$ tels que $AB = BC = CD$.

2. Justification de la construction

Pour simplifier les calculs, on pose $OA = 1$.

On admet que $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

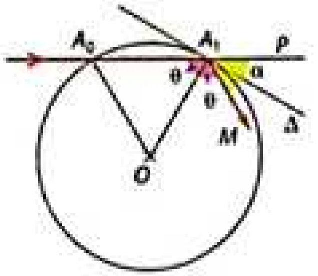
a. Démontrer que $OJ = \cos \widehat{AOB}$.

b. Calculer IA'' ; en déduire OJ.

c. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?
En déduire la nature du polygone $ABCDE$.

12 Lois de Snell-Descartes

Un rayon lumineux entre dans un cercle en un point A_0 et se réfléchit en un autre point A_1 comme s'il y avait en A_1 un miroir plan positionné suivant la tangente en A_1 au cercle. D'après la loi de réflexion, on sait que l'angle d'incidence $\widehat{A_0A_1O}$ a la même mesure que l'angle de réflexion $\widehat{OA_1M}$.



1. a. Démontrer que l'angle d'incidence est égal à $\widehat{OA_0A_1}$
On appellera désormais θ la mesure en degrés de cet angle.

b. Calculer en fonction de θ la mesure α en degrés de l'angle de déviation $\widehat{PA_1M}$ (voir figure ci-dessus).

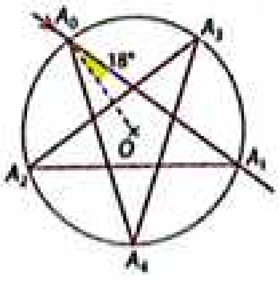
2. Le rayon de lumière après s'être réfléchi en A_1 va continuer à se réfléchir en un point A_2, puis en d'autres points A_3, A_4, etc.
Il va ainsi décrire une ligne brisée.

a. Démontrer que cette ligne brisée est constituée de segments de même longueur.

b. Démontrer que si θ = 54°, alors le rayon de lumière décrit un pentagone régulier et ressort en A_0.

c. Démontrer que si θ = 18°, alors le rayon de lumière suit la trajectoire indiquée sur la figure ci-dessous.

3. Dans le cas où θ = 54°, le rayon de lumière a fait une seule fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier à 5 côtés avant de ressortir. Calculer en fonction de n la valeur de θ pour laquelle le rayon de lumière fait une seule fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier à n côtés.



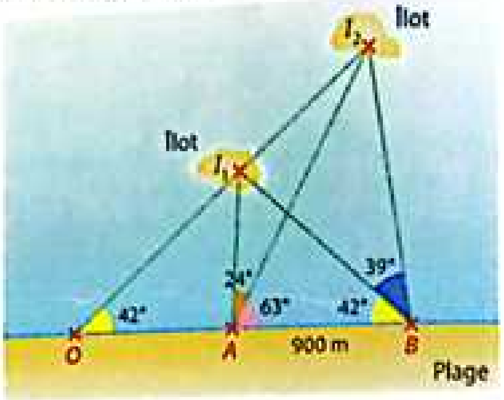
4. Dans le cas où θ = 18°, le rayon de lumière a fait deux fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier étoilé à
5 côtés avant de ressortir.
Démontrer que pour que le rayon de lumière fasse deux fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier étoilé à n
il faut que n soit impair.
côtés, il faut que n soit impair.
Calculer en fonction de n la valeur de θ correspondante.

D'après la revue *Tangente*

> [illegible]
>
> Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement d'un rayon lumineux à l'interface entre deux milieux différents.

13 Une nageuse exceptionnelle

Sofia souhaite relier à la nage deux îlots situés à quelques encablures de la plage.
Afin de préparer sa nage, elle souhaite connaître la distance entre les deux îlots.
Les mesures prises par Sofia sont indiquées sur le dessin.
Les distances à calculer seront arrondies au m.



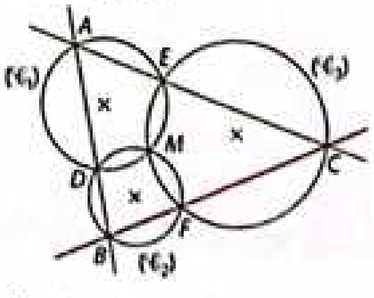
a. Calculer les distances AI_1 et AI_2.

b. En déduire la distance qui sépare les deux îlots.

c. Combien de km Sofia aura-t-elle parcouru à la nage si elle effectue le trajet $A - I_1 - I_2 - B$?

14 Le théorème des trois cercles

$(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ désignent trois cercles se rencontrant en un point M. On note, comme ci-dessous, D, E et F les autres points d'intersection des cercles.
A désigne un point de $(\mathscr{C}_1)$. La droite (AD) recoupe $(\mathscr{C}_2)$ en B et la droite (AE) recoupe $(\mathscr{C}_3)$ en C.



Montrer que les points B, F et C sont alignés.

> **Aide**
>
> On pourra s'aider de quadrilatères judicieusement choisis.

2

Angles orientés et trigonométrie

À l'origine de la trigonométrie, Ptolémée (90-168) était également géographe. La carte ci-dessous illustre la géographie du monde selon Ptolémée. Le système du repérage par latitudes et longitudes est encore utilisé de nos jours.

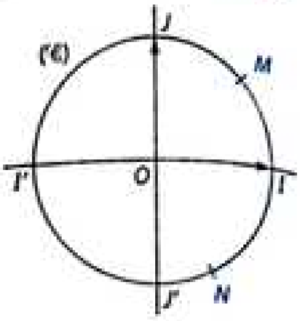
Les objectifs du chapitre

- Convertir les degrés en radians et inversement.
- Manipuler les angles orientés.
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté.
- Connaître les lignes trigonométriques : cosinus, sinus, tangente.
- Connaître les propriétés des angles orientés.

Un astrolabe est constitué d'un disque gradué en degrés et d'une sorte d'aiguille pivotante fixée en son centre, l'alidade. En alignant la mesure 0° sur l'horizon et en pointant l'alidade vers le soleil ou une étoile connue, les marins pouvaient lire la position de l'étoile sur le disque gradué et en déduire leur latitude.

1 Une nouvelle unité de mesure d'un angle

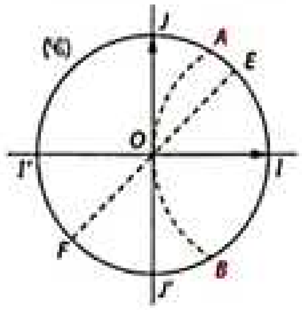
Cours 1a



Dans le repère orthonormé (O, I, J), le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 a été construit.
On définit une nouvelle unité de mesure des angles, appelée radian, afin que, sur le cercle $(\mathscr{C})$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{MN}$ et l'angle au centre $\widehat{MON}$ qui l'intercepte soient mesurés par le même nombre.

1 **a.** Quelle est la longueur :
- du cercle $(\mathscr{C})$? • de l'arc $\widehat{II'}$? • de l'arc $\widehat{IJ}$?

b. En déduire la mesure en radians des angles $\widehat{IOI'}$ et $\widehat{IOJ}$.



2 Sur le cercle $(\mathscr{C})$ représenté ci-contre, de centre O et de rayon 1, le cercle de centre I et de rayon 1 coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points A et B, tandis que la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ le coupe en deux points E et F.

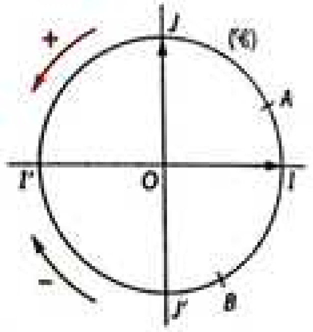
a. Déterminer la longueur des arcs $\widehat{IE}$, $\widehat{IF}$ et $\widehat{EF}$; en déduire une mesure en radians des angles $\widehat{IOE}$, $\widehat{IOF}$ et $\widehat{EOF}$.

b. Quelle est la nature du triangle OAI ? Déterminer la longueur des arcs $\widehat{IA}$ et $\widehat{AB}$.

2 Angles orientés et mesure principale

Cours 1b, 1c

Dans un repère orthonormé (O, I, J), le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un sens de parcours positif – dit direct – et négatif – dit indirect – est appelé cercle trigonométrique.



1 **a.** Tracer un cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ dans un repère (O, I, J).

b. Placer deux points A et B, distincts de I et J, sur le cercle $(\mathscr{C})$.
Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ définit un angle orienté, noté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.
On note mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ une des mesures en radians, de cet angle orienté ; elle est égale à la longueur de l'arc orienté $\widehat{AB}$.

c. Reproduire et compléter : mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) = \ldots$.

2 **a.** Placer sur le cercle $(\mathscr{C})$ les points E et F tels que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \text{et} \quad \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}}) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

b. M et N désignent deux points mobiles du cercle $(\mathscr{C})$.
Partant du point I, M parcourt $(\mathscr{C})$ dans le sens direct et N dans le sens indirect. Lorsque le point revient à sa position initiale, on dit qu'il a terminé son premier passage, et ainsi de suite… Lorsque le point N parcourt $(\mathscr{C})$ dans le sens indirect, la « longueur » de l'arc orienté $\widehat{IN}$ est notée négativement.
Reproduire et compléter le tableau suivant jusqu'au 3ᵉ passage.

	« Longueur » de l'arc orienté $\widehat{IM}$	mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$	« Longueur » de l'arc orienté $\widehat{IN}$	mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$
Départ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
1ᵉʳ passage	$\frac{\pi}{6}+2\pi$		$-\frac{\pi}{4}-2\pi$	
3ᵉ passage				

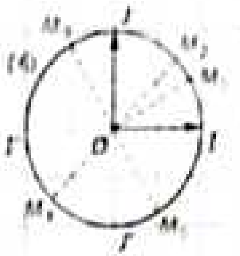
Vocabulaire
- La mesure principale d'un angle orienté est la mesure appartenant à $]-\pi\,;\pi]$.
Les autres mesures de l'angle sont de la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c. Utiliser le cadre vocabulaire ci-contre pour donner la mesure principale :
• de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$; • de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$.

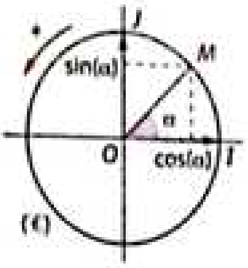
3 Cosinus et sinus

Cours 2a, 2b

1 Sur le cercle trigonométrique représenté ci-contre, plusieurs points ont été placés. Reproduire et compléter le tableau.



Point M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	I'	J	J'
Abscisse								
Ordonnée								
Mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$								



2 Un point M a été placé sur le cercle trigonométrique représenté ci-contre.

α désigne une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

Par définition : - le **cosinus de α**, noté $\cos(\alpha)$, est l'abscisse de M ;
- le **sinus de α**, noté $\sin(\alpha)$, est l'ordonnée de M.

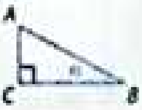
Mettre la calculatrice en mode radians (voir p. 267 et 269), puis reproduire et compléter le tableau suivant.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$									
$\sin(\alpha)$									

Rappel

▶ Lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, les définitions du cosinus et du sinus de α coïncident avec celles vues en classe de 3ᵉ : Dans le triangle ABC rectangle en C,

$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AB}$ et $\sin(\alpha) = \frac{AC}{AB}$.



3 Comparer les résultats obtenus dans les deux tableaux. Expliquer.

4 Tangente

Cours 2c

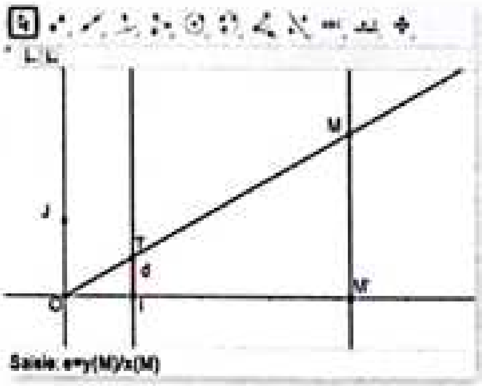
1 Conjecturer avec GeoGebra

a. Ouvrir une feuille GeoGebra et représenter le cercle trigonométrique.

b. Placer les points I et J de coordonnées $(1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$, puis un point M tel que mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c. Tracer la perpendiculaire à la droite (OI) passant par M : elle coupe (OI) en M' ; puis la parallèle à la droite (MM') passant par I : elle coupe $[OM]$ en T.

d. Tracer le segment $[IT]$ et créer, comme indiqué, la valeur $\frac{y_M}{x_M}$ dans le champ de saisie en bas de l'écran, où x_M et y_M sont les coordonnées de M.



Saisie: a=y(M)/x(M)

e. Cliquer sur l'icône ↖ et déplacer le point M.
Sur la fenêtre algèbre à gauche de l'écran, observer les valeurs IT et $\frac{y_M}{x_M}$.

f. On pose $\alpha = $ mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.
Quelle relation semble relier $\tan(\alpha)$ et IT ?

Vocabulaire

▶ Pour $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, la tangente de α est le nombre noté $\tan(\alpha)$, égal à $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

2 Démontrer une conjecture

M désigne un point du cercle trigonométrique tel que mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Appliquer le théorème de Thalès pour montrer que $MM' = IT \times OM'$.

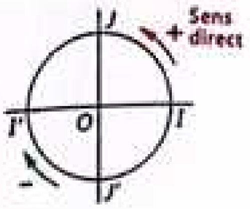
b. En se plaçant dans le triangle OMM' rectangle en M', montrer que $\tan(\alpha) = \frac{MM'}{OM'}$ où $\alpha = $ mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

c. En déduire que $\tan(\alpha) = IT$.

2 Cours

1 Angles orientés

a Cercle trigonométrique et radians



Définitions

• Un **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le **sens direct** : le sens inverse des aiguilles d'une montre.

• Si M et N désignent deux points du cercle trigonométrique, la mesure en **radians** de l'angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MN}$. On la note mes $\widehat{MON}$.

Correspondance : Degrés-Radians

On passe des mesures en degrés, vues au collège, aux mesures en radians grâce au tableau de proportionnalité ci-contre.

$\times\frac{\pi}{180}$

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

$\times\frac{180}{\pi}$

Propriété

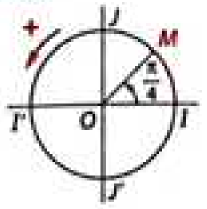
M et N désignent deux points du cercle trigonométrique.

Si a est une mesure, en radians, égale à la longueur de l'arc orienté $\widehat{MN}$, alors toutes les mesures associées à cet arc sont de la forme :

$$a + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On note : mes $\widehat{MON} = a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou mes $\widehat{MON} = a\,[2\pi]$ où $[2\pi]$ se lit « modulo 2π ».

Exemple



mes $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}\,[2\pi]$.

Remarque Il existe une infinité de mesures pour un même arc orienté : elles sont définies à un nombre de tours près dans le sens direct ou indirect.

b Angle orienté de deux vecteurs

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls et $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ où M et N désignent deux points du plan. Les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle $(\mathscr{C})$ sont notés M' et N'.

On appelle **mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ toute mesure associée à l'arc orienté $\widehat{M'N'}$.

Remarques

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0\,[2\pi]$.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi\,[2\pi]$.

• Les angles $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ sont dits opposés et mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -mes(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})\,[2\pi]$.

c Mesure principale d'un angle orienté

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ qui appartient à $]-\pi\,;\pi]$ est appelée **mesure principale** de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

d Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ + mes$(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ = mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$.

2 Savoir-faire

1 Conversion radians-degrés

a. Convertir, en radians, les mesures d'angles suivantes : 150° ; 60° ; 10° ; 12°.

b. Convertir, en degrés, les mesures d'angles suivantes : $\frac{\pi}{9}$ rad ; $\frac{3\pi}{8}$ rad ; $\frac{\pi}{20}$ rad ; $\frac{7\pi}{2}$ rad.

Solution commentée

a.

Degrés	150	60	10	12
Radians	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{15}$

$\times \frac{\pi}{180}$

b.

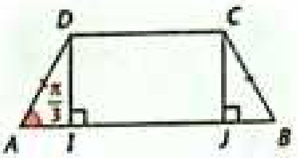
Degrés	20	67,5	630	9
Radians	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{\pi}{20}$

$\times \frac{180}{\pi}$

Méthode

Utiliser la proportionnalité dans les tableaux ci-contre (voir le cours 1. a.).

2 Manipuler des angles orientés



Observer le trapèze isocèle ci-contre.
Donner une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

Solution commentée

• mes $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI}) = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ car dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à π.

• mes $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ = mes $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI})$ + mes $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC})$ (relation de Chasles)

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi].$$

Méthode

- Utiliser les résultats de géométrie élémentaire.
- Être attentif au sens direct ou indirect.
- Utiliser les propriétés des angles orientés.

3 Déterminer la mesure principale d'un angle

Déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est $\frac{35\pi}{3}$ rad.

Solution commentée

Méthode 1 On cherche $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha = \frac{35\pi}{3} + 2k\pi$.

$-\pi < \frac{35\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{38\pi}{3} < 2k\pi \leqslant -\frac{32\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{19}{3} < k \leqslant -\frac{16}{3}$.

Or $-\frac{19}{3} \approx -6{,}3$ et $-\frac{16}{3} \approx -5{,}3$, donc $k = -6$. Ainsi, $\alpha = \frac{35\pi}{3} - 12\pi = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Méthode 2 On effectue la division euclidienne de 35 par 6 : $35 = 6 \times 5 + 5$,

donc $\frac{35\pi}{3} = 5 \times \frac{6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 5 \times 2\pi + \frac{5\pi}{3}$, donc $\frac{35\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\,[2\pi]$. Or $\frac{5\pi}{3} \notin]-\pi\,;\pi]$, mais $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc $\frac{35\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. La mesure principale de $\frac{35\pi}{3}$ est donc $-\frac{\pi}{3}$.

Méthode

Pour déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure x est connue, on peut utiliser l'une des méthodes ci-contre.

S'exercer

4 Convertir les mesures suivantes en radians ou en degrés.

a. 36° ; b. 105° ; c. $-\frac{4\pi}{5}$ rad ; d. $\frac{5\pi}{4}$ rad.

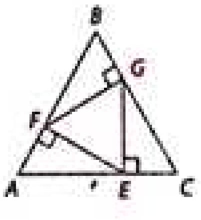
5 Déterminer la mesure principale des mesures suivantes.

a. $\frac{47\pi}{6}$ rad ; b. $-\frac{22\pi}{3}$ rad ; c. $\frac{15\pi}{4}$ rad ; d. $\frac{20\pi}{8}$ rad.

6 *ABC* et *EFG* désignent des triangles équilatéraux.

Déterminer une mesure, en radians, des angles :

• $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG})$; • $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA})$; • $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE})$.



2 Trigonométrie

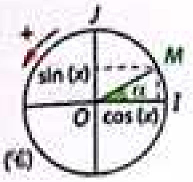
a Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définitions

Dans un repère (O, I, J) orthonormé, $(\mathscr{C})$ désigne le cercle trigonométrique.

x est un nombre réel et M est l'unique point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x\ [2\pi]$.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M ;
- Le **sinus** de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M.



Propriétés

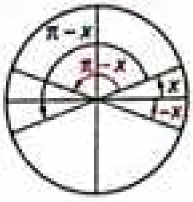
Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif k :

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

b Angles associés

Propriétés

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$



- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Exemple

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

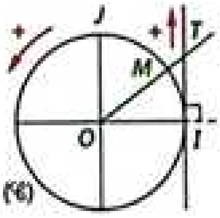
c Tangente d'un angle orienté

Définition

Dans un repère orthonormé (O, I, J), $(\mathscr{C})$ désigne le cercle trigonométrique. x est la mesure principale d'un angle orienté tel que : $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$. La **tangente** de x, notée $\tan(x)$, est le nombre réel égal à $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Illustration géométrique

M désigne le point de $(\mathscr{C})$ tel que $x = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Alors $\tan(x) = \overline{IT}$ où $\overline{IT}$ désigne la mesure algébrique de IT.



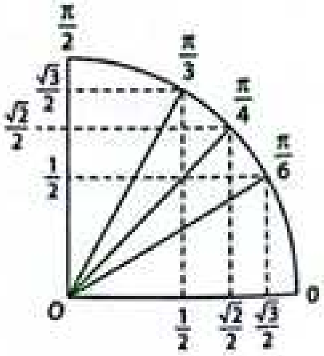
Remarque

Des propriétés sur les angles associés, on peut déduire facilement des propriétés pour la tangente.

Exemple x désigne un nombre réel : $\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$.

d Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0



7 Établir le lien entre les coordonnées, le cosinus et le sinus

a. **Déterminer les coordonnées du point M dans le repère orthonormé (O, I, J) sachant que $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ et $OM = 1$.**

b. **Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$ où $N = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $ON = 1$.**

Solution commentée

M et N appartiennent au cercle trigonométrique car $OM = ON = 1$.

a. Si α désigne une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$, les coordonnées de M sont $(\cos\alpha ; \sin\alpha)$ soit $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) ; \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b. On note $\beta = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$; $\beta \in]-\pi ; \pi]$.

On sait que $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\beta = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Méthode

Utiliser la définition du cours : tout point M du cercle trigonométrique tel que $\alpha = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ dans le repère orthonormé (O, I, J) a pour coordonnées $(\cos(\alpha) ; \sin(\alpha))$.

8 Utiliser les angles associés

x désigne un nombre réel.
Simplifier l'expression : $A(x) = \cos(\pi + x) - 2\cos(-x) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

Solution commentée

$A(x) = -\cos(x) - 2\cos(x) + 3\cos(x) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$A(x) = -\cos(x)$.

Méthode

Utiliser les propriétés des angles associés pour simplifier étape par étape une expression.

9 Déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle

x est la mesure d'un angle telle que $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.

Solution commentée

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

$\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{11}}{4}$ ou $\cos(x) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

2. En outre, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$

donc $\cos(x) \leqslant 0$.

3. Ainsi, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Méthode

1. Utiliser la formule :
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. Utiliser l'énoncé pour déduire le signe de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

3. Conclure.

S'exercer

10 Simplifier $A(x) = 5\cos(x - 2\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

11 Simplifier $B(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x)$.

12 x désigne un nombre réel appartenant à $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et tel que $\cos(x) = -\frac{3}{7}$.

Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$ et de $\tan(x)$.

Exercices d'entraînement

Conversion

Réponses rapides

13 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. Les degrés et les radians sont proportionnels.

b. Le radian est égal à π.

c. Le sens direct est celui des aiguilles d'une montre.

d. Un angle droit mesure, en radians, $\frac{\pi}{2}$.

14 Indiquer quelle est l'affirmation vraie parmi les quatre proposées.

a. Pour un angle orienté donné, combien existe-t-il de mesure principale ?

- Une infinité ; • une ; • cela dépend ; • deux.

b. Un tour de cercle trigonométrique mesure en radians :

- 4π ; • π ; • 2π ; • 1.

c. Un angle orienté dans le sens indirect dont la mesure en degrés est 60° a pour mesure en radians :

- $\frac{\pi}{6}$; • $-\frac{\pi}{6}$; • $\frac{\pi}{3}$; • $-\frac{\pi}{3}$.

15 Reproduire et compléter le tableau suivant.

Degrés	25			80	120		240
Radians		$\frac{\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{8}$			$\frac{8\pi}{3}$	

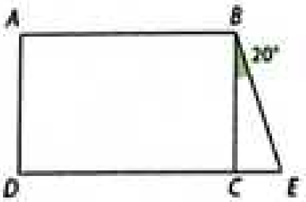
16 *ABC* désigne un triangle isocèle tel que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 100°.$$

Calculer les sommes :

- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$;
- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$.

17 *ABCD* désigne un rectangle. Les points *D*, *C* et *E* sont alignés.



Déterminer une mesure en radians des angles :

- $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}})$.

18 a. Construire un triangle *EFG* isocèle en *F* tel que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GF}}) = \frac{\pi}{6}\text{ rad}.$$

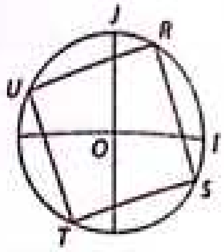
b. Déterminer une mesure en radians des angles :

- $(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}})$.

Angles orientés et mesure principale

Réponses rapides

19 Sur le cercle trigonométrique de centre *O* ci-contre, le point *R* est tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et les points *U*, *S*, *T* sont tels que *RUTS* est un carré.



Reproduire et compléter :

a. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OU}}) = \dots$;

b. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OS}}) = \dots$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OT}}) = \dots$;

d. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OT}}) = \dots$.

20 Indiquer quelle est l'affirmation vraie parmi les quatre proposées.

a. Toute mesure principale appartient à :

- $[0\,;\pi]$; • $]0\,;2\pi]$; • $]-\pi\,;\pi]$; • $[\pi\,;2\pi[$.

b. Deux angles de mesures principales α et β telles que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ sont :

- opposés ; • complémentaires ; • différents de plusieurs tours ; • supplémentaires.

c. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls, alors :

- $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \text{mes}(\widehat{\vec{v},\vec{u}})\,[2\pi]$;
- $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = \pi\,[\pi]$;
- $\text{mes}(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}) = \text{mes}(\widehat{\vec{v},\vec{u}})\,[2\pi]$;
- $\pi - \text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \text{mes}(\widehat{\vec{v},-\vec{u}})\,[2\pi]$.

21 a. Construire un cercle trigonométrique de centre *O*. *I* désigne le point de ce cercle de coordonnées (1 ; 0).

b. Placer sur ce cercle les points A_i tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA_i}})$ est égale, pour *i* allant de 1 à 8, à :

$$-\frac{\pi}{2}\,;\ \frac{7\pi}{3}\,;\ \frac{5\pi}{6}\,;\ \frac{9\pi}{4}\,;\ -\frac{23\pi}{6}\,;\ 11\pi\,;\ \frac{17\pi}{3}\ \text{et}\ -\frac{7\pi}{4}.$$

Pour les exercices 22 à 25, donner la mesure principale en radians.

22 a. $\frac{43\pi}{2}$; b. $-\frac{15\pi}{2}$; c. $\frac{109\pi}{2}$; d. $\frac{51\pi}{2}$.

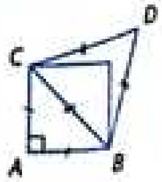
23 a. $-\frac{49\pi}{4}$; b. $\frac{23\pi}{4}$; c. $\frac{75\pi}{4}$; d. $-\frac{36\pi}{4}$.

24 a. $\frac{19\pi}{3}$; b. $\frac{62\pi}{3}$; c. $-\frac{35\pi}{3}$; d. $-\frac{50\pi}{3}$.

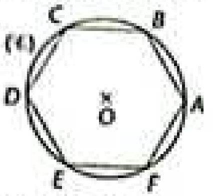
25 a. $\frac{25\pi}{6}$; b. $-\frac{37\pi}{6}$; c. $\frac{41\pi}{6}$; d. $-\frac{14\pi}{6}$.

26 Observer la figure ci-contre. Déterminer la mesure principale des angles :

- $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$.



27 *ABCDEF* désigne l'hexagone régulier de centre *O* ci-dessous. $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique de centre *O* passant par *A*.

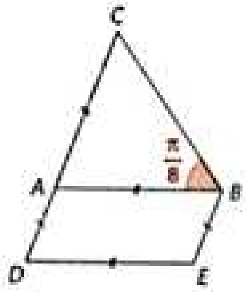


Déterminer la mesure principale des angles suivants :

- $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}})$;
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ED}})$.

28 Sur la figure ci-contre, les points *A*, *C* et *D* sont alignés et *ABED* est un parallélogramme. Déterminer la mesure principale des angles suivants :

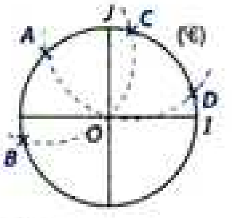
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$;
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}})$.



29 Sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ ci-contre, le point *A* est tel que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi].$$

Le cercle de centre *A* passant par *O* coupe $(\mathscr{C})$ en *C* et *B*. Le cercle de centre *C* passant par *A* recoupe $(\mathscr{C})$ en *D*.



Déterminer la mesure principale des angles :

- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$; • $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$.

Cosinus – Sinus – Coordonnées

Réponses rapides

30 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. Les nombres $\frac{\pi}{9}$ et $-\frac{\pi}{9}$ ont des cosinus opposés.

b. Les nombres $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ ont le même sinus.

c. Les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ ont des sinus opposés.

d. Les nombres $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{9\pi}{8}$ ont le même cosinus.

31 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. Si $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{6}$.

b. Si $x = \frac{\pi}{3}$, alors $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Si $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.

d. Si $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Pour les exercices 32 à 35, déterminer la mesure principale associée aux mesures *x* indiquées. En déduire la valeur exacte de cos (*x*) et sin (*x*).

32 **a.** $x = \frac{15\pi}{4}$; **b.** $x = -\frac{21\pi}{4}$; **c.** $x = \frac{27\pi}{4}$.

33 **a.** $x = \frac{31\pi}{6}$; **b.** $x = -\frac{51\pi}{6}$; **c.** $x = \frac{45\pi}{6}$.

34 **a.** $x = \frac{8\pi}{3}$; **b.** $x = \frac{112\pi}{3}$; **c.** $x = -\frac{70\pi}{3}$.

35 **a.** $x = \frac{11\pi}{2}$; **b.** $x = -\frac{81\pi}{2}$; **c.** $x = -\frac{501\pi}{2}$.

Pour les exercices 36 et 37, le point *M* appartient au cercle trigonométrique de centre *O*, l'origine du repère orthonormé (*O*, *I*, *J*).

36 Dans chacun des cas, donner la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$:

a. $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$; **b.** $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

c. $M\left(\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; **d.** $M(-1 ; 0)$.

37 Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du point *M*.

a. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{7\pi}{4}[2\pi]$; **b.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = -\frac{25\pi}{3}[2\pi]$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{29\pi}{6}[2\pi]$; **d.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = -\frac{17\pi}{6}[2\pi]$.

38 Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure *x*, en radians, dans les cas suivants.

a. $\cos(x) = 0{,}3$; **b.** $\sin(x) = \frac{3}{5}$;

c. $\cos(x) = -0{,}7$; **d.** $\sin(x) = -\frac{5}{6}$.

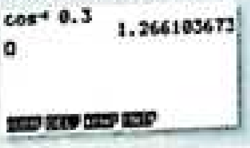
Aide

▸ Mettre la calculatrice en mode radian (selon le modèle, on pourra se reporter aux pages 267 et 269 en fin de manuel).

Puis :

- Casio

Taper SHIFT cos 0,3 EXE



```
cos⁻¹ 0.3
              1.266103673
0
```

- Texas Instrument

Taper 2ND cos 0,3 ENTRER

```
Arccos(0.3
      1.266103673
```

39 Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la mesure *x*, en radians, dans les cas suivants.

a. $\cos(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{5}$; **b.** $\sin(x) = \frac{2-\sqrt{5}}{5}$; **c.** $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{7}$;

d. $\sin(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{10}$; **e.** $\tan(x) = -0{,}4$; **f.** $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

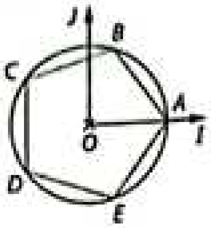
Exercices d'entraînement

40 Dans le repère orthonormé (O, I, J), on a représenté un pentagone régulier $ABCDE$ tel que :

$$A \in (OI) \text{ et } OA = a \text{ avec } a > 0.$$

a. Déterminer la mesure principale des angles :
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$;
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$;
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$;
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}})$.

b. En déduire les coordonnées des cinq sommets du pentagone en fonction de a.



41 Dans le repère orthonormé (O, I, J), A désigne le point de coordonnées $(1 ; 1)$ et B le point d'abscisse 2 tel que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi].$$

Déterminer les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

Relations trigonométriques

Réponses rapides

42 Dans chacun des cas, deux mesures α et β sont données. Dire s'il existe une relation du type $\alpha = \pi - \beta$, $\alpha = \pi + \beta$ ou $\alpha = -\beta$.

a. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$; **b.** $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; **c.** $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$; **d.** $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{9\pi}{2}$.

Pour les exercices 43 et 44, préciser la seule réponse exacte parmi les trois propositions. Justifier.

43 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ est égal à :

- 0 ; • $2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$; • $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$.

b. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est égal à :

- $\sqrt{2}$; • $-\sqrt{2}$; • 0.

44 x désigne un nombre réel.

a. $\cos(\pi - x) + \cos(-x)$ est égal à :

- $2\cos(x)$; • 0 ; • $-2\cos(x)$.

b. $\sin(-x) + \sin(\pi - x)$ est égal à :

- 0 ; • $2\sin(x)$; • $-2\sin(x)$.

45 x désigne un nombre réel tel que $\tan(x)$ soit défini. Calculer $\tan(x)$ dans chaque cas.

a. $\cos(x) = -2\sin(x)$; **b.** $\cos(x) = \frac{1}{7}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{48}}{7}$.

Pour les exercices 46 à 48, simplifier au maximum chaque expression.

46 x désigne un nombre réel.

a. $\cos(2\pi - x) + 2\cos(\pi + x) + 3\cos(-x)$;

b. $\sin(3\pi - x) - \sin(\pi + x) + 5\sin(16\pi + x)$;

c. $\sin(x + 7\pi) - 3\cos(x + 5\pi) - 2\cos(x - 4\pi)$.

47 x désigne un nombre réel.

a. $3\cos(x) + 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x)$;

b. $2\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$.

48 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$;

b. $\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{21\pi}{11}\right)$;

c. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

49 Calculer les expressions suivantes.

a. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$;

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$;

c. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

50 x désigne un nombre réel tel que $\cos(x) \neq 0$. Exprimer chaque expression en fonction de $\tan(x)$.

a. $\tan(-x)$; **b.** $\tan(\pi - x)$; **c.** $\tan(\pi + x)$.

51 n désigne un nombre entier relatif. Déterminer le cosinus et le sinus des angles dont les mesures sont indiquées.

a. $2n\pi$; **b.** $(2n+1)\pi$; **c.** $n\pi$; **d.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$;

e. $\frac{-\pi}{2}+2n\pi$; **f.** $\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi$; **g.** $\frac{-\pi}{2}+(2n+1)\pi$.

52 x désigne la mesure principale d'un angle orienté. Déterminer, dans chaque cas, la valeur de x.

a. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) < 0$; **b.** $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x) > 0$.

Aide

▸ Lorsque l'on connaît $\sin(x)$ ou $\cos(x)$, pour déterminer $\cos(x)$ ou $\sin(x)$, on utilise la formule : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

53 **a.** Déterminer la valeur de $\cos(x)$ pour :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

b. Déterminer la valeur de $\sin(x)$ pour :

$$x \in [-\pi ; 0] \text{ et } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

54 Déterminer la (les) valeur(s) possible(s) de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ dans chaque cas.

a. $\cos(x) = 0{,}6$; **b.** $\sin(x) = -0{,}2$; **c.** $\cos(x) = -\frac{4}{9}$.

55 Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Faire le point

56 Une mesure principale, deux méthodes

Utiliser deux méthodes différentes pour déterminer la mesure principale de $\frac{107\pi}{6}$ et de $-\frac{83\pi}{4}$.

57 Valeurs exactes

Un professeur demande à ses élèves de calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

Voici le raisonnement de deux élèves.

Bintou : « Si on demande les valeurs exactes, c'est qu'il s'agit de valeurs remarquables. »

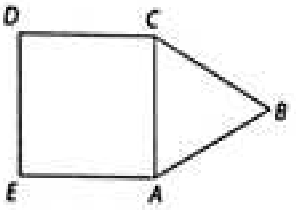
Acha : « Il faut donc retrouver des mesures remarquables. »

Bintou : « Commençons par déterminer la mesure principale. »

Utiliser le raisonnement de Bintou et Acha pour répondre à la question posée par le professeur.

58 Histoire d'angles orientés

Sur la figure ci-dessous, *ACDE* désigne un carré et *ABC* un triangle équilatéral.



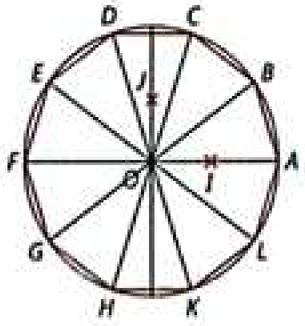
Voici ce que Joseph a noté sur son brouillon :

- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$;
- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{BA}}) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

Ces notes sont-elles correctes ? Quelle erreur Joseph a-t-il commis ?

59 Un décagone régulier

Dans le repère orthonormé (*O*, *I*, *J*), *ABCDEFGHKL* désigne un décagone régulier de centre *O*.



Utiliser la relation de Chasles et les propriétés relatives au décagone, pour reproduire et compléter les pointillés.

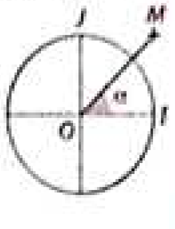
a. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \ldots$; **b.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}) = \ldots$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}}) = \ldots$; **d.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FE}}) = \ldots$.

60 Lien avec les coordonnées

Dans le repère orthonormé (*O*, *I*, *J*) le cercle trigonométrique a été tracé. *M* désigne un point quelconque du plan.

On pose $r = OM$ et $\alpha = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$.



1. Reproduire et compléter les pointillés à l'aide de *r*, cos (*α*) et sin (*α*).

a. l'abscisse de *M* est égale à … ;

b. l'ordonnée de *M* est égale à … .

2. Applications

a. *P* désigne le point tel que :

$$OP = 3 \text{ et } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}}) = \frac{\pi}{5}[2\pi].$$

Déterminer les coordonnées du point *P*.

b. *Q* désigne le point tel que :

$$OQ = 0{,}2 \text{ et } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OQ}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Déterminer les coordonnées du point *Q*.

c. *R* désigne le point tel que :

$$OR = 1 \text{ et de coordonnées } \left(\frac{1}{7} ; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

Déterminer une valeur approchée à 0,1 près, en radians, de $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}})$.

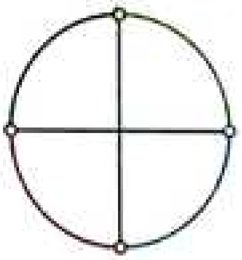
61 Signes des lignes trigonométriques

Reproduire et compléter à l'aide des symboles > ou <, pour indiquer le signe de cos (*x*), sin (*x*) et tan (*x*) suivant les valeurs de *x* dans les intervalles :

$\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$; $\left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[$; $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

cos (*x*) … 0
sin (*x*) … 0
tan (*x*) … 0

cos (*x*) … 0
sin (*x*) … 0
tan (*x*) … 0



cos (*x*) … 0
sin (*x*) … 0
tan (*x*) … 0

cos (*x*) … 0
sin (*x*) … 0
tan (*x*) … 0

62 Appliquer une formule

On donne $\sin(x) = \frac{1}{5}$ et $x \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$.

L'objectif est de déterminer la valeur exacte de cos (*x*).

Voici la copie de deux élèves :

Ali :

$$\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

$$\text{donc } \cos(x) = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Namandou :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Expliquer les erreurs commises, puis proposer une correction à cet exercice.

Se tester

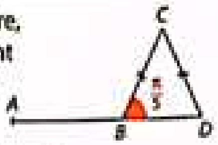
Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

[illegible] Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Un angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad correspond à 120°.	☐	☐
2. Si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.	☐	☐
3. Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et $\cos(x) = \frac{1}{2}$, alors $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.	☐	☐

Sur la figure ci-contre, les points *A*, *B*, *D* sont alignés et $BC = CD$.



	vrai	faux
4. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}}) = \pi[2\pi]$.	☐	☐
5. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi]$.	☐	☐
6. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) = -\frac{3\pi}{5}[2\pi]$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Avec justification

[illegible] Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. $\frac{11\pi}{6}$ et $\frac{35\pi}{6}$ désignent des mesures d'un même angle orienté.	☐	☐
2. Si $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{7}[2\pi]$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{4\pi}{21}[2\pi]$.	☐	☐
3. Si $x \in \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{3}$, alors $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\tan(x) = 2\sqrt{2}$.	☐	☐

On a représenté ci-contre un octogone régulier de centre *O*.

	vrai	faux
4. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.	☐	☐
5. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE}}) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.	☐	☐
6. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BD}}) = \frac{3\pi}{8}[2\pi]$.	☐	☐

QCM

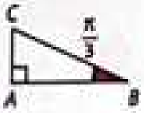
Top chrono *(sans justification)*

65 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. La mesure principale de $\frac{15\pi}{4}$ est :

a. $\frac{\pi}{4}$; b. $-\frac{\pi}{4}$; c. $-\frac{3\pi}{4}$.

2. Dans le triangle *ABC* ci-contre, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ mesure :



a. $\frac{\pi}{6}$; b. $-\frac{\pi}{3}$; c. $-\frac{\pi}{6}$.

3. Le nombre réel $\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ est égal à :

a. 1 ; b. $1+\sqrt{2}$; c. $1-\sqrt{2}$.

4. Pour tout nombre réel *t*, le nombre $[\cos(t)+1][\sin(t)-1]$ est :

a. négatif ou nul ; b. nul ; c. positif ou nul.

Avec justification

66 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Si $\alpha = \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$ et $\beta = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$, alors la mesure principale de $3\alpha + 2\beta$ est : a. π ; b. $-\pi$; c. 2π.

2. Si $x \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, alors $\cos(x)$ est égal à :

a. $-\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}$; b. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$; c. $\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}$.

3. Pour tout nombre réel *x*, le nombre réel $\cos(x+\pi) - 2\cos(x-\pi) + \cos(x+5\pi)$ est égal à :

a. 0 ; b. $\cos(x)$; c. $-\cos(x)$.

4. Pour tout nombre réel *x*, le nombre réel $2+\cos(x)-2\sin(x)$ est compris entre :

a. 0 et 1 ; b. −1 et 5 ; c. −2 et 2.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

Dans toute la suite, (O, I, J) désigne un repère orthonormé et $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O.

67 Des valeurs remarquables $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$

1. M désigne le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que :

$$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi].$$

a. Déterminer les coordonnées de M dans le repère (O, I, J).

b. Calculer IM.

c. Montrer que $IM = 2\sin\frac{\pi}{8}$.

En déduire la valeur exacte :

$$\text{de } \sin\frac{\pi}{8}, \text{ de } \cos\frac{\pi}{8} \text{ et de } \tan\frac{\pi}{8}.$$

2. En suivant la même démarche que celle proposée à la question 1., déterminer la valeur exacte :

$$\text{de } \sin\frac{\pi}{12}, \text{ de } \cos\frac{\pi}{12} \text{ et de } \tan\frac{\pi}{12}.$$

68 Une formule de duplication

x désigne un nombre réel tel que $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

ABC désigne un triangle isocèle en A tel que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 2x$.

H et I sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A et de B.

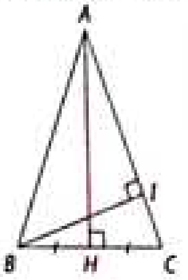
On pose $a = AB$, $a > 0$.

a. Montrer que $BC = 2a\sin(x)$.

b. Montrer que $BI = BC\cos(x)$.

c. Montrer que $BI = a\sin(2x)$.

d. Montrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

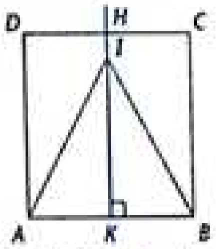


Info

Cette formule est appelée formule de duplication du sinus.

69 Polygones réguliers

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ désigne un carré de côté 1 et AIB un triangle équilatéral. La médiatrice de $[AB]$ coupe la droite (AB) en K et la droite (DC) en H.



a. Montrer que le triangle DAI est isocèle.

b. Calculer la mesure principale des angles :

$$\bullet\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}\right) ; \quad \bullet\ \left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}}\right) ; \quad \bullet\ \left(\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}}\right).$$

c. Montrer que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DH}}\right) = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$.

d. Montrer que $IH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

70 $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$

ABC désigne un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{5}$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment $[AC]$ en D.

a. Faire une figure.

b. Déterminer la mesure de chacun des angles des triangles ABC, ADB et BCD.

c. x désigne la longueur du segment $[BC]$.

Montrer que : $\bullet\ AB = 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$;

$$\bullet\ CD = 2x\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) ;$$

$$\bullet\ BC = 4x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

d. En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \text{ et que } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

e. • Justifier que pour tous nombres réels a et b :

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

• En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

71 Alignement de points

A, B, C, D et E désignent cinq points tels que :

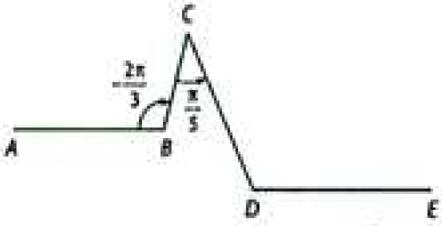
$$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi],\quad \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}\right) = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi],$$

$$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi].$$

Les points A, E, C sont-ils alignés ? Justifier.

72 Ligne brisée

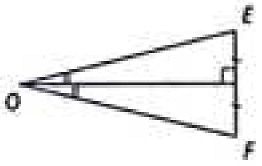
Sur la ligne $ABCDE$ brisée ci-dessous, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.



Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}\right)$.

73 Acuité visuelle

L'acuité visuelle est la capacité de l'œil à discerner les objets. Lorsqu'elle est égale à 10/10, cela signifie que l'œil, représenté par le point O, peut différencier deux objets placés en E et F tels que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}}\right) = \frac{3}{\pi}\,[2\pi]$.

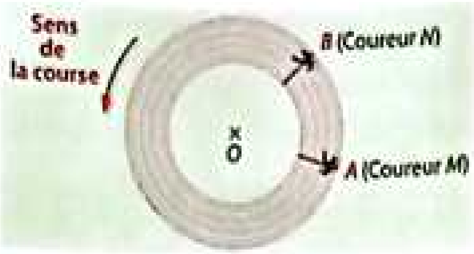


Déterminer la distance minimale entre les deux objets qu'une personne ayant une acuité visuelle maximale peut distinguer si elle se situe à 6 m de l'objet E. Donner un arrondi au cm près.

Exercices d'approfondissement

74 Athlétisme

Une piste d'athlétisme circulaire de centre O a un rayon de 100 m.
Un coureur M part d'un point A de la piste à l'instant $t = 0$.
Un autre coureur N part au même moment d'un point B situé 100 m devant.



On suppose que les deux coureurs courent respectivement à la vitesse constante v_M et v_N, exprimées en m/s.
Les deux courent dans le sens direct de la piste.

a. Calculer mes$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ en fonction du temps t et des vitesses v_M et v_N.

b. Sachant que le coureur M passe au point B à l'instant $t = 12{,}5$ s et qu'il double le coureur N à l'instant $t = 50$ s, déterminer v_M et v_N.

75 Parallèles et perpendiculaires

A et B désignent deux points tels que $AB = 4$ cm.

a. Construire à la règle et au compas :

- le point C tel que $AB = AC$ et mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$;
- le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{17\pi}{3}\,[2\pi] ;$$

- le point E tel que $DE = 3$ cm et mes$(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}) = \dfrac{11\pi}{12}\,[2\pi]$.

b. Montrer que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.

c. Construire à la règle et au compas le point F tel que A, F, C soient alignés et mes$(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BF}}) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

d. Montrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

76 Ensemble de points

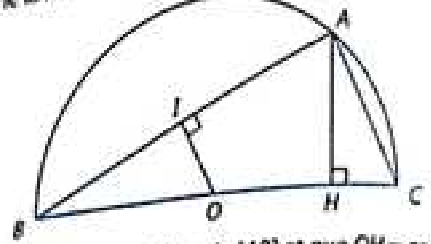
A, B, C désignent trois points non alignés.
Construire et décrire l'ensemble des points M tels que :

a. mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) =$ mes$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$;

b. mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

77 Une autre formule de duplication

Un demi-cercle de centre O, de rayon 1 et de diamètre $[BC]$ a été représenté ci-dessous.
A désigne un point de ce demi-cercle tel que l'angle $\widehat{COA}$ soit aigu. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et I celui de O sur la droite (AB).
α désigne la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.



a. Montrer que I est le milieu de $[AB]$ et que $OH = \cos(2\alpha)$.

b. Exprimer AB en fonction de α.

c. Montrer que :

- $BH = 2\cos^2(\alpha)$;
- $OH = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

d. En déduire les expressions de $\cos^2(\alpha)$ et $\sin^2(\alpha)$ en fonction de $\cos(2\alpha)$.

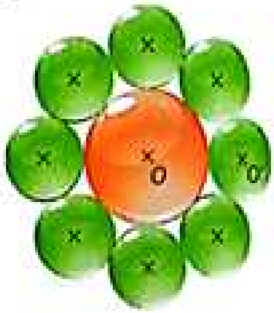
e. **Application**

Retrouver les valeurs exactes de :

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, puis $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, puis $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

78 Les neufs sphères

Sur un plan, une sphère de centre O et de rayon R est entourée de huit sphères identiques de rayon r.
On note O' le centre d'une des huit sphères.
Tous les centres sont dans le même plan. Ces huit sphères sont tangentes entre elles et à la grande sphère.



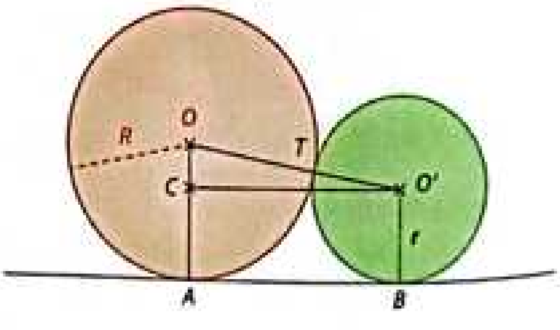
L'objectif est de déterminer la valeur du rapport $\dfrac{r}{R}$.

1. Démontrer que $r = O'C \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2. Démontrer que $O'C^2 = 4rR$.

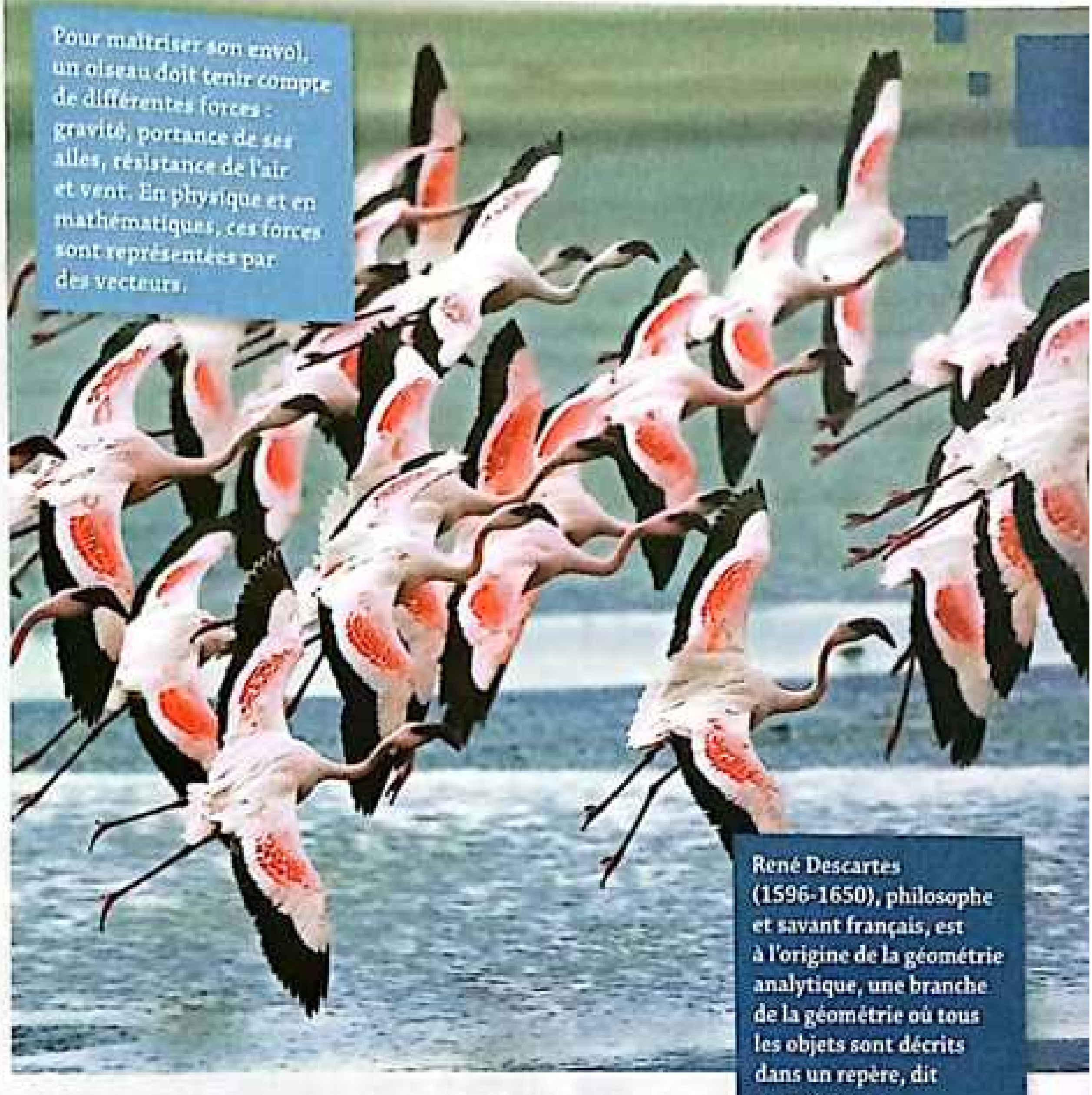
3. a. En déduire l'expression de $\dfrac{r}{R}$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

b. En déduire un arrondi de $\dfrac{r}{R}$ à 10^{-2} près.



3

Vecteurs



Pour maîtriser son envol, un oiseau doit tenir compte de différentes forces : gravité, portance de ses ailes, résistance de l'air et vent. En physique et en mathématiques, ces forces sont représentées par des vecteurs.

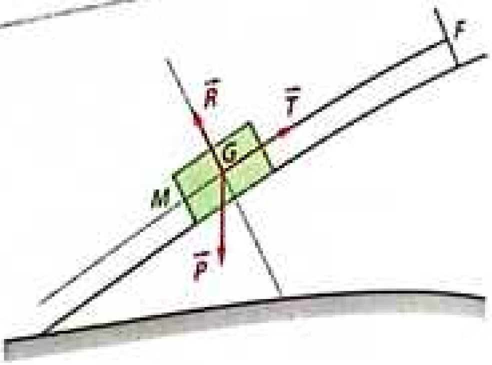
René Descartes (1596-1650), philosophe et savant français, est à l'origine de la géométrie analytique, une branche de la géométrie où tous les objets sont décrits dans un repère, dit « cartésien ».

Les objectifs du chapitre

- Connaître les caractéristiques d'un vecteur.
- Savoir représenter un vecteur.
- Effectuer des opérations sur les vecteurs.
- Utiliser la relation de Chasles.
- Étudier la colinéarité de vecteurs, l'alignement de points.
- Savoir décomposer un vecteur dans une base.

Cours 1a, b

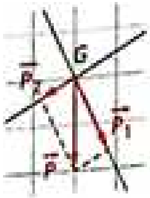
1 En équilibre



Un objet M est en équilibre sur un plan incliné et y est retenu par un câble attaché en un point fixe F.
Les forces qui s'appliquent à l'objet, au point G, sont :

- son poids $\vec{P}$;
- la tension du câble $\vec{T}$;
- la réaction du support $\vec{R}$.

L'objet étant en équilibre, la somme des forces est nulle. Si on projette $\vec{P}$ sur les deux axes, on obtient deux forces $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ qui compensent $\vec{R}$ et $\vec{T}$.



Construction des vecteurs forces – somme de vecteurs

Reproduire les schémas ci-dessous et construire, dans chacun des cas, les forces manquantes, en utilisant $\vec{R}, \vec{T}, \vec{P}$ ou ses projections $\vec{P_1}$ ou $\vec{P_2}$.

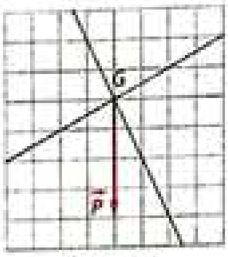


Schéma 1

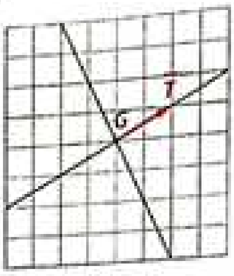


Schéma 2

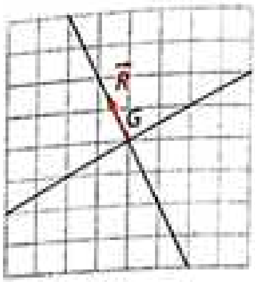
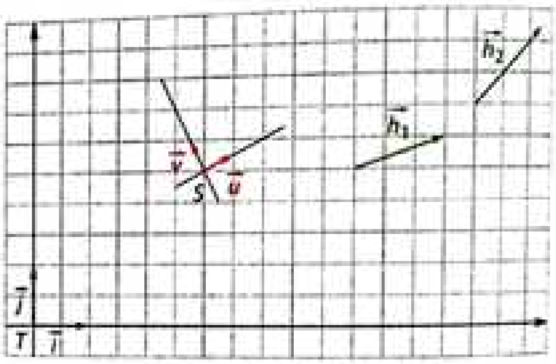


Schéma 3

Cours 6, 7

2 Comète

Deux observateurs, l'un sur la Terre, notée T, l'autre dans une station spatiale, notée S, regardent passer une comète dont une partie de la trajectoire est modélisée, à deux instants différents, par les vecteurs $\vec{h_1}$ et $\vec{h_2}$.
$(T\,;\vec{i},\vec{j})$ désigne le repère terrestre et $(S\,;\vec{u},\vec{v})$ celui de la station.
En raison de la proximité de la comète et de la station, et de la rotation de la Terre, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même longueur ni les mêmes directions que $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Ainsi $\vec{u}=0{,}5\vec{i}+0{,}25\vec{j}$ et $\vec{v}=-0{,}25\vec{i}+0{,}5\vec{j}$.



1 Vue de la station spatiale

À une certaine heure, la trajectoire de la comète est modélisée par le vecteur $\vec{h_1}=2{,}8\vec{u}-0{,}4\vec{v}$.
Utiliser les relations vectorielles liant les vecteurs des deux repères pour déterminer les coordonnées de $\vec{h_1}$ dans le repère terrestre.

2 Vue de la Terre

Une heure plus tard, la trajectoire de la comète est modélisée par le vecteur $\vec{h_2}=1{,}25\vec{i}+1{,}25\vec{j}$.

a. Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Déterminer les coordonnées de $\vec{h_2}$ dans le repère de la station.

Le procédé utilisé ci-dessus s'appelle changement de repère.

3 Montgolfière

Cours 1b

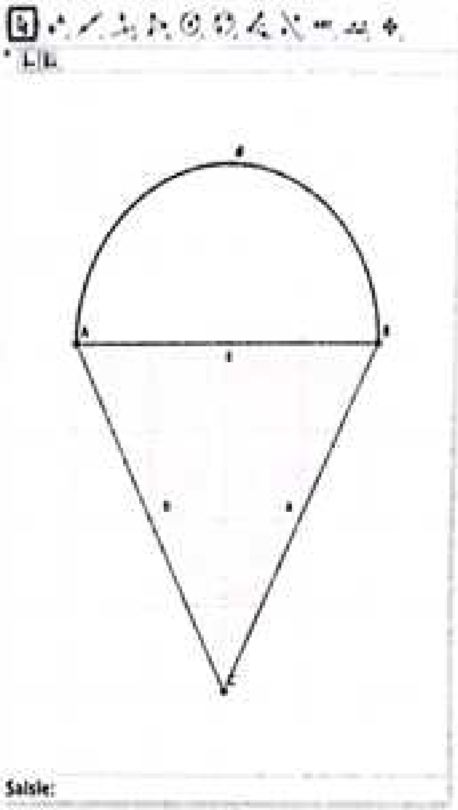
L'objectif de cette activité est d'observer une propriété des translations en utilisant un logiciel de géométrie.

1 Construction avec le logiciel GeoGebra

a. En cliquant directement dans la feuille graphique ou en utilisant la ligne de saisie, placer les points $A(2\,;7)$, $B(6\,;7)$ et $C(4\,;3)$.

b. Utiliser l'icône **Polygone** pour construire le triangle ABC.

c. Cliquer sur le menu déroulant de l'icône **Cercle**, puis sélectionner l'icône **Demi-cercle** pour construire le demi-cercle de diamètre $[AB]$.
La figure complète obtenue (le ballon) sera notée $\mathcal{F}_1$.



Saisie:

2 Translation

a. En ligne de saisie, taper $u = (5, 3)$, puis $v = (4, -1)$ pour représenter les vecteurs $\vec{u}(5\,;3)$ et $\vec{v}(4\,;-1)$.

b. Cliquer sur le menu déroulant de l'icône **Symétrie**, puis sélectionner l'icône **Translation**.
Cliquer sur chaque élément de la figure $\mathcal{F}_1$, puis sur le vecteur $\vec{u}$ pour représenter l'image $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

c. Procéder de même pour représenter l'image $\mathcal{F}_3$ de $\mathcal{F}_2$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.

3 Une propriété

a. En ligne de saisie, taper $w = u + v$.

b. Représenter l'image $\mathcal{F}_4$ de $\mathcal{F}_1$ par la translation du vecteur $\vec{w}$.
Quelle remarque peut-on faire ?

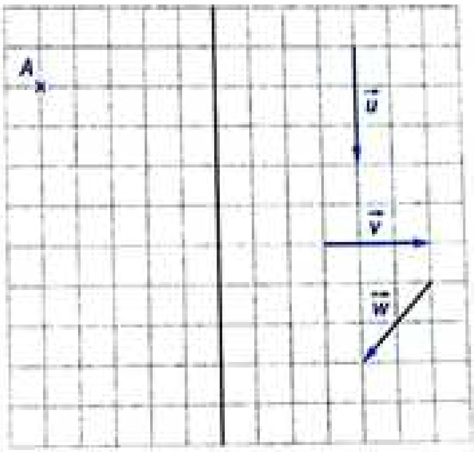
c. Compléter la phrase ci-dessous.
Appliquer successivement deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, revient à ….

4 Carte au trésor

Cours 4

Une carte au trésor a été laissée avec les indications suivantes :

- la Baie se trouve au point B tel que $\overrightarrow{AB} = -\vec{v}$;
- la Cabane se trouve au point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$;
- un Piège a été caché au point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{v}$;
- la Source se trouve au point S tel que $\overrightarrow{AS} = 2\vec{w}$;
- la Grotte se trouve au point G tel que $\overrightarrow{SG} = 2\vec{v} + \vec{u}$;
- le Trésor (enfin !) se trouve au point T milieu de $[SG]$.



a. Sur une feuille quadrillée, placer tous les points cités.

b. Conjecturer l'expression du vecteur $\overrightarrow{AT}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{ST}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d. En utilisant la relation de Chasles, en déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{AT}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ pour (in)valider la conjecture émise au b.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AT}$ a été décomposé en une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3 Cours

1 Calcul vectoriel

a Éléments caractéristiques d'un vecteur

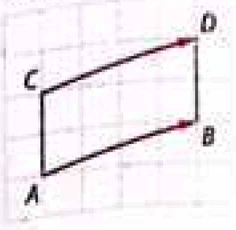
Définitions

Un **vecteur** $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
- une **direction** : la droite (AB) ;
- un **sens** : de A vers B ;
- une **longueur** : la distance AB.

Remarques
- Un tel vecteur $\vec{u}$ est appelé vecteur libre : il n'a pas de point d'origine.
- Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est un vecteur de longueur nulle (par exemple $\overrightarrow{AA}$) pour lequel les notions de direction et de sens n'ont pas de signification.

Propriété

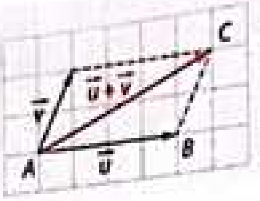
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.



b Somme de deux vecteurs

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs ;
A, B et C sont trois points tels que :
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
La **somme** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette relation a été vue en troisième sous le nom de relation de Chasles.

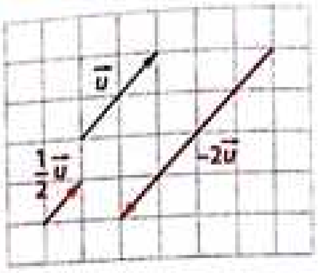
c Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul, λ est un nombre réel non nul.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est un vecteur :
- de même direction que $\vec{u}$;
- de même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, de sens contraire à celui de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$;
- de longueur (celle de $\vec{u}$) multipliée par $|\lambda|$.

Par convention, on pose $0\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Exemples



d Règles de calcul

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs, λ et μ sont deux nombres réels.

1 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; **2** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
3 $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$; **4** $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$; **5** $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$.

Remarques
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
- $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

2 Norme

Définition

$\vec{u}$ désigne un vecteur de représentant $\overrightarrow{AB}$.
On appelle **norme** de $\vec{u}$, le nombre noté $\|\vec{u}\|$, égal à AB.

Remarques • On a $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.
- La norme d'un vecteur est donc sa longueur.

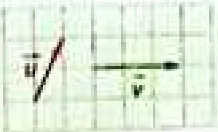
Propriété

Inégalité triangulaire
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.
$\|\vec{u} + v\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

3 Savoir-faire

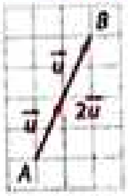
1 Représenter graphiquement un vecteur

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent les deux vecteurs représentés ci-contre.
Représenter les vecteurs :
a. $2\vec{u}$; b. $-\vec{v}$; c. $2\vec{u}-\vec{v}$.



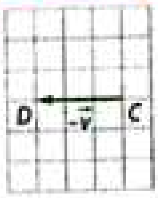
Solution commentée

a.



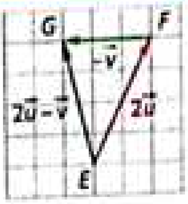
$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}$

b.



$\overrightarrow{CD}=-\vec{v}$

c.



$\overrightarrow{EG}=2\vec{u}-\vec{v}$

Méthode

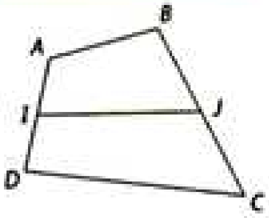
1. Choisir un point origine.
2. a. Mettre bout à bout deux fois le vecteur $\vec{u}$.
   b. Mettre une fois le vecteur $\vec{v}$ en sens inverse.
   c. Mettre bout à bout le vecteur $2\vec{u}$ et le vecteur $-\vec{v}$.

2 Démontrer une égalité vectorielle

ABCD désigne un quadrilatère ; le point *I* est le milieu du segment [*AD*] et le point *J* est le milieu du segment [*BC*].
Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}$.

Solution commentée

1. Il faut éviter de tracer un quadrilatère particulier : carré, rectangle, parallélogramme, etc., car dans ces cas, la relation demandée est immédiate.



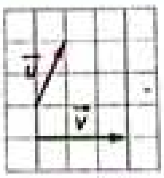
2. I milieu de $[AD] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0}$.
   J milieu de $[AD] \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.
3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}$ (relation de Chasles).
   $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ (relation de Chasles).
4. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}$
   $=\vec{0}+2\overrightarrow{IJ}+\vec{0}=2\overrightarrow{IJ}$.

Méthode

1. Faire une figure qui ne soit pas un cas particulier.
2. Traduire les phrases de l'énoncé par des égalités vectorielles.
3. Décomposer les vecteurs du premier membre de l'égalité en utilisant la relation de Chasles et les points figurant dans le deuxième membre.
4. Démontrer l'égalité en utilisant les résultats des questions précédentes.

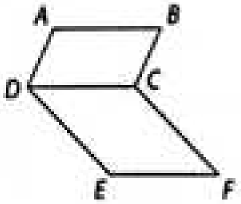
S'exercer

3 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent les deux vecteurs représentés ci-contre.
A est un point du plan.

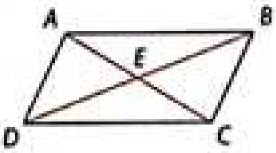


a. Construire les vecteurs $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+2\vec{v}$.
b. Construire le point *D* tel que *ABCD* soit un parallélogramme.
c. Démontrer que $\overrightarrow{AD}=-\vec{u}+5\vec{v}$.

4 *ABCD* et *CDEF* désignent deux parallélogrammes.
Démontrer que le quadrilatère *ABFE* est un parallélogramme.



5 *ABCD* désigne un parallélogramme de centre *E*.



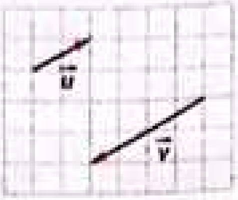
Démontrer les égalités vectorielles suivantes :
a. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}$; b. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EC}$.

6 *ABC* désigne un triangle.
Le point *I* est le milieu du segment [*AB*] et le point *J* est le milieu du segment [*BC*].
a. Faire une figure.
b. Démontrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3 Colinéarité

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'ils ont même direction.



Remarque

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ⇔ il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques • Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et colinéaires tels que $\vec{v} = k\vec{u}$, alors le nombre k est unique et $|k| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$.

• Si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$, alors tout nombre réel k convient.

4 Vecteurs unitaires

Définition

On appelle vecteur **unitaire**, tout vecteur de norme 1.

Propriété

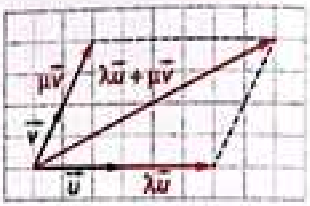
$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul.
Il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$.

Ce sont les vecteurs $-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Ils sont opposés.

5 Combinaisons linéaires

Définitions

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.
• On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur qui s'écrit $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont des nombres réels.
• Les nombres λ et μ sont appelés **coefficients** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cette combinaison linéaire.



Exemples

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs.
• $2\vec{u} + 3\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les coefficients sont 2 et 3.
• $-2\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les coefficients sont -2 et 0.

Propriétés

1 ABC désigne un triangle.
Son centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

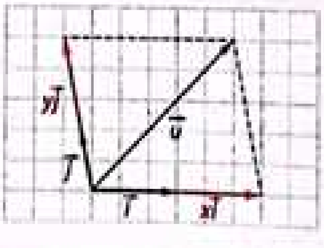
Remarque

On a aussi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2 $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent deux vecteurs non colinéaires.

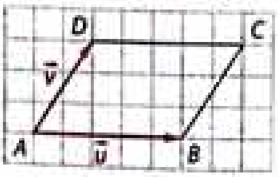
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de nombres réels $(x\,;y)$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Autrement dit, on peut **décomposer** de manière unique $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Exemple

$ABCD$ désigne un parallélogramme.



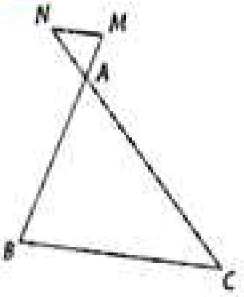
On a : • $\overrightarrow{AB} = 1\vec{u} + 0\vec{v}$;
• $\overrightarrow{AD} = 0\vec{u} + 1\vec{v}$; • $\overrightarrow{AC} = 1\vec{u} + 1\vec{v}$.

3 Savoir-faire

7 Démontrer le parallélisme de deux droites

ABC désigne un triangle.
M désigne le point tel que $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et N désigne le point tel que $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que $(MN) \,//\, (BC)$.

Solution commentée



1. Voir figure ci-contre.
2. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$ (relation de Chasles)

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (énoncé)

$=-\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

3. $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc ils ont la même direction.
D'où $(MN) \,//\, (BC)$.

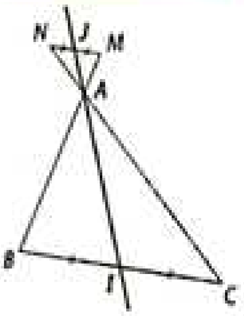
Méthode

1. Faire la figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Pour cela, décomposer chacun des deux vecteurs en utilisant la relation de Chasles pour pouvoir se servir des égalités vectorielles de l'énoncé.
3. Conclure.

8 Démontrer l'alignement de points

On reprend la figure de l'exercice 7.
Le point I désigne le milieu du segment $[BC]$ et le point J désigne le milieu du segment $[MN]$.
Démontrer que les points I, A et J sont alignés.

Solution commentée



1. Voir figure ci-contre.
2. I milieu de $[BC]$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ (relation de Chasles)

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (1)

J milieu de $[MN] \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MJ}$ (relation de Chasles)

$=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$ (données de l'énoncé)

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{8}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AI}$ (égalité (1))

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires, donc les droites (AI) et (AJ) sont parallèles.
Ces deux droites ont le point A en commun, elles sont donc confondues.
Par conséquent, les points A, I et J sont alignés.

Méthode

1. Faire la figure et vérifier que les points I, A et J sont alignés.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.
Pour cela, traduire les phrases de l'énoncé en égalités vectorielles. Décomposer ensuite les vecteurs pour pouvoir les utiliser.
3. Conclure en remarquant que deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

Remarque

I milieu de $[AB]$ peut se traduire de plusieurs manières :

- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$;
- $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$;
- $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

S'exercer

9 ABC désigne un triangle.
M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.

10 $ABCD$ désigne un parallélogramme.
M est le point tel que $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DC}$ et P le point tel que $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MB}$.
Que peut-on en déduire pour les points D, A et P ?

6 Bases

a Coordonnées d'un vecteur

Définitions

- Une base du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, l'unique couple $(x ; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- x est l'**abscisse** de $\vec{u}$, y est l'**ordonnée** de $\vec{u}$. On note : $\vec{u}\,(x ; y)$.

b Base orthonormée

Définitions

- Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont perpendiculaires.
- Une base **orthonormée** est un couple de vecteurs unitaires et orthogonaux.

c Norme d'un vecteur

Propriété

$(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormée. Pour tout vecteur $\vec{u}(x ; y)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque Cette propriété est fausse si la base n'est pas orthonormée.

d Déterminant de deux vecteurs et colinéarité

Définition

$(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base. $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u'}(x' ; y')$ sont deux vecteurs.
Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est le nombre réel, noté $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'})$, égal à $xy' - yx'$.

Notation $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$. La notation des vecteurs sous forme verticale $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rend plus naturelle l'écriture du déterminant et est parfois employée.

Propriété

$(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

7 Repère du plan

Définition

Un **repère** du plan est un triplet $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel O est un point appelé **origine** et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base.

Remarque Si $M(x ; y)$ est un point du plan, alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Propriétés

$A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$ désignent trois points d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- Si I est le milieu de $[AB]$, alors $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Dans le cas où le repère est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

11 Démontrer l'alignement de points dans un repère

$(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne les points $A(1;2)$, $B(3;0)$ et $C(7;-4)$.
Démontrer que les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

Solution commentée

1. $\overrightarrow{AB}(3-1;0-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(2;-2)$.
$\overrightarrow{AC}(7-1;-4-2)$ donc $\overrightarrow{AC}(6;-6)$.

2. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=2\times(-6)-(-2)\times 6=0$.

3. Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Ainsi (*AB*) // (*AC*). Comme ces deux droites ont le point *A* en commun, elles sont confondues. *A*, *B* et *C* sont donc alignés.

Méthode

1. Déterminer les coordonnées de deux vecteurs distincts formés à partir des points *A*, *B* et *C*.
2. Calculer le déterminant de ces deux vecteurs.
3. Utiliser la nullité du déterminant pour conclure.

12 Changement de base

$(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan. $\vec{u}(2;-1)$, $\vec{v}(3;1)$ et $\vec{w}(-1;2)$ sont trois vecteurs.

a. Justifier que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.

b. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

Solution commentée

a. 1. $\det(\vec{u},\vec{v})=2\times 1-(-1)\times 3=5$.
Le déterminant étant différent de zéro, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, $(\vec{u},\vec{v})$ est bien une base du plan.

b. 1. (S) $\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}\\ \vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$

2. $$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}\\ \vec{u}+\vec{v}=5\vec{i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}\\ \frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}=\vec{i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=2\left(\frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}\right)-\vec{j}\\ \frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}=\vec{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{5}\vec{u}-\frac{2}{5}\vec{v}=-\vec{j}\\ \frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}=\vec{i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{5}\vec{u}+\frac{2}{5}\vec{v}=\vec{j}\\ \frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}=\vec{i}\end{cases}$$

3. $\vec{w}=-\vec{i}+2\vec{j}$.

4. $\vec{w}=-\left(\frac{1}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}\right)+2\left(-\frac{3}{5}\vec{u}+\frac{2}{5}\vec{v}\right)=-\frac{7}{5}\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v}$.

5. Par conséquent, $\vec{w}\left(-\frac{7}{5};\frac{3}{5}\right)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

Méthode

a. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires en calculant leur déterminant dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

b. 1. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2. Résoudre le système obtenu en procédant comme dans le cas d'un système d'équations linéaires, les inconnues étant ici $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

3. Exprimer $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

4. Remplacer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par les expressions obtenues au 2.

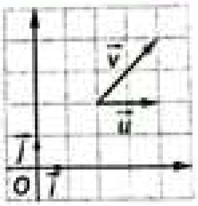
5. Conclure.

S'exercer

13 $(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.
a. $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(3;-4{,}5)$;
b. $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(6;4)$.

14 $(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne les points $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-4)$ et $D(7;-1)$.
Dans chaque cas, dire si les droites sont parallèles.
a. (*AB*) et (*CD*) ; b. (*AC*) et (*BD*).

15 Dans le repère ci-contre on a placé deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a. Justifier que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base.
b. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.



16 *ABCD* désigne un parallélogramme de centre *O*.
a. Justifier que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est une base.
b. Calculer les coordonnées du point *E* tel que $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$.

Calcul vectoriel

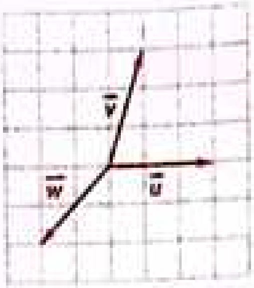
Réponses rapides

17 Reproduire la figure ci-contre sur une feuille quadrillée ou sur le cahier et construire les vecteurs :

a. $\vec{u}+\vec{v}$;

b. $\vec{u}+\vec{w}$;

c. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

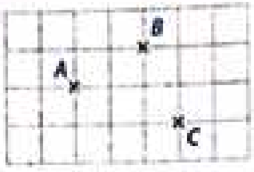


18 Placer les points A, B et C sur un quadrillage.

Construire les vecteurs :

a. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$;

b. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.



19 Utiliser la relation de Chasles pour compléter les égalités suivantes.

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{..}$; b. $\overrightarrow{B.}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{.C}$;

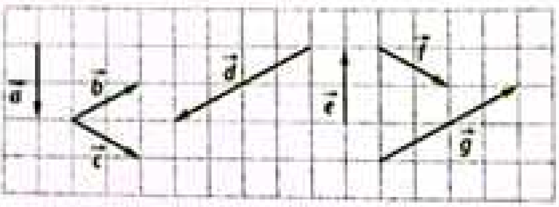
c. $\overrightarrow{..}+\overrightarrow{A.}=\overrightarrow{OE}$; d. $\overrightarrow{A.}+\overrightarrow{B.}+\overrightarrow{C.}=\overrightarrow{.D}$.

20 Dans la figure ci-dessous, citer :

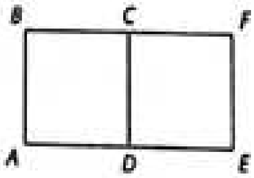
a. deux vecteurs égaux ;

b. deux vecteurs opposés ;

c. trois vecteurs ayant la même direction.



21 Dans la figure ci-dessous, les quadrilatères $ABCD$ et $CDEF$ sont des carrés.



Déterminer :

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; b. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$;

c. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}$; d. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}$;

e. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}$; f. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$.

22 ABC désigne un triangle quelconque.

Construire les points D et E tels que :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}\end{cases}.$$

Aide

Exprimer $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

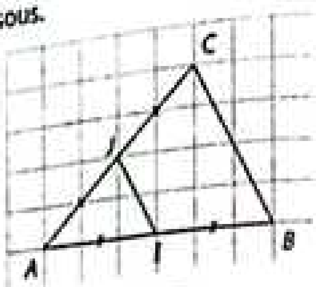
23 Écrire le plus simplement possible les vecteurs suivants.

a. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$; b. $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$;

c. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB}$; d. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$;

e. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$; f. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$.

24 Compléter la démonstration en utilisant les codages de la figure ci-dessous.



- I est le … de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA}$ … $\overrightarrow{BA}$;
- … donc $\overrightarrow{JA}=$ … ;
- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ d'après … ;
- $\overrightarrow{IJ}=\ldots=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

25 Utiliser le logiciel GeoGebra pour construire un quadrilatère quelconque $ABCD$.

Placer les points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a. Conjecturer la nature du quadrilatère $IJKL$. (Faire bouger les points A, B, C et D pour constater que cette nature ne dépend pas d'un cas particulier de la figure.)

b. En faisant une démonstration similaire à celle de l'exercice 24, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{LK}$ et conclure.

Info

Pierre Varignon (1654-1722) est un mathématicien et physicien français connu pour le théorème qui porte son nom et dont l'exercice 25 constitue une illustration.

Colinéarité

Réponses rapides

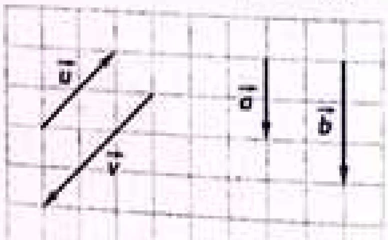
26 1. Représenter un vecteur $\vec{u}$ non nul quelconque, puis les vecteurs :

a. $\vec{v}=2\vec{u}$; b. $\vec{w}=-3\vec{u}$.

2. Que peut-on dire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

3. Déterminer le nombre réel k tel que $\vec{v}=k\vec{w}$.

27



Déterminer les nombres réels k et m tels que :

- $\vec{v}=k\vec{u}$; - $\vec{a}=m\vec{b}$.

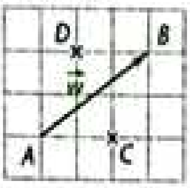
28 $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs tels que :

- $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$;
- $\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.

a. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à $\vec{w}$.

b. En déduire la construction des points E et F tels que :

- $\overrightarrow{CE} = \vec{u}$;
- $\overrightarrow{FD} = \vec{v}$.



29 $[AB]$ désigne un segment de milieu I.

1. Placer un point M sur la droite (AB).

a. Le vecteur $\overrightarrow{MI}$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$?

b. Si oui, déterminer le nombre réel k tel que :

$$\overrightarrow{MI} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).$$

2. Mêmes questions avec M en dehors de la droite (AB).

3. Conclure.

30 A, B et C désignent trois points distincts du plan. Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés.

a. $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$; **b.** $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AC}$;

c. $-\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BA}$; **d.** $2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

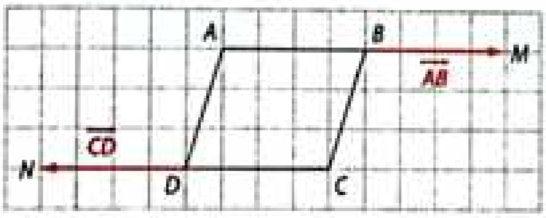
31 A, B, C et D désignent quatre points distincts tels que :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;
- $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

a. Faire une figure.
Que constate-t-on ?

b. Démontrer cette conjecture.

32 $ABCD$ désigne un parallélogramme.
M est le point image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et N est le point image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.



a. Démontrer que le quadrilatère $MBND$ est un parallélogramme.

b. Citer tous les parallélogrammes de la figure.
Justifier par des égalités vectorielles.

33 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs quelconques du plan.
Parmi les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ suivants, déterminer ceux qui sont colinéaires.

- $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$;
- $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$;
- $\vec{c} = \vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}$;
- $\vec{e} = 0{,}4\vec{u} - 0{,}6\vec{v}$;
- $\vec{f} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Aide

> Faire une figure pour pouvoir conjecturer les résultats, puis les démontrer.

34 ABC désigne un triangle quelconque.
G est le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a. Utiliser la relation de Chasles pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Faire une figure et placer I milieu du segment $[BC]$.

c. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

d. Utiliser le résultat du **a.** pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

e. Que peut-on en déduire pour les points A, G et I ?

Remarque

> G est le centre de gravité du triangle ABC.

35 ABC désigne un triangle quelconque.
D et E sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

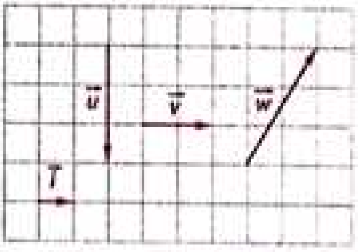
a. Faire une figure.

b. Démontrer que $(DE) // (BC)$.

Normes

Réponses rapides

36 $\vec{i}$ désigne un vecteur unitaire.



Quelles sont les normes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$?

37 ABC désigne un triangle tel que $AB = 2$ et $AC = 3$.
Utiliser l'inégalité triangulaire pour donner un encadrement de BC.

38 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| \leqslant 4 \text{ et } \|\vec{v}\| \leqslant 3.$$

a. Tracer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ possibles.
Tracer $3\vec{u} - \vec{v}$.

b. Démontrer que $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \leqslant 15$.

39 $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs quelconques.
Démontrer que :

$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

40 Dans chacun des cas suivants, dire s'il est possible de construire le triangle ABC en utilisant une justification vectorielle.

a. $AB = 5$; $AC = 3$; $BC = 6$;

b. $AB = 2$; $AC = 4$; $BC = 7$;

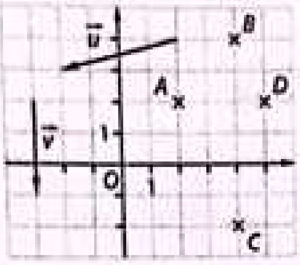
c. $AB = 3$; $AC = 2$; $BC = 5$.

Exercices d'entraînement

Calculs dans un repère

Réponses rapides

41



Lire sur le graphique ci-dessus les coordonnées des vecteurs :
a. $\vec{u}$; b. $\vec{v}$; c. $\overrightarrow{AB}$; d. $\overrightarrow{AD}$; e. $\overrightarrow{CB}$; f. $\overrightarrow{CD}$.

42 Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}(-2 ; 3)$, $\vec{v}(0 ; -2)$ et $\vec{w}(3 ; 0)$ désignent trois vecteurs.
A et *B* sont deux points fixés.

1. Tracer :
a. le représentant d'origine *A* du vecteur $\vec{u}$;
b. le représentant d'extrémité *B* du vecteur $\vec{v}$;
c. un représentant quelconque du vecteur $\vec{w}$.
2. Calculer les normes des trois vecteurs.

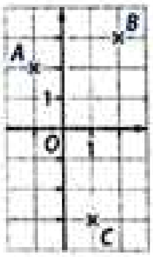
Pour les exercicess 43 à 45, on se place dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

43 $\vec{u}(2 ; -3)$ et $\vec{v}(-1 ; 2)$ désignent trois vecteurs.
Calculer les coordonnées des vecteurs :
a. $\vec{u}+\vec{v}$; b. $-3\vec{v}$; c. $\vec{u}-2\vec{v}$.

44 $\vec{u}(2 ; -2)$ désigne un vecteur et $A(-3 ; 4)$ un point.
a. Construire les points *B* et *C* tels que :
- $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; - $\overrightarrow{CA}=\vec{u}$.

b. Lire les coordonnées des points *B* et *C*.
c. Calculer les coordonnées de *B* et *C*.
d. Que peut-on dire du point *A* ? Justifier.

45 Dans le repère ci-contre, on a placé les points *A*, *B* et *C*.
a. Reproduire la figure et conjecturer les coordonnées du point *D* tel que *ABCD* soit un parallélogramme.
b. Calculer les coordonnées de *D*.



Pour les exercices 46 à 51, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

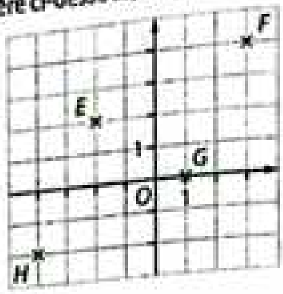
46 $\vec{u}(4 ; 3)$ désigne un vecteur.
Calculer les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{v}$ de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{u}$.

47 $A(-1 ; 2)$, $B(-2 ; -1)$ et $C(2 ; 3)$ désignent trois points du plan.
a. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
b. En déduire la nature du triangle *ABC*.

48 $A(-1 ; -1)$, $B(2 ; 3)$ et $C(4 ; -2)$ désignent trois points du plan.
1. Calculer les coordonnées, puis les normes des vecteurs :
a. $\overrightarrow{AB}$; b. $\overrightarrow{AC}$; c. $\overrightarrow{BC}$.
2. Le triangle *ABC* est-il rectangle ? Justifier.

49 $A(-1 ; 1)$, $B(5 ; 2)$, $C(4 ; -2)$ et $D(-2 ; -3)$ désignent quatre points du plan.
Démontrer que *ABCD* est un parallélogramme :
a. en utilisant une égalité de vecteurs ;
b. en utilisant les milieux des segments [*AC*] et [*BD*].

50 Dans le repère ci-dessous, on a placé les points *E*, *F*, *G* et *H*.

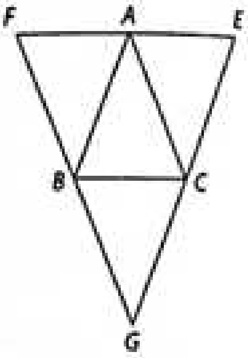


a. Reproduire la figure.
b. Démontrer que *EFGH* est un parallélogramme.
c. Construire le point *I* tel que $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EH}$.
d. Déterminer par le calcul les coordonnées de *I*.
e. Démontrer que *EGIH* est un parallélogramme.

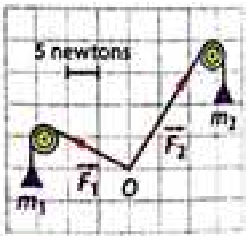
Aide
▶ Utiliser une caractérisation vectorielle d'un parallélogramme.

51 $A(0 ; 4)$, $B(-2 ; -1)$ et $C(2 ; -1)$ désignent trois points du plan.
a. Déterminer par le calcul les coordonnées des points *E*, *F* et *G* tels que :
- $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FA}$;
- $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}$.

b. Démontrer que les triangles *ABC* et *FGE* sont isocèles.



52 On a accroché à un objet de masse *m* placé au point *O* deux masses m_1 et m_2 reliées par des câbles passant par des poulies.
Les masses sont exprimées en kg.
Les vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ représentent les forces exercées par ces deux masses sur l'objet.



1. Lire graphiquement les coordonnées de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$.
3. La force $\overrightarrow{F_3}$ est équilibrée par le poids $\vec{P}$ de l'objet.
a. Quels sont le sens et la direction de $\vec{P}$?
Ce poids dépend de l'attraction terrestre et on a $P=mg$ avec $g=9{,}81$ N/kg.
b. Calculer la masse *m* de l'objet pour qu'il soit en équilibre

Déterminant de deux vecteurs

Réponses rapides

On se place dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

53 $\vec{u}\,(1 ; 2)$ désigne un vecteur.
Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires à $\vec{u}$?
- $\vec{a}(2 ; 4)$; • $\vec{b}(-1 ; 2)$; • $\vec{c}(-0{,}5 ; 1)$.

54 $\vec{u}(1 ; -2)$ et $\vec{v}(-3 ; 6)$ désignent deux vecteurs.
a. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b. Déterminer le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

55 Les points $A\,(1 ; 2)$, $B\,(3 ; 4)$ et $C\,(5 ; 7)$ sont-ils alignés ?

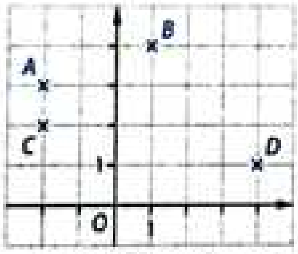
56 $E(-2 ; 3)$, $F(1 ; 2)$, $G\,(2 ; 4)$ et $H\,(8 ; 2)$ désignent quatre points du plan.
Démontrer que (EF) // (GH).

Dans les exercices suivants, on se place dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

57 Dans chacun des cas suivants, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a. $A\,(1 ; 3)$, $B\,(3 ; 6)$, $C\,(4 ; 1)$, $D\,(2 ; -2)$
b. $A\,(-2 ; 1)$, $B\,(2 ; 3)$, $C\,(3 ; 1)$, $D\,(1 ; 2)$
c. $A\,(2 ; \sqrt{3})$, $B\,(-1 ; -2\sqrt{3})$, $C\,(-2 ; 0)$, $D\,(1 ; 3\sqrt{3})$

58 Dans le repère ci-dessous, on a placé quatre points A, B, C et D.



Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

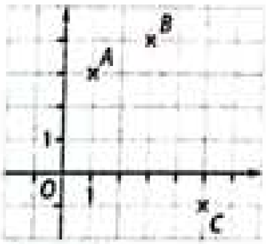
59 $A\,(1 ; -2)$, $B\,(-3 ; 1)$, $C\,(-17 ; 15)$, $D\,(-5 ; 6)$ désignent quatre points du plan.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

Aide
Montrer que deux vecteurs sont colinéaires.

60 $A(-2 ; 3)$, $B(-2 ; 7)$, $C(6 ; 3)$, $D\,(2 ; 1)$ désignent quatre points du plan.
a. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
b. Démontrer que les droites (AC) et (BD) sont sécantes.
c. Faire une figure et lire les coordonnées du point M intersection des droites (AC) et (BD).
d. Calculer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.
e. Les points I, J et M sont-ils alignés ?

61 Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel x tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
a. $\vec{u}(2 ; 3)$, $\vec{v}(x ; 9)$;
b. $\vec{u}(-1 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; x)$;
c. $\vec{u}(-2 ; 4)$, $\vec{v}(x ; 1 + x)$.

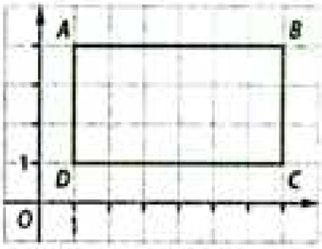
62 Dans le repère ci-contre, on a placé trois points A, B et C.



a. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
b. Calculer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.
c. Démontrer que les points A, G et I sont alignés.

63 $A\,(1 ; 3)$, $B\,(3 ; -1)$ et $C\,(2 ; 0)$ désignent trois points du plan.
Déterminer les coordonnées du point D tel que :
- D appartient à l'axe des ordonnées ;
- (AB) // (CD).

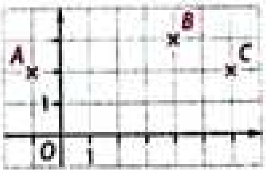
64 Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé un quadrilatère $ABCD$.



1. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
2. Reproduire la figure et construire :
a. le point I milieu du segment $[AB]$;
b. le point J symétrique de I par rapport à B ;
c. le point K tel que $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AD}$.
3. Démontrer que les points K, C et J sont alignés.

65 $A\,(2 ; 1)$, $B\,(3 ; 2)$, $C(-2 ; -3)$ et $D\,(4 ; 1)$ désignent quatre points du plan.
a. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
b. Démontrer que $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
c. E désigne le point tel que $\overrightarrow{BE} = 5\overrightarrow{BD}$.
Démontrer que les coordonnées de E sont $(8 ; -3)$.
d. Démontrer que (AD) // (CE).

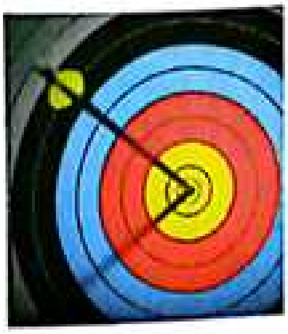
66 Dans le repère ci-contre, on a placé trois points A, B et C.

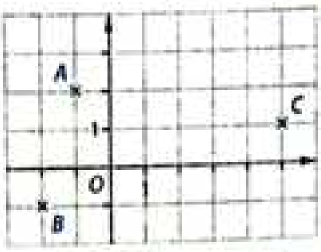


1. a. Reproduire la figure.
b. Construire le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
c. Lire les coordonnées du point D.
2. Retrouver les valeurs lues par le calcul.
3. Construire :
a. le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$;
b. le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE}$.
4. Démontrer que les points E, D et F sont alignés.

3 Exercices d'entraînement

67 Deux archers placés en des points A et B visent une cible placée en un point C.
Le tireur placé en A décoche une flèche dont la trajectoire est celle du vecteur $\vec{u}(3\,;-1)$ alors que le tireur placé en B décoche une flèche dont la trajectoire est celle du vecteur $\vec{v}(3{,}5\,;2)$.





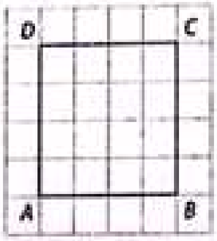
a. Les trajectoires des deux flèches sont-elles parallèles ?
b. Déterminer lequel des archers va atteindre la cible.
c. La force d'impulsion, en newtons, est proportionnelle à la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. L'un des archers affirme qu'il a tiré deux fois plus fort que l'autre. A-t-il raison ?

Bases – Repères
Décomposition de vecteurs

Réponses rapides

68 $(\vec{i},\vec{j})$ désigne une base du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\vec{i}$ et $\vec{v}=-\vec{j}$.
a. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.
b. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

69 $ABCD$ désigne un carré.
a. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère.
b. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans ce repère.

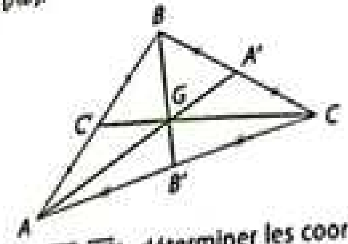


70 1. Développer et réduire :
a. $\vec{u}=7\vec{i}+3(2\vec{i}-\vec{j})-2(\vec{i}+3\vec{j})$;
b. $\vec{v}=-2\vec{i}+\vec{j}-2(\vec{i}+4\vec{j})$;
c. $\vec{w}=\vec{i}+2(\vec{i}+\vec{j})-(3\vec{i}+2\vec{j})$.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

71 $(\vec{i},\vec{j})$ désigne une base du plan.
1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan dans chacun des cas suivants.
a. $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{j},\vec{i})$;
b. $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$;
c. $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{i}-\vec{j},\vec{i}+\vec{j})$.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans cette base.

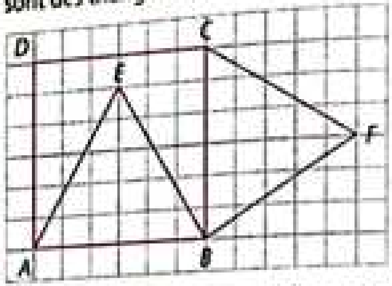
72 $(\vec{i},\vec{j})$ désigne une base du plan.
Calculer :
a. $\det(\vec{i},\vec{j})$;
b. $\det(2\vec{i},3\vec{j})$;
c. $\det(\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$;
d. $\det(\vec{i}+\vec{j},\vec{i}-\vec{j})$.

73 ABC désigne un triangle quelconque et G son centre de gravité.
Les points A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



1. Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées des vecteurs :
a. $\overrightarrow{BC}$; b. $\overrightarrow{AA'}$; c. $\overrightarrow{AG}$; d. $\overrightarrow{GA'}$.
2. Reprendre la question 1. en se plaçant dans la base $(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC})$.

74 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ désigne un carré de côté 3, ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.

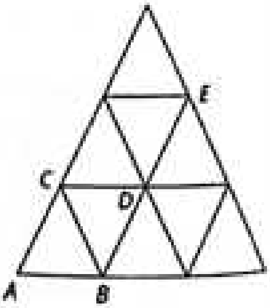


Le but de cet exercice est de démontrer l'alignement des points D, E et F.
a. Faire une figure et tester l'alignement.
b. Justifier que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est une base et déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans cette base.
c. Conclure.

Remarque
Cet exercice peut également être résolu avec des outils géométriques : voir chap. 6, ex. 86.

75 $ABCD$ désigne un parallélogramme.
Donner les coordonnées des points A, B, C et D dans chacun des repères suivants :
a. $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$; b. $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})$; c. $(A;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$.

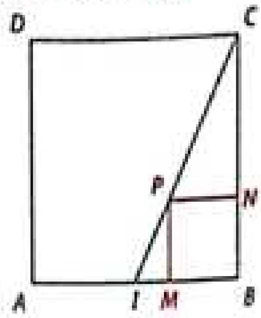
76 a. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



Faire le point

77 Utiliser un repère pour démontrer

ABCD désigne un carré.
I est le milieu de [*AB*].
M est un point du segment [*AB*] tel que $AM = x$.
On cherche la position du point *M* pour que *MBNP* soit un carré avec $P \in [IC]$.



a. Définir un repère orthonormé utilisant les points *A*, *B*, *C* et *D*.
b. Donner les coordonnées des points *I*, *C* et *P* dans ce repère.
c. Calculer *x* en utilisant $\text{dét}(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IC})$. Conclure.

78 Un alignement, deux méthodes

1. Reproduire et compléter la fiche ci-dessous qui permet de tester l'alignement de trois points.

① Calculer les ... des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
② Calculer le ... des deux vecteurs (méthode 1) ou
②bis Déterminer, s'il existe, le nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{AB} =$ ... (méthode 2)

③ Alignement	Non alignement
• le déterminant est ... (méthode 1) ou le nombre *k* ... (méthode 2) • les vecteurs sont ...	• le déterminant est ... (méthode 1) ou le nombre *k* ... (méthode 2) • les vecteurs sont ...

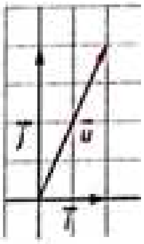
2. Utiliser la fiche pour tester l'alignement des points *A*, *B* et *C* dans chacun des cas suivants.
a. $A(-2\,;1)$, $B(1\,;-1)$ et $C(4\,;-3)$;
b. $A(-2\,;1)$, $B(2\,;-2)$ et $C(4\,;-3)$.

Aide

Pour déterminer s'il existe le nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (méthode 2), écrire le système obtenu à partir des coordonnées puis le résoudre.

79 Une erreur classique

On se place dans le repère non orthonormé ci-contre.



a. Lire les coordonnées de $\vec{u}$ dans ce repère.
b. Calculer $\|\vec{u}\|$.
c. Mesurer $\|\vec{u}\|$ sur le graphique.
Que constate-t-on ? Expliquer.

80 Vérifier une conjecture

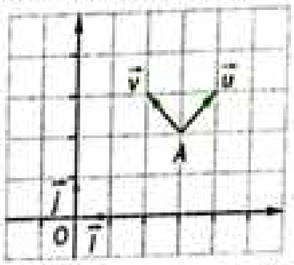
$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne les points $A(0\,;5)$, $B(7\,;0)$ et $C(4\,;2{,}1)$.
a. Faire une figure et conjecturer si les points *A*, *B* et *C* sont alignés.
b. Valider ou invalider la conjecture par un calcul.

Remarque

Ce que l'on voit n'est pas forcément vrai. Toute lecture graphique doit être, si possible, vérifiée par le calcul.

81 Changement de référentiel

En sciences physiques, il est courant de devoir changer de repère, appelé référentiel du système. L'objectif de cet exercice est de déterminer les formules de changement de référentiel.
$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne le point $A(3\,;2)$ et les vecteurs $\vec{u}(1\,;1)$ et $\vec{v}(-1\,;1)$.



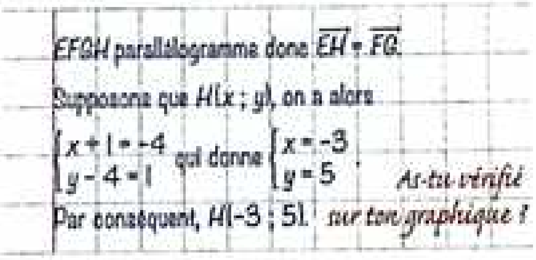
1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
3. *M* désigne un point dont les coordonnées sont $(x\,;y)$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et $(x'\,;y')$ dans le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.
a. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
b. Utiliser les résultats de la question 2. pour déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
c. En déduire les expressions de x' et y' en fonction de *x* et *y*.

82 Où est l'erreur ?

Énoncé

$E(-1\,;4)$, $F(-3\,;0)$ et $G(1\,;-1)$ désignent trois points.
Calculer les coordonnées du point *H* tel que *EFGH* soit un parallélogramme.

Voici un extrait d'une copie d'un élève et la remarque du professeur en rouge.



EFGH parallélogramme donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.
Supposons que $H(x\,;y)$, on a alors
$\begin{cases} x + 1 = -4 \\ y - 4 = 1 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$
Par conséquent, $H(-3\,;5)$.

As-tu vérifié sur ton graphique ?

1. Faire une figure et lire les coordonnées du point *H*.
2. a. Suivre l'indication du professeur afin de vérifier le résultat de l'élève.
b. Quelle est l'erreur commise ? Proposer une correction.

83 Démontrer une égalité

I désigne le milieu d'un segment [*AB*] et *J* désigne le symétrique de *I* par rapport à *B*.
Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$:
a. en utilisant la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{IJ}$;
b. en exprimant séparément $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{IB}$.

Aide

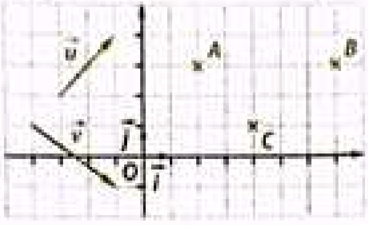
Pour démontrer une égalité, on peut :
- partir d'un des membres et aboutir par transformations au second ;
- faire deux calculs séparés qui aboutissent au même résultat.

Se tester

Vrai-faux

Top chrono (sans justification)

84 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
$(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan.



	vrai	faux
1. $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{v}$.	☐	☐
2. $\overrightarrow{BC}(3;2)$.	☐	☐
3. $\lVert\overrightarrow{AC}\rVert=2\sqrt{2}$.	☐	☐
4. $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	☐	☐
5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
6. $\det(\vec{u},\vec{v})=-10$.	☐	☐
7. $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-2\vec{j}$.	☐	☐

Avec justification

85 Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse.
$(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne les points $A(2;2)$, $B(5;4)$, $C(8;-1)$, $D(5;-3)$, $E(2;-4)$ et $F(7;-2)$.
M est le point tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

	vrai	faux
1. $ABCD$ est un parallélogramme.	☐	☐
2. $I\left(5;\frac{1}{2}\right)$ est le centre de $ABCD$.	☐	☐
3. Les points C, D et E sont alignés.	☐	☐
4. Le triangle ABF est isocèle.	☐	☐
5. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.	☐	☐
6. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.	☐	☐
7. $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CD})$ est une base.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

86 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
A, B, C, D et E désignent cinq points tels que :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}.$$

I est le milieu de $[CD]$.

1. a. $ABCD$ est un parallélogramme ;
   b. $ABDC$ est un parallélogramme ;
   c. $ACBD$ est un parallélogramme.
2. a. $AB+BC=AC$;
   b. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$;
   c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
3. a. Les points C, I et E sont alignés ;
   b. (CI) // (AB) ;
   c. C est le milieu de $[IE]$.
4. F désigne le point tel que $BDFE$ est un parallélogramme.
   a. D est le milieu de $[FC]$; b. $F=C$; c. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$.
5. G désigne le point symétrique de A par rapport à I.
   a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}$; b. $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}$; c. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{GC}$.

Avec justification

87 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
$(O;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan dans lequel on donne les points :

$$A(1;3),\ B(3;2),\ C(-1;-2) \text{ et } E(1;-3).$$

1. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :
   a. $\sqrt{2}$; b. 5 ; c. $\sqrt{5}$.
2. Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :
   a. $(2;5)$; b. $(-2;-5)$; c. $(0;1)$.
3. Le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme a pour coordonnées :
   a. $(-3;-1)$; b. $(1;-4)$; c. $(5;6)$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont :
   a. colinéaires ; b. opposés ; c. non colinéaires.
5. Les droites (AB) et (BE) sont :
   a. parallèles ; b. confondues ; c. sécantes.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

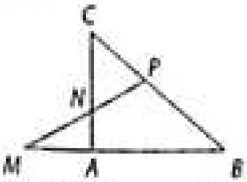
88 Un alignement, trois pistes

ABC désigne un triangle rectangle en *A*.

Les points *M*, *N* et *P* sont tels que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$.



On cherche à démontrer que les points *M*, *N* et *P* sont alignés.

Piste 1 – Conjecturer avec GeoGebra

a. Construire *ABC*.

b. Définir les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ en utilisant, dans la zone de saisie, la commande :

`Vecteur[<Origine>,<Extrémité>]`

c. Tracer les représentants de ces vecteurs en utilisant le bouton et renommer les points obtenus.

d. Tracer les droites (*MN*) et (*NP*) et tester leur égalité avec le bouton.

Piste 2 – Utiliser les vecteurs

a. Démontrer les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.$$

b. Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire que $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et conclure.

Piste 3 – Utiliser les coordonnées

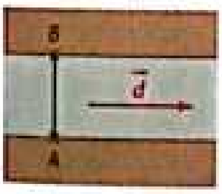
a. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère orthogonal du plan.

b. Calculer les coordonnées des points *M*, *N* et *P* dans ce repère.

c. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ et démontrer que ces deux vecteurs sont colinéaires. Conclure.

89 Objectif non atteint

On veut traverser une rivière de 40 m de largeur avec un bac pour aller du point *A* au point *B* perpendiculairement aux rives.



Le courant de la rivière est représenté par le vecteur $\vec{d}$ de norme égale à 3. Le déplacement du bac est donné par le vecteur $\vec{u}$ de direction (*AB*), de sens de *A* vers *B* et de norme égale à 10.

a. Déterminer en quel point *B'* le bac arrive.

b. D'où aurait-il dû partir pour arriver en *B* ?

c. Quelle aurait dû être la direction du bac pour arriver en *B* en partant de *A* ?

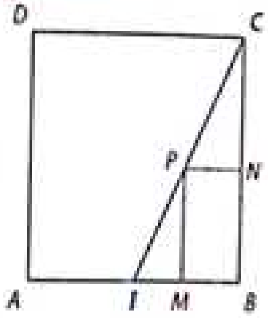
90 Démontrer sans coordonnées

ABCD désigne un carré.

I est le milieu de [*AB*].

M est un point du segment [*AB*] tel que *AM* = *x*.

On cherche la position du point *M* pour que *MBNP* soit un carré avec *P* sur le segment [*IC*].



1. Utiliser la relation de Chasles pour démontrer que :

$$\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IP}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{BC}.$$

2. On suppose que les points *I*, *P* et *C* sont alignés. Il existe donc un nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{IP}=k\overrightarrow{IC}$.

Utiliser les résultats de la question 1. pour écrire un système de deux équations d'inconnues *k* et *x*.

3. a. Résoudre le système.

b. En déduire que l'hypothèse de la question 2. est bien vérifiée.

4. Donner la position du point *M* sur le segment [*AB*].

91 Nature d'un quadrilatère

ABCD désigne un carré de centre *O*. Les points *I* et *J* sont les milieux respectifs des segments [*AB*] et [*CD*].

K est un point de [*BD*] autre que *O* et *L* son symétrique par rapport à *O*.

Le but de l'exercice est d'étudier la nature du quadrilatère *IKJL*.

a. Faire une figure.

b. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère du plan et donner les coordonnées de *I*, *J*, *K* et *L* dans ce repère.

c. Démontrer que *IKJL* est un parallélogramme.

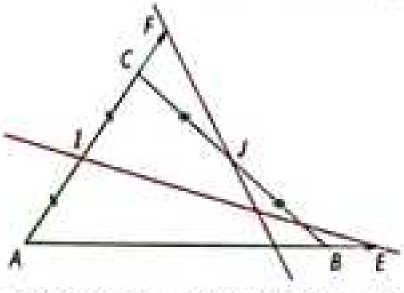
d. Existe-t-il une (ou plusieurs) position(s) du point *K* pour que *IKJL* soit un rectangle ?

92 Parallélisme

ABC désigne un triangle.

E est le point de (*AB*) tel que $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{AB}$ et *F* le point de (*AC*) tel que $\overrightarrow{CF}=m\overrightarrow{AC}$, *k* et *m* étant deux nombres réels.

I et *J* désignent les milieux respectifs de [*AC*] et [*BC*].



On veut déterminer les positions de *E* et *F* (s'il en existe), telles que (*IE*) // (*FJ*).

a. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées des points *I*, *J*, *F* et *E*.

b. Utiliser la colinéarité supposée des vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ pour établir une relation entre *k* et *m*.

c. On suppose $k=1$. Calculer *m*.

d. On suppose $k=-1$. Peut-on calculer *m* ?

Justifier cette réponse par une considération géométrique.

Exercices d'approfondissement

93 Qui a raison ?

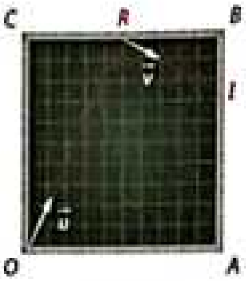
ABC désigne un triangle et *x* un nombre réel.
M et *N* sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}.$$

On veut savoir si $(MN) // (BC)$.

1. Justifier que, si $x = -2$, le problème ne se pose pas.
2. Ambe prétend que (MN) est toujours parallèle à (BC).
Nadiela prétend que cela dépend de la valeur de *x*.
a. Faire plusieurs figures pour tester la validité des deux affirmations précédentes (on pourra utiliser GeoGebra en se servant d'un curseur *x*). Qui semble avoir raison ?
b. Tester la colinéarité de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ par le calcul et conclure.

94 Jeu vidéo



Un écran de jeu vidéo est une grille 10 × 10.
Une balle part de *O* avec la direction du vecteur $\vec{u}(a\,;b)$ rebondit en *R* et repart avec la direction du vecteur $\vec{v}(b\,;-a)$ pour toucher le bord $[AB]$ en *I*.

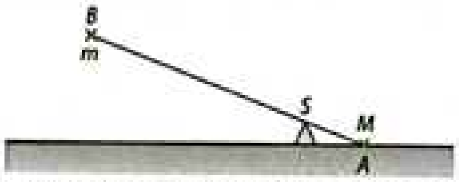
1. Étude d'un cas particulier
On suppose que $\vec{u}(1\,;2)$.
a. Utiliser la colinéarité pour démontrer que $R(5\,;10)$.
b. Déterminer les coordonnées de *I* en procédant comme à la question a.

2. Étude du cas général
On suppose maintenant que $\vec{u}(a\,;b)$, $b \neq 0$.
a. Déterminer les coordonnées de *R* en fonction de *a* et *b*.
b. En remarquant que *R* doit se situer entre *B* et *C*, démontrer que $0 \leqslant a \leqslant b$.
c. Déterminer les coordonnées de *I* en fonction de *a* et *b*.

3. La balle touche-t-elle toujours le bord $[AB]$?

95 En physique, le levier

Pour soulever une lourde charge, on dispose d'une barre de 3 m et d'un support *S*.



On veut savoir où poser le support pour soulever une charge plus lourde que soi.
Si *M* est la masse à soulever et *m* la masse de Dahirou, à l'équilibre on a $M\,\overrightarrow{SA} + m\,\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.
a. Exprimer $\overrightarrow{AS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
b. On suppose que $m = 60$ kg et $M = 240$ kg.
Déterminer la position du point *S*.
c. On suppose que $m = 60$ kg et $AS = 0{,}2$ m.
Quelle masse *M* Dahirou peut-il soulever ?

Info

On attribue au savant grec Archimède (III^{e} siècle av. J.-C.) la phrase : « Donnez-moi un point d'appui et un levier, et je soulèverai le monde ».

96 Construction possible

A et *B* désignent deux points tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = 6$.
Peut-on construire un point *C* tel que :
a. $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\| = 5$?
b. $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\| = 11$?
Si oui, proposer un programme de construction.

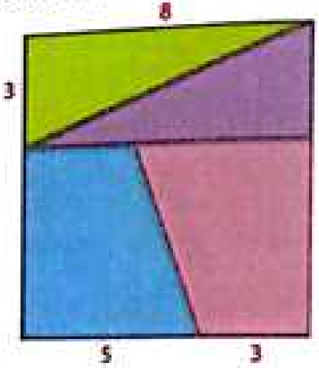
97 Un pentagone

ABCDE désigne un pentagone.
I, *J*, *K*, *L* et *M* sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ et $[EA]$.

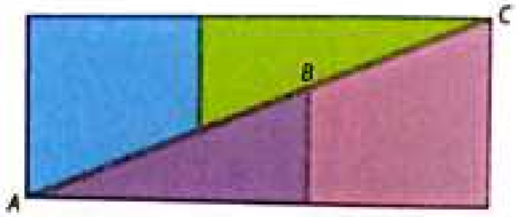
1. a. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
b. Démontrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$.
c. En déduire que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{LK}$.
2. Proposer un programme de construction d'un pentagone dont on connaît les milieux des côtés.

98 Le puzzle de Levis Caroll

Un carré de côté 8 est découpé en 4 pièces comme le montre la figure ci-dessous : deux triangles et deux trapèzes.



On réassemble le puzzle pour obtenir le rectangle ci-dessous.



a. Calculer l'aire du carré, puis celle du rectangle… Énigme !
b. Définir un repère d'origine *A* et déterminer les coordonnées des points *A*, *B* et *C*.
c. Utiliser ce repère pour donner une solution à l'énigme.

Info

Lewis Carroll est le pseudonyme d'un mathématicien britannique du XIX^{e} siècle, surtout connu pour son ouvrage pour enfants *Alice au pays des merveilles*.

99 Alignement

ABC désigne un triangle quelconque.

a. Construire les points *D* et *E* tels que :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

b. Démontrer, en utilisant deux méthodes différentes, que les points *A*, *D* et *E* sont alignés.

100 Deux losanges

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan dans lequel on place deux points $A(-3 ; 1)$ et $B(-1 ; 5)$.

On veut construire un losange *ABCD*.

1. Calculer *AB*.

2. L'abscisse de *D* est égale à 1 et son ordonnée est notée *y*.

a. Exprimer AD^2 en fonction de *y*.

b. En déduire une équation d'inconnue *y*.

c. Démontrer que l'équation obtenue a deux solutions correspondant à deux points D_1 et D_2 dont on donnera les coordonnées.

3. Déterminer ensuite les coordonnées des points C_1 et C_2 des deux losanges possibles.

4. L'une des deux figures semble être un carré.

Démontrer la validité ou non de cette conjecture en calculant la longueur des diagonales.

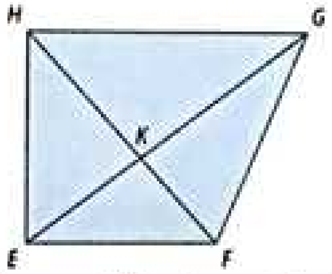
101 Lieu de points

EFGH désigne un trapèze rectangle de bases [*EF*] et [*GH*] et de hauteur [*EH*].

On donne $EF = 4$, $GH = 6$ et $EH = h$.

K désigne le point d'intersection des diagonales.

On veut déterminer le lieu des points *K* lorsqu'on fait varier *h*.



a. Faire plusieurs essais à la main ou en utilisant GeoGebra (avec un curseur) pour conjecturer la réponse.

b. Démontrer la conjecture.

102 Deux méthodes

ABCD désigne un parallélogramme.

1. Faire une figure et construire les points *M* et *N* tels que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}.$$

2. Sans coordonnées

a. Démontrer que $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b. En déduire que les points *D*, *C* et *N* sont alignés.

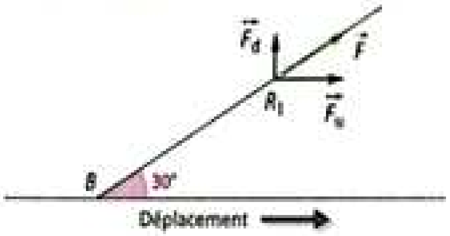
3. Avec coordonnées

a. Choisir un repère adapté au problème.

b. Déterminer les coordonnées des points *D*, *C* et *N* dans ce repère ; démontrer qu'ils sont alignés.

103 Remorquage

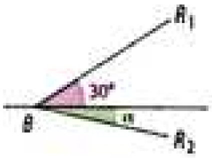
1. Un remorqueur R_1 tire un bateau *B* avec une force $\vec{F}$ d'intensité 16 000 N faisant un angle de 30° avec la direction du bateau.



$\vec{F}$ se décompose en $\overrightarrow{F_u}$, force utile de même direction que le déplacement, et $\overrightarrow{F_d}$, force de dérive, perpendiculaire.

Calculer les intensités de $\overrightarrow{F_u}$ et $\overrightarrow{F_d}$.

2. Pour compenser la dérive, on utilise un deuxième remorqueur R_2 exerçant une force de 20 000 N.



a. En décomposant la force de traction de R_2, calculer la valeur de l'angle α.

b. Quelle est l'intensité de la force réellement utile ?

104 Une condition vectorielle

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan.

A, *B* et *C* sont trois points du plan.

On s'intéresse à l'existence éventuelle d'un point *M* défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1. Deux cas particuliers

Faire une figure, puis discuter de l'existence de *M* dans les deux cas suivants :

a. $A(4 ; -1)$, $B(-2 ; 2)$, $C(-3 ; -1)$;

b. $A(4 ; 2)$, $B(-2 ; 2)$, $C(1 ; 2)$.

2. Cas général

Utiliser la relation de Chasles pour exprimer une condition nécessaire devant relier $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour assurer l'existence du point *M*.

105 Condition d'alignement

ABCD désigne un rectangle. Les points *P* et *R* sont tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{11}{7}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CR} = \frac{x}{3}\overrightarrow{CD}.$$

a. On suppose que $x = 2$.

Les points *B*, *P* et *R* sont-ils alignés ?

b. Déterminer le nombre réel *x* pour que les points *B*, *P* et *R* soient alignés.

3 Exercices d'approfondissement

106 Parallélisme

ABC désigne un triangle. A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
(Δ) et (Δ') sont les droites perpendiculaires à la droite (AB) respectivement en A et B.
La droite $(B'C')$ coupe la droite (Δ) en un point M.
La droite (MC) coupe la droite (Δ') en un point N.

1. Conjecture

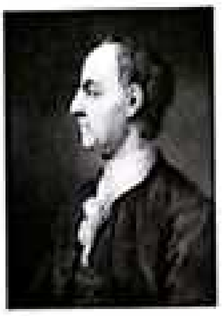
a. Faire une figure et conjecturer les positions des droites (AC) et (AN).
b. Faire d'autres figures ou utiliser GeoGebra pour valider cette conjecture.

2. Démonstration

a. Justifier que $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est un repère du plan.
b. Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' dans ce repère.
c. L'abscisse de M est égale à $\frac{1}{2}$. L'ordonnée de M sera notée k.

Utiliser l'alignement de M, C et N et la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$ pour déterminer les coordonnées du point N en fonction de k. Conclure.

107 Droite d'Euler



$(A ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan.
$B(3 ; 3)$ et $C(9 ; 0)$ sont deux points du plan situés dans ce repère.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. Centre de gravité G

Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

2. Centre du cercle circonscrit O

a. Remarquer que l'une des médiatrices est parallèle à l'un des axes du repère et en déduire l'une des coordonnées de O.
b. En utilisant l'égalité $OA = OB$, calculer l'autre coordonnée de O.

3. Orthocentre H

a. Remarquer que l'une des hauteurs est parallèle à l'un des axes du repère et en déduire l'une des coordonnées de H.
b. Déterminer le nombre réel k tel que :

$$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{OA'}.$$

c. En déduire la coordonnée manquante de H.

4. Démontrer que les points G, O et H sont alignés.

La droite obtenue s'appelle la droite d'Euler.

Remarque

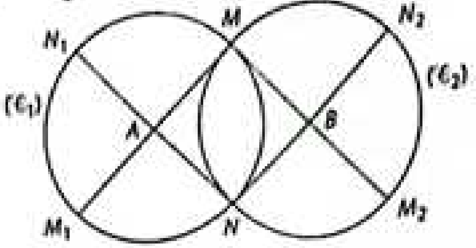
Cet exercice peut également être résolu avec des outils géométriques : voir chap. 4, ex. 106.

Info

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien suisse.
On lui doit des contributions très importantes notamment dans le calcul infinitésimal et dans la théorie des graphes.

108 Des cercles sécants

$(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ désignent deux cercles de même rayon, de centres respectifs A et B et sécants en M et N.
$[MM_1]$ et $[NN_1]$ désignent des diamètres de $(\mathscr{C}_1)$.
$[MM_2]$ et $[NN_2]$ désignent des diamètres de $(\mathscr{C}_2)$.



a. Démontrer que $ANBM$ est un parallélogramme.
b. Démontrer que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{N_1A}$ et que $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BN_2}$.
c. Démontrer que M est le milieu de $[N_1N_2]$.

109 Position d'un point

ABC désigne un triangle quelconque et k un nombre réel non nul.
D et E sont les deux points tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

K est le point d'intersection des droites (BD) et (CE).
L'objectif de cet exercice est de déterminer la position du point K.

1. Deux cas particuliers

a. On suppose que $k = 1$.
- Faire une figure.
- Démontrer que les points D et E sont confondus et que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
- En déduire la position du point K.

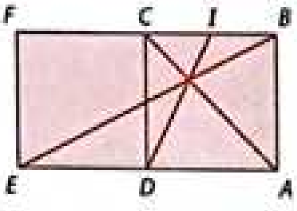
b. On suppose que $k = -1$.
- Faire une figure.
- Démontrer que les points D et E sont symétriques par rapport à A.
- M désigne le point tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{EC}$. Démontrer que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DB}$.
- En déduire la position du point K.

2. Cas général

On suppose maintenant que k est quelconque.
On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
a. Déterminer les coordonnées des points D et E dans ce repère.
b. Démontrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
c. K désigne le point tel que $ABKC$ soit un parallélogramme.
- Déterminer les coordonnées du point K.
- Démontrer que les points B, K et D sont alignés.
- Démontrer que les points C, K et E sont alignés.
- Conclure.

110 Droites concourantes

$ABCD$ et $DCFE$ désignent deux carrés représentés ci-dessous.
I désigne le milieu de $[BC]$.



Démontrer que les droites (EB), (AC) et (DI) sont concourantes.

4 Produit scalaire

Le mouvement des fluides, ici le déplacement de l'air lors du décollage d'un avion, est décrit par des équations utilisant le produit scalaire.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) est un mathématicien irlandais qui a contribué au développement de l'algèbre au XIX^e siècle. Il a effectué de nombreux travaux sur les vecteurs, notamment à l'occasion de ses recherches dans le domaine de l'optique géométrique.

Les objectifs du chapitre

- Exploiter les différentes expressions du produit scalaire pour résoudre des problèmes.
- Utiliser les propriétés du produit scalaire.
- Utiliser les formules d'Al-Kashi et les relations métriques dans le triangle.

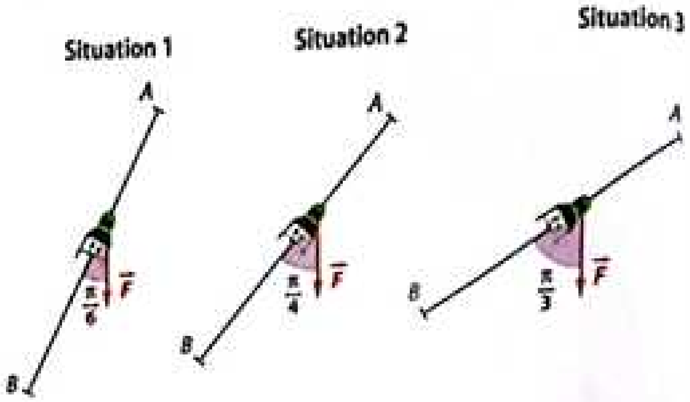
4 Activités d'introduction

Cours 1b

1 Poussé par le vent

Aujourd'hui le vent est très violent. Awasem a sorti son vélo et remarque qu'il peut se déplacer entre deux points sans pédaler, uniquement poussé par le vent.
Il teste ses déplacements dans trois situations différentes. La force exercée par le vent est notée $\vec{F}$.
L'énergie dépensée pour déplacer le vélo de A à B dépend de la longueur AB et de la force exercée $\vec{F}$.
En sciences physiques, on introduit la notion de travail, notée W, comme étant :
$W = AB \times \|\vec{F'}\|$ où $\vec{F'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{F}$ sur (AB).

1 **a.** Reproduire les situations ci-contre et construire le vecteur $\vec{F'}$.
b. Expliquer pourquoi
$W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{F}})$.
c. Sachant que, dans les trois situations, $AB = 10$ m et $\|\vec{F}\| = 2$, calculer le travail dans chaque situation.



2 Quelle est la valeur de W lorsque :
- $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires ?
- $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux ?

En mathématiques, on dira que W est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\vec{F}$ et on notera $W = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}_0$.

Cours 1c

2 Premières propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls du plan. A, B, C sont trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
On verra dans le paragraphe 1.b. du cours que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.

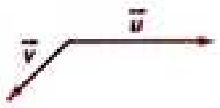
1 Signe d'un produit scalaire

a. Pour chacun des cas ci-dessous, justifier que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

①


②


③


④


b. Déterminer le signe de chacun des produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ci-dessus.

2 Déduire des propriétés

a. Justifier que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
(Penser à traiter le cas où $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est égal au vecteur nul.)
b. Justifier que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
c. Simplifier l'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions perpendiculaires ;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction mais des sens opposés ;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens.

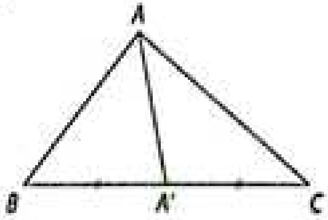
3 Théorème de la médiane

Cours 4C

1 Démonstration

ABC désigne le triangle ci-dessous dans lequel *A'* est le pied de la médiane issue de *A*.

L'objectif de cette question est de démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$.



a. Justifier l'égalité $AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)^2$.

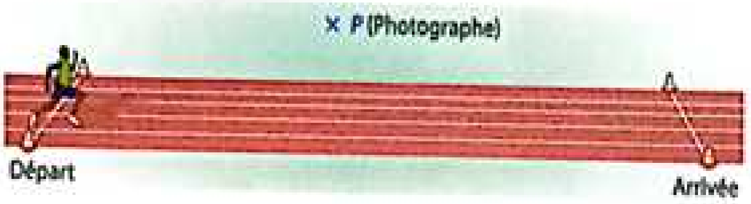
b. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}\right)$.

c. Exprimer *A'B* et *A'C* en fonction de *BC*, puis simplifier $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$.

d. Conclure.

2 Application

Un sprinter va s'élancer sur sa distance favorite : le 100 m.
Un photographe, noté *P*, situé à 60 m du départ du sprinter et à 50 m de son arrivée, souhaite déclencher son appareil à mi-course.



À quelle distance du sprinter le photographe se trouvera-t-il au moment de la photo ? Arrondir au dm.

4 Une autre formule de la médiane

Cours 4C

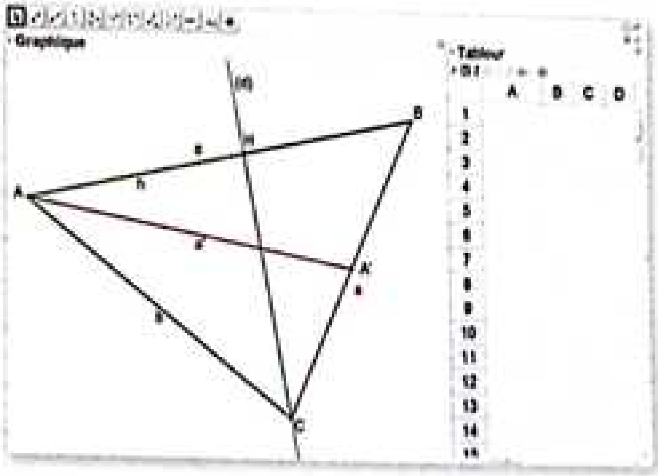
1 Conjecture

a. Ouvrir le logiciel Geogebra.
Construire un triangle *ABC*.
Noter *a* = *BC*, *b* = *AC*, *c* = *AB*.
Construire la perpendiculaire (*d*) à (*AB*) passant par *C*.

b. Dans le menu déroulant de l'icône ·^, choisir :

- ·˙ **Milieu ou centre** pour placer le milieu *A'* de [*BC*] ;
- ✕ **Intersection** pour placer le point d'intersection *H* de (*d*) et (*AB*).

Construire les segments [*AA'*] et [*CH*].
Noter *a'* = *AA'* et *h* = *AH*.



c. Cliquer sur Affichage, sélectionner ▦ **Tableur** pour faire apparaître la fenêtre Tableur à droite.
Dans la cellule A1, taper : a'2 – a2/4 ; dans la cellule A2, taper : C * h.
À l'aide de l'icône ✕, déplacer les points *A*, *B*, *C*. Qu'observe-t-on ?

d. Que représente le produit $c \times h$ pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Compléter la conjecture : $AA'^2 - \frac{BC^2}{4} = \ldots$.

2 Démonstration de la conjecture

a. Utiliser une relation dite d'Al-Kashi du paragraphe 4 **b** du cours pour montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

b. À l'aide du théorème de la médiane vu à l'activité 3, en déduire que $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = a'^2 - \frac{a^2}{4}$.

c. Conclure.

4 Cours

1 Définition et premières propriétés

a Mesure algébrique

Définition

$(\mathscr{D})$ désigne une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{i}$.
A et B sont deux points de $(\mathscr{D})$. La mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{i}$ est le nombre noté $\overline{AB}$, tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.

Exemple

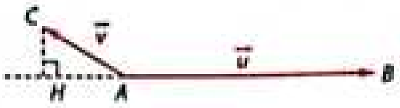
$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i}$ donc $\overline{AB} = -2 = -AB$.

b Produit scalaire de deux vecteurs

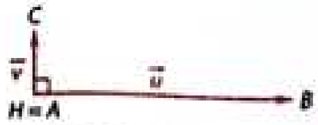
Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls du plan. A, B et C sont trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.
Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} = AB \times AH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} = -AB \times AH$



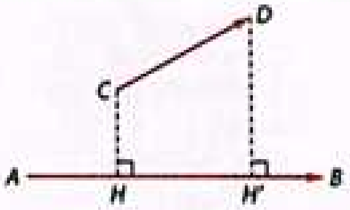
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} = 0$

Remarques

- Ici, on oriente « implicitement » la droite (AB) à l'aide d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ de même sens que $\overrightarrow{AB}$.
Choisir un vecteur $\vec{i}$ de sens contraire ne changerait pas le résultat de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- On peut, indifféremment, considérer le projeté orthogonal H de C sur (AB) ou le projeté orthogonal K de B sur (AB). On a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \overline{AK} \times \overline{AC}$.

Propriété

A, B, C et D désignent quatre points du plan, avec $A \neq B$.
On note H (respectivement H') le projeté orthogonal de C (respectivement de D) sur (AB).
On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HH'}$.



c Produit scalaire et cosinus

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls du plan. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Remarque Même si le plan est supposé orienté, la valeur de $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ne dépend pas de cette orientation car $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$. En conséquence, pour $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Conséquences

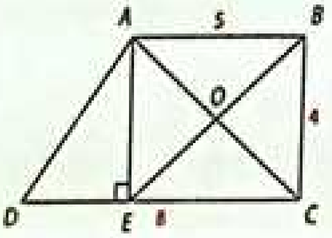
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire.

4 Savoir-faire

1 Calculer le produit scalaire

$ABCD$ désigne le trapèze rectangle représenté ci-contre.
E est le pied de la hauteur issue de A et O le centre du rectangle $ABCE$.
Calculer les produits scalaires suivants :
a. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$; b. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}$; c. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DE}$.



Solution commentée

a. E est le projeté orthogonal de A sur (DE), donc :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DE}\times\overline{DC}=3\times8=24.$$

b. B (respectivement C) est le projeté orthogonal de A (respectivement D) sur (BC), donc :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{CB}\times\overline{BC}=-4\times4=-16.$$

c. On note H le projeté orthogonal de O sur $[EC]$. Puisque O est le milieu de $[AC]$, H est le milieu de $[EC]$ et $EO=2{,}5$.

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DE}=\overline{EH}\times\overline{DE}=2{,}5\times3=7{,}5.$$

Méthode

La figure de l'énoncé contient beaucoup d'angles droits : penser à utiliser le produit scalaire et les projetés orthogonaux.

On peut, soit :

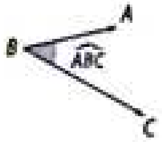
- utiliser la définition (comme dans le a.) ;
- utiliser la propriété (comme dans le b.) ;
- créer un point et se ramener aux cas précédents (comme dans le c.).

2 Déterminer la mesure d'un angle géométrique

A, B, C désignent trois points du plan tels que : $AB=2$, $BC=4$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-4\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.

Solution commentée

On sait que :
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$.
Or, (d'après la remarque du paragraphe 1 c du cours)
$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})=\cos\widehat{ABC}$.



Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$,
ainsi, $-4\sqrt{3}=2\times4\times\cos\widehat{ABC}$, d'où $\cos\widehat{ABC}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut en déduire que mes $\widehat{ABC}=\dfrac{5\pi}{6}$ rad.

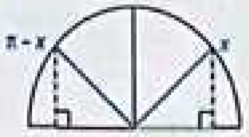
Méthode

L'énoncé parle de mesure d'angle : penser à utiliser le produit scalaire et le cosinus.
Faire une figure pour éviter les erreurs sur le choix de l'angle.

Rappels

$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(\pi-x)=-\cos x$

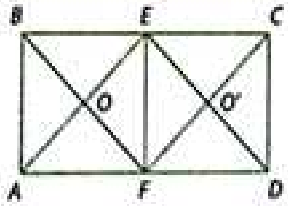
donc $\cos\dfrac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



S'exercer

3 Le rectangle $ABCD$ ci-dessous est constitué de deux carrés de côté 10, de centres O et O'.
Calculer les produits scalaires :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$;
b. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FC}$;
c. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EC}$;
d. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{O'O}$.



4 DEF désigne un triangle tel que :
$DE=5$; $EF=8$ et $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}=20$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{DEF}$.

5 GHI désigne un triangle tel que :
$GH=7$ et $IH=\sqrt{2}$.
Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HI}})$ dans les cas suivants :
a. $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HI}=7$; b. $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HI}=-7$.

2 Produit scalaire et orthogonalité

Notation $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent désignent deux vecteurs. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions orthogonales.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarques • Deux droites (AB) et (CD) sont orthogonales, si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

• Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

3 Propriétés et autres formules du produit scalaire

a Carré scalaire

Définition

Le **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre, noté $\vec{u}^2$, égal à $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

b Règles de calculs

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u'}$, $\vec{v}$, $\vec{v}$ et pour tout nombre réel k,

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v'}$;
- $(\vec{u} + \vec{u'}) \cdot (\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v'} + \vec{u'} \cdot \vec{v} + \vec{u'} \cdot \vec{v'}$;
- $(\vec{u} + \vec{u'}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u'} \cdot \vec{v}$;
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

c Produit scalaire et parallélogramme

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Remarque

Cette formule, appelée règle du parallélogramme, fournit une expression du produit scalaire qui n'utilise que des normes.

d Produit scalaire et repère orthonormé

Propriété

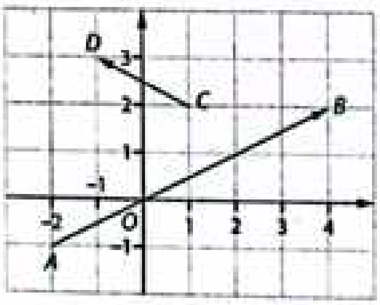
Pour tous vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ d'une base orthonormée,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Exemple

Dans le repère orthonormé ci-contre, $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;2)$, $C(1\,;2)$; $D(-1\,;3)$, donc $\overrightarrow{AB}(6\,;3)$ et $\overrightarrow{CD}(-2\,;1)$.

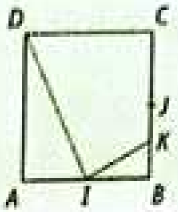
Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times (-2) + 3 \times 1 = -9$.



4 Savoir-faire

6 Étudier l'orthogonalité de deux droites

ABCD désigne le carré ci-contre.
On note *I*, *J* et *K* les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*] et [*BJ*].
Démontrer que les droites (*DI*) et (*IK*) sont orthogonales.



Solution commentée

1. On sait que $(DI) \perp (IK) \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$.
2. Or, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$.
3. Donc $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{DI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK})$
   d'où $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BK}$ (d'après les règles de calcul).
   Or, d'une part, *A* est le projeté orthogonal de *D* sur (*IB*),
   donc $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overline{AI} \times \overline{IB} = \overline{IB} \times \overline{IB} = IB^2$; d'autre part,
   C et *B* sont les projetés orthogonaux de *D* et *I* sur (*BK*),
   donc $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BK} = \overline{CB} \times \overline{BK} = 2\overline{JB} \times \frac{1}{2}\overline{BJ} = \overline{JB} \times \overline{BJ} = -BJ^2$.
   Ainsi, $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IK} = IB^2 - BJ^2 = 0$ (car *ABCD* est un carré, donc $IB = BJ$).
   Les droites (*DI*) et (*IK*) sont donc orthogonales.

Méthode

1. Traduire l'orthogonalité à l'aide d'un produit scalaire égal à 0.
2. Utiliser la relation de Chasles pour décomposer l'un des vecteurs.
3. Mener les calculs à l'aide des règles du paragraphe **3.** du cours afin de faire apparaître des produits scalaires faciles à déterminer.

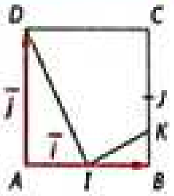
Notation

Le symbole ⇔ signifie « si, et seulement si, » ou encore « est équivalent à ».

7 Utiliser l'expression analytique du produit scalaire

On reprend la situation de l'exercice 6. Utiliser l'expression analytique du produit scalaire pour démontrer que les droites (*DI*) et (*IK*) sont orthogonales.

Solution commentée



1. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$.
   ABCD est un carré, donc le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.
2. Dans ce repère, $D(0 ; 1)$, $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ et $K\left(1 ; \frac{1}{4}\right)$.
   Ainsi, $\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{2} ; -1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$.
3. On en déduit que $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.
   D'où $\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{IK}$ et les droites (*DI*) et (*IK*) sont orthogonales.

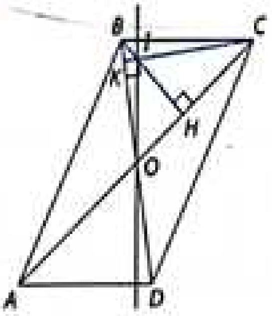
Méthode

L'expression analytique du produit scalaire n'est valable que dans une base (ou un repère) orthonormée.

1. Lorsque la figure donnée contient un carré, il peut être judicieux de nommer un repère orthonormé.
2. Indiquer alors les coordonnées des points et des vecteurs utilisés.
3. Conclure en utilisant l'expression analytique du produit scalaire.

S'exercer

8 *ABCD* désigne le parallélogramme de centre *O* ci-contre.
Utiliser les codages de la figure pour montrer que :
$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



9 *ABCD* désigne un carré de centre *O*.
On note *A'* le symétrique de *A* par rapport à *D* et *B'* le symétrique de *B* par rapport à *A*.

1. Faire une figure.

2. a. Déterminer les coordonnées de chacun des points dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

b. En déduire que les droites (*OA'*) et (*OB'*) sont perpendiculaires.

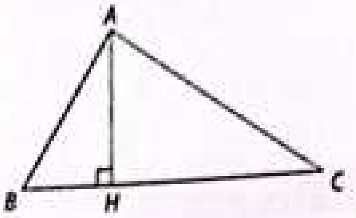
4 Relations métriques dans un triangle

a Cas particulier du triangle rectangle

Propriété

ABC désigne un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.
Les énoncés suivants sont équivalents :

- le triangle ABC est rectangle en A ;
- $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$;
- $BC^2 = BA^2 + AC^2$;
- $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

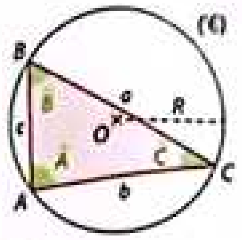


b Relations dites d'Al-Kashi

Propriétés

ABC désigne un triangle d'aire $\mathscr{A}$.
On note R le rayon de son cercle circonscrit $(\mathscr{C})$
et $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

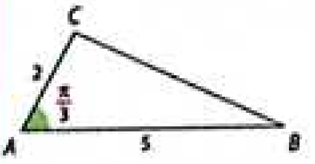
- $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$;
- $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathscr{A}} = 2R$;
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$.



Remarques

- Ces relations, dites d'Al-Kashi, permettent, entre autres, de calculer des longueurs ou de déterminer des mesures d'angles.
- Lorsque ABC est un triangle rectangle en A, on a $\cos \widehat{A} = 0$ et on retrouve la propriété de Pythagore.

Exemple



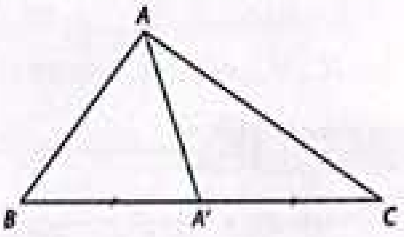
- L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC ci-contre est $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
- $a^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 4 + 25 - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 19$,
donc $a = \sqrt{19}$.
- Le rayon R de son cercle circonscrit vérifie $\frac{\sqrt{19}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R$ donc $R = \sqrt{\frac{19}{3}}$.

c Théorème de la médiane

Propriétés

ABC désigne un triangle et A' le pied de la médiane issue de A. On a :

- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.



Remarques

- Les points A, B, C et A' jouent des rôles symétriques. On peut ainsi établir des relations analogues avec B' et C' pieds des hauteurs issues de B et de C.
Par exemple, $BC^2 + BA^2 = 2BB'^2 + \frac{AC}{2}$ ou encore $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CC'^2 - \frac{AB^2}{4}$.
- Pour calculer AB^2, on peut désormais utiliser le produit scalaire $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

10 Calculer la mesure des angles d'un triangle

ABC désigne un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 7$ et $AC = 10$.

a. Calculer une valeur arrondie au centième de radian de la mesure des angles du triangle *ABC*.

b. En déduire une valeur arrondie au dixième de l'aire du triangle *ABC*.

c. En déduire une valeur arrondie au dixième du rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

Solution commentée

a. Avec les notations du cours, on a $a = 7,\ b = 10,\ c = 5$.

Or, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$, donc $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ainsi, $\cos\hat{A} = \dfrac{10^2 + 5^2 - 7^2}{2\times10\times5} \approx 0{,}76$ d'où $\text{mes}\,\hat{A} \approx 0{,}71$ rad.

• De même, $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Ainsi, $\cos\hat{B} = \dfrac{7^2 + 5^2 - 10^2}{2\times7\times5} \approx -0{,}37$ d'où $\text{mes}\,\hat{B} \approx 1{,}95$ rad.

• $\text{mes}\,\hat{A} + \text{mes}\,\hat{B} + \text{mes}\,\hat{C} = \pi$ d'où $\text{mes}\,\hat{C} \approx 0{,}48$ rad.

b. D'après le cours, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle est :

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A} \approx \dfrac{1}{2}\times10\times5\sin0{,}71 \approx 16{,}3$.

c. D'après le cours, on a $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$, ainsi :

$\dfrac{7}{\sin0{,}71} \approx 2R$ d'où $R \approx 5{,}4$.

Méthode

Les relations d'Al-Kashi permettent de calculer longueur, aire, mesures d'angles et rayon du cercle circonscrit.

Pour ce type d'exercice, il suffit d'observer les données de l'énoncé et la question posée pour choisir la formule appropriée.

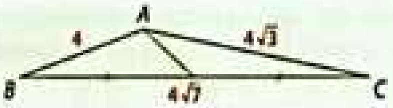
Remarque

Pour déterminer la mesure d'un angle à partir de son sinus ou de son cosinus, on utilise :
- soit la calculatrice ;
- soit les angles remarquables.

Mesure	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

11 Calculer la longueur d'une médiane

ABC désigne le triangle ci-contre.
Calculer la longueur exacte de la médiane issue de *A*.



Solution commentée

On note *A'* le milieu de [*BC*].

D'après le cours, $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$,

ainsi, $4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 2AA'^2 + \dfrac{\left(4\sqrt{7}\right)^2}{2}$.

C'est-à-dire $16 + 48 = 2AA'^2 + 56$.
D'où $AA'^2 = 4$ et $AA' = 2$.

Méthode

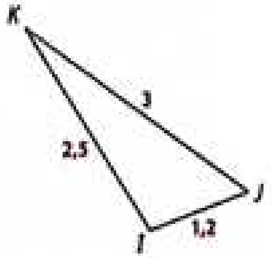
Utiliser la formule appropriée du cours en étant attentif à ne pas intervertir les points.

Rappel

Pour tous *a*, *b* nombres réels, $b > 0$,
$\left(a\sqrt{b}\right)^2 = a^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a^2 \times b$.

S'exercer

12 a. Calculer une valeur arrondie au centième des mesures des angles du triangle *IJK* ci-contre.
b. En déduire une valeur arrondie au dixième du rayon de son cercle circonscrit.

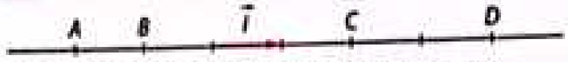


13 *ABC* désigne un triangle tel que :
$a = BC = 4,\ b = AC = 5,\ c = AB = 7$.
On note *I*, *J* et *K* les milieux respectifs de [*BC*], [*AC*] et [*AB*].
a. Faire une figure.
b. Calculer les longueurs *AI*, *BJ* et *CK*.
c. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
d. En déduire une mesure arrondie au dixième de radian de l'angle $\widehat{BAC}$.

Produit scalaire et projeté orthogonal

Réponses rapides

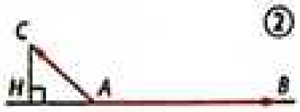
14 La droite (*AB*) ci-dessous est orientée par le vecteur unitaire $\vec{i}$.

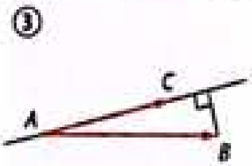


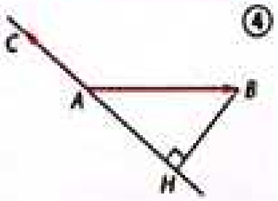
Donner la valeur des mesures algébriques suivantes :
a. $\overline{AB}$; b. $\overline{BC}$; c. $\overline{CB}$; d. $\overline{DA}$.

15 Donner la valeur des mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$,
a. lorsque la droite ($\mathscr{D}$) est orientée par le vecteur unitaire $\vec{i}$;
b. lorsque la droite ($\mathscr{D}$) est orientée par le vecteur unitaire $\vec{j}$.

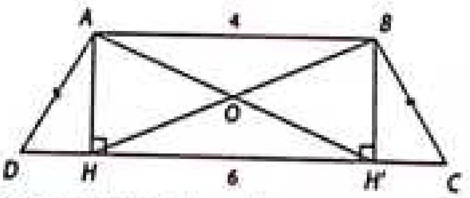
16 Pour chacune des situations ci-dessous, donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:
a. en utilisant des mesures algébriques ;
b. en utilisant des distances.







17 *ABCD* désigne un trapèze isocèle. *H* (respectivement *H'*) est le pied de la hauteur issue de *A* (respectivement de *B*). *O* est le point d'intersection de (*BH*) et (*AH'*).

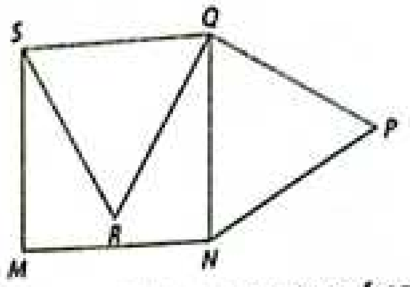


Calculer les produits scalaires suivants :
a. $\overrightarrow{HH'}\cdot\overrightarrow{HB}$; b. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$;
c. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}$; d. $\overrightarrow{OH'}\cdot\overrightarrow{BA}$.

18 *ABCD* désigne le carré de côté 1 ci-contre.
Calculer :
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; b. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$;
c. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}$.

19 *EFG* désigne un triangle équilatéral de côté *c*. *I* est le milieu de [*FG*].
Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de *c* :
a. $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$; b. $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{FG}$; c. $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EF}$; d. $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{IF}$.

20 La figure ci-dessous est constituée d'un carré de côté *c* et de deux triangles équilatéraux.



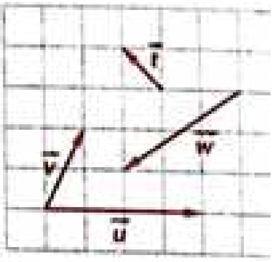
a. Exprimer la hauteur *h* d'un des triangles en fonction de *c*.
b. Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de *c* :
- $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PN}$; - $\overrightarrow{QN}\cdot\overrightarrow{RQ}$; - $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RQ}$.

21 **Propriété du cours**
Le but de cet exercice est de démontrer la propriété du paragraphe **1 b** du cours.

a. Reproduire la figure ci-dessus et construire le point *E* tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$.
b. Construire les points suivants :
- *K* projeté orthogonal de *D* sur (*CE*) ;
- *H* (respectivement *H'*) projeté orthogonal de *C* (respectivement *D*) sur (*AB*).

c. Justifier que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{AB}\times\overline{HH'}$.

22 Les carreaux du quadrillage ci-contre ont pour côté 1 unité.
Calculer les produits scalaires suivants :
a. $\vec{u}\cdot\vec{u}$; b. $\vec{u}\cdot\vec{v}$;
c. $\vec{u}\cdot\vec{w}$; d. $\vec{u}\cdot\vec{t}$.



23 *MNP* désigne un triangle isocèle en *N* tel que :
MN = 5 cm et *MP* = 3 cm.
H est le pied de la hauteur issue de *N*.
a. Faire une figure.
b. Calculer les produits scalaires suivants :
- $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$; - $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PM}$; - $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{PM}$.

c. *H'* est le pied de la hauteur issue de *P*.
Calculer *PH'*.

24 Dans chacun des cas, construire un triangle *ABC* tel que
a. *AB* = 10, *AC* = 4, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=15$;
b. *AB* = 6, *AC* = 3, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12$.

Aide

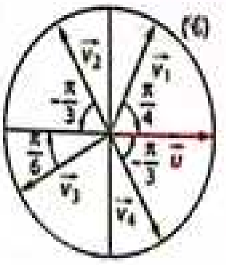
Tracer un segment [*AB*] qui convient.
Utiliser le compas pour déterminer les lieux possibles pour *C* ;
puis le produit scalaire pour les lieux possibles du projeté
orthogonal de *C* sur (*AB*).

Produit scalaire et cosinus

Réponses rapides

25 Le cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre a pour rayon 1. Calculer les produits scalaires suivants :

- $\vec{u}\cdot\vec{v_1}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v_2}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v_3}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v_4}$.



26 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants :

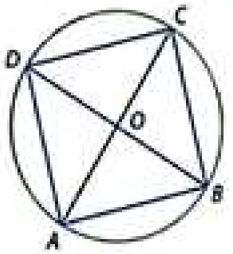
a. $\|\vec{u}\|=3,\ \|\vec{v}\|=4,\ \text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\pi}{4}$;

b. $\|\vec{u}\|=10,\ \|\vec{v}\|=1,\ \text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=-\frac{\pi}{6}$;

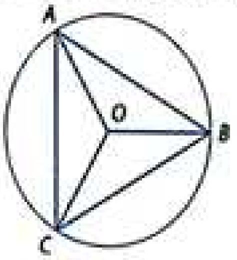
c. $\|\vec{u}\|=0{,}1,\ \|\vec{v}\|=20,\ \text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\pi$.

27 Dans chacun des cas ci-dessous, le cercle ($\mathscr{C}$) a pour centre O et pour rayon 4.

a. *ABCD* est un carré.



b. *ABCD* est un triangle équilatéral.



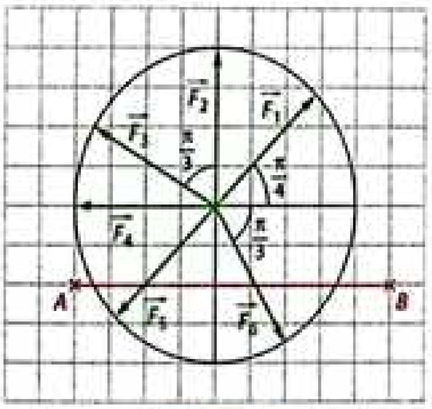
Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$;
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}$;
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

28 En sciences physiques, le travail, noté W, d'une force constante $\vec{F}$ utilisée pour déplacer un objet sur un trajet rectiligne entre deux points A et B est :

$$W=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}.$$

Utiliser le schéma ci-dessous pour calculer le travail des forces $\vec{F_1}$ à $\vec{F_6}$ pour déplacer un objet de A à B.



Remarque

La distance AB est exprimée en mètres (m) ;
la norme $\|\vec{F}\|$ du vecteur est exprimée en newton (N) ;
le travail W est exprimé en joules (J). Ainsi, 1 J = 1 N·m.

29 Un cheval tire une charrette le long d'une route rectiligne en exerçant une force $\vec{F}$ comme indiqué sur le schéma.

L'angle formé avec l'horizon mesure $\frac{\pi}{12}$ rad.

a. À l'aller, la charrette est vide et le cheval exerce une force $\vec{F}$ d'intensité 3 000 N.
Calculer le travail W, en J, pour un trajet de 50 m ; puis de 1 km.

b. Au retour, la charrette est pleine et le cheval produit un travail de 300 000 J pour un déplacement de 100 m.
Calculer l'intensité de la force $\vec{F}$ fournie. Arrondir à la centaine.

30 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs du plan.
Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans les cas suivants :

a. $\|\vec{u}\|=4,\ \|\vec{v}\|=2,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=-4\sqrt{2}$;

b. $\|\vec{u}\|=3,\ \|\vec{v}\|=4,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=6\sqrt{3}$.

Aide

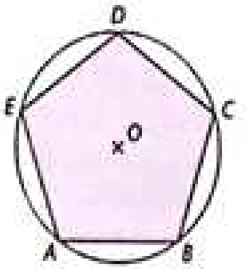
Utiliser les angles remarquables.

31 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs du plan.
Utiliser la calculatrice pour donner une valeur arrondie d'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans les cas suivants :

a. $\|\vec{u}\|=\sqrt{3},\ \|\vec{v}\|=5,\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-1$;

b. $\|\vec{u}\|=7,\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{2},\ \vec{u}\cdot\vec{v}=4\sqrt{3}$.

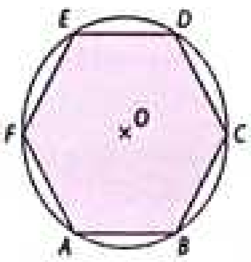
32 Le pentagone régulier *ABCDE* ci-contre est inscrit dans le cercle de centre O. $AB=5$.
Utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ pour calculer une valeur arrondie au dixième de BD.



33 L'hexagone régulier *ABCDEF* ci-contre est inscrit dans le cercle de centre O. $AB=4$.
Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$;

b. $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OE}$.



34 A et B désignent deux points tels que $AB=1$.

a. Construire le ou les ensembles de points M tels que :

$$AM=1 \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=1.$$

b. Construire le ou les ensembles de points M tels que :

$$AM=1 \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}.$$

Exercices d'entraînement

Règles de calcul

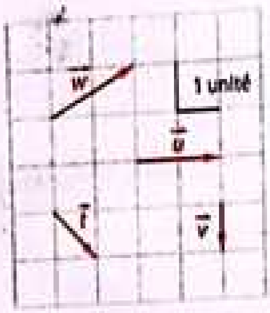
Réponses rapides

35 Utiliser le quadrillage ci-contre pour calculer les carrés scalaires suivants :

a. $\vec{u}^2$; b. $\vec{v}^2$;

b. $\vec{w}^2$; d. $\vec{t}^2$;

e. $(\vec{u}+\vec{v})^2$; f. $(\vec{v}+\vec{t})^2$.



36 **Propriété du cours**
Justifier que, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
(Penser à distinguer les cas $\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$.)

37 *ABC* désigne un triangle rectangle en *A*. *H* est le pied de la hauteur issue de *A*.
a. Faire une figure.
b. Démontrer que $BA^2 = \overline{BC}\times\overline{BH}$.

aide
Dans ce chapitre, lorsqu'on parle du carré d'une longueur, il faut avoir le réflexe de penser au carré scalaire.
Exemple : $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}$.

38 **Propriétés du cours**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs quelconques.
1. Démontrer chacune des identités remarquables :
a. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
b. $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
c. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.
2. Déduire de l'une de ces identités remarquables la règle du parallélogramme :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Pour les exercices 39 à 41, calculer les valeurs de $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$ et $\left(3\vec{u}+4\vec{v}\right)^2$.

39 $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=1$, $\text{mes}\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.

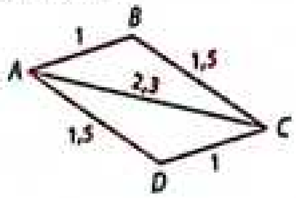
40 $\|\vec{u}\|=0{,}1$, $\|\vec{v}\|=0{,}4$, $\text{mes}\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\frac{\pi}{4}$.

41 $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{3}$, $\text{mes}\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$.

42 *ABCD* désigne un parallélogramme.
Démontrer que :
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$.

aide
Utiliser une identité remarquable.

43 Utiliser la règle du parallélogramme pour calculer une valeur arrondie au dixième de $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.



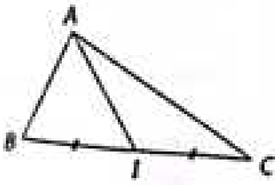
44 *IJK* désigne un triangle tel que :
$IJ = 2$, $IK = 3$ et $JK = 4$.
a. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{JK}$ puis $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KI}$.
b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{I}$. Arrondir au dixième.

aide
Utiliser la règle du parallélogramme.

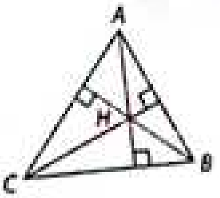
45 **Propriétés du cours**
ABC désigne un triangle. *I* est le milieu de [*BC*].
Démontrer que :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

aide
$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = \ldots$



46 *ABC* désigne un triangle d'orthocentre *H*.
Démontrer que :
$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$.

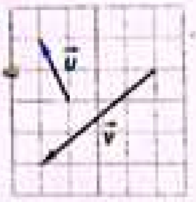


Expression analytique du produit scalaire

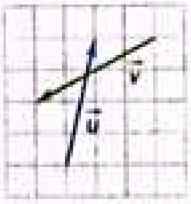
Réponses rapides

47 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

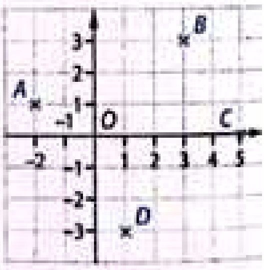
a.



b.



48 Utiliser le repère orthonormé ci-contre pour calculer les produits scalaires suivants.
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;
b. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$;
c. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$;
d. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}$.



49 Utiliser l'expression analytique du produit scalaire dan un repère orthonormé pour retrouver la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

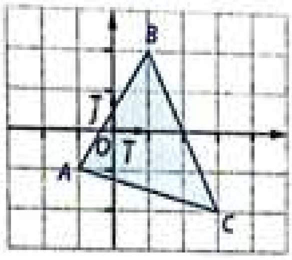
Pour les exercices 50 à 52, le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\vec{v}^2$ et donner une valeur arrondie au dixième de radian de mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

50 a. $\vec{u}(2\,;3)$, $\vec{v}(-1\,;4)$; b. $\vec{u}(4\,;0)$, $\vec{v}(-1\,;5)$.

51 a. $\vec{u}\left(\sqrt{2}\,;-1\right)$, $\vec{v}\left(1\,;\sqrt{3}\right)$; b. $\vec{u}\left(3\,;\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}\left(-\frac{1}{5}\,;4\right)$.

52 a. $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{v}=-\frac{1}{5}\vec{i}+2\vec{j}$;
b. $\vec{u}=\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{5}\,\vec{j}$, $\vec{v}=\sqrt{50}\,\vec{i}-\sqrt{5}\,\vec{j}$.

53 Utiliser le produit scalaire pour donner une valeur approchée au dixième de la mesure des angles du triangle *ABC*.

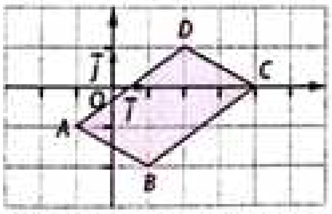


54 **Propriétés du cours**
Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{u'}(x'\,;y')$, $\vec{v}(z\,;t)$, $\vec{v'}(z'\,;t')$ quatre vecteurs quelconques et *k* un nombre réel.
Démontrer les égalités suivantes :
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$;
b. $(\vec{u}+\vec{u'})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u'}\cdot\vec{v}$;
c. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{v'})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v'}$;
d. $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$.

55 λ désigne un nombre réel. $A(5\,;\lambda)$ et $B(2\,;0)$ sont deux points d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer λ pour que :
a. mes $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{3}$; b. mes $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{4}$.

56 $\vec{u}(5\,;-5)$, $\vec{v}(-2\,;-4)$ et $\vec{w}(-3\,;-1)$ désignent trois vecteurs d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{w}\cdot\vec{v}$.
b. Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, placer les points *U*, *V* et *W* tels que $\overrightarrow{OU}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OW}=\vec{w}$.
Comment interpréter graphiquement le résultat du a. ?

57 a. Démontrer que le quadrilatère *ABCD* ci-dessous est un parallélogramme.

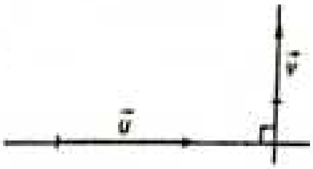


b. Déterminer la longueur de ses côtés et une valeur arrondie au dixième de la mesure de ses angles.
c. Vérifier que la somme des carrés de ses diagonales est égale à la somme des carrés de ses côtés.

Produit scalaire et orthogonalité

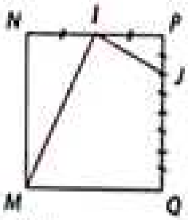
Réponses rapides

58 $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire et $\|\vec{v}\|=2\|\vec{u}\|$.
Donner la valeur des produits scalaires suivants :
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$; b. $\vec{u}^2$;
c. $-\vec{v}^2$; d. $\vec{u}^2+\vec{v}^2$.



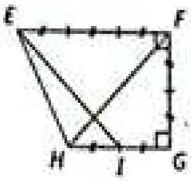
59 On travaille dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ orthonormée.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous sont-ils orthogonaux ?
a. $\vec{u}(-1\,;4)$, $\vec{v}\left(4\,;\frac{1}{4}\right)$;
b. $\vec{u}(2\,;0{,}2)$, $\vec{v}(0{,}5\,;-5)$;
c. $\vec{u}(\sqrt{2}\,;-\sqrt{3})$, $\vec{v}(-\sqrt{3}\,;-\sqrt{2})$;
d. $\vec{u}(1+\sqrt{5}\,;4)$, $\vec{v}(4\,;-\sqrt{5})$.

60 *MNPQ* désigne le carré ci-dessous.



Démontrer que $(MI)\perp(IJ)$.

61 *EFGH* désigne le trapèze rectangle ci-contre.
I est le milieu de [*GH*].
a. Utiliser la relation de Chasles pour montrer que :
$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FG}^2+\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GH}$.



b. Utiliser l'égalité $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GI}$ pour calculer $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GH}$.
c. En déduire que les droites (*EI*) et (*FH*) sont perpendiculaires.

62 **Propriété du cours**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désigne deux vecteurs quelconques du plan.
Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.
(Penser à traiter les cas où $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.)

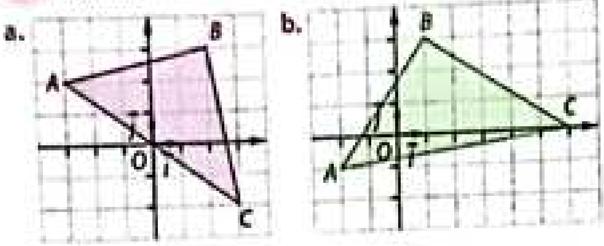
Aide
Pour démontrer que $\mathcal{P}\Leftrightarrow\mathcal{Q}$, on peut démontrer que $\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}$ (si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie), puis que $\mathcal{Q}\Rightarrow\mathcal{P}$ (si $\mathcal{Q}$ est vraie alors $\mathcal{P}$ est vraie).

63 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs quelconques du plan.
Démontrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$.

64 On travaille dans un repère orthonormé. $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de diamètre [*AB*] où $A(-2\,;1)$ et $B(5\,;4)$.
Parmi les points ci-dessous, indiquer ceux qui appartiennent à $(\mathscr{C})$.
a. $C(0\,;-1)$; b. $D(4\,;0)$; c. $E(3\,;6)$; d. $F(-2\,;4)$.

Exercices d'entraînement

65 Déterminer la nature des triangles ci-dessous.



66 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2},\ \|\vec{v}\| = 5 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v} = 7.$$

On pose $\vec{i} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{j} = -3\vec{u} + \vec{v}$.
Démontrer que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan.

67 $(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormée du plan.

a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \text{ et } \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est-il une base :
- orthonormée du plan ?
- orthogonale du plan ?

b. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs tels que :

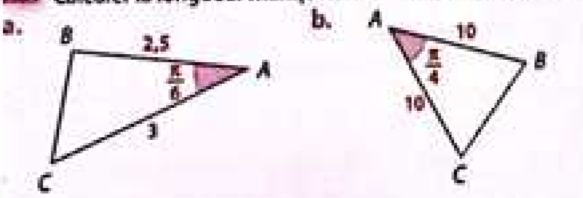
$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{13}}(\vec{u} + \vec{v}) \text{ et } \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{u} - \vec{v}).$$

- Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils unitaires ?
- La base $(\vec{a}, \vec{b})$ est-elle orthonormée ?

Relations métriques dans un triangle

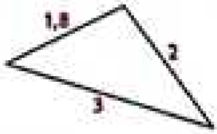
Réponses rapides

68 Calculer la longueur manquante dans les cas suivants.



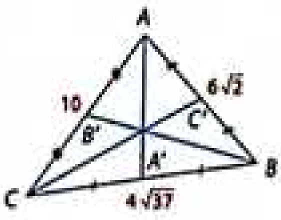
69 Calculer une valeur arrondie au dixième des mesures des angles des triangles suivants.

70 Calculer la longueur de chacune des médianes du triangle ci-contre.



71 Sur la figure ci-contre
$AA' = 7$, $BB' = \sqrt{75}$,
$CC' = \sqrt{106}$.
Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;
b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$;
c. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$;
d. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.



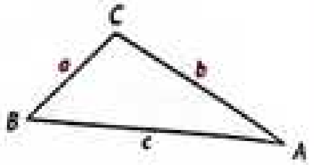
72 **Propriété du cours**
ABC désigne un triangle et A' le pied de la médiane issue de A.

On admet que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$.

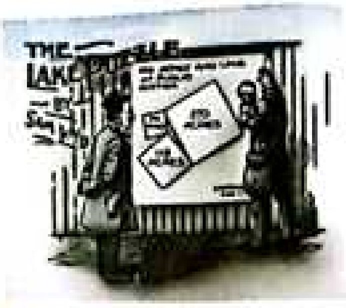
Utiliser la règle du parallélogramme vue au paragraphe 3 c du cours pour démontrer que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}.$$

73 Utiliser la figure ci-contre pour exprimer $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2$ en fonction de a, b et c.



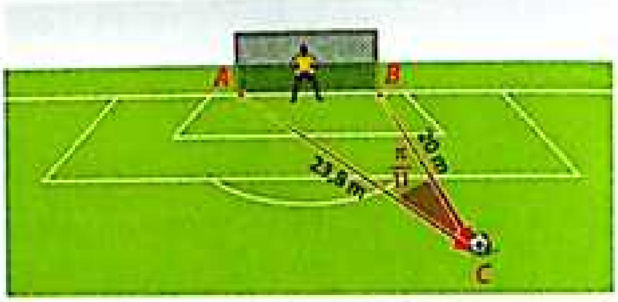
74 Un lac est entouré par trois terrains de forme carrée, d'aires respectives de 74, 116 et 370.
Calculer l'aire de la surface du lac arrondie au dixième.



Info

Autodidacte, l'américain Samuel Loyd (1841-1911) a proposé plus de 5 000 énigmes et casse-tête ludiques.

75 1. Un joueur de football doit tirer un coup-franc en plaçant le ballon au point C.



a. Quelle est la largeur d'un but de football ? Arrondir au dm.
b. Le gardien est placé au milieu de son but.
À quelle distance se trouve-t-il du ballon ? Arrondir au dm.

2. Pour un deuxième coup-franc, on a :

$$BC = 25 \text{ m et mes } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Calculer AC. Arrondir au dm.

76 ABC désigne un triangle isocèle en A et $M \in [BC]$.
Démontrer que : $AM^2 - AB^2 = \overline{MB} \times \overline{MC}$.

77 ABC désigne un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.
Démontrer que si le triangle ABC est rectangle en A, alors .

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

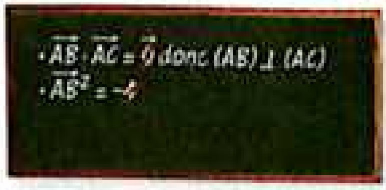
Aide

Penser à utiliser les propriétés du paragraphe 4. a. du cours.

Faire le point

78 Signe d'un produit scalaire

1. Le professeur a écrit au tableau deux erreurs commises par ses élèves.

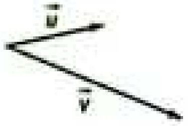


- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc $(AB) \perp (AC)$
- $\overrightarrow{AB}^2 = -4$

Indiquer ces erreurs.

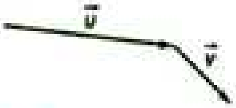
2. Sans effectuer de calcul, compléter les pointillés avec <, > ou =.

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ... 0



b. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ... 0

c. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ... 0



d. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ... 0

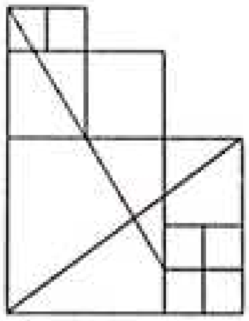
79 Utiliser un repère non fourni

La figure ci-contre est entièrement constituée de carrés. On souhaite savoir si les segments représentés en violet sont orthogonaux.

a. Choisir trois points (que l'on nommera) afin de constituer un repère orthonormé.

b. Dans ce repère, déterminer les coordonnées des points utiles à la démonstration.

c. Conclure.



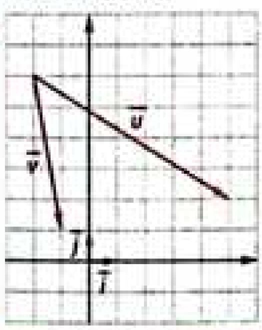
Aide

Penser à choisir un repère orthonormé (même lorsqu'il n'est pas mentionné) quand la figure contient un carré.

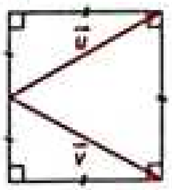
80 Deux méthodes pour calculer

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux manières différentes.

a.



b.



81 Démontrer une double équivalence

ABC désigne un triangle quelconque et *H* le pied de la hauteur issue de *A*.

Démontrer la double équivalence suivante :

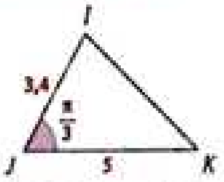
$$ABC \text{ est rectangle en } A \Leftrightarrow BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$$
$$\Leftrightarrow AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$$

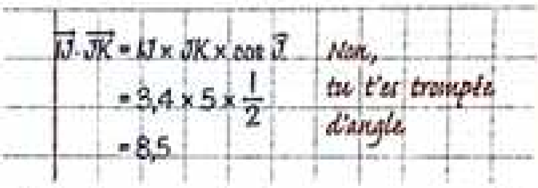
Aide

($\mathcal{P}$), ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{R}$) sont trois propriétés.
Pour montrer que ($\mathcal{P}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$), il suffit de montrer que ($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}$).

82 Déceler, puis corriger une erreur

IJK désigne le triangle ci-contre.
Pour calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{JK}$, Bintou a tenu le raisonnement suivant. Les remarques du professeur sont indiquées en rouge.





$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{JK} = IJ \times JK \times \cos \widehat{J}$
$= 3{,}4 \times 5 \times \frac{1}{2}$
$= 8{,}5$

Non, tu t'es trompée d'angle

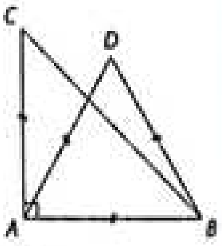
Expliquer la remarque du professeur et proposer une solution correcte.

83 Deux outils pour calculer

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ en utilisant deux outils différents.

1. À l'aide du produit scalaire

La figure ci-contre est constituée d'un triangle rectangle isocèle et d'un triangle équilatéral.
On note $c = AB$.



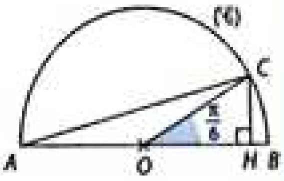
a. Exprimer en fonction de *c* les produits scalaires suivants :
- $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$; • $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$;

En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CBD}$?
En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

2. À l'aide de relations dans le triangle

Le demi-cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre a pour rayon 1.



a. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

b. Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

c. En déduire que $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}$; puis la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Se tester

Vrai-Faux

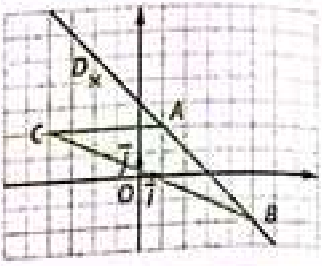
Top chrono (sans justification)

84 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Pour tous points A et B, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.	☐	☐
2. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan, $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.	☐	☐
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.	☐	☐
4. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan, $\lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.	☐	☐
5. Pour tous vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{v}(x'\,;y')$ du plan, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.	☐	☐
6. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan, $\vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert$.	☐	☐
7. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}$.	☐	☐

Avec justification

85 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ ci-contre est orthonormé.



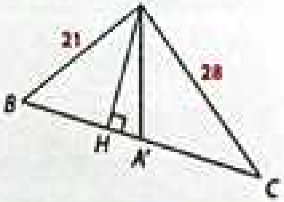
	vrai	faux
1. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.	☐	☐
2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.	☐	☐
3. $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ rad.	☐	☐
4. Le point $E(5{,}5\,;1)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.	☐	☐
5. L'aire du triangle ABC est 11.	☐	☐
6. Dans le triangle ABC, la médiane issue de A a pour longueur 1,8.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

86 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
ABC désigne le triangle rectangle représenté ci-contre dans lequel H est le pied de la hauteur issue de A et A' le pied de la médiane issue de A.
On donne $BC = 35$.



1. a. $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$;
   b. $BA^2 = -\overline{BC} \times \overline{BH}$;
   c. $BA^2 = -\overline{CB} \times \overline{BA}$.

2. a. $AA' = 17{,}5$; b. $AA' = 18$; c. $AA' = 18{,}5$.

3. La mesure, en radians, de l'angle $\widehat{C}$ est environ égale à :
   a. 0,62 ; b. 0,63 ; c. 0,64.

4. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ACA' est environ égal à :
   a. 14,2 ; b. 14,6 ; c. 15,2.

Avec justification

87 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
On travaille dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Les vecteurs $\vec{u}(x\,;5)$ et $\vec{v}(-1\,;x)$ sont orthogonaux si, et seulement si,
   a. $x = 0$; b. $x = 1$; c. $x = -1$.

2. $\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont deux vecteurs du plan. $(\vec{w}+\vec{z})\cdot(\vec{w}-\vec{z}) = 0$ si, et seulement si :
   a. $\vec{w} = \vec{z}$; b. $\vec{w} = -\vec{z}$; c. $\lVert\vec{w}\rVert = \lVert\vec{z}\rVert$.

3. Le couple de vecteurs :

$$\vec{a} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \text{ et } \vec{b} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

   constitue une base,
   a. quelconque du plan ;
   b. orthogonale mais non orthonormé du plan ;
   c. orthonormée du plan.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

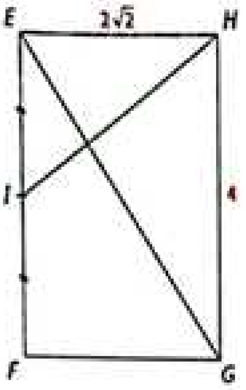
88 Droites orthogonales

EFGH désigne le rectangle ci-contre et *I* le milieu de [*EF*].

a. Démontrer que :

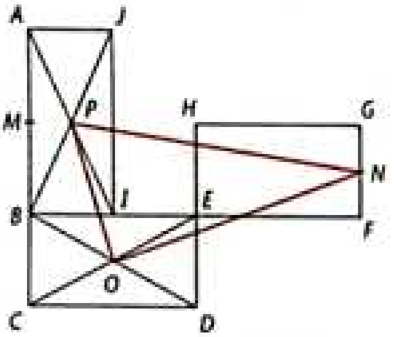
$$2\overrightarrow{IH}+3\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EG}.$$

b. En déduire que les droites (*EG*) et (*IH*) sont perpendiculaires.



89 Figure complexe

La figure ci-dessous est constituée de trois rectangles identiques, de dimensions 1 cm et 2 cm. *M* (respectivement *N*) est le milieu de [*AB*] (respectivement [*GF*]). Les points *B*, *I*, *E*, *F* et *H*, *E*, *D* sont alignés. *P* et *O* sont les centres des rectangles *ABIJ* et *BCDE*.



1. Quelle est la nature du repère $(B\,;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BM})$? Justifier.

2. Utiliser le repère précédent pour la suite de l'exercice.

a. Démontrer que le triangle *OPN* est rectangle en *O*.

b. Les points *D* et *J* appartiennent-ils au cercle circonscrit au triangle *OPN* ? Justifier.

90 Aires de triangles et fonction

ABC désigne un triangle. On note $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

Les points *M*, *N*, *P* sont définis par $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}$ où $x\in[0\,;1]$.

1. a. Construire une figure en prenant $x=\dfrac{1}{4}$.

b. Que représentent les points *M*, *N* et *P* lorsque $x=\dfrac{1}{2}$?

2. a. Démontrer que l'aire du triangle *AMP* est égale à :

$$\frac{1}{2}x(1-x)bc\sin\widehat{A}.$$

b. Exprimer, de trois façons différentes, l'aire du triangle *ABC*.

c. En déduire que les triangles *AMP*, *BMN* et *CPN* ont même aire.

d. Exprimer l'aire du triangle *MNP* en fonction de *x* et de l'aire du triangle *ABC*.

3. a. Déterminer la valeur de *x* pour laquelle l'aire de *MNP* est égale au quart de l'aire de *ABC*.

b. Déterminer la valeur de *x* pour laquelle l'aire de *MNP* est maximale.

Aide

▸ On pourra vérifier l'égalité : $x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

91 Des équivalences

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan. $\vec{w}$ désigne un vecteur du plan.

a. Démontrer que $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}\Leftrightarrow\vec{w}=\vec{0}$.

b. Démontrer que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}\Leftrightarrow\vec{w}=\vec{0}$.

2. **Application**

a. Construire un triangle *ABC* quelconque.

b. Déterminer, puis construire l'ensemble des points *M* tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \text{ et } \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0.$$

(Distinguer deux cas.)

Aide

▸ Le vecteur nul est colinéaire et orthogonal à tout vecteur.

92 Démontrer la concourance des hauteurs

ABC désigne un triangle quelconque.

a. Utiliser la relation de Chasles pour démontrer que, pour tout point *M* du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

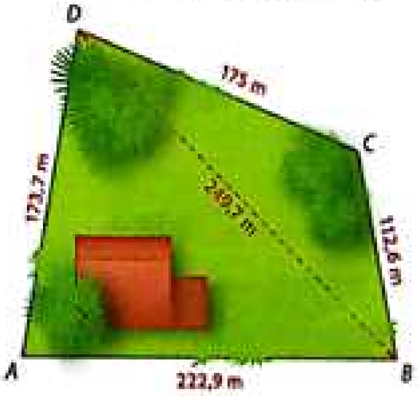
b. **Application**

On note *H*, le point d'intersection des hauteurs issues de *A* et de *B* dans le triangle *ABC*. Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

93 Le terrain d'Abdou

Abdou possède un terrain ayant la forme du quadrilatère *ABCD* ci-dessous.

Pour connaître ses dimensions, il a effectué quelques relevés.



a. Déterminer l'aire, arrondie au dm², de la surface du terrain d'Abdou.

b. Abdou souhaite mesurer la longueur de la diagonale [*AC*], mais sa maison empêche de prendre cette mesure.

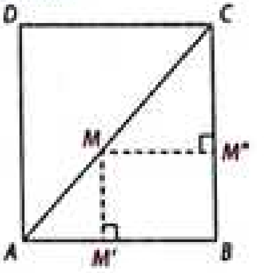
Calculer la longueur *AC*, arrondie au dm.

94 Promenade sur la diagonale

ABCD désigne le carré ci-contre. *M* est un point quelconque situé sur [*AC*].

a. Que peut-on conjecturer à propos des droites (*CM'*) et (*DM"*) ?

b. Utiliser un repère approprié pour démontrer cette conjecture.

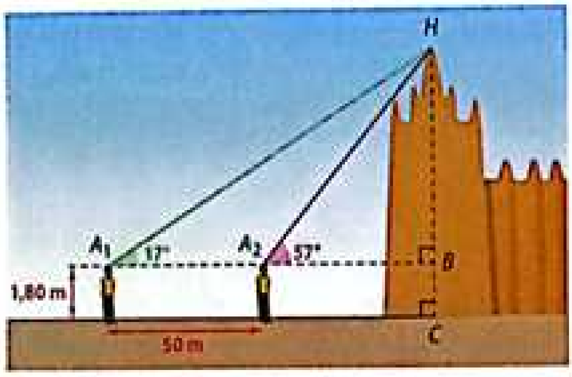


Exercices d'approfondissement

95 La grande mosquée de Djenné

La grande mosquée de Djenné, au Mali, est le plus grand édifice du monde construit en banco (un mélange d'argile et de paille).

Djal souhaite connaître la hauteur de ce bâtiment.
Il a effectué les deux mesures ci-dessous. (Le dessin n'est pas à l'échelle.)



Les résultats seront arrondis au dixième.

a. Calculer la distance A_2H.

b. En déduire la hauteur du bâtiment.

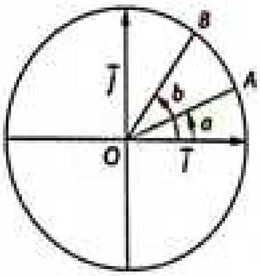
Info

Construite en 1906, la mosquée est régulièrement entretenue pour réparer les dégâts causés par la pluie. Depuis 1988, elle est inscrite au Patrimoine mondial de l'UNESCO.

96 Trigonométrie : formules d'addition

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on a placé deux points A et B tels que :

$$\text{mes}(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OA}}) = a\,[2\pi] \quad\text{et}\quad \text{mes}(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OB}}) = b\,[2\pi].$$



1. a. Exprimer $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ en fonction de a et b.

b. En déduire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos(b-a)$.

2. Utiliser l'expression analytique du produit scalaire pour calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Justifier que, pour tous nombres réels a et b,

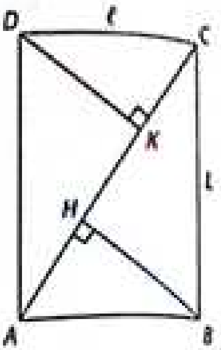
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

4. En déduire une expression de :

a. $\cos(a+b)$; b. $\sin(a-b)$; c. $\sin(a+b)$.

97 Aires de quadrilatères

$ABCD$ désigne le rectangle de longueur L et de largeur ℓ dessiné ci-contre.



H (respectivement K) est le projeté orthogonal de B (respectivement D) sur la diagonale $[AC]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$ de deux manières différentes afin d'en déduire HK en fonction de L et ℓ.

2. a. Pour quelles valeurs de L et ℓ a-t-on $AC = 3HK$?

b. Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de ℓ.

98 Lieux de points

A et B désignent deux points distincts du plan.
I est le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

2. **Application**

Dans cette question, on pose $AB = 4$ cm.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

a. $MA^2 + MB^2 = 12$; b. $MA^2 + MB^2 = -3$;
c. $MA^2 + MB^2 = 16$; d. $MA^2 + MB^2 = 8$.

99 Point intérieur à un cercle

$(\mathscr{C})$ désigne un cercle de centre O et de rayon R.
M est un point intérieur à $(\mathscr{C})$, (Δ) une droite passant par M.
(Δ) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points A et B.
La droite (Δ') perpendiculaire en M à (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points C et D.
On désigne par H et K les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ et on pose $d = OM$.

a. Faire une figure.

b. Calculer en fonction de d le nombre réel $OH^2 + OK^2$.

c. En utilisant le théorème de la médiane dans les triangles AOB et COD, calculer en fonction de d et R le nombre réel :

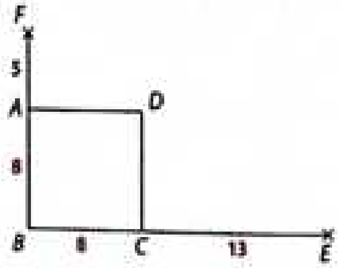
$$AB^2 + CD^2.$$

d. Calculer, en fonction de R, le nombre réel :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

100 Problème ouvert

$ABCD$ désigne le carré ci-dessous de côté 8.
Les points B, C, E et les points A, B, F sont alignés.



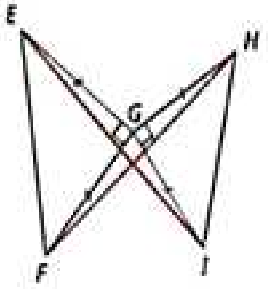
Utiliser deux méthodes différentes pour étudier si les points D, E, F sont alignés.

101 Des triangles isocèles

Sur la figure ci-contre les triangles EFG et GHI sont rectangles isocèles.

a. Démontrer que :
$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GF}=0.$

b. En déduire que $(EI)\perp(FH)$.

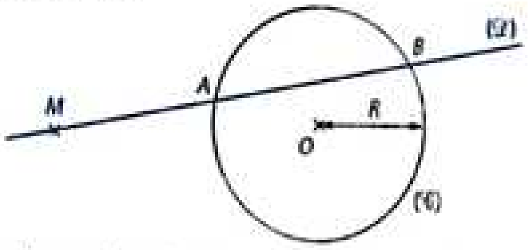


Aide

▸ Pour le a., utiliser le produit scalaire et les cosinus.

102 Puissance d'un point par rapport à un cercle

$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre O et de rayon R dessiné ci-dessous.
M est un point du plan.
$(\mathscr{D})$ est une droite passant par M qui coupe $(\mathscr{C})$ en A et B.
On note $d=OM$.



La puissance du point M par rapport au cercle $(\mathscr{C})$ est, par définition, le nombre $\mathscr{P}_M=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines propriétés de ce nombre.

1. Que vaut $\mathscr{P}_M$ lorsque $M\in(\mathscr{C})$?

2. M est extérieur à $(\mathscr{C})$.
On note A' le point diamétralement opposé à A.
a. Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$.
b. En déduire que $\mathscr{P}_M=d^2-R^2$.

3. M est intérieur à $(\mathscr{C})$. Démontrer que $\mathscr{P}_M=d^2-R^2$.

4. a. Le nombre $\mathscr{P}_M$ dépend-il de l'emplacement des points A et B ? Justifier.
b. Indiquer le signe de $\mathscr{P}_M$ suivant l'emplacement du point M.

5. Applications

a. Avec deux cercles de même centre
$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent deux cercles de même centre O et de rayons respectifs $R=5$ et $R'=3$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\mathscr{P}_M+\mathscr{P}'_M=0$$
où $\mathscr{P}_M$ et $\mathscr{P}'_M$ sont les puissances de M par rapport aux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

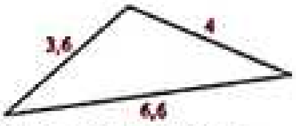
b. Avec deux cercles de même rayon
$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent deux cercles de centres O et O' et de même rayon R.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\mathscr{P}_M=\mathscr{P}'_M$$
où $\mathscr{P}_M$ et $\mathscr{P}'_M$ sont les puissances de M par rapport aux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

c. Avec un cercle
$(\mathscr{C})$ désigne un cercle de centre O et de rayon R.
K est un point fixé du plan.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\mathscr{P}_K-\mathscr{P}_M=0.$$

103 Formule de Héron

1. ABC désigne un triangle.
On note $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ et $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ (p est appelé demi-périmètre du triangle). $\mathscr{A}$ est l'aire du triangle.
L'objectif de cette question est de démontrer la formule de Héron :
$$\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
a. Exprimer $\cos\widehat{C}$ en fonction de a, b et c.
b. Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de a, b et $\cos\widehat{C}$.
c. Démontrer que :
$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}.$$
d. Développer l'expression ci-dessus et conclure en utilisant les identités remarquables.

2. Application
a. Calculer l'aire, arrondie au dixième, du triangle ABC ci-contre.



b. En déduire le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle.

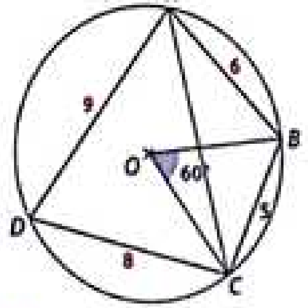
Info

▸ Mathématicien grec du 1er siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie est l'inventeur de nombreuses machines hydrauliques.

104 Formule de Brahmagupta

1. $ABCD$ désigne un quadrilatère inscriptible dans un cercle.
On note :
$$a=DA,\ b=AB,\ c=BC,\ d=CD\ \text{et}\ p=\frac{a+b+c+d}{2}.$$
$\mathscr{A}$ est l'aire du quadrilatère.
L'objectif de cette question est de démontrer la formule de Brahmagupta :
$$\mathscr{A}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$
a. Justifier que $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{C}$.
En déduire que $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\widehat{A}$.
b. Justifier que $a^2+b^2-2ab\cos\widehat{A}=c^2+d^2-2cd\cos\widehat{C}$.
En déduire que $2(ab+cd)\cos\widehat{A}=a^2+b^2-c^2-d^2$.
c. Utiliser le a. pour démontrer que :
$$16\mathscr{A}^2=4(ab+cd)^2-4(ab+cd)^2\cos^2\widehat{A}.$$
d. À l'aide des identités remarquables, retrouver la formule de Brahmagupta.

2. Application
a. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ ci-contre puis celle, arrondie au dixième, du triangle ABC.
b. En déduire la longueur AC arrondie au dixième.



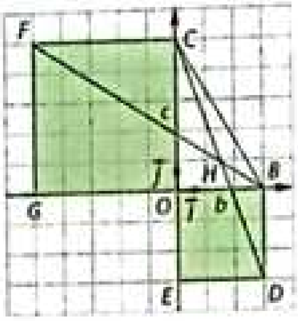
Info

▸ • Cette formule généralise la formule de Héron vue à l'exercice 103. Il suffit de prendre $d=0$.
• Brahmagupta est un mathématicien indien du VIIe siècle après J.-C.

Exercices d'approfondissement

105 Équations de droites

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous, on note b l'abscisse de B et c l'ordonnée de C.
L'objectif de l'exercice est de montrer que (OH) est une hauteur du triangle OBC et déterminer son équation.



1. Déterminer les coordonnées de tous les points (sauf H) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

2. a. Démontrer que les droites (CD) et (BF) ont pour équation :

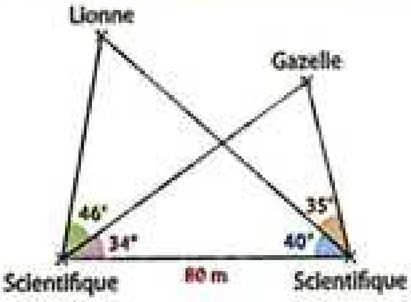
- $(CD) : y = -\dfrac{b+c}{b}x + c\,;$
- $(BF) : y = -\dfrac{c}{b+c}x + \dfrac{bc}{b+c}.$

b. En déduire les coordonnées du point H.

c. Démontrer que (OH) est la hauteur issue de O dans le triangle OBC et déterminer son équation.

106 La lionne et sa proie

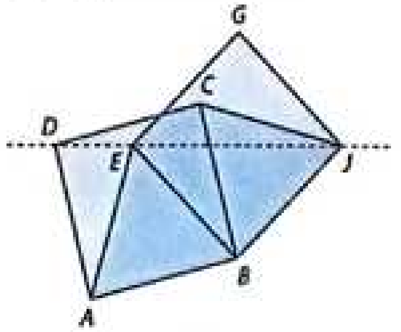
Deux scientifiques observent une lionne et une gazelle qui s'est écartée du troupeau.
La situation est schématisée ci-dessous.



Utiliser les données de la figure pour calculer la distance, arrondie au m, entre la lionne et la gazelle, puis entre la lionne et le scientifique le plus proche.

107 Alignement de points

La figure ci-dessous est constituée de trois carrés de côté 1 et de trois triangles équilatéraux de côté 1.

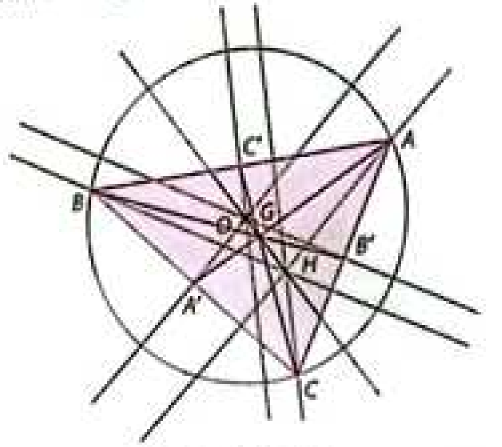


a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}$.

b. En déduire que les points D, E, J sont alignés.

108 La droite d'Euler

ABC désigne le triangle ci-dessous. A', B', C' sont les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
H est l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



a. Démontrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$
$= \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}$

b. En déduire que le vecteur $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CB}$.

c. Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. En déduire que O, G et H sont alignés (la droite passant par O, G et H est appelée droite d'Euler).
Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

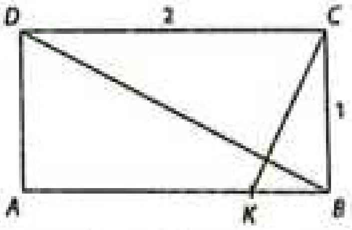
Remarque

Une résolution de cet exercice, qui n'utilise pas le produit scalaire, est proposée, dans un cas particulier, à l'exercice 107 du chapitre 3.

109 Deux méthodes pour démontrer

$ABCD$ désigne le rectangle ci-dessous.

K est le point tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.



L'objectif de cet exercice est de montrer, par deux méthode distinctes, que $(BD) \perp (CK)$.

1. Première méthode

a. Justifier que $CD^2 - CB^2 = KD^2 - KB^2 = 3$.

b. Utiliser une identité remarquable et la relation de Chas pour démontrer que, pour tout point M du plan,

$$MD^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MD} - BD^2.$$

c. Montrer que $MD^2 - MB^2 = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MD} = 4$.

d. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MD^2 - MB^2 = 3.$$

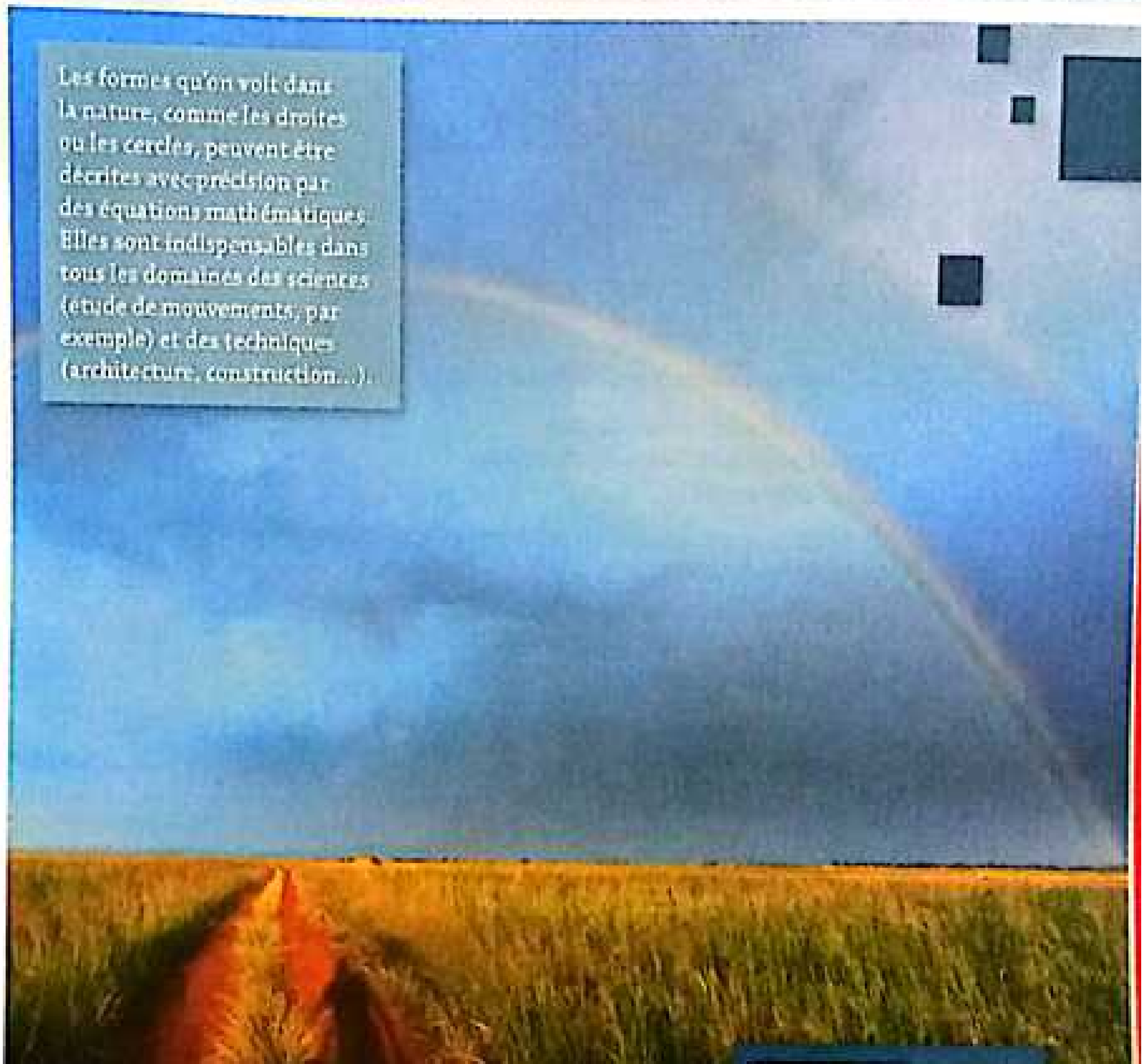
En déduire que $(BD) \perp (CK)$.

2. Seconde méthode

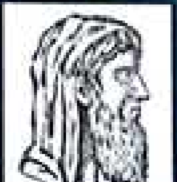
Choisir un repère orthonormé approprié pour calculer $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{C}$
Conclure.

5

Équations de droites et de cercles



Les formes qu'on voit dans la nature, comme les droites ou les cercles, peuvent être décrites avec précision par des équations mathématiques. Elles sont indispensables dans tous les domaines des sciences (étude de mouvements, par exemple) et des techniques (architecture, construction…).



Euclide (III^{e} siècle avant J.-C.) mathématicien grec, a consacré les quatre premiers livres de ses célèbres *Éléments* à l'étude des droites et cercles. Il n'y a abordé que des problèmes dont les solutions se construisent à l'aide de la règle et du compas.

les objectifs du chapitre

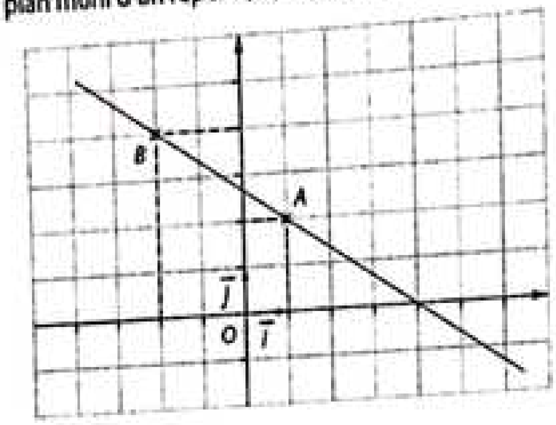
- Déterminer des équations de droites et de cercles.
- Déterminer des représentations paramétriques de droites.
- Définir géométriquement une droite ou un cercle donné par son équation.
- Déterminer les positions relatives de droites.

5 Activités d'introduction

Cours 2

1 Équation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(1 ; 2)$ et $B(-2 ; 4)$.



Rappel

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est directeur d'une droite (d) lorsqu'il existe deux points A et B de (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1 **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

b. $M(x ; y)$ désigne un point du plan.
Quelle condition nécessaire et suffisante faut-il sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ pour que M soit un point de (AB) ?

c. Quelle condition nécessaire et suffisante faut-il sur x et y pour que $M(x ; y)$ soit un point de (AB) ?
La relation entre x et y est appelée équation cartésienne de la droite (AB).

2 **Applications**

a. Utiliser le résultat obtenu à la question 1. pour vérifier si les points $D(4 ; 0)$ et $E(6 ; -2)$ appartiennent à (AB).

b. Reprendre les questions du 1. pour déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

2 Ensemble de points vérifiant une équation

Cours 2

On s'intéresse à l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4 = 0$.

1 **a.** A, B, C et D désignent des points du plan d'abscisses respectives -2, 0, 2 et 4 et dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4 = 0$.
Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.

b. Placer les points A, B, C et D dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Que constate-t-on ?

c. Donner un point, autre que A, B, C et D, dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4 = 0$.
Placer ce point sur le graphique précédent.
Que constate-t-on ?

2 Reproduire et compléter la phrase :
L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4 = 0$ est ….

3 Représentation paramétrique d'une droite

Cours 4

Un point M se déplace dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Son mouvement est décrit, en fonction du temps t, exprimé en secondes, par $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \end{cases}$.
On souhaite étudier la nature géométrique de ce mouvement.

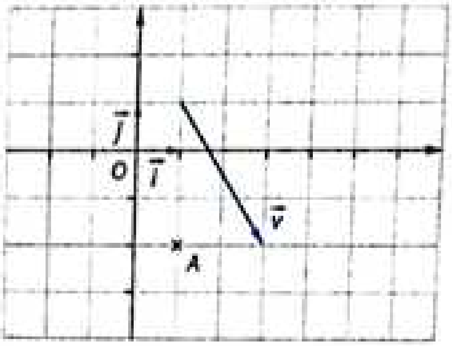
1 Conjecturer avec un logiciel de géométrie dynamique

a. Ouvrir une page GeoGebra.

b. • Créer le point $A(1;-2)$ et le vecteur $\vec{v}(2;-3)$.
• À l'aide de l'icône ⊶ créer un curseur t allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,05.
• Dans la barre de saisie, taper : $M=(1+2t,-2-3t)$.
• Effectuer un clic droit sur le point M et activer la trace.

c. Déplacer le curseur afin de conjecturer la nature géométrique du mouvement du point M.

d. Modifier le curseur avec t allant de -10 à 10 et conjecturer la nature du mouvement du point M.



2 Démonstration de la conjecture

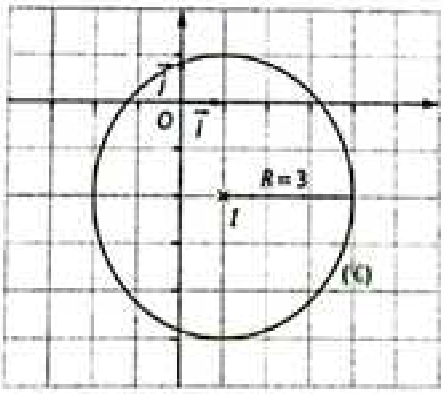
a. Quelle est la position de M à l'instant $t=0$?

b. Démontrer que $\overrightarrow{AM}=t\vec{v}$.
Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$?
En déduire que M appartient à la droite (d) passant par A et dirigée par $\vec{v}(2;-3)$.

4 Équation cartésienne d'un cercle

Cours 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $I(1;-2)$ et de rayon 3 ci-dessous et $M(x;y)$ est un point du plan.



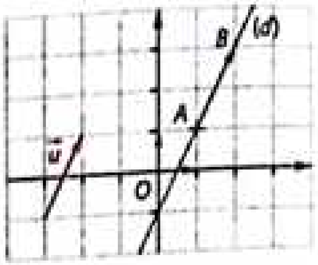
a. Reproduire et compléter :
$M(x;y)\in(\mathscr{C})$ si, et seulement si, $IM^2=\dots$.

b. Quelle condition nécessaire et suffisante faut-il sur x et y pour que M soit un point de $(\mathscr{C})$?

5 Cours

1 Droites et vecteurs

a Vecteur directeur



Définition

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite (d) lorsqu'il existe deux points A et B de (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque

Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

b Vecteurs colinéaires

Définition

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs du plan.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre, noté $\text{dét}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, égal à $\text{dét}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\text{dét}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0$.

Exemple Le déterminant de $\vec{u}(2\,;-3)$ et $\vec{v}(5\,;-6)$ est $\text{dét}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}=2\times(-6)-5\times(-3)=-12+15=3$.
$\text{dét}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 Équations cartésiennes d'une droite

a Caractérisation d'une droite par une équation

Théorème

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 Toute droite $(\mathscr{D})$ du plan possède une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

2 Si a, b et c sont des nombres réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$, alors l'équation $ax+by+c=0$ est celle d'une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et $(\mathscr{D})$ est une droite de ce plan.
On appelle **équation cartésienne** de $(\mathscr{D})$ toute équation de $(\mathscr{D})$ de la forme $ax+by+c=0$.

b Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur

Propriétés

On donne un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$.
$(\mathscr{D})$ désigne la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Pour tout point M du plan, on a $M\in(\mathscr{D})$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

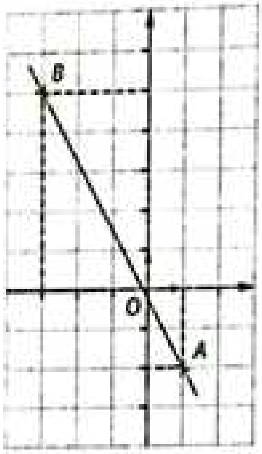
Savoir-faire

1 Déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux points

$A(1\,;-2)$ et $B(-3\,;5)$ désignent deux points du plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Solution commentée

1. $\begin{cases} x_B - x_A = -3-1=-4 \\ y_B - y_A = 5-(-2)=7 \end{cases}$.
$\overrightarrow{AB}(-4\,;7)$ est un vecteur directeur de (AB) et A un point de (AB).
2. Donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $7x+4y+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.
3. $A \in (AB)$, donc $7x_A+4y_A+c=0$, donc $7\times1+4\times(-2)+c=0$, c'est-à-dire $7-8+c=0$ et $c=1$.
4. Une équation cartésienne de (AB) est $7x+4y+1=0$.



Méthode

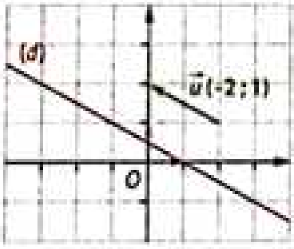
1. S'ils ne sont pas indiqués, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite.
2. Utiliser le théorème du paragraphe 2. du cours.
3. Pour calculer c utiliser le fait qu'un point appartient à (AB) si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).

2 Déterminer une équation cartésienne d'une droite à l'aide du déterminant

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A(3\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;1)$.

Solution commentée

1. $M(x\,;y)$ désigne un point quelconque du plan ainsi, $\overrightarrow{AM}\,(x-3\,;y+1)$.



2. $M \in (d) \Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y+1 & 1 \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\times1-(-2)(y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-3+2y+2=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y-1=0.$$

Ainsi, une équation cartésienne de (d) est $x+2y-1=0$.

Méthode

1. S'ils ne sont pas indiqués, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite.
2. $M \in (d)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, $\text{dét}\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$.
On écrit :
$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$.

Notation

Le symbole ⇔ signifie « si, et seulement si » ou encore « est équivalent à ».

S'exercer

3 Déterminer une équation cartésienne des droites (OA) et (AB) avec $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;-2)$.

4 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-3\,;1)$ et dirigée par $\vec{u}(3\,;-1)$ à l'aide du déterminant.

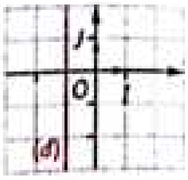
3 Équation réduite d'une droite

Rappel 1

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées possède une équation réduite de la forme $x = k$.

Exemples

• L'équation réduite de (d) est $x = -1$.
L'équation réduite de (OJ) est $x = 0$.

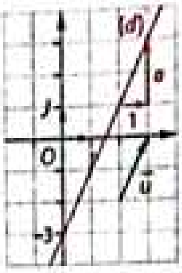


Rappel 2

Une droite (d), non parallèle à l'axe des ordonnées, possède une équation réduite de la forme :

$$y = mx + p.$$

m est appelé le **coefficient directeur** de (d) et p l'**ordonnée à l'origine** de (d).



• (d) est la droite d'équation réduite $y = 2x - 3$.
Donc le coefficient directeur de (d) est 2, donc $\vec{u}(1\,;2)$ est un vecteur directeur de (d).
L'ordonnée à l'origine de (d) est -3.

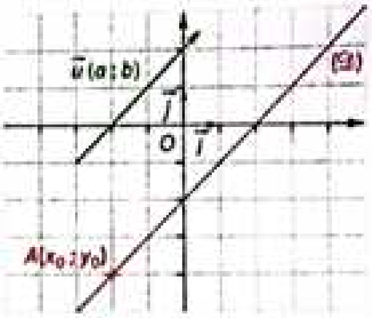
4 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et a, b, x_0, y_0 désignent des nombres réels fixés tels que :

$$(a\,;b) \neq (0\,;0).$$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de la droite passant par $A(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(a\,;b)$.



Vocabulaire On dit **équations paramétriques** ou représentation paramétrique d'une droite.

Exemple Le système $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5\,;-4)$.

5 Positions relatives de droites

a Droites parallèles, droites perpendiculaires

Propriétés

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

1 $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}')$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires c'est-à-dire si, et seulement si, $\det\left(\vec{u}\,;\vec{u'}\right) = 0$.

2 $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux c'est-à-dire si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$.

b Cas des équations réduites

Propriétés

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

1 $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}')$ si, et seulement si, $m = m'$.

2 $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$ si, et seulement si, $mm' = -1$.

5 Savoir-faire

5 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*AB*) avec *A* (1 ; −2) et *B* (−3 ; 5).

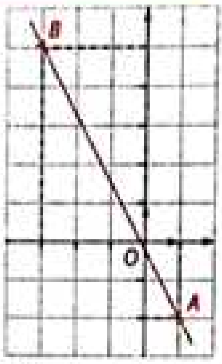
Solution commentée

1. *A* (1 ; −2) est un point de (*AB*) et $\overrightarrow{AB}(-4\,;7)$ est un vecteur directeur de (*AB*).

2. Une représentation paramétrique de (*AB*), droite passant par *A* et dirigée par $\overrightarrow{AB}$,

est $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = -2+7t \end{cases}$

avec $t \in \mathbb{R}$.



Méthode

1. S'ils ne sont pas indiqués, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite.

2. Utiliser la propriété du paragraphe 4. du cours.

Remarques

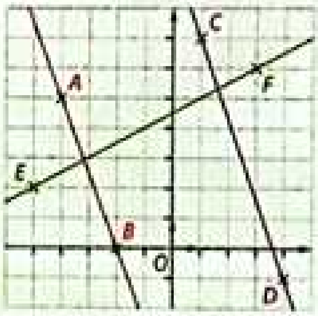
- En remplaçant *t* par 0, on retrouve les coordonnées de *A* ;
- en remplaçant *t* par 1, on retrouve les coordonnées de *B*.

6 Étudier la position relative de deux droites

Sur le repère orthonormé ci-contre, on a représenté trois droites (*AB*), (*CD*) et (*EF*).

a. Les droites (*AB*) et (*CD*) sont-elles parallèles ? Justifier par un calcul.

b. Les droites (*AB*) et (*EF*) sont-elles perpendiculaires ? Justifier par un calcul.



Solution commentée

a. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{cases} x_B - x_A = -2-(-4) = 2 \\ y_B - y_A = 0-5 = -5 \end{cases}$, ainsi $\overrightarrow{AB}(2\,;-5)$ et $\overrightarrow{CD}(3\,;-8)$.

2. $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = -16+15 = -1 \neq 0$,

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
donc les droites (*AB*) et (*CD*) ne sont pas parallèles.

b. 1. $\overrightarrow{AB}(2\,;-5)$, $\overrightarrow{EF}(8\,;4)$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = 2\times8+(-5)\times4 = 16-20 = -4 \neq 0$,
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas orthogonaux,
donc, (*AB*) et (*EF*) ne sont pas perpendiculaires.

Méthode

1. S'ils ne sont pas indiqués, déterminer un vecteur directeur de chacune des droites.

2. Utiliser la propriété du paragraphe 5. a. du cours et :
- calculer leur déterminant pour tester leur colinéarité ;
- calculer leur produit scalaire pour tester leur orthogonalité.

S'exercer

7 **a.** Les droites (*EF*) et (*CD*) de l'exercice 6 sont-elles perpendiculaires ?
b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*d*) passant par *A* (−2 ; 3) et parallèle à (*d'*) :

$$\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 3-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

8 Dans un repère, on donne les points :

$A(-2\,;-3)$, $B(2\,;-1)$, $C(1\,;2)$, $D(3\,;8)$

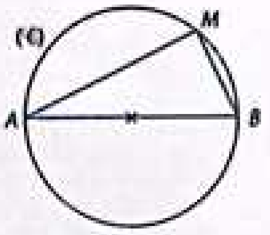
et *I* milieu de [*AB*].
a. Déterminer une représentation paramétrique de la médiane issue de *C* du triangle *ABC*.
b. En déduire l'alignement des points *C*, *I* et *D*.

G Équations cartésiennes d'un cercle

a Principes

Principe 1

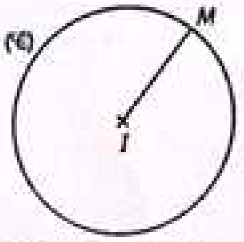
A et B désignent deux points du plan et $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.



Pour tout point M du plan, on a :
$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Principe 2

I désigne un point du plan. R un nombre réel strictement positif et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre I et de rayon R.



Pour tout point M du plan, on a :
$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2.$$

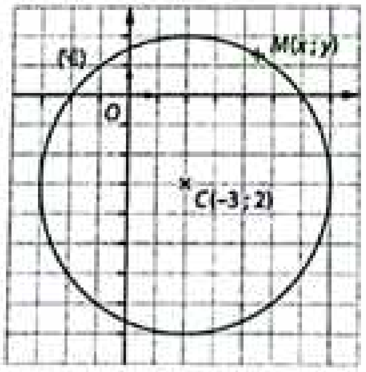
b Propriétés

Propriété 1

a, b et R désignent des nombres réels avec $R \geqslant 0$.
Tout cercle du plan a une équation cartésienne de la forme : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
où $(a\,;b)$ sont les coordonnées du centre du cercle et R son rayon.

Exemple

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ ci-dessous, de centre $C(-3\,;2)$ et de rayon 5
est $(x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 5^2$
ou encore $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.



Exemple

L'équation $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$.
Cette dernière équation est celle du cercle de centre $C(-3\,;2)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Propriété 2

a, b et c désignent des nombres réels.
Tout cercle du plan a une équation de la forme :
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$
où $(a\,;b)$ sont les coordonnées du centre du cercle.

Exemple

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ ci-contre est $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.
En développant, on obtient :
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 25$$
c'est-à-dire $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

Remarque

Un cercle du plan a une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
mais $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ n'est pas toujours l'équation d'un cercle. *(Voir l'exemple ci-dessous.)*

Exemple

L'équation $x^2 + y^2 + 6y + 15 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 - 9 + 15 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = -6$.
Cette dernière équation n'est pas celle d'un cercle (car $-6 < 0$ et $x^2 + (y+3)^2 \geqslant 0$).

9 Déterminer une équation cartésienne d'un cercle

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;-1)$, $B(-3\,;2)$, $C(-1\,;3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre C et passant par A.

b. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre $[AB]$.

Solution commentée

a. Le rayon du cercle est $R = CA$.
Or $R^2 = CA^2 = (2-(-1))^2 + (-1-3)^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$.

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ est :

$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = R^2$$

c'est-à-dire $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$
ou encore $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.

b. $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y+1)$, $\overrightarrow{BM}(x+3\,;y-2)$ avec $M(x\,;y)$.

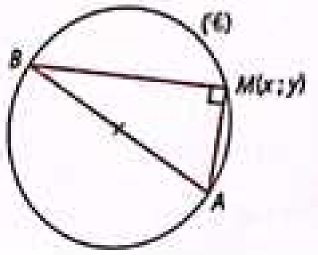
$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+3) + (y+1)(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 + y^2 - 2y + y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y - 8 = 0. \end{aligned}$$

Une équation de $(\mathscr{C})$ est $x^2 + y^2 + x - y - 8 = 0$.

Méthode

a. • Calculer le rayon du cercle.
• Utiliser le principe 2 et la propriété 1.

b. Utiliser le principe 1 :
$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$.



10 Reconnaître une équation de cercle

a. Montrer que $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b. L'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0$ est-elle celle d'un cercle ?

Solution commentée

a. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ d'où $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.
$y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$ d'où $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$.

Ainsi, $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$.

Cette dernière équation est celle du cercle de centre $C(3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

b. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ donc $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.
$y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$ donc $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$.

Ainsi, $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = -5$

Or $(x+1)^2 + (y-2)^2 \geqslant 0$ et $-5 < 0$, dont il n'existe pas de point $M(x\,;y)$ qui vérifie cette équation.

Donc $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10 = 0$ n'est pas l'équation d'un cercle.

Méthode

Chercher à écrire l'équation indiquée sous la forme : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$.
Pour cela, écrire les expressions en x, puis en y, comme le début d'identités remarquables.
L'expression $x^2 - 6x$ est le début de l'identité remarquable $(x-3)^2$.
L'expression peut s'écrire :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k.$$

- Si $k > 0$, alors c'est l'équation d'un cercle de centre $C(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, alors seul le point $C(a\,;b)$ vérifie cette équation.
- Si $k < 0$, alors il n'existe pas de point M du plan qui vérifie cette équation.

S'exercer

11 On donne les points $A(-3\,;2)$, $B(4\,;1)$, $C(1\,;0)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre C et passant par le milieu du segment $[AB]$.

b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AC]$

12 Dire si les équations suivantes sont celles d'un cercle. Dans l'affirmative, donner le centre et le rayon.

a. $x^2 + y^2 + 4x - 10y = 0$;

b. $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$;

c. $x^2 + y^2 + 6x + 10 = 0$.

5

Exercices d'entraînement

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

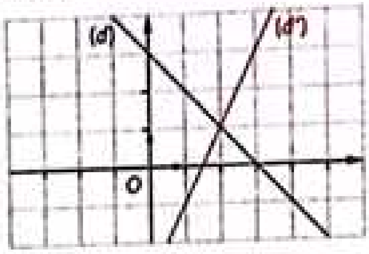
Équations cartésiennes de droites

Réponses rapides

13 Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur :

a. de la droite (d) ;

b. de la droite (d').

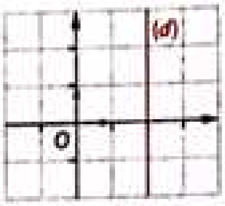


14 (d) est la droite d'équation $2x-5y+1=0$.
Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de (d).

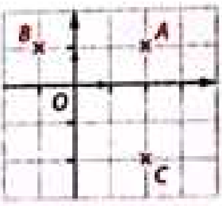
15 (d) est la droite d'équation :

$$x=2.$$

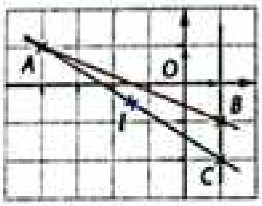
Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de (d).



16 On donne les trois points : $A(2;1)$, $B(-1;1)$ et $C(2;-2)$.
Donner une équation de chacune des droites (AB), (AC) et (OC).



17 On donne les points $A(-4;1)$, $B(1;-1)$ et $C(1;-2)$.



a. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB) et (BC).

b. I désigne le milieu de $[AC]$.
Déterminer une équation de la médiane issue de B du triangle ABC.

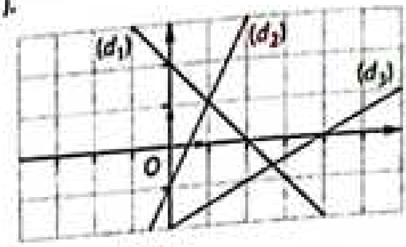
c. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B du triangle ABC.

d. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

Aide

▶ Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(-b;a)$ est orthogonal à $\vec{v}(a;b)$.

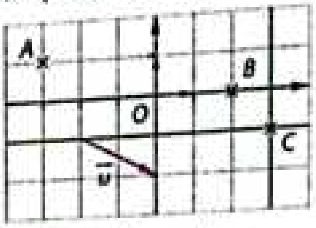
18 Dans le repère ci-dessous, on a représenté trois droites (d_1), (d_2) et (d_3).



Pour chacune de ces droites :

- indiquer le coefficient directeur ; en déduire un vecteur directeur ;
- indiquer l'ordonnée à l'origine ;
- en déduire son équation réduite.

19



Donner une équation cartésienne de :

a. la droite passant par $A(-3;1)$ et dirigée par $\vec{u}(2;-1)$;

b. la droite passant par $B(2;0)$ et $C(3;-1)$;

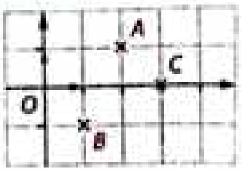
c. la droite passant par $C(3;-1)$ et parallèle à l'axe des abscisses ;

d. la droite passant par $C(3;-1)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

20 On donne les points $A(2;1)$, $B(1;-1)$ et $C(3;0)$.
Déterminer une équation cartésienne de :

a. la droite passant par A et parallèle à la droite (BC) ;

b. la médiatrice du segment $[BC]$.



21 Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation :

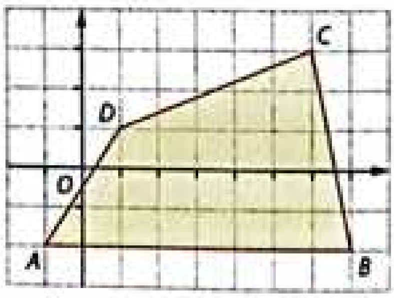
a. $-x+y+3=0$; b. $2y-1=0$; c. $y=3$;

d. $x=3$; e. $y=x-5$; f. $x+3y-1=0$.

22 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(-5;2)$ et de coefficient directeur 3.

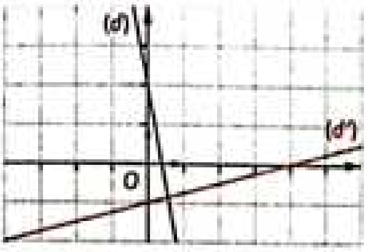
23 (d) est la droite d'équation $2x-5y+1=0$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes du repère.

24 $ABCD$ désigne le quadrilatère dessiné dans le repère ci-dessous.



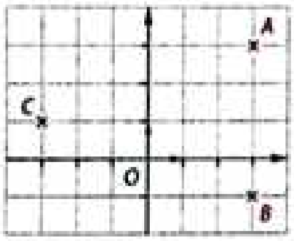
Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites supports des côtés du quadrilatère $ABCD$.

25 (d) et (d') désignent les droites tracées dans le repère ci-dessous.



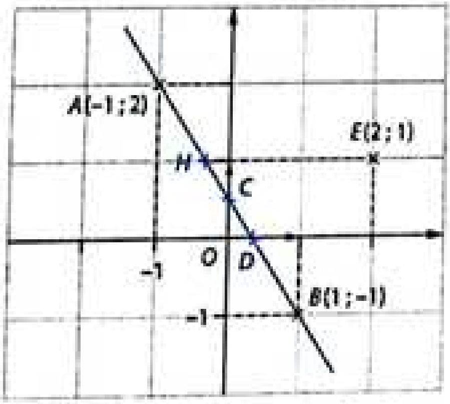
a. Déterminer une équation cartésienne de chacune de ces droites.
b. Les points $A(-4\,;5)$, $B(200\,;50)$, $C(-10\,;199)$ et $D(30\,;-10)$ appartiennent-ils à (d) ? à (d') ? Justifier.

26 ABC désigne le triangle dessiné dans le repère orthonormé ci-dessous.



a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices du triangle.
En déduire que le triangle ABC est isocèle en C et n'est pas équilatéral.

27 Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$ où la droite (AB) coupe l'axe des ordonnées en C et coupe l'axe des abscisses en D.



a. Déterminer les coordonnées des points C et D.
b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté du point E sur (AB) parallèlement à l'axe des abscisses.
c. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (AB).

28 (D_k) désigne la droite d'équation cartésienne :

$$(3+k)x+2ky+6=0$$

où k est un nombre réel.
a. Montrer que pour tout nombre réel k, $A(-2\,;1)\in(D_k)$.
b. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle (D_k) est parallèle à la droite (d) d'équation $y=-3x+5$?

Représentation paramétrique de droite

Réponses rapides

29 On donne les points $A(-2\,;3)$, $B(5\,;1)$ et le vecteur $\vec{u}(4\,;-3)$.
Donner une représentation paramétrique :
a. de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$;
b. de la droite (AB) ;
c. de la droite passant par A et parallèle à l'axe des abscisses ;
d. de la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

30 (d) est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-3+5t \\ y=t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

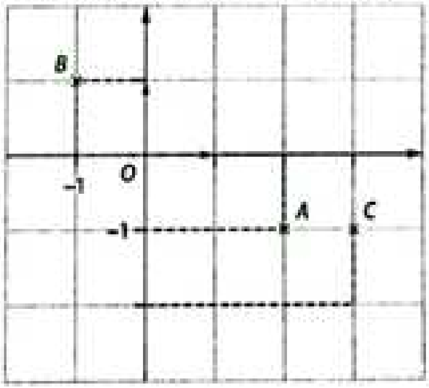
a. Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de (d).
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (d') passant par $A(-3\,;2)$ et parallèle à (d).

31 (d) est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1+3t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

a. Donner les coordonnées de trois points de (d).
b. Donner les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (d).

32 On donne les points $A(2\,;-1)$, $B(-1\,;1)$, $C(3\,;-2)$.



a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et parallèle à (BC).
b. Dire si le point $D\left(-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{7}{3}\right)$ appartient à la droite (d). Justifier.
c. Dire si le point $E(14\,;-10)$ appartient à la droite (d). Justifier.

33 (d) et (d') sont deux droites de représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x=2+t \\ y=-2+20t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

et

$$(d') : \begin{cases} x=-10+4t' \\ y=74+t' \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

Pour chacun des points ci-dessous, dire s'il appartient à (d), à (d') ou à aucune des deux droites.

- $A(-5\,;30)$;
- $B(6\,;78)$;
- $C(20\,;79)$.

Exercices d'entraînement

34 (*d*) est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=5t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

On donne les points $A(0\,;-5)$ et $B(1\,;4)$.

a. Donner un point et un vecteur directeur de (*d*), puis tracer (*d*).

b. Montrer que $A\in(d)$ et que $B\notin(d)$.

35 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*d*) passant par $A(-5\,;2)$ et de coefficient directeur 3.

36 (*d*) et (*d'*) désignent deux droites d'équations réduites :

$$(d): x=-5 \text{ et } (d'): x=3.$$

Déterminer une représentation paramétrique de chacune de ces droites.

37 (*d*) et (*d'*) désignent deux droites d'équations réduites :

$$(d): y=3x-1 \text{ et } (d'): y=-2x+5.$$

Déterminer une représentation paramétrique de chacune de ces droites.

38 (*d*) et (*d'*) désignent deux droites d'équations cartésiennes :

$$(d): x-2y+4=0 \text{ et } (d'): -3x+y-2=0.$$

Déterminer une représentation paramétrique de chacune de ces droites.

39 (*d*) est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=5-t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

a. Déterminer les points d'intersection de (*d*) avec les axes du repère.

b. *B* désigne le point de (*d*) d'abscisse -1.
Déterminer son ordonnée.

40 Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*d*) passant par *O* et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ tel que :

a. $\text{mes}(\widehat{\vec{i},\vec{u}})=\frac{\pi}{6}$ rad ; b. $\text{mes}(\widehat{\vec{i},\vec{u}})=\frac{2\pi}{3}$ rad.

41 Montrer que :

$$\begin{cases} x=-5+t \\ y=2-3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=-3-2t \\ y=-4+6t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

sont deux représentations paramétriques d'une même droite.

> Deux droites sont confondues si elles sont parallèles et ont un point commun.

42 Montrer que :

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=5+2t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } y=-2x+9$$

sont respectivement les équations paramétrique et réduite d'une même droite.

Positions relatives de deux droites

Réponses rapides

43 Dans chacun des cas ci-dessous, indiquer si les droites (*d*) et (*d'*) sont parallèles, perpendiculaires, ou ni l'un ni l'autre.

a. $(d): y=3x-1$, $(d'): y=3x+4$;

b. $(d): y=\frac{1}{4}x$, $(d'): y=-4x+7$;

c. $(d): y=5$, $(d'): y=5x$;

d. $(d): 2x+y=0$, $(d'): 2x-4y-1=0$.

44 (*d*), (*d'*) et (*d''*) désignent trois droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=2t \\ y=-5-3t \end{cases}, \begin{cases} x=1-6t' \\ y=2+9t' \end{cases}, \begin{cases} x=2+3t'' \\ y=4+2t'' \end{cases} \text{ avec } t, t', t''\in\mathbb{R}.$$

Montrer que (*d*) et (*d'*) sont parallèles et que (*d*) et (*d''*) sont perpendiculaires.

45 (*d*) et (*d'*) sont deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x=-2+3t' \\ y=5-2t' \end{cases} \text{ avec } t'\in\mathbb{R}.$$

Démontrer que (*d*) et (*d'*) sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

46 (*d*) et (*d'*) sont deux droites d'équations cartésiennes respectives :

$$x-3y+1=0 \text{ et } -2x+5y=0.$$

a. Montrer que (*d*) et (*d'*) sont sécantes.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

47 (*d*) est la droite d'équation cartésienne $2x-3y+5=0$.
Pour chacune des droites suivantes, données par leur équation, dire si elle est parallèle, sécante ou confondue avec la droite (*d*).

a. $x-4y+3=0$; b. $-6x+9y=0$;

c. $-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y-1=0$; d. $y=\frac{3}{2}x-1$;

e. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$; f. $\begin{cases} x=-1-4t \\ y=1+6t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

48 On donne :

$$(d): 2x-3y+1=0 \text{ et } (d'): \begin{cases} x=1-6t \\ y=1-4t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

a. Montrer que les droites (*d*) et (*d'*) sont parallèles.

b. Les droites (*d*) et (*d'*) sont-elles confondues ? Justifier.

49 *k* désigne un nombre réel et (d_k) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+kt \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

a. Justifier que toutes les droites (d_k) ont un point commun.

b. Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point à déterminer.

c. Montrer que si $k\neq k'$, alors les droites (d_k) et $(d_{k'})$ sont sécantes.

Équations cartésiennes de cercles

Réponses rapides

50 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(-1\,;2)$ et de rayon $r=3$.

51 $(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation $x^2+y^2+6x-y=0$.
Dire si les points suivants appartiennent à $(\mathscr{C})$:

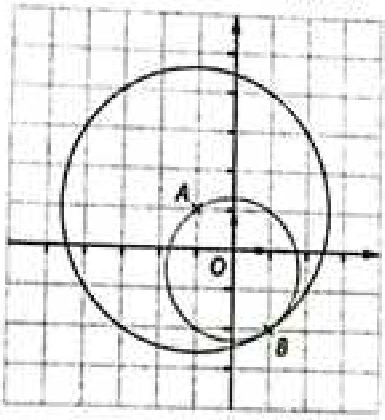
$$O(0\,;0),\quad A(-1\,;-2)\quad \text{et}\quad B(0\,;1).$$

52 $(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation $(x+3)^2+y^2=5$.
Donner les coordonnées du centre de $(\mathscr{C})$ et la valeur de son rayon.

53 a. Montrer que l'équation $x^2+y^2-6x+2y=0$ est équivalente à $(x-3)^2+(y+1)^2=10$.
b. En déduire que $x^2+y^2-6x+2y=0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

54 Montrer que l'équation $x^2+y^2+4x-8y+1=0$ est celle d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

55 On donne les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;-2)$.



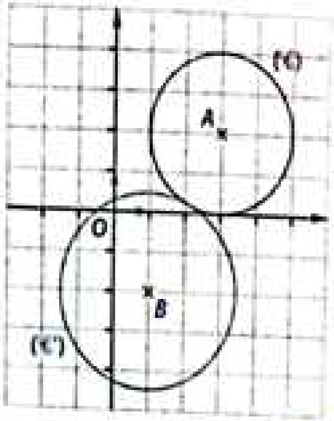
a. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A et passant par B.
b. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

56 Définir l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant les équations suivantes :

a. $x^2+y^2=3$;
b. $x^2+y^2-2x+6y=0$;
c. $x^2+y^2-3x+y-7=0$;
d. $(x+3)^2+y^2+3=0$.

57 $(\mathscr{C})$ désigne le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2=5$ et (d) la droite d'équation cartésienne $x+2y-5=0$.
a. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le centre de $(\mathscr{C})$ et perpendiculaire à (d).
En déduire que (d) est tangente à $(\mathscr{C})$.
c. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{C})$ parallèle (et non confondue) avec (d).

58 $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles d'équations respectives :
$x^2+y^2-2x+4y=0$ et $x^2+y^2-6x-4y+9=0$.

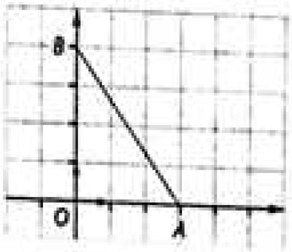


a. Dire si $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents. Justifier.
b. Dire si l'axe des abscisses est tangent à $(\mathscr{C})$. Justifier.

[illegible]

▸ Une droite est tangente à un cercle si la droite et le cercle ont un seul point commun.

59 a. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle OAB.
b. Déterminer une équation du cercle de centre O et passant par le milieu du segment $[AB]$.



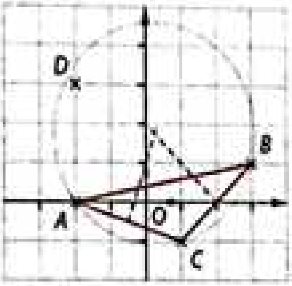
60 **Propriétés du cours**
$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre $A(a\,;b)$ et de rayon r et $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan.
Montrer les équivalences suivantes :
a. $M(x\,;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
b. $M(x\,;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$.

61 k désigne un nombre réel.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation :

$$x^2+y^2-6x+3y+k=0$$

est celle d'un cercle.

62 $ABCD$ désigne le quadrilatère représenté dans le repère orthonormé ci-dessous.



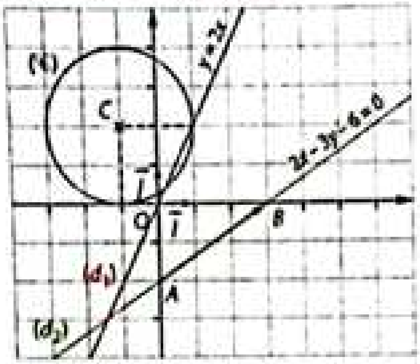
a. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.
b. Dire si les points A, B, C et D sont cocycliques.

Vocabulaire

▸ A, B, C, D sont cocycliques s'il existe un cercle passant par ces quatre points.

Faire le point

63 Vocabulaire et notation



Utiliser la figure ci-dessus pour compléter chacune des phrases suivantes à l'aide de notations ou de définitions du cours.

- $2x-3y-6=0$ est une … de la droite (d_2).
- $y=2x$ est l'… de la droite (d_1).
- $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$ est un vecteur … de la droite (d_2).
- $\begin{cases} x=3t \\ y=-2+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation … de (d_2).
- $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ est une équation … du cercle de … $C(-1\,;2)$ et de … $\sqrt{5}$.

64 À un détail près

Donner un contre-exemple pour justifier que chacune des affirmations suivantes est fausse.

Fua : « *Toute équation de la forme $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite.* »

Mambo : « *Toute équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ est une équation cartésienne d'un cercle de centre $C(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.* »

Soli : « *Toute droite a une équation réduite de la forme $y=mx+p$.* »

65 Déceler une erreur

L'énoncé suivant est-il correct ?

(d) et (d') désignent deux droites d'équations respectives :

$$ax+by+c=0 \text{ et } a'x+b'y+c'=0.$$

Si (d) et (d') sont parallèles, alors le système :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

n'a pas de solution.

66 D'une équation à l'autre

On donne $(d): y=2x-3$; $(d'): 4x+2y+6=0$;

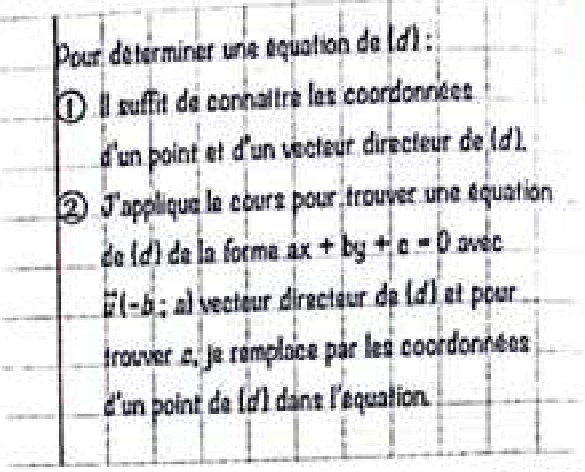
$$(d''): \begin{cases} x=-4+t \\ y=2-3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Associer chacune des équations ou représentations paramétriques ci-dessous à (d), à (d') ou à (d'').

- $y=3x-10$;
- $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$;
- $y=-2x-3$;
- $-10x+5y+15=0$;
- $\begin{cases} x=-1+t' \\ y=-1-2t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$;
- $-6x-2y-20=0$.

67 Les étapes d'une recherche

Asong a noté ci-dessous une méthode pour déterminer une équation d'une droite (d).

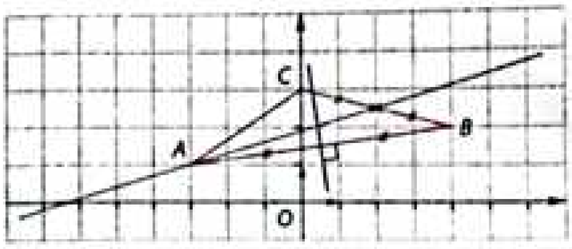


Pour déterminer une équation de (d) :

① Il suffit de connaître les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de (d).

② J'applique le cours pour trouver une équation de (d) de la forme $ax+by+c=0$ avec $\vec{u}(-b\,;a)$ vecteur directeur de (d) et pour trouver c, je remplace par les coordonnées d'un point de (d) dans l'équation.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté un triangle ABC.



Utiliser la méthode d'Asong pour :

a. Déterminer une représentation paramétrique de la médiane issue de A du triangle ABC.

b. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

c. Déterminer une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

68 Deux méthodes

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne :

$$A(1\,;-2),\ B(-3\,;8) \text{ et } C(0\,;3).$$

Utiliser chacune des méthode indiquée pour déterminer une équation cartésienne de la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).

- Déterminant et vecteur directeur.
- Recherche d'une équation de la forme $ax+by+c=0$.

69 Rédiger une fiche

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Rédiger une fiche méthode pour déterminer une équation cartésienne de cercle :

a. dont on connaît les coordonnées du centre et le rayon ;

b. dont on connaît un diamètre.

2. Appliquer ces fiches méthodes pour déterminer une équation cartésienne :

a. du cercle $(\mathscr{C})$ passant par $A(-1\,;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$;

b. du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[BC]$ avec $B(-1\,;3)$ et $C(4\,;2)$.

Se tester

Vrai-faux

Top chrono *(sans justification)*

70 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-1;3)$, $B(0;-2)$ et la droite (d) d'équation cartésienne $3x-y+1=0$.

	vrai	faux
1. $\vec{u}(1;-5)$ est un vecteur directeur de (AB).	☐	☐
2. $y=3x+1$ est l'équation réduite de (d).	☐	☐
3. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (AB).	☐	☐
4. $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3+10t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (AB).	☐	☐
5. $C(-1;0)\in(d)$.	☐	☐
6. (d) et (AB) sont parallèles.	☐	☐
7. La droite parallèle à (d) passant par C a pour équation $6x-2y+6=0$.	☐	☐

Avec justification

71 Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse.
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne le vecteur $\vec{u}(2;-1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+t \\ y=5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

	vrai	faux
1. $A(4;5)\in(d)$.	☐	☐
2. $\vec{v}(-3;-15)$ est un vecteur directeur de (d).	☐	☐
3. $x+2y-14=0$ est une équation cartésienne de la droite (d') passant par A et dirigée par $\vec{u}$.	☐	☐
4. $\begin{cases} x=2+2t' \\ y=-5+10t' \end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (d).	☐	☐
5. (d) a pour équation réduite $y=5x-15$.	☐	☐
6. Les droites (d) et (d') sont sécantes.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

72 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=5$.

1. Le centre de $(\mathscr{C})$ est :
   a. $C(-3;1)$; b. $C(3;-1)$; c. $C(3;5)$.
2. Le rayon de $(\mathscr{C})$ est égal à :
   a. 5 ; b. $\sqrt{5}$; c. $-\sqrt{5}$.
3. Le point $A(2;1)$ appartient à $(\mathscr{C})$:
   a. vrai ;
   b. faux ;
   c. on ne peut pas le savoir.
4. Le cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre $[BC]$ avec $B(-1;4)$ et $C(2;5)$ a pour équation :
   a. $x^2+y^2-3x+2y=0$;
   b. $x^2+y^2-x-9y+18=0$;
   c. $(x+1)^2+(y-4)^2=7$.

Avec justification

73 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1;0)$, $B(2;-4)$, le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et passant par B.

1. Une équation de $(\mathscr{C})$ est :
   a. $x^2+y^2=25$; b. $x^2+y^2+2x-24=0$;
   c. $(x-1)^2+y^2=5$.
2. Une équation cartésienne de (AB) est :
   a. $4x+3y+4=0$; b. $-4x-3y=-4$;
   c. $y=-4$.
3. Une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ est :
   a. $4x+3y+4=0$; b. $3x-4y-\frac{19}{2}=0$;
   c. $y=\frac{3}{4}x-4$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

74 Cercle et tangente en un point

$(\mathscr{C})$ désigne un cercle d'équation :

$$x^2+y^2-6x=0.$$

a. Déterminer les coordonnées du centre C du cercle $(\mathscr{C})$.

b. B désigne le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1 et d'ordonnée négative. Quelle est l'ordonnée de B ?

c. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CB}$, puis un vecteur directeur de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en B.

d. Déterminer une équation cartésienne de (T).

Rappel

Dans un repère orthonormé, $\vec{v}(-b\,;a) \perp \vec{u}(a\,;b)$.

75 Intersection de droites

On donne les points $A(-1\,;3)$, $B(2\,;2)$ et la droite (d) d'équation $y=-2x+3$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (AB).

76 Lieu des centres d'une famille de cercles

$(\mathscr{C}_m)$ désigne une courbe d'équation :

$$x^2+y^2-2mx-2(m-1)y+2m^2-2m=0$$

où m est un nombre réel.

1. Déterminer la nature de $(\mathscr{C}_0)$ et de $(\mathscr{C}_1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel m, $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle.
Déterminer les coordonnées du centre C_m et la valeur du rayon R_m en fonction de m.
3. En déduire que les centres des cercles $(\mathscr{C}_m)$ appartiennent tous à une même droite que l'on définira.
4. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle le centre de $(\mathscr{C}_m)$ est $K(-3\,;-5)$?

77 Équation d'une droite et produit scalaire

On donne $A(3\,;-1)$, $B(-2\,;0)$ et $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=m$.
On note (E_m) cette équation.
2. Que représente (E_0) ?

78 Quadrilatère d'aire constante

a et b désignent deux nombres réels tels que $a+b=4$.
Dans un repère, A et B sont deux points de coordonnées respectives $(a\,;0)$ et $(0\,;b)$.

1. Déterminer, en fonction de a et de b, une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.
2. Dans un repère orthonormé, tracer le cercle $(\mathscr{C})$:
a. lorsque $a=1$;
b. lorsque $a=-3$.
3. Justifier que, pour tous nombres réels a et b tels que $a+b=4$, les points $O(0\,;0)$ et $C(2\,;2)$ appartiennent à $(\mathscr{C})$.
4. Déterminer l'ensemble des centres des cercles $(\mathscr{C})$ lorsque a et b varient.
5. Démontrer que, pour tous nombres réels positifs a et b tels que $a+b=4$, l'aire du quadrilatère $OACB$ est constante.

79 Température Celsius et Fahrenheit

On sait que la représentation graphique de la fonction convertissant les degrés Celsius en degré Fahrenheit est une droite.
On sait aussi que :

$$\begin{cases}\text{La glace fond à 0 °C et 32 °F}\\ \text{L'eau bout à 100 °C et 212 °F}\end{cases}.$$

À quelle température un thermomètre gradué en degré Celsius et un thermomètre en degré Fahrenheit indiquent-ils la même valeur ?

Info

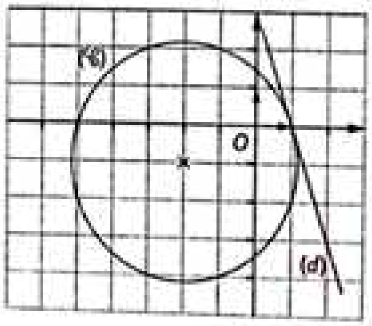
Vers 1709, l'Allemand Daniel Fahrenheit propose la première échelle thermométrique, toujours utilisée dans les pays anglo-saxons, où les points fixes sont la température d'un mélange réfrigérant et celle du corps humain, séparés par 96 degrés.
En 1742, le Suédois Anders Celsius divise par 100 l'écart entre le point d'ébullition de l'eau (0°) et celui de sa congélation (100°), ce qui a été inversé par la suite.

80 Intersection d'une droite et d'un cercle

$(\mathscr{C})$ désigne le cercle d'équation $x^2+y^2+4x+6y-5=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=3+t\\ y=-3{,}55-2t\end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

1. Conjecturer le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (d).
2. Valider ou invalider cette conjecture en déterminant les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (d).



81 Représentation paramétrique d'un cercle

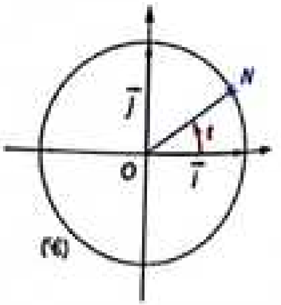
$(\mathscr{C})$ désigne l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$(E)\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases} \text{ avec } t\in\,]-\pi\,;\pi].$$

1. a. Montrer que M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
b. Montrer que si N est un point de $(\mathscr{C})$ alors il existe $t\in\,]-\pi\,;\pi]$ tel que :

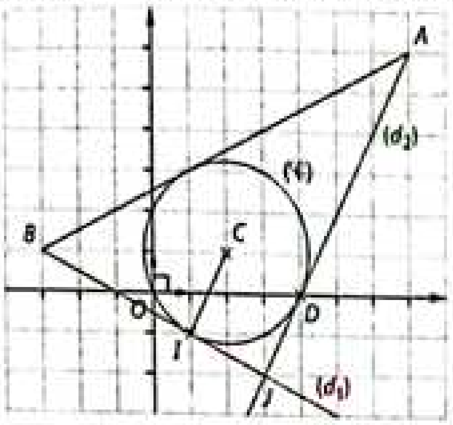
$$\begin{cases}x_N=\cos t\\ y_N=\sin t\end{cases}.$$

2. En déduire l'ensemble des points M.
(E) est appelé représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.



82 Cercles et tangentes

On donne les points $A(7\,;6)$, $B(-3\,;1)$, $C(2\,;1)$, $D(4\,;0)$.



1. a. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre C et de rayon $r = \sqrt{5}$.

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_3) passant par C et perpendiculaire à (AB).

c. Montrer que la droite (AB) est tangente à $(\mathscr{C})$ en un point K dont on déterminera les coordonnées.

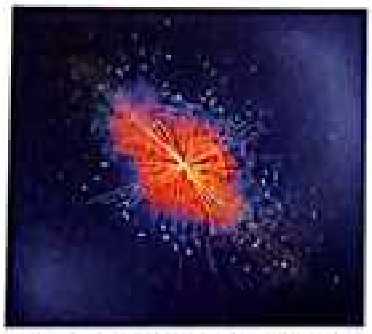
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $I(1\,;-1)$ et vérifier que cette droite passe par B. On note (d_1) cette droite.

3. Vérifier que la droite (d_2) passant par A et D est tangente à $(\mathscr{C})$ en D.

4. Les droites (d_1) et (d_2) se coupent en J.

Montrer que le triangle AJB est rectangle en J, puis déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle.

83 Dans une collision de particules



Deux particules nommées P_1 et P_2 sont animées de vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ avec :

$\overrightarrow{V_1}(4\,;2)$

et $\overrightarrow{V_2}(1\,;2)$.

On sait qu'à l'instant $t = 0$, P_1 et P_2 se trouvent respectivement en $A(1\,;3)$ et $B(3\,;1)$.

On sait que la position M de la particule P_1 à l'instant t vérifie $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_1}$.

1. Définir la droite (d_1), lieu de la particule P_1 par une représentation paramétrique.

2. Définir la droite (d_2), lieu de la particule P_2 par une représentation paramétrique.

a. Montrer que (d_1) et (d_2) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

b. Peut-il y avoir collision ?

3. Où doit-être la particule P_2 à l'instant $t = 0$ pour qu'il y ait collision ?

Info

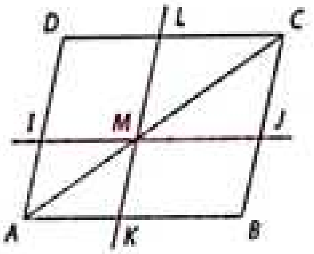
L'étude de collisions de particules subatomiques produites dans des accélérateurs a permis les découvertes essentielles concernant la structure de la matière. C'est également dans les accélérateurs qu'on fabrique les isotopes radioactifs pour la médecine et l'industrie.

84 Droites concourantes

$ABCD$ désigne un parallélogramme et M un point de $]AC[$.

La parallèle à (AB) passant par M coupe (AD) et (BC) en I et J et la parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) et (CD) en K et L.

On munit le plan du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et on pose $m = AK$ avec $0 < m < 1$.



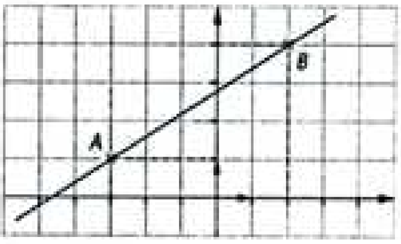
a. Donner en fonction de m les coordonnées des points M, I, J, K et L.

b. Pour quelle valeur de m les droites (IL) et (JK) sont-elles parallèles ?

c. Montrer que lorsque (IL) et (JK) sont sécantes, leur point d'intersection est aligné avec A et C.

85 Représentation paramétrique de segments

On donne les points $A(-3\,;1)$ et $B(2\,;4)$.



1. Préciser l'ensemble des points tels que :

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

dans chacun des cas suivants :

a. lorsque t décrit $[0\,;+\infty[$;

b. lorsque t décrit $[0\,;1]$;

c. lorsque t décrit $]-\infty\,;1]$.

2. Le point I désigne le milieu de $[AB]$.

Déterminer une représentation paramétrique :

a. de la demi-droite $[AI)$;

b. de la demi-droite $[BI)$;

c. du segment $[AI]$;

d. du segment $[IB]$.

86 Étude d'une famille de courbes

$(\mathscr{C}_k)$ désigne la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2k = 0$ où k est un nombre réel.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}_k)$ selon les valeurs de k.

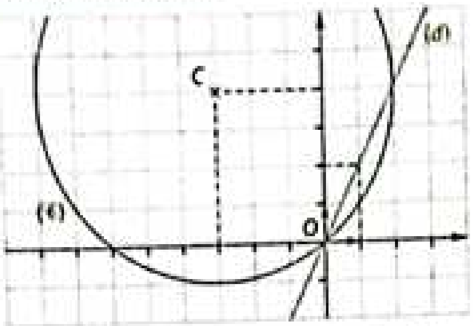
b. On donne deux nombres réels k et k' de l'intervalle :

$$\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[.$$

Montrer que si $k \neq k'$ alors $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{C}_{k'})$ sont disjointes.

Exercices d'approfondissement

87 Droites et cercles



1. Déterminer les points d'intersection de (*d*) et (𝒞).

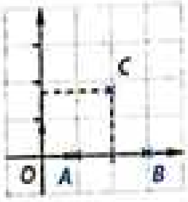
2. Déterminer les points d'intersection de (𝒞) avec les axes des coordonnées.

3. a. Justifier que le point *A*(−6 ; 0) appartient à (𝒞).

b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en *A* à (𝒞).

88 Cercle tangent à deux droites

On donne les points *A*(1 ; 0), *B*(3 ; 0) et $C(2\,;\sqrt{3})$.



a. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$, puis déterminer une représentation paramétrique de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

b. En déduire une équation cartésienne d'un cercle (𝒞) tangent à (*AB*) et à (*AC*) et dont le centre a comme abscisse 5.

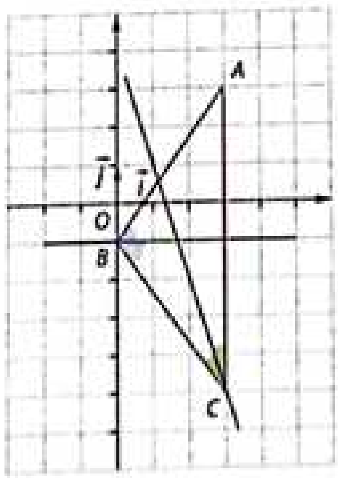
c. Déterminer les coordonnées des points de tangence de (𝒞) avec les droites (*AB*) et (*AC*).

Aide

$AB = AC$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

89 Équation d'un cercle inscrit

ABC désigne le triangle tracé dans le repère orthonormé ci-dessous.

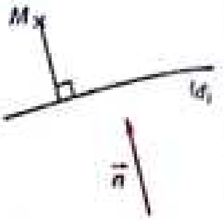


Déterminer une équation du cercle inscrit dans le triangle *ABC*.

Aide

Le centre du cercle inscrit à un triangle est le point d'intersection des bissectrices.

90 Distance d'un point à une droite



On donne les nombres réels *a*, *b*, x_0 et y_0.

(*d*) est la droite d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

Le point *H* est le projeté orthogonal de $M(x_0\,;y_0)$ sur la droite (*d*) et $\vec{n}(a\,;b)$ est un vecteur normal (c'est-à-dire perpendiculaire) à (*d*).

Le but de l'exercice est de calculer la distance de *M* à la droite (*d*).

1. Démontrer que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + c$.

2. Démontrer que $\left|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}\right| = HM \times \|\vec{n}\|$.

3. Déduire des questions précédentes que :

$$HM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

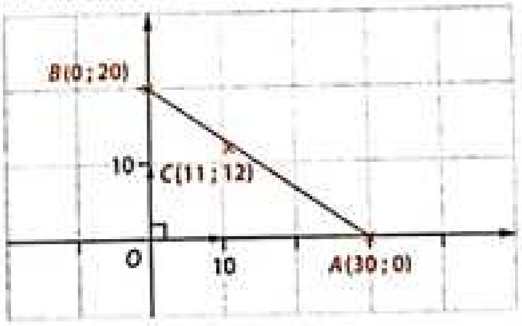
4. **Applications**

a. Calculer la distance du point *M*(−3 ; 4) à la droite d'équation cartésienne $2x - 5y + 1 = 0$.

b. Le cercle (𝒞) d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ est-il tangent à la droite d'équation $y = -x + 4$?

91 Stade sous contraintes

Les unités ci-dessous sont exprimées en mètres.



A et *B* désignent deux villes reliées par une route. L'unité est le km.

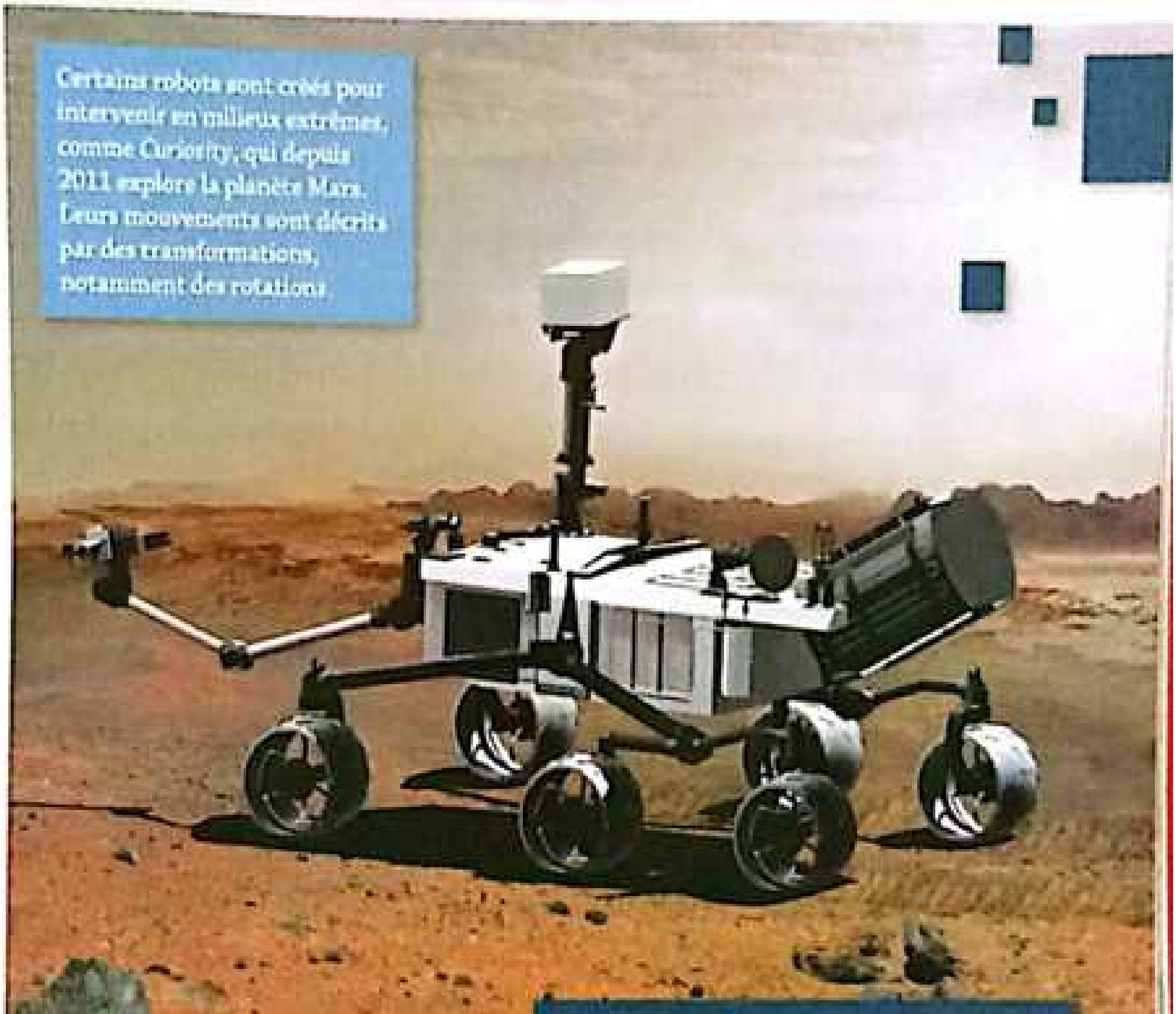
On désire construire un stade circulaire le plus grand possible de centre *C* et conserver une distance minimale de 50 mètres entre le stade et la route.

a. Déterminer une équation cartésienne du bord de ce stade ; puis le représenter dans un repère.

b. Quelle surface va-t-il occuper ?

6

Transformations du plan



Certains robots sont créés pour intervenir en milieux extrêmes, comme Curiosity, qui depuis 2011 explore la planète Mars. Leurs mouvements sont décrits par des transformations, notamment des rotations.

Le terme homothétie, dû au mathématicien français Michel Chasles (1793-1880), est composé des mots grecs *homos* qui signifie semblable et *thesis* qui signifie position. Sur cette fougère les feuilles sont homothétiques.

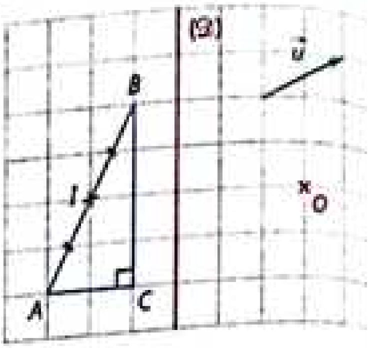
Les objectifs du chapitre

Utiliser les propriétés des transformations (symétrie centrale, symétrie orthogonale, translation, rotation, homothétie) pour :

- Construire.
- Rechercher des lieux géométriques de points.
- Résoudre des problèmes.

Cours 1b, 1c, 1d, 3a, 3

1 Observer pour conjecturer



1 Reproduire la figure ci-contre.

2 **a.** Placer les points A', B', C', I' symétriques des points A, B, C, I par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

b. Que peut-on conjecturer :
- à propos des points A', B' et I' ?
- à propos des longueurs des segments et de leurs symétriques ?
- à propos des droites et de leurs symétriques ?
- à propos des droites $(A'B')$ et $(B'C')$?

c. Quel est le symétrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$? du vecteur $\overrightarrow{AC}$? de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$?

Comparer les mesures de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et de son symétrique afin de compléter la phrase :

« Par une symétrie orthogonale, un angle orienté a pour symétrique un angle orienté de .... »

3 Reprendre les questions précédentes en considérant la symétrie centrale de centre O.

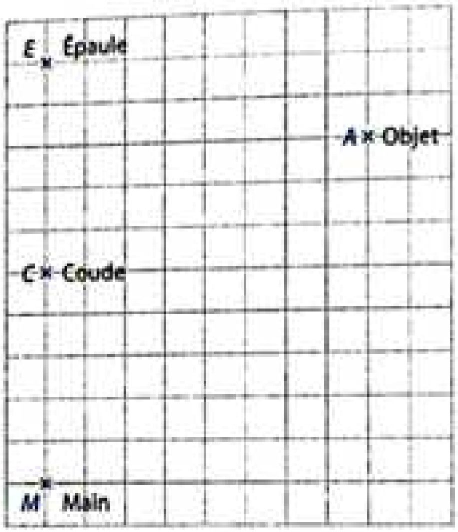
4 Reprendre les questions précédentes en considérant la translation de vecteur $\vec{u}$.

Cours

2 Le mouvement du robot

Le bras d'un robot est schématisé par deux segments $[EC]$ et $[CM]$ ci-contre.

On admet que les mouvements du bras et de l'avant-bras sont des rotations qui s'effectuent dans le même plan que l'objet A à saisir.



1 **Le coude est fixe**

a. Le robot effectue un mouvement bras tendu.
Représenter l'ensemble des lieux possibles pour la main M.

b. Le robot peut-il saisir l'objet A ?

2 **L'épaule est fixe**

a. Le robot effectue un mouvement sans bouger l'épaule.
Représenter l'ensemble des lieux possibles pour la main M.

b. Le robot peut-il saisir l'objet A ?

3 **Mouvement libre**

a. Représenter une situation dans laquelle deux mouvements de bras du robot (épaule et coude) lui permettent de saisir l'objet A.

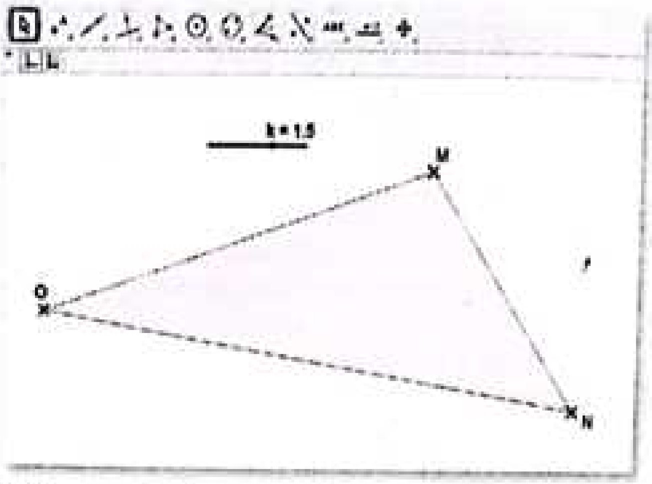
b. Décrire chacun de ces mouvements par une rotation dont on donnera le centre et la mesure approchée de l'angle.

3 Observer à l'aide d'un logiciel

Cours 4a, 4b, 4c

1 Conjecturer

a. Ouvrir le logiciel GeoGebra.
Construire un triangle OMN comme ci-contre.



b. Dans le menu déroulant de l'icône, sélectionner **Curseur**, cliquer sur le graphique, nommer le curseur k, allant de -3 à 3 avec un incrément de 0,1, puis cliquer sur Appliquer.

c. Dans le menu déroulant de l'icône, sélectionner **Homothétie**, cliquer sur le point M, puis le point O et dans **Facteur**, taper la lettre k.
On obtient ainsi l'image M' de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
Construire l'image N' de N par l'homothétie de centre O et de rapport k. Tracer $[M'N']$.

d. Cliquer sur l'icône et déplacer le curseur.
Que peut-on conjecturer à propos des droites (MN) et $(M'N')$?

e. Que se passe-t-il lorsque $k = 0$? lorsque $k = 1$?

2 Démontrer

a. Traduire par une égalité vectorielle le fait que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

b. Démontrer que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

c. Que peut-on en déduire, lorsque $k \neq 0$:
- à propos des droites (MN) et $(M'N')$?
- à propos des longueurs MN et $M'N'$?

4 Caractérisation d'une homothétie

Cours 4d

1 Démonstration

A, B, A', B' désignent quatre points du plan tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ et $(AB) // (A'B')$.
L'objectif de cette question est de montrer qu'il n'existe qu'une seule homothétie h qui transforme A en A' et B en B'.

a. Quelle égalité vectorielle relie les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$?
Si une telle homothétie h existe, en déduire le rapport.

b. Utiliser l'un des rappels ci-contre pour montrer que, si $h(A) = A'$, alors h est unique.

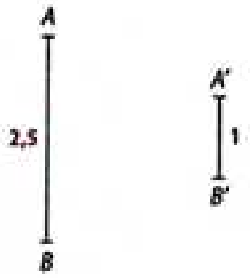
c. On note O le centre de l'homothétie h.
Démontrer que $h(B) = B'$. Conclure.

Rappels
- Une homothétie est une transformation du plan.
- Une homothétie est définie par son centre et son rapport.
- $h(M) = M'$ signifie que l'homothétie transforme M en M'.

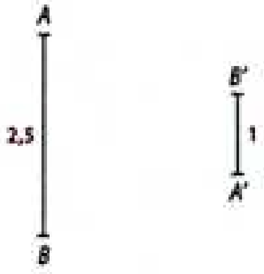
2 Applications

Construire le centre et déterminer le rapport de l'homothétie qui transforme A en A' et B en B' dans les cas suivants.

a.



b.



6 Cours

1 Transformations usuelles

a Transformation du plan

Définition

Une **transformation du plan** est une application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe un unique point M', appelé **image** de M par cette transformation.

Exemples Les cinq applications étudiées dans ce chapitre (symétrie orthogonale, symétrie axiale, translation, rotation et homothétie) sont toutes, sauf cas particuliers, des transformations du plan.

b Symétrie orthogonale

Définition

$(\mathscr{D})$ désigne une droite du plan. La **symétrie orthogonale** d'axe $(\mathscr{D})$ est la transformation du plan qui, à tout point $M \notin (\mathscr{D})$ associe le point M' tel que $(\mathscr{D})$ est la médiatrice de $[MM']$. Si $M \in (\mathscr{D})$, alors $M' = M$.

Remarque La symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ est également appelée symétrie axiale d'axe $(\mathscr{D})$.

Notation En général, cette transformation est notée $s_{(\mathscr{D})}$.

Caractérisation

M et M' désignent deux points distincts du plan.
Il existe une unique symétrie orthogonale qui transforme M en M'. Elle a pour axe la médiatrice de $[MM']$.

c Symétrie centrale

Définition

I désigne un point du plan. La **symétrie centrale** de centre I est la transformation du plan qui, à tout point $M \neq I$ associe le point M' tel que I est le milieu de $[MM']$. Si $M = I$, alors $M' = I$.

Notation En général, cette transformation est notée s_I.

Caractérisation

M et M' désignent deux points distincts du plan.
Il existe une unique symétrie centrale qui transforme M en M'. Elle a pour centre le milieu de $[MM']$.

d Translation

Définition

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul du plan. La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan, qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Notation En général, cette transformation est notée $t_{\vec{u}}$.

Caractérisation

M et M' désignent deux points distincts du plan.
Il existe une unique translation qui transforme M en M'. Elle a pour vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

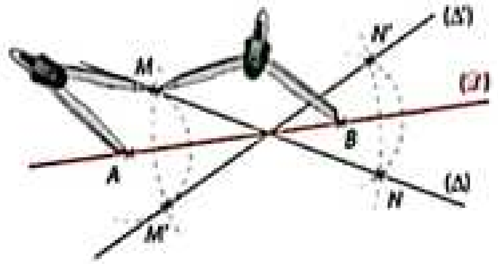
6 Savoir-faire

1 Construire l'image d'une droite

$(\mathscr{D})$ et (Δ) désignent deux droites sécantes représentées ci-contre.
Construire, à la règle et au compas, l'image (Δ') de (Δ) par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

Solution commentée

On choisit deux points M et N au hasard sur (Δ) afin de tracer leurs symétriques par rapport à $(\mathscr{D})$.



La droite (Δ') cherchée est la droite $(M'N')$.

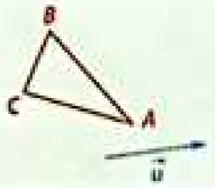
Méthode

Pour construire l'image M' d'un point M par une symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$:

- on choisit un premier point $A \in (\mathscr{D})$ et on trace un arc de cercle de rayon AM ;
- on choisit un second point $B \in (\mathscr{D})$ et on trace un arc de cercle de rayon BM ;
- M' est le point d'intersection de ces arcs.
- Procéder de la même façon pour obtenir l'image N' du point N.

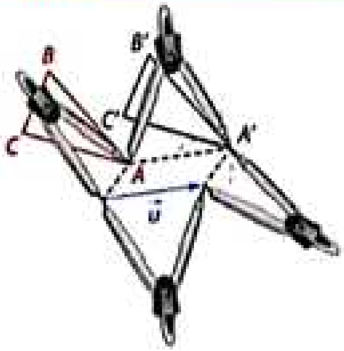
2 Construire l'image d'un triangle

$\vec{u}$ désigne le vecteur et ABC le triangle représentés ci-contre.
Construire, à la règle et au compas, l'image du triangle ABC par la translation du vecteur $\vec{u}$.



Solution commentée

On construit successivement l'image de chacun des points A, B, C puis on trace le triangle obtenu.
Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation du vecteur $\vec{u}$.



Méthode

Pour construire l'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\vec{u}$:
on construit avec le compas le quatrième point du parallélogramme formé avec $\vec{u}$ et M, de sorte que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

Notation

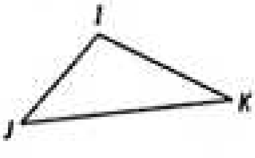
On note : $t_{\vec{u}}(A) = A'$; $t_{\vec{u}}(B) = B'$; $t_{\vec{u}}(C) = C'$.

S'exercer

3 Construire, à la règle et au compas, l'image du segment $[AB]$ par la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$.

4 $ABCD$ désigne un rectangle.
Construire, à la règle et au compas, l'image de ce rectangle par la symétrie de centre A.

5 Construire, à la règle et au compas, l'image du segment $[IJ]$ par la symétrie de centre K.



6 $EFGH$ désigne un rectangle.
Construire, à la règle et au compas, l'image de ce rectangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

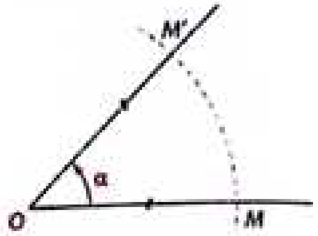
2 Rotation

Définition

O désigne un point du plan et α la mesure d'un angle orienté du plan.
La **rotation** de centre O et d'angle de mesure α est la transformation du plan qui, à tout point $M \neq O$ associe le point M' tel que :

$$OM = OM' \text{ et } \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha.$$

Si $M = O$, alors $M' = O$.



Notation En général, cette transformation est notée $r(O\,;\alpha)$.

Remarque Cette définition prend désormais en compte le fait que les angles du plan sont orientés.

3 Propriétés

a Propriétés usuelles

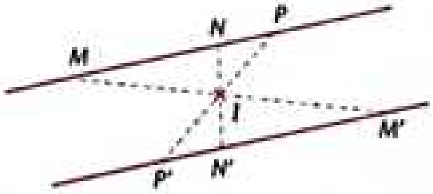
Propriétés

Une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation et une rotation :
- conservent les longueurs (c'est-à-dire qu'elles transforment un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ de même longueur) ;
- conservent l'alignement (c'est-à-dire qu'elles transforment trois points M, N, P en trois points M', N', P' alignés).

Une symétrie centrale et une translation transforment une droite en une droite qui lui est parallèle.

Exemple

M', N', P' sont les images de M, N, P par la symétrie centrale s_I.
- Donc $M'N' = MN$;
- M, N, P sont alignés, donc M', N', P' sont alignés ;
- $(M'N') \,//\, (MN)$.

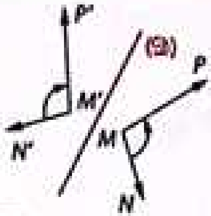


b Image d'un angle orienté

M', N', P' désignent les images de trois points distincts M, N, P par l'une des transformations ci-dessous.

Symétrie orthogonale

Une symétrie orthogonale renverse les angles orientés :



$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = -\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}})$.

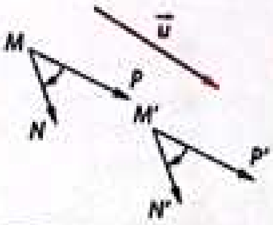
Symétrie centrale

Une symétrie centrale conserve les angles orientés :

$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}})$.

Translation

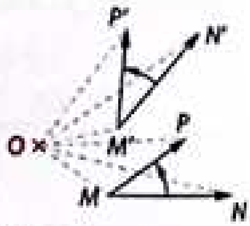
Une translation conserve les angles orientés :



$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}})$.

Rotation

Une rotation conserve les angles orientés :

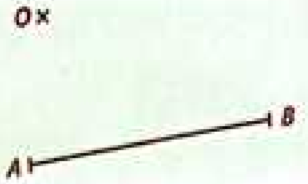


$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}}) = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}})$.

6 Savoir-faire

7 Construire l'image d'un segment

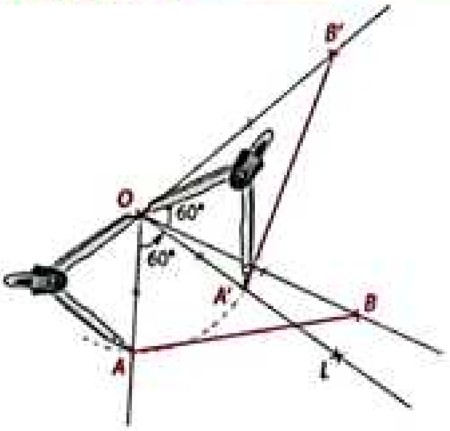
**[*AB*] désigne le segment représenté ci-contre.
Construire, à la règle, au compas et au rapporteur, l'image de [*AB*] par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure 60°.**



Solution commentée

On construit successivement l'image des points *A* et *B*.

Le segment [*A'B'*] est l'image du segment [*AB*] par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure 60°.



Méthode

Pour construire l'image *A'* d'un point *A* par une rotation de centre *O* et d'angle de mesure α :
- tracer la demi-droite [*OA*) ;
- tracer la demi-droite [*OL*) telle que mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OL}}) = \alpha$: Attention au sens !
- à l'aide du compas, placer le point *A'* de [*OL*) tel que *OA'* = *OA*.

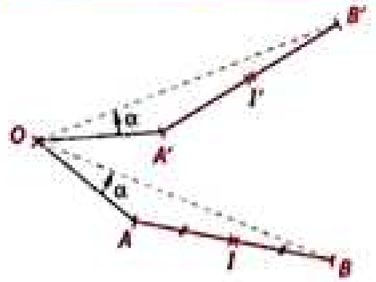
Notation

En posant $r = r(O\,;60°)$, on note :
$r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

8 Utiliser les propriétés pour démontrer

Démontrer que, par une rotation, l'image du milieu *I* d'un segment [*AB*] est le milieu *I'* du segment image [*A'B'*].

Solution commentée



Objet	Image
A	*A'*
B	*B'*
I	*I'*
[*IA*]	[*IA'*]
[*IB*]	[*IB'*]

- Une rotation conserve l'alignement, or les points *A*, *I*, *B* sont alignés, donc les points *A'*, *I'*, *B'* sont alignés.
- Une rotation conserve les longueurs, donc *I'A'* = *IA* et *I'B'* = *IB*.
- Or *I* est le milieu de [*AB*], donc *IA* = *IB*.

Ainsi, *I'A'* = *I'B'* et puisque *A'*, *I'*, *B'* sont alignés, on en déduit que *I'* est le milieu de [*A'B'*].

Méthode

- Pour résoudre ce type d'exercice, on utilise la définition et les propriétés données en cours.
- On peut également s'aider d'un schéma et/ou d'un tableau qui synthétise les données.

Remarque

Les propriétés démontrées aux exercices 10 et 11 peuvent être apprises par cœur et utilisées ensuite.

S'exercer

9 **1.** Tracer un segment [*AB*] de longueur 4 cm et placer un point *O* n'appartenant pas à [*AB*].
2. Construire l'image de [*AB*] par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure :
a. 90° ; **b.** $-\dfrac{\pi}{6}$ rad.

10 Démontrer que la propriété démontrée à l'exercice 8 reste valable dans le cas d'une symétrie axiale, d'une symétrie centrale et d'une translation.

11 Démontrer que, par une rotation, l'image de deux droites parallèles est deux droites parallèles.

4 Homothétie

a Propriétés usuelles

Définition

O désigne un point du plan et k un nombre réel non nul.
L'**homothétie** de centre O et de rapport k est la transformation du plan qui, à tout point $M \neq O$, associe le point M' tel que $\overline{OM'} = k\overline{OM}$.
Si $M = O$, alors $M' = O$.

Exemples

- Pour $k = 2$

$\overline{OM'} = 2\overline{OM}$

- Pour $k = -\frac{1}{3}$

$\overline{OM'} = -\frac{1}{3}\overline{OM}$

Notation En général, cette transformation est notée $h(O\,;k)$.

Conséquence

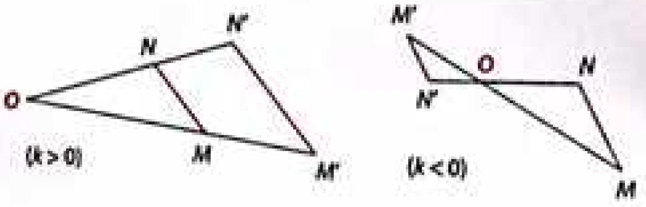
Le centre O, un point M et son image M' par une homothétie sont alignés.

b Propriété fondamentale

Propriété

M' et N' désignent les images des points M et N par une homothétie de rapport k.

On a : $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$.



Remarque On reconnaît dans les figures ci-dessus les configuration de Thalès.

c Images de figures simples

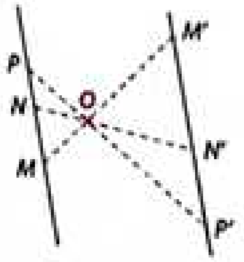
Propriétés

Une homothétie de rapport k non nul :

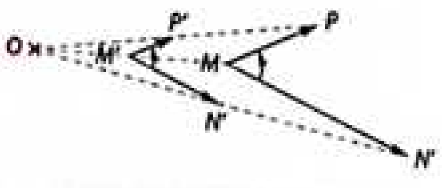
- transforme un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ tel que $M'N' = |k| \times MN$;
- conserve l'alignement (c'est-à-dire qu'elle transforme trois points M, N, P alignés en trois points M', N', P' alignés) ;
- transforme une droite (MN) en une droite $(M'N')$ qui lui est parallèle ;
- transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon $|k| \times R$;
- transforme une figure $\mathcal{F}$ d'aire $\mathcal{A}$ en une figure $\mathcal{F}'$ d'aire $k^2 \times \mathcal{A}$;
- conserve les angles orientés (c'est-à-dire qu'elle transforme un angle orienté $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ en un angle orienté $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'})$ de même mesure).

Exemples

- $k = 2$



- $k = \frac{1}{2}$



d Deux points et leurs images

Caractérisation

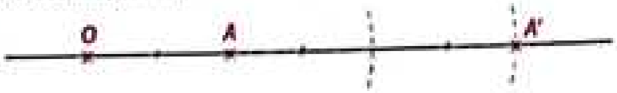
A, B, A', B' désignent quatre points tels que (AB) // $(A'B')$ et $\overline{A'B'} \neq \overline{AB}$.
Il existe une unique homothétie qui transforme A en A' et B en B'.

12 Construire l'image d'un point

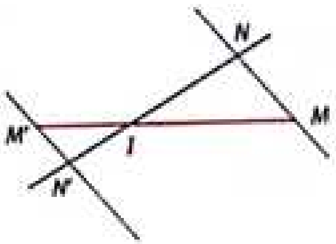
1. ***O* et *A* désignent deux points distincts du plan.**
Construire l'image *A'* du point *A* par l'homothétie de centre *O* et de rapport 3.
2. *I*, *M* et *M'* sont les points alignés représentés ci-contre.
Construire l'image *N'* du point *N* par l'homothétie de centre *I* qui transforme *M* en *M'*.

Solution commentée

1. *A'* est l'image de *A*, on a $\overline{OA'} = 3\overline{OA}$.



2.



Remarque

$\frac{\overline{IM'}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{IN'}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = k$;
k est le rapport de l'homothétie.

Méthode

1. • Tracer la droite (*OA*) : on sait d'après la conséquence du paragraphe 4. a. que *O*, *A*, *A'* seront alignés ;
• Reporter le rapport *k* en étant attentif au signe de *k*.

2. On peut utiliser la méthode précédente ou construire la droite parallèle à (*MN*) passant par *M'*. Elle coupe (*IN*) en *N'*.

Aide

Les configurations de Thalès sont étroitement associées aux homothéties.

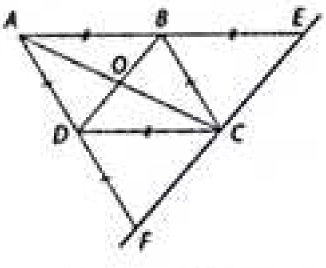
13 Utiliser les propriétés pour démontrer

***ABCD* désigne un parallélogramme de centre *O*. On note *E* le symétrique de *A* par rapport à *B* et *F* le symétrique de *A* par rapport à *D*.**
Démontrer que les points *E*, *C*, *F* sont alignés.

Solution commentée

D'après les hypothèses, on a :

$\overline{AC} = 2\overline{AO}$;
$\overline{AE} = 2\overline{AB}$;
$\overline{AF} = 2\overline{AD}$.



Ainsi, l'homothétie de centre *A* et de rapport 2 transforme *O* en *C*, *B* en *E* et *D* en *F*.

Or, les points *B*, *O*, *D* sont alignés, donc, puisqu'une homothétie conserve l'alignement, on en déduit que *E*, *C*, *F* sont alignés.

Méthode

• Reconnaître sur la figure une configuration de Thalès afin d'utiliser une homothétie.
• Utiliser les propriétés du cours pour conclure.

Rappel

Lorsque l'énoncé parle de milieu d'un segment ou de symétrie centrale, penser à une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ ou $k = 2$.

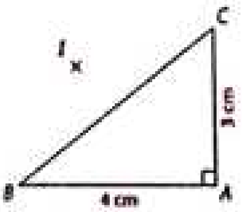
S'exercer

14 *O* et *A* désignent deux points distincts du plan. Construire l'image *A'* de *A* par l'homothétie de centre *O* et de rapport −3.

15

Construire l'image de *E* par l'homothétie de centre *I* qui transforme *F* en *F'*.

16 **a.** Construire le symétrique du triangle *ABC* ci-contre par l'homothétie de centre *I* et de rapport $\frac{7}{4}$.

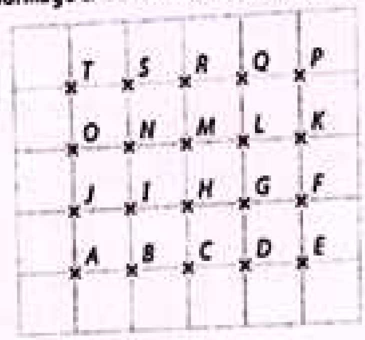


b. Démontrer que le triangle obtenu est rectangle.
c. Calculer l'aire du triangle obtenu.

Symétries et translations

Réponses rapides

17 Le quadrillage ci-dessous est constitué de carrés.



Nommer les images des points I et P :

a. par la symétrie orthogonale d'axe (ES) ;

b. par la symétrie centrale de centre M ;

c. par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$.

18 Utiliser le quadrillage de l'exercice 17 pour citer :

a. une symétrie orthogonale qui transforme K en A ;

b. une symétrie centrale qui transforme T en F ;

c. une translation qui transforme G en N.

19 1. Tracer un triangle ABC.

2. Construire, à la règle et au compas, l'image du point A :

a. par la symétrie orthogonale d'axe (BC) ;

b. par la symétrie centrale de centre B ;

c. par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

20 $ABCD$ désigne un rectangle.

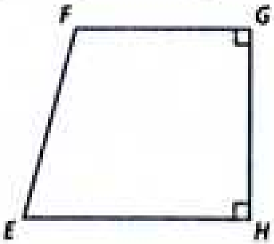
a. Construire, à la règle et au compas, l'image de ce rectangle par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b. Que se passe-t-il dans le cas où $ABCD$ est un carré ?

21 $(\mathscr{C})$ désigne un cercle de centre O et de rayon OM. Construire, à la règle et au compas, l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie de centre M.

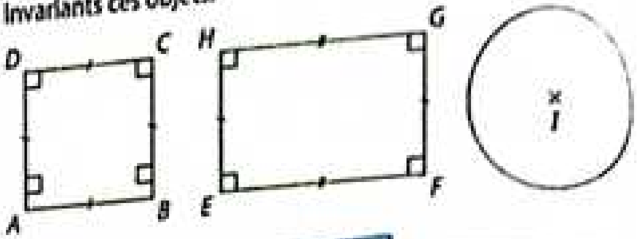
22 $IJKL$ désigne un parallélogramme de centre O. Construire, à la règle et au compas, l'image de $IJKL$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OK}$.

23 $EFGH$ désigne le trapèze rectangle ci-dessous.



Construire, à la règle et au compas, l'image de ce trapèze par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

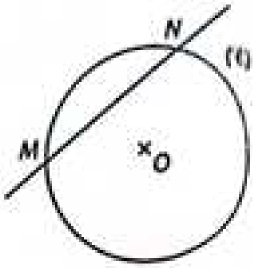
24 Pour chacun des objets ci-dessous, citer, sans justifier, une symétrie orthogonale et une symétrie centrale qui laissent invariants ces objets.



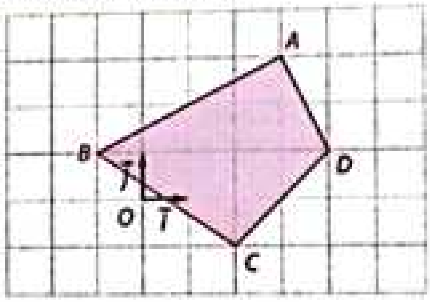
Vocabulaire

Un objet est dit invariant par une transformation lorsque l'image de cet objet, par cette transformation, est l'objet lui-même.

25 $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre O ci-contre.
$M \in (\mathscr{C})$ et $N \in (\mathscr{C})$.
On note $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ et $(\mathscr{C}'')$ l'image de $(\mathscr{C}')$ par la symétrie orthogonale d'axe (MN).
Construire $(\mathscr{C}'')$.



Pour les exercices 26 à 30, le repère $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé. Déterminer les coordonnées des images des points A, B, C, par la transformation f indiquée.



26 f est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$: $y = 2$.

27 f est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D}')$: $x = 1$.

28 f est la symétrie centrale de centre O.

29 f est la symétrie centrale de centre $I(1\,;3)$.

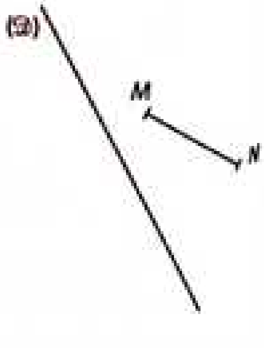
30 f est la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;-2)$.

31 **Propriété du cours**

1. a. Reproduire la figure ci-contre.

b. Construire les symétriques des points M et N par rapport à $(\mathscr{D})$.

2. On note I le point d'intersection de (MN') et de $(M'N)$.
Démontrer qu'une symétrie axiale conserve les longueurs en prouvant que $MN = M'N'$.



32 **Propriété du cours**

A, *B*, *C* désignent trois points alignés du plan et $I \notin (AB)$.

a. Construire les symétriques de *A*, *B*, *C* par rapport à *I*.

b. Démontrer qu'une symétrie centrale conserve l'alignement. (On pourra utiliser le théorème des milieux.)

33 *EFGH* désigne un rectangle.

Démontrer que l'image de *EFGH* par une translation est un rectangle de même aire.

34 Démontrer qu'une symétrie centrale transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

35 *ABC* désigne le triangle isocèle en *C* ci-contre.

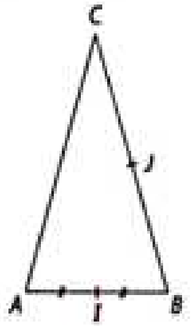
I et *J* sont les milieux de [*AB*] et [*BC*].

$AB = 2{,}5$ et $AC = 4$.

a. Construire les symétriques *B'*, *C'*, *I'* et *J'* de *B*, *C*, *I* et *J* par rapport à *A*.

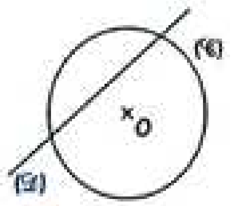
b. Calculer l'aire et le périmètre du triangle *AB'C'*.

Justifier chaque étape du calcul.



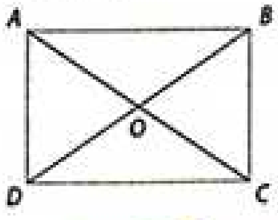
Dans les exercices 36 à 38, *M* varie sur l'ensemble $\mathscr{C}$ indiqué. Construire et décrire l'ensemble $\mathscr{C}'$ constitué des images *M'* de *M* par la transformation *f* indiquée.

36 *f* est la symétrie orthogonale d'axe ($\mathscr{D}$) et $\mathscr{C}$ est le cercle ($\mathscr{C}$) ci-dessous.



37 *f* est la symétrie centrale de centre *I* et $\mathscr{C}$ est la demi-droite [*EF*) ci-dessous.

38 *f* est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et $\mathscr{C}$ est le rectangle *ABCD* de centre *O* ci-dessous.



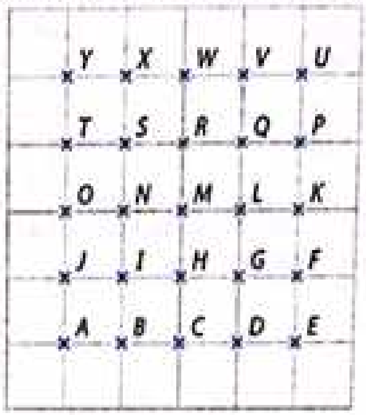
Vocabulaire

▸ Lorsque l'on cherche à décrire un ensemble de points (par exemple ici l'ensemble des images de *M* lorsque *M* décrit $\mathscr{C}$), on dit que l'on cherche un lieu géométrique.

Symétries et translations

Réponses rapides

39 Le quadrillage ci-dessous est constitué de carrés.



Nommer les images des points *L* et *J* :

a. par la rotation de centre *M* et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$ rad ;

b. par la rotation de centre *M* et d'angle de mesure $-\pi$ rad ;

c. par la rotation de centre *H* et d'angle de mesure $-90°$.

40 Utiliser le quadrillage de l'exercice 39 pour citer :

a. une rotation qui transforme *S* en *G* ;

b. une rotation qui transforme *N* en *R* ;

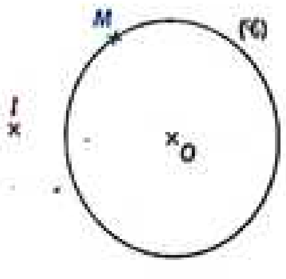
c. une rotation qui transforme *J* en *H*.

41 1. Tracer un triangle *ABC* et placer un point *O* extérieur à ce triangle.

2. Construire, à la règle, au compas et au rapporteur, l'image de ce triangle par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure :

a. 60° ; b. $-\frac{\pi}{4}$ rad.

42 Construire, à la règle, au compas et au rapporteur, l'image du cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre par la rotation de centre *I* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$ rad.



43 *ABCD* désigne un carré de centre *O* de côté 5 cm.

a. Construire, à la règle, au rapporteur et au compas, l'image *A'B'C'D'* du carré *ABCD* par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure 45°.

b. Quel est le nom du polygone *AA'BB'CC'DD'* ?

44 Construire les images des lettres ci-dessous par la rotation de centre *I* et d'angle de mesure −50°.

a.

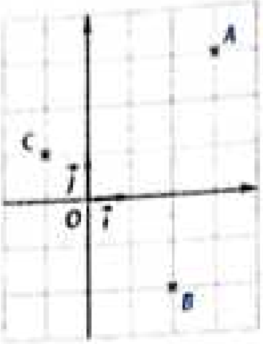
b.

Exercices d'entraînement

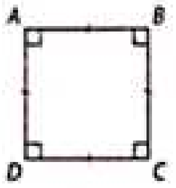
45 $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ désigne le repère orthonormé ci-contre.
Construire les images A', B', C' des points A, B, C par la rotation r ; puis calculer leurs coordonnées.

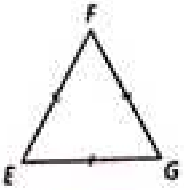
a. $r = \text{rot}\left(O\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$;

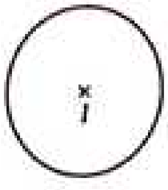
b. $r = \text{rot}\left(O\,;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.



46 Pour chacun des objets ci-dessous, citer, sans justifier, une rotation qui les laisse invariants.



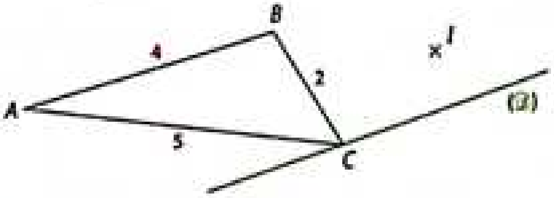




Aide

Pour les deux premiers cas, penser à créer un point.

Dans les exercices 47 à 49, ABC désigne le triangle ci-dessous.
r est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ rad, $s_{(\mathscr{D})}$ est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$, s_I la symétrie centrale de centre I et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.



47 On note $A'B'C'$ l'image de ABC par r et $A''B''C''$ l'image de $A'B'C'$ par $t_{\vec{u}}$.
Construire $A''B''C''$.

48 On note $A'B'C'$ l'image de ABC par r et MNP l'image de $A'B'C'$ par $s_{(\mathscr{D})}$.
Construire MNP.

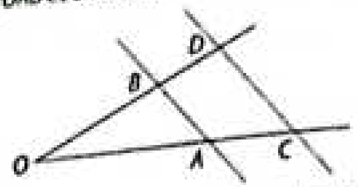
49 On note STU l'image de ABC par s_I et $S'T'U'$ l'image de STU par r.
Construire $S'T'U'$.

50 **Propriété du cours**
Utiliser les propriétés du cours pour démontrer que l'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu du segment image.

Remarque

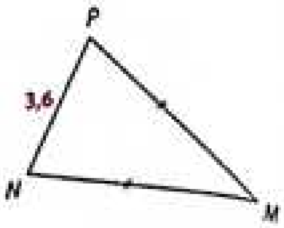
Cette propriété (et celle de l'exercice 51), valable pour toutes les transformations étudiées dans ce chapitre, peut être considérée comme acquise.

51 **Propriété du cours**
Les triangles OAB et OCD sont en configuration de Thalès.



a. Construire, à main levée, les images de ces triangles par une rotation de centre O et d'angle de mesure fixée que l'on choisira.
b. Utiliser les propriétés du cours pour démontrer que les images par une rotation de deux droites parallèles, sont deux droites parallèles.

52 MNP désigne le triangle isocèle en M ci-contre.
$MN = 6$.
Déterminer une valeur, arrondie au degré près, de la mesure de l'angle de la rotation qui transforme N en P.

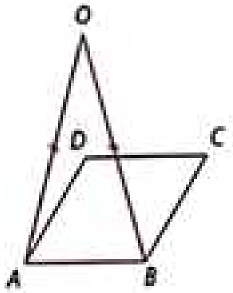


53 Démontrer que l'image d'un losange par une rotation est un losange de même aire.

Aide

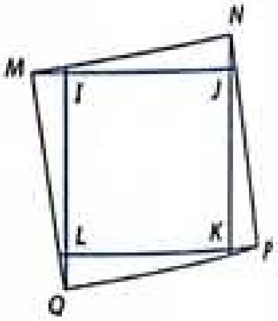
Il y a deux choses à démontrer :
- que l'image d'un losange est un losange ;
- que les aires de ces deux losanges sont égales.

54 OAB désigne un triangle isocèle en O et $ABCD$ un parallélogramme.



a. Construire l'image D' de D par la rotation de centre O qui transforme A en B.
b. Démontrer que le triangle BCD' est isocèle.

55 $IJKL$ désigne le carré de côté a ci-dessous.
M, N, P, Q sont les points tels que : $M \in [JI)$, $N \in [KJ)$, $P \in [LK)$, $Q \in [IL)$ et $MI = NJ = KP = LQ = b$.
a. Déterminer une rotation qui transforme le triangle MJN en le triangle NKP.
b. En déduire que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.
c. Exprimer l'aire de $MNPQ$ en fonction de a et de b.



Homothétie

Réponses rapides

56 Traduire par des égalités vectorielles les phrases suivantes :
a. A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 0,3.
b. M a pour image M' par l'homothétie de centre I et de rap-rapport $-\frac{1}{4}$.
c. L'homothétie de centre B et de rapport 4 transforme C en D.

57 Traduire les égalités vectorielles suivantes par une phrase utilisant une homothétie.

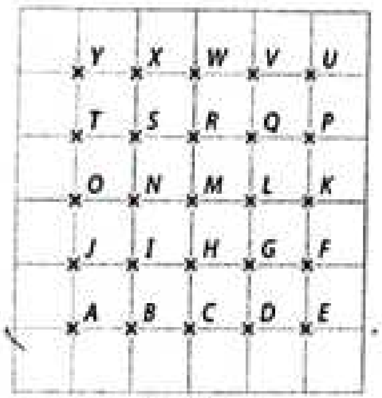
a. $\overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM}$; b. $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$;
c. $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{KD}$; d. $\overrightarrow{EF} = 0{,}2\overrightarrow{EG}$.

58 h désigne l'homothétie de centre O et de rapport -3.
M', N', P' sont les images de M, N, P par h.
Compléter les égalités vectorielles suivantes.

a. $\overrightarrow{OM'} = \ldots\overrightarrow{OM}$; b. $\ldots = -3\overrightarrow{OP}$;
c. $\overrightarrow{M'N'} = -3\ldots$; d. $\ldots = 3\overrightarrow{NO}$.

59 Déterminer le rapport de l'homothétie de centre D qui transforme :
a. A en B ; b. E en F ; c. H en C.

60 Le quadrillage ci-dessous est constitué de carrés.



Nommer les images des points K et W.
a. par l'homothétie de centre M et de rapport -1 ;
b. par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

61 Utiliser le quadrillage de l'exercice 60 pour citer :
a. deux homothéties qui transforment R en H ;
b. deux homothéties qui transforment I en U.

62 Utiliser le quadrillage de l'exercice 60 pour citer le rapport de l'homothétie de centre M :
a. qui transforme K en N ;
b. qui transforme I en U.

63 O, M, M' sont trois points distincts du plan.
Dans chacun des cas suivants, déterminer le rapport de l'homothétie qui transforme M en M'.

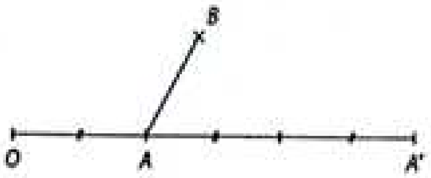
a. $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$; b. $2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OM'} = \vec{0}$;
c. $\overrightarrow{MM'} + 3\overrightarrow{OM} = \vec{0}$; d. $2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

64 A, B, C sont trois points distincts du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

a. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme A en C.
b. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme C en B
c. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme A en B.

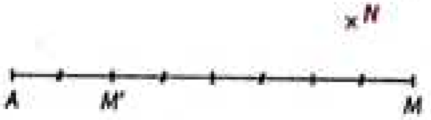
65 A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O et de rapport 3.



Utiliser la propriété de Thalès pour justifier la construction de l'image B' de B par h.

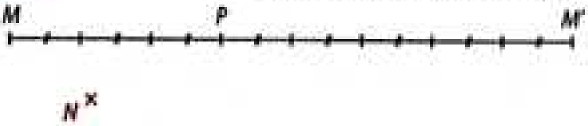
Dans les exercices 66 à 68, utiliser la méthode de l'exercice 65 afin de construire l'image N' de N par l'homothétie h.

66 h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.



67 h est l'homothétie de centre I et de rapport -2.

68 h est l'homothétie de centre P qui transforme M en M'.



69 ABC désigne un triangle tel que :
$AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 5{,}6$ cm.
On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.
Contruire l'image du triangle ABC :
a. par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$;
b. par l'homothétie de centre J et de rapport $-1{,}5$.

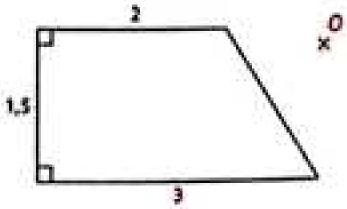
Exercices d'entraînement

70 O et A désignent deux points du plan tels que $OA = 5$ cm. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon 3 cm.

a. Faire une figure.

b. Construire l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{4}{3}$.

71 Construire l'image du trapèze ci-dessous par l'homothétie de centre O et de rapport 1,6.



72 $M(x\,;y)$ désigne un point d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Déterminer les coordonnées du point M', image de M par l'homothétie de centre O et de rapport :

a. $k = 2$; b. $k = -\dfrac{1}{4}$; c. $k = \dfrac{5}{3}$.

73 $M(x\,;y)$ désigne un point d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Déterminer des coordonnées du point M', image de M par l'homothétie :

a. de centre $I(1\,;-2)$ et de rapport 2 ;

b. de centre $J(-1\,;3)$ et de rapport $-\dfrac{1}{4}$;

c. de centre $K\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ et de rapport -12.

74 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme M en M'.

a. $M(x\,;y)$ et $M'(3x-6\,;3y+4)$;

b. $M(x\,;y)$ et $M'(-2x+5\,;-2y+8)$;

c. $M(x\,;y)$ et $M'\left(\dfrac{1}{4}x\,;\dfrac{1}{4}y-1\right)$.

75 **Propriété du cours**

Utiliser des égalités vectorielles pour démontrer qu'une homothétie transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image.

Aide

On note A, B deux points distincts et A', B' leurs images par l'homothétie.

On a donc : $\overrightarrow{A'B'} = \ldots$

On note I le milieu de $[AB]$, donc :

$\overrightarrow{IA} = \ldots$, et I' son image…

76 **Propriété du cours**

Utiliser des égalités vectorielles pour démontrer qu'une homothétie transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

77 Démontrer que l'image d'un rectangle $ABCD$ d'aire $\mathcal{A}$ p une homothétie de rapport k est un rectangle d'aire $k^2 \times$

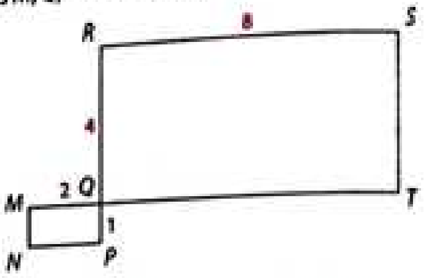
Aide

Cette démonstration s'effectue en deux étapes :
- démontrer que l'image d'un rectangle est un rectangle ;
- démontrer l'égalité concernant les aires.

78 $ABCD$ et $AB'C'D'$ désignent les parallélogrammes ci-desso pour lesquels $B' \in [AB]$, $D' \in [AD]$ et A, C' et C sont alignés.

Utiliser les homothéties pour démontrer que les droites (BC et $(B'D')$ sont parallèles.

79 $MNPQ$ et $ORST$ désignent les deux rectangles ci-desso Les points M, Q, T sont alignés.



a. Démontrer que $MNPQ$ est l'image de $TSRQ$ par une hom thétie dont on précisera le centre et le rapport.

b. Calculer, de deux manières différentes, l'aire du rectan $MNPQ$.

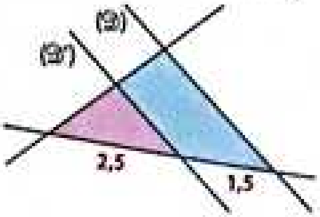
80 Le tableau suivant indique l'aire d'une figure $\mathcal{F}$ et l'ai de son image $\mathcal{F}'$ par une homothétie h_i.

Reproduire et compléter ce tableau.

Homothétie	Rapport	Aire de $\mathcal{F}$	Aire de $\mathcal{F}'$
h_1	-3	10	
h_2		1	25
h_3	$-0{,}5$		100
h_4		15	3

(Attention, il peut y avoir plusieurs rapports possibles.)

81 Sur le schéma ci-dessous, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont par lèles. L'aire du domaine coloré en rose est égale à 5.



Utiliser une homothétie pour calculer l'aire du domaine colo en bleu.

Faire le point

82 Synthèse des propriétés

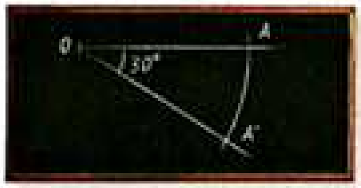
a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec « Oui » ou « Non »

Propriété	Symétrie orthogonale	Symétrie centrale	Translation	Rotation	Homothétie
Transforme un segment en un segment de même longueur					
Transforme trois points alignés en trois points alignés					
Transforme une droite en une droite parallèle					
Transforme un angle orienté en un angle de même mesure					
Transforme une figure en une figure de même aire					
Transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles					
Transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires					

b. Lorsque la réponse est « Non », apporter des précisions par une propriété du cours ou par un contre-exemple.

83 Cela n'a pas de sens

À la demande de son professeur, Marianne est allée au tableau construire l'image A' du point A par la rotation de centre O et de mesure d'angle 30°. Voici sa construction.



Expliquer son erreur.

84 S'aider d'un tableau

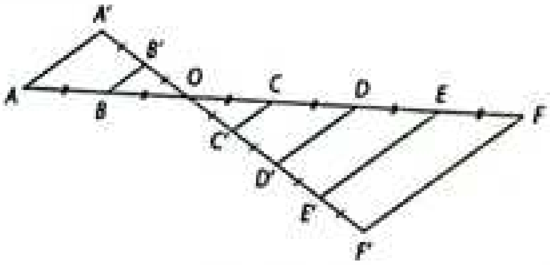
Lors d'un exercice, un élève a complété le tableau ci-dessous pour s'aider dans la démonstration.
Ce tableau indique l'image de certains objets (points, segments, etc.) par une transformation donnée.

Objet	Image
A	B
C	D
B	C
E	F
$[AB]$	
	$[CD]$
milieu de $[AC]$	
triangle ABC	
	$(BD) \cap (CF)$

Reproduire et compléter ce tableau.

85 Configuration de Thalès

1. Les différents triangles ci-dessous sont en configuration de Thalès.



Reproduire et compléter le tableau suivant.

Homothétie	transforme …	Centre	Rapport
h_1	D en C et D' en C'	O	
h_2	C en B et B' en C'		-1
h_3	F en C et F' en C'	O	
h_4	A' en C' et A en C	O	
h_5	$[AA']$ en $[FF']$		-2
h_6	$[EE']$ en $[FF']$	O	

2. a. Reproduire à la règle et au compas la figure précédente.

b. • Construire le point G, image du point C' par l'homothétie de centre O et de rapport -3.

• Construire le point H, image du point F par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{5}{4}$.

Se tester

Vrai-faux

Top chrono (sans justification)

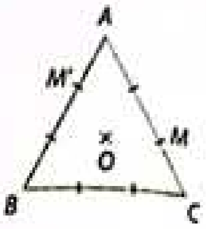
86 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. L'image d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O par la symétrie centrale de centre O est $(\mathscr{C})$.	☐	☐
2. La translation de vecteur nul transforme chaque point du plan en lui-même.	☐	☐
3. L'image d'une droite par une rotation est une droite qui lui est parallèle.	☐	☐
4. Une symétrie orthogonale par rapport à une droite conserve les angles orientés.	☐	☐
5. Par une symétrie centrale, deux droites orthogonales ont pour image deux droites orthogonales.	☐	☐

Avec justification

87 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On note O le centre de gravité du triangle équilatéral ABC ci-contre.
M et M' sont tels que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$



	vrai	faux
1. La rotation r qui transforme C en A et M en M' a pour centre O.	☐	☐
2. $r(C) = B$.	☐	☐
3. Aire (OMC) = Aire $(OM'A)$.	☐	☐
4. $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}}) + \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}}) = 0$.	☐	☐
5. L'homothétie de centre C et de rapport 3 transforme A en M.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

88 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Par une homothétie de rapport k, un segment de longueur a a pour image un segment de longueur :
   a. $k \times a$; b. $k^2 \times a$; c. $|k| \times a$.

2. Une homothétie de centre O transforme A en A'.
   $O \in [AA']$ si, et seulement si,
   a. $k < 0$; b. $k > 1$; c. $k \in [0 ; 1]$.

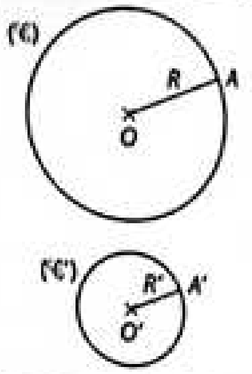
3. Une homothétie de centre O et de rapport $-2,5$ transforme les points M, N, P en les points M', N', P'.
   a. $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}}) = -2,5 \times \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$;
   b. $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}}) = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$;
   c. $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}}) = -\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}})$.

4. $\mathscr{F}'$ est l'image de $\mathscr{F}$ par une homothétie de rapport k.
   On donne Aire $(\mathscr{F}) = 5 \times$ Aire $(\mathscr{F}')$:
   a. $k = 5$;
   b. $k = -\sqrt{0,2}$ ou $k = \sqrt{0,2}$;
   c. $k = -\sqrt{5}$ ou $k = \sqrt{5}$.

5. Une homothétie de rapport -3 transforme les points A, B en les points A', B' :
   a. $\overline{AB} = -3\,\overline{A'B'}$;
   b. $\overline{A'B'} = -3\,\overline{AB}$;
   c. $A'B' = 3\,AB$.

Avec justification

89 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre O et de rayon R et $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon R'.
Les rayons $[OA]$ et $[O'A']$ sont parallèles.



1. a. Il n'existe pas d'homothétie qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$;
   b. Il existe une unique homothétie qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$;
   c. Il existe deux homothéties qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

2. h est une homothétie qui transforme $[OA]$ en $[O'A']$.
   On note I son centre.
   a. $I \in (\mathscr{C})$; b. $I \in (\mathscr{C}')$; c. $I \in (OO')$.

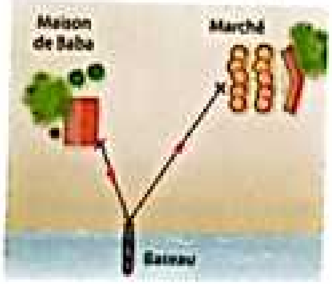
3. h est l'homothétie qui transforme A en A' et O en O'.
   On note k son rapport.
   a. $k = \dfrac{R'}{R}$; b. $k = -\dfrac{R'}{R}$; c. $k = -\dfrac{R'}{R}$ ou $k = \dfrac{R'}{R}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

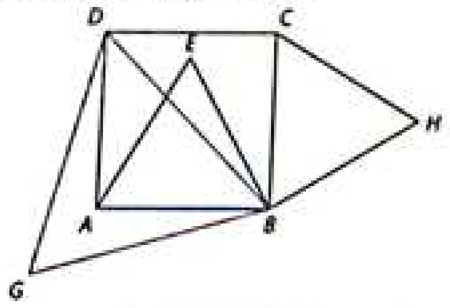
90 Le trajet du pêcheur

Baba est pêcheur. Chaque matin, il part de chez lui, va pêcher en mer, revient au même endroit sur la plage, se rend au marché pour vendre son poisson et enfin, retourne chez lui. Le trajet de Baba est schématisé ci-contre. À quel endroit doit-il placer son bateau afin que son trajet soit minimal ?



91 Une rotation pour démontrer

La figure ci-dessous est constituée d'un carré *ABCD* et de trois triangles équilatéraux *ABE*, *BCF* et *BDG*.



1. Démontrer que les points *A*, *C* et *G* appartiennent à la médiatrice de [*BD*].

2. a. Donner le centre et la mesure de l'angle de la rotation qui transforme *A* en *E* et *C* en *H*.

b. En déduire que les points *D*, *E*, *H* sont alignés.

3. a. Construire le point $F \neq G$ tel que le triangle *BDH* soit équilatéral.

b. Démontrer que les droites (*BF*) et (*DH*) sont perpendiculaires.

92 Transformation mystère

A, *B*, *C* désignent trois points non alignés.
À tout point *M* du plan, on associe le point *M'* défini par :

$$3\overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.$$

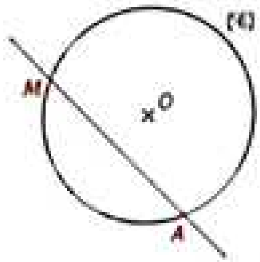
a. Expliquer pourquoi à tout point *M* correspond un point *M'* unique. On définit ainsi une application *f* du plan dans lui-même. Déterminer les images de *A*, *B*, *C* par *f*.

b. Trouver un point invariant par *f*.

c. Démontrer que *f* est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

93 Lieux géométriques et homothéties

A et *O* désignent deux points fixés du plan. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre *O* passant par *A*. *M* est un point de $(\mathscr{C})$.



1. a. Reproduire la figure et placer les points *M'* de (*AM*) tels que $AM = 3\,AM'$.
(On notera ces points M'_1 et M'_2.)

b. Décrire une transformation h_1 (respectivement h_2) qui envoie *M* sur *M'* (respectivement sur M'_2) et qui laisse *A* invariant.

2. Décrire puis construire l'ensemble $(\mathscr{C}_1)$ des points M_1 lorsque *M* décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

3. Décrire puis construire l'ensemble $(\mathscr{C}_2)$ des points M_2 lorsque *M* décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

94 Utiliser les coordonnées

1. Construire un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé d'unité 1 cm et placer les points :

• $A(3\,;2)$;	• $B(4\,;0)$;	• $C(6\,;1)$;	• $D(5\,;3)$;
• $A'(-4\,;3)$;	• $B'(-2\,;4)$;	• $C'(-1\,;2)$;	• $D'(-3\,;1)$.

2. Démontrer que *ABCD* et *A'B'C'D'* sont deux carrés superposables.

3. a. Construire le centre *I* de la rotation *r* qui transforme *A* en *A'* et *B* en *B'*.

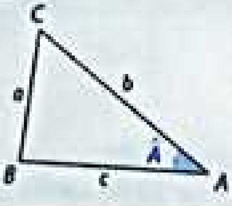
b. Utiliser la formule d'Al-Kashi rappelée ci-dessous pour calculer une mesure, arrondie au degré près, de l'angle de la rotation.

c. Les points *C'* et *D'* sont-ils les images de *C* et *D* par *r* ? Justifier.

Rappel

ABC désigne le triangle ci-contre.

Formule d'Al-Kashi :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.



95 Éléments de symétrie

1. *A* et *C* désignent des points distincts d'une droite $(\mathscr{D})$.

a. Construire deux points *B* et *D* de sorte que *ABCD* soit un quadrilatère convexe ayant la droite $(\mathscr{D})$ pour axe de symétrie.

b. On note *I* le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*BC*].
Construire les images *I'* et *J'* par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

c. Démontrer que $(IJ') \cap (I'J) \in (\mathscr{D})$.

2. *E* et *G* désignent deux points distincts et *K* le milieu de [*EG*].

a. Construire deux points *F* et *H* de sorte que *EFGH* soit un quadrilatère convexe ayant *K* pour centre de symétrie.

b. Quelle est la nature de *EFGH* ? Justifier.

7. Exercices d'approfondissement

96 Expression analytique de transformations

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ désigne un repère du plan.
$M(x\,;y)$ est un point du plan et $M'(x'\,;y')$ son image par une transformation f.

1. Translation
f désigne une translation de vecteur $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$.
Exprimer x' (respectivement y') en fonction de x et α (respectivement y et β).

2. Symétrie centrale
f désigne une symétrie centrale de centre $I\,(a\,;b)$.
Exprimer x' (respectivement y') en fonction de x et a (respectivement y et b).

3. Applications
t désigne la translation de vecteur $\vec{u}\,(2\,;3)$ et s la symétrie centrale de centre $I\,(3\,;1)$.
B est le point de coordonnées $(1\,;-1)$;
$(\mathscr{D})$ est la droite d'équation cartésienne :

$$x+y-1=0\,;$$

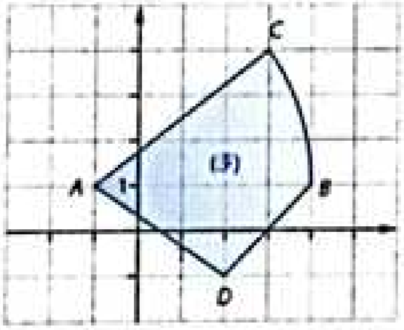
$(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation :

$$x^2+(y-2)^2=4.$$

Utiliser les questions 1. et 2. pour déterminer les coordonnées ou les équations des images B' de B, $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$;
a. par t ; **b.** par s.

97 Aires d'images

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé une figure $(\mathscr{F})$ colorée en bleu et constituée du triangle ABD et du secteur angulaire décrit par les points A, B et C.



1. a. Calculer l'aire du triangle ABD.
b. Utiliser le produit scalaire pour justifier que :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{4}{5}.$$

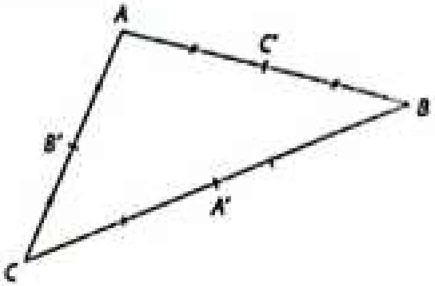
En déduire, à la calculatrice, une valeur arrondie au centième de radian de $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
c. En déduire l'aire du secteur angulaire, puis celle de la figure $(\mathscr{F})$. Arrondir au dixième.

2. a. Reproduire la figure $(\mathscr{F})$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
b. Construire l'image :
- $(\mathscr{F}')$ de $(\mathscr{F})$ par la symétrie orthogonale d'axe (BC) ;
- $(\mathscr{F}'')$ de $(\mathscr{F})$ par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

c. Déterminer les aires des figures $(\mathscr{F}')$ et $(\mathscr{F}'')$.

98 Avec un paramètre

Dans la figure ci-dessous, ABC désigne un triangle et A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.



k est un nombre réel.
On note f la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=k\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}.$$

1. Premier cas : $k=\frac{1}{2}$
a. Reproduire la figure ci-dessus et construire le point G, centre de gravité du triangle ABC.
b. Justifier que f est une homothétie de centre G, dont on précisera le rapport.
c. Quelle est l'image du triangle ABC par cette homothétie ?

2. Deuxième cas : $k=-1$
a. Justifier que f est une translation dont on précisera le vecteur.
b. Construire l'image du triangle ABC par cette translation.

3. Troisième cas : $k\neq-1$
On note K le point tel que $k\overrightarrow{KA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.
Justifier que f est une homothétie de centre K dont on précisera le rapport.

4. On note p le périmètre du triangle ABC et $\mathscr{A}$ son aire.
a. Exprimer le périmètre de l'image de ABC par f en fonction de p et de k.
b. Exprimer l'aire de l'image de ABC par f en fonction de $\mathscr{A}$ et de k.

99 Lieux géométriques et rotations

$(\mathscr{D})$ désigne une droite et A un point fixé extérieur à $(\mathscr{D})$.
M est un point de $(\mathscr{D})$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre M passant par A et $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre A passant par M.
Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points M_1 et M_2 tels que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM_1}})>0 \text{ et } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM_2}})<0.$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer des lieux de points M_1 et M_2 lorsque M décrit $(\mathscr{D})$.

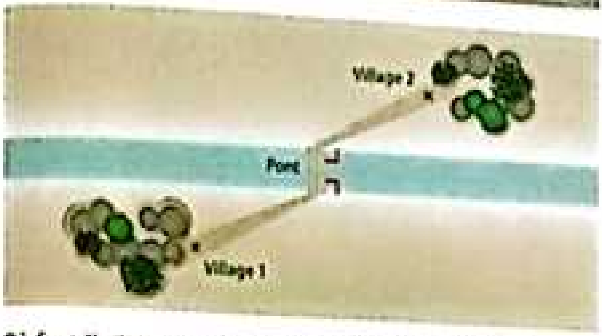
1. a. Faire une figure.
b. Que peut-on dire des triangles AMM_1 et AMM_2 ? Justifier.

2. On note f_1 (respectivement f_2), la transformation qui envoie M sur M_1 (respectivement M sur M_2) et qui laisse A invariant.
a. Préciser la nature des transformations f_1 et f_2.
b. Choisir deux points N et P sur $(\mathscr{D})$ et construire leurs images par f_1 et f_2.
c. Construire les lieux géométriques cherchés.

100 Emplacement d'un pont

Deux villages sont situés de part et d'autre d'un fleuve.

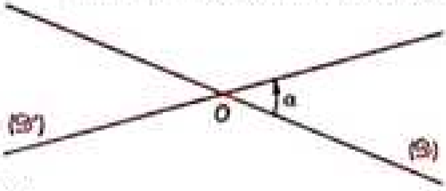
Une route goudronnée et un pont perpendiculaire aux berges du fleuve, doivent être construits afin de faciliter l'accès entre les villages.



Où faut-il placer le pont afin que la route qui relie les deux villages soit la plus courte possible ?

101 Décomposition d'une rotation

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent les droites sécantes en O ci-dessous. L'angle orienté entre ces droites a pour mesure α rad.



L'objectif de cet exercice est de montrer que la succession de deux symétries orthogonales d'axes sécants peut être décrite comme une rotation.

M désigne un point du plan.

On note M' l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ et M'' l'image de M' par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D}')$.

1. Cas particulier

a. Reproduire la figure ci-dessus et placer un point M appartenant à $(\mathscr{D})$.

Construire les points M' et M''.

b. On note $\beta = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ et $\gamma = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}})$.

Exprimer α en fonction de β et γ.

Existe-t-il une rotation qui transforme M en M'' ? Justifier.

2. Cas général

Reprendre les questions précédentes avec $M \in (\mathscr{D})$.

3. Conclusion

Compléter la phrase ci-dessous :

« *La succession de deux symétries orthogonales d'axes sécants peut être décrite comme … dont ….* »

4. Application

a. Construire un triangle équilatéral OBC.

b. Déterminer la mesure de l'angle de rotation de centre O qui transforme B en C.

c. À l'aide d'un rapporteur, construire deux axes possibles $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ qui illustrent la réponse à la question 3.

102 Construction

A, B, A', B' désignent quatre points du plan tels que :

$$(AB) \,//\, (A'B'), \quad \overline{AB} \neq \overline{A'B'},$$

et A' (respectivement B') est l'image de A (respectivement B) par l'homothétie h.

L'objectif de l'exercice est de construire le point M', image de M par h, dans chacun des cas suivants.

1. Premier cas $M \in (AB)$

Figure 1

Figure 2

a. Utiliser le parallélisme de droites pour expliquer comment construire M'.

b. Reproduire les figures ci-dessous et construire M'.

2. Second cas $M \in (AB)$

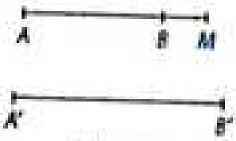


Figure 1

Figure 2

a. Placer un point C n'appartenant pas à (AB).

Construire C'.

b. Le point M appartient-il à (AC) ?

En déduire une construction du point M'.

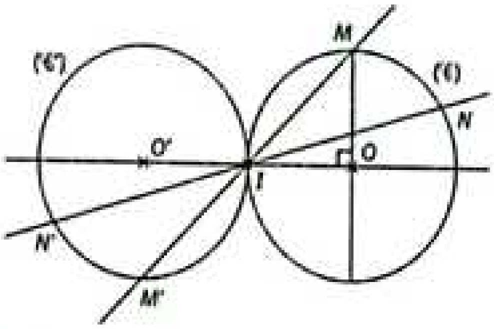
c. Reproduire les figures ci-dessus et construire M'.

103 Symétrie centrale

Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centre O et O' sont tangents en I et ont même rayon $R = 3$.

On donne : $(IM) \cap (\mathscr{C}') = \{M'\}$; $N \in (\mathscr{C})$; $(IN) \cap (\mathscr{C}') = \{N'\}$.

$M \in (\mathscr{C})$ et $(OM) \perp (OO')$.



1. a. Démontrer que M' (respectivement M) est l'image de M (respectivement N) par la symétrie de centre I.

b. En déduire que $MNM'N'$ est un parallélogramme.

2. Peut-on choisir N de sorte que $MNM'N'$ soit un rectangle ?

3. Calculer l'aire du triangle INM' lorsque :

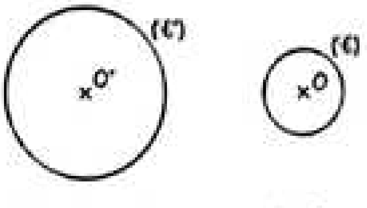
a. $MNM'N'$ est un rectangle ;

b. le triangle IMN est rectangle.

6 Exercices d'approfondissement

104 Un cercle et son image

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent les cercles de centres O et O' et de rayons respectifs R et R' avec $R \neq R'$.



a. O et O' sont deux points distincts.
Construire les centres et déterminer les rapports des deux homothéties qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

b. Que se passe-t-il lorsque les points O et O' sont confondus ?

105 Recherche de transformations

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les transformations du plan dans lui-même qui envoient une droite $(\mathscr{D})$ sur une droite $(\mathscr{D}')$ parallèle à $(\mathscr{D})$.
On appelle f une telle transformation.

1. On suppose que toute droite $(\mathscr{D})$ est sa propre image par f.
Démontrer que f est l'application identique du plan.
(Pour tout point M du plan, on pourra considérer, les images des deux droites sécantes en M.)
On suppose dans la suite de l'énoncé qu'il existe une droite $(\mathscr{D})$ dont l'image $(\mathscr{D}')$ par f est strictement parallèle à $(\mathscr{D})$. A' et B' désignent deux points distincts de $(\mathscr{D}')$ et A et B deux points de $(\mathscr{D})$ tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

2. Démontrer que A et B sont distincts.

3. On suppose dans cette question que (AA') et (BB') sont sécantes en un point O.
a. Démontrer que (AA') et (BB') sont leurs propres images par f.
b. En déduire que O est invariant par f et que O est distinct de A et B.
c. M désigne un point du plan n'appartenant pas à (AA').
Démontrer que l'image M' de M par f est le point d'intersection de (OM) et de la droite parallèle à (AM) passant par A'.
d. M désigne un point du plan appartenant à la droite (AA') privée de O.
Démontrer que l'image M' de M par f est le point d'intersection de (OM) et de la droite parallèle à (BM) passant par B'.
e. Déduire des questions précédentes que f est l'homothétie de centre O appliquant A sur A'.

4. On suppose dans cette question que (AA') et (BB') sont parallèles.
a. Démontrer que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.
b. M désigne un point du plan n'appartenant pas à (AB) et M' son image par f.
Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. (On pourra considérer les images par f et par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ des droites (AM) et (BM).)
c. C désigne un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et C' son image par f. M est un point du plan appartenant à (AB) privée de A.
Démontrer que les droites (AM) et (CM) ne sont pas confondues.
En raisonnant comme à la question précédente, démontrer que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{AA'}$.
d. Quelle est l'application f ?

5. Quelles sont les applications du plan dans lui-même qui transforment toute droite en une droite qui lui est parallèle ?

106 Expression analytique d'une homothétie

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan.
$M(x ; y)$ est un point du plan et $M'(x' ; y')$ son image par une homothétie h de rapport k.

1. Un cas particulier
L'homothétie h a pour centre O.
Justifier que :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

2. Le cas général
L'homothétie h a pour centre $A(a ; b)$.
a. Écrire une relation vectorielle entre $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$.
Justifier que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}.$$

b. En déduire une expression de x' en fonction de x, a et k, puis une expression de y' en fonction de y, b et k.

3. Applications
h désigne l'homothétie de centre $A(3 ; -2)$ et de rapport $k = 3$.
B est le point de coordonnées $(5 ; 4)$;
$(\mathscr{D})$ est la droite d'équation cartésienne :

$$3x - 2y + 1 = 0 ;$$

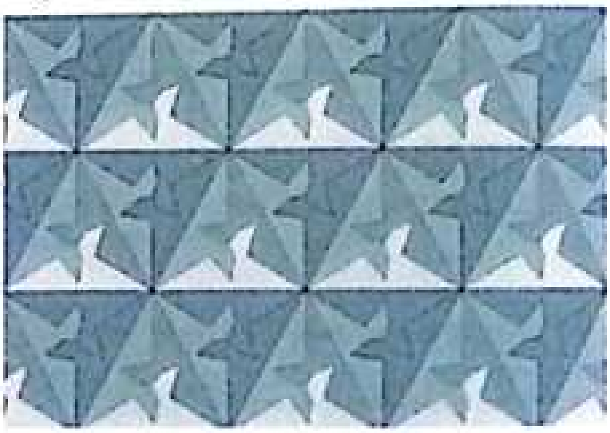
$(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5.$$

a. Déterminer les coordonnées de l'image B' de B par h.
b. Déterminer une équation cartésienne de l'image $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{D})$ par h.
c. Déterminer une équation cartésienne de l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par h.

107 Pavage du plan

Effectuer un pavage isométrique du plan consiste à recouvrir le plan entièrement, sans trou ni superposition, à l'aide d'une figure de base, appelée pavé de base, dont on construit les images successives par une ou des transformations.



a. Reproduire à main levée une partie du pavage isométrique ci-dessus.

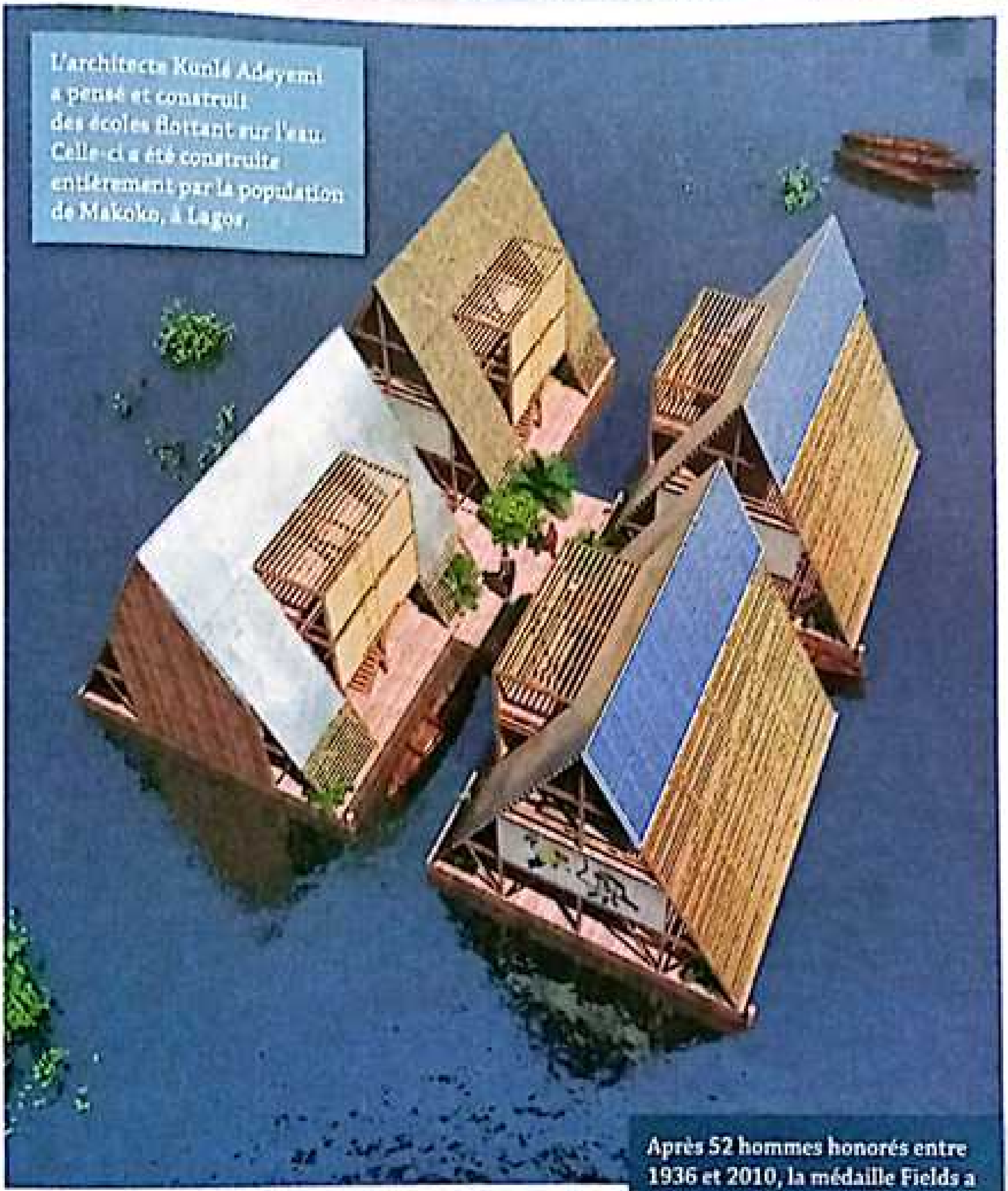
b. Indiquer un pavé de base et une (ou plusieurs) transformation(s) du plan qui permette(nt) d'obtenir le pavage.
(Il y a plusieurs solutions.)

Info

Classé au patrimoine mondial de l'UNESCO, le parc Güell, situé à Barcelone, en Espagne, a été réalisé par Antoine Gaudi. Il est entièrement pavé de carreaux de mosaïques… non isométriques.

7

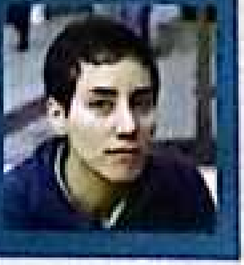
Géométrie dans l'espace



L'architecte Kunlé Adeyemi a pensé et construit des écoles flottant sur l'eau. Celle-ci a été construite entièrement par la population de Makoko, à Lagos.

Après 52 hommes honorés entre 1936 et 2010, la médaille Fields a été attibué à Maryam Mirzakhani.

C'est une spécialiste des variétés : objets dans des espaces à plusieurs dimensions.



Les objectifs du chapitre

- Décrire et représenter l'espace qui nous entoure.
- Étudier la position relative de deux droites, de deux plans ou d'un plan et d'une droite.
- Étudier le parallélisme dans l'espace.

Cours

1 Perspective en architecture

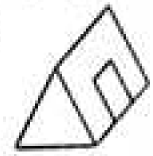
1 Représentation sur une feuille

a. Quels sont les deux solides utilisés par cet architecte pour créer l'allure générale de son bâtiment ?

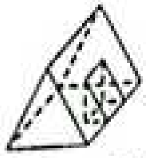
Représenter en perspective cavalière ces solides séparément.

b. Voici trois représentations en perspective cavalière du prisme issu de la photographie ci-contre.

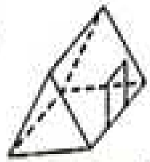
ⓐ



ⓑ



ⓒ

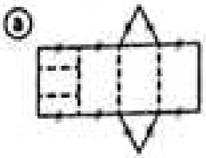


Laquelle est juste ? Donner un argument qui permet d'éliminer les autres.

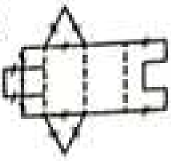
2 Fabrication du solide

a. Voici trois patrons pour fabriquer le bâtiment. Lequel est correct ?

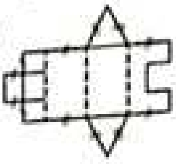
ⓐ



ⓑ



ⓒ



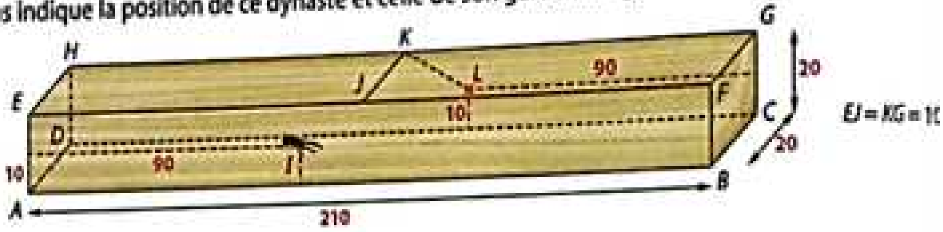
b. Reproduire ce patron sur une feuille de papier légèrement cartonnée ; puis construire ce solide.

Cours 1,

2 Calcul de longueurs

Un dynaste schématisé par le point *I*, se déplace sur une poutre.
La figure ci-dessous indique la position de ce dynaste et celle de son garde-manger schématisé par le point *L*.

L'unité est le cm.



1 Extraire une figure plane

a. Représenter la face de devant de cette poutre et y représenter un triangle rectangle dont l'hypoténuse est *IJ*.

b. Calculer *IJ*.

c. De façon analogue, calculer *JK* puis *KL*. Quelle est la distance parcourue par le dynaste ?

2 Recherche du trajet le plus court

Le point *J* est supposé mobile sur l'arête [*EF*]. *a* désigne le nombre réel non nul tel que $EJ = a$.

a. Déterminer les longueurs *IJ* et *JK* en fonction de *a*.

b. Déterminer la distance parcourue par le dynaste en fonction de *a*.

c. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (arrondir la distance au dixième de cm) :

a	90	95	100	105	110	115	120
Distance							

Conjecturer la position du point *J* pour que la distance parcourue soit minimale.

d. Fabriquer un patron, à l'échelle 1/20, de cette poutre.

Placer sur ce patron le point *I* et le point *L*. Pour obtenir la position de *J*, puis de *K*, pour que la distance soit minimale, tracer le segment [*IL*] sur le patron. Vérifier la réponse obtenue au **c.**

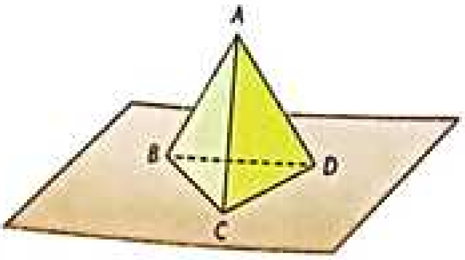
3 plan et droite

Cours 3

1 Patron d'un tétraèdre

a. Tracer un triangle dont les dimensions sont 10, 11 et 12 cm.
Placer le milieu de chaque côté et tracer le triangle dont les sommets sont les milieux précédents.

b. Découper le triangle de départ, afin de construire, par pliage, le tétraèdre, noté *ABCD* dessiné ci-dessous.



2 Une droite et un plan

a. Marquer sur ce solide un point *M* sur l'arête [*AB*] et le milieu *I* de l'arête [*AC*].
Placer ce tétraèdre sur une autre feuille de papier qui matérialise le plan (*BCD*).

b. À l'aide d'un crayon, matérialiser la droite (*IM*). La droite (*IM*) coupe-t-elle le plan (*BCD*) ?
Si on déplace ce point *M* sur [*AB*], est-ce toujours le cas ?

c. Donner deux positions possibles entre la droite (*IM*) et le plan (*BCD*).

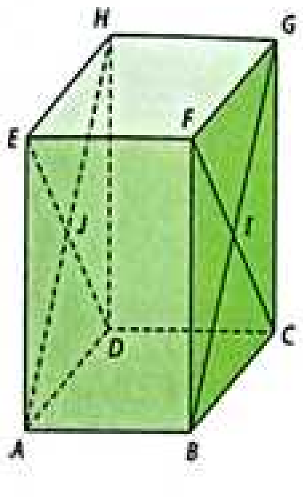
3 Une explication

a. Quand il existe, le point d'intersection entre (*IM*) et (*BCD*) appartient-il à une droite du plan (*BDC*) ?
Si oui, préciser laquelle.

b. Expliquer les observations faites au 2., en utilisant une propriété de géométrie plane dans la plan (*ABC*).

4 Des droites ni parallèles, ni sécantes

Cours 2, 3



ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.
Les points *I* et *J* sont les centres des faces *BCGF* et *ADHE*.

1 1^er^ cas : Position relative de deux droites

a. Que peut-on dire des droites (*AH*) et (*BG*) ?

b. Sont-elles contenues dans un même plan ?

c. Citer deux autres droites de ce plan qui sont de la même position.

2 2^e^ cas : Position relative de deux droites

a. Que peut-on dire des droites (*AG*) et (*BH*) ?

b. Sont-elles contenues dans un même plan ?

c. Citer une autre droite de ce plan sécante avec les droites (*AG*) et (*BH*).

3 3^e^ cas : Position relative de deux droites

a. Les droites (*AH*) et (*FC*) sont-elles :
- parallèles ?
- sécantes ?
- ni l'un, ni l'autre ?

b. Sont-elles contenues dans un même plan ?

c. Citer deux autres droites du pavé droit qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.

7 Cours

1 Représentation dans l'espace

a les règles de la perspective cavalière

En perspective cavalière

- Les segments visibles sont tracés en trait plein, les segments cachés sont tracés en pointillés ;
- Des droites parallèles sont représentées par des droites parallèles ;
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné ;
- Dans un plan de face, une figure est représentée en vraie grandeur ;
- Dans un plan latéral, un rectangle est représenté par un parallélogramme.

b les solides usuels

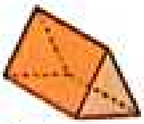
Le cube

Les six faces sont des carrés.

Le pavé droit

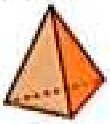
Les six faces sont des rectangles.

Le prisme



Deux faces appelées bases, sont des polygones, les autres faces sont des rectangles.

Le tétraèdre

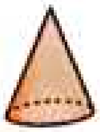


Les quatre faces sont des triangles.

Le cylindre

Solide obtenu en faisant tourner un rectangle autour d'un de ses côtés.

Le cône



Solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un côté adjacent à l'angle droit.

La sphère

Solide obtenu en faisant tourner un demi-cercle autour de son diamètre.

2 Propriétés fondamentales

a Plan de l'espace

Un plan est un objet à deux dimensions de l'espace.
Intuitivement, il peut être perçu comme une feuille de papier d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini.
Dans l'espace, un plan est représenté par un parallélogramme.

Axiome

Un plan est une surface telle que toute droite qui joint deux points distincts de ce plan est contenue dans ce plan.

b Propriétés

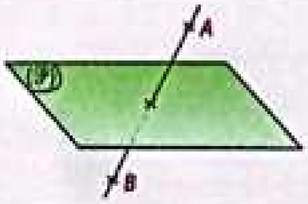
Propriétés

1. Trois points, non alignés, déterminent un plan et un seul.

2. Deux points distincts, déterminent une droite et une seule.

Axiome

Tout plan divise l'espace en deux régions telles qu'on ne peut passer de l'une à l'autre sans traverser ce plan.



Remarque

Toutes les propriétés de géométrie plane sont valables dans tout plan de l'espace.

Savoir-faire

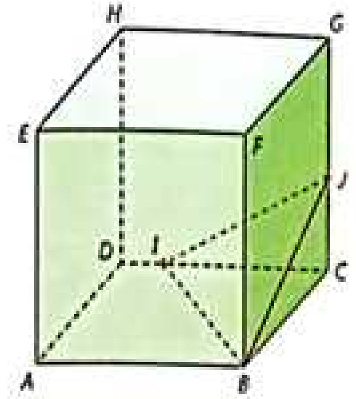
1 Décrire et représenter l'espace

ABCDEFGH désigne un cube d'arête 5 cm.
I est un point appartenant à l'arête [CD] tel que CI = 4 cm et J un point appartenant à l'arête [CG] tel que CJ = 2 cm.

a. Représenter en perspective cavalière le cube et placer les points I et J.
b. Quelle est la nature de CBIJ ?
c. Représenter en perspective cavalière CBIJ avec CBJ comme face de devant.

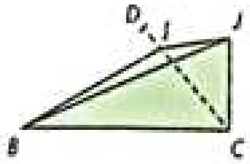
Solution commentée

a.



b. CBIJ est un tétraèdre.

c.



Méthode

1. Tracer ABFE, face de devant, qui est un carré en vraie grandeur puisqu'il est dans le plan de face. Tracer EFGH, face du dessus, qui est représenté par un parallélogramme. Respecter le parallélisme.
2. Sur les faces latérales, certains segments (par exemple [BC]) sont représentés plus petits.
3. Respecter la règle concernant les arêtes visibles (en trait plein) ou cachées (en pointillés).
4. Tracer CBJ, face de devant, qui est un triangle rectangle en vraie grandeur.
5. Respecter la proportionnalité pour la longueur des côtés.

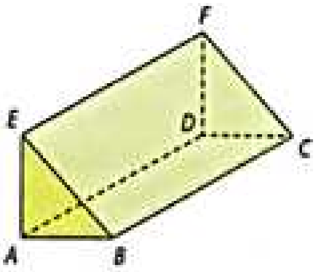
Vocabulaire

L'angle $\widehat{BAD}$ est appelé angle de fuite de perspective. Le rapport entre la longueur réelle et la longueur sur le dessin d'un même segment est appelé rapport de proportionnalité de perspective.

S'exercer

2 Représenter le prisme ci-dessous en perspective cavalière dont la mesure de l'angle de fuite sera de 45°, le rapport de perspective $\frac{1}{2}$ et CFEB est dans un plan frontal c'est-à-dire vu de devant.

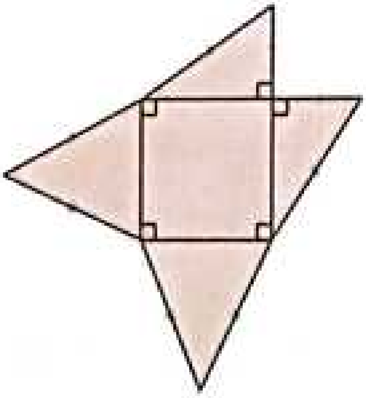
AB = 4 cm
BC = 6 cm
mes $\widehat{ABE}$ = 45°



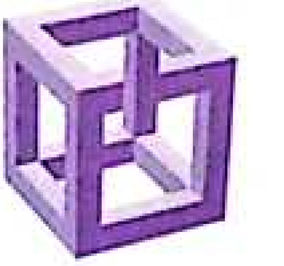
3 ABCDEFGH désigne un cube de côté 3 cm.
M est le milieu de [GC].
ADM est un triangle rectangle en D.

a. Représenter la situation avec une perspective cavalière, d'angle de fuite de mesure 60° et de rapport de fuite $\frac{1}{2}$.
b. Calculer les longueurs AF, DM et AM puis la mesure de l'angle $\widehat{AMD}$.

4 Représenter en perspective cavalière le solide dont le patron est donné ci-contre.



5 Le cube de Necker ci-contre est qualifié de « cube impossible ». Pourquoi ?



3 Droites et plans de l'espace

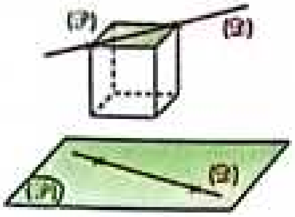
a Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriétés

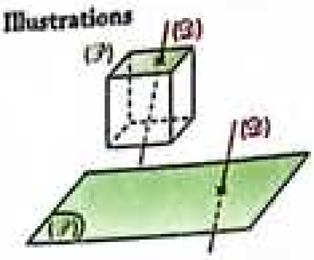
Si une droite $(\mathcal{D})$ et un plan $(\mathcal{P})$ ont :

1. deux points distincts communs, alors $(\mathcal{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$.
2. un seul point commun, alors $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
3. aucun point commun, alors $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont disjoints.

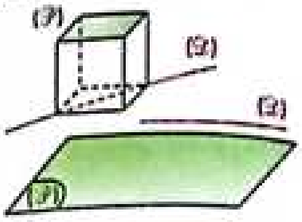
Illustrations



Illustrations



Illustrations



Définition

Une droite $(\mathcal{D})$ est **parallèle** à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque $(\mathcal{D})$ est incluse dans $(\mathcal{P})$, ou que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont disjoints.
On note $(\mathcal{D})$ // $(\mathcal{P})$.

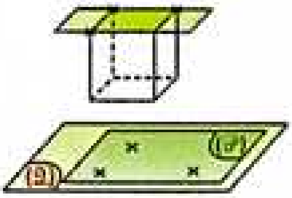
b Positions relatives de deux plans

Propriétés

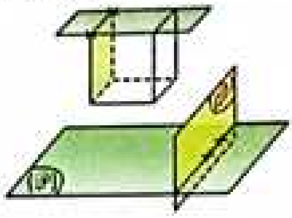
Si deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ ont :

1. trois points non alignés communs, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont confondus.
2. deux points distincts communs, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants.
3. aucun point commun, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont disjoints.

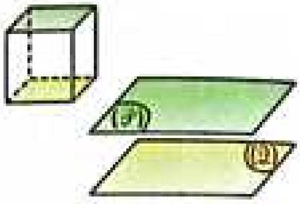
Illustrations



Illustrations



Illustrations



Définition

Deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont **parallèles** lorsque $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont confondus ou disjoints.
On note $(\mathcal{P})$// $(\mathcal{Q})$.

c Positions relatives de deux droites

Définition

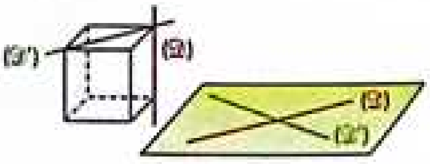
Deux objets de l'espace (points ou droites) sont **coplanaires** lorsqu'ils sont contenus dans un même plan.

Propriété

Si deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont coplanaires alors elles sont soit sécantes, soit parallèles.

Illustrations

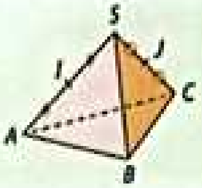
1. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes



2. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles

6 Étudier la position relative de deux droites

SABC désigne le tétraèdre ci-contre.
I est le milieu de [SA] et J le milieu de [SC].
Étudier la position relative des droites :
a. (SA) et (BC) ; b. (IJ) et (AC).



Solution commentée

a. A est un point contenu dans le plan (ABC).
(BC) est une droite contenue dans le plan (ABC).
Comme SABC est un tétraèdre, ses quatre sommets sont non coplanaires donc $S \notin (ABC)$.
Ainsi (SA) et (BC) sont non coplanaires.

b. Les quatre points I, J, A et C appartiennent au même plan (SAC) donc les droites (AC) et (IJ) sont coplanaires.
Ensuite, dans le plan (SAC), on applique le théorème de la droite des milieux dans le triangle SAC et donc (IJ) // (AC).

Méthode

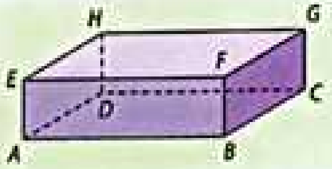
Pour savoir si deux droites sont coplanaires :

1. trouver un plan qui contient deux points distincts d'une droite et un troisième point appartenant à la seconde droite ;
2. choisir un point de la seconde droite ;
   - s'il n'appartient pas au plan défini précédemment, alors les droites ne sont pas coplanaires ;
   - s'il appartient au plan défini précédemment, alors les droites sont coplanaires.

   Remarque : lorsqu'on travaille dans un même plan, on peut utiliser des propriétés de la géométrie plane.

7 Étudier la position relative de deux plans

ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.
Étudier la position relative des plans (ABE) et (FCG).



Solution commentée

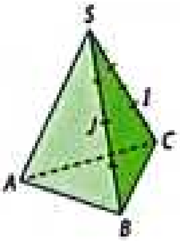
1. Le point B est un point commun aux deux plans donc (ABE) et (FCG) ne sont pas parallèles.
2. Le point G est un point qui appartient à (FCG) mais pas à (ABE) donc (ABE) et (FCG) ne sont pas confondus. Donc (ABE) et (FCG) sont sécants.
3. Le point F est un autre point commun aux deux plans donc les plans (ABE) et (FCG) sont sécants en la droite (BF).

Méthode

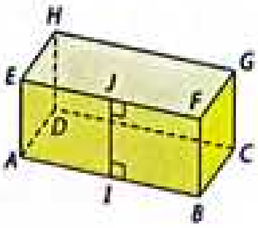
1. Chercher un point commun aux deux plans pour montrer que les deux plans ne sont pas disjoints.
2. Chercher un point appartenant à un plan mais pas à l'autre pour prouver que les deux plans ne sont pas confondus.
3. Chercher un second point commun aux deux plans pour déterminer la droite d'intersection des deux plans.

S'exercer

8 SABC désigne le tétraèdre ci-contre.
J est le milieu de [SB].
I est tel que $SI = \frac{2}{3} SC$.
Étudier la position relative des droites (IJ) et (BC).



9 ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.
Étudier la position relative des plans :
a. (HIJ) et (DCB) ;
b. (CGF) et (EAB).



7 Cours

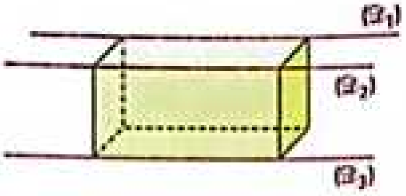
4 Parallélisme

a Droites parallèles

Propriétés

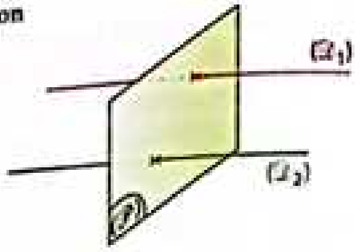
1. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Illustration



2. Si deux droites sont parallèles entre elles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.

Illustration

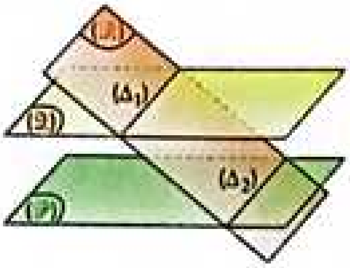


b Plans parallèles

Propriétés

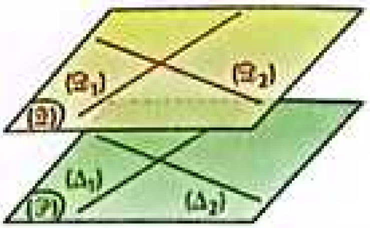
1. Si deux plans sont parallèles entre eux, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles entre-elles.

Illustration



2. Si un plan contient deux droites sécantes, qui sont respectivement parallèles à deux droites d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Illustration



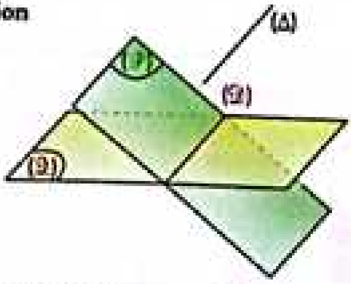
c Droite et plan parallèles

Propriétés

$(\mathscr{D})$ désigne la droite d'intersection de deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$.

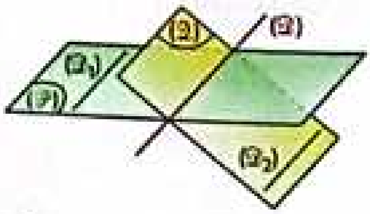
1. Si deux plans sécants $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont parallèles à une même droite (Δ), alors leur droite d'intersection $(\mathscr{D})$ est parallèle à cette droite (Δ).

Illustration



2. Si une droite $(\mathscr{D}_1)$ incluse dans $(\mathscr{P})$ est parallèle à une droite $(\mathscr{D}_2)$ incluse dans $(\mathscr{Q})$, alors la droite d'intersection $(\mathscr{D})$ est parallèle aux droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$.

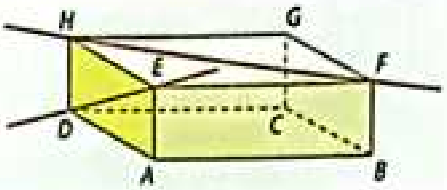
Illustration



Remarque La deuxième propriété est parfois appelée théorème du toit.

10 Étudier la coplanarité de deux droites

ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.
Montrer que les droites (*ED*) et (*HF*) sont non coplanaires.



Solution commentée

1. Supposons que les droites sont coplanaires. Dans ce cas, les droites (*ED*) et (*HF*) sont incluses dans un même plan et donc les points *E*, *D*, *H* et *F* appartiennent à un même plan.
2. Or les points *E*, *D* et *H* forment un plan (*EDH*).
3. De plus *ABCDEFGH* est un pavé droit donc les plans (*EDH*) et (*GFB*) sont parallèles, donc disjoints. Donc le point *F*, qui appartient au plan (*GFB*) n'appartient pas au plan (*EDH*).
4. Ceci contredit la supposition de départ, donc celle-ci est fausse. Ainsi (*ED*) et (*HF*) sont non coplanaires.

Logique

Raisonner par l'absurde consiste à supposer que le contraire de ce que l'on cherche à démontrer est vrai et à aboutir à une contradiction.

Méthode

1. Supposer que les droites sont coplanaires et en déduire que les quatre points qui définissent les droites sont aussi coplanaires.
2. Définir un plan à l'aide de trois de ces points.
3. Utiliser une propriété qui prouve que le 4^{e} point n'est pas dans ce plan.
4. Ayant abouti à une contradiction, conclure que l'hypothèse de départ (les droites sont coplanaires) est fausse.

11 Étudier le parallélisme de deux plans

SABC désigne un tétraèdre de sommet *S*.
***M*, *N* et *P* sont les points images des points *A*, *B* et *C* par l'homothétie *h*, de centre *S* et de rapport $\frac{1}{4}$.**
Montrer que les plans (*MNP*) et (*ABC*) sont parallèles.

Solution commentée

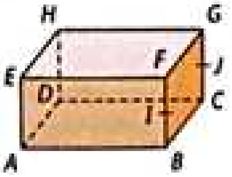
1. Montrons que (*MN*) droite incluse dans (*MNP*) est parallèle à (*AB*) droite incluse dans (*ABC*).
   Dans le plan (*SAB*), par l'homothétie *h*, la droite (*AB*) a pour image (*MN*) et donc (*AB*) // (*MN*).
2. De même, on montre que (*AC*) // (*MP*).
3. (*AB*) et (*AC*) sont deux droites sécantes du plan (*ABC*) et elles sont parallèles à (*MN*) et (*NP*) sécantes du plan (*MNP*). Donc les plans (*ABC*) et (*MNP*) sont parallèles.

Méthode

1. Montrer qu'une droite du premier plan est parallèle à une droite du second.
2. Montrer qu'une autre droite du premier plan sécante avec la précédente est parallèle à une droite du second plan.
3. Utiliser la propriété 2 du paragraphe 4. b.

S'exercer

Pour les exercices 12 à 14, *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-dessous. Les points *I* et *J* sont les milieux de [*BF*] et [*CG*].



12 Montrer que les droites (*CA*) et (*GB*) sont non coplanaires.

13 Montrer que les plans (*DCJ*) et (*EFI*) sont parallèles.

14 Montrer que les droites (*HD*) et (*FI*) sont coplanaires.

Exercices d'entraînement

Représentation dans l'espace

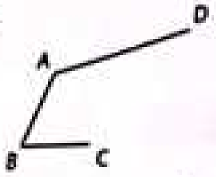
Réponses rapides

15 Reproduire et compléter les figures ci-dessous :

a.

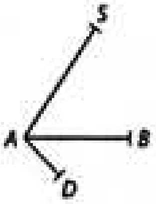
ABCDEFGH désigne un cube ;

b.



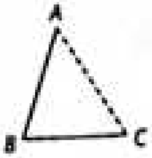
ABCDEF désigne un prisme de bases *ABC* et *DEF* ;

c.



SABCD désigne une pyramide à base *ABCD* carrée ;

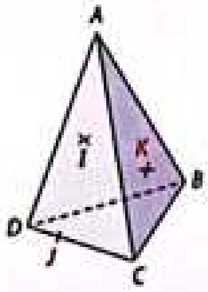
d.



SABC désigne un tétraèdre.

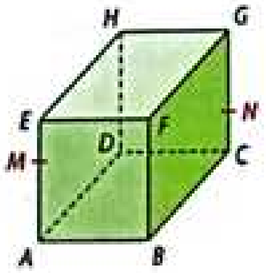
16 *ABCD* désigne le tétraèdre ci-contre où $J \in [DC]$ et *I* et *K* sont des points des faces *ADB* et *ACB*. Répondre aux questions ci-dessous par vrai ou faux.

a. *A*, *C* et *I* sont alignés ;
b. *A*, *I* et *J* sont alignés ;
c. (*DB*) // (*IK*) ;
d. (*ADC*) et (*AIK*) se coupent en *A*.



17 *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-dessous. Les points *M* et *N* appartiennent aux arêtes [*AE*] et [*CG*].

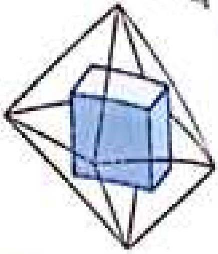
M est un point fixe tel que $EM = \frac{1}{3}EA$.



Peut-on définir le point *N* tel que le quadrilatère *HMBN* soit :
a. un parallélogramme ?
b. un losange ?

18 *ABCDEFGH* désigne un cube qui contient la pyramide de sommet *I*, centre de la face *EABF*, et de base la face *DCGH*. Représenter en perspective cavalière ces deux solides dans une même figure :
a. avec la face *ABCD* dans le plan frontal ;
b. avec la face *ABFE* dans le plan frontal.

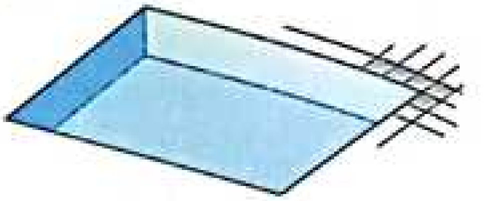
19 Le cube et l'octaèdre sont deux solides de Platon qui on pour propriété :
« *Chacun d'eux peut-être construit à l'intérieur de l'autre en reliant les centres des faces.* »
Voici la représentation en perspective du cube inscrit dans l'octaèdre. Représenter en perspective cavalière l'octaèdre inscrit dans le cube.



Vocabulaire

Un polyèdre est régulier lorsque toutes ses faces sont un même polygone régulier et qu'à chaque sommet il y a un même nombre de faces qui se rencontrent. Euclide a établi qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers nommés : solides platoniciens.

20 Un club de natation doit construire un nouveau bassin pour préparer les athlètes du pays au prochain championna d'Afrique des nations. On a donné à un architecte les mesures du bassin : 50 m × 25 m × 3 m.
On lui demande aussi, de disposer autour de ce bassin quatre rangées de carrelage dont les dimensions sont 30 cm × 30 cm.



a. Recopier et compléter l'ébauche de cet architecte donnée ci-dessus.
b. Quel volume de terre doit-on évacuer pour creuser le bassin ?
c. Combien de m^2 de carrelage sont à prévoir pour les abords de ce bassin ? Arrondir à l'unité.

21 Fadjé a décidé de fabriquer son bouchon pour aller pêcher en mer avec ses amis. Il décide de former son bouchon à l'aide de deux cônes dont les bases coïncident et dont la hauteur de l'un est égale au double de l'autre.
a. Représenter, en perspective cavalière, le solide obtenu.
b. Exprimer le volume du bouchon avec $R = 3$ cm et $h = 12$ cm.

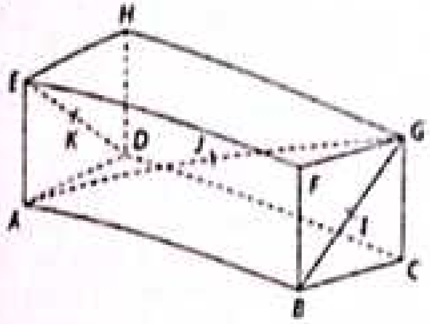
22 *ABCD* désigne un tétraèdre.
a. Représenter en perspective cavalière ce tétraèdre.
b. Construire *E* et *F*, images respectives des points *C* et *D* par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
c. Quelle est la nature du solide *BCDAEF* ?

23 Une molécule de méthane, notée CH_4, est composée d quatre atomes d'hydrogène et d'un atome de carbone tels que
(1) les atomes d'hydrogène sont équidistants les uns des autres
(2) les atomes d'hydrogène sont à égale distance de l'atom de carbone.
a. La condition (1) peut-elle être représentée dans le plan ?
b. Les atomes d'hydrogène seront les sommets de quel solid
c. Quelle sera la position de l'atome de carbone dans ce solid

Plan dans l'espace

Réponses rapides

24 *ABCDEFGH* désigne le parallélépipède rectangle ci-dessous. Les points *I*, *J* et *K* sont les milieux des segments [*BG*], [*AG*] et [*ED*].



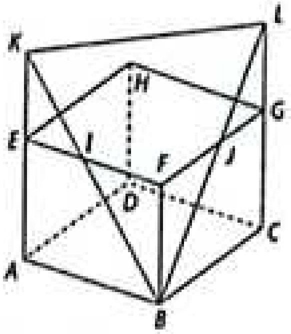
Dans chaque cas, dire si les objets donnés permettent de définir un plan.

a. (*EH*) et (*BC*) ; b. (*AG*) et *F* ; c. *E*, *H* et *C* ;
d. (*HB*) et *J* ; e. *I*, *J* et *K* ; f. (*ED*) et (*AH*).

25 Pour les questions suivantes, utiliser la figure de l'exercice précédent.

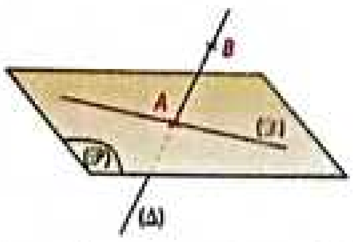
1. Définir trois plans :
a. l'un à l'aide de trois points ;
b. un autre à l'aide d'un point et d'une droite ;
c. un autre à l'aide de deux droites.
2. Citer d'autres points de la figure qui appartiennent aux trois plans précédents.

26 À partir de la figure ci-contre, donner :
a. le nom d'un solide ;
b. le nom d'un plan qui contient deux arêtes de ce solide ;
c. le nom d'un plan qui contient un sommet de ce solide.



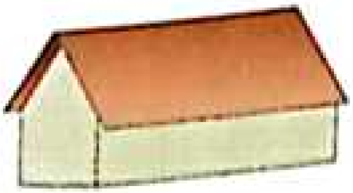
27 Représenter trois plans ($\mathscr{P}$), ($\mathscr{P}'$) et ($\mathscr{P}''$) passant par une même droite ($\mathscr{D}$).

28 a. Rédiger un programme de construction de la figure ci-dessous.



b. Reproduire cette figure et tracer la parallèle à ($\mathscr{D}$) passant par le point *B*.

29 a. Représenter deux plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}'$) sécants suivant une droite ($\mathscr{D}$).
Tracer une droite (Δ) incluse dans le plan ($\mathscr{P}$) et une droite (Δ') parallèle à (Δ) incluse dans le plan ($\mathscr{P}'$).
Que peut-on dire des droites (Δ), (Δ') et ($\mathscr{D}$) ? Justifier.
b. Voici la représentation d'une maison.



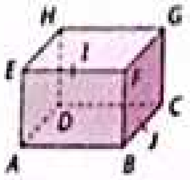
Reproduire cette maison à main levée et y indiquer en rouge les objets construits en a.

C'est grâce à cette association que l'on nomme la propriété 2 du paragraphe 4. c. le théorème du toit.

Géométrie plane dans l'espace

Réponses rapides

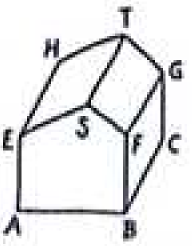
ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.
I milieu de [*EF*], *J* ∈ [*BC*] ;
BJ = 3 ; *AB* = 5 ; *BC* = 4 ; *AE* = 3.

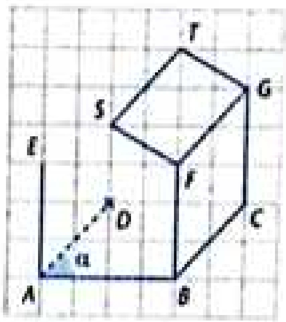


30 Parmi les triangles suivants, lesquels sont rectangles ?
a. *ABJ* ; b. *IJB* ; c. *DJF* ;
d. *IFJ* ; e. *ADI* ; f. *IDC*.

31 Calculer les longueurs suivantes.
a. *DB* ; b. *DF* ; c. *AI* ;
d. *IJ* ; e. *ID* ; f. *IC*.

32 Pour fabriquer une maquette de sa maison, Acha a dessiné le croquis ci-dessous à gauche.
Elle a réalisé une représentation en perspective cavalière ci-dessous à droite.





a. À l'aide du croquis, recopier et terminer la représentation en perspective.
b. α est la mesure de l'angle de fuite de perspective. Déterminer la valeur de α.
c. Déterminer la valeur exacte du rapport $k = \frac{BC}{AB}$, où *k* est le coefficient de perspective.

Exercices d'entraînement

33 SABCD désigne une pyramide de sommet S dont toutes les arêtes ont pour longueur 5 cm. O est le centre du carré ABCD.

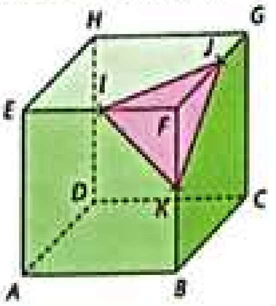
a. Représenter cette pyramide en perspective cavalière.

b. Calculer la hauteur OS de la pyramide.

c. Calculer le volume de cette pyramide

▶ Le volume V d'une pyramide de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{1}{3} h \times$ aire de la base.

34 ABCDEFGH désigne le cube de côté 4 cm ci-dessous. I, J et K sont les milieux des arêtes [EF], [FG] et [FB].



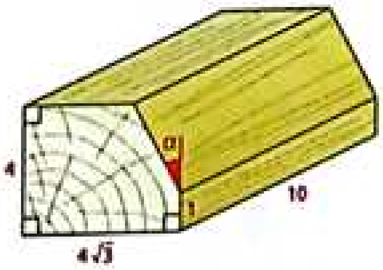
a. Démontrer que le triangle IJK est équilatéral puis calculer son aire.

b. Représenter en perspective cavalière le tétraèdre FIJK et placer O, le centre de gravité du triangle IJK.

c. FIJK est-il un tétraèdre régulier ?

35 ABCDEFGH est un cube de côté a.
Calculer la longueur d'une grande diagonale de ce cube.

36 Un menuisier a fabriqué l'objet ci-dessous en iroko, à l'aide d'une poutre qui avait la forme d'un pavé droit. L'angle α a pour mesure 30°. L'unité de longueur est le mètre.



a. Représenter en perspective cavalière la pièce de bois qui a été découpée et calculer ses dimensions.

b. Calculer le volume de l'objet fabriqué.

c. La masse volumique de l'iroko est 650 kg/m³.
Quelle est la masse de cet objet ?

37 ABCDEFGH désigne le pavé droit tel que :

$$AB = 8,\ BC = 4 \text{ et } AE = 4.$$

I est le milieu de l'arête [AB] et O est le centre de la face de dessus EFGH.

1. a. Quelle est la nature de HGBA ?

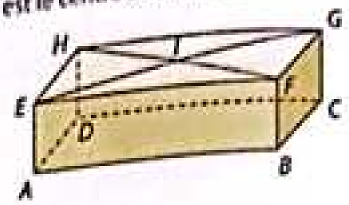
b. HGBA a ses diagonales qui se coupent en K, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AKB}$.

2. Déterminer la mesure des angles du triangle OAC.

Positions relatives

Réponses rapides

Pour les exercices 38 à 40, ABCDEFGH désigne le pavé dro
ci-dessous. I est le centre de la face EFGH.



38 Donner la position relative des droites dans chaque ca

a. (EA) et (BC) ;

b. (HD) et (DC) ;

c. (DA) et (GF) ;

d. (DG) et (BE).

39 Donner la position relative entre la droite et le plan dan
chaque cas.

a. (FC) et (ABD) ;

b. (HF) et (ABC) ;

c. (HD) et (AEF) ;

d. (AE) et (FIG).

40 Donner la position relative des plans dans chaque cas.

a. (AEH) et (FGC) ;

b. (EHG) et (CBF) ;

c. (GIF) et (HEI) ;

d. (BFI) et (HEA).

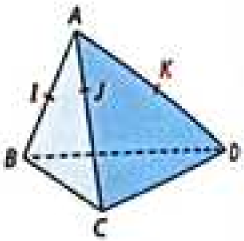
41 ABCDEFGH désigne un cube dont la face du dessous es
ABCD et la face de devant ABFE.

a. Représenter ce cube, en perspective cavalière.

b. Montrer que les droites (ED) et (FC) sont parallèles.

c. En déduire la position relative du plan (EDG) et de la droite (FC).

42 ABCD désigne le tétraèdre ci-contre et les points I, J et K appartiennent aux arêtes [AB], [AC] et [AD].

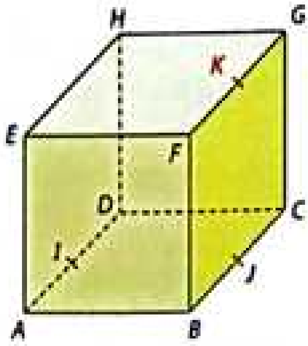


a. Représenter l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

b. Représenter l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD).

c. En déduire l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

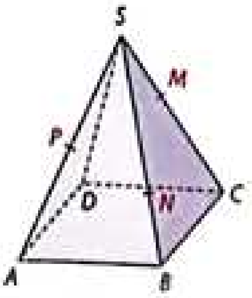
43 ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-dessous. I, J et K sont les milieux des arêtes [AD], [BC] et [FG].



a. Démontrer sur AIGK et IJGH sont des parallélogrammes.

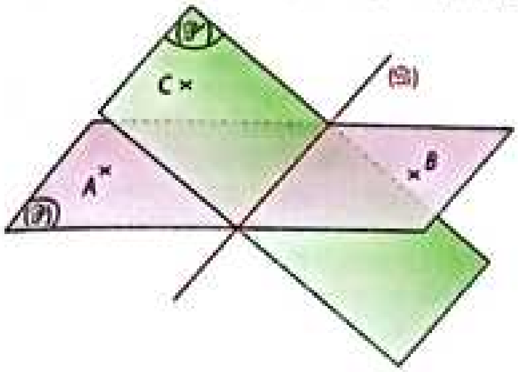
b. Démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

44 *SABCD* désigne la pyramide régulière à base carrée ci-dessous.
Les points *M* et *N* appartiennent aux arêtes [*SC*] et [*SB*] et sont tels que $SM = BN \neq \frac{1}{2}SC$. *P* est le milieu de [*SA*].



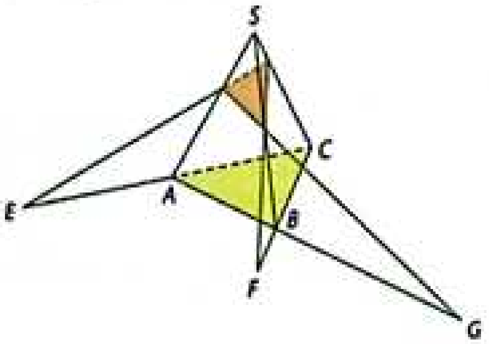
1. a. Montrer que les droites (*MN*) et (*BC*) sont sécantes.
b. Construire l'intersection de la droite (*MN*) et du plan (*ADC*).
2. a. Montrer que les droites (*PN*) et (*AB*) sont sécantes.
b. Construire l'intersection de la droite (*PN*) et du plan (*ADC*).
3. En déduire l'intersection des deux plans (*PMN*) et (*ADC*).

45 $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont deux plans sécants en la droite $(\mathscr{D})$.
Les points *A* et *B* appartiennent au plan $(\mathscr{P})$ mais n'appartiennent pas à $(\mathscr{D})$. Le point *C* appartient au plan $(\mathscr{P}')$ mais pas à $(\mathscr{D})$.



1. a. Construire le point *M* intersection de la droite (*AB*) et du plan $(\mathscr{P}')$. Justifier.
b. En déduire l'intersection des plan (*ABC*) et $(\mathscr{P}')$.
2. Placer un point *D* appartenant à $(\mathscr{P}')$ mais n'appartenant pas à $(\mathscr{D})$.
Construire l'intersection des plans (*CAD*) et $(\mathscr{P})$.

46 *SABC* désigne le tétraèdre ci-dessous.



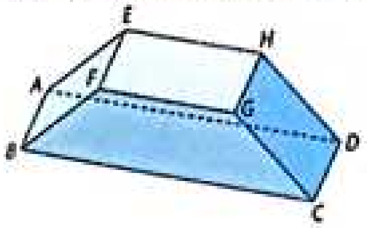
Montrer que les points *F*, *E* et *G* sont alignés.

Aide
- Nommer le plan coloré en orange et caractériser *E* (puis *F*, puis *G*) comme le point d'intersection de deux objets.

Parallélisme

Réponses rapides

Pour les exercices 47 à 49, *ABCDEFGH* désigne un prisme dont les faces *BCGF* et *ADHE* sont des trapèzes et sont parallèles.

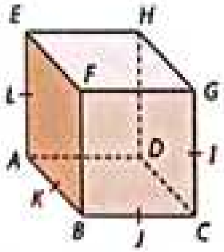


47 Dans chaque cas, donner la position relative des droites.
a. (*GD*) et (*BC*) ; b. (*HD*) et (*BC*) ;
c. (*EH*) et (*BC*) ; d. (*EG*) et (*AC*).

48 Dans chaque cas, donner la position relative de la droite et du plan.
a. (*EH*) et (*BCD*) ; b. (*FD*) et (*ABC*) ;
c. (*AB*) et (*CGH*) ; d. (*EG*) et (*ABF*).

49 Dans chaque cas, donner la position relative des plans.
a. (*EFG*) et (*CDH*) ; b. (*EHG*) et (*ABC*) ;
c. (*ABF*) et (*GCD*) ; d. (*EAD*) et (*FGC*).

50 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.
I, *J*, *K* et *L* sont les milieux des arêtes [*GC*], [*BC*], [*AB*] et [*EA*].



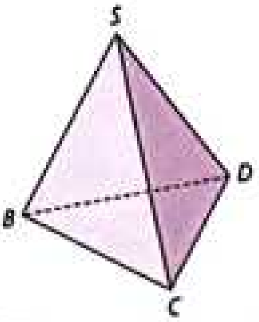
1. Quelle est la nature du quadrilatère *ACIL* ?
En déduire que (*LI*) // (*AC*).
2. a. Montrer que (*JK*) // (*LI*).
b. En déduire que les droites (*LK*) et (*IJ*) sont sécantes.
On note *M* leur point d'intersection.
3. a. Montrer que *M* appartient aux plans (*ABF*) et (*CBF*).
b. En déduire que $M \in (BF)$.

51 *ABCD* désigne un tétraèdre, *I* milieu de l'arête [*AB*] et *J* celui de l'arête [*CD*].
Démontrer que l'on peut trouver un plan $(\mathscr{P})$ tels que les droites (*IJ*) et (*BC*) sont parallèles au plan $(\mathscr{P})$.

52 *SBCD* désigne le tétraèdre ci-contre. *I*, *J*, *L* et *K* sont les points tels que :

$$SI = \frac{2}{3}SB ; \quad BJ = \frac{1}{3}BC ;$$

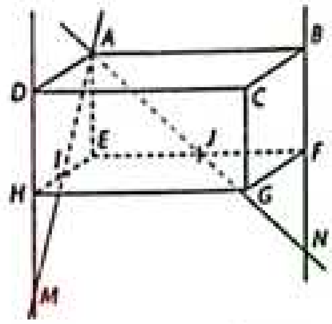
$$CK = \frac{2}{3}CD ; \quad DL = \frac{1}{3}DS.$$



a. Reproduire le tétraèdre et placer les points *I*, *J*, *K* et *L*.
b. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis en fonction de $\overrightarrow{SC}$.
c. Justifier que la droite (*SC*) est parallèle au plan (*IJK*).
d. Démontrer que la droite (*BD*) est parallèle au plan (*IJK*).

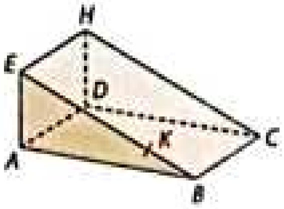
Exercices d'entraînemen

53 *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-dessous.
Les points *I* et *J* sont les milieux des arêtes [*EH*] et [*EF*].
M et *N* sont les points d'intersection des droites (*AI*) et (*DH*) puis de (*AJ*) et (*BF*).



Démontrer que les droites (*IJ*) et (*MN*) sont parallèles.

54 *ABCDEH* désigne le « demi-pavé » droit ci-dessous.
Le point *K* appartient à l'arête [*EB*].

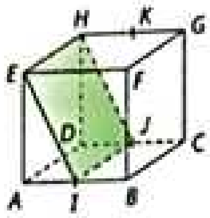


Construire la figure et tracer l'intersection des plans (*EHC*) et (*DAK*). Justifier.

55 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre. Les points *I*, *J* et *K* sont les milieux des arêtes [*AB*], [*CD*] et [*GH*].

a. Nommer une droite parallèle à la droite (*BK*) et appartenant au plan (*HEI*).

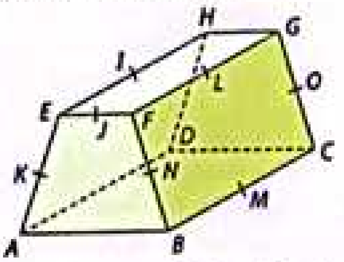
b. Montrer que la droite (*BK*) est parallèle au plan (*HIJ*).



Sections de solide

Réponses rapides

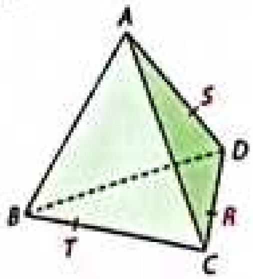
56 *ABCDEFGH* désigne le prisme ci-dessous.
Les points *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N* et *O* sont des milieux.



Indiquer quelle est la nature de la section de ce solide par le plan :

a. (*ABG*) ; b. (*IJK*) ; c. (*JLM*) ;
d. (*KNO*) ; e. (*KNM*) ; f. (*ILC*).

57 *ABCD* désigne le tétraèdre ci-dessous.
S est un point de l'arête [*AD*] et *R* un point de [*CD*] tel que (*RS*) n'est pas parallèle à (*AC*). *T* est un point de l'arête [*BC*] tel que (*RT*) n'est pas parallèle à (*BD*).



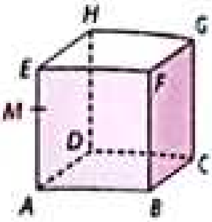
a. Quelle est l'intersection du plan (*SRT*) avec la face (*ACD*) ?

b. Quelle est l'intersection du plan (*SRT*) avec la face (*BCD*) ?

c. Le plan (*RST*) coupe-t-il la face (*ABD*) ?

d. Quelles droites doit-on prolonger pour construire l'intersection de (*RT*) et (*ABD*) ?

58 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-dessous.
M est l'image du point *A* par l'homothétie de centre *E* et de rapport $\frac{1}{3}$.



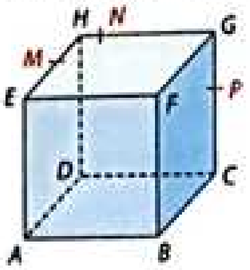
a. Reproduire la figure puis tracer l'intersection du plan (*MGB*) avec le plan (*FBC*) puis avec le plan (*ABF*).

b. Démontrer que l'intersection du plan (*MGB*) et du plan (*EDA*) est parallèle à la droite (*GB*).

c. Démontrer que l'intersection du plan (*MGB*) et du plan (*HGC*) est parallèle à la droite (*MB*).

d. Hachurer le quadrilatère qui représente la section du cube par le plan (*MGB*).

59 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-dessous. Les points *M*, *N* et *P* appartiennent aux arêtes [*EH*], [*HG*] et [*GC*].



1. Reproduire cette figure.
2. Tracer la section du plan (*MNP*) et des faces du dessus et de derrière.
3. a. Placer le point *I*, intersection des droites (*MN*) et (*FG*). Justifier cette intersection.
b. Justifier que le point *I* est un point commun des plans (*MNP*) et (*FGC*).
c. Tracer la section du plan (*MNP*) et de la face *FGCB*.
4. a. Pourquoi la section du plan (*MNP*) et de la face de derrière est-elle parallèle à la section du plan (*MNP*) et de la face de devant ?
d. Tracer la section du plan (*MNP*) et de la face *ABFE*.
5. Tracer et hachurer la section du cube par le plan (*MNP*).

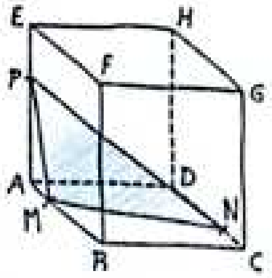
Faire le point

60 Vocabulaire et notation

- *A* et *B* sont deux points distincts du plan ($\mathscr{P}$) donc la droite (*AB*) est … ($\mathscr{P}$).
- ($\mathscr{D}$) est une droite qui n'a aucun point commun avec le plan ($\mathscr{P}$) donc la droite ($\mathscr{D}$) et le plan ($\mathscr{P}$) sont … .
- Les droites (*AB*) et (*CD*) sont sécantes, donc elles sont … .
- (*AB*) et (*CD*) n'ont aucun point en commun , donc elles sont … ou … .

61 À un détail près

Safi a construit la section du cube *ABCDEFGH* par le plan (*MNP*).



a. Compléter le dialogue ci-dessous entre Safi et son professeur.

Safi : « *M et N sont des points de la face ABCD donc le segment [MN] est la section du plan ($\mathscr{P}$) avec cette face. Même raisonnement pour le segment [NP].* »

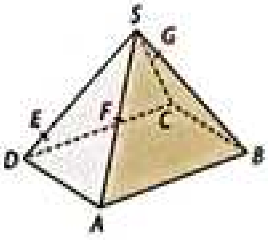
Professeur : « *Les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles. Que doivent vérifier les droites d'intersection du plan ($\mathscr{P}$) avec ces deux plans ?* »

Safi : « … ».

b. La représentation de Safi est-elle correcte ?
Si non, reproduire la figure et corriger ses erreurs.

62 Les étapes d'une construction

SABCD désigne la pyramide ci-dessous dont la base est le parallélogramme *ABCD*.



Le professeur demande à ses élèves de construire l'intersection du plan *EFG* avec la droite (*SC*).

Rédiger les différentes étapes dont les titres sont :

1. Intersection des plans (*SAB*) et (*SCD*).
2. Intersection des droites (*FG*) et de l'intersection de (*SAB*) et (*SCD*).
3. Point d'intersection du plan (*EFG*) et de la droite (*SC*).

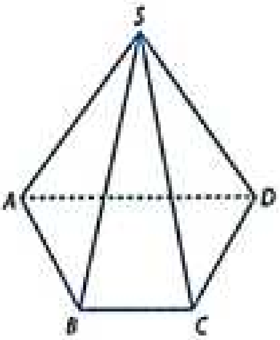
63 Les étapes d'une démonstration

Bintou a réalisé ci-dessous une fiche de révision pour s'aider à déterminer l'intersection de deux plans.

① On cherche parmi les points de la figure ceux qui sont dans les deux plans à la fois.

② On cherche, si l'étape ① n'a pas donné deux points, deux droites qui sont sécantes et qui appartiennent à chacun des plans.

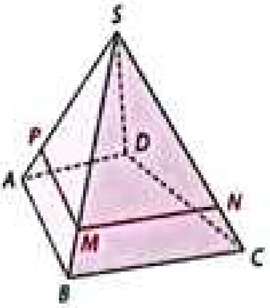
③ On conclut que la droite passant par deux points communs à ces plans est l'intersection de ces deux plans.



SABCD est une pyramide de sommet *S*.
Utiliser la fiche de Bintou pour déterminer l'intersection des plans (*SAC*) et (*SBD*).

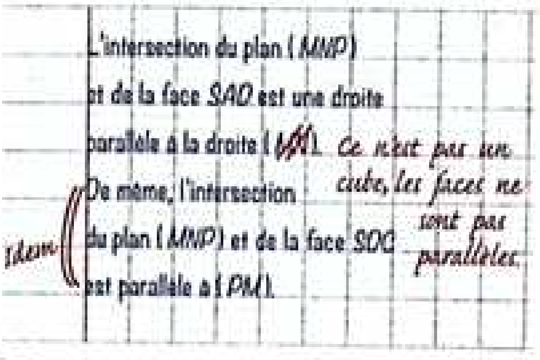
64 Déceler une erreur

SABCD désigne la pyramide de sommet *S* ci-dessous.
(*MN*) // (*BC*) et (*MP*) // (*AB*).
ABCD est un quadrilatère quelconque.



Pour tracer la section du plan (*MNP*) et de la pyramide *SABCD*, un élève a tenu le raisonnement suivant.

Le professeur a noté des remarques en rouge.



L'intersection du plan (*MNP*)
et de la face *SAD* est une droite
parallèle à la droite (~~*MN*~~). Ce n'est pas un cube, les faces ne sont pas parallèles.
De même, l'intersection
du plan (*MNP*) et de la face *SDC*
est parallèle à (*PM*).

idem

Expliquer la remarque du professeur et proposer une solution.

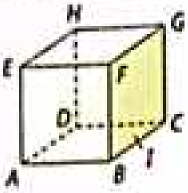
Se tester

Vrai-faux

Top chrono (sans justification)

65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

ABCDEFGH désigne le cube ci-contre.
Le point *I* est le milieu de l'arête [*BC*].

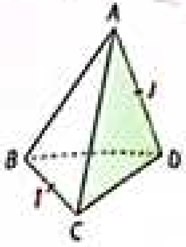


	vrai	faux
1. Les points *H*, *I*, *B* et *E* définissent un plan.	☐	☐
2. L'intersection de (*HI*) et (*BE*) est l'intersection de (*HI*) et (*EAB*).	☐	☐
3. Les droites (*GI*) et (*HA*) sont parallèles.	☐	☐
4. La section du cube par le plan (*HGI*) est un triangle.	☐	☐
5. Les plans (*EHI*) et (*GCD*) sont sécants en la droite (*HC*).	☐	☐

Avec justification

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

ABCD désigne le tétraèdre régulier ci-contre.
$AB = 6$ cm.
Les points *I* et *J* sont les milieux des arêtes [*BC*] et [*AD*].



	vrai	faux
1. Les droites (*IJ*) et (*DC*) sont coplanaires.	☐	☐
2. Les droites (*IJ*) et (*CD*) sont sécantes.	☐	☐
3. Le triangle *BJC* est un triangle isocèle.	☐	☐
4. $AI = ID$.	☐	☐
5. $IJ = 6$ cm.	☐	☐

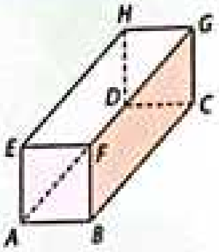
Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

ABCDEFGH désigne le pavé droit ci-contre.

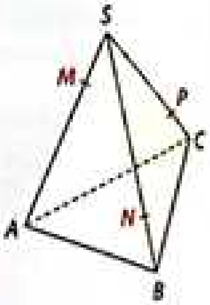


1. Les droites (*EF*) et (*DB*) sont :
   - a. sécantes ;
   - b. parallèles ;
   - c. non coplanaires.
2. Quels sont les plans qui sont parallèles ?
   - a. (*ABF*) et (*BFC*) ;
   - b. (*GEF*) et (*ADC*) ;
   - c. (*HGB*) et (*EFA*).
3. Quelle droite est parallèle au plan (*BCG*) ?
   a. (*EA*) ; b. (*DC*) ; c. (*EF*).
4. Les points *A*, *F* et *G* sont :
   - a. alignés ;
   - b. coplanaires ;
   - c. non coplanaires.

Avec justification

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

SABC désigne le tétraèdre ci-contre.
Les points *M*, *N* et *P* appartiennent aux arêtes [*AS*], [*BS*] et [*CS*] et sont tels que (*NP*) // (*BC*) et (*MN*) est non parallèle à (*AB*).



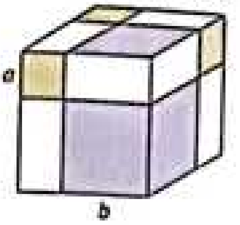
1. La droite (*MN*) est sécante avec la droite :
   a. (*AB*) ; b. (*AC*) ; c. (*CB*).
2. La droite d'intersection des plans (*MNP*) et (*ABC*) est :
   - a. sécante à (*BC*) ;
   - b. parallèle à (*BC*) ;
   - c. non coplanaire avec (*BC*).
3. La droite (*NP*) est coplanaire avec la droite :
   a. a. (*SA*) ; b. (*AB*) ; c. (*BC*).
4. Les points *M*, *N*, *S* et *P* sont :
   - a. coplanaires ;
   - b. non coplanaires ;
   - c. alignés.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

7 Exercices d'approfondissement

69 Un puzzle de Cardan

Un cube a les arêtes de longueurs $a + b$. Sur ses faces, deux carrés sont tracés, l'un de côté a et l'autre de côté b, puis deux rectangles, tous deux de dimensions a et b.



Le cube est découpé en suivant les côtés de ces quadrilatères.

a. Donner le volume de chacun des huit solides obtenus après le découpage.

b. Montrer alors que :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Info

Jérôme Cardan est surtout connu pour sa méthode de résolution des équations du 3ᵉ degré et pour le joint de Cardan utilisé dans les voitures.

70 Pyramides côte à côte

ABCDE et *A'BE'D'C* désignent deux pyramides de sommets *A* et *A'* à base carrée dont toutes les arêtes mesurent 4 cm.

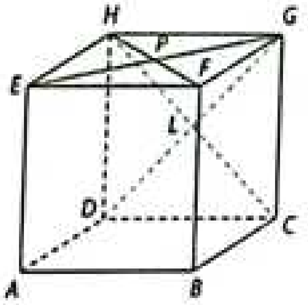
a. Représenter en perspective cavalière, ces deux pyramides de telle sorte que leurs bases carrées soient dans un même plan.

b. Quelle est la nature de *AA'BC* ?

c. Réaliser un patron de solide formé par ces deux pyramides et le tétraèdre du b.

71 Géométrie plane

ABCDEFGH désigne le cube de côté 1 cm ci-dessous.
Les points *P* et *L* sont les centres des faces *EFGH* et *CDHG*.



1. a. Calculer la longueur *BP*.

b. Quelle est la nature du triangle *BPL* ?

2. Calculer la longueur *PL*.

3. Le point *M* est le milieu du segment [*PL*].

a. Quelle est la nature du triangle *BLM* ?

b. Calculer une valeur approchée des mesures des angles $\widehat{LBM}$ et $\widehat{PBL}$.

72 Un alignement

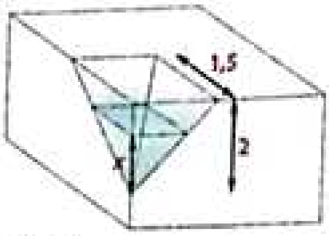
A, *B* et *C* sont trois points non alignés tels que les droites (*AB*), (*AC*) et (*BC*) coupent un plan ($\mathscr{P}$) en *C'*, *B'* et *A'*.

a. Représenter en perspective cavalière ces données.

b. Montrer que les points *A'*, *B'* et *C'* sont alignés.

73 À moitié vide

Aboubacar a fabriqué, dans un coin d'un bâtiment, un récipient ayant la forme d'une pyramide à base carrée afin de stocker de l'eau potable comme illustré ci-contre.



Les longueurs sont indiquées en m.

1. Représenter en perspective cavalière le récipient fabriqué.

2. Calculer le volume de ce récipient.

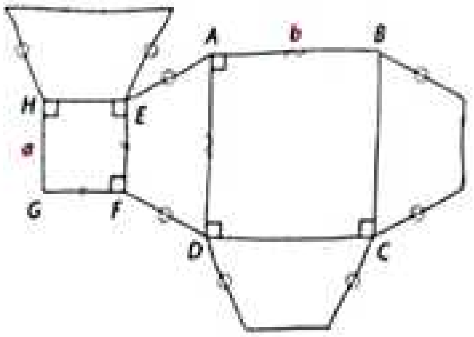
3. x est la hauteur de l'eau, en m, mesurée sur la graduation qui se trouve sur le coin de la grange.

a. Montrer que le volume de l'eau restante dans le récipient est alors de $\dfrac{3}{16}x^3$.

b. Aboubacar souhaite remplir sa citerne lorsqu'elle est à moitié vide. À partir de quelle graduation x doit-il le faire ?

74 Une pyramide décapitée

a et b désignent des nombres réels tels que $b = 2\,a$.
Voici le patron, à main levée, d'un solide.



1. Représenter ce solide en perspective cavalière.

2. a. Montrer que les droites (*AE*) et (*BH*) sont sécantes.

b. Tracer, sur la représentation, leur point d'intersection *P*.

3. Montrer que *E* est le milieu de [*AP*].

4. Montrer que les droites (*AE*), (*BH*), (*CG*) et (*DF*) sont concourantes.

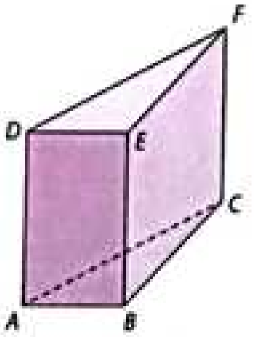
5. a. Montrer que les droites (*AE*) et (*CG*) sont coplanaires.

b. Montrer que les deux centres des faces carrées sont alignés avec *P*.

75 Tri-rectangle

ABCDEF désigne le prisme droit ci-contre, tel que :

$AB = 4{,}5$ cm, $BC = 6$ cm,
$AC = 7{,}5$ cm et $BE = 7$ cm.



a. Quelle est la nature de *EABC* ?
Dessiner un patron de ce solide.

b. Sami affirme que *EABC* est tri-rectangle, c'est-à-dire que trois de ses faces sont des triangles rectangles. A-t-il raison ?

c. Calculer le volume $\mathcal{V}$ de *EABC*.

d. *M* est un point de l'arête [*EC*] tel que $EM = 4{,}2$ cm et *N* est un point de l'arête [*EA*] tel que (*MN*) // (*AC*).
Calculer la longueur *MN*. Arrondir au mm près.

7 Exercices d'approfondissement

76 Plans parallèles

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont deux plans parallèles.

A et B sont deux points de $(\mathscr{P})$ et C un point de $(\mathscr{P}')$.

a. Montrer que les plans $(\mathscr{P}')$ et (ABC) sont sécants.

Construire leur droite d'intersection. On la note (Δ).

D est un point de (Δ) différent de C tel que (BD) et (AC) soient sécants en H.

K est un point de $(\mathscr{P}')$ n'appartenant pas à (Δ).

b. Démontrer que (HK) coupe le plan $(\mathscr{P})$ en un point appelé I et montrer que I n'appartient pas à la droite (AB).

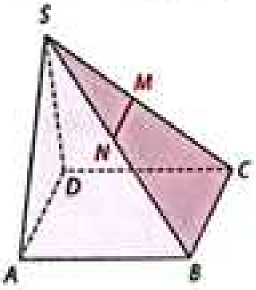
c. Démontrer que $(AI) // (KC)$, puis que $(KD) // (BI)$.

77 Parallélogramme, base d'une pyramide

$SABCD$ désigne la pyramide ci-dessous.

Sa base est un parallélogramme.

Les points M et N appartiennent aux arêtes et sont tels que la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).



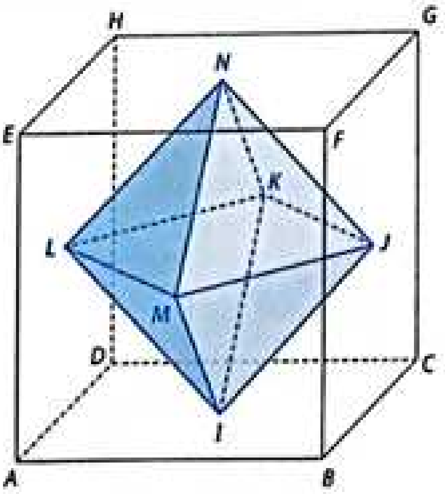
1. Montrer que la droite (AD) est parallèle à la droite (MN).

2. a. Quelle est la position relative de (AN) par rapport à (DM) ?

b. Reproduire la figure ci-dessus et construire l'intersection des plans (SAB) et (SDC). On la note (Δ).

3. Montrer que la droite (Δ) est parallèle à (AB).

78 Parallélisme et octaèdre



1. Déterminer la position relative des droites :

a. (JN) et (CH) ;

b. (JL) et (CH).

c. En déduire que les droites (JL) et (JN) sont parallèles.

2. Démontrer de même que les droites (MN) et (IK) sont parallèles.

3. Montrer que les plans (JMN) et (IKL) sont parallèles.

79 Justifier une intersection

$SABC$ désigne un tétraèdre.

Le point G est le centre de gravité de la face (SAB) et le point M est le milieu de l'arête $[SC]$.

a. Représenter, en perspective cavalière, les données précédentes.

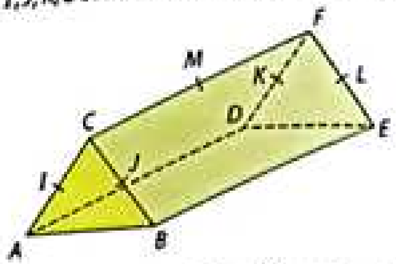
b. Donner la position relative de la droite (MG) par rapport au plan (ABC). Justifier.

c. Construire l'intersection de la droite (MG) et du plan (ABC).

80 Découpage d'un prisme

$ABCDEF$ désigne le prisme droit ci-dessous.

Les points I, J, K, L et M sont les milieux des arêtes.



a. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

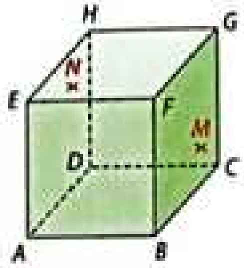
b. En déduire l'intersection des plans (IJM) et (KLM).

c. Représenter, en perspective cavalière, la section du prisme $ABCDEF$ par les plans (IJM) et (KLM).

81 Intersection droite-plan (1)

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous.

Les points M et N appartiennent aux faces $BCGF$ et $EFGH$.



1. Déterminer la position relative de :

a. (MF) et (EHC) ;

b. (NF) et (EHC).

2. Reproduire la figure ci-dessus et construire les points d'intersection définis à la question précédente.

On les note P et Q.

3. Montrer que M, N, P et Q sont coplanaires.

4. Quelle est l'intersection de la droite (MN) et du plan (EHC) ?

82 Intersection droite-plan (2)

$ABCD$ désigne un tétraèdre.

I est un point de l'arête $[BD]$, J est un point de l'arête $[BC]$.

N est un point du segment $[AJ]$.

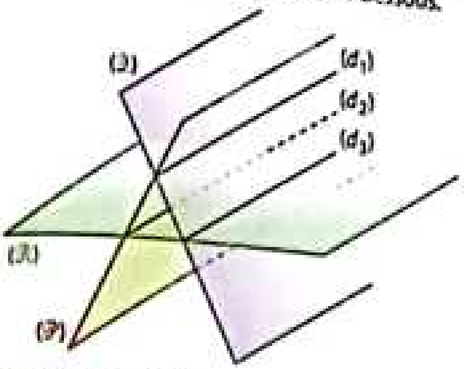
M est un point de la demi-droite $[AI)$ qui n'appartient pas au segment $[AI]$.

a. Démontrer que les points M, N, I et J sont coplanaires.

b. Représenter en perspective cavalière les données précédentes et tracer l'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD). Justifier

83 Section d'un toit par une droite

$(\mathcal{P})$, $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{R})$ sont trois plans sécants deux à deux, (d_1), (d_2) et (d_3) leurs intersections comme illustré ci-dessous.



La droite (d_1) est parallèle au plan $(\mathcal{R})$.
Les points A et B appartiennent à la droite (d_2).
Les points A' et B' appartiennent à la droite (d_3) et sont tels que les droites (AA') et (BB') se coupent en O.
Le point C appartient au plan $(\mathcal{P})$ mais n'appartient pas aux droites (d_1) et (d_2).

1. Reproduire la figure ci-dessus puis placer les points A, B, A', B' et C.

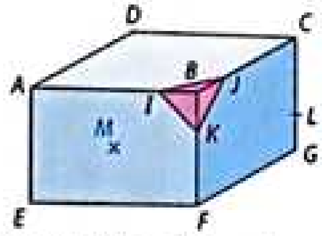
2. a. Montrer que la droite (d_1) et le plan $(AA'C)$ sont sécants.
b. Construire, en justifiant, ce point d'intersection que l'on note I_1.

3. Mêmes questions pour la droite (d_1) et le plan $(BB'C)$. On note I_2 leur point d'intersection.

4. a. Que dire des droites $(A'I_1)$ et $(B'I_2)$?
b. Tracer, en justifiant, l'intersection de la droite (OC) et du plan $(\mathcal{Q})$.

84 Section d'un pavé droit tronqué

$ABCDEFGH$ désigne le pavé droit ci-dessous dont le coin contenant B a été coupé.
Le point L appartient à l'arête $[CG]$.
Le point M est le centre de la face $ABFE$.
Les points I, J et K sont tels que $BI = BJ = BK$.

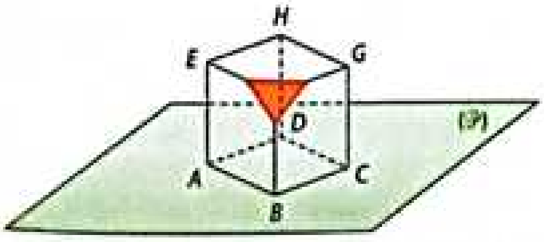


1. Représenter, en perspective cavalière, le pavé tronqué.

2. Tracer l'intersection de ce solide avec :
a. le plan passant par L et parallèle au plan (IJK) ;
b. le plan passant par M et parallèle au plan (IJK).

85 Intersection de plans

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous posé sur un plan $(\mathcal{P})$.
La section colorée est l'intersection d'un plan $(\mathcal{Q})$ et du cube.

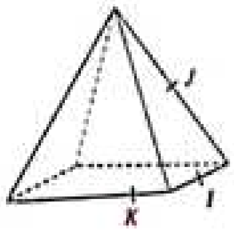


Construire, en justifiant, l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et du plan $(\mathcal{Q})$.

86 Section d'une pyramide

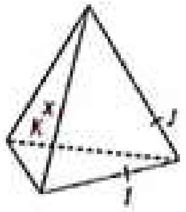
Pour chaque cas, tracer la section du solide par le plan (IJK). Justifier.

a.



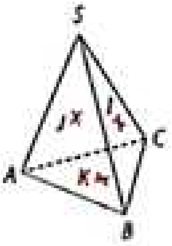
I et J milieux des arêtes ;
K n'est pas le milieu de l'arête.

b.



(IJ) non parallèle aux arêtes du tétraèdre.
K appartient à la face arrière.

c.

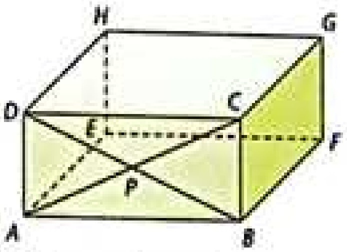


$I \in (SBC)$;
$J \in (SAB)$;
$K \in (ABC)$;
(IJ) non parallèle à (AB).

▸ Utiliser des droites ou des plans auxiliaires.

87 Découpages

$ABCDEFG$ désigne le pavé droit ci-dessous.
P est le centre de la face $ABCD$.



1. Reproduire la figure puis construire :
a. le point I, intersection de la droite (HP) et du plan (ADF) ;
b. le point J, intersection de la droite (EP) et du plan (ADF).

2. a. Dessiner, en vraie grandeur, $HFBD$ et placer P et I.
b. Calculer $\dfrac{ID}{IF}$.

88 Alignement de points

Une droite (d) coupe un plan $(\mathcal{P})$ en O.
Les points A et B appartiennent à la droite (d) et sont tels que le point O est situé entre A et B.
Le point M est tel que la droite (MA) coupe le plan $(\mathcal{P})$ en I et la droite (MB) coupe le plan $(\mathcal{P})$ en J.

1. Montrer que les points O, I et J appartiennent au plan (MAB).

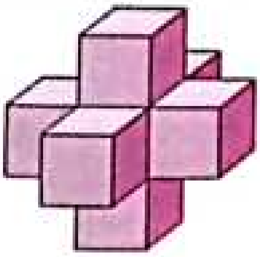
2. Nommer un autre plan qui contient ces trois points.

3. a. Pourquoi les plans $(\mathcal{P})$ et (MAB) ne sont pas parallèles ?
b. En déduire que les points O, I et J sont alignés.

Exercices d'approfondissement

89 L'éponge de Menger

1. Représenter, en perspective cavalière, un cube dont chaque face aura été découpée en neuf et dont on aura enlevé le solide ci-dessous composé de sept « petits cubes ».



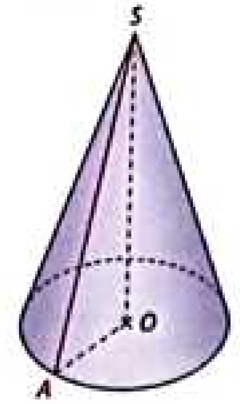
2. a. De combien de « petits cubes » était constitué le cube de départ ?
b. Quelle fraction du cube de départ a été enlevée ?
c. Si l'unité de volume est le volume du cube de départ, quel est le volume de l'objet obtenu ?
Chaque « petit cube » restant subit la même opération que celle subie par le cube de départ.
3. a. Représenter une face du cube de départ après ces deux étapes.
b. Représenter, en perspective cavalière, le solide obtenu après cette deuxième étape.
c. Quelle est la fraction du cube de départ restant après cette deuxième étape ?
d. Toujours avec l'unité de volume du 2. b., quel est le volume de l'objet obtenu après ces deux opérations ?
4. a. Quel sera le volume de l'objet obtenu après trois opérations ?
b. n désigne un nombre entier naturel non nul.
Conjecturer le volume de l'objet obtenu après n opérations.

Info

Avec cette méthode, on crée une suite de solides (appelés fractales) dont les volumes sont de plus en plus petits et dont les aires des faces sont de plus en plus grandes !

90 Patron du cône

On considère le cône de révolution ci-dessous.



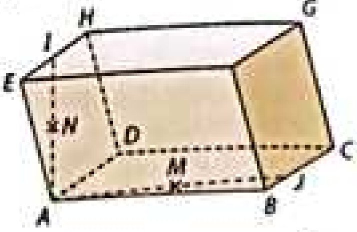
$SA = 6$ cm ;
$AO = 2$ cm.

a. Calculer la hauteur puis le volume du cône.
b. Expliquer pourquoi le patron de la surface latérale est un secteur de cercle de rayon 6 cm.
c. Construire le patron complet du cône.

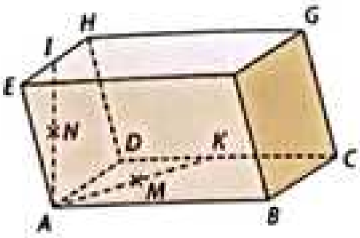
91 Section d'un pavé

ABCDEFGH désigne les pavés ci-dessous.
Les faces de ces solides sont des parallélogrammes situés dans des plans parallèles deux à deux.
Les points M et N appartiennent aux plans (ABC) et (ADH) sans être sur les arêtes du solide.
1. a. Démontrer que les trois points M, N et A définissent un plan.
b. Démontrer que le plan (MNA) coupe chaque face du solide *ABCDEFGH*.
2. Pour chacun des cas ci-dessous, reproduire la figure et construire la section du pavé par le plan (AMN).
Justifier la construction.

a.

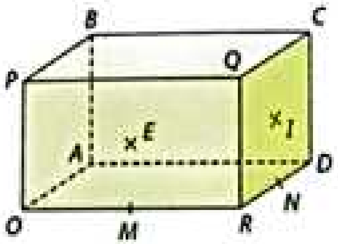


b.



92 Calculs de volume

ABCDOPQR désigne le pavé ci-dessous.
Les points M et N sont les milieux des arêtes $[OR]$ et $[RD]$.
Le point I est le centre de la face *RDCQ* et E celui de la face *OPQR*.

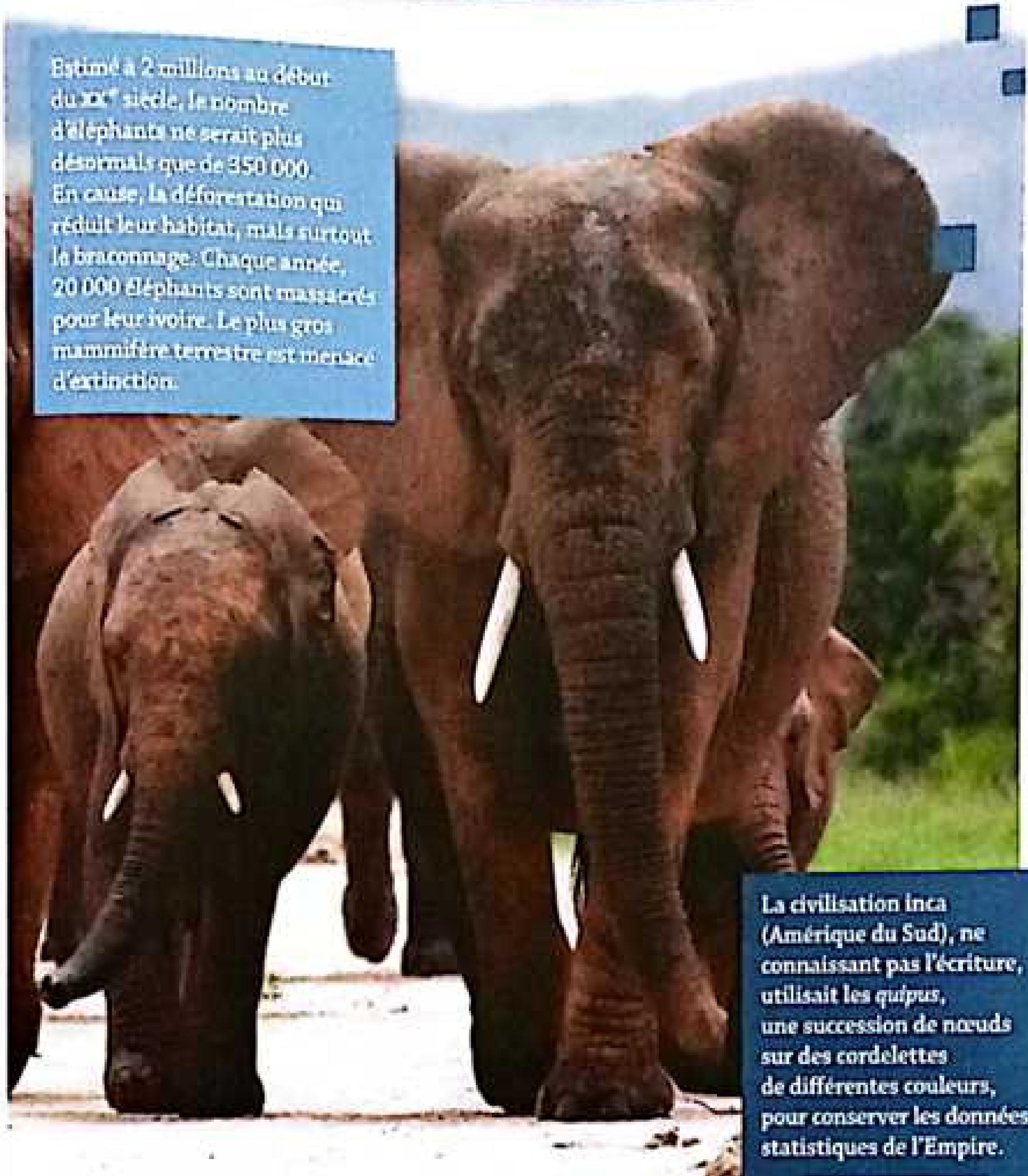


1. a. Reproduire la figure ci-dessus et construire le point F, intersection de la droite (BE) et du plan (ADR). Justifier.
b. Construire le point J, intersection de la droite (BI) et du plan (ADR).
c. Démontrer que les points D, R et F sont alignés puis que les points O, R et J le sont aussi.
2. h et a désignent des nombres réels positifs.

$$OA = a\,;\quad AD = a\sqrt{2}\quad \text{et}\quad AB = h.$$

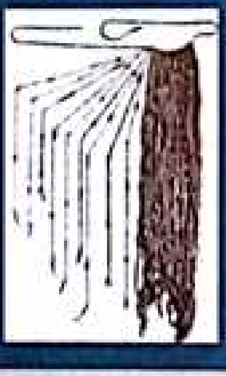
a. Dessiner en vraie grandeur la face *AORD* (on prendra $a = 4$ cm pour le dessin).
Placer sur la figure les points M, N, F et J.
b. Démontrer que le triangle *AMN* est rectangle.
3. On note V le volume du pavé et v le volume du tétraèdre *BAFJ*.
a. Calculer V et v en fonction de a et h.
b. Vérifier que $\frac{V}{v} = 2$.

8 Statistiques



Estimé à 2 millions au début du XX^e siècle, le nombre d'éléphants ne serait plus désormais que de 350 000. En cause, la déforestation qui réduit leur habitat, mais surtout le braconnage. Chaque année, 20 000 éléphants sont massacrés pour leur ivoire. Le plus gros mammifère terrestre est menacé d'extinction.

La civilisation inca (Amérique du Sud), ne connaissant pas l'écriture, utilisait les *quipus*, une succession de nœuds sur des cordelettes de différentes couleurs, pour conserver les données statistiques de l'Empire.



les objectifs du chapitre

- Représenter graphiquement une série de statistique.
- Déterminer les paramètres de position : le mode, la moyenne, la médiane.
- Déterminer les paramètres de dispersion : l'écart-moyen, la variance, l'écart-type.

8 Activités d'introduction

Cours 1,

1 Moyenne et diagramme

Les tailles, en cm, d'élèves de Seconde sont réparties ci-dessous dans des classes (c'est-à-dire des intervalles).

Taille	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
Effectif	5	15	25	30	20	5

1 Calcul d'une moyenne

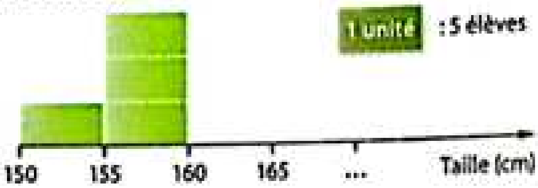
a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous qui donne le centre de chaque classe.

Centre de la classe	152,5	…	177,5
Effectif	5	…	5

b. Calculer la moyenne de cette nouvelle série statistique. En déduire la taille moyenne des élèves de cette classe.

2 Représentations graphiques

a. Reproduire et compléter l'histogramme ci-dessous.



b. Construire le diagramme circulaire après avoir reproduit et complété le tableau suivant.

Classe	[150 ; 155[	…	[175 ; 180[
Effectif	5	…	5
Mesure d'angle	18°	…	18°

2 Effectifs cumulés croissants, diagramme cumulatif

Cours 1a,

Les masses, en kg, des impalas d'un parc national sont données ci-dessous.

Masse	25	30	35	50
Effectif	5	7	3	2

Masse	60	65	70	75
Effectif	10	13	22	18

1 Effectifs cumulés croissants

a. Dans ce parc, combien d'impalas ont une masse inférieure ou égale à :

• 30 kg ? • 50 kg ? • 60 kg ? • 70 kg ?

Les effectifs calculés ici sont appelés effectifs cumulés croissants de la modalité choisie.

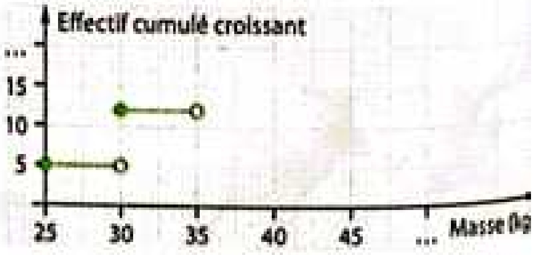
b. Reproduire et compléter le tableau des effectifs cumulés croissants ci-dessous.

Masse	25	30	…	75
Effectif cumulé croissant	5	12	…	…

2 Un nouveau diagramme

Reproduire et compléter le diagramme ci-contre.

Ce schéma est appelé diagramme cumulatif.



3 Médiane

Cours 2c

L'organisateur d'une compétition locale de lutte souhaite répartir les participants en deux poules contenant le même nombre de combattants.

La première poule est appelée « légers » et la seconde « lourds ».

1 Effectif total impair

Chacun des participants a été pesé, voici le relevé de leurs masses en kg.

63 ; 97 ; 87 ; 59 ; 68 ; 95 ; 72 ; 81 ;
103 ; 71 ; 81 ; 62 ; 65.

a. Peut-il y avoir autant de lutteurs dans chaque poule ?

b. Quelle est la masse du lutteur que l'on peut placer à la fois chez les « lourds » et chez les « légers » ?

2 Effectif total pair

Le lutteur le plus lourd s'est blessé, il décide de se retirer de la compétition.

a. Combien y aura-t-il de lutteurs dans chacune des poules ?

b. Quelles masses limites peut-on donner pour définir la catégorie :

- des légers ?
- des lourds ?

4 Homogène ou hétérogène

Cours 3b, 3c

Atem et Kouma veulent comparer leurs résultats en mathématiques.
Les notes obtenues par Atem sont : 7 ; 13 ; 13 ; 12 ; 8 ; 13 et 11.
Les notes obtenues par Kouma sont : 12 ; 13 ; 4 ; 13 ; 19 ; 7 et 9.

1 Leur niveau moyen

a. Calculer la moyenne de chaque élève.

b. Peut-on comparer les résultats de Atem et Kouma en utilisant uniquement leurs moyennes ?

2 Leur régularité

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous pour Atem, puis construire un tableau analogue pour Kouma.

Atem :

Note	7	...	...	13
Écart entre la moyenne et la note	−4	...	...	3

b. Calculer pour chaque élève, la moyenne des valeurs absolues de ces écarts.
Peut-on désormais comparer les résultats de Atem et de Kouma ?
Le nombre obtenu pour chaque élève est appelé écart-moyen.

c. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous pour Atem, puis construire un tableau analogue pour Kouma.

Atem :

Note	7	...	...	13
$(\text{Écart entre la moyenne et la note})^2$	16	...	...	9

d. Calculer pour chaque élève, la moyenne de ces carrés.
Peut-on comparer les résultats de Atem et de Kouma ?
Le nombre obtenu pour chaque élève est appelé écart-type.

8 Cours

1 Organisation des données

a Vocabulaire

Définitions

Une **série statistique** est un ensemble de personnes ou d'objets présentant un ou plusieurs caractères.

- La **population** est l'ensemble des personnes ou des objets étudiés.
- L'**individu** désigne un des éléments de la population.
- L'**effectif total**, noté N, est le nombre de personnes ou d'objets de la population.
- Le caractère étudié peut être **quantitatif** (lorsqu'il s'agit de nombres), **qualitatif**, sinon.
- Un caractère peut prendre plusieurs valeurs appelées **modalités**.

Exemple

Une entreprise fabrique des coques de protection de téléphones portables. Elle souhaite étudier les commandes de ses clients.
Et plus particulièrement la couleur (série 1) et la taille (série 2) des coques commandées.

Série 1

Couleur	Jaune	Rouge	Vert	Bleu
Effectif	40	80	50	80

Série 2

Taille (en cm)	4	4,7	5,5
Effectif	120	80	50

Pour ces deux séries statistiques, la population est l'ensemble des coques commandées ; un individu est une coque commandée ; l'effectif total est $N = 250$.

Pour la série 1, le caractère est qualitatif et les modalités sont Jaune, Rouge, Vert et Bleu.

Pour la série 2, le caractère est quantitatif et les modalités sont 4 ; 4,7 et 5,5.

Définitions

- L'**effectif d'une modalité** est le nombre d'individus de la population qui présentent cette modalité.
- La **fréquence d'une modalité** est le quotient de l'effectif par l'effectif total.
- Dans le cas d'un caractère quantitatif, l'**effectif cumulé croissant** d'une modalité est le nombre d'individus de la population qui présentent une modalité inférieure ou égale à cette modalité.

Notations

$x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les modalités d'une série statistique, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, l'effectif et la fréquence de la $i^{\text{ème}}$ modalité se notent respectivement n_i et f_i et dans ce cas $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$ et $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$.

b Représentations graphiques (sur un exemple)

Âge	14	15	16
Effectif	3	5	2
Effectif cumulé croissant	3	8	10 = N

Diagramme en bâtons des effectifs

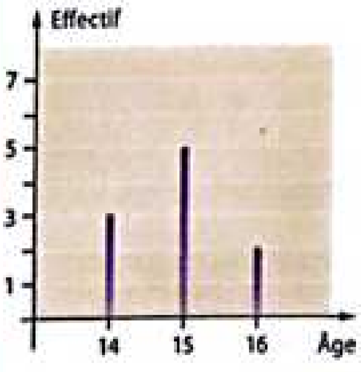


Diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants

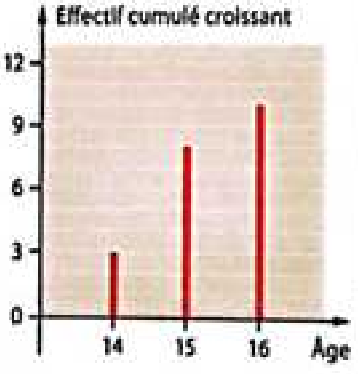
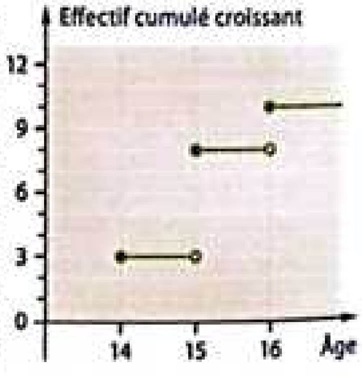


Diagramme cumulatif



1 Représenter les effectifs cumulés par un diagramme

Une enquête portant sur le nombre d'enfants dans chacun des 50 foyers d'un village a donné les résultats suivants.

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11		8	4	2
Effectif cumulé croissant									

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

b. Interpréter les données inscrites dans les cases rouges.

c. Représenter le diagramme cumulatif des effectifs.

Solution commentée

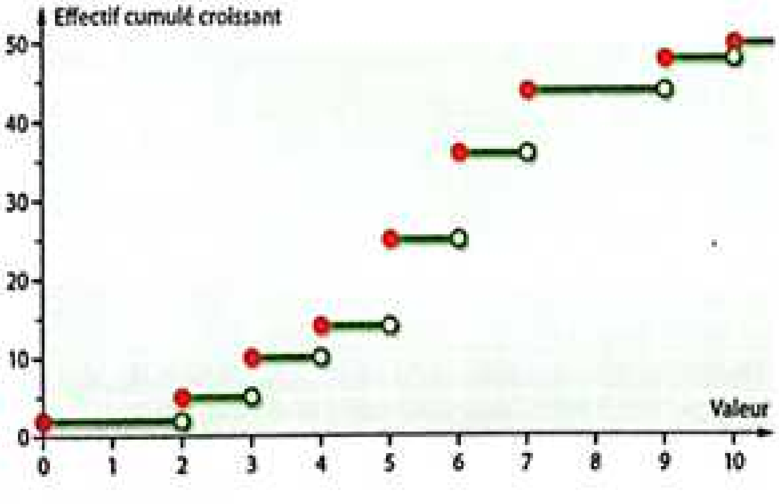
a.

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Effectif cumulé croissant	2	5	10	14	25	36	44	48	50

Par exemple, l'effectif cumulé croissant de la valeur 6 est obtenu en ajoutant 25 et 11.

b. • 11 est le nombre de familles du village qui ont six enfants.
• 36 est le nombre de familles du village qui ont au plus six enfants.

c. Dans un repère, on place les points de coordonnées :
(Valeur ; Effectif cumulé croissant)
et (Valeur suivante ; Effectif cumulé précédent).



Méthode

a. Calculer les effectifs cumulés croissants pour chaque valeur du caractère en cumulant les effectifs de toutes les valeurs inférieures ou égales à celle considérée.

b. 11 est le nombre d'individus de la valeur 6 ; 36 est le nombre d'individus qui ont une valeur inférieure ou égale à 6.

c. Tracer entre chaque valeur un segment horizontal qui a pour extrémité les points :
A (une valeur ; son effectif cumulé croissant) et
B (la valeur suivante ; l'effectif cumulé croissant précédent).
À la suite de la dernière valeur (ici, 10 enfants), tracer une demi-droite horizontale.

S'exercer

2 Un gérant de station service a noté durant une semaine les quantités, en L, d'essence vendue.

Quantité (L)	5	10	15	20	25	30
Effectif	6	18	25	31	15	5
Effectif cumulé croissant						

a. Reproduire et compléter le tableau ci-contre.

b. Interpréter les données inscrites dans les cases rouges.

c. Représenter le diagramme cumulatif.

d. Représenter le diagramme en bâtons des effectifs.

e. Combien de fois le gérant a-t-il vendu 30 L ?

f. Combien de fois le gérant a-t-il vendu au plus 15 L ?

2 Paramètres de position

a Mode, classe modale

Définitions

Un mode d'une série statistique quantitative est une modalité du caractère qui correspond à l'effectif maximal. Lorsque les modalités sont regroupées en classe, on parle de classe modale.

Remarque

Le mode ou la classe modale peuvent ne pas être uniques.

Exemples

Série 1

Valeur	7	8	9	10	11
Effectif	3	2	3	5	3

L'effectif maximal est 5, il n'y a qu'un mode : 10.

Série 2

Classe	[0 ; 1 000[	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[
Effectif	8	12	15

L'effectif maximal est 15, la classe modale est [2 000 ; 3 000[.

b Moyenne

Définition

Une série statistique quantitative d'effectif total N est donnée par le tableau suivant.

Valeur	x_1	x_2	...	x_k
Effectif	n_1	n_2	...	n_k

La moyenne de cette série statistique est le nombre, noté $\overline{x}$, égal à $\dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_k \times x_k}{N}$.

Exemple

Avec la série 1 précédente, la moyenne est $\dfrac{3\times7+2\times8+3\times9+5\times10+3\times11}{3+2+3+5+3} = \dfrac{147}{16} = 9{,}1875$.

Remarque

Lorsque les modalités sont regroupées en classe, on utilise les centres des classes pour calculer la moyenne.

Exemple

Avec la série 2 précédente, la moyenne est $\dfrac{8\times500+12\times1\,500+15\times2\,500}{8+12+15} = \dfrac{59\,500}{35} = 2\,380$.

c Médiane

Définition

Une médiane d'une série statistique quantitative d'effectif total N dont les modalités sont rangées est tout nombre réel, noté M, tel que le nombre d'individus de modalité supérieure ou égale à M et le nombre d'individus de modalité inférieure ou égale à M soient tous deux au moins égaux à $\dfrac{N}{2}$.

Remarque

Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série statistique. Elle peut ne pas être unique.

Exemples

- Avec la série 1 précédente, on ordonne les 16 modalités :

$$\underbrace{7 \leqslant 7 \leqslant 7 \leqslant 8 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 9 \leqslant 9}_{\text{8 modalités}} \leqslant \underbrace{10 \leqslant 10 \leqslant 10 \leqslant 10 \leqslant 10 \leqslant 11 \leqslant 11 \leqslant 11}_{\text{8 modalités}}$$

Tout nombre de l'intervalle [9 ; 10] est une médiane.

- Avec la série donnée par le relevé suivant :
17 ; 19 ; 17 ; 16 ; 16 ; 17 ; 16 ; 17 ; 18.

$$\underbrace{16 \leqslant 16 \leqslant 16 \leqslant 17 \leqslant \rlap{$\underbrace{}_{\text{5 modalités}}$}17}_{\text{5 modalités}} \leqslant 17 \leqslant 17 \leqslant 18 \leqslant 19$$

La médiane est 17.

3 Déterminer une médiane

**Une usine utilise deux types de machines, M_1 et M_2, pour produire la même pièce.
La direction a relevé la production journalière de chacune de ses machines pendant une semaine.**

Production M_1	36	39	37	39	35	36
Production M_2	40	44	X	40	42	35

X : M_2 en panne

Déterminer la production journalière médiane pour chaque machine.

Solution commentée

1. On ordonne les modalités de chaque série.
   Pour M_1 : $35 \leq 36 \leq 36 \leq 37 \leq 39 \leq 39$.
   Pour M_2 : $35 \leq 40 \leq 40 \leq 42 \leq 44$.

2. **Pour M_1 :** l'effectif total est $N = 6$.
   Pour M_2 : l'effectif total est $N = 5$.

3. **Pour M_1 :** N est pair.

$$\left(\frac{N}{2}\right)=\left(\frac{6}{2}\right)=3 \text{ et } \left(\frac{N}{2}+1\right)=\left(\frac{6}{2}+1\right)=4.$$

Or, la 3^e modalité est 36 et la 4^e modalité est 37, donc une médiane de cette série statistique est un nombre de l'intervalle [36 ; 37].

Pour M_2 : N est impair.

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)=\left(\frac{5+1}{2}\right)=3.$$

Or, la 3^e modalité est 40, donc la médiane de cette série statistique est 40.

Méthode

1. Ordonner toutes les modalités de la série statistique quantitative.

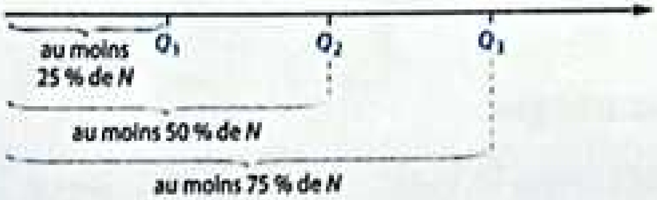
2. Calculer l'effectif total : N.

3. • Si N est impair :
   alors la médiane est
   la $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ième}}$ modalité.

   • Si N est impair :
   alors une médiane est un nombre de l'intervalle ayant pour bornes
   la $\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{ième}}$ et la $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{\text{ième}}$ modalité.

VOCABULAIRE

Les quartiles sont les nombres réels, notés Q_1, Q_2, Q_3 pour lesquels la série statistique quantitative ordonnée par ordre croissant est partagée en quarts.



S'exercer

Pour les exercices 4 et 5, déterminer un mode, la moyenne et une médiane.

4 Voici le prix en centaines de F CFA d'un même article dans 21 magasins différents.

Prix	17,5	18	19	20	20,5	22
Effectif	1	4	5	5	3	3

5 Voici le nombre de battements de cœur à la minute de quelques personnes.

53 – 112 – 110 – 73 – 84 – 101 – 97 – 93 – 104 – 130 – 118 – 106 – 105 – 89 – 95 – 82 – 116 – 109 – 111 – 78 – 97 – 73 – 90 – 101.

6 Les pointures d'un stock de chaussures sont ainsi réparties.

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Effectif	30	10	10	200	20	200	30

a. Construire le tableau des effectifs cumulés croissants.
b. Représenter le diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants.
c. Tracer sur ce diagramme la droite d'équation :

$$y = \frac{N}{2}$$

et en déduire une médiane de cette série statistique.
d. À l'aide du tableau des effectifs cumulés croissants, déterminer la médiane.

8 Cours

3 Paramètres de dispersion

a Étendue

Définition

L'**étendue** d'une série statistique quantitative est la différence entre les modalités extrêmes de cette série.

Exemples Voici les notes obtenues par deux élèves.

Élève A

Note	8	9	12	13
Effectif	2	3	2	1

L'étendue est 13 – 9 c'est-à-dire 4.

Élève B

Note	8	9	10	11	12
Effectif	1	1	4	1	1

L'étendue est 12 – 8 c'est-à-dire 4.

b Écart-moyen

Définition

Une série statistique quantitative de moyenne $\overline{x}$ et d'effectif total N est donnée par le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	...	x_k
Effectif	n_1	n_2	...	n_k

L'**écart-moyen** de cette série statistique est le nombre :

$$\frac{n_1 \times |x_1 - \overline{x}| + n_2 \times |x_2 - \overline{x}| + \ldots + n_k \times |x_k - \overline{x}|}{N}.$$

Exemples

Avec les notes de l'élève A

$N = 8$ et $\overline{x} = \dfrac{2\times8+3\times9+2\times12+1\times13}{8} = 10.$

L'écart-moyen est :

$$\frac{2\times|8-10|+\ldots+1\times|13-10|}{8} = 1,75.$$

Avec les notes de l'élève B

$N' = 8$ et $\overline{x}' = \dfrac{1\times8+1\times9+4\times10+1\times11+1\times12}{8} = 10.$

L'écart-moyen est :

$$\frac{1\times|8-10|+\ldots+1\times|12-10|}{8} = 0,75.$$

c Variance, écart-type

Définition

Une série statistique quantitative, de moyenne $\overline{x}$ et d'effectif total N, est donnée par le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	...	x_k
Effectif	n_1	n_2	...	n_k

- La **variance** de cette série statistique est le nombre, noté V, égal à :

$$\frac{n_1 \times (x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k \times (x_k - \overline{x})^2}{N}.$$

- L'**écart-type** de cette série statistique est le nombre, noté σ, égal à : $\sqrt{V}$.

Exemples

Avec les notes de l'élève A

$$V_A = \frac{2(8-10)^2 + 3(9-10)^2 + \ldots + 1(13-10)^2}{8} = 3,5.$$

$\sigma_A = \sqrt{3,5} = 1,87.$

Avec les notes de l'élève B

$$V_B = \frac{1(8-10)^2 + 1(9-10)^2 + \ldots + 1(12-10)^2}{8} = 1,25.$$

$\sigma_B = \sqrt{1,25} = 1,12$

Propriété

Avec les notations précédentes, on a : $V = n_1 x_1{}^2 + n_2 x_2{}^2 + \ldots + n_k x_k{}^2 - \overline{x}^2$.

7 Calculer des paramètres avec la calculatrice

**Un éleveur a pesé les œufs pondus par ses poules durant une semaine.
Ses relevés sont indiqués dans le tableau ci-dessous.**

Masse (en g)	[44 ; 48[	[48 ; 52[	[52 ; 56[	[56 ; 60[	[60 ; 64[
Nombre d'œufs	18	25	30	14	8

Utiliser la calculatrice pour calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

Solution commentée

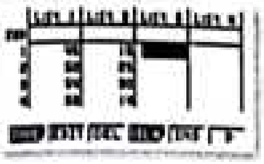
- On commence par remplacer chacune des classes par son centre.

Par exemple, la classe [44 ; 48 [est remplacée par son centre : $\frac{44+48}{2} = 46$

Masse (en g)	[44 ; 48[	[48 ; 52[	[52 ; 56[	[56 ; 60[	[60 ; 64[
Centre de la classe	46	50	54	58	62
Nombre d'œufs	18	25	30	14	8

- **Calculatrice CASIO**

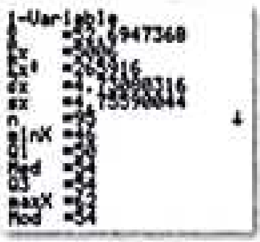
1. MENU STAT
2.



3. CALC SET

et compléter comme ci-dessous.

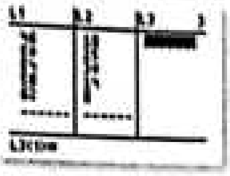
4. 1 VAR



```
1-Variable
x̄    =52.6947368
Σx   =5006
Σx²  =265916
σx   =4.73080316
sx   =4.75590044
n    =95
minX =46
Q1   =50
Med  =54
Q3   =54
maxX =62
Mod  =54
```

Calculatrice Texas Instruments

1. STAT EDIT ENTREE
2.



3. STAT CALC 1: Stats 1-Var

Selon les modèles, saisir l'écran ci-dessous ou taper 1-VarStats (L_1, L_2)

```
List:L₁
FreqList:L₂
Calculs
```

4.

```
x̄=52.69473684
Σx=5006
Σx²=265916
Sx=4.755900443
σx=4.730803168
↓n=95
minX=46
Q1=50
Med=54
Q3=54
maxX=62
```

Ces manipulations de calculatrice sont également détaillées en fin de manuel pages 266 à 269.

Méthode

- Lorsque les données de la série sont des classes (des intervalles), par convention, on remplace chacune des classes [a ; b [par son centre $\frac{a+b}{2}$.

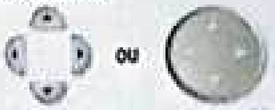
On peut ainsi calculer les indicateurs : $\overline{x}$, σ, Me…

- Pour utiliser la calculatrice :

1. Choisir le menu Statistiques.
2. Saisir en liste 1 les valeurs de la série et en liste 2, les effectifs (ou fréquences ou pourcentages).
3. Effectuer les réglages utiles.
4. Lancer les calculs et lire les différents paramètres :
   $\overline{x}$: moyenne
   σx : écart-type
   n : effectif total
   Me ou Med : médiane

Remarque

▸ Utiliser les flèches



pour changer de liste ou pour accéder à Q_1, Me, Q_3.

S'exercer

8 Une série de tests sur la durée de vie, en années, de composants électroniques a donné les résultats suivants :

Durée de vie	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
Effectif	27	142	84

a. Calculer le centre de chaque classe.

b. Utiliser la calculatrice pour calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

9 Un professeur de français recense le nombre de livres lus par ses élèves au cours de l'année.

18 élèves n'ont lu aucun livre, 72 en ont lu 1, 45 en ont lu 2, 36 en ont lu 3 et 9 en ont lu 4.

a. Utiliser la calculatrice pour calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

b. Retrouver la valeur de la moyenne et celle de l'écart-type avec des calculs.

Organisation des données

Réponses rapides

10 Voici le relevé statistique de l'âge médian, en 2014, de la population de certains pays d'Afrique.

Pays	Ghana	Côte d'Ivoire	Cameroun	Gabon
Âge médian	20,8	20,3	18,3	18,6

Pays	Bénin	Sénégal	Mali	Togo
Âge médian	17,7	18,4	16	19,6

Source : *Statistiques-mondiales.com*

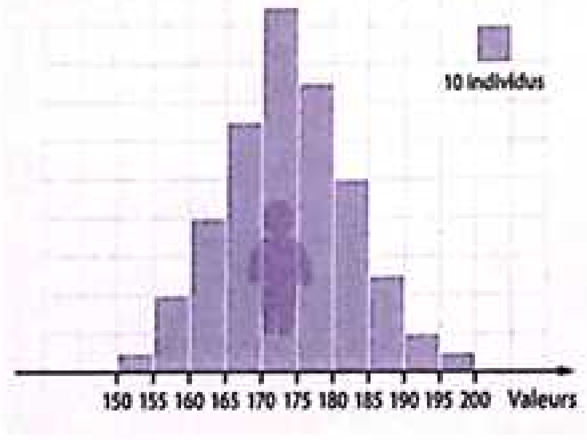
Donner la population étudiée, le caractère, les modalités et l'effectif total de cette série statistique.

11 Voici le relevé du nombre de paniers marqués par match d'une joueuse de basket.

Paniers marqués	5	7	8	9	12
Nombre de matchs	1	3	6	3	2

Donner la population étudiée, le caractère, les modalités, le mode et l'effectif total de cette série statistique.

12 À partir de l'histogramme ci-dessous, retrouver l'effectif total, la valeur minimale, la valeur maximale, les classes utilisées et la classe modale de cette série statistique.



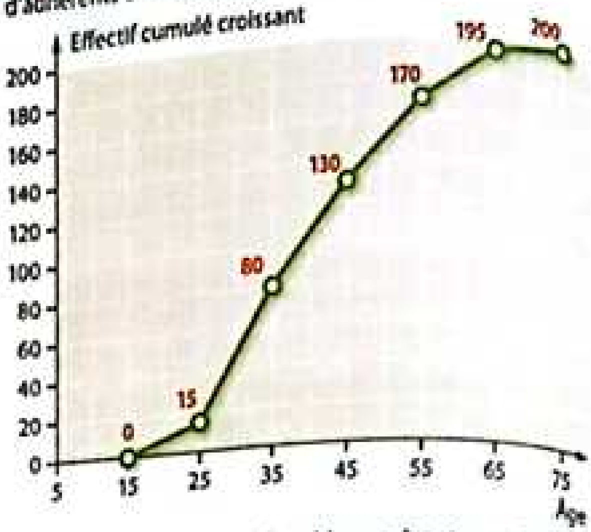
13 Un entraîneur d'athlétisme, lors de tests au saut en hauteur, a relevé les résultats suivants sur un groupe de 50 jeunes sportives.

Hauteur (en cm)	130	135	140	145	150	155	160
Fréquence (en %)	6	10	18	24	24	12	6

a. Retrouver les effectifs de chaque modalité.

b. Construire le graphique en bâtons des effectifs cumulés croissants.

14 Le graphique ci-dessous représente le cumul du nombre d'adhérents d'un club en fonction de leur âge.



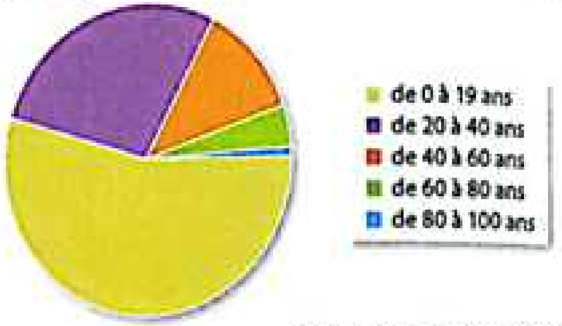
a. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant le graphique.

Tranche d'âge	[15 ; 25]	]25 ; 35]	]35 ; 45[
Effectif	...	...	...

b. Construire l'histogramme de cette série statistique.

c. Quelle est la fréquence des adhérents dans la tranche d'âge 25-45 ans ?

15 Le diagramme ci-dessous illustre la répartition de la population camerounaise en 2010 en fonction de la tranche d'âge.



Source : *Statistics-cameroun.org*

a. Recopier et compléter le tableau suivant.

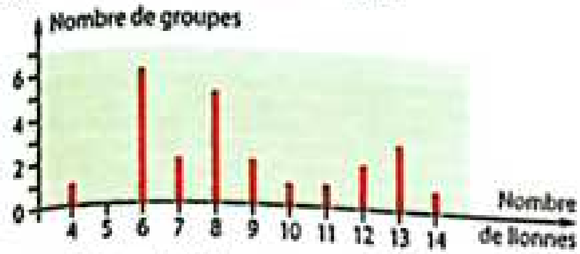
Classe d'âge	Mesure de l'angle	Fréquence (en %)
[0 ; 20[		
[20 ; 40[		
[40 ; 60[		
[60 ; 80[		
[80 ; 100[		
Total		

b. Construire l'histogramme des fréquences en pourcentage associé.

c. Sachant que la population en 2010 était de 19,4 millions, déterminer les effectifs de chaque tranche d'âge.

d. Construire le diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants.

16 Un chercheur a relevé le nombre de lionnes dans les différents groupes qu'il a observés.
Voici le diagramme qui résume ses notes.



a. Calculer le nombre de groupes que ce chercheur a observés.
b. Quel est le pourcentage de groupes qui ont un nombre de lionnes compris entre 5 et 10 ?
c. Construire le diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants.

Paramètre de position

Réponses rapides

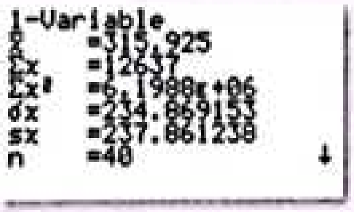
17 Kimbu a noté le nombre d'œufs qu'il a ramassés dans son poulailler pendant quelques jours.
Voici ses résultats : 7 ; 5 ; 9 ; 6 ; 8 ; 6 ; 0 ; 6 ; 7.
Déterminer le mode, la moyenne et la médiane de cette série statistique.

18 Le tableau ci-dessous indique l'âge des jeunes musiciens d'un village.

Âge	12	13	15	16	19	20
Effectif	2	3	2	1	1	1

Déterminer le mode, la moyenne et une médiane de cette série statistique.

19 Yembe a saisi les données d'une série statistique sur sa calculatrice et a obtenu l'écran de calcul ci-contre.



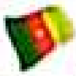
```
1-Variable
x̄      =315.925
Σx     =12637
Σx²    =6.1988E+06
σx     =234.869153
sx     =237.861238
n      =40            ↓
```

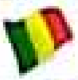
Donner la moyenne et l'effectif total de cette série.

20 À l'école du village, le médecin scolaire a mesuré la taille, en cm, des vingt enfants de six ans.
116 – 121 – 114 – 128 – 125 – 112 – 118 – 119 – 114 – 108 – 121 – 111 – 120 – 122 – 118 – 119 – 112 – 122 – 108 – 112.
a. Déterminer la taille moyenne de ce groupe d'enfants.
b. Construire un tableau donnant les effectifs cumulés croissants puis décroissants de chaque modalité.
c. En déduire la taille médiane de ce groupe.
d. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

Info
Une médiane peut être une modalité dont l'effectif cumulé croissant et l'effectif cumulé décroissant sont tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2}$.

21 Voici les taux de natalité en ‰ pour quelques pays d'Afrique en 2014.

Pays		Taux
Cameroun		36,6
Nigeria		35,5
Côte d'Ivoire		29,25
Libéria		35

Pays		Taux
Guinée		36
Sénégal		35
Gambie		31,7
Ghana		31,4

Source : *Statistiques-mondiales.com*

a. Quel est le taux de natalité moyen pour l'ensemble de ces pays ?
b. Quel est le taux de natalité médian pour l'ensemble de ces pays ?
c. Vérifier qu'au moins 75 % de ces pays ont un taux de natalité inférieur ou égal à celui du Bénin, qui est de 36,5 ‰.

22 a. Relever l'âge et la taille de chaque élève de votre classe.
b. Construire un diagramme en bâton des effectifs pour le caractère âge.
c. Calculer l'âge moyen et l'âge médian de votre classe.
d. Construire un histogramme des effectifs en ayant regroupé les tailles en classes d'amplitude 5 cm.
Calculer la taille moyenne des élèves de votre classe.

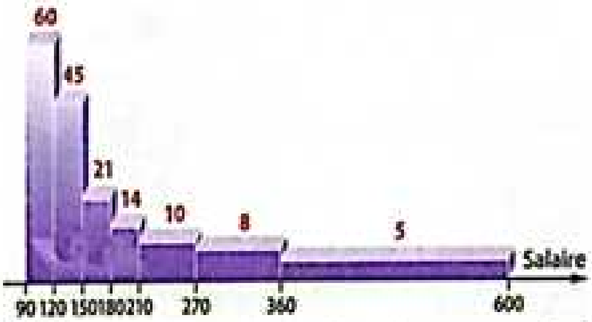
23 Dans un bureau de poste, on a relevé le temps, en min, que passait chaque client au guichet.
Voici le relevé obtenu.

Durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectif	9	13	6	4	2

a. Construire le tableau des effectifs cumulés croissants et en déduire un temps médian passé par ces clients au guichet.
b. Calculer le temps moyen passé par ces clients au guichet.

Aide
Pour calculer la moyenne d'une série statistique quantitative donnée sous forme de classes, on utilise les centres des classes.

24 L'histogramme ci-dessous représente les salaires, en milliers de F CFA, d'une entreprise.



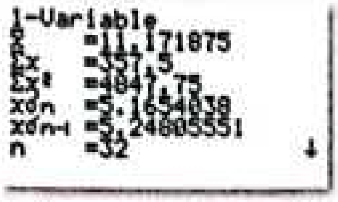
a. Quelle est la classe modale des salaires dans cette entreprise ?
b. Déterminer dans quelle classe se trouve le salaire médian.
c. Déterminer le salaire moyen dans cette entreprise.

Exercices d'entraînement

Paramètres de dispersion

Réponses rapides

25 Voici l'écran de calculatrice qu'a obtenu Ndiagne.



```
1-Variable
x̄     =11.171875
Σx    =357.5
Σx²   =4847.75
xσn   =5.1654838
xσn-1 =5.24805551
n     =32             ↓
```

Lire l'effectif total, la moyenne et l'écart-type de la série statistique saisie.

26 Namando a construit le tableau suivant.

Modalité x_i	8	9	11	12	15
$(x_i-\overline{x})^2$	9	4	0	1	16

a. Déduire, sans calcul, la moyenne.
b. Sachant que $N = 5$, calculer mentalement l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

27 Calculer l'effectif total, la moyenne, la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Modalité	5	10	15
Effectif	5	3	2

28 Pour chaque question de cet exercice, donner, à l'aide de la calculatrice, la moyenne et l'écart-type de la série statistique donnée.

a.

Modalité	5	9	13	17	19	25
Effectif	7	3	8	2	7	5

b.

18 – 15 – 7 – 19 – 6 – 18 – 14 – 8 –
7 – 17 – 9 – 7 – 12 – 19 – 16 – 9 –
16 – 17 – 18 – 10 – 8 – 16 – 20 – 8.

c.

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 20[
Effectif	50	450	1 400	1 000

29 a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

i	1	2	3	4
x_i	2	3	5	6
n_i	3	4	2	7
$n_i \times x_i$				
$n_i \times (x_i - 5)$				
$n_i \times (x_i - 5)^2$				

b. On note N l'effectif total.
Calculer, puis nommer les nombres suivants.

- $A = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{4} n_i \times x_i$;
- $B = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{4} n_i \times |x_i - 5|$;
- $C = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{4} n_i \times (x_i - \overline{x})^2$;
- $D = \sqrt{C}$.

30

Mariam lance deux dés à six faces numérotées de 1 à 6.
Elle répète ce lancer 60 fois et note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus sur les deux dés.
Voici ses résultats.

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

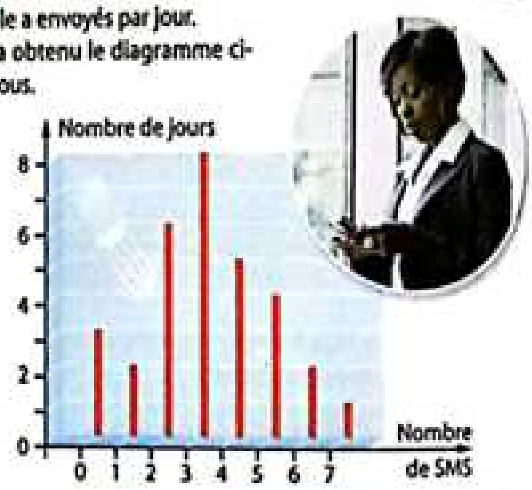
a. Calculer la moyenne, l'écart-moyen et l'écart-type de cette série statistique.
b. Saisir sur la calculatrice cette série statistique et vérifier les résultats du a.

31 Afin de déterminer si elles seront exportées, on a mesuré le diamètre, en cm, de mangues qui viennent d'être cueillies.

Diamètre	[10 ; 11[	[11 ; 12[	[12 ; 13[	[12 ; 14[
Effectif	200	238	455	312

a. Calculer la moyenne de cette série statistique.
b. Calculer l'écart-moyen et l'écart-type de cette série.
c. Vérifier ces résultats en saisissant à la calculatrice cette série statistique.

32 Madame T. a noté, pendant un mois, le nombre de SMS qu'elle a envoyés par jour.
Elle a obtenu le diagramme ci-dessous.



a. Quel est le nombre moyen de SMS envoyés par Madame T. quotidiennement ?
Son abonnement lui permet d'en envoyer cinq gratuitement par jour, faut-il qu'elle change de forfait ?
b. Déterminer l'écart-type, noté s, de cette série statistique.
c. Combien de jours dans le mois, le nombre de SMS envoyés par Madame T. a-t-il été supérieur à :
- $\overline{x} + s$?
- $\overline{x} + 2s$?
- $\overline{x} + 3s$?

33 Afin d'étudier l'efficacité d'un médicament, 60 patients ont accepté de participer à un essai clinique.
La moitié des patients, groupe M, ont pris le médicament pendant un mois. L'autre moitié des patients, groupe P, ont pris un placebo.
On a mesuré ensuite un taux dans le sang des patients.
Voici les résultats obtenus.

Groupe M

12	13,5	14,5	15	13	13	18	15
14,5	13,5	13	16	15	14	14	15
14	17	13	14,5	15	14	14,5	14
12	14	18	14	14,5	14,5		

Groupe P

16	16,5	14	17,5	17	17	15	17,5
16	16	16,5	15,5	17	16	16,5	15,5
16	16,5	16,5	15,5	17	16	16,5	17
14	17	16,5	16	16,5	17,5		

a. Calculer la moyenne du taux mesuré pour chaque groupe.
Le médicament a-t-il été, en moyenne efficace ?
b. Calculer l'écart-type pour chaque groupe.
Interpréter le fait que l'écart-type de M est plus élevé que celui de P.

Info

Un placebo a l'apparence d'un médicament, mais ne contient que des substances neutres, c'est-à-dire sans aucun effet chimique ni thérapeutique sur les malades. Les placebos sont très utilisés dans les tests médicamenteux, afin de déterminer les effets réels du nouveau médicament testé, indépendamment de toute amélioration de l'état du patient qui pourrait venir d'un effet psychologique.

34 Evenge est responsable de la qualité des pièces fabriquées par son entreprise. Pour contrôler la qualité des pièces, elle effectue une série de mesures pendant 100 jours et note le nombre de pièces défectueuses. Voici ses résultats.

En 2014

Nombre de pièces défectueuses	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	10	43	39	4	3	1

En 2015

Nombre de pièces défectueuses	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	44	18	12	8	6	12

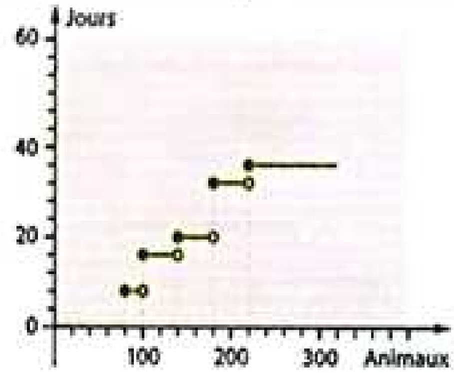
a. Calculer la moyenne du nombre de pièces défectueuses pour chaque année.
Quelle conclusion peut-elle tirer ?
b. Calculer l'étendue pour chaque année.
Doit-on changer de conclusion ?
c. Calculer l'écart-type pour chaque année.
Est-ce que les conclusions précédentes sont confirmées ?

35 L'examen d'entrée dans une école comporte trois épreuves notées chacune sur 20 et affectées des coefficients suivants :
• Mathématiques : 4 ; • Physique : 3 ; • Français : 2.
Pour être reçu à cet examen, il faut obtenir une moyenne supérieure ou égale à 10.
a. Un étudiant a obtenu 10 en mathématiques, 12 en physique et 8 en français. Est-il reçu ?
b. Un autre étudiant a obtenu 8 en mathématiques et 11 en français. Quelle doit être sa note minimale en physique pour être reçu ?
c. Un troisième étudiant a obtenu 10 en physique. Sa note en mathématiques est le double de sa note en français. Sa moyenne est 10. Quelles sont ses notes en mathématiques et en français ?

36 Sami a été recruté par une association pour créer des statistiques sur l'évolution du parcours de migration d'une espèce animale. Il compte pendant 4 heures par jour le nombre d'animaux en un lieu précis pendant deux mois.
En 2000, il avait construit le tableau d'effectifs ci-dessous :

Nombre d'animaux	80	100	120	160	200	250
Nombre de jours	2	9	11	7	6	7

En 2010, il avait construit le diagramme cumulatif suivant :



a. Construire le diagramme cumulatif pour l'année 2000.
b. Calculer deux paramètres de position puis deux paramètres de dispersion pour la série statistique de l'année 2000.
c. Construire le tableau d'effectifs pour l'année 2010.
d. Calculer deux paramètres de position puis deux paramètres de dispersion pour l'année 2010.
e. Vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice.
f. Que peut-on en conclure sur l'évolution de cette migration en 10 ans ?

37 Un chef d'entreprise réalise une enquête sur l'absentéisme de ses employés.
Voici les résultats de cette enquête portant sur les 90 derniers jours ouvrables.

Nombre d'absents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	8	19	25	20	12	6

a. Calculer la moyenne m, la variance V et l'écart-type σ.
b. Quelle est la signification de m ?
c. Quel est le pourcentage de jours où le nombre d'absents appartient à l'intervalle $[m - \sigma ; m + \sigma]$?

Faire le point

38 Vocabulaire et notation

Utiliser le relevé ci-dessous pour compléter chacune des phrases à l'aide de notation ou de définition du cours.

Prix	1 200	1 650	2 100	2 400	3 500
Nombre de produits	3	7	5	4	2

- L'effectif … de la modalité 2 100 est 15
- 2 100 est … de cette série.
- L'effectif … est 21 et la … est 2 012.
- L'… moyen est d'environ 473.

39 À un détail près

Pour mieux gérer ses devoirs à faire à la maison, Djal a relevé la durée de travail quotidien pendant les premiers jours d'école.

Durée (min)	20	30	35	40	50
Nombre de jours	5	3	7	3	7

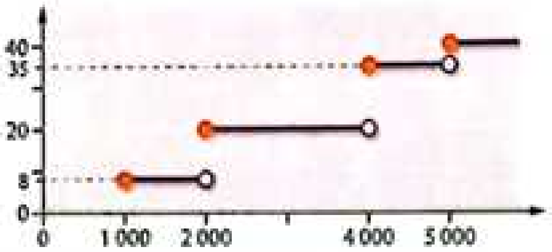
Djal affirme qu'il travaille en moyenne trente cinq minutes.

a. Quelle confusion a-t-il commise ?

b. Calculer son temps de travail journalier moyen.

40 Déceler une erreur

On dispose du diagramme cumulatif ci-dessous.



Voici un dialogue entre un élève et son professeur.

Nufi : « *Pour calculer la moyenne, j'utilise les modalités 1 000, 2 000, 4 000 et 5 000 puis je calcule le quotient :*

$$\frac{8\times 1\,000+20\times 2\,000+35\times 4\,000+40\times 5\,000}{8+20+35+40}$$ ».

Le professeur : « *La formule est correcte mais ce ne sont pas les bons effectifs, tu as confondu les représentations graphiques* ».

Expliquer la remarque du professeur et proposer une solution correcte.

41 Avec la calculatrice

Voici le tableau des effectifs d'une série statistique.

Modalité	5	6	7	8	9	10
Effectif	12	21	46	40	37	25

Le professeur demande à ses élèves de donner les différents paramètres de cette série à l'aide de la calculatrice.

a. Rédiger les différentes instructions pour obtenir ces paramètres.

b. Donner les différents paramètres statistiques.

42 Trois méthodes pour la médiane

Un ornithologue a relevé la taille des œufs d'un oiseau. Voici la courbe des fréquences cumulées croissantes.

a. À l'aide du graphique, donner la médiane de cette série statistique.

b. Sachant que $N = 30$, construire le tableau des effectifs cumulés croissants et en déduire une médiane.

c. Sachant que $N = 30$, construire le tableau des effectifs et en déduire une médiane à l'aide de la calculatrice.

43 Un nouveau symbole Σ

Modalité : x_i	$x_1 = 8$	$x_2 = 9$	$x_3 = 7$	$x_4 = 6$	$x_5 = 2$
Effectif : n_i	$n_1 = 3$	$n_2 = 2$	$n_3 = 5$	$n_4 = 3$	$n_5 = 4$

1. a. Calculer puis nommer $\sum_{i=1}^{5} n_i$.

b. Calculer puis nommer $\frac{1}{N}\times\sum_{i=1}^{5} n_i x_i$.

c. Calculer puis nommer $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i(x_i-\bar{x})^2$.

2. Écrire avec le symbole Σ les sommes suivantes.

a. $S = f_1\times x_1^2 + f_2\times x_2^2 + \ldots + f_5\times x_5^2$;

b. $S' = \frac{1}{N}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2) - \bar{x}^2$.

44 Quelques diagrammes

Le jury de l'examen du baccalauréat a regroupé les notes obtenues en mathématiques par les élèves.

Les notes sont données dans le tableau ci-dessous.

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de candidats	4	8	6	12	10	16	18	14	18	38

Note	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Nombre de candidats	26	30	16	26	12	8	6	8	6

1. Traduire ce tableau d'effectifs par un diagramme en bâtons.

2. a. Construire un tableau des effectifs cumulés.

b. Traduire ce tableau d'effectifs cumulés par un diagramme cumulatif.

Vrai-faux

Top chrono (sans justification)

65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Dans une classe de Seconde, on a relevé les moyennes générales des élèves au premier trimestre.

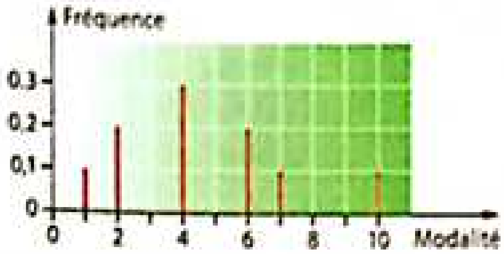
Moyenne générale	]6 ; 9]	]9 ; 11]	]11 ; 14]	]14 ; 20]
Nombre d'élèves	7	14	6	3

	vrai	faux
1. La moyenne générale de la classe est 10,6 environ.	☐	☐
2. L'étendue de cette série est 5.	☐	☐
3. Une médiane est un nombre réel de l'intervalle]6 ; 9].	☐	☐
4. 90 % des élèves ont une moyenne inférieure à 14.	☐	☐
5. L'écart-type de cette série est environ 2,7.	☐	☐

Avec justification

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Voici le diagramme en bâtons d'une série statistique.



	vrai	faux
1. Le mode de cette série est 4.	☐	☐
2. La fréquence cumulée croissante de la modalité 4 est 0,5.	☐	☐
3. La médiane de cette série est égale 5.	☐	☐
4. La moyenne de cette série est environ 4,6.	☐	☐
5. L'écart-moyen de cette série est environ 2,3.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

Le tableau suivant donne la taille, en cm, des vingt-cinq zèbres d'un zoo.

Taille	[154 ; 162[	[162 ; 166[	[166 ; 170[	[170 ; 174[
Effectif	5	7	8	5

1. La taille moyenne des zèbres de ce zoo est :
   a. 165,68 ; b. 166 ; c. 164.
2. La variance de cette série est environ :
   a. 4,72 ; b. 22,3 ; c. 25.
3. La taille médiane de cette série est :
   a. 164 ; b. 168 ; c. 170.
4. L'écart-type de cette série est environ :
   a. 4,81 ; b. 4,72 ; c. 22,29.

Avec justification

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

Voici le tableau des effectifs d'une série statistique.

Modalité	20	40	70	x	100
Effectif	6	4	10	n	15

1. L'effectif total est 40, n est donc égal à :
   a. 12 ; b. 5 ; c. 40.
2. La moyenne est 72,625, x est donc égale à :
   a. 80 ; b. 85 ; c. 90.
3. L'écart-moyen est :
   a. 28,7 ; b. 29 ; c. 23,625.
4. La médiane appartient à l'intervalle :
   a. [70 ; 85] ; b. [40 ; 70] ; c. [90 ; 100].

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

49 Moyenne des moyennes

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le nombre d'habitants, en 2013, et la superficie de dix pays. On appelle densité de la population le nombre d'habitants au km^2.

	Nombre d'habitants (en millions)	Superficie (en km^2)	Densité
Cameroun	21,5	475 440	
Congo	4,4	342 000	
Côte d'Ivoire	21,1	322 460	
Bénin	9,6	112 620	
Burkina-Faso	18	274 200	
Gabon	1,6	267 670	
Guinée	11,8	248 860	
Mali	15,5	1 240 000	
Sénégal	13,3	196 190	
Togo	7,2	56 785	
Total			

Les résultats seront arrondis au dixième

a. Reproduire et compléter le tableau.

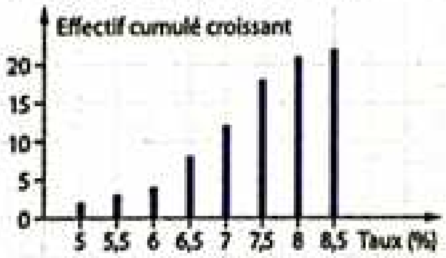
b. Représenter les densités de population de ces pays par un diagramme en bâtons.

c. Calculer le pourcentage des superficies de chaque pays, par rapport à la superficie totale de ces pays puis représenter le diagramme circulaire correspondant.

d. Calculer la densité de la population pour l'ensemble des dix pays. Cette densité est-elle la moyenne des densités ?

50 Interpolation linéaire

Voici le diagramme en bâtons des effectifs cumulés du taux de croissance des pays d'Afrique de l'ouest et d'Afrique centrale en 2013.



1. Lecture du graphique

Quelle est l'équation de la droite horizontale à tracer pour déduire la médiane ? Donner, alors, une valeur de la médiane.

2. Calcul de la médiane

f désigne la fonction affine dont la courbe représentative passe par les points d'ordonnées respectives 8 et 12 et d'abscisse leur taux.

a. Déterminer l'expression de $f(x)$.

b. Quelle est l'image, par *f*, de la médiane ?

c. En déduire une valeur approchée de la médiane.

Info

Cette méthode permet de déterminer la médiane en considérant que les modalités sont uniformément réparties à l'intérieur de chaque classe.

51 Transformation des modalités

Voici les résultats d'une épreuve sur 20 d'admissibilité à un concours.

Note	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	5	7	11	1	8	12	6	4

Ces notes étant catastrophiques, le correcteur souhaite les augmenter à l'aide d'une fonction pour que la nouvelle moyenne soit 10/20.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série de notes.

2. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous obtenu à partir du tableau précédent, sachant que chaque note sera transformée par une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Nouvelle note	$a+b$	…	$8a+b$
Effectif	5	…	4

b. Exprimer la moyenne $\overline{X_1}$ de cette nouvelle série de notes.

c. Vérifier que $\overline{X_1} = f(\overline{x})$.

3. a. Construire un nouveau tableau d'effectifs en prenant cette fois-ci le carré des notes de départ.

b. Calculer la moyenne de cette nouvelle série de notes. On la notera $\overline{X_2}$.

c. A-t-on $\overline{X_2} = (\overline{x})^2$?

4. Quelle fonction affine faut-il choisir pour que le souhait du correcteur soit vérifié ?

52 Le coût de l'alimentation

Une enquête effectuée auprès de familles de cinq personnes, dans deux pays différents *A* et *B*, a montré que 42 aliments de base sont nécessaires pour une semaine de nourriture.

Afin d'évaluer le coût de l'alimentation dans ces deux pays, on a relevé le prix, en F CFA, de ces aliments dans chaque pays. Ces données sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Prix (en F CFA)	700	720	750	800	830	860	900
Pays *A*	7	9	13	2	1	8	2
Pays *B*	9	3	17	3	3	4	3

1. a. Calculer le coût d'une semaine de nourriture pour une famille de cinq personnes dans chacun des pays.

b. Calculer le coût moyen ; puis la médiane, des prix de ces aliments pour chacun des pays.

c. Les résultats précédents permettent-ils de différencier le coût de l'alimentation dans ces pays ?

2. a. Utiliser la calculatrice pour déterminer, pour chaque pays, l'étendue, l'écart-moyen et l'écart-type des prix de ces aliments.

b. Parmi les indicateurs de la question 2. a., quels sont ceux qui permettent de différencier le coût de l'alimentation dans ces pays ?

3. Calculer, pour chaque pays, le pourcentage d'aliments de base, dont le prix est :

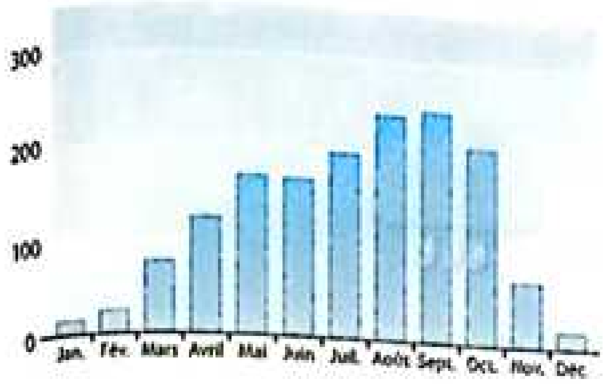
a. inférieur ou égal à 830 F CFA ;

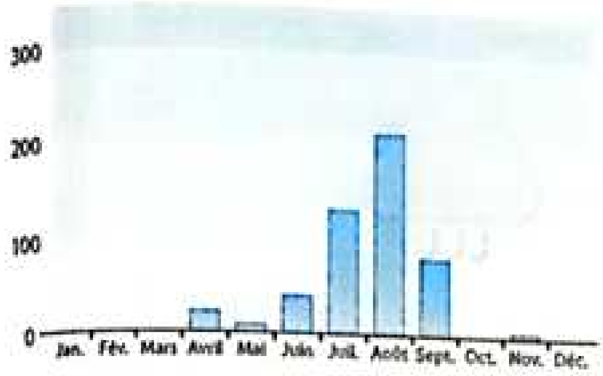
b. strictement supérieur à 750 F CFA.

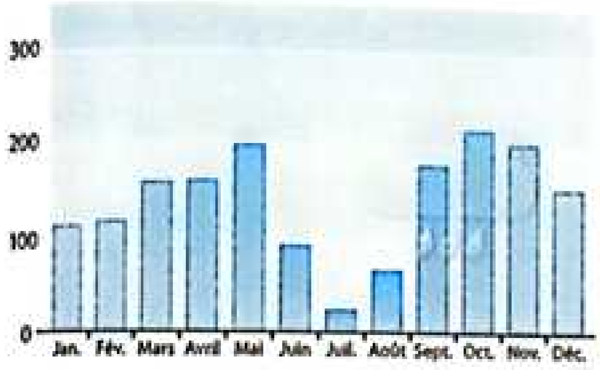
(Les résultats seront arrondis à l'unité.)

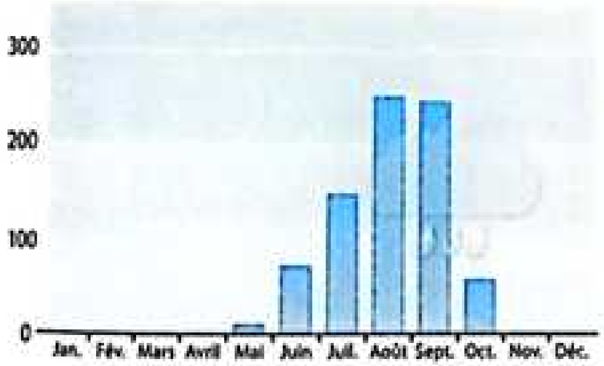
53 pluviométrie

Voici les hauteurs de pluie, en mm, enregistrées chaque mois dans quatre villes africaines.









La classe peut être partagée en quatre groupes.

a. Chaque groupe propose une représentation graphique pertinente des données d'une ville et différente de celle de l'énoncé.

b. Chaque groupe détermine trois paramètres de position puis trois paramètres de dispersion pour la ville qu'il étudie.

c. Un élève de chaque groupe va exposer à la classe les résultats et les commente.

54 échantillon normal

Avant d'exporter des sacs de cacao, une coopérative doit vérifier si la masse de ces sacs est conforme au cahier des charges de ses clients étrangers.

Un ouvrier est chargé de peser soixante-huit de ces sacs, voici ses résultats.

66 – 69 – 70 – 68 – 69 – 71 – 72 – 70 – 69 – 66 – 73 – 69 – 67 – 70 – 71 – 71 – 70 – 67 – 69 – 68 – 71 – 73 – 71 – 72 – 72 – 66 – 70 – 71 – 72 – 70 – 69 – 67 – 66 – 73 – 74 – 68 – 70 – 72 – 71 – 67 – 70 – 72 – 66 – 69 – 71 – 72 – 68 – 74 – 66 – 69 – 70 – 71 – 72 – 73 – 71 – 69 – 71 – 73 – 73 – 75 – 73 – 73 – 74 – 75 – 75 – 74 – 74 – 75.

a. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon de soixante-huit sacs.

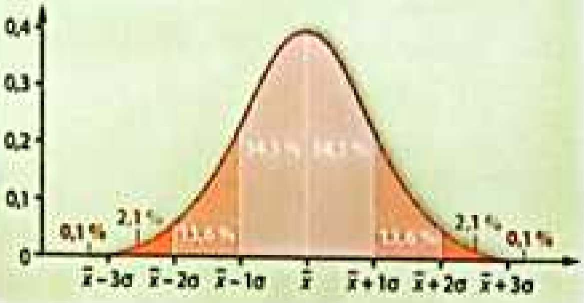
b. La livraison pourra avoir lieu si :

- la moyenne, $\overline{x}$, appartient à $[69{,}3\,;70{,}7]$;
- l'écart-type, s, appartient à $[2{,}4\,;2{,}6]$;
- environ 68 % des modalités appartiennent à l'intervalle :
$$[\overline{x}-s\,;\overline{x}+s]\,;$$
- environ 95 % des modalités appartiennent à l'intervalle :
$$[\overline{x}-2s\,;\overline{x}+2s]\,;$$
- environ 99 % des modalités appartiennent à l'intervalle :
$$[\overline{x}-3s\,;\overline{x}+3s].$$

En utilisant les résultats de l'échantillon, peut-on penser que la coopérative va exporter cette production ?

info

Les statistiques portant sur un nombre important de données conduisent à un histogramme très proche d'une courbe en forme de cloche. Les données sont dites « gaussiennes » ou « normales ». Et dans ce cas, elles vérifient les trois dernières conditions de la question 2.



55 fonction de dispersion

Modalité	x_1	x_2	…	x_k
Effectif	n_1	n_2	…	n_k

La fonction de dispersion associée à cette série statistique est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x)=\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-x)^2$.

On suppose que $k=3$.

a. Écrire $d(x)$ sans le symbole Σ puis développer.

b. En quel nombre réel, la fonction d admet-elle un maximum ?

Exercices d'approfondissement

56 Égalité

Deux grandes entreprises sont implantées dans un pays imaginaire, on a construit les tableaux ci-dessous qui indiquent la répartition des salaires annuels en fonction de la catégorie professionnelle.

Les salaires sont indiqués en ♙, une monnaie imaginaire.

Entreprise 1	Salaires		
Catégorie	$10 \leqslant S < 20$	$20 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 40$
Employés	170	100	0
Cadres	0	10	20

Entreprise 2	Salaires		
Catégorie	$10 \leqslant S < 20$	$20 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 40$
Employés	280	140	0
Cadres	0	40	40

1. a. Calculer les moyennes des salaires $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ respectivement dans l'entreprise 1 puis dans l'entreprise 2.

b. Calculer les moyennes des salaires des employés que l'on notera $\overline{x'_1}$ et $\overline{x'_2}$.

c. Calculer les moyennes des salaires des cadres que l'on notera $\overline{x''_1}$ et $\overline{x''_2}$.

2. Le directeur de l'entreprise 2 dit à celui de l'entreprise 1 :

« Mes salariés sont mieux payés que les vôtres ».

L'autre directeur lui répond :

« Faux, mes employés sont mieux payés et mes cadres également ».

Expliquer ce paradoxe.

Info

Les résultats semblent contradictoires, mais ils sont justes. Ils sont dûs à ce que les statisticiens appellent l'effet de structure.

57 Avec des indices

Une série statistique quantitative ordonnée est décrite par le tableau ci-dessous.

Modalité	x_1	x_2	…	x_k
Effectif	n_1	n_2	…	n_k

1. a. Compléter l'encadrement suivant avec deux modalités. Pour tout nombre entier naturel i, entre 1 et k,

$$\ldots \leqslant x_i \leqslant \ldots.$$

b. Justifier que la moyenne de cette série statistique appartient à $]x_1\,;x_k[$.

2. a. En est-il de même pour la médiane ?

b. Montrer que la plus petite modalité x_j pour laquelle

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_j \geqslant \frac{N}{2}$$

est la médiane de cette série.

58 Une série très particulière

Donner un exemple de série statistique :
- d'effectif total 10 ;
- dont l'étendue est 10 ;
- dont la moyenne est égale au double de la médiane.

59 Distance statistique

À l'aide d'un logiciel, on a réalisé 1 000 simulations de 120 lancers d'un dé à six faces.

Puis on a calculé :

$$d = \sqrt{120\left[\left(f_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \ldots + \left(f_6 - \frac{1}{6}\right)^2\right]}.$$

Voici les résultats obtenus.

d appartient à	Effectif
[0 ; 0,2[	67
[0,2 ; 0,4[	153
[0,4 ; 0,6[	167
[0,6 ; 0,8[	160
[0,8 ; 1[	135
[1 ; 1,2[	94
[1,2 ; 1,4[	73
[1,4 ; 1,6[	48
[1,6 ; 1,8[	40
[1,8 ; 2[	23
[2 ; 2,2[	13
[2,2 ; 2,4[	6
[2,4 ; 2,6[	5
[2,6 ; 2,8[	6
[2,8 ; 3[	3
[3 ; 3,2[	0
[3,2 ; 3,4[	4
[3,4 ; 3,6[	3

1. Représenter l'histogramme de cette série.

2. a. Représenter la courbe des fréquences cumulées croissantes.

b. En déduire la médiane de cette série.

3. On appelle vingtiles les dix-neuf nombres réels qui permettent de partager la population en vingt sous-populations d'effectif au moins $\frac{N}{20}$. On les note $V_1, V_2, \ldots V_{19}$.

Déterminer, à l'aide du graphique du **2. a.**, V_1 et V_{19}.

4. On admet qu'un dé donné est irrégulier de façon significative (au seuil de 5 %) lorsque, pour 120 lancers, sa distance statistique d est supérieure à $\sqrt{V_{19}}$.

En lançant un dé, on obtient :

Face	①	②	③	④	⑤	⑥
Effectif	13	18	11	21	27	30

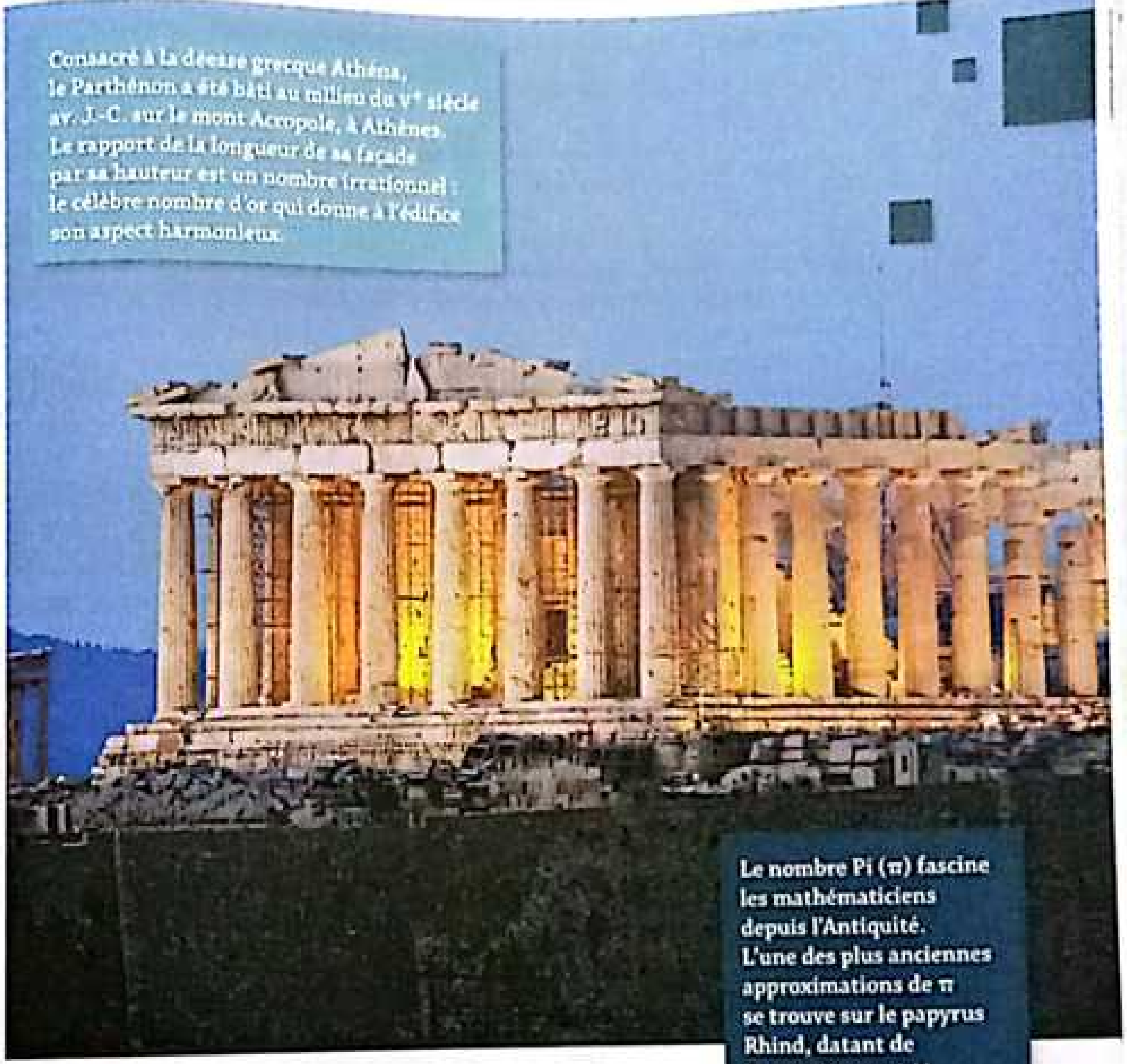
Ce dé est-il irrégulier (c'est-à-dire truqué) ?

Info

Ce nombre s'appelle distance statistique de la répartition des fréquences des 120 lancers par rapport à la distribution théorique.

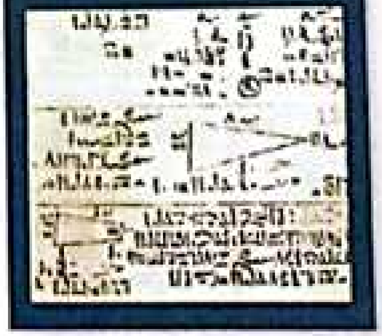
9

Calculs dans ℝ



Consacré à la déesse grecque Athéna, le Parthénon a été bâti au milieu du vᵉ siècle av. J.-C. sur le mont Acropole, à Athènes. Le rapport de la longueur de sa façade par sa hauteur est un nombre irrationnel : le célèbre nombre d'or qui donne à l'édifice son aspect harmonieux.

Le nombre Pi (π) fascine les mathématiciens depuis l'Antiquité. L'une des plus anciennes approximations de π se trouve sur le papyrus Rhind, datant de la première moitié du xviᵉ siècle avant J.-C.



les objectifs du chapitre

- Maîtriser le calcul numérique et littéral.
  - avec les fractions ;
  - avec les puissances ;
  - avec les racines carrées ;
  - avec les valeurs absolues ;
  - en développant ;
  - en factorisant.
- Résoudre des inéquations comportant des valeurs absolues.
- Résoudre des problèmes d'encadrement, d'approximation.

1 Nombres rationnels et nombres irrationnels

Cours 1

1 Irrationalité de $\sqrt{2}$

L'objectif est de démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

a. Justifier qu'il existe deux nombres entiers naturels a et b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b}$ soit irréductible.

b. Montrer que a^2 est pair ; en déduire que a est pair.

c. Montrer que b est lui aussi pair.

d. Conclure.

Logique

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer une proposition consiste à supposer qu'elle est fausse, puis aboutir à une contradiction.

2 Nombres rationnels et irrationnels

L'objectif est de montrer qu'entre deux nombres rationnels, il existe toujours un nombre irrationnel.

a. Montrer que :

- si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ (Propriété 1).
- si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $rx \notin \mathbb{Q}$ (Propriété 2).

Indication Utiliser à chaque fois, un raisonnement par l'absurde.

b. r et r' désignent deux nombres rationnels tels que $r' > r$.

On note $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.

Montrer que : • $y \notin \mathbb{Q}$ en utilisant les résultats du **a.** ; • $r < y < r'$.

c. Conclure.

Info

- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels (c'est-à-dire qu'ils peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$).
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

2 Minimum et minorant – Maximum et majorant

Cours 1

1 Comprendre la différence entre minimum et minorant

Principe : I désigne l'intervalle $[0 ; 4]$.

Puisque pour tout x de I, $x \geqslant 0$, on dit 0 est un *minorant* de I.

Comme de plus $0 \in I$, on dit que 0 est le *minimum* de I.

Dire si 0 est un minorant, puis s'il est le minimum des intervalles suivants :

a. $]0 ; 4]$; **b.** $[0 ; 4[$; **c.** $]0 ; 4[$; **d.** $[0 ; 10]$.

2 Comprendre la différence entre maximum et majorant

Dire si 4 est un majorant, puis s'il est le maximum des intervalles suivants :

a. $[0 ; 4]$; **b.** $]0 ; 4]$; **c.** $[0 ; 4[$; **d.** $]0 ; 4[$.

3 D'autres ensembles

Déterminer, lorsqu'ils existent, un minorant, un majorant, le minimum et le maximum des intervalles suivants :

a. $[-1 ; 2{,}5]$; **b.** $[-3 ; -1[$; **c.** $]-\infty ; 1]$; **d.** $]-5 ; +\infty[$.

4 Conclusion

I désigne un ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Compléter :

- Un nombre réel M est un majorant de I, si pour tout x de I, $x \ldots M$.
Si de plus, $M \in I$, on dit que M est le … de I.
- Un nombre réel m est un … de I, si pour tout x de I, $m \leqslant x$.
Si de plus, $m \ldots I$, on dit que m est le … de I.

3 Distance entre deux nombres réels

Cours 4

La maison d'Ali se situe entre son lycée et le marché. Ces trois lieux sont alignés sur la plage.
Son lycée est à 1 km au sud de sa maison, le marché à 1,5 km au nord, tandis que la plage est à 5 km au sud.
On positionne ces quatre lieux sur un axe gradué dont l'origine est la maison d'Ali.
On appelle x_L, x_M, x_P les abscisses respectives du lycée, du marché et de la plage.
On note $d(x_A\,;x_B)$ la distance sur cet axe entre les points A et B d'abscisses x_A et x_B.
L'objectif est de déterminer la formule qui donne la distance entre les points A et B.

1 Représenter un axe gradué correspondant à la situation.

2 Reproduire et compléter le tableau ci-contre.

3 Écrire la formule donnant $d(x_A\,;x_B)$ en fonction de x_A et x_B selon le signe de $x_B - x_A$.

Distance	Nombre de kilomètres	Expressions avec les lettres x_A et x_B	Notation $d(x_A\,;x_B)$
maison-plage			
maison-lycée			
lycée-marché			
marché-plage			
marché-maison			

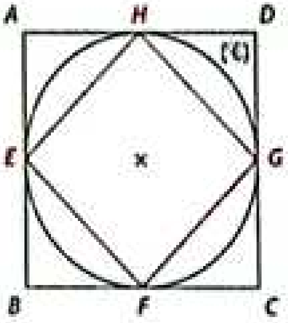
4 Approximation de π

Cours 5

> *π est l'un des plus célèbres nombres irrationnels. Vers 250 av. J.-C., Archimède a été le premier à décrire un algorithme permettant de donner un encadrement de π.*

La méthode proposée dans cette activité est celle utilisée par Archimède.
Elle consiste à encadrer successivement le périmètre d'un cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre 1 par les périmètres de polygones inscrits (en rouge) et circonscrits (en vert) à ce cercle.

1 Les carrés



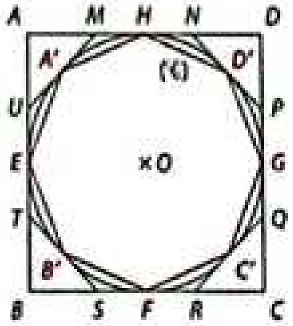
a. Reproduire la figure ci-contre dans laquelle $(\mathscr{C})$ désigne un cercle de diamètre 1.

b. Calculer :
- le périmètre de $(\mathscr{C})$;
- le périmètre du carré $ABCD$ circonscrit à $(\mathscr{C})$;
- le périmètre du carré $EFGH$ inscrit dans $(\mathscr{C})$.

c. En déduire que $2\sqrt{2} < \pi < 4$.

d. On donne $\sqrt{2} \approx 1{,}414$. En déduire une valeur arrondie à l'unité de π.

2 Les octogones réguliers



a. Reproduire la figure ci-contre dans laquelle $(\mathscr{C})$ désigne un cercle de diamètre 1.

b. $\mathscr{P}_1$ désigne le périmètre de l'octogone régulier $A'EB'FC'GD'H$ inscrit sans $(\mathscr{C})$.
- Justifier que $\mathscr{P}_1 = 8 \times A'H$.
- Utiliser le triangle $OA'H$ isocèle en O pour montrer que $A'H = \sin(22{,}5°)$.

En déduire $\mathscr{P}_1$.

c. $\mathscr{P}_2$ désigne le périmètre de l'octogone régulier $MUTSRQPN$ circonscrit à $(\mathscr{C})$.
- Justifier que $\mathscr{P}_2 = 16A'M$.
- Montrer que $A'A = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.
- Utiliser le triangle $A'MA$ rectangle en A' pour montrer que $A'M = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. En déduire $\mathscr{P}_2$.

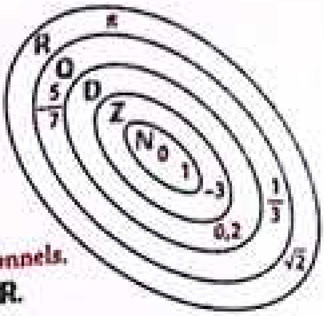
d. En déduire que $8\sin(22{,}5°) < \pi < 8(\sqrt{2}-1)$.

e. On donne $\sin(22{,}5°) \approx 0{,}383$. En déduire un encadrement de π.

9 Cours

1 ℝ et ses sous-ensembles

a Ensembles de nombres



Définitions

- N = {0 ; 1 ; 2 ; ...} est l'ensemble des nombres **entiers naturels**.
- Z = {... ; −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...} est l'ensemble des nombres **entiers relatifs**.
- D = {$a \times 10^{-n}$, $a \in Z$ et $n \in N$} est l'ensemble des nombres **décimaux**.
- Q = $\left\{\frac{a}{b}, a \in Z \text{ et } b \in N \text{ et } b \neq 0\right\}$ est l'ensemble des nombres **rationnels**.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, comme π et $\sqrt{2}$, les **irrationnels**.

L'ensemble de tous ces nombres est l'ensemble des nombres **réels** et se note **R**.
On a N ⊂ Z ⊂ D ⊂ Q ⊂ R.

b Majorant – Minorant

Définitions

A désigne un ensemble non vide contenu dans l'ensemble **R**.

- Un nombre réel *M* est appelé **majorant** de *A* si pour tout $x \in A$, $x \leq M$. Si de plus, $M \in A$, on dit que *M* est le **maximum** de *A*.

- Un nombre réel *m* est appelé **minorant** de *A* si pour tout $x \in A$, $x \geq m$. Si de plus, $m \in A$, on dit que *m* est le **minimum** de *A*.

2 Calculs usuels

a Opérations avec les fractions

Propriétés

Pour tous nombres réels *a*, *b*, *c* et *d* tels que $bd \neq 0$: • $\frac{a}{1} = a$; • $\frac{b}{b} = 1$; • $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;

• $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$; • $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$; • $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$; • $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ avec $c \neq 0$.

Remarque Si *a* et *b* sont deux nombres entiers n'ayant que 1 pour diviseur commun, on dit que $\frac{a}{b}$ est irréductible.

b Opérations avec les puissances

Notation

a désigne un nombre réel non nul et *n* un nombre entier naturel non nul.

- La puissance *n* de *a* se note $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$
- Par convention, lorsque $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Propriétés

Pour tous nombres réels *a* et *b* non nuls et tous nombres entiers naturels *n* et *m* non nuls :

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$; • $(a^m)^n = a^{mn}$;

• $(ab)^n = a^n b^n$; • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; • $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

c Opérations avec les racines carrées

Définition

La **racine carrée** d'un nombre réel positif *a* est l'unique nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à *a*.

Propriétés

Pour tous nombres réels *a* et *b* positifs :

• $a = (\sqrt{a^2}) = (\sqrt{a})^2$; • $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$.

Savoir-faire

1 Mener un calcul numérique

Déterminer la nature des nombres suivants.

$A=\frac{25}{3}\times\frac{18}{20}$; $B=-23{,}05\times10^4$; $C=\frac{145\times(10^5)^3}{3\times10^7\times10^8}$; $D=1+\frac{2}{\sqrt{2}}$; $E=\sqrt{500}-3\sqrt{20}+\sqrt{5}$; $F=(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3})$.

Solution commentée

$A=\frac{5\times\cancel{5}\times3\times\cancel{3}\times2}{\cancel{3}\times\cancel{5}\times2\times2}=\frac{5\times3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5$ donc A est un nombre décimal.

$B=-230\,500$ donc B est un nombre entier relatif.

$C=\frac{145\times10^{5\times3}}{3\times10^{7+8}}=\frac{145\times10^{15}}{3\times10^{15}}=\frac{145}{3}$ donc C est un nombre rationnel.

$D=1+\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=1+\frac{2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ donc D est un nombre irrationnel.

$E=\sqrt{100}\times\sqrt{5}-3\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}=10\sqrt{5}-3\times2\sqrt{5}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}$
donc E est un nombre irrationnel.

$F=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$
donc F est un nombre entier naturel.

méthode

- Simplifier au maximum les écritures pour reconnaître leur nature : entiers naturels, relatifs, décimaux, rationnels…
- Utiliser les règles de calculs (fractions, puissances, racines carrées).
- Utiliser les règles opératoires, notamment les priorités dans les calculs.

2 Mener un calcul littéral

On donne $S(x)=(5x+3)(2x-4)-(2x-4)^2$ pour tout nombre réel x.

a. Développer, puis réduire $S(x)$.

b. Factoriser $S(x)$.

Solution commentée

a. $S(x)=\underbrace{(5x+3)(2x-4)}_{\text{double distributivité}}-\underbrace{[(2x)^2-2\times2x\times4+4^2]}_{\text{identité remarquable}}$

$=10x^2-20x+6x-12-(4x^2-16x+16)$

$=10x^2-14x-12-4x^2+16x-16$

$=6x^2+2x-28$

On enlève le signe opératoire « − » devant la parenthèse.

On réduit.

b. $S(x)=(5x+3)(2x-4)-(2x-4)(2x-4)$

$=(2x-4)[(5x+3)-(2x-4)]$

$=(2x-4)[5x+3-2x+4]$

$=(2x-4)(3x+7)$

On fait apparaître le facteur commun.

On réduit : on enlève les parenthèses.

méthode

a. Pour développer, on utilise la distributivité et/ou les identités remarquables.

b. Pour factoriser, soit le facteur commun est évident, soit une identité remarquable apparaît.

Rappel

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

S'exercer

3 Déterminer la nature des nombres suivants.

$A=\frac{50}{9}\times\frac{21}{2}+3$; $B=\frac{1{,}5\times10^3}{0{,}5}$;

$C=\frac{3\times\left(10^2\right)^4\times10^{-5}}{6\times10^{14}}$; $D=\frac{5}{3}+\frac{-4}{9}$;

$E=\sqrt{100}-\sqrt{72}+6\sqrt{2}$; $F=(\sqrt{3}-5)^2+9\sqrt{3}$;

$G=\left(2^3\right)^5-4^{-1}$; $H=(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$.

4 Développer, puis réduire chaque expression.

$A(x)=(7+3x)(x-1)+(3-x)^2$;
$B(x)=(7x-1)(7x+1)-50x^2$;
$C(x)=(5x-8)(x^2+1)-(x-2)^2$;
$D(x)=x(2-x)+x^2(3-x)$.

5 Factoriser chaque expression.

$A(x)=3x(x-1)-(5+x)(x-1)$;
$B(x)=(x-3)^2-(5-x)^2$;
$C(x)=(2-x)^2-(2-x)(3x+1)$;
$D(x)=4x^2-20x+25$.

3 Ordre dans ℝ

Propriétés

a, b, c, d désignent des nombres réels.

- Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
- Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.
- Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.
- Si $0 < a < b$, alors $a^2 < b^2$; $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- Si $a < b < 0$, alors $a^2 > b^2$; $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Exemples

x et y désignent deux nombres réels tels que $0 < x < 3$ et $1 < y < 2$.

Encadrer $2x - 3y$ et $x^2 + \frac{1}{y}$.

- $0 < 2x < 6$ et $0 < x^2 < 9$.
- $3 < 3y < 6$; $-6 < -3y < -3$ et $\frac{1}{2} < \frac{1}{y} < 1$.

Ainsi, $-6 < 2x - 3y < 3$ et $\frac{1}{2} < x^2 + \frac{1}{y} < 10$.

4 Valeur absolue

a Distance entre deux nombres réels

On appelle distance entre deux nombres réels a et b, la distance sur la droite numérique entre les points A et B d'abscisses a et b. Elle se note $d(a\,;b)$.

$d(a\,;b) = AB$

Remarques Pour tous nombres réels a et b :

- $d(a\,;b) = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geqslant b \\ b-a & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$.
- $d(a\,;b) = d(b\,;a)$.

Exemple

- $d(0\,;-4) = OA = 4$
- $d(-4\,;2) = AB = 6$
- $d(-1\,;3) = BC = 4$

b Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre, noté $|a|$, égal à la distance entre 0 et a.

Propriétés

Pour tout nombre réel a et tout nombre réel r positif.

- $|a| = d(0\,;a) \geqslant 0$; • $|-a| = |a|$; • $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
- $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$; • $\sqrt{a^2} = |a|$; • $|a| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant a \leqslant r \Leftrightarrow a \in [-r\,;r]$

Exemples

- $\left|2 - \frac{1}{3}\right| = 2 - \frac{1}{3}$ car $2 - \frac{1}{3} > 0$;
- $|-\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} + 1$ car $-\sqrt{2} - 1 < 0$;
- Si x désigne un nombre réel tel que $|x| \leqslant \frac{5}{4}$, alors $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$ c'est-à-dire $x \in \left[-\frac{5}{4}\,;\frac{5}{4}\right]$.

c Règles de calcul

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et tout nombre entier naturel n :

- $|ab| = |a||b|$; • $|a^n| = |a|^n$;
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$; • $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ avec $b \neq 0$.
- Inégalité triangulaire : $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Exemples

- $|-2 \times (\sqrt{3} - 1)| = |-2| \times |\sqrt{3} - 1| = 2(\sqrt{3} - 1)$;
- $\left|\frac{1}{\pi - 4}\right| = \frac{|1|}{|\pi - 4|} = \frac{1}{4 - \pi}$;
- $|4^2| = |4|^2 = 4^2$;
- Si x désigne un nombre réel tel que $|x| \leqslant 2$, alors $|1 + x| \leqslant |1| + |x| \leqslant 3$.

Savoir-faire

6 Mener un calcul avec des valeurs absolues

Simplifier le nombre A et l'expression $B(x)$, où x désigne un nombre réel, en les écrivant sans valeurs absolues.

- $A=|5\sqrt{3}-10||\sqrt{3}-1|$;
- $B(x)=|x-3|-2|x+5|$.

Solution commentée

• $5\sqrt{3}-10<0$ donc $|5\sqrt{3}-10|=-(5\sqrt{3}-10)=10-5\sqrt{3}$;

$\sqrt{3}-1>0$ donc $|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$.

Ainsi, $A=(10-5\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)=10\sqrt{3}-10-5\sqrt{3}\times\sqrt{3}+5\sqrt{3}=-25+15\sqrt{3}$.

• $|x-3|=\begin{cases}x-3 & \text{si } x\geqslant 3\\ -(x-3) & \text{si } x\leqslant 3\end{cases}$; $\quad |x+5|=\begin{cases}x+5 & \text{si } x\geqslant -5\\ -(x+5) & \text{si } x\leqslant -5\end{cases}$.

On peut résumer ces informations dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$		$-(x-3)$		$-(x-3)$	0	$x-3$	
$\lvert x+5\rvert$		$-(x+5)$	0	$x+5$		$x+5$	

Ainsi, on a : $B(x)=\begin{cases}-(x-3)-2\times(-(x+5))=x+13 & \text{si } x\leqslant -5\\ -(x-3)-2\times(x+5)=-3x-7 & \text{si } -5\leqslant x\leqslant 3\\ (x-3)-2\times(x+5)=-x-13 & \text{si } x\geqslant 3\end{cases}$.

Méthode

1. Étudier le signe des nombres ou des expressions situé(e)s à l'intérieur des valeurs absolues.
2. Utiliser la propriété :
$$|a|=\begin{cases}a & \text{si } a\geqslant 0\\ -a & \text{si } a\leqslant 0\end{cases}.$$
3. Conclure.

7 Résoudre une équation ou inéquation du type $|x-a|=r$ ou $|x-a|\leqslant r$ ou $|x-a|>r$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a. $|x+1|=5$; **b.** $|x+4|\leqslant 3$; **c.** $|x+4|>3$.

Solution commentée

a. $|x+1|=5 \Leftrightarrow x+1=5$ ou $x+1=-5$

$\Leftrightarrow x=4$ ou $x=-6$.

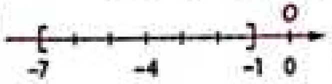
b.

En rouge, sont représentées les solutions de $|x+4|\leqslant 3$.

$|x+4|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant x+4\leqslant 3$

$\Leftrightarrow -7\leqslant x\leqslant -1 \Leftrightarrow x\in[-7;-1]$.

c.



En rouge, sont représentées les solutions de $|x+4|>3$.

$|x+4|>1 \Leftrightarrow x<-7$ ou $x>-1$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-7[$ ou $x\in]-1;+\infty[$.

Méthode

a désigne un nombre réel et r un nombre réel positif.

a. Les solutions de $|x-a|=r$ sont $a+r$ et $a-r$.

b. Les solutions de $|x-a|\leqslant r$ sont les nombres x appartenant à $[a-r;a+r]$.

c. Les solutions de $|x-a|>r$ sont les nombres x appartenant à $]-\infty;a-r[$ ou $]a+r;+\infty[$.

S'exercer

8 Écrire les nombres ou les expressions sans les valeurs absolues.

a. $|4-\sqrt{5}|+2|-2-3|$; **b.** $\left|\frac{\pi-4}{-3}\right|$;

c. $|\sqrt{2}-11|-|10-\sqrt{5}|$; **d.** $|\pi^2-2\pi|+|\pi-\sqrt{7}|$.

9 Résoudre les équations suivantes.

a. $|x-3|=7$; **b.** $|2x-5|=3$; **c.** $|-x+7|=\frac{1}{2}$.

10 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $|x-5|\leqslant 1$; **b.** $|x+10|>3$; **c.** $|2x+4|\leqslant 6$;

d. $|x-3|-9>0$; **e.** $|3x-9|<5$; **f.** $|5x-1|\geqslant 10$.

5 Calcul approché

a Encadrement d'un nombre réel

Définitions

- Réaliser un **encadrement d'un nombre réel** x, c'est déterminer deux nombres réels a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
- Le nombre $b - a$ est appelé **amplitude de l'encadrement**.

Exemple 1

Encadrement	Amplitude
$2 < \sqrt{7} < 3$	1
$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$	10^{-1}
$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$	10^{-3}

Exemple 2

x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$10 \leqslant x \leqslant 11 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 5.$$

Ainsi, par exemple : $11 \leqslant x + y \leqslant 16$ (encadrement d'amplitude 5).

et aussi $20 \leqslant 2x \leqslant 22$ et $1 \leqslant y^2 \leqslant 25$,
donc $11 \leqslant x + y^2 \leqslant 36$ (encadrement d'amplitude 25).

b Approximation décimale d'ordre n

Définitions

a désigne un nombre réel et n un nombre entier naturel.

- Si $a - 10^{-n} \leqslant x \leqslant a + 10^{-n}$, on dit que a est une **approximation décimale d'ordre n** de x.
- Si $a \leqslant x \leqslant a + 10^{-n}$, on dit que a est une **approximation décimale d'ordre n par défaut** de x.
- Si $a - 10^{-n} \leqslant x \leqslant a$, on dit que a est une **approximation décimale d'ordre n par excès** de x.

Exemples

Approximation décimale d'ordre	$\frac{17}{13}$		$-\frac{9}{17}$		π	
	Défaut	Excès	Défaut	Excès	Défaut	Excès
0	1	2	−1	0	3	4
1	1,3	1,4	−0,6	−0,5	3,1	3,2
2	1,30	1,31	−0,53	−0,52	3,14	3,15
3	1,307	1,308	−0,530	−0,529	3,141	3,142

c Arrondi d'ordre n

Principe

Pour obtenir l'arrondi d'ordre n d'un nombre donné, on discute selon la valeur du $(n+1)^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule :

- si ce chiffre est inférieur à 5, on conserve les n premiers chiffres ;
- sinon, on ajoute 1 au $n^{\text{ème}}$ chiffre.

Exemples

La calculatrice affiche $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.

- L'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ est 1,41 car $\sqrt{2} \approx \underbrace{1{,}41}\,\underbrace{4}$ et $4 < 5$.
- L'arrondi d'ordre 7 de $\sqrt{2}$ est 1,4142136 car $\sqrt{2} \approx 1{,}\underbrace{4142135}\,\underbrace{6}$ et $6 > 5$.

d Ordre de grandeur

Définitions

- L'**écriture scientifique** d'un nombre réel est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$, a ne possédant qu'un seul chiffre différent de 0 avant la virgule.
- Un nombre ayant l'écriture scientifique précédente a pour **ordre de grandeur** $b \times 10^p$, avec b arrondi d'ordre 0 de a.

Exemples

- L'ordre de grandeur de 1 001 est 10^3.
- L'ordre de grandeur de 0,000 0071 est 7×10^{-6}.

11 Déterminer un encadrement ou une approximation décimale

On donne $3{,}3166 < \sqrt{11} < 3{,}3167$ et $3{,}6055 < \sqrt{13} < 3{,}6056$.

a. Donner un encadrement de $\sqrt{143}$ et de $2\sqrt{11} - \sqrt{13}$.

b. En déduire une approximation décimale d'ordre 2 de ces nombres.

Solution commentée

a. • $\sqrt{143} = \sqrt{11 \times 13} = \sqrt{11} \times \sqrt{13}$,
donc $3{,}3166 \times 3{,}6055 < \sqrt{143} < 3{,}3167 \times 3{,}6056$
c'est-à-dire $11{,}9580 < \sqrt{143} < 11{,}9587$.

• $\begin{cases} 2 \times 3{,}3166 < 2\sqrt{11} < 2 \times 3{,}3167 \\ -3{,}6056 < -\sqrt{13} < -3{,}6055 \end{cases}$

donc $6{,}633\,2 < 2\sqrt{11} < 6{,}6334$ d'après les propriétés du paragraphe 5 du cours.
Ainsi, par addition termes à termes : $3{,}0276 < 2\sqrt{11} - \sqrt{13} < 3{,}0279$.

b. • On a montré que $11{,}\underline{95}\,8 < \sqrt{143} < 11{,}\underline{95}\,87$.
Or, $8 \geqslant 5$, donc 11,96 est l'approximation décimale par excès d'ordre 2 de $\sqrt{143}$.

• On a montré que $3{,}\underline{02}\,76 < 2\sqrt{11} - \sqrt{13} < 3{,}\underline{02}\,79$.
Or, $7 \geqslant 5$, donc 3,03 est l'approximation décimale par excès d'ordre 2 de $2\sqrt{11} - \sqrt{13}$.

Méthode

- Repérer les calculs prioritaires et procéder étape par étape.
- Utiliser les règles de comparaison : somme, opposé, produit, etc., pour établir un encadrement.
- Donner une approximation décimale d'ordre *n* en discutant selon la valeur du $(n+1)^{ème}$ chiffre.

12 Donner un ordre de grandeur

On donne $A = 97{,}9$; $B = 4\,013{,}04$; $C = 0{,}0035$ et $D = 7{,}3 \times 10^{-5}$.

a. Donner l'ordre de grandeur de *A* ; *B* ; *C* et *D*.

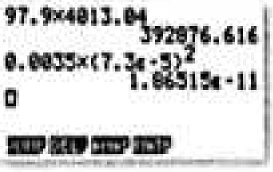
b. Utiliser la calculatrice pour donner l'ordre de grandeur de *AB* et CD^2.

Solution commentée

a. $A = 9{,}79 \times 10^1$, donc l'ordre de grandeur *A* est $10 \times 10^1 = 10^2$.
$B = 4{,}01304 \times 10^3$, donc l'ordre de grandeur de *B* est 4×10^3.
$C = 3{,}5 \times 10^{-3}$, donc l'ordre de grandeur de *C* est 4×10^{-3}.
$D = 7{,}3 \times 10^{-5}$, donc l'ordre de grandeur de *D* est 7×10^{-5}.

b. • La calculatrice affiche $AB \approx 3{,}9 \times 10^5$, donc l'ordre de grandeur de *AB* est 4×10^5.

• La calculatrice affiche $CD^2 \approx 1{,}8 \times 10^{-11}$, donc l'ordre de grandeur de CD^2 est 2×10^{-11}.



```
97.9×4013.04
                392876.616
0.0035×(7.3e-5)²
               1.86515e-11
0
```

Méthode

Pour déterminer l'ordre de grandeur d'un nombre :

1. l'écrire sous forme scientifique : $a \times 10^p$;
2. si l'arrondi d'ordre 0 de *a* est *b*, alors l'ordre de grandeur de *a* est : $b \times 10^p$.

S'exercer

13 *x* désigne un nombre tel que $0{,}1 < x < 0{,}5$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $3 + 5x^2$.

14 a. Déterminer les arrondis d'ordre 0 et 1 du volume d'une sphère de rayon 15 cm.
b. Déterminer les arrondis d'ordre 0 et 1 du volume d'un cône de révolution de hauteur 3 cm et de rayon de base 5 cm.

15 Donner l'ordre de grandeur des nombres suivants :
a. $503{,}4 \times 10^{-3}$; b. $1\,251 \times 10^7$; c. $83{,}01 \times 10^{11}$.

16 Déterminer l'ordre de grandeur en mètres des données suivantes :
a. Rayon de la Terre : $R_T = 65 \times 10^2$ km ;
b. Rayon du Soleil : $R_S = 1{,}7 \times 10^9$ km ;
c. Rayon du Jupiter : $R_J = 7 \times 10^5$ km.

9 Exercices d'entraînement

Ensembles de nombres

Réponses rapides

17 Reproduire et compléter le tableau suivant en mettant une croix dans la case lorsque le nombre appartient à l'ensemble.

	N	Z	D	Q	R
3,14					
$-\sqrt{16}$					
$2{,}17\times10^4$					
5π					
$\dfrac{\sqrt{4}}{3}$					
$\dfrac{112}{-4}$					
$1+\dfrac{1}{3}$					

18 Reproduire et compléter les pointillés à l'aide des symboles ∈ ou ∉.

a. 11 … N ;　b. 11 … Z ;　c. 0,33 … D ;

d. $\frac{1}{3}$ … D ;　e. $\sqrt{7}$ … Q ;　f. $\sqrt{9}$ … Z ;

g. 413×10^{-2} … Z ;　h. $\frac{5}{4}\times10^2$ … Q ;　i. 0 … Z ;

j. $(\sqrt{3})^2+1$ … N ;　k. $\frac{\pi}{3{,}14}$ … N ;　l. $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ … D.

19 a. Donner un nombre entier non naturel.

b. Donner un nombre rationnel non décimal.

c. Donner un nombre réel positif non rationnel.

d. Donner un nombre décimal négatif non entier.

20 Dans chaque cas, déterminer la nature du nombre, c'est-à-dire le plus petit ensemble parmi N, Z, D, Q et R, auquel il appartient.

a. $\frac{-18}{6}$;　b. $3\sqrt{2}\times\sqrt{2}$;　c. $\frac{1{,}21}{1{,}1}\times10^{-3}$;

d. $\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+\frac{2}{3}$;　e. $\frac{\sqrt{25}}{3}$;　f. $\frac{-4\pi}{-\pi}$;

g. $\frac{5}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{25}{3}$;　h. $\frac{9\times(10^4)^3\times4^7}{10^7\times12\times10^5}$;　i. $(3-\sqrt{2})^2$.

21 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. L'opposé d'un nombre entier relatif est un nombre entier naturel.

b. L'inverse d'un nombre entier naturel non nul est un nombre décimal.

c. La racine carrée d'un carré est un nombre entier naturel.

d. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

Calculs numériques

Réponses rapides

22 Écrire chaque nombre, sous forme d'une fraction irréductible.

a. $1-\frac{1}{20}+\frac{2}{5}$;　b. $4\times\frac{7}{25}\times\left(9-\frac{2}{3}\right)$;

c. $\dfrac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}}$;　d. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)-1$.

23 Simplifier au maximum chaque nombre.

a. $\frac{10^2\times15\times2^3}{5\times4\times10}$;　b. $\frac{9\times(10^3)^4\times7^2}{10^{12}\times21}$;

c. $2\sqrt{36}-3\sqrt{25}+\sqrt{2}$;　d. $\sqrt{400}+\sqrt{16}-\sqrt{81}$.

24 Dans chaque cas, montrer que les quatre nombres sont égaux.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;　$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}}$;　$\frac{1}{9}+\frac{2}{6}$;　$\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{9}$;

b. $(-\sqrt{3})^2$;　$\frac{21}{7}$;　$1+1+\frac{1}{2}$;　$\frac{0{,}3\times(10^4)^2}{10^7}$.

25 Écrire chaque nombre sous forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{4}{7}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{2}\right)$;　b. $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{7}\times\frac{14}{15}}{\frac{7}{6}+1+\frac{12}{5}}$;

c. $\frac{7}{16}\times\left(\frac{2}{7}\right)^2-\frac{11}{7}+\frac{44}{5}$;　d. $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}+\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}$.

26 Écrire chaque nombre sous la forme d'un produit de nombres premiers.

a. $\frac{2^7\times3^7\times7\times25^3\times11}{3^{-4}\times2^3\times9^2\times8}$;　b. $\frac{12^3\times5\times(-9)^4\times21}{10^3\times(7\times5^3)^{(-2)}}$.

▸ Un nombre entier naturel non nul est premier s'il ne possède que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

27 Écrire chaque nombre sous la forme scientifique.

a. $59\,000\times0{,}032$;　b. $5\times10^7\times4{,}1\times10^{-4}$;

c. $\frac{36\times10^5\times0{,}4}{4^2\times3\times10^3}$;　d. $\frac{15{,}5\times(10^4)^2\times0{,}7}{(10^{-2})^3\times5}$.

28 Écrire chaque nombre sous la forme $a+b\sqrt{5}$ avec a et b des nombres entiers relatifs.

a. $\sqrt{80}-4\sqrt{125}+3\sqrt{45}$;　b. $(3+\sqrt{5})^2$;

c. $(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})$;　d. $\frac{(1-\sqrt{5})^2-1}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}$.

29 Écrire chaque nombre sous la forme $a+b\sqrt{c}$, avec a et b des nombres entiers relatifs et c un nombre entier naturel le plus petit possible.

a. $7\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{200}$; b. $(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{3}-2)^2$;

c. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}-5\sqrt{48}$; d. $-\sqrt{28}+\sqrt{63}+2\sqrt{700}$.

30 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. $1+\dfrac{1}{\sqrt{13}}-13$ est un nombre entier naturel.

b. $\sqrt{\sqrt{7}-1}\times\sqrt{\sqrt{7}+1}$ est un nombre entier relatif.

c. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ est un nombre décimal.

d. $\dfrac{1-\dfrac{1}{\pi}}{1+\dfrac{1}{\pi}}+\dfrac{\pi^2-\pi}{\pi^2+\pi}$ est égal à 1.

31 a. Montrer que $\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$ est un nombre décimal.

b. Montrer que $\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ est un nombre entier naturel.

Calculs littéraux

Réponses rapides

32 Pour $x=3$ et $y=-1$, calculer chaque nombre.

a. $2x-y$; b. x^2-y^2 ; c. $x^3-\dfrac{1}{y}$.

33 Développer, puis réduire chaque expression.

a. $2x(x-3)$; b. $7(5-2x)$; c. $x(7-x)+2x^2$.

34 Factoriser chaque expression.

a. $4x-8$; b. x^2+3x ; c. $5x^2+25x-10$.

35 Pour $a=\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{4}{7}$ et $c=-\dfrac{1}{5}$, calculer chaque nombre.

a. $4a-14b$; b. $\dfrac{1}{a}(7b-5c)$; c. $\dfrac{a+c}{7b+5c}$.

36 a et b désignent deux nombres réels tels que $a^2+b^2=1$.
Montrer que :

a. $(a+b)^2+(a-b)^2=2$; b. $a^6+3a^2b^2+b^6=1$.

37 x et y désignent deux nombres réels tels que $x+y=10$ et $xy=4$. Calculer :

a. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$; b. $5x(1+y)+y(5-2x)$.

38 Montrer chacune des égalités suivantes :

a. Pour $x\neq-2$, $x+1-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

b. $x>2$, $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$.

39 Développer, puis réduire chaque expression.

a. $(5x+1)(x-2)-2x(x-3)$; b. $(5x-1)^2+(x-1)(2-x)$;

b. $3x(x+4)-(x-1)^2$; c. $(2x+7)^2+x^2(x-3)$.

40 Factoriser chaque expression.

a. $(3x-1)(4x+1)+(x-5)(4x+1)$; b. $(4x-3)^2-x^2$;

c. $(5-2x)^2+3x(5-2x)$; d. $x(3x+4)-(3x+4)^2$;

e. $(5-7x)^2-(x-1)^2$; f. $9x^2+6x+1$.

41 On donne $A(x)=3x(x+2)-(x+2)(5-6x)$.

1. Développer, puis réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Choisir la meilleure écriture de $A(x)$ pour calculer :

a. $A(-2)$; b. $A\left(\dfrac{5}{9}\right)$; c. $A(0)$.

42 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 1.
- Élever le tout au carré.
- Soustraire le carré du nombre choisi.
- Écrire le résultat.

1. Calculer la valeur exacte du résultat lorsque le nombre choisi est : a. 1 ; b. -5 ; c. $\dfrac{1}{2}$; d. $\sqrt{2}$.

2. Melum affirme qu'il y a une méthode rapide pour calculer le résultat. Il dit qu'il suffit de prendre le double du nombre choisi et d'ajouter 1. A-t-il raison ? Justifier.

43 Une fraction est dite unitaire si son numérateur est égal à 1.

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul :

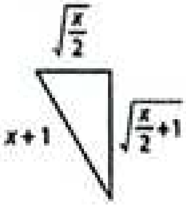
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}.$$

2. En déduire deux décompositions en fractions unitaires des nombres :

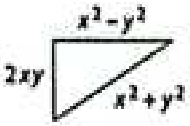
a. 1 ; b. $\dfrac{1}{10}$; c. $\dfrac{1}{10\,000}$; d. $\dfrac{1}{7}$.

44 x et y désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $x>y$.
Les triangles ci-dessous sont-ils rectangles ? Justifier.

a.



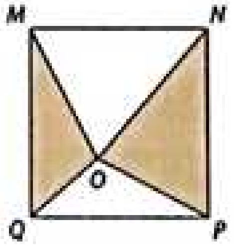
b.



45 *MNPQ* désigne un carré dont chaque côté mesure 10 cm. *O* est un point mobile à l'intérieur du carré. x désigne la longueur de la hauteur issue de *O* dans le triangle *MOQ*.

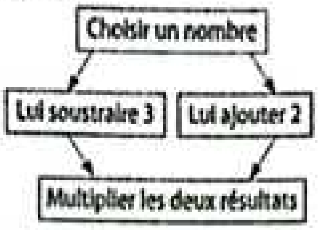
a. Exprimer l'aire colorée en orange en fonction de x.

b. La comparer à l'aire du carré *MNPQ*. Que remarque-t-on ?



Exercices d'entraînement

46 Voici un programme de calcul.
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.



a. Lorsque le nombre choisi est un entier relatif, le résultat est un nombre entier naturel.
b. Lorsque le nombre choisi est un nombre irrationnel, le résultat est un nombre irrationnel.
c. Il existe seulement deux nombres pour lesquels le résultat est nul.

Ordre dans $\mathbb{R}$

Réponses rapides

47 Dans chaque cas, comparer les nombres.

a. $\frac{7}{11}$ et $\frac{16}{33}$; b. $\frac{5}{12}$ et $\frac{7}{18}$; c. $\frac{13}{6}$ et $\frac{13}{11}$;
d. 4^2 et 2^5 ; e. 3^5 et $(\sqrt{3})^8$; f. $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3{,}9}$.

48 Dans chaque cas, ranger les nombres dans l'ordre croissant.

a. $\frac{1}{26}$; $\frac{7}{13}$; 1 ; $\frac{25}{26}$; $\frac{14}{13}$; b. $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{1}{2}$;
c. $\frac{-11}{9}$; -1 ; $\frac{7}{3}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{11}{-18}$; d. $\sqrt{7}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{18}{6}}$; $\frac{11}{5}$; $\sqrt{16}$.

49 Ranger les nombres suivants dans l'ordre décroissant.

$$\frac{\sqrt{25}}{15}\ ;\quad \frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}}\ ;\quad \frac{5\times10^3\times10^7}{(10^4)^2\times10}\ ;\quad (\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}.$$

50 Comparer les nombres suivants à l'aide de leurs carrés.
a. $7\sqrt{2}$ et $2\sqrt{7}$; b. -10 et $-6\sqrt{10}$; c. $2+\sqrt{3}$ et $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

51 On donne $X=\sqrt{5-2\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.
a. Quel est le signe de X ?
b. Calculer X^2 ; en déduire la valeur de X.

52 On donne :

$$A=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\quad B=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\quad \text{et}\quad C=\sqrt{5}-1.$$

Dans chaque cas, ranger les nombres dans l'ordre croissant.
a. A ; A^2 ; A^3 ; b. B ; B^2 ; B^3 ; c. C ; C^2 ; C^3.

53 On donne :

$$E=123\,456\,789-\frac{1}{123\,456\,789}\ \text{et}\ F=123\,456\,788-\frac{1}{123\,456\,788}.$$

Comparer E et F :
a. en calculant $E-F$ à l'aide de la calculatrice ;
b. en effectuant un calcul à la main.

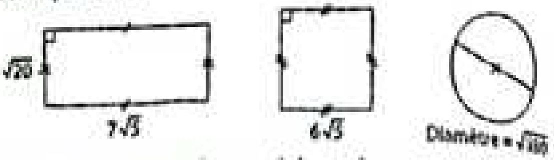
54 a. Comparer $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n+1}{n+2}$ avec $n\in\mathbb{N}$.
b. Application Comparer $\frac{50\,000}{50\,001}$ et $\frac{49\,999}{50\,000}$.

55 a. a, b et c désignent des nombres réels strictement positifs.
Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$.
b. Application Comparer $\frac{5{,}5}{3{,}5}$ et $\frac{\sqrt{2}+7{,}5}{\sqrt{2}+5{,}5}$.

56 x désigne un nombre réel strictement négatif.
Comparer : a. $\frac{5x}{7}$ et $\frac{3x}{4}$; b. $\frac{5}{7x}$ et $\frac{3}{4x}$.

57 a et b désignent deux nombres réels positifs.
Comparer $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ en comparant leurs carrés.

58 Un rectangle, un carré et un cercle ont été tracés à main levée par Acha.



Comparer leurs périmètres, puis leurs aires.

Majorant – Minorant – Maximum – Minimum

Réponses rapides

59 Pour chaque intervalle, déterminer, lorsqu'il existe, un majorant, un minorant, le maximum et le minimum.
a. $[0\,;10]$; b. $[-3\,;28[$; c. $]1\,;4[$
d. $]-\infty\,;0]$; e. $[-5\,;+\infty[$; f. $]-2\,;+\infty[$.

60 Donner un intervalle :
a. majoré et minoré ; b. minoré et non majoré ;
c. majoré et ayant un minimum ; d. non minoré et non ayant un maximum.

Pour les exercices 61 à 63, déterminer lorsqu'il existe le minimum et le maximum des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

61 • $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que :
$$0\leqslant 5x-1\leqslant 9.$$
• $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que :
$$x\geqslant 0\ \text{ et }\ -5\leqslant 3x+2<17.$$

62 • $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que :
$$x^2\leqslant 4.$$
• $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $x^2>100$.

63 • $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels n tels que $1\leqslant 2n-7\leqslant 12{,}5$.
• $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des nombres relatifs n tels que :
$$-10<n+2<9.$$

Valeurs absolues

Réponses rapides

64 Écrire chaque nombre sans les barres de valeur absolue.

a. $|1-\pi|$; b. $|-\sqrt{5}-0{,}1|$; c. $|-3{,}15+4{,}1|$.

65 Compléter.

a. Si $|x| \leqslant 5$, alors $\ldots \leqslant x \leqslant \ldots$.

b. Si $|x| > 3$, alors $x < \ldots$ ou $x > \ldots$.

66 Déterminer les solutions des équations d'inconnues x suivantes.

a. $|x| = 10$; b. $|x-3| = 5$; c. $|x+1| = 0$.

67 1. Compléter : $|x-5| = \begin{cases} x-5 \text{ si } x \geqslant \ldots \\ \ldots \text{ si } x \leqslant \ldots \end{cases}$.

2. Reprendre le raisonnement de la question 1. avec les valeurs absolues suivantes :

a. $|x+7|$; b. $|4x-1|$; c. $|x+1||x-2|$.

68 Reproduire et compléter le tableau suivant.

Intervalle	Encadrement	Valeur absolue	Schéma
$x \in [-1;3]$			
	$1 \leqslant x \leqslant 5$		
		$\|x-3\| \leqslant 4$	
			

69 Caractériser chaque schéma par une inégalité du type :

$|x-a| \leqslant r$; $|x-a| < r$; $|x-a| > r$ ou $|x-a| \geqslant r$.

a. 

b. 

c. 

d. 

70 1. Compléter : lorsque x désigne un nombre réel tel que $|x-4| \geqslant 5$, alors $\ldots \leqslant x \leqslant \ldots$.

2. Reprendre le raisonnement de la question 1. pour chaque cas.

a. Si $|x+8| < 3$, alors $\ldots < x \ldots$.

b. Si $|2x-3| \leqslant 1$, alors $\ldots \leqslant x \leqslant \ldots$.

c. Si $|5-x| > 1$, alors $x > \ldots$ ou $x < \ldots$.

d. Si $|1-3x| \geqslant 4$, alors $x \geqslant \ldots$ ou $x \leqslant \ldots$.

71 a. Déterminer les nombres entiers naturels x tels que :

$$|x| < 10.$$

b. Déterminer les nombres entiers relatifs x tels que :

$$|x| \leqslant 6.$$

c. Déterminer les nombres entiers naturels x tels que :

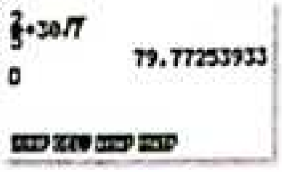
$$|7-x| < 4.$$

Calcul approché

Réponses rapides

72 1. x désigne un nombre réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$.
Encadrer : a. $2x-1$; b. $1-x^2$.
2. y désigne un nombre réel tel que $-3 \leqslant y \leqslant -2$.
Encadrer : a. $2-3y$; b. y^2-4.
3. z désigne un nombre réel tel que $\sqrt{2} \leqslant z \leqslant \sqrt{5}$.
Encadrer : a. z^2-1 ; b. $\frac{2}{z^2}$.

73 Jasmina a tapé un nombre sur sa calculatrice.
Donner un arrondi de ce nombre :
a. à l'ordre 3 ; b. à l'ordre 5.



$\frac{2}{5}+30\sqrt{7}$
79.77253933
0

74 Donner un ordre de grandeur de chaque nombre.

a. $1\,002 \times 999$; b. $0{,}075 \times 0{,}000\,21$; c. $90\,001 \times 95$.

75 Reproduire et compléter le tableau suivant en sachant que : $\frac{9}{7} = 1{,}285\,714\ldots$

Approximation décimale d'ordre	0	1	2	3
Par défaut				
Par excès				
Arrondi				

76 x et y désignent deux nombres réels.
Dans chaque cas, encadrer : $x+y$; $x-y$; x^2y ; $\frac{x}{y}$.

a. $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 3 < y < 4 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$.

77 x désigne un nombre réel tel que $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Encadrer : a. $(2x+3)^2$; b. $\frac{1}{7-3x}$.

78 x désigne un nombre réel tel que $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
Encadrer $x+1-\sqrt{x^2+1}$.

79 x désigne un nombre réel tel que $x \geqslant 2$.

Montrer que : a. $\frac{1}{1+x} \leqslant 3$; b. $\frac{3}{\sqrt{x+7}} \leqslant 1$.

80 Donner un encadrement des nombres suivants en utilisant les encadrements $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

a. $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$; b. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

81 La vitesse du son dans l'air n'est pas constante : elle varie avec la température selon la formule $v = 20\sqrt{273+T}$ (v en m/s et T en °C).

a. Donner l'arrondi à l'ordre 0 de la vitesse du son pour une température de 25 °C.

b. La vitesse du son est voisine de 320 m/s.
Quelle est la température du milieu ?

Faire le point

82 Nature d'un nombre

En transformant si besoin, les écritures des nombres suivants, préciser les ensembles des nombres auxquels ils appartiennent.

a. $\dfrac{21\times(10^{-3})^4}{3\times10^7}$; **b.** $\dfrac{7(\sqrt{3})^2}{6}\times\dfrac{3}{4}$;

c. $\sqrt{75}-5\sqrt{3}-10$; **d.** $\left(\pi+\dfrac{1}{\pi}\right)+\pi$;

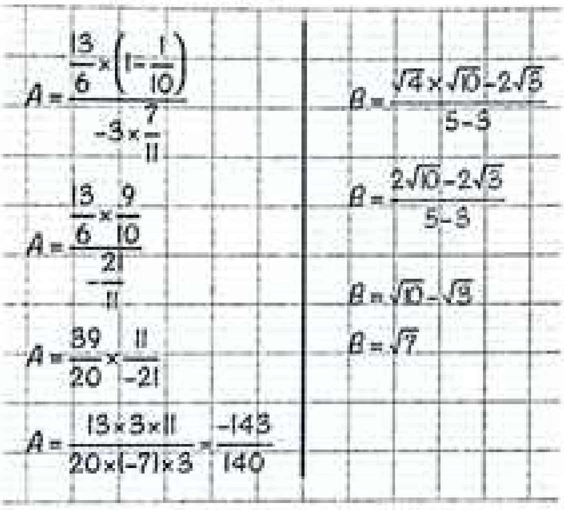
e. $\dfrac{-\sqrt{100}}{5}+\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{28}}{2}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{64}{49}}+\dfrac{4}{7}$.

83 Déceler une erreur

Le professeur a demandé à ses élèves de simplifier les nombres A et B suivants :

$$A=\frac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}{1-4\times\dfrac{7}{11}} \quad \text{et} \quad B=\frac{\sqrt{40}-7\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}.$$

Voici la copie de Namando :



$$A=\frac{\dfrac{13}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}{-3\times\dfrac{7}{11}}$$

$$A=\frac{\dfrac{13}{6}\times\dfrac{9}{10}}{-\dfrac{21}{11}}$$

$$A=\frac{39}{20}\times\frac{11}{-21}$$

$$A=\frac{13\times3\times11}{20\times(-7)\times3}=\frac{-143}{140}$$

$$B=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{5-3}$$

$$B=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{5-3}$$

$$B=\sqrt{10}-\sqrt{3}$$

$$B=\sqrt{7}$$

Indiquer les erreurs commises par Namando et donner les résultats corrects.

84 Factorisation

Voici un exemple de factorisation :

$(5-x)(3+2x)+(5-x)=\underline{(5-x)}\times(3+2x)+\underline{(5-x)}\times1$

$=(5-x)\,[(3+2x)+1]$

$=(5-x)(2x+4).$

Utiliser cet exemple pour factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=4\,(2x+1)^2+(2x+1)$; $B(x)=(3-4x)^2+3-4x$;

$C(x)=(5x-2)(x+1)-5x+2$; $D(x)=(1+x)-(1+x)^2$.

85 Inéquation du type $|ax+b|<r$

L'objectif est de résoudre l'inéquation (I) :

$$|6x+3|<18.$$

a. Montrer que l'inéquation $|6x+3|<18$ est équivalente à l'inéquation $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<3$;

b. Résoudre alors l'inéquation (I).

86 Histoire d'encadrement

1. Compléter la fiche ci-dessous qui répertorie les principales propriétés utilisées pour déterminer un encadrement.

- Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$ alors $a+\ldots\leqslant d+\ldots$.
- Si $a\leqslant b$ et $c\geqslant0$ alors $ac\ldots bc$.
- Si … et $c\leqslant0$ alors $ac\geqslant bc$.
- Si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $a^2\ldots b^2$ et $\sqrt{a}\ldots\sqrt{b}$.
- Si $a\leqslant b<\ldots$ alors $a^2\geqslant b^2$ et $\dfrac{1}{a}\ldots\dfrac{1}{b}$.
- Si $0<a\leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a}\ldots\dfrac{1}{b}$.

2. x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$-3<x<-2 \quad \text{et} \quad 0{,}1<y<0{,}2.$$

Utiliser la fiche complétée à la question **1.** pour donner un encadrement des nombres suivants.

a. x^2+y^2 ; **b.** x^2y ; **c.** $\dfrac{y^2}{x}$.

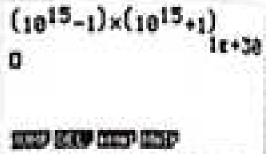
87 Erreur et calculatrice

On donne :

$a=10^{15}-1$ et $b=10^{15}+1$.

Le professeur demande de calculer ab.

Malun utilise la calculatrice.



```
(10^15-1)×(10^15+1)
                  1E+30
0
```

Dahirou pose le calcul et trouve, en utilisant une identité remarquable que $ab=10^{30}-1$.

Qui a raison ? Expliquer.

88 Problème d'arrondi

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi à l'ordre 3 de $\sqrt{7}$ et π.

2. Calculer le produit des deux arrondis obtenus précédemment.

3. a. Comparer ce nombre à l'arrondi d'ordre 3 de $\pi\sqrt{7}$.

b. Que peut-on en déduire ?

89 Intérêt des ordres de grandeur

La vitesse de la lumière dans le vide est :

$$299{,}79\times10^3\ \text{km/s}.$$

La distance entre la Terre et le Soleil est $149\,597\times10^6$ km.

a. Donner l'ordre de grandeur des nombres donnés.

b. En déduire un ordre de grandeur du temps en secondes, puis en minutes mis par la lumière pour aller du Soleil à la Terre.

Se tester

Vrai-faux

Top chrono *(sans justification)*

30 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. $-\frac{10}{3}\times\frac{18}{5}+\sqrt{100}$ est un nombre entier relatif.	☐	☐
2. $\frac{2\times10^{13}\times3\times10^{5}}{6\times10^{-16}}+\frac{\sqrt{36}}{5}+\frac{6}{5}=101$.	☐	☐
3. En rouge, sont représentées les solutions de l'inéquation $\lvert x+2\rvert<2{,}5$.	☐	☐
4. Si $-3\leqslant a\leqslant-0{,}3$, alors $1\leqslant\frac{-3}{a}\leqslant10$.	☐	☐
5. Un minorant de $]-5\times10^{-3}\,;3{,}7\times10^{2}]$ est -6×10^{-3}.	☐	☐
6. L'ordre de grandeur de $(5\times10^{10})^2$ est 10^{21}.	☐	☐

Avec justification

31 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. $\frac{1}{\sqrt{17}+1}-\frac{1}{\sqrt{17}-1}$ est un nombre entier relatif.	☐	☐
2. Pour $x=\sqrt{3}$ l'expression x^2+x-3 est un nombre irrationnel.	☐	☐
3. Les solutions de l'inéquation $\lvert 3x-1\rvert>7$ sont les nombres réels x tel que $x>\frac{8}{3}$.	☐	☐
4. Si $-1{,}5\leqslant x\leqslant-0{,}5$ et $0{,}1\leqslant y\leqslant0{,}2$, alors $xy^2\in[-0{,}06\,;-0{,}05]$.	☐	
5. L'ensemble des entiers naturels dont le carré est inférieur à 1 500 a pour maximum 38.	☐	☐
6. L'ordre de grandeur de l'aire d'un disque de rayon 530 est 9×10^{5}.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

32 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Le nombre $\frac{-2}{5}+\sqrt{300}-3\sqrt{10}$ appartient à :
   a. $\mathbb{N}$; b. $\mathbb{D}$; c. $\mathbb{Z}$.

2. Si $x\in[1{,}1\,;1{,}2]$, alors $\frac{1-x}{2}$ appartient à :
   a. $]0{,}05\,;0{,}1[$; b. $]-0{,}1\,;-0{,}05[$; c. $]0\,;0{,}15[$.

3. La forme développée de $(5-x)(2x-1)$ est :
   a. $2x^2+11x-5$;
   b. $-2x^2+11x-5$;
   c. $-2x^2-11x+5$.

4. Les solutions de l'équation $\lvert x-1\rvert=2$ sont les nombres réels x tels que :
   a. -1 et 2 ; b. 3 et -1 ; c. 0 et -1.

5. L'inéquation $\lvert x\rvert\leqslant0$
   a. n'a pas de solution ;
   b. a pour solution 0 ;
   c. a pour solution tous les nombres réels.

Avec justification

33 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Pour tout nombre réel x tel que $x>1$, le nombre $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ est égal à :
   a. $2x$; b. 1 ; c. $x-\sqrt{x^2-1}$.

2. Pour tous nombres réels x et y tels que $\lvert x\rvert<\frac{1}{3}$ et $2<y<5$, le nombre $3x+y$ est compris entre :
   a. 0 et 6 ; b. 1 et 6 ; c. 2 et $\frac{-5}{3}$.

3. La forme factorisée de $9-25x^2-(3-5x)$ est :
   a. $(3-5x)(3+5x)$; b. $(3-5x)(2+5x)$;
   c. $(3-5x)(3+4x)$.

4. Les solutions de l'inéquation $\lvert 5x+1\rvert\leqslant1$ sont les nombres réels x tels que :
   a. $x\in\left[0\,;\frac{2}{5}\right]$; b. $x\in\left[\frac{-2}{5}\,;0\right]$; c. $x=0$ ou $x=\frac{-2}{5}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

9 Exercices d'approfondissement

94 Différence de carrés

1. Sans utiliser la calculatrice, calculer le plus rapidement possible.
a. $100^2 - 98^2$; b. $101^2 - 99^2$; c. $102^2 - 100^2$.
2. Vérifier que ces trois nombres sont divisibles par 4.
3. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $(n+2)^2 - n^2$ est divisible par 4.

95 Histoire d'arrondis

x et y désignent deux nombres réels qui vérifient les conditions

$$x + y = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

1. Calculer xy. En déduire que x et y n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ vérifient les deux conditions de l'énoncé.
3. À l'aide de la calculatrice :
a. donner les arrondis, notés x' et y', d'ordre 5 de x et y.
b. comparer l'arrondi d'ordre 5 de $x'^2 + y'^2$ à celui de $x^2 + y^2$.

96 Carré parfait et racine carrée

a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, si $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel, alors $\sqrt{n}$ est un nombre entier naturel.
b. Un nombre réel a est appelé carré parfait lorsqu'il existe un nombre entier naturel k tel que $a = k^2$.
Déduire de la question a. que si a est un nombre entier naturel non égal à un carré parfait, alors $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel.

Aide

- Utiliser un raisonnement par l'absurde.

97 Un ensemble de nombres

On note E l'ensemble des nombres réels de la forme $\sin(x)$ où x désigne la mesure, en degrés, d'un angle géométrique.
Cet ensemble est-il minoré ? majoré ? Justifier.

98 Nombres premiers

p désigne un nombre premier tel que $p \geqslant 3$.

On donne $X = \frac{p+1}{2}$ et $Y = \frac{p-1}{2}$.

a. X et Y sont-ils des nombres entiers naturels ? Justifier.
b. Calculer $X^2 - Y^2$. En déduire que tout nombre premier p, supérieur ou égal à 3, s'écrit comme la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs.

99 Nombres constructibles

Un nombre réel x est dit constructible s'il est possible, en utilisant la règle et le compas uniquement, de construire le point d'une droite orientée d'abscisse x.

1. Hombres rationnels

a. x désigne un nombre rationnel strictement positif.

- Justifier que $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$ et $b \neq 0$.
- Construire deux droites (d) et (d') sécante en O. On note I ; A_2 ; … ; A_a les points de (d) d'abscisses respectives 1 ; 2 ; … ; a et J ; B_2 ; … ; B_b les points de (d') d'abscisses respectives 1 ; 2 ; … ; b.
- Construire la parallèle à la droite $(A_a B_b)$ passant par le point J ; elle coupe le droite (d) en un point M.
- Montrer que $OM = \frac{a}{b}$; en déduire que x est constructible.

b. Adopter le raisonnement précédent, pour montrer qu'un nombre rationnel négatif est constructible.

2. Racines carrées

Il existe des nombres irrationnels constructibles.
- Quelle est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle dont les deux côtés égaux mesurent 1 ?
En déduire que $\sqrt{2}$ est constructible.
- Montrer que $\sqrt{5}$ est constructible.
- Montrer que si a désigne un nombre réel tel que $a \geqslant 0$ et a constructible, alors $\sqrt{a}$ est constructible.

100 Égalité de Lagrange

Montrer que pour tous nombres réels a, b, c, d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

101 Histoire de racines carrées

Montrer que pour tous nombres réels a et b tels que $a > b > 0$,

a. $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{ab}$; b. $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$.

102 Un drôle de nombre

a et b désignent deux nombres réels tels que $a \geqslant b \geqslant 0$.

On donne $A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

a. Justifier que A existe.
b. Calculer A^2.
c. En déduire la valeur exacte de A.

103 De nouvelles identités remarquables

1. a et b désignent deux nombres réels. Développer chacune des identités remarquables ci-dessous.
a. $(a-b)^3$; b. $(a+b)^3$;
c. $(a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$; d. $(a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$.
2. Sans calculatrice, en déduire les nombres suivants :
a. 101^3 ; b. $70^3 + 30^3$; c. $100^3 - 90^3$; d. 99^3.

104 Le débit sanguin

Les biologistes estiment que lorsque le corps est au repos, 13 % du sang débité par le cœur en une minute sert à irriguer le cerveau, 19 % à irriguer les reins. Le reste du sang, soit environ 3 500 mL, sert à irriguer le reste du corps.
Quelle quantité de sang le cœur débite-t-il au repos en une minute ? Donner un arrondi au cL.

105 Inégalités et valeurs absolues

1. Montrer que pour tous nombres réels x et y,

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|.$$

2. x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$|x| < 1 \quad \text{et} \quad |y| < 1.$$

a. Montrer que $|xy| < 1$, puis que $1 + xy > 0$.
b. Développer $(1+x)(1+y)$ et $(1-x)(1-y)$.
c. En déduire que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

106 Le nombre d'or

Le nombre d'or représentant la divine proposition est noté ϕ et est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

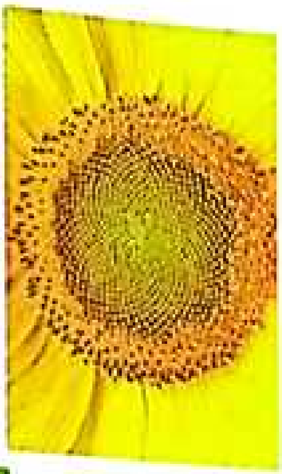
Montrer les égalités suivantes.

a. $\phi^2-\phi-1=0$;

b. $\phi-\frac{1}{\phi}=1$;

c. $\phi=\frac{1}{1-\frac{1}{1+\phi}}$;

d. $\phi^3-2\phi=1$.



Info

Les capitules d'une fleur de tournesol s'organisent selon des « spirales d'or ».

107 Fractions continues

On appelle fraction continue toute fraction de la forme :

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}}$$

où $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ désignent des nombres entiers naturels.

1. x désigne un nombre positif non nul tel que $x^2-x=1$.
Montrer que :

a. $x=1+\frac{1}{x}$; b. $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$.

2. Décomposer les nombres $\frac{11}{13}$ et $\frac{13}{11}$ en fractions continues.

3. On montré à l'exercice 106 que $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifiait $\phi^2-\phi=1$.
En déduire une décomposition du nombre d'or en fractions continues.

108 Un développement étonnant

1. x désigne un nombre réel. On donne :

$$A_1=(1-x)(1+x) \quad \text{et} \quad A_2=(1-x)(1+x+x^2)$$

et, pour tout n nombre entier naturel non nul,

$$A_n=(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n).$$

a. Développer A_1, A_2 et A_3, A_4.

b. Quelle conjecture peut-on faire pour le développement de A_n ?

c. Démontrer cette conjecture.

2. Application

a. Simplifier les expressions ci-dessous ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$).

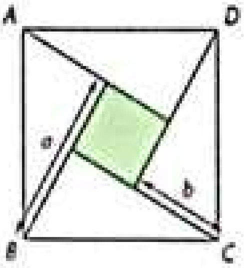
$$B=\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x^4} \ ; \qquad C=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{1-x^5}.$$

b. Sans calculatrice, en déduire le plus rapidement possible, la valeur de :

- $\frac{1+3+9+27+81}{1-243}$;
- $\frac{1+0{,}2+0{,}04+0{,}008}{1-0{,}0016}$.

109 Emboîtement de triangles

Dans le carré $ABCD$ ci-dessous, quatre triangles rectangles identiques ont été construits.



Montrer que l'aire colorée est égale à $(a-b)^2$.

110 Notion de groupe

E désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ muni d'une opération notée $*$.
On dit que $(E\,;*)$ est un groupe si :
- pour tous $x \in E, y \in E$: $x*y \in E$;
- pour tous $x \in E, y \in E, z \in E$: $x*(y*z)=(x*y)*z$;
- il existe un élément de E, noté e, appelé élément neutre, tel que pour tous $x \in E$: $x*e=e*x=x$;
- tout élément x de E admet un symétrique, noté x', tel que $x' \in E$ et $x*x'=x'*x=e$.

1. Généralités

a. Montrer que lorsqu'il existe un symétrique, il est unique.

b. Montrer que pour tous $a \in E$ et $b \in E$, l'équation $a*x=b$ admet une unique solution dans E.

2. Applications

a. Vérifier que $(\mathbb{R}\,;+)$ et $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ sont des groupes.

b. $(\mathbb{Z}\,;+)$ et $(\mathbb{N}\,;\times)$ sont-ils des groupes ?

c. On note $I=]-1\,;1[$ et on munit I de la loi $*$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in I \text{ et } y \in I : \ x*y=\frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(I\,;*)$ est un groupe.

111 L'ensemble des inverses

On note E l'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls.

1. Montrer que :

a. $1 \in E$;

b. pour tout $n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \frac{1}{n} \leqslant 1$.

2. Déduire de la question 1. que E est majoré et possède un maximum.

3. Montrer que E est minoré.

4. E possède-t-il un minimum ? Justifier.

112 Raisonnement par l'absurde

1. L'objectif est de montrer que pour tout nombre réel a, l'ensemble $]-\infty\,;a[$ n'a pas de maximum.
Supposons que $]-\infty\,;a[$ admette un maximum noté M.

a. Montrer que $\frac{a+M}{2} \in]-\infty\,;a[$.

b. En déduire une contradiction. Conclure.

2. Pour tout nombre réel b, l'ensemble $]b\,;+\infty[$ admet-il un minimum ? Justifier.

3. Pour tous nombres réels a et b tels que $a<b$, l'ensemble $[a\,;b[$ admet-il un minimum ? un maximum ? Justifier.

Exercices d'approfondissement

113 Avec la calculatrice

1. Saisir à la calculatrice $10^{26}+4-10^{25}$.
Le résultat est-il correct ? Expliquer.

2. Ali a tapé sur sa calculatrice $999\,999\,999^2-999\,999\,998^2$.

```
999999999²-999999998²
0
```

Le résultat est-il correct ? Expliquer.

114 Écriture propre et impropre

1. On donne $x=0{,}01010101\ldots$ et $y=7{,}01010101\ldots$
On dit que les développements décimaux de x et y sont périodiques.

a. Montrer que $100x=1+x$.

En déduire que $x=\dfrac{1}{99}$, puis la nature de x.

b. De la même manière, donner la valeur de y et sa nature.

2. En utilisant le même type de raisonnement, montrer que $0{,}99999999\ldots=1$.

3. Montrer que $1{,}11999999\ldots=1{,}12$.

Info

Ce n'est pas une erreur ! On dit que 0,99999… est l'écriture impropre de 1. Tout nombre décimal admet une écriture propre et une écriture impropre.

115 Suite de carrés

Pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, on donne :

$$S(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

a. Calculer $S(n)-\dfrac{1}{2}S(n)$.

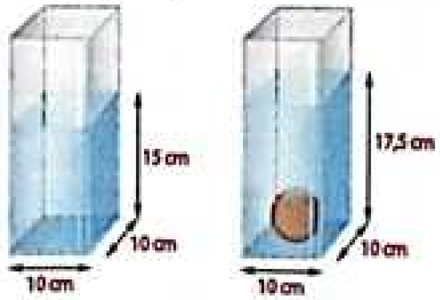
b. En déduire une expression simple de $S(n)$ en fonction de n.

c. Montrer que $1 \leqslant S(n) \leqslant 2$.

116 La masse volumique

La masse volumique, notée ρ, d'un corps est la masse par unité de volume.

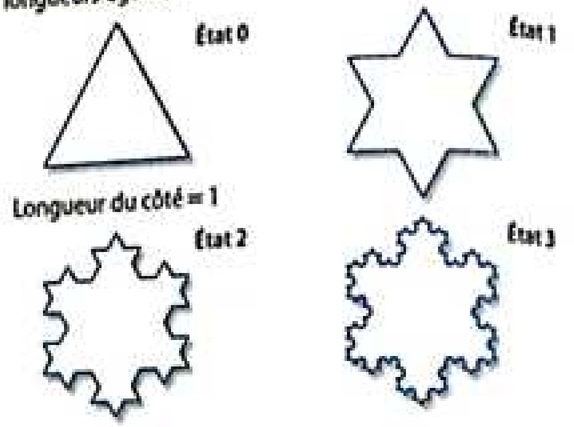
Pour déterminer la masse volumique d'un objet, on le pèse, puis on le place dans un récipient de forme parallélépipède contenant un certain volume d'eau et on évalue le volume occupé par l'objet.



Déterminer la masse volumique de cet objet.

117 Le flocon de Von Koch

Le flocon de Von Koch s'obtient en divisant successivement chaque côté d'un triangle équilatéral en trois segments de longueurs égales.



1. Le nombre de côtés

a. Compter le nombre de côtés des états 0, 1, 2 et 3.

b. Quel est le nombre de côtés à l'état 5 ? 10 ?

c. On note $C(n)$ le nombre de côtés à l'état n.

d. Recopier et compléter : $C(0)=\ldots$; $C(1)=\ldots$ et $C(2)=\ldots$.
Justifier que pour tout nombre entier naturel n :

$$C(n+1)=4\times C(n),\ \text{puis que } C(n)=3\times 4^n.$$

e. Justifier l'approximation décimale $2^{10}\approx 10^3$, puis donner une approximation décimale de $C(50)$ et $C(10)$.

2. La longueur d'un côté

a. Que vaut la longueur d'un côté à l'état 0, 1, 2, 3 et 4 ?

b. On note $L(n)$ la longueur d'un côté à l'état n.
Justifier que pour tout nombre entier naturel n :

$$L(n+1)=\frac{L(n)}{3},\ \text{puis que } L(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

3. Le périmètre du flocon

On note $P(n)$ le périmètre du flocon à l'état n.

a. Montrer que pour tout nombre entier naturel n,

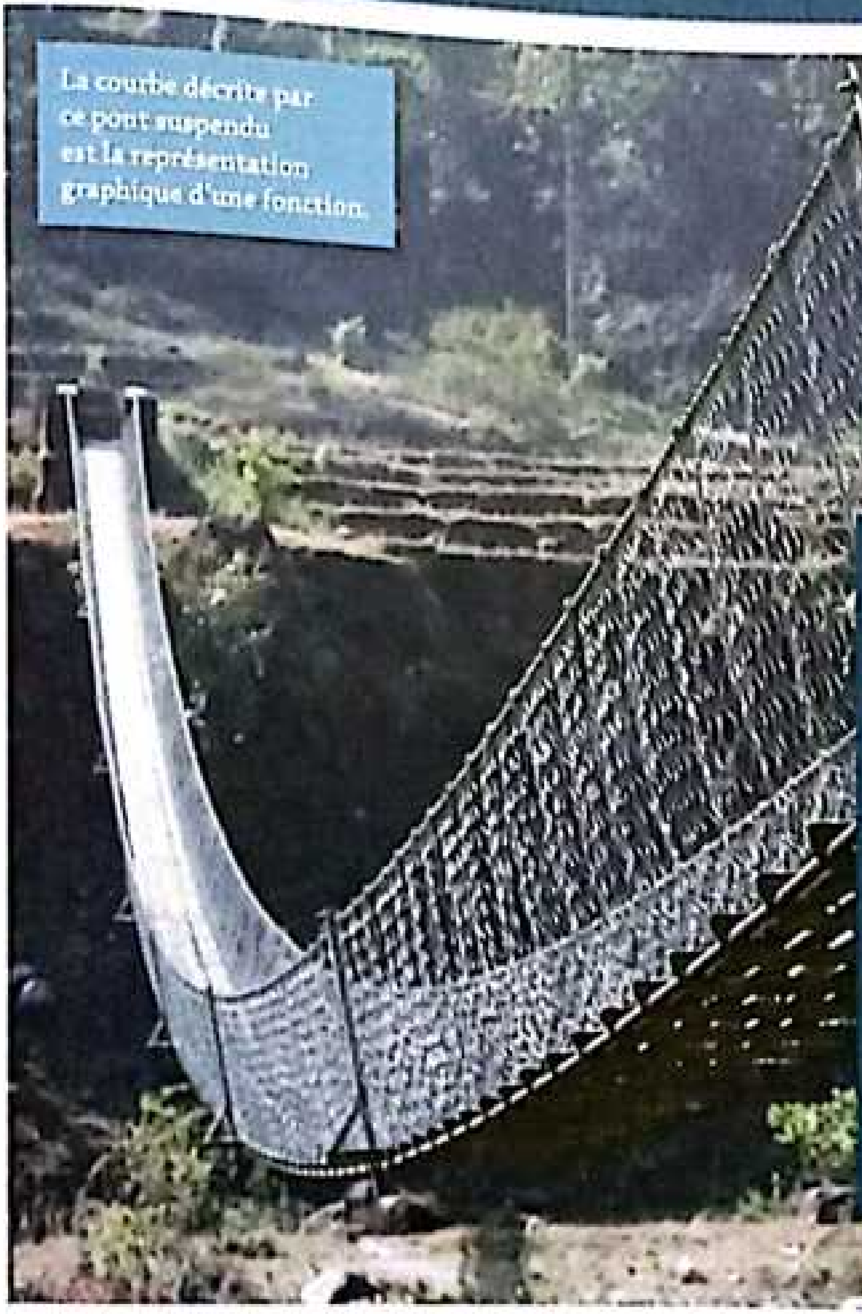
$$P(n)=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

b. Justifier l'approximation décimale $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10}\approx 18$, puis donner une approximation décimale de $P(50)$ et $P(100)$.

Info

Le nom « flocon de Von Koch » vient de la ressemblance de cette figure avec un flocon de neige.

10 fonctions – généralités



La courbe décrite par ce pont suspendu est la représentation graphique d'une fonction.

Le mot fonction (du latin *functio*, accomplissement, exécution) a été introduit en mathématiques par le savant et philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) à qui on doit les fondements de l'analyse mathématique. Il a construit la première machine à calculer « à cylindre cannelé ».

les objectifs du chapitre

- Reconnaître une fonction.
- Savoir calculer ou lire images et antécédents d'un nombre par une fonction.
- Savoir représenter graphiquement une fonction et utiliser ce graphique.
- Étudier les variations d'une fonction.
- Déterminer les extrema éventuels d'une fonction.
- Faire le lien entre table de valeurs, courbe représentative et tableau de variation d'une fonction.

Cours 1, 2, 3

1 Marées

Voici les hauteurs de marée, en mètres, relevées chaque heure pendant la journée, sur une côte de l'océan Atlantique.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Hauteur	0,6	0,8	1,2	1,8	2,3	2,5	2,6	2,5	2	1,5	0,8	0,5

Heure	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Hauteur	0,3	0,4	0,6	1,2	1,7	2,2	2,5	2,4	2,2	1,9	1,4	0,9

1 Réaliser un graphique

a. Placer dans un repère les points dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau (1 cm pour 2 heures en abscisse, 5 cm pour 1 mètre en ordonnée).

b. Relier les points tracés.

On a ainsi tracé l'allure de la courbe représentative de la fonction donnant la hauteur de marée suivant l'heure.

2 Variations

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

a. Quelle est la hauteur d'eau minimale :
- entre 0 h et 11 h ?
- entre 12 h et 23 h ?
- entre 0 h et 23 h ?

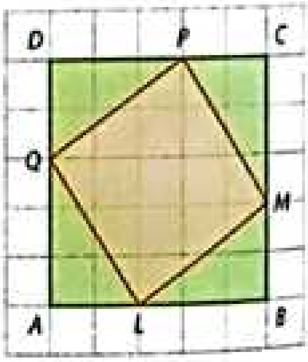
b. Quelle est la hauteur d'eau maximale :
- entre 0 h et 11 h ?
- entre 12 h et 23 h ?
- entre 0 h et 23 h ?

c. Quels sont les intervalles de temps pendant lesquels la marée est :
- montante (la hauteur d'eau augmente) ?
- descendante (la hauteur d'eau diminue) ?

Cours 4

2 Aire

ABCD désigne un carré de côté 5.
L, *M*, *P* et *Q* désignent respectivement les points des segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*] tels que $AL = BM = CP = DQ$.
On admet que le quadrilatère *LMPQ* est un carré et on pose $AL = x$.



1 Expérimentation sur des exemples

a. Sur une feuille à carreaux, faire la figure pour $x = 1$ en prenant le centimètre pour unité.

b. - Estimer l'aire de *LMPQ* à l'aide du quadrillage.
- Calculer cette aire.

c. Reprendre les questions précédentes avec $x = 3$.

2 Cas général

f désigne la fonction qui à *x* associe l'aire de *LMPQ*.

a. Quelles sont les valeurs possibles de *x* ?

b. Démontrer que l'aire de *LMPQ* est $f(x) = 2x^2 - 10x + 25$.

c. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. *Ces nombres sont les images de 1 et de 3 par f.*

Vocabulaire

L'ensemble de ces valeurs possibles pour *x* constitue l'ensemble de définition de la fonction.

3 Question à prise d'initiative

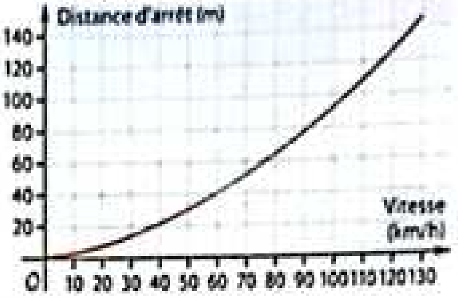
Par le moyen de votre choix (calculatrice, GeoGebra, calculs, ...), répondre à la question suivante :
L'aire de *LMPQ* peut-elle être égale à 20 ?

3 Distance d'arrêt

Cours 2, 4

La distance d'arrêt d'un véhicule en mètres est la somme de la distance parcourue pendant le temps de réaction et de celle parcourue pendant le freinage.

Voici le graphique de la distance d'arrêt en fonction de la vitesse.



1 Lectures graphiques

a. Donner les distances d'arrêt pour des vitesses de :

- 30 km/h ;
- 50 km/h ;
- 90 km/h ;
- 110 km/h ;
- 130 km/h.

b. Quel est le sens de variation de cette fonction ?

c. La distance d'arrêt est de 100 m. Quelle était la vitesse du véhicule ?

d. Le véhicule roule à 60 km/h et suit un autre roulant à la même vitesse.
À quelle distance de celui qui le précède doit-il rouler pour pouvoir s'arrêter sans risque de le percuter si ce dernier s'arrête brutalement ?

2 Avec la calculatrice

On admet que, pour un véhicule, la distance d'arrêt *d* en fonction de la vitesse *v* est donnée par :

$$d(v)=\frac{v^2}{155}+\frac{v}{3{,}6}.$$

L'objectif est de compléter le tableau de valeurs suivant afin de représenter graphiquement *d* dans un repère.

Vitesse v	30	50	90	110	130
Distance d'arrêt d					

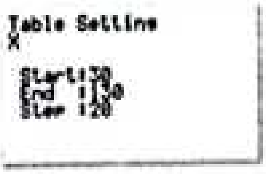
a. Utiliser les indications ci-dessous pour obtenir ce tableau de valeurs à la calculatrice.
(Pour plus de détail, voir p. 266 à 269.)

	CASIO	Texas Instruments
① Saisir la fonction	Taper MENU, choisir TABLE.	Taper Y=.

```
Table Func :Y=
Y1=X²÷155+X÷3.6
Y2:
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■X²/155+X/3.6
■
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

	CASIO	Texas Instruments
② Régler les paramètres de la table de valeurs	Taper F5 et compléter comme ci-dessous.	Taper 2nd TBLSET et compléter comme ci-dessous.

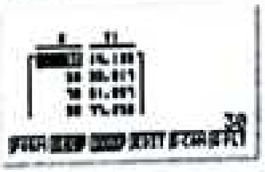


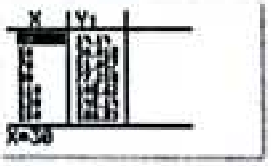
```
Table Setting
X

 Start:30
 End  :130
 Step :20
```

```
TABLE SETUP
 TblStart=30
 ΔTbl=20
Indpnt: Auto Ask
Depend: Auto Ask
```

	CASIO	Texas Instruments
③ Afficher la table de valeurs	Taper F6.	Taper 2nd TABLE.





```
X=30
```

b. Représenter graphiquement la fonction *d* dans un repère d'unités 1 cm pour 10 km/h en abscisses et 1 cm pour 20 m en ordonnées.

10 Cours

1 Définitions

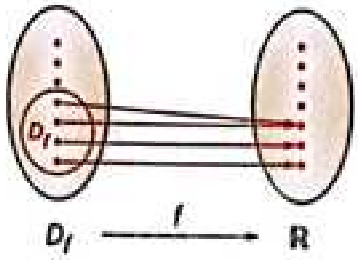
a Notion de fonction

Définitions

D_f désigne une partie de l'ensemble des nombres réels.

- Définir une **fonction** f sur D_f, c'est associer à tout nombre réel x de D_f un unique nombre réel noté $f(x)$.
- D_f est l'**ensemble de définition** de f.

Illustration



Notation

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Exemples

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 3$

Dans ce cas, $D_f = \mathbb{R}$.

$g : [-1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2\sqrt{x+1} - 3$

Dans ce cas, $D_g = [-1\,;+\infty[$.

b Représentation graphique

Définition

Le plan est muni d'un repère et f désigne une fonction définie sur D_f.
On appelle **courbe représentative** de f ou **représentation graphique** de f dans un repère, l'ensemble, noté $(\mathscr{C}_f)$, des points $M(x\,;f(x))$ où x est un élément de D_f.

Propriété

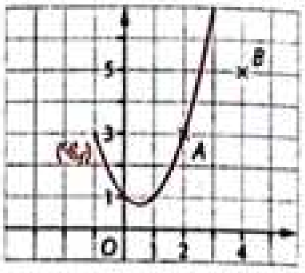
$$M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ \text{et} \\ y = f(x) \end{cases}$$

Exemple

f désigne la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = x^2 - x + 1$.

$A(2\,;3) \in (\mathscr{C}_f)$ car
$f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$.

$B(4\,;5) \notin (\mathscr{C}_f)$ car
$f(4) = 4^2 - 4 + 1 = 13$ et $13 \neq 5$.



c Coïncidence de deux fonctions

Définition

f et g désignent des fonctions définies sur un ensemble E.
On dit que les fonctions f et g sont **égales** ou qu'elles **coïncident** sur E si, pour tout élément x de E,

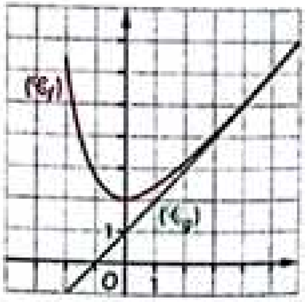
$$f(x) = g(x).$$

Exemples

- Les deux fonctions f et g, définies par $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$ et $g(x) = x + 1$ coïncident sur $]0\,;+\infty[$.

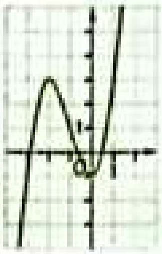
En effet, pour tout $x > 0$, on a :
$$\frac{x^2+x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x + 1.$$

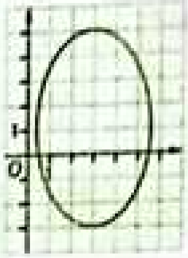
- Les deux fonctions f et g représentées ci-contre semblent coïncider sur $[4\,;6]$ et ne coïncident pas sur $[-2\,;2]$.



1 Reconnaître une fonction

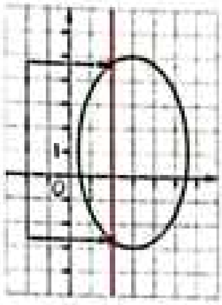
Parmi les graphiques ci-contre, lequel correspond à la représentation graphique d'une fonction ?





Solution commentée

L'important est l'unicité de $f(x)$ pour un nombre réel x donné. Il ne doit donc pas y avoir plusieurs points de $(\mathcal{C}_f)$ de même abscisse.
Cette condition, vérifiée pour le premier graphique, ne l'est pas pour le second.
Par exemple, pour $x = 2$, on a deux valeurs pour $f(x)$, comme le montre la figure ci-contre.
Ainsi, seul le premier graphique correspond à la représentation graphique d'une fonction.



Méthode

Vérifier qu'il n'y a pas plusieurs points de la courbe ayant la même abscisse.
On peut le visualiser aisément en déplaçant une règle placée verticalement sur la figure.

Remarque

Un contre-exemple suffit à démontrer qu'une propriété est fausse.

2 Tracer la représentation graphique d'une fonction

Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-3\,;4]$ par $f(x) = x^2$.

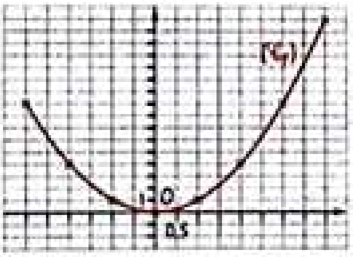
Solution commentée

1. On calcule les valeurs de $f(x)$ pour x de $[-3\,;4]$ avec un pas de 1 (c'est-à-dire de 1 en 1).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16

2. Unités :
   - sur l'axe des abscisses, l'intervalle est de 7 donc on peut prendre 2 cm pour unité ;
   - sur l'axe des ordonnées, les valeurs sont entre 0 et 16, donc on prendra 1 cm comme unité.

3. et 4. Voir la figure ci-dessous.



Méthode

1. Établir un tableau de valeurs de f en prenant des valeurs de x en nombre suffisant.
2. Si l'énoncé ne le précise pas, choisir des unités sur les axes permettant un tracé lisible et occupant la majeure partie de la feuille.
3. Placer les points dont les coordonnées sont dans le tableau.
4. Relier à la main (pas de règle !) les points placés. On obtient ainsi une allure de la représentation graphique de f.

Remarque

Le calcul des valeurs ainsi que le tracé du graphique seront facilités par l'utilisation de la calculatrice. Voir Activité 3 et à la fin du manuel, p. 266 à 269.

S'exercer

Pour les exercices **3** à **5**, tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction f sur l'ensemble D_f donné.

3 $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f =]0\,;10]$.

4 $f(x) = x^2 - 3x$; $D_f = [-2\,;2]$.

5 $f(x) = \sqrt{x+2}$; $D_f = [0\,;10]$.

6 f désigne la fonction définie sur $[-1{,}5\,;2]$ par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	$-1{,}5$	-1	0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

b. Tracer la représentation graphique de f dans un repère.

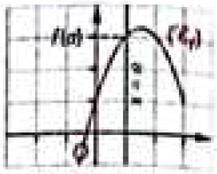
2 Image et antécédent(s) d'un nombre par une fonction

a Image d'un nombre

Définition

f désigne une fonction définie sur D_f
et a est un élément de D_f.
On appelle **image** de a par f le nombre réel $f(a)$.

Illustration
Graphiquement, l'image de a par f est l'ordonnée du point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite d'équation $x = a$.



Exemple
f désigne la fonction définie par $f(x) = x^2 + x - 5$. L'image de 2 par f est égale à 1 car $f(2) = 2^2 + 2 - 5 = 1$.

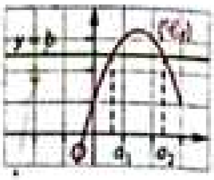
Remarques
- Dès que $a \in D_f$, l'image de a par f existe et est unique.
- Pour trouver l'image de a par f, il suffit de calculer $f(a)$, c'est-à-dire remplacer x par a dans l'expression $f(x)$.

b Antécédent(s) d'un nombre

Définition

f désigne une fonction définie sur D_f
et b est un nombre réel.
On appelle **antécédent(s)** de b par f le(s) nombre(s) réel(s) a tel(s) que $f(a) = b$.

Illustration
Graphiquement, les antécédents de b par f sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite d'équation $y = b$.



Exemple
f désigne la fonction définie par $f(x) = -3x + 5$.
Le nombre 2 est un antécédent de -1 par f car $f(2) = -3 \times 2 + 5 = -1$.

Remarques
- Pour tout nombre réel b fixé, il peut ne pas y avoir d'antécédent ou y en avoir plusieurs.
- Trouver par le calcul un antécédent de b par f, c'est résoudre dans D_f l'équation $f(x) = b$.

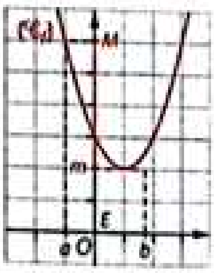
3 Image d'un ensemble par une fonction

a Image directe

Définition

f désigne une fonction définie sur D_f
et E est une partie de D_f.
On appelle **image** de E par f, l'ensemble noté $f(E)$, des images par f de tous les éléments de E.

Illustration
Sur cet exemple, $E = [a\,;b]$.
Lorsque x varie entre a et b, $f(x)$ prend toutes les valeurs de m à M.
$[m\,;M]$ est l'image de $[a\,;b]$ par f.



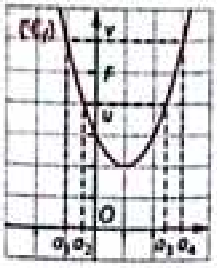
Remarque
Si $E = [a\,;b]$, l'image directe de E par f n'est pas toujours $[f(a)\,;f(b)]$.

b Image réciproque

Définition

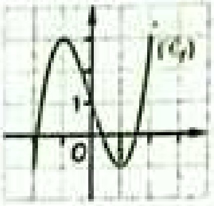
f désigne une fonction définie sur D_f
et F est une partie de $\mathbb{R}$.
On appelle **image réciproque** de F par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de F.

Illustration
Sur cet exemple, $F = [u\,;v]$.
Lorsque $f(x)$ varie entre u et v, x prend toutes les valeurs des intervalles $[a_1\,;a_2]$ et $[a_3\,;a_4]$.
$[a_1\,;a_2] \cup [a_3\,;a_4]$ est l'image réciproque de F par f.



7 Lire des informations sur un graphique

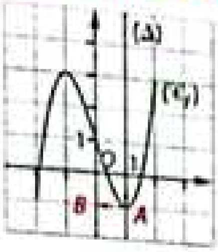
f désigne une fonction définie sur $[-2\,;2]$.
La courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f est dessinée dans le repère ci-contre.
Déterminer graphiquement :
a. l'image de 1 par f ;
b. les valeurs approchées des antécédents de 2 par f.



Solution commentée

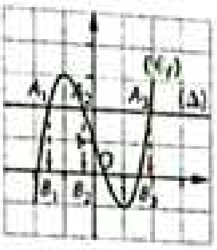
a.

L'image de 1 par f est donc -1, ce que l'on peut écrire $f(1)=-1$.



b.

Les antécédents de 2 par f sont donc $-1{,}5$; $-0{,}4$ et 1,9 ce que l'on peut écrire $f(x)=2$ lorsque $x \in -1{,}5\,;-0{,}4\,;1{,}9$.



Méthode

Image de a par f

1. Tracer la droite (Δ) parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x=a$. Elle coupe $(\mathscr{C}_f)$ en un point A.
2. Tracer la parallèle à l'axe des abscisses passant par A. Elle coupe l'axe des ordonnées en un point B.
3. Lire l'ordonnée de B.

Antécédent(s) de b par f

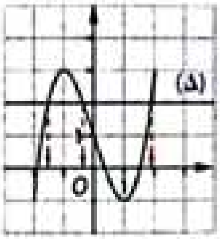
1. Tracer la droite (Δ) parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=b$. Si elle coupe $(\mathscr{C}_f)$, on note $A_1, A_2, \ldots,$ les points d'intersection.
2. Tracer les parallèles à l'axe des ordonnées passant par $A_1, A_2\ldots$ Elles coupent l'axe des abscisses en des points $B_1, B_2\ldots$
3. Lire les abscisses de $B_1, B_2\ldots$

8 Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) < m$

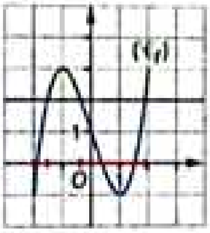
f désigne la fonction représentée dans l'exercice précédent.
Résoudre graphiquement, le plus précisément possible, $f(x) < 2$.

Solution commentée

1.



2.



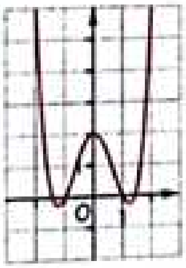
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=]-2\,;-1{,}5[\,\cup\,]-0{,}4\,;1{,}9[$, ce que l'on peut écrire $f(x)<2$ lorsque $x \in]-2\,;-1{,}5[\,\cup\,]-0{,}4\,;1{,}9[$.

Méthode

1. Chercher les antécédents de 2 par f en utilisant la méthode de l'exercice 7.
2. Repasser en couleur les portions de $(\mathscr{C}_f)$ solution, c'est-à-dire situées sous la droite d'équation $y=2$. Les solutions se lisent sur l'axe des abscisses.

S'exercer

9 Voici la représentation graphique d'une fonction définie sur $[-2\,;2]$.
a. Lire les images par f de -2, -1, 0, 1 et 2.
b. Lire les antécédents éventuels par f de -1, 0, 2 et 4.



10 f désigne la fonction définie sur $[-3\,;4]$ par :

$$f(x)=x^2-2x+3.$$

a. Tracer la représentation graphique de f dans un repère.
b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<6$.
En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 6$.

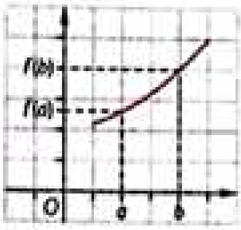
4 Variations d'une fonction

a Sens de variation

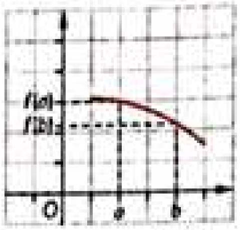
Définitions

f désigne une fonction définie sur D_f et I un intervalle inclus dans D_f.

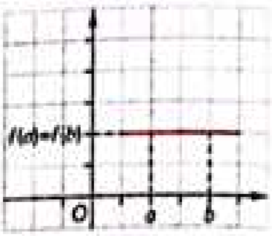
- f est dite **croissante** sur I lorsque pour tous a, b de I, si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$;



- f est dite **décroissante** sur I lorsque pour tous a, b de I, si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$;



- f est dite **constante** sur I lorsque pour tous a, b de I, si $a < b$ alors $f(a) = f(b)$;



- f est dite **monotone** sur I lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur I.

Remarque

On parle de monotonie stricte lorsque les inégalités entre $f(a)$ et $f(b)$ obtenues sont strictes.

b Tableau de variation

Principe

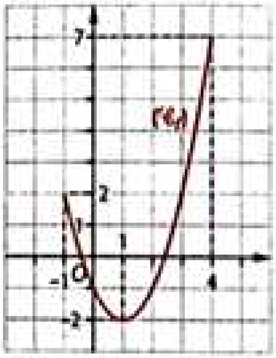
Le **tableau de variation** d'une fonction est un tableau qui regroupe toutes les informations concernant les variations de cette fonction sur son domaine de définition.

Exemple

f désigne la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.

Les variations de la fonction et les images de certaines abscisses sont indiquées dans le tableau de variation ci-dessous.

x	-1		1		4
$f(x)$	2	↘	-2	↗	7



c Maximum, minimum

Définitions

f désigne une fonction définie sur un intervalle I et a est un élément de I.

- Le nombre $f(a)$ est un **maximum** pour f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$;
- Le nombre $f(a)$ est un **minimum** pour f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$;
- Un **extremum** est soit un maximum, soit un minimum.

Exemple La fonction f du paragraphe b présente un minimum égal à -2.
En effet, pour tout x de $[-1 ; 4]$, $f(x) \geqslant -2$. Cet extremum est atteint pour $x = 1$.

Remarque La présence d'un extremum n'est pas systématique. Certaines fonctions n'admettent ni minimum, ni maximum.

Vocabulaire Pour les mots repris directement du latin, comme maximum, minimum, extremum, on utilise pour le pluriel la forme latine : *maxima*, *minima*, *extrema*.
Cependant, les formes francisées (maximums, minimums, extremums) sont admises.

11 Tracer une allure de courbe à partir d'un tableau de variation

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;3]$ dont le tableau de variation est donné ci-contre.

a. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

b. Préciser les extrema de f et en quels points ils sont atteints.

x	-2		0		2		3
$f(x)$	6	↘	-2	↗	0	↘	-2

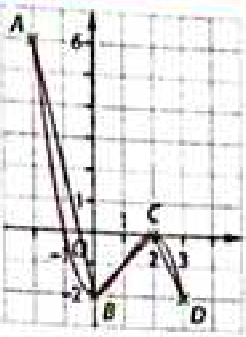
Solution commentée

a. 1. On place les points : $A(-2\,;6)$, $B(0\,;-2)$, $C(2\,;0)$ et $D(3\,;2)$.

2. Les tracés noir et rouge sont deux solutions possibles (il en existe d'autres).

b. f présente un maximum égal à 6 atteint pour $x=-2$ et un minimum égal à -2 atteint pour $x=0$ et $x=3$.

Remarque Dans ce genre de problème, la solution de joindre les points par des segments n'est pas la seule possible.



Méthode

a. 1. Placer dans le repère les points dont les coordonnées sont dans le tableau.

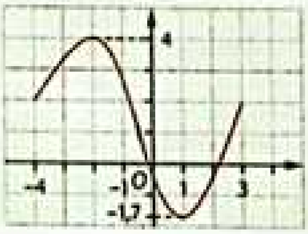
2. Relier à main levée les points placés en respectant les sens de variation du tableau.

b. Le maximum est la valeur de $f(x)$ la plus grande, le minimum la plus petite.

12 Dresser un tableau de variation à partir d'une courbe

f désigne la fonction définie sur $[-4\,;3]$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ donnée dans le repère ci-contre.

À l'aide des informations de ce graphique, dresser le tableau de variation de f et préciser ses extrema.



Solution commentée

1. Les bornes de D_f sont -4 et 3. Les changements de sens de variation s'effectuent lorsque $x=-3$ et lorsque $x=1$.

2. et **3.** f est croissante, décroissante puis croissante.

x	-4		-3		1		3
$f(x)$	-2	↗	4	↘	$-1{,}7$	↗	2

Le maximum est égal à 4 et le minimum est égal à $-1{,}7$.

Méthode

1. Inscrire sur la première ligne du tableau les bornes de D_f, puis les valeurs de x lues sur le graphique où f change de sens de variation.

2. En deuxième ligne, placer les flèches de variation sur les intervalles où f est monotone.

3. Inscrire les images des nombres de la première ligne aux extrémités des flèches.

S'exercer

13 Proposer deux allures de courbes différentes pour la fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	-6		-3		0		3		6
$f(x)$	4	↘	-3	↗	2	↘	-6	↗	4

14 f désigne la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par :

$$f(x)=x^2-4x+2.$$

a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.

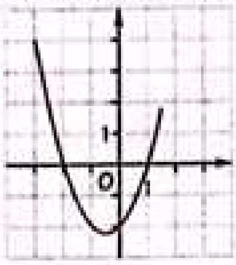
b. En déduire son tableau de variation.

Notion de fonction

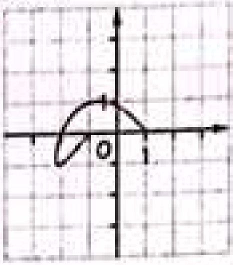
Réponses rapides

15 Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celles qui sont des représentations graphiques de fonctions.

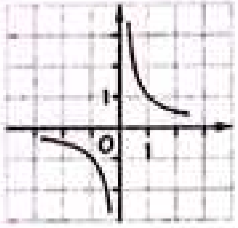
a.



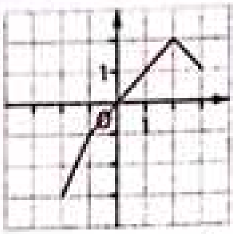
b.



c.



d.



16 Dire si les situations suivantes peuvent être modélisées par des fonctions.

a. Le périmètre d'un cercle dépend de son rayon.

b. À tout entier naturel, on associe ses diviseurs.

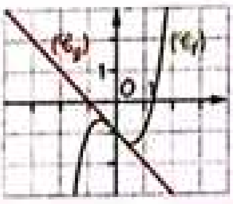
c. La masse d'un objet dépend de son volume.

17 Les fonctions f et g semblent-elles coïncider :

a. sur $[-1\,;0{,}5]$?

b. sur $[-0{,}2\,;0{,}2]$?

c. sur $[-2\,;2]$?



18 À tout nombre réel x, on fait correspondre le triple de son carré.

Donner l'expression de la fonction f ainsi définie.

19 Associer à chaque phrase la fonction correspondante.

Je choisis un nombre et :

Je le double •	• $f_1(x)=2x+3$
J'en prends la moitié •	• $f_2(x)=3x-4$
Je le double puis j'ajoute 3 •	• $f_3(x)=\frac{x}{2}$
J'ajoute 3 puis je double •	• $f_4(x)=3(x-4)$
Je soustrais 4 puis je triple •	• $f_5(x)=2x$
Je le triple puis je soustrais 4 •	• $f_6(x)=2(x+3)$

20 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- $f(x)=\sqrt{x-3}$;
- $g(x)=\sqrt{1-2x}$;
- $h(x)=\sqrt{x+1}$;
- $i(x)=\sqrt{x^2+2}$;
- $j(x)=\sqrt{(1-x)^2}$;
- $k(x)=(\sqrt{x+2})^2$.

21 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$;
- $g(x)=\dfrac{x+1}{x}$;
- $h(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$;
- $i(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

22 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- $f(x)=3x^3-2x^2+x+1$;
- $g(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+1}$;
- $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$;
- $i(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$.

23 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x|.$$

Parmi les fonctions données par les expressions ci-dessous, indiquer celles qui coïncident avec f sur $\mathbb{R}$.

- $f_1(x)=(\sqrt{x})^2$;
- $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x}$;
- $f_3(x)=\sqrt{x^2}$;
- $f_4(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$;
- $f_5(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$;
- $f_6(x)=\dfrac{x^2+3x}{|x+3|}$.

24 Dans chacun des cas, dire si les fonctions f et g sont égales et sur quel intervalle.

a. • $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$; • $g(x)=x$.

b. • $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$; • $g(x)=x-1$.

c. • $f(x)=|x-1|$; • $g(x)=|x|-1$.

d. • $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$; • $g(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$.

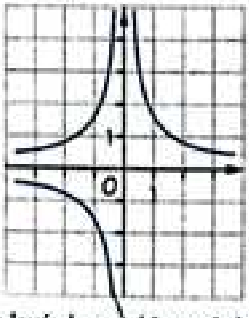
Aide

▸ Déterminer au préalable D_f et D_g. Ne pas hésiter à utiliser la calculatrice graphique pour vérifier.

25 f et g désignent deux fonctions définies sur

$$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[.$$

Elles coïncident sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout x de D_f, on a $f(x)>0$.



Reproduire à main levée le graphique ci-dessus, puis colorier en rouge la courbe représentative de f et en vert la courbe représentative de g.

Image – Antécédent(s)

Réponses rapides

26 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

Calculer $f(2)$, puis $f(-1)$.

27 f désigne la fonction telle que $f(2)=4$.
Compléter les phrases suivantes :
a. … est l'image par f de … .
b. … est un antécédent par f de … .
c. … a pour image par f … .
d. … a pour antécédent par f … .

28 f désigne une fonction dont on donne le tableau de valeurs.

x	-2	0	1	2	3
$f(x)$	2	-5	2	1	-2

1. Déterminer l'image par f de :
a. -2 ; b. 0 ; c. 2.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) par f de :
a. -5 ; b. 1 ; c. 2.

29 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-3x+5.$$

1. Déterminer l'image par f de :
a. -1 ; b. 1 ; c. $\frac{1}{3}$.
2. Déterminer l'antécédent par f de :
a. -1 ; b. 4 ; c. 5.

30 En électricité, la tension U est fonction de l'intensité I traversant une résistance R.
On admet la relation (loi d'Ohm) :

$$U=RI$$

et on suppose que $R=15\ \Omega$.
Compléter le tableau de valeurs suivant.

I (en ampères)			4		12	
U (en volts)	0	10		150		220

31 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(2x+6)(x-1).$$

1. Déterminer l'image par f de :
a. -3 ; b. 0 ; c. 1.
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) par f de :
a. -6 ; b. 0.

32 f et g désignent deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^4-2x^2+x \text{ et } g(x)=\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}.$$

Déterminer les images par f et par g de :
• 10^{-2} ; • 10^{-1} ;
• 10 ; • 10^2.

Rappel
$10^{-p}=\frac{1}{10^p}$ et $10^p=\frac{1}{10^{-p}}$.

33 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+x+k,$$

où k est un nombre réel.
On donne le tableau de valeurs suivant.

x	-2	2	3	5
$f(x)$	-3			

a. Déterminer la valeur de k.
b. Compléter le tableau.
c. Déterminer les antécédents de 3 par f.

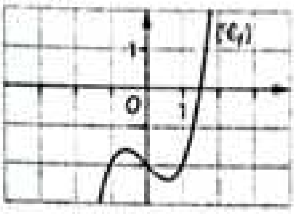
34 g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3-1$$

et f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=g(x)+k,$$

où k est un nombre réel.



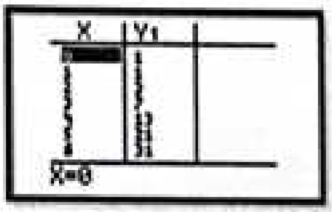
a. En utilisant la représentation graphique de f ci-dessus, déterminer la valeur de k.
b. Compléter par le calcul le tableau de valeurs.

x	-5	5	10	15
$f(x)$				

35 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-kx+1,$$

où k est un nombre réel.



a. En utilisant la vue d'écran de calculatrice ci-dessus, déterminer la valeur de k.
b. Compléter par le calcul le tableau de valeurs suivant.

x	-5	-1	7	10
$f(x)$				

36 f désigne la fonction définie sur $[0\,;7]$ par :

$$f(x)=x+\sqrt{x+3}.$$

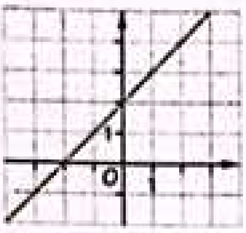
a. Justifier que f est bien définie sur $[0\,;7]$.
b. Utiliser la calculatrice pour dresser un tableau de valeurs de f sur $[0\,;7]$ avec un pas de 1.

Info
Le pas de 1 signifie qu'à partir de la première valeur de x (ici 0), on ajoute 1 pour obtenir une nouvelle valeur de x.
L'utilisation de la calculatrice est détaillée p. 266 à 269.

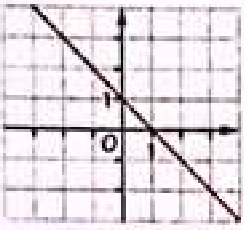
Exercices d'entraînement

Représentation graphique

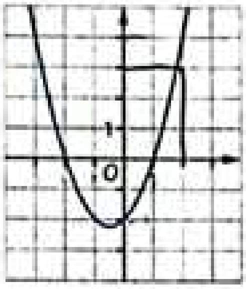
Réponses rapides



37 f désigne la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
Déterminer :
a. l'image de 2 par f ;
b. l'antécédent de 2 par f.

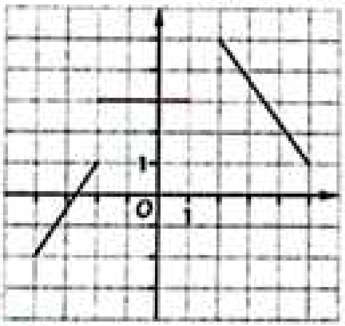


38 g désigne la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
Déterminer :
a. l'image directe de $[1 ; 3]$ par g ;
b. l'image réciproque de $[-3 ; 1]$ par g.



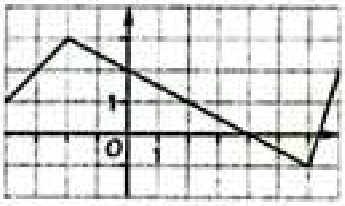
39 f désigne la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
Déterminer :
a. l'image de 2 par f ;
b. les antécédents de 2 par f ;
c. l'image directe de $[0 ; 2]$ par f ;
d. l'image réciproque de $[2 ; 3]$ par f.

40 f désigne la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous.



Déterminer :
1. l'image directe par f :
a. de $[-2 ; 1]$;
b. de $[-4 ; 5]$.
2. l'image réciproque par f :
a. de $[-2 ; 1]$;
b. de $[2 ; 4]$.
3. l'ensemble des antécédents de 3 par f.

41 f désigne la fonction définie sur $[-4 ; 7]$ dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous.



À l'aide de ce graphique, compléter les informations manquantes sur f.

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-4 ; -2], & f(x) = \dots \\ \text{si } x \in \dots, & f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \\ \text{si } x \in \dots, & f(x) = \dots \end{cases}.$$

Pour les exercices 42 à 44 :
a. À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de f permettant de la représenter.
b. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère.

42 f désigne la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}.$$

43 f désigne la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x+3}.$$

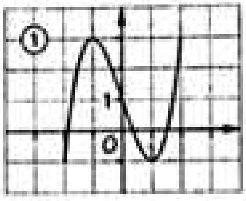
44 f désigne la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

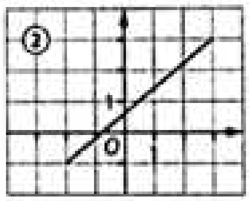
Aide

▶ Le choix des unités est crucial pour éviter des graphiques trop petits ou ne rentrant pas dans la feuille.
Il faut regarder dans le tableau les valeurs minimales et maximales de x et $f(x)$, puis choisir les unités en conséquence.

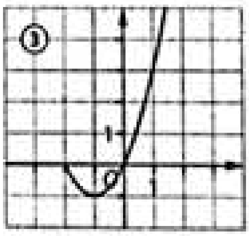
45 Associer à chaque expression la représentation graphique de la fonction qui lui correspond. Justifier.



• • $f(x) = x + 1$



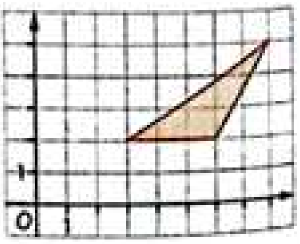
• • $g(x) = x(x+2)$



• • $h(x) = x^3 - 3x + 1$

46 $A(-1 ; 4)$, $B(0 ; 2)$ et $C(1 ; 0)$ désignent trois points.
Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles dont la courbe représentative passe par ces trois points.
a. $f(x) = -2x + 2$; b. $f(x) = x + 2$;
c. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; d. $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

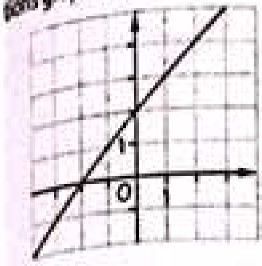
47 Pour chaque côté du triangle ci-contre, déterminer l'expression de la fonction affine dont il est la représentation graphique.
Préciser son ensemble de définition.

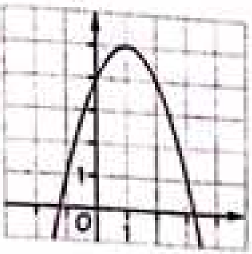


Sens de variation et extremum

Réponses rapides

48 Indiquer les variations des fonctions dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.

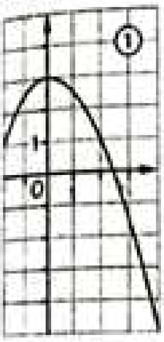


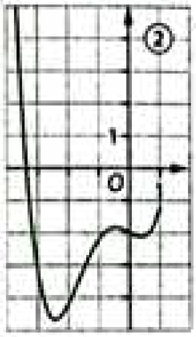


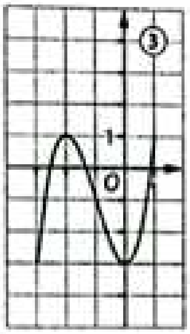
49 Tracer dans un repère une allure de la courbe représentative de la fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		2		3		5
$f(x)$	4	↘	-2	↗	0	↘	-3

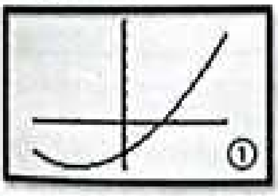
50 Pour chacune des courbes suivantes, dresser le tableau de variation des fonctions représentées.

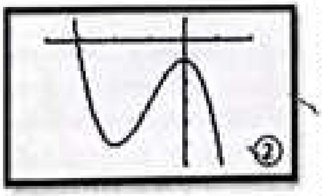






51 Pour chacune des courbes suivantes, obtenues à l'aide d'une calculatrice, dresser le tableau de variation des fonctions correspondantes.





52 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		-2		2		4		7
$f(x)$	-3	↗	-1	↘	-4	↗	0	↘	-2

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère.

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Donner les coordonnées des points de $(\mathscr{C}_f)$ figurant dans le tableau.

c. Placer ces points dans un repère, puis tracer une allure possible de $(\mathscr{C}_f)$.

53 f désigne une fonction définie sur $[-4\,;6]$ et telle que :

- f est croissante sur $[-4\,;0]$ et sur $[2\,;6]$;
- f est décroissante sur $[0\,;2]$;
- sur $[-4\,;2]$, son maximum est 2 ;
- sur $[0\,;6]$, son minimum est -5 ;
- l'image de -4 est -2 ;
- 6 est l'antécédent de 10.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Tracer dans un repère une allure possible de la courbe représentative de f.

54 **1.** f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+5$.

a. En utilisant les propriétés des inégalités, démontrer que, pour tous a, b de $\mathbb{R}$, si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$.

b. En déduire le tableau de variation de f.

2. Mêmes questions avec :

- $f(x)=3x+1$;
- $f(x)=-2x+3$.

55 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x+5$.

a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le tableau de variation de f.

b. Démontrer que $f(x)=(x-1)^2+4$.

c. En utilisant l'expression de f de la question **b.**, démontrer que f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Vocabulaire

▸ L'expression initiale de $f(x)$ est appelée forme **développée** ; l'expression obtenue en **b.** est appelée forme **canonique**.

56 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

Lorsque cela est possible, comparer :

a. $f(-3)$ et $f(-1)$;

b. $f(-4)$ et $f(10)$;

c. $f(0)$ et $f(3)$;

d. $f(3)$ et $f(4)$.

x	-4		2		10
$f(x)$	5	↗	10	↘	-20

57 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-6		-4		1		3		5
$f(x)$	-2	↗	0	↗	5	↘	0	↗	4

1. En utilisant les données du tableau, déterminer les solutions de l'équation et des inéquations :

a. $f(x)=0$; b. $f(x)<0$; c. $f(x)>0$.

2. Sur quel intervalle la courbe représentative de f est-elle située au-dessus de l'axe des abscisses ?

58 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		2		3		5
$f(x)$	4	↘	-2	↗	0	↘	-3

Déterminer : a. l'image de 2 et de $[2\,;5]$;
b. le nombre d'antécédents de -1.

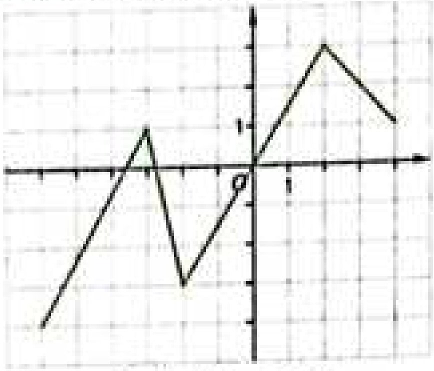
59 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$.

a. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Résoudre $f(x)=0$.

c. Déduire des deux questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

[illegible] f désigne la fonction définie sur $[-6\,;4]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Reproduire et compléter le tableau suivant.

Intervalle	minimum	atteint en	maximum	atteint en
$[-6\,;4]$				
$[-6\,;0]$				
$[-3\,;1]$				

Remarque

Le maximum est l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe, le minimum est l'ordonnée du point le plus « bas » ; ils se lisent sur l'axe des ordonnées.

61 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-4x+7.$$

a. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)^2+3$.
b. En déduire que f admet 3 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
c. En quel point est-il atteint ?

Pour les exercices 62 à 64, démontrer que f présente un extremum sur l'intervalle I.

62 $f(x)=x^2-1$; $I=\mathbb{R}$.

63 $f(x)=1-(x+1)^2$; $I=\mathbb{R}$.

64 $f(x)=x^3+x^2$; $I=[0\,;+\infty[$.

65 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x-2|.$$

a. Démontrer que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;2]$.
b. En déduire le tableau de variation et la présence d'un extremum pour f.

66 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-|3x+2|.$$

a. Dresser le tableau de variation de f.
b. Quelle est la valeur de l'extremum de f ?

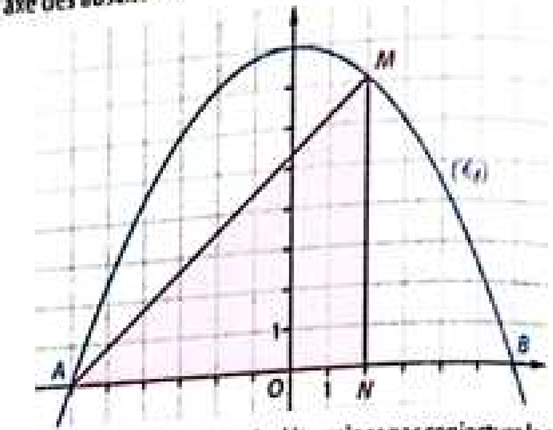
Aide

Commencer par écrire $f(x)$ sans valeur absolue en distinguant $x>-\dfrac{2}{3}$ et $x<-\dfrac{2}{3}$.

67 f désigne la fonction définie sur $[-6\,;6]$ par

$$f(x)=-\frac{2}{9}x^2+8.$$

Le point $M(x\,;f(x))$ appartient à courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f ; le point N est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
Les points A et B sont les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

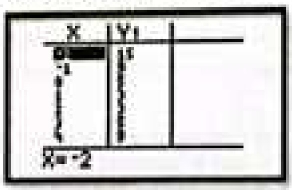


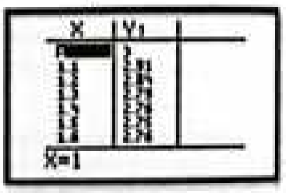
L'objectif de cet exercice est de déterminer par conjecture la position du point M pour que l'aire du triangle AMN soit maximale.
a. Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle AMN.
b. Conjecturer, en utilisant la calculatrice, que cette aire admet bien un maximum.
c. Quelles sont alors les coordonnées du point M pour lequel l'aire est maximale ?

68 f désigne la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par :

$$f(x)=x^2-3x+5.$$

a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère et conjecturer la présence d'un minimum.
b. La fonction f a été saisie à la calculatrice.
Voici deux tableaux de valeurs obtenus pour cette fonction.





Utiliser ces écrans pour donner un encadrement du minimum par deux entiers consécutifs, puis à 0,1 près.
c. Démontrer que, pour tout x de $[2\,;4]$, $f(x)=(x-1{,}5)^2+2{,}75$.
Valider ou invalider la conjecture émise en a.

69 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

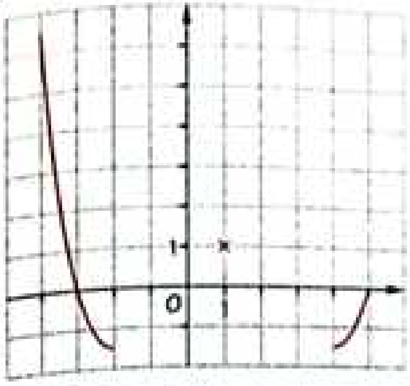
$$f(x)=(x-1)^2.$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de f.
2. Démontrer que pour tous nombres réels a et b, on a :
$$f(b)-f(a)=(b-a)(a+b-2).$$
3. On suppose que $a<b<1$.
a. Quel est le signe de $b-a$? le signe de $a+b-2$?
b. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\,;1]$.
4. On suppose maintenant que $1<a<b$.
Quel est le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$?
5. f admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Faire le point

70 D'une représentation à l'autre

f désigne une fonction définie sur $[-4\,;5]$.
Reproduire et compléter sa courbe, son tableau de valeurs et son tableau de variation.



x	-4	-2		4	
$f(x)$			1		0

x	…		…		1		…		…
$f(x)$	…	↘	$-1{,}5$	↗	…	↘	$-1{,}5$	↗	…

71 Incohérence

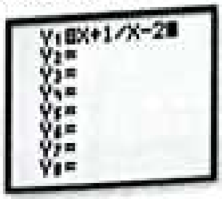
Relever les erreurs commises dans le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		$-3{,}5$		0		$3{,}5$
$f(x)$	0	↗	2	↘	$\frac{7}{3}$	↗	7

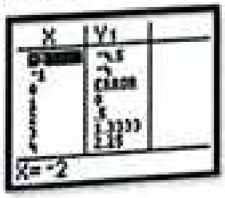
72 Une erreur classique

f désigne la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Voici les vues d'écran d'une calculatrice.



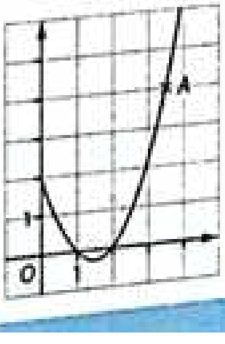
```
Y1=X+1/X-2
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
Y8=
```



```
X      Y1
X=-2
```

a. Calculer à la main $f(0)$.
b. Quelle est l'erreur commise lors de la saisie ?
Proposer une saisie correcte.

73 Point sur la courbe… ou pas



f désigne la fonction définie sur $[0\,;4]$ par :

$$f(x)=x^2-3x+2.$$

Un professeur a demandé à ses élèves si le point $A(3{,}5\,;4)$ appartenait à la courbe représentative de *f*. Au vu du graphique, l'un des élèves a répondu que oui.
A-t-il raison ?

74 Signe et variation

f désigne la fonction définie sur $[2\,;10]$ par

$$f(x)=x^2-4x+1.$$

On admet que cette fonction est croissante.
Dans chaque cas, dire si le calcul de $f(m)$ et $f(n)$ permet de déterminer le signe de $f(x)$ sur $[m\,;n]$.
a. $m=5\,;n=7\,;$ b. $m=2\,;n=7\,;$ c. $m=2\,;n=3$.

75 Conjecturer à l'aide de la calculatrice

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x)=x^3-x+1.$$

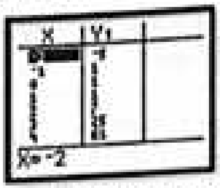
À l'aide de la calculatrice :
a. conjecturer le tableau de variation de *f* ;
b. conjecturer un encadrement d'amplitude 0,1 du maximum de cette fonction.

76 Limite de la calculatrice

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x)=x^3-x+1.$$

La calculatrice donne le tableau de valeurs ci-dessous.

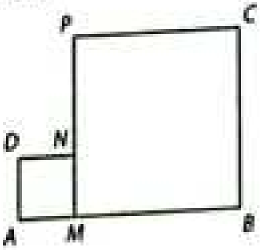


```
X      Y1
X=-2
```

La fonction est-elle constante sur $[-1\,;1]$?
Justifier votre réponse.

77 La bonne démarche

Dans la figure ci-dessous, $AB=8$. *M* est un point du segment $[AB]$. *AMND* et *MBCP* sont des carrés.
On cherche la position de *M* pour que l'aire totale de la figure soit minimale.



Démarche 1
Tracer la figure avec $AM=1$ et calculer l'aire ; recommencer avec $AM=2$, etc.

Démarche 2
Utiliser Geogebra et déplacer le point *M*.

Démarche 3
Utiliser un tableur avec en colonnes *AM*, *BM*, les aires de chaque carré et l'aire totale.

Démarche 4
Poser $AM=x$ et chercher le minimum de la fonction :

$$f(x)=x^2+(8-x)^2.$$

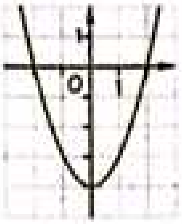
Faire une analyse critique de ces différentes démarches (points positifs, points négatifs) et donner la réponse au problème posé.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

78 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.
Dans le repère ci-contre, on a tracé sa courbe représentative.



	vrai	faux
1. $f(-1) = f(1)$.	☐	☐
2. Un antécédent par f de 0 est -4.	☐	☐
3. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.	☐	☐
4. f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
5. Le minimum de f est -4.	☐	☐
6. L'image par f de $[-2\,;2]$ est $[-4\,;0]$.	☐	☐

Avec justification

79 Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse.
f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)^2 + 1.$$

$(\mathscr{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère.

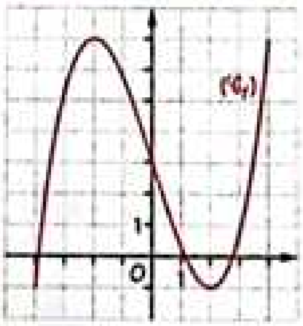
	vrai	faux
1. Le point $A(-1\,;-1)$ appartient à $(\mathscr{C}_f)$.	☐	☐
2. f est croissante sur $[2\,;+\infty[$.	☐	☐
3. f est positive sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
4. f admet pour minimum 2.	☐	☐
5. 3 a deux antécédents par f.	☐	☐
6. L'image par f de $[0\,;3]$ est $[0\,;5]$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

80 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
f désigne la fonction définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ a été tracée dans le repère ci-contre.



1. L'image de 3 par f est :
   a. comprise entre -4 et -3 ;
   b. égale à 1 ;
   c. on ne peut pas savoir.

2. Le nombre d'antécédents de 2 par f est égal à :
   a. 1 ; b. 2 ; c. 3.

3. Le maximum de f sur $[-4\,;2]$ est :
   a. atteint pour $x = -2$;
   b. compris entre -4 et -2 ;
   c. égal à -2.

4. L'image par f de $[-2\,;4]$:
   a. $\{7\}$; b. $[-4\,;4]$; c. $[-1\,;7]$.

Avec justification

81 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
f désigne la fonction définie sur $[-6\,;5]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-7		-4		-2		0		5
$f(x)$	3	↘	-5	↗	2	↘	-1	↗	0

$(\mathscr{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère.

1. Sur $[-7\,;5]$, $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en :
   a. un point ;
   b. trois points ;
   c. quatre points.

2. f est croissante sur :
   a. $[-2\,;-1{,}5]$;
   b. $[-2{,}5\,;-2]$;
   c. $[-2{,}5\,;-1{,}5]$.

3. Sur $[-4\,;4]$, le maximum de f est :
   a. 2 ; b. 0 ; c. on ne peut pas savoir.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

Avec deux paramètres

a et b désignent des nombres réels.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$.

Déterminer a et b grâce au tableau de valeurs suivant.

x	-1	0	2	3
$f(x)$	$-\dfrac{3}{2}$	-2	0	$-\dfrac{1}{2}$

Avec trois paramètres

a, b et c désignent trois nombres réels.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=ax^2+bx-4a+c.$$

Déterminer a, b et c grâce au tableau de valeurs suivant.

x	-2	0	2
$g(x)$	3	0	1

Économie – Coût de fabrication

Une entreprise fabrique un produit vendu en tonnes.

Le coût de fabrication exprimé en millions de francs CFA est :

$$C(x)=x^3-12x^2+60x,$$

x étant la quantité produite en tonnes.

a. Reproduire et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	2	3	4	5
$C(x)$	...	...	...	...	...	...

x	6	7	8	9	10
$C(x)$	...	...	...	...	...

b. Placer dans un repère les points de ce tableau (1 cm pour 1 tonne en abscisse, et 1 cm pour 25 millions de F CFA en ordonnée).

c. Tracer la courbe représentative de la fonction C dans ce repère.

d. La recette est modélisée par la fonction linéaire $R(x)=40x$.

e. Tracer la courbe représentative de la fonction R dans le même repère.

f. Déterminer l'expression du bénéfice réalisé pour la vente de x produits.

g. Déterminer graphiquement pour quelles quantités l'entreprise réalise un bénéfice.

Aide

Le bénéfice est la différence entre la recette réalisée et le coût de fabrication.

À moitié plein

Un verre est constitué d'un cône de révolution et d'un pied.

On verse du liquide dans ce verre jusqu'à une hauteur notée x, en cm.

Calculer la hauteur du liquide pour qu'il soit à moitié plein.

(On parle du volume bien sûr !)

86 Programme de calcul

f désigne une fonction. Voici les étapes du calcul de $f(x)$:

- Élever x au carré.
- Multiplier le résultat par 3.
- Soustraire au résultat le double de x.
- Ajouter 4 au résultat.

a. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

b. Déterminer le programme de calcul pour la fonction g définie par $g(x)=x^2+1-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

87 Variation d'une fonction homographique

f désigne la fonction définie sur $]-\infty\,;5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-3}{-x+5}.$$

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variation de f.

b. Vérifier que pour tout x de $]-\infty\,;5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$,

$$f(x)=-2+\frac{7}{-x+5}.$$

c. Écrire le programme de calcul qui permet de passer de x à $f(x)$.

d. a et b désignent deux nombres réels de $]5\,;+\infty[$.

Compléter en utilisant les symboles « < » ou « > ».

$$5<a<b \quad \Rightarrow \quad -a+5 \;\ldots\; -b+5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{-a+5} \;\ldots\; \frac{7}{-b+5}$$

$$\Rightarrow -2+\frac{7}{-a+5}\ldots-2+\frac{7}{-b+5}.$$

En déduire le sens de variation de f sur $]5\,;+\infty[$.

e. Utiliser un raisonnement analogue pour étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;5[$.

Vocabulaire

- **Une fonction homographique** est une fonction dont une expression est le quotient de deux fonctions affines.
- **En logique** La notation $P \Rightarrow Q$ signifie que si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie.

88 Extremum d'une fonction

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$.

a. Conjecturer les éventuels extrema de f.

b. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=3+\dfrac{1}{x^2+1}$.

c. Démontrer que $f(0)$ est un extremum de f.

89 Un problème de bougie

Deux bougies de même hauteur initiale fondent de manière linéaire mais à des vitesses différentes. La première met 4 heures à fondre alors que la deuxième met 5 heures. Y-a-t-il un moment où l'une des bougies aura une hauteur double de celle de l'autre ?

Exercices d'approfondissement

90 Fonction affine et extremum

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 3$.

1. a. On suppose que f admet un maximum $f(a)$.
Calculer $f(a + 1)$ et le comparer à $f(a)$. Constater une contradiction.

b. Faire un raisonnement analogue pour démontrer que f n'a pas de minimum.

2. Mêmes questions avec $g(x) = x^3$.

En logique

Le raisonnement utilisé est dit « par l'absurde » : on suppose que ce que l'on veut démontrer est faux et on met en évidence une contradiction.

91 Chimie – Avancement d'une réaction

On considère la réaction de synthèse de l'ammoniac à partir de l'azote et de l'hydrogène :

$$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3.$$

Les quantités de matière de N_2 et de H_2 en fonction de x (avancement de la réaction) sont :

$n(x) = 0{,}4 - x$

et $h(x) = 0{,}6 - x$.

1. Donner les ensembles de définition des fonctions n et h.

2. Étudier les variations des fonctions n et h.
Quelle est leur signification dans cet exercice ?

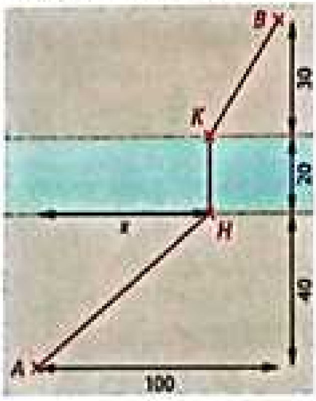
3. Tracer les représentations graphiques de ces deux fonctions dans le même repère.

4. a. Quel est le réactif dont la quantité s'annule en premier ? Pour quelle valeur de x ?

b. Quels sont les corps restants et en quelle quantité ?

92 Une histoire de pont

Où doit-on placer le pont $[HK]$ pour que le trajet de A à B soit le plus court possible ?



Aide

Exprimer le trajet en fonction de x et étudier les variations de la fonction obtenue pour déterminer son minimum.

Cet exercice peut également être résolu avec des outils géométriques : voir chap. 6, ex. 100.

93 Un peu de logique

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. $f(3) > f(0)$ donc f est croissante sur $[0 ; 3]$.

b. 4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

c. f est croissante sur $[-3 ; -1]$.

94 Une fonction homographique

f désigne la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Démarche 1

Conjecturer avec l'outil de votre choix le tableau de variation de f.

Démarche 2

a. Démontrer que pour tout x de $]-1 ; +\infty[$,

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

b. a et b désignent deux nombres réels de $]-1 ; +\infty[$.
En utilisant l'expression précédente, démontrer que :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

c. En déduire le sens de variation de f.

Démarche 3

a. a et b sont deux nombres réels de $]-1 ; +\infty[$.

Démontrer que $f(a) - f(b) = \dfrac{2(a-b)}{(a+1)(b+1)}$.

b. En déduire le sens de variation de f.

95 Une fonction de degré 3

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

1. a et b désignent deux nombres réels de $]1 ; +\infty[$.

a. Démontrer que :
$f(a) - f(b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a - b - 1)$, puis que :
$f(a) - f(b) = (a-b)[a(a-1) + b(b-1) + ab - 1]$.

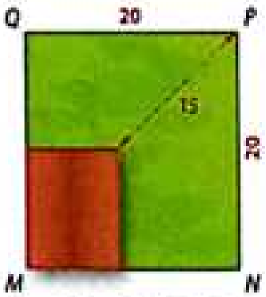
b. Déterminer les signes de $a(a-1)$, $b(b-1)$ et $ab - 1$.

c. Déduire des questions précédentes le sens de variation de f sur $]1 ; +\infty[$.

2. Reproduire la démarche précédente pour déterminer le sens de variation de f sur $\left]-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right[$.

96 Enclos

À l'intérieur d'un terrain carré $MNPQ$ de côté 20 m, on désire construire un enclos en respectant les contraintes suivantes :
- il doit être rectangulaire et doit contenir le point M ;
- la distance entre le sommet opposé à M et le point P doit être inférieure à 15 m.



Déterminer la surface minimale de l'enclos.

97 Forme canonique et variations

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 6)^2 + 1$.

a. Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

b. Démontrer que f est croissante sur $]2 ; +\infty[$.

c. Démontrer que 1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Lancer d'une balle

Une jeune jongleuse lance une balle verticalement vers le haut. t désigne le temps écoulé à partir du lâcher de balle.
On admet que lorsque la balle quitte la main de la jongleuse, la hauteur $h(t)$, en m, de la balle par rapport au sol est donnée, en fonction du temps t, en s, par :

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 1{,}5 \text{ avec } t \in [0\,;3].$$

1. Démontrer que pour tout nombre réel t positif :

$$h(t) = (-0{,}7t + 1{,}5)(7t + 1).$$

2. En déduire le temps au bout duquel la balle retombe au sol.
3. À l'aide de la calculatrice,
a. conjecturer le tableau de variation de h ;
b. préciser le maximum de h et en quel point il est atteint ;
c. traduire les conjectures précédentes dans le contexte de cet exercice.
4. Tracer la représentation graphique de h dans un repère. (Unités : 5 cm en abscisses, 2 cm en ordonnées.)

Valeur d'annulation

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 3.$$

1. En calculant quelques valeurs de $f(x)$, démontrer que f n'est pas de signe constant.
2. À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x et l'existence d'un nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
3. a et b désignent deux nombres réels positifs.
a. Démontrer que si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
4. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire un encadrement de α.
5. Avec la méthode de calcul de votre choix, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Notations

L'ensemble des nombres réels positifs se note :

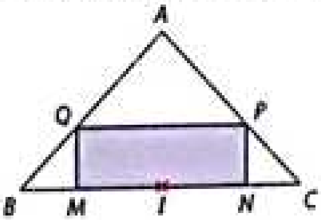
$$[0\,;+\infty[\text{ ou } \mathbb{R}^+\,;$$

l'ensemble des nombres réels non nuls se note :

$$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[\text{ ou plus simplement } \mathbb{R}^*.$$

Aire maximale

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle isocèle en A, $BC = 9$, I est le milieu du segment $[BC]$ et $MNPQ$ est un rectangle.
Déterminer la position du point M sur le segment $[BI]$ pour que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.



Fonctions égales

f et g désignent des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} \text{ et } g(x) = x + 1.$$

a. Calculer les images par f et g de quatre nombres réels de votre choix et les comparer.
b. Quelle conjecture peut-on faire ?
c. Démontrer que les fonctions f et g sont égales.

102 Chimie – Loi de Mariotte

V désigne le volume en mL et P la pression en kPa d'un gaz que l'on étudie.
L'objectif est de trouver la relation entre P et V à température constante. Pour cela, on a réalisé des mesures dont les résultats sont consignés dans le tableau de valeurs suivant.

V	50	45	40	35	30	25	20	15
P	58	63	72	82	95	110	140	189

1. Modélisation graphique par une fonction affine
a. Placer dans un repère les points dont les coordonnées sont dans le tableau.
b. Tracer une droite ajustant au mieux les points tracés.
c. Déterminer l'expression de la fonction affine correspondante.
2. Modélisation par une fonction non affine

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2840}{x}$.

a. Construire le tableau de valeurs de f pour les valeurs de x commençant à 15 avec un pas de 5.
b. Tracer la courbe représentative de f dans le repère du 1.
3. Cette courbe ajuste-t-elle mieux les points placés à la question 1. a. ?
4. Quelle relation entre P et V peut-on conjecturer ?

103 Taux de variation

f désigne une fonction définie sur un intervalle I ;
a et b sont deux nombres réels distincts de I.
Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de f en utilisant le rapport $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$, appelé taux de variation de f.

a. $f(x) = 3x + 1$ avec $I = \mathbb{R}$;
b. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ avec $I = [2\,;+\infty[$;
c. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ avec $I =]3\,;+\infty[$;
d. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ avec $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

104 Équation du troisième degré

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

a. Utiliser la calculatrice pour déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
b. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Rappel

Lorsque a est solution de l'équation $f(x) = 0$, on peut mettre $(x - a)$ en facteur dans l'expression de $f(x)$.

10 Exercices d'approfondissement

105 Indice de masse corporelle

L'indice de masse corporelle (IMC) est un nombre mesurant la corpulence qui dépend de la masse m, en kg, et de la taille T, en m, d'un individu.
L'un des calculs permettant de l'obtenir est :

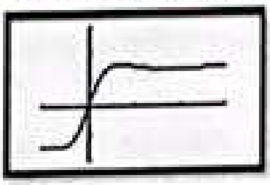
$$\text{IMC} = \frac{m}{T^2}.$$

1. On considère qu'un homme est en « surpoids » si son IMC dépasse 25.
Pour ne pas être en surpoids :
a. quelle masse ne doit-on pas dépasser, pour une taille de 1,68 m ?
b. quelle est la taille minimale que l'on doit faire, pour une masse de 75 kg ?
2. On s'intéresse à un homme qui mesure 1,80 m et dont la masse m varie.
a. Écrire l'expression de la fonction f permettant de calculer son IMC en fonction de m.
b. Quel est l'antécédent de 25 par f ?
Quelle est sa signification ?

Info

En physique, la masse d'un objet est une grandeur positive, propre à l'objet étudié ; elle est exprimée en kg. Le poids est une force, exprimée par un vecteur. Dans le langage courant, on fait souvent la confusion entre masse et poids.

106 Une histoire de calculatrice



Voici l'écran d'une calculatrice graphique donnant la représentation graphique de la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{x^3+5x}{3x^2+1}$ sur $[-1\,;3]$.

L'affichage de la calculatrice sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right]$ est-il correct ?
Justifier votre réponse.

107 Tiroir

Un tiroir a la forme d'un parallélépipède rectangle.
Les dimensions de sa base en dm sont x et $2x$.
Son volume est de 5 litres.

a. Exprimer en fonction de x les aires de la base et de la surface latérale du tiroir.
b. Les coûts de fabrication sont de 500 F CFA par dm² pour la base, qui est plus épaisse, et de 400 F CFA par dm² pour la surface latérale.
Déterminer la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication total du tiroir est minimal.

108 Fonction affine inconnue

a et b désignent deux nombre réels.
f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Déterminer les valeurs de a et b sachant que :
- $f(5) = 5$; - $f(1) \leqslant f(2)$; - $f(3) \geqslant f(4)$.

109 Fréquence des cordes

Dans un instrument à cordes, la fréquence f (en hertz : Hz) de la note émise par une corde dépend de la tension t de la corde et de sa longueur ℓ.
La fréquence de la note *la* dans le premier octave est de 110 Hz.

1. Fréquence et tension
Pour l'une des cordes, la relation entre fréquence et tension est donnée par la fonction $f(t) = 16{,}11\sqrt{t}$.
a. Dresser un tableau de valeurs de cette fonction pour t variant de 10 à 60 avec un pas de 5.
b. Tracer la représentation graphique de f dans un repère.
c. Quelle est la tension de la corde correspondant au *la* ?
(On fera une conjecture graphique et un calcul.)

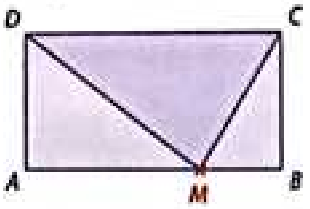
2. Fréquence et longueur
Pour l'une des cordes, la relation entre fréquence et longueur est donnée par la fonction $f(\ell) = \dfrac{71{,}48}{\ell}$.
a. Dresser un tableau de valeurs de cette fonction pour ℓ variant de 0,10 à 0,65 avec un pas de 0,05.
b. Tracer la représentation graphique de f dans un nouveau repère.
c. Quelle est la longueur de la corde correspondant au *la* ?
(On fera une conjecture graphique et un calcul.)

Info

La formule complète permettant le calcul de la fréquence fait aussi intervenir la masse par unité de longueur μ, appelée masse linéique de la corde : $f = \dfrac{1}{2\ell}\sqrt{\dfrac{t}{\mu}}$.

110 Moitié ou pas

$ABCD$ désigne un rectangle de dimensions inconnues ℓ et L.
M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$.



a. Calculer les aires des trois triangles de la figure en fonction de ℓ, L et x.
b. Conjecturer la valeur du rapport entre l'aire du rectangle $ABCD$ et l'aire du triangle MDC en choisissant des valeurs pour les différentes longueurs de la figure.
c. Démontrer cette conjecture.

111 Ensembles de points

Dans chacun des cas ci-dessous, représenter dans un repère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan qui vérifient la condition donnée.
a. $xy = 1$; **b.** $x^2y^2 = 1$; **c.** $x^3y^3 = 1$.

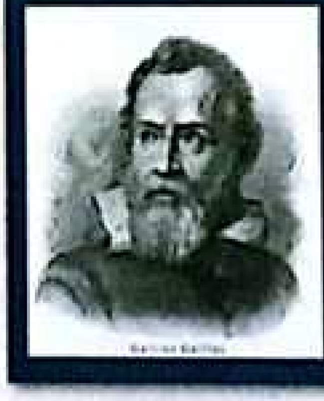
11

Fonctions usuelles

Les vols paraboliques sont des vols alternant des manœuvres de montées et de descentes espacées de paliers. Les trajectoires de vol, appelées paraboles, permettent d'obtenir jusqu'à 22 secondes d'apesanteur (0 g). Avec d'autres manœuvres, on peut réaliser des paraboles permettant d'obtenir la gravité lunaire (0,16 g) ou martienne (0,38 g).

Grâce au système du plan incliné, Galilée met en évidence l'existence du mouvement « uniformément accéléré ». Cela se traduit par la formule mathématique associée à la fonction carré :

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

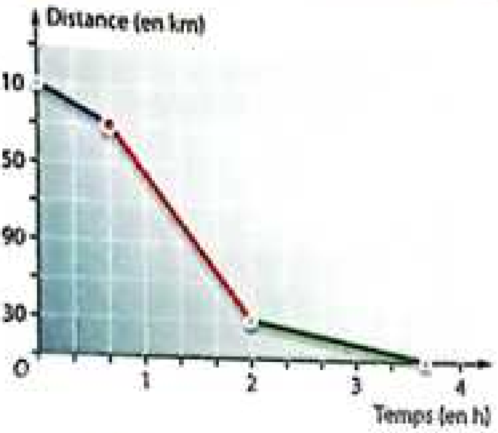


Les objectifs du chapitre

- Étudier quelques fonctions affines par intervalles.
- Connaître les fonctions carré, racine carrée, inverse et cube.
- Savoir manipuler sa calculatrice pour tracer ces fonctions.
- Étudier la composée de ces fonctions avec une fonction linéaire.

1 Fonction affine par intervalles

Cours 1



1 Observations graphiques

Fofana effectue le trajet entre deux villes distantes de 210 km en 3 h 40 min. Il s'est déplacé à pied, à vélo et en bus. Le graphique ci-contre représente la distance restant à parcourir, en km, en fonction du temps, en h.

a. Donner les intervalles de temps, pendant lesquels Fofana se déplace à pied, à vélo et en bus.

b. Calculer la distance parcourue après une heure de trajet.

c. Au bout de combien de temps Fofana a-t-il parcouru 150 km ?

d. Déterminer la vitesse moyenne pendant la deuxième heure.

2 Fonction associée au graphique

f désigne la fonction qui exprime la distance, en km, restant à parcourir en fonction du temps écoulé t, en h.

a. Déterminer l'expression de la fonction affine, notée f_1, dont la représentation graphique correspond à la partie bleue du graphique ci-dessus.

b. De même, déterminer les expressions des fonctions affines f_2 et f_3 pour les autres couleurs.

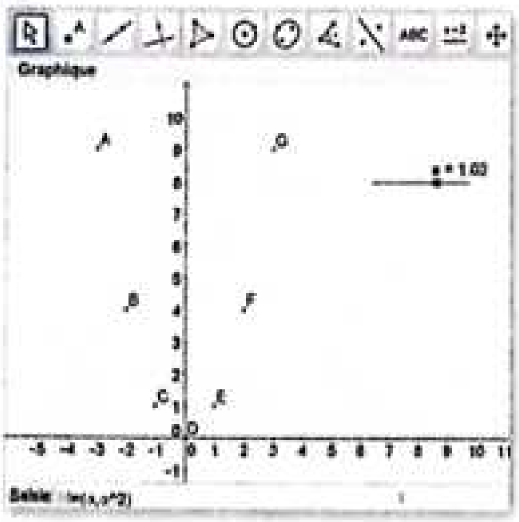
On peut définir ainsi la fonction f sur $\left[0\,;\frac{11}{3}\right]$ représentée ci-dessus par

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) \text{ sur } \left[0\,;\frac{2}{3}\right] \\ f_2(t) \text{ sur } \left[\frac{2}{3}\,;2\right] \\ f_3(t) \text{ sur } \left[2\,;\frac{11}{3}\right] \end{cases}$$

Cette fonction est appelée fonction affine par intervalles.

2 Une parabole

Cours 3



1 Observer avec Geogebra

a. Placer les points dont les coordonnées, dans un repère orthonormé, sont données dans le tableau ci-dessous.

Abscisse du point	−3	−2	−1	0	1	2	3
Ordonnée du point	9	4	1	0	1	4	9

b. Donner la relation qui lie l'abscisse et l'ordonnée des points placés.

c.
- Créer un curseur a de valeur min : −3, max : 3, avec un incrément de 0,01.
- Dans la barre de saisie, taper : $M=(a, a^2)$.
- Effectuer un clic droit sur le point M et activer la trace.
- Cliquer sur l'icône ⇱ et déplacer le curseur a.

La courbe qui se dessine est appelée parabole.

2 Conjecturer grâce à la représentation graphique

f désigne la fonction dont la représentation est la parabole obtenue en 1.

a. À l'aide de cette représentation graphique sur $[-3\,;3]$ dresser :
- son tableau de signes ;
- son tableau de variation.

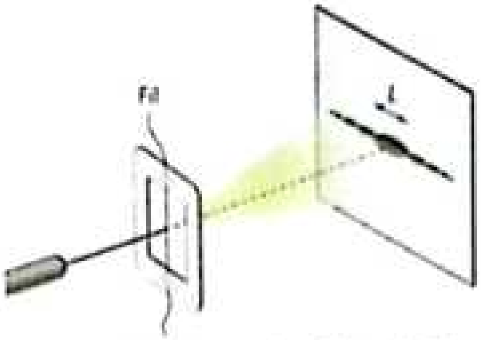
b. La courbe obtenue en 1. a-t-elle un élément de symétrie ? Si oui, le citer.

3 Figure de diffraction

Cours 2

1 Comprendre la situation

Une figure de diffraction est l'image obtenue sur un écran lorsque l'on place un fil sur le trajet d'un faisceau laser.



L : largeur de la tache centrale sur l'écran, en cm.
d : diamètre du fil, en cm.

a. - Dans un repère orthogonal d'unité bien choisie, représenter les points du tableau ci-dessous.
- Tracer une allure possible de la courbe de la fonction f qui à d associe L.

d	0,08	0,056	0,07	0,10	0,12	0,16
L	1,3	1,8	1,5	1,0	0,8	0,6

b. La courbe représentative obtenue est-elle celle :
- d'une fonction linéaire ?
- d'une fonction affine ?
- d'une fonction carré ?

c. On remplace le fil par un cheveu d'élève, on mesure $L = 1{,}2$ cm.
Déterminer le diamètre de ce cheveu à l'aide de la représentation graphique du **a.**

2 Modéliser par une nouvelle fonction

g désigne la fonction définie sur $[0{,}056 ; 0{,}16]$ par $g(d) = \dfrac{1}{f(d)}$.

a. - Reproduire et compléter le tableau ci-contre (arrondir au millième).

d	0,056	0,08	0,07	0,10	0,12	0,16
$g(d)$						

Calculer, pour chaque valeur de d, $\dfrac{g(d)}{d}$ (arrondir à l'unité).
- Conjecturer une expression possible de $g(d)$ en fonction de d pour $d \in [0{,}056 ; 0{,}16]$.

b. En déduire une expression possible de $f(d)$ en fonction de d pour $d \in [0{,}056 ; 0{,}16]$.

4 Puissance d'une éolienne

Cours 4

1 Relevé d'un technicien

Massago a relevé la puissance P, en kW, d'une éolienne d'un parc expérimental, en fonction de la vitesse du vent V, en m/s.

a. Dans un repère orthogonal, représenter les points du tableau ci-contre.
Tracer une allure possible de la courbe.

V (m/s)	4	7	9	13	15	18	22
P (kW)	16	85	182	550	844	1 458	2 662

b. La courbe représentative obtenue est-elle celle :
- d'une fonction affine ?
- d'une fonction carré ?
- d'une fonction inverse ?

2 Vers une nouvelle fonction

a. Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant les valeurs du **1.a.**

V^3							
P							

b. Dans un repère orthogonal, représenter les points du tableau ci-dessus.

c. Déterminer la nature de la fonction dont la représentation graphique est celle du **2. b.** ; puis en déduire une formule de P en fonction de V.

11 Cours

1 Fonctions affines par intervalles

Définition

Une fonction est dite **affine par intervalles**, lorsque son ensemble de définition est partagé en un nombre fini d'intervalles et que, sur chacun de ces intervalles, elle coïncide avec une fonction affine.

Remarque Une telle fonction est aussi appelée affine par morceaux.

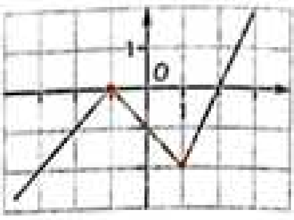
Exemple

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x\in\,]-\infty\,;-1] \\ -x-1 \text{ si } x\in\,]-1\,;1] \\ 2x-4 \text{ si } x\in\,]1\,;+\infty[\end{cases}.$$

f est une fonction affine par intervalles.

Représentation graphique de f :

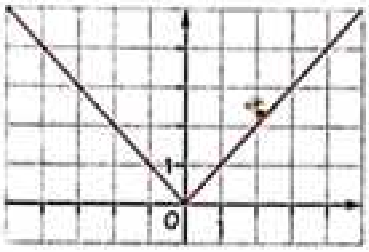


Cas particuliers

La fonction **valeur absolue**, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

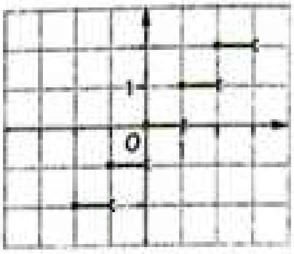
est une fonction affine par intervalles.



La fonction **partie entière**, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=E(x)=n$$

où n est l'unique entier relatif tel que $n\leqslant x<n+1$ est une fonction affine par intervalles.



2 La fonction inverse

Définitions

- La fonction **inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*=\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
- Dans un repère, la courbe représentant la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

Propriétés

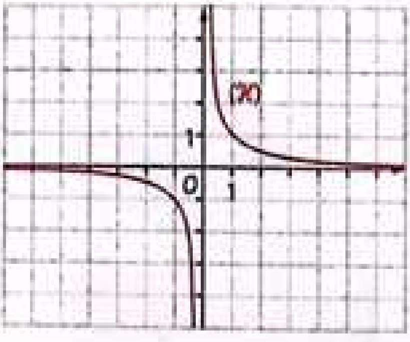
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Pour tous nombres réels a et b :

- si $a<b<0$, alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;
- si $0<a<b$, alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Courbe représentative



Remarque

Dans le tableau de variation, la double barre verticale sous le zéro signifie que f n'est pas définie en zéro.

Remarque

Si le point M appartient à $(\mathcal{H})$, alors son symétrique par rapport à l'origine O du repère appartient à $(\mathcal{H})$. On dit que $(\mathcal{H})$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1 Représenter une fonction affine par intervalles

f désigne la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ si } x \in [-5;-1] \\ -E(x) \text{ si } x \in [-1;1[\\ \frac{1}{2}x - 3 \text{ si } x \in [1;5] \end{cases}$

Représenter la fonction f sur $[-5;5]$ dans un repère orthogonal.

Solution commentée

1. Sur $[-5;-1]$:

$f(-5) = |-5| = 5$ donc $A(-5;5) \in \mathscr{C}_f$.

$f(-1) = |-1| = 1$ donc $B(-1;1) \in \mathscr{C}_f$.

2. Sur $[-1;1[$:

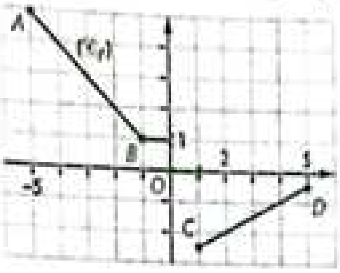
si $x \in [-1;0[$, $-1 \leqslant x < 0$, alors $E(x) = -1$ et $f(x) = 1$.

si $x \in [0;1[$, $0 \leqslant x < 1$, alors $E(x) = 0$ et $f(x) = 0$.

3. Sur $[1;5]$:

$f(1) = \frac{1}{2} \times 1 - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ donc $C\left(1;-\frac{5}{2}\right) \in \mathscr{C}_f$.

$f(5) = \frac{1}{2} \times 5 - 3 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$ donc $D\left(5;-\frac{1}{2}\right) \in \mathscr{C}_f$.



Méthode

1. Sur $[-5;-1]$ f est la fonction valeur absolue donc placer les deux points d'abscisses -5 et -1 et les joindre.
2. Sur $[-1;1[$, déterminer les intervalles où $E(x)$ est constante, puis en déduire $f(x)$ sur ces intervalles.
3. Sur $[1;5]$, f est une fonction affine : placer les deux points d'abscisses 1 et 5 afin de tracer le segment correspondant.

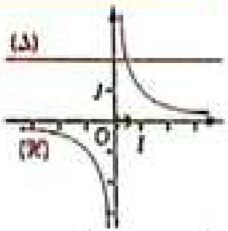
2 Résoudre une inéquation

Résoudre graphiquement ; puis par le calcul l'inéquation $\frac{1}{x} < 2$.

Solution commentée

1. Graphiquement

Sur le graphique ci-contre, les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de $(\mathscr{H})$ situés en-dessous de (Δ). Ainsi $S =]-\infty;0[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.



2. Par le calcul

- Pour $x = 0$, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini, donc 0 n'est pas solution.
- Pour $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$ (règle des signes d'un quotient), donc $\frac{1}{x} < 0 < 2$.
- Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$).

Les solutions de l'inéquation sont les nombres réels appartenant à $]-\infty;0[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Méthode

1. Représenter la fonction inverse et tracer la droite d'équation réduite $y = 2$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés en-dessous de (Δ).
2. Résoudre l'inéquation sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ en utilisant les règles des signes et les variations des fonctions usuelles.

S'exercer

Pour les exercices 3 et 4, dans un repère orthonormé représenter la fonction f l'intervalle $[-3;3]$.

3 f désigne la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ si } x \in [-3;-1] \\ E(x) \text{ si } x \in [-1;1[\\ |x| \text{ si } x \in [1;3] \end{cases}$$

4 f désigne la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| \text{ si } x \in [-3;0[\\ 5E(x) \text{ si } x \in [0;3[\end{cases}.$$

Pour les exercices 5 à 8, résoudre graphiquement, puis par le calcul les inéquations suivantes.

5 $\frac{1}{x} > 4$.

6 $\frac{1}{x} + 3 \geqslant 0$.

7 $x^2 \geqslant 4$.

8 $x^2 - 2 < 1$.

3 La fonction carré

Définitions

- La fonction **carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Dans un repère, la courbe représentant la fonction carré est appelée **parabole**.

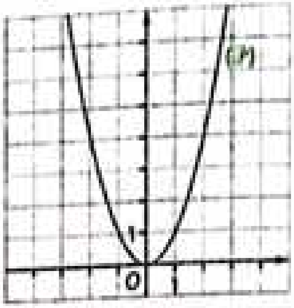
Propriétés

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Pour tous nombres réels a et b,
- si $a < b < 0$, alors $a^2 > b^2$;
- si $0 < a < b$, alors $a^2 < b^2$.

Courbe représentative



Propriété

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

Remarque

Dans un repère orthonormal, si le point M appartient à $(\mathscr{P})$ alors son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées appartient aussi à $(\mathscr{P})$.
On dit que $(\mathscr{P})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

4 La fonction cube

Définitions

- La fonction **cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- Dans un repère, la courbe représentant la fonction cube est appelée **cubique**.

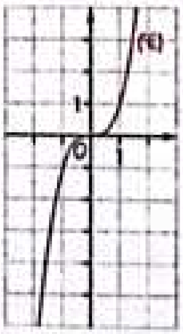
Propriétés

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

Pour tous nombres réels a et b :
- si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.

Courbe représentative



Propriété

Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) < 0$.

Remarque

Si le point M appartient à $(\mathscr{C})$ alors son symétrique par rapport à l'origine du repère appartient aussi à $(\mathscr{C})$. On dit que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

9 Encadrer un nombre

Déterminer à l'aide du tableau de variation de la fonction carré, l'encadrement de a^2 pour $a \in [-4;3]$.

Solution commentée

1. Voici le tableau de variation de la fonction carré sur $[-4;3]$:

x	-4		0		3
x^2	16	↘	0	↗	9

2. Sur l'intervalle $[-4;3]$, le maximum de x^2 est 16 et son minimum est 0.
3. Donc, si $a \in [-4;3]$, alors $a^2 \in [0;16]$.

Méthode

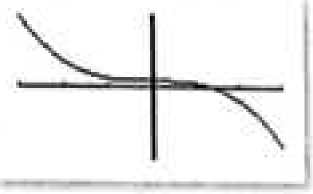
1. Dresser le tableau de variation ou tracer la courbe de représentative de la fonction usuelle correspondante.
2. Déterminer le maximum et le minimum de cette fonction sur l'intervalle donné.
3. Conclure.

10 Déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle

***f* désigne la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x) = -2x^3 + 5$.**
Étudier les variations de *f* sur son intervalle de définition.

Solution commentée

1. On trace la représentation graphique de f à l'aide de la calculatrice pour conjecturer la réponse.



Sur $[-3;3]$, f semble être décroissante.

2. a et b désignent deux nombres réels de $[-3;3]$ tels que $a < b$.
La fonction cube est croissante sur $[-3;3]$, donc $-3 \leqslant a < b \leqslant 3$.
On en déduit que $-27 \leqslant a^3 \leqslant b^3 \leqslant 27$.
La fonction affine $x \mapsto -2x + 5$ est décroissante sur $[-27;27]$ donc $59 \geqslant -2a^3 + 5 \geqslant -2b^3 + 5 \geqslant -49$.
3. Ainsi, pour tout $a, b \in [-3;3]$ tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.
On en déduit que f est décroissante sur $[-3;3]$.

Méthode

1. Pour tracer la représentation graphique d'une fonction à la calculatrice, se reporter p. 266 à 269 de fin de manuel.
2. Procéder, pas à pas, en utilisant les variations des fonctions usuelles et les propriétés sur l'ordre dans $\mathbb{R}$ (Chapitre 1).
3. Utiliser la définition des variations d'une fonction.

Vocabulaire

f est monotone sur un intervalle *I*, signifie que *f* est soit croissante, soit décroissante, soit constante sur *I* (elle ne change pas de variation sur *I*).

S'exercer

11 Déterminer, à l'aide du tableau de variation d'une fonction usuelle, l'encadrement de a^3 pour $a \in [-3;2]$.

12 Déterminer, à l'aide d'un tableau de variation, l'encadrement de $\frac{1}{a}$ pour $a \in [1;7]$.

13 Pour chacune des fonctions ci-dessous, conjecturer à l'aide de la calculatrice, puis déterminer les variations sur l'intervalle I donné.
a. $f(x) = -x^2 + 8$ sur $[-2;2]$;
b. $f(x) = \frac{3}{x} - 7$ sur $]0;+\infty[$.

5 La fonction racine carrée

Définition

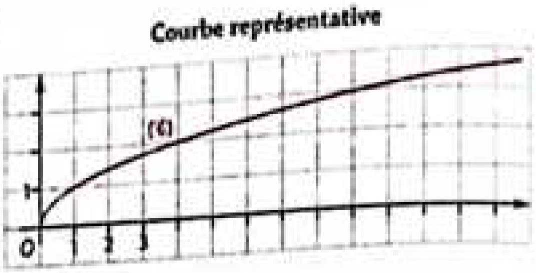
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriétés

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Courbe représentative



Remarque La courbe représentative de la fonction racine carrée est parfois appelée demi-parabole.

6 Composée d'une fonction usuelle et d'une fonction linéaire

a Principe

f et g désignent deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$,
la **fonction composée** de la fonction g suivie de la fonction f notée $f \circ g$, correspond à l'enchaînement ci-contre.

$$f \circ g : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Remarque En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

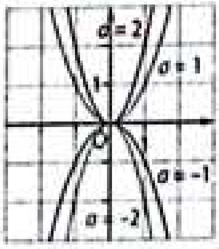
b Cas particuliers

a désigne un nombre réel non nul fixé.
f est la fonction linéaire d'expression $f(x) = ax$ et g une des fonctions usuelles.

- $$f \circ g : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & ax^2 \end{array}$$

Exemple

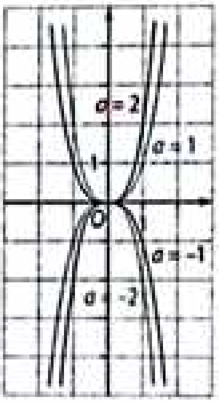
Illustrations graphiques de $f \circ g$ pour :
$a = -2$; $a = -1$;
$a = 1$; $a = 2$.



- $$f \circ g : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 & \longmapsto & ax^3 \end{array}$$

Exemple

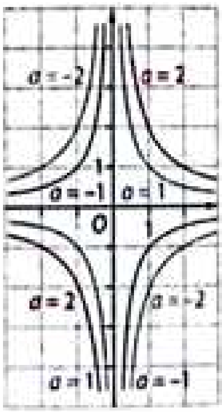
Illustrations graphiques de $f \circ g$ pour :
$a = -2$; $a = -1$;
$a = 1$; $a = 2$.



- $$f \circ g : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} & \longmapsto & \dfrac{a}{x} \end{array}$$

Exemple

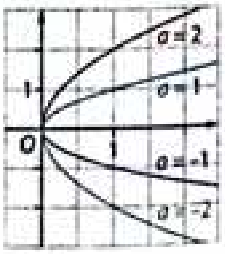
Illustrations graphiques de $f \circ g$ pour :
$a = -2$; $a = -1$;
$a = 1$; $a = 2$.



- $$f \circ g : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} & \longmapsto & a\sqrt{x} \end{array}$$

Exemple

Illustrations graphiques de $f \circ g$ pour :
$a = -2$; $a = -1$;
$a = 1$; $a = 2$.



14 Déterminer l'expression d'une fonction composée

f, g et h désignent les fonctions $x \mapsto 3x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
Donner les expressions des fonctions composées $f \circ g$ et $f \circ h$.

Solution commentée

- D'après le principe du cours : $f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto 3x^2$$

donc pour tout nombre réel x, $f \circ g(x) = 3x^2$.

- De même, $f \circ h : \mathbb{R}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt{x} \longmapsto 3\sqrt{x}$$

donc pour tout nombre réel x, $f \circ h(x) = 3\sqrt{x}$.

Méthode

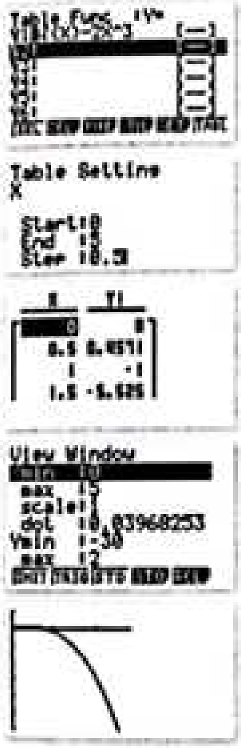
1. Utiliser le schéma qui permet de bien visualiser la composée $f \circ g$ (g suivie de f).
2. Préciser l'ensemble de définition de g ; puis rechercher son image à l'aide, par exemple, de sa représentation graphique.

15 Utiliser la calculatrice pour conjecturer

f désigne la fonction définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = \sqrt{x} - 2x^3$. Sur la calculatrice :
a. dresser un tableau de valeurs de cette fonction par x allant de 0 à 3 avec un pas de 0,5 ;
b. tracer une allure de la courbe de f.

Solution commentée

Calculatrice CASIO

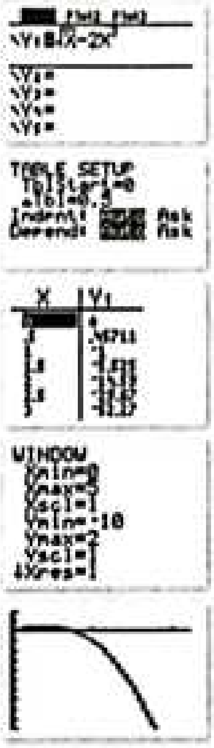


```
Table Setting
X
 Start:0
 End  :5
 Step :0.5
```

```
   X      Y1
   0       0
 0.5  0.4571
   1      -1
 1.5  -5.525
```

```
View Window
Xmin  :0
 max  :5
 scale:1
 dot  :0.03968253
Ymin  :-30
 max  :2
```

Calculatrice Texas Instruments



```
\Y1=√(X)-2X³
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```

```
TABLE SETUP
 TblStart=0
 ΔTbl=0.5
Indpnt: Auto Ask
Depend: Auto Ask
```

```
WINDOW
 Xmin=0
 Xmax=3
 Xscl=1
 Ymin=-10
 Ymax=2
 Yscl=1
 Xres=1
```

Méthode

Pour plus de détails, se reporter aux pages 266 à 269 de fin de manuel.

1. Saisir l'expression de la fonction étudiée.
2. Entrer les paramètres du tableau de valeurs : début, fin et pas.
3. Afficher le tableau de valeurs.
4. Entrer les paramètres de la fenêtre graphique : valeurs minimum et maximum pour X puis pour Y et l'unité de chaque axe.
5. Afficher de la courbe représentative de f.

Vocabulaire

L'allure d'une courbe de fonction est une représentation graphique possible de la fonction (souvent tracée à main levée).

S'exercer

16 f désigne la fonction cube et g la fonction linéaire :

$$x \mapsto -2x.$$

Donner l'expression de la fonction composée $g \circ f$.

17 Déterminer la fonction usuelle et la fonction linéaire qui composent la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{8}{x}$.

18 Représenter graphiquement sur la calculatrice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}(x-3)^2 - 7$.

19 Dresser un tableau de 10 valeurs de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x-7}{-x^2}$. (Arrondir au dixième.)

Exercices d'entraînement

Fonctions affines par intervalles

Réponses rapides

Pour les exercices 20 à 22, f désigne la fonction définie sur $[-3\,;4]$ par $f(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{si } x\in[-3\,;-1[\\ |x| & \text{si } x\in[-1\,;1]\\ -x+2 & \text{si } x\in[1\,;4]\end{cases}$.

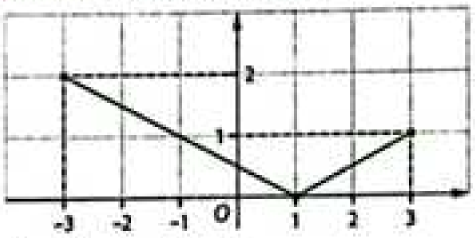
20 Calculer l'image par f des nombres réels :

$$-3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 4.$$

21 Dresser le tableau de variation de cette fonction f sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

22 Déterminer, s'il(s) existe(nt), le (ou les) antécédents de 0,5 par la fonction f.

23 f désigne la fonction définie sur $[-3\,;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Déterminer $f(x)$ en fonction de x.

24 Représenter, dans un repère, la fonction valeur absolue sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

25 f désigne la fonction définie sur $[-10\,;10]$ par :

$$f(x)=|x-5|.$$

a. Calculer l'image par f des nombres réels : $-10\,;-5\,;0\,;5$ et 10.

b. Compléter : $f(x)=\begin{cases}\dots & \text{si } x<5\\ \dots & \text{si } x\geqslant 5\end{cases}$.

c. Dans un repère, tracer la représentation graphique de f sur $[-10\,;10]$.

26 f désigne la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par :

$$f(x)=5x-2+|x+1|.$$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	-5		-1		5
signe de $x+1$		…	0	…	
$\lvert x+1\rvert=$		…	0	…	
$f(x)=$					

27 Représenter, dans un repère, la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

Vocabulaire

On dit que la fonction partie entière est une fonction en escalier.

28 E désigne la fonction partie entière.

a. Déterminer l'image par E des nombres réels suivants :

$$-13\,;\ -7\,;\ -4{,}2\,;\ -0{,}8\,;\ 3\ \text{ et }\ 7{,}1.$$

b. Donner l'ensemble des nombres réels x tels que :

- $E(x)=3$;
- $E(x)=-2$.

29 f désigne la fonction définie sur $[-3\,;5]$ par :

$$f : x \longmapsto 1-x\,E(x).$$

a. Calculer $f(-2)$, $f(1)$ et $f(4)$.

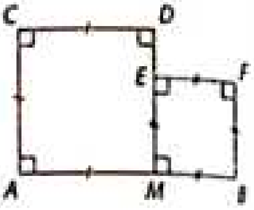
b. n désigne un nombre entier naturel.
Exprimer la valeur de $f(x)$ pour tout x de $[n\,;n+1[$.

c. Reproduire et compléter le tableau suivant.

x	-3	$-2{,}5$	-2	…	5
$f(x)$					

d. Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-3\,;5]$.

30 M désigne un point mobile du segment $[AB]$. $AB=4$ cm. $AMDC$ et $MBFE$ sont deux carrés. On note x la longueur AM et $\mathcal{P}(x)$ le périmètre du polygone $ACDEFB$.



a. Exprimer $\mathcal{P}(x)$ en fonction de x.

b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{P}$?

c. Dans un repère, représenter graphiquement $\mathcal{P}$.

31 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x-3|-|2x+1|.$$

a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x sans valeur absolue sur les intervalles.

- $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$;
- $\left]-\dfrac{1}{2}\,;3\right]$;
- $]3\,;+\infty[$.

b. En déduire que f est une fonction affine par intervalles.

c. Dans un repère, représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

La fonction inverse

Réponses rapides

32 Dresser le tableau de variation de la fonction inverse.

33 Donner l'inverse des nombres réels : $4\,;\ 10\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{3}{4}$.

34 Compléter les phrases suivantes :

a. $\pi>3$, la fonction inverse est … sur $]0\,;+\infty[$ donc $\dfrac{1}{\pi}\dots\dfrac{1}{3}$.

b. $-\sqrt{2}<-1$, la fonction… est décroissante sur … donc $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dots-1$.

35 Sans calculatrice, ordonner les nombres suivants :

a. $\dfrac{1}{3}\dots\dfrac{1}{4}$; b. $\dfrac{1}{-3}\dots\dfrac{1}{-2}$; c. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dots\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; d. $\dfrac{1}{-2}\dots\dfrac{1}{0{,}5}$.

36 **a.** Dans un repère, représenter la fonction inverse sur l'intervalle $[-5\,;0[\,\cup\,]0\,;5]$.

b. Pour $x \in [-4\,;-3]$, trouver graphiquement un encadrement de $\frac{1}{x}$.

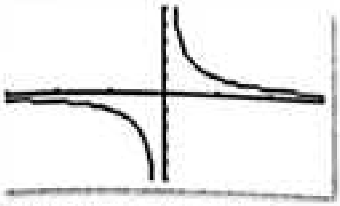
37 **a.** Dans un même repère, représenter la fonction inverse et la fonction linéaire $x \longmapsto -x$ sur l'intervalle :

$$I = [-3\,;0[\,\cup\,]0\,;3].$$

b. Résoudre graphiquement sur I, l'inéquation $\frac{1}{x} > -x$.

c. Peut-on écrire, $\frac{1}{x} > -x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > 0$? Justifier.

38 Saliou a représenté la fonction inverse à l'aide de sa calculatrice. Voici l'écran obtenu :



Résoudre, à l'aide de cet écran, les inéquations :

- $-3 < \frac{1}{x} \leqslant -1$;
- $-2 < \frac{1}{x} < 1$.

39 f désigne la fonction définie sur $[-5\,;0[\,\cup\,]0\,;5]$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}.$$

a. Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$$\boxed{x} \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{prendre}} \boxed{\dots} \xrightarrow[\text{par } -1]{\text{multiplier}} \boxed{\dots} \xrightarrow[2]{\text{ajouter}} \boxed{\dots}$$

b. Recopier et compléter l'enchaînement d'encadrement suivant en justifiant.

$$\boxed{\leqslant x \leqslant -1} \longrightarrow \boxed{\dots \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \dots} \longrightarrow \boxed{\dots \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant \dots} \longrightarrow \boxed{\dots \leqslant f(x) \leqslant \dots}$$

c. De même, déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [1\,;3]$.

40 f désigne la fonction : $x \longmapsto 3 + \frac{1}{x-1}$.

a. Donner l'ensemble de définition de f.

b. Créer un programme de calcul en trois étapes qui permet de transformer x en $f(x)$.

c. a et b désignent deux nombres réels appartenant à $]-\infty\,;1[$, compléter le raisonnement suivant.

$a \leqslant b < \dots$

on soustrait …

$a - 1 \leqslant \dots < 0$

la fonction inverse est … sur $]-\infty\,;0[$

$\frac{1}{a-1} \dots \frac{1}{b-1}$

on ajoute …

$\frac{1}{a-1} + 3 \dots \frac{1}{b-1} + 3$.

d. En déduire les variations de f sur $]-\infty\,;1[$.

e. Procéder de façon analogue pour montrer que f est décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

41 f désigne la fonction dont l'expression est $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

a. Pour quelle valeur de x la fonction f n'est-elle pas définie ? On note I l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que pour tout nombre réel $x \in I$, $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$.

c. Créer un programme de calcul en quatre étapes qui permette de transformer x en $f(x)$.

d. Démontrer que f est décroissante sur $]3\,;+\infty[$.

Aide

f est décroissante sur $]3\,;+\infty[$ signifie que deux nombres a et b $3 < a < b$ et leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans un ordre inverse.

42 **Propriétés du cours**

f désigne la fonction inverse.

a. Montrer que pour tous nombres réels a et b, non nuls,

$$f(a) - f(b) = \frac{b-a}{a \times b}.$$

b. Dans le cas où $0 < b < a$, déterminer le signe de $b - a$ et de $a \times b$ et en déduire le signe de $f(a) - f(b)$.

c. En déduire que f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

d. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

La fonction carré

Réponses rapides

43 Dresser le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

44 Reproduire et compléter.

- La fonction carré est décroissante sur … .
- Si $x \leqslant -3$, alors $x^2 \geqslant \dots$.
- Si $-2 \leqslant x \leqslant 2$, alors $\dots \leqslant x^2 \leqslant \dots$.

45 Sans calculatrice, ordonner les nombres suivants :

a. $(-0{,}42)^2 \dots (-0{,}75)^2$; **b.** $(\sqrt{3})^2 \dots (\sqrt{2})^2$;

c. $(0{,}42)^2 \dots (-0{,}72)^2$; **d.** $(-\sqrt{3})^2 \dots (\sqrt{2})^2$.

46 **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

b. En déduire l'encadrement de x^2 pour $x \in [-1\,;\sqrt{2}\,]$.

47 **a.** À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction carré sur $[-5\,;5]$.

b. En déduire les solutions des équations :

- $x^2 = 4$;
- $x^2 = 12$;
- $x^2 = -1$.

c. En déduire, les solutions des inéquations :

- $x^2 \leqslant 16$;
- $x^2 > 9$;
- $2 \leqslant x^2$.

Info

On peut tracer les droites horizontales $y = a$ où a est une constante sur la calculatrice et utiliser la touche TRACE : voir les pages 266 à 269 en fin de manuel.

Exercices d'entraînement

48 f désigne la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x)=(x-1)^2$.

a. Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$$\boxed{x}\xrightarrow[1]{\text{soustraire}}\boxed{\dots}\xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}}\boxed{\dots}$$

b. Recopier et compléter l'enchaînement d'encadrements suivant. Justifier.

$$\boxed{-2\leqslant x\leqslant 1}\longrightarrow\boxed{\dots\leqslant(x-1)\leqslant\dots}\longrightarrow\boxed{\dots\leqslant(x-1)^2\leqslant\dots}$$

c. En procédant de façon analogue, déterminer un encadrement de $f(x)$ pour $x\in[1\,;4]$.

d. f admet-elle un minimum sur $[-2\,;4]$?

49 f désigne la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x)=4x^2-5$.

a. Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$$\boxed{x}\xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}}\boxed{\dots}\xrightarrow[\dots]{\dots}\boxed{4x^2}\xrightarrow[\dots]{\dots}\boxed{f(x)}$$

b. a et b sont deux nombres réels de $[-2\,;0]$, compléter le raisonnement suivant.

$a<b\leqslant 0$	la fonction carré est …
$a^2\dots b^2$	multiplier par …
$4a^2\dots 4b^2\dots 0$	soustraire 5
$\dots>\dots\geqslant\dots$	

c. En déduire les variations de f sur $[-2\,;0]$.

d. De même, montrer que f est croissante sur $[0\,;3]$.

50 a. Reprendre l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $[-5\,;5]$ par $f(x)=-x^2+8$ pour déterminer un encadrement de $f(x)$ pour $x\in[2\,;5]$.

b. Peut-on utiliser cette démarche lorsque $x\in[-2\,;5]$?

51 **Propriétés du cours**

f désigne la fonction carré.

a et b sont deux nombres réels de $]-\infty\,;0]$ tels que $a<b$.

a. Exprimer, en fonction de a et b, $f(a)-f(b)$ sous la forme d'un produit.

b. Déterminer le signe de $a-b$, de $a+b$ puis de $f(a)-f(b)$.

c. En déduire l'ordre entre $f(a)$ et $f(b)$ puis démontrer que f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

d. Montrer, en vous aidant de la démarche précédente, que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

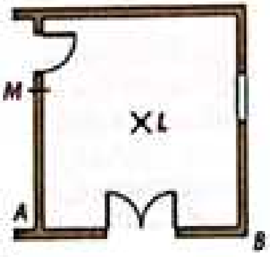
52 Donner un encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants en justifiant à l'aide des variations de la fonction carré.

a. $1\leqslant x\leqslant 2$; b. $-3<x<-2$; c. $-3<x<3$.

53 Un électricien doit installer un point lumineux au centre d'une pièce carrée de 4 m de côté.

Il souhaite minimiser la longueur du câble à placer au plafond.

On pose $AM=x$.



a. Montrer que :

$$LM^2=(x-2)^2+4.$$

b. f désigne la fonction définie sur $[0\,;4]$ par $f(x)=(x-2)^2+4$. Déterminer les variations de f sur $[0\,;4]$.

c. En déduire la position du point M.

La fonction cube

Réponses rapides

54 Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur $[-2\,;2]$.

55 Sans calculatrice, comparer :

a. $(1{,}5)^3$ et $(1{,}33)^3$; b. $(\sqrt{2})^3$ et $(\sqrt{3})^3$;

c. $(-\pi)^3$ et $(-3{,}1)^3$; d. $(-\sqrt{2})^3$ et $(1)^3$.

56 1. Représenter à main levée, la fonction cube dans un repère.

2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations.

a. $x^3=27$; b. $x^3<1$; c. $x^3=1$;

d. $x^3>8$; e. $x^3\leqslant 0$; f. $x^3=0$.

57 a. Dans un repère, représenter avec soin la fonction cube sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

b. Résoudre graphiquement les équations :

- $x^3=-8$; - $x^3=1$; - $x^3=0$; - $x^3=5$.

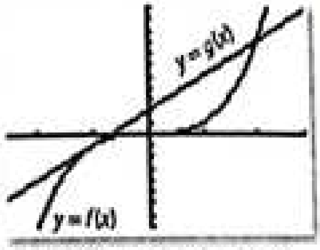
c. Résoudre graphiquement les inéquations :

- $x^3\geqslant -8$; - $x^3>1$; - $x^3\leqslant 0$; - $x^3>-1$.

Vocabulaire

Le nombre x tel que $x^3=5$ est noté $\sqrt[3]{5}$ ou $5^{1/3}$ et s'appelle racine cubique de 5.

58 Samia a tracé sur sa calculatrice les représentations graphiques de deux fonctions usuelles.



a. Donner l'expression de $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

b. Donner le nombre de solution de l'équation $x^3=3x+2$.

c. À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée à 10^{-1} près des solutions de l'équation précédente.

59 a. Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

b. Donner les extrema de cette fonction sur cet intervalle.

60 **Propriété du cours**

f désigne la fonction cube et $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative.

M et M' sont deux points appartenant à $(\mathscr{C})$, M a pour abscisse x et M' a pour abscisse $-x$.

1. a. Donner les coordonnées de M et M'.

b. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[MM']$. Que vient-on de démontrer ?

2. a. Montrer que, pour tous nombres réels a et b,

$$f(a)-f(b)=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

b. a et b sont deux nombres réels positifs tels que $a<b$. Montrer que $f(a)\leqslant f(b)$. Que peut-on en déduire pour f ?

61 f désigne la fonction définie sur $[-1\,;2]$ par $f(x)=(2x-1)^3$.

a. Dans un repère, tracer la représentation graphique de la fonction de variation de f sur $[-1\,;2]$; puis dresser le tableau de variation de f sur $[-1\,;2]$.

b. Montrer que, pour tous nombres réels a et b appartenant à $[-1\,;2]$ tels que $a<b$, on a $f(a)\leqslant f(b)$.

Aide

On pourra utiliser un programme de calcul comme dans les exercices 39 et 40.

62 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3+9x^2+15x-9.$$

a. Calculer $f(-5)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.

b. En déduire que f n'est ni croissante, ni décroissante sur $[-5\,;1]$.

c. Un élève affirme que certaines équations du type $f(x)=k$ où k est un nombre réel fixé, admettent plus d'une solution. Justifier cette affirmation.

d. Dans un repère, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;1]$. (S'aider de la calculatrice.)

e. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ selon les valeurs de k, sur l'intervalle $[-5\,;1]$.

La fonction racine carrée

Réponses rapides

63 Donner la solution des équations suivantes.

a. $\sqrt{x}=4$;

b. $\sqrt{x}=0$;

c. $\sqrt{x}=\dfrac{5}{3}$;

d. $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{4}$.

64 Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a. $x\mapsto 2\sqrt{x}$;

b. $x\mapsto\sqrt{x+3}$;

c. $x\mapsto\sqrt{2x+6}$;

d. $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$.

65 Calculer l'image, si elle existe, des nombres réels $-4\,;-2\,;$ 0 et 12 par les fonctions suivantes :

a. $f(x)=-\sqrt{x}$;

b. $f(x)=\sqrt{-x}$;

c. $f(x)=(\sqrt{x})^2$;

d. $f(x)=\sqrt{x^2}$.

66 Déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$ dans les cas suivants.

a. $1\leqslant x\leqslant 9$;

b. $3\leqslant x\leqslant 9$;

c. $x>32$;

d. $x\in[10^6\,;10^8]$.

67 f désigne la fonction définie sur $[0\,;9]$ par $f(x)=\sqrt{4x}$.

a. Démontrer que f est croissante sur $[0\,;9]$.

b. Dans un repère, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\,;9]$.

Aide

Pour montrer que f est croissante sur un intervalle I, on peut choisir deux nombres a et b de I tels que $a<b$ et chercher à comparer leurs images $f(a)$ et $f(b)$.

68 f désigne la fonction définie sur $[0\,;7]$ par :

$$f(x)=-5\sqrt{3x+1}.$$

a. Tracer, à l'aide de la calculatrice, la fonction f sur $[0\,;7]$ et dresser son tableau de variation sur $[0\,;7]$.

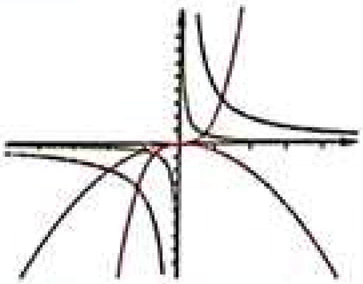
b. Montrer que pour tous nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $[0\,;7]$ tels que $a<b$, on a $f(a)\geqslant f(b)$.

Que vient-on de prouver ?

Fonctions composées

Réponses rapides

69 f, g, h et i désignent quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{4}{x}$; $g(x)=2x^3$; $h(x)=\dfrac{1}{2x}$ et $i(x)=-\dfrac{x^2}{2}$ et représentée ci-dessous.



Associer chaque fonction à une couleur de courbe.

70 f désigne la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x$. Déterminer l'expression de la composée de f suivie de g dans les cas suivants.

a. $g(x)=\dfrac{1}{x}$;

b. $g(x)=x^2$;

c. $g(x)=x^3$;

d. $g(x)=\sqrt{x}$.

71 f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3 \quad\text{et}\quad g(x)=-2x.$$

a. Calculer $g\circ f(0)$; $g\circ f(-1)$ et $g\circ f(2)$.

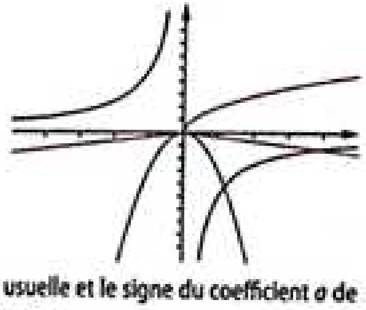
b. Exprimer $g\circ f(x)$ en fonction de x.

c. Quel est l'ensemble de définition de $g\circ f$?

72 Dans chaque cas, $f=u\circ v$ où u est une fonction linéaire et v une fonction usuelle. Déterminer u et v.

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{7}$; b. $f(x)=-\dfrac{3}{x}$; c. $f(x)=-x^2$; d. $f(x)=\dfrac{x^3}{5}$.

73 Dans un même repère, on a représenté quatre fonctions obtenues par composée d'une fonction usuelle et d'une fonction linéaire.

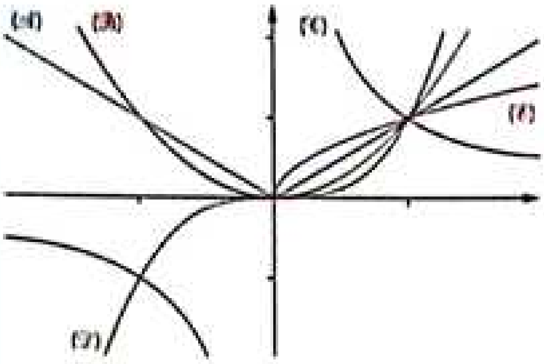


Déterminer la fonction usuelle et le signe du coefficient a de la fonction linéaire $f : x\mapsto ax$.

Faire le point

74 Vocabulaire et représentation

Associer chacune des courbes ci-dessous à la fonction usuelle correspondante.



- $x \mapsto |x|$; $\quad$ - $x \mapsto x^2$; $\quad$ - $x \mapsto x^3$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$; $\quad$ - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

75 À un détail près

Fua a déterminé les variations de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{3}{1-x} \text{ sur }]1\,;+\infty[.$$

Elle a conclu : « *Cette fonction est décroissante sur* $]1\,;+\infty[$ *comme la fonction inverse* ».

a. Compléter le dialogue ci-dessous entre Fua et son professeur.

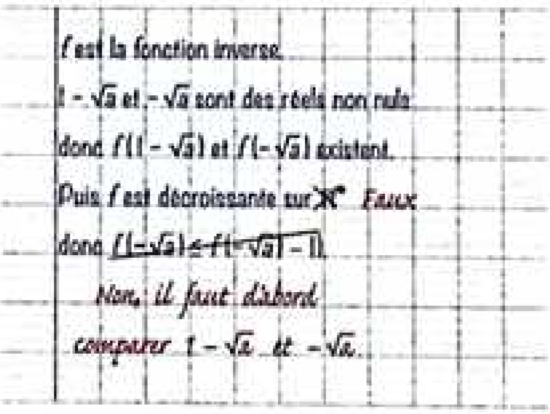
Professeur : « *N'y-a-t-il que la fonction inverse qui intervient dans l'expression de la fonction f ?* »

Fua : « … ».

b. La conclusion du Fua était-elle correcte ?
Si non, préciser les variations des fonctions usuelles utilisées et déterminer les variations de f sur $]1\,;+\infty[$.

76 Déceler une erreur

a désigne un nombre réel strictement supérieur à 1.
Voici le raisonnement tenu par un élève pour comparer les nombres $\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.



f est la fonction inverse.

$1-\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont des réels non nuls

donc $f(1-\sqrt{a})$ et $f(-\sqrt{a})$ existent.

Puis f est décroissante sur ~~$\mathbb{R}^*$~~ *Faux*

donc $f(1-\sqrt{a}) \leq f(-\sqrt{a})$

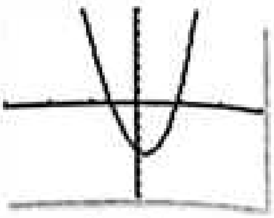
Non, il faut d'abord

comparer $1-\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$.

Expliquer les remarques du professeur et proposer une solution correcte.

77 Avec une calculatrice

Sami a affiché sur sa calculatrice la courbe de la fonction f d'expression :
$f(x) = x^3 + 7x^2 - 3x - 4$.



a. Déterminer, par lecture graphique, un encadrement d'amplitude 1 des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b. Existe-t-il d'autres solutions à cette équation ?
(Agrandir la fenêtre graphique de la calculatrice.)

c. Pour chacune des solutions, indiquer une fenêtre graphique adaptée qui permet de donner un encadrement de ces solutions à 0,2 près.

78 Les étapes d'une démonstration

Kadiatou a réalisé une fiche de révision pour rechercher un encadrement d'une expression.

① Je rédige le programme de calcul correspondant à l'expression : $\boxed{x} \xrightarrow[\ldots]{\ldots} \boxed{\ldots} \xrightarrow[\ldots]{\ldots} \boxed{f(x)}$

② Si, sur l'intervalle considéré, les fonctions usuelles utilisées sont monotones, alors, je pars de l'encadrement de la variable et j'utilise la variation de la fonction usuelle.

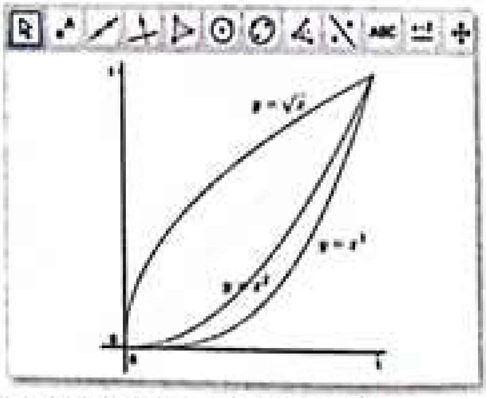
③ Sinon, je scinde l'encadrement donné afin d'obtenir des encadrements où les fonctions usuelles utilisées sont monotones.

Utiliser la fiche ci-dessus afin de déterminer un encadrement de $(2-x)^2$:

a. lorsque $x \in [3\,;7]$; $\quad$ b. lorsque $x \in [-1\,;3]$.

79 Comparer des expressions

Voici un graphique obtenu avec le logiciel Geogebra.



a. Compléter la phrase par lecture graphique :
pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;1]$,

$$\ldots \leq \ldots \leq \ldots \leq \ldots.$$

b. Procéder de la même manière pour comparer ces quatre fonctions usuelles sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

c. Comparer les fonctions usuelles d'expressions $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$ sur chacun des intervalles.

- $[-1\,;0]$; $\quad$ - $]-\infty\,;-1]$.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

vrai faux

1. La fonction $x \mapsto 2|x+4|$ est une fonction affine par intervalles. ☐ ☐
2. Si x est un nombre réel tel que $x > 3$, alors $-x^2 \in]-\infty ; 0]$. ☐ ☐
3. Si f désigne la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = -2\sqrt{x}$, alors : ☐ ☐

x	0		4
$f(x)$	0	↗	4

4. La fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[0 ; 1[$. ☐ ☐
5. f désigne la fonction $x \mapsto x^2 + 4$. 4 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. ☐ ☐

Avec justification

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

vrai faux

1. Si le point M appartient à la courbe représentative de la fonction valeur absolue alors son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées aussi. ☐ ☐
2. Quel que soit le nombre réel $a \neq 0$, les courbes représentant $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto ax$ dans un repère ont au moins un point d'intersection. ☐ ☐
3. La fonction $x \mapsto 3(x-1)^2 + 2$ est croissante sur l'intervalle $[1 ; 10]$. ☐ ☐
4. $-\frac{1}{3}$ est inférieur à $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. ☐ ☐
5. $(-1\,001)^3$ est supérieur à $(-999)^3$. ☐ ☐

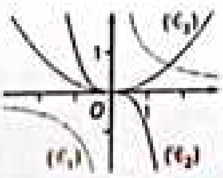
Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

Dans le repère ci-dessous, trois fonctions ont été représentées.

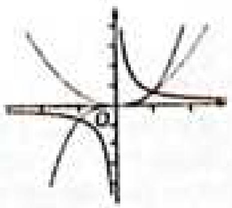


1. La courbe $(\mathscr{C}_1)$ est la représentation graphique sur $[-2 ; 4]$ de la fonction :
   a. $x \mapsto \sqrt{x}$; b. $x \mapsto \frac{1}{x}$; c. $x \mapsto |x|$.
2. La courbe $(\mathscr{C}_2)$ est la représentation graphique sur $[-2 ; 4]$ de la fonction cube suivie de la fonction :
   a. $x \mapsto -x$; b. $x \mapsto \frac{1}{4}x$; c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$.
3. 3. La courbe $(\mathscr{C}_3)$ est la représentation graphique sur $[-2 ; 4]$ de la fonction carré suivie de la fonction :
   a. $x \mapsto -x$; b. $x \mapsto \frac{1}{4}x$; c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$.

Avec justification

Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

Sur la figure ci-contre, trois fonctions usuelles ont été représentées. Associer chaque courbe à la fonction usuelle correspondante afin de justifier, par lecture graphique, les réponses aux questions.



1. Si $a \leqslant 0 \leqslant b$ alors :
   a. $a^2 \geqslant b^2$; b. $a^2 \leqslant b^2$;
   c. on ne peut pas comparer a^2 et b^2.
2. Si $x \in [-3 ; -1]$ alors :
   a. $\frac{1}{x} \in [1 ; 3]$; b. $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{3} ; 1\right]$; c. $\frac{1}{x} \in \left[-1 ; -\frac{1}{3}\right]$.
3. Si $a \leqslant 0 \leqslant b$ alors :
   a. $a^3 \geqslant b^3$; b. $a^3 - b^3 \leqslant 0$;
   c. on ne peut pas comparer a^3 et b^3.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

11 Exercices d'approfondissement

84 L'enclos

Aboubacar est fermier. Il dispose de 200 m de clôture avec lesquels il envisage de délimiter un champ rectangulaire. Il souhaite connaître les dimensions du champ qui aura une aire maximale.

a. Tracer à main levée une figure illustrant le problème. Un des côtés mesure x mètres, noter la longueur des autres côtés.

b. Déterminer l'aire du champ en fonction de x.

c. Dresser le tableau de variation de cette fonction afin de répondre au souhait d'Aboubacar.

85 Les fonctions homographiques

f désigne la fonction définie sur $]-1{,}5\,;6]$ par :

$$f(x)=\frac{10x+8}{2x+3}.$$

1. Montrer que pour tout $x\in[-1\,;6]$, $f(x)=5-\dfrac{7}{2x+3}$.

2. a. a et b désignent deux nombres réels de $]-1{,}5\,;6]$ tels que :

$$a<b.$$

Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

b. En déduire les variations de f sur $]-1{,}5\,;6]$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

3. $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $y=5$ et $(\mathcal{K})$ est la courbe représentative de f dans un repère.

a. Déterminer le signe de $f(x)-5$ lorsque $x\in]-1{,}5\,;6]$.

b. En déduire les positions relatives de la courbe $(\mathcal{K})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.

86 Déterminer un maximum

1. Démontrer que les fonctions f et g définies ci-dessous présentent un maximum sur leur ensemble de définition.

a. $f(x)=-(x-1)^2+4$; b. $g(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$.

2. a. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$.

b. Étudier les variations de g sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$.

87 Point mobile et Geogebra

$[AB]$ désigne un segment de longueur 6 cm et de milieu O. M est un point qui se déplace sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et H est le projeté orthogonal de M sur le segment $[AB]$.

1. a. Dans Geogebra, créer la figure illustrant les données de l'exercice.

b. Conjecturer la position du point M pour laquelle $AH=3$.

2. a. À l'aide de deux triangles rectangles, montrer que :

$$\frac{AH}{AM}=\frac{AM}{AB}.$$

b. On pose $AM=x$. En déduire que $AH=\dfrac{1}{6}x^2$.

c. f est la fonction définie sur $[0\,;6]$ par $f(x)=\dfrac{1}{6}x^2$.

Décomposer f en une fonction usuelle et une fonction linéaire. À l'aide de cette décomposition, étudier les variations de f sur $[0\,;6]$.

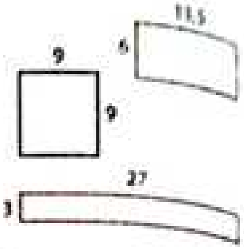
3. a. Dans un repère, représenter la fonction f sur $[0\,;6]$, puis résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$.

b. Déterminer la valeur exacte de la solution de l'équation $f(x)=3$ en utilisant des arguments géométriques.

88 Périmètre minimal

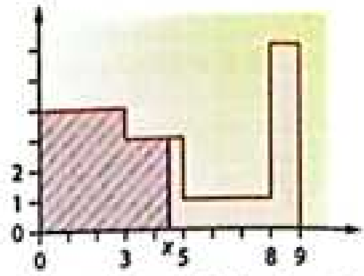
a. Calculer l'aire des rectangles ci-contre.
Quel est celui dont le périmètre est minimal ?

b. Parmi tous les rectangles d'aire 81, quel est celui qui a le périmètre minimal ?



89 Aire d'un histogramme

Voici un histogramme qui illustre une série statistique.



$\mathcal{A}(x)$ désigne l'aire du domaine hachuré en violet, lorsque la valeur du caractère est x.

a. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $[0\,;9]$.

b. Représenter dans un repère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[0\,;9]$ par $x\mapsto\mathcal{A}(x)$.

c. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle :

$$\mathcal{A}(x)=\frac{\text{Aire totale}}{2}.$$

Info

Cette méthode permet de déterminer une médiane d'une série statistique dont les modalités sont des classes (des intervalles).

90 Ordre et variation

1. u et v désignent deux nombres réels tels que $0\leqslant u<v$.

Comparer : a. $2u^2$ et $2v^2$; b. $\dfrac{1}{u+1}$ et $\dfrac{1}{v+1}$.

En déduire le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=2x^2-\dfrac{1}{x+1}$.

2. Démontrer que la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est monotone sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$.

91 Caractérisation géométrique d'une parabole

Dans un repère, $(\mathcal{P})$ désigne la représentation graphique de la fonction carré.

F est le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$ et $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation réduite $y=-\dfrac{1}{4}$.

1. Représenter $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{D})$ et le point F dans un repère orthonormé (O, I, J). M est un point de $(\mathcal{P})$ d'abscisse x. H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

2. a. Exprimer HM^2 en fonction de x.

b. Exprimer FM^2 en fonction de x.

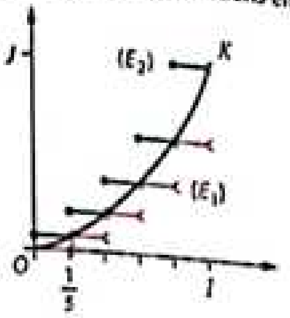
c. En déduire que $FM=HM$.

Info

Cette méthode permet de définir géométriquement une parabole à l'aide d'une droite $(\mathcal{D})$, appelée directrice et un point F, appelé foyer.
La parabole est l'ensemble des points du plan situés à égale distance de F et de $(\mathcal{D})$.

92 Aire sous une parabole

Dans le repère ci-dessous, on a tracé, sur l'intervalle $[0;1]$, la représentation graphique $(\mathcal{P})$ de la fonction carré ainsi que celles, notées (E_1) et (E_2) de deux fonctions en escalier.

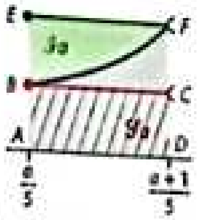


1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

$x \in$	$\left[0;\frac{1}{5}\right[$	$\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right[$	$\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right[$	$\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right[$	$\left[\frac{4}{5};1\right[$
$E_1(x)$					
$E_2(x)$					

2. a désigne un nombre entier tel que $0 \leqslant a \leqslant 4$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{a}{5};\frac{a+1}{5}\right[$, on note $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{I}_a$ les aires des rectangles $ABCD$ et $AEFD$ représentés ci-contre.



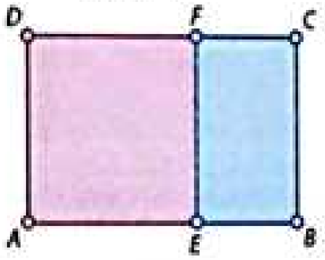
a. Déterminer $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{I}_a$ pour chaque valeur de a.

b. En déduire un encadrement de l'aire du domaine situé sous la parabole $(\mathcal{P})$, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les bornes $\frac{a}{5}$ et $\frac{a+1}{5}$.

93 Rectangle d'or

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle et $AEFD$ un carré. $ABCD$ est un rectangle d'or lorsque ses dimensions sont proportionnelles à celles du rectangle $BEFC$.

Autrement dit, lorsque $\frac{AD}{AB} = \frac{FC}{EF}$.



1. x est le nombre réel égal à $\frac{L}{\ell}$, où L et ℓ sont les dimensions du rectangle $ABCD$.

Vérifier que $ABCD$ est un rectangle d'or si $x = 1 + \frac{1}{x}$.

2. a. Résoudre cette équation en représentant dans un même repère les courbes d'équation $y = x - 1$ et $y = \frac{1}{x}$.

b. Avec la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution positive de cette équation.

c. Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

94 Précision d'encadrement

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

1. On suppose $1 \leqslant x \leqslant 4$.

a. En utilisant les propriétés des inégalités, donner un encadrement de $f(x)$.

b. En admettant que f est croissante sur $]-1;+\infty[$, donner un encadrement de $f(x)$.

c. Comparer la qualité des encadrements obtenus en a. et b.

2. Mêmes questions si $-5 \leqslant x \leqslant -2$.
(On admettra que f est encore croissante sur $]-\infty;-1[$.)

95 Fonction composée

f désigne la fonction carré définie sur $[-2;2]$ et g la fonction affine définie sur $[-2;2]$ par $g(x) = 2x - 4$.

a. Calculer $g(f(2))$ puis déterminer pour $x \in [-2;2]$ l'expression de $g(f(x))$.

b. Calculer $f(g(2))$ puis déterminer pour $x \in [-2;2]$ l'expression de $f(g(x))$.

96 Changement de repère

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) = (x-2)^3 + 3.$$

2. $M(x;y)$ et $A(2;3)$ sont deux points du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'abscisse sera notée X et son ordonnée Y.

b. Justifier que $M(X;Y)$ dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

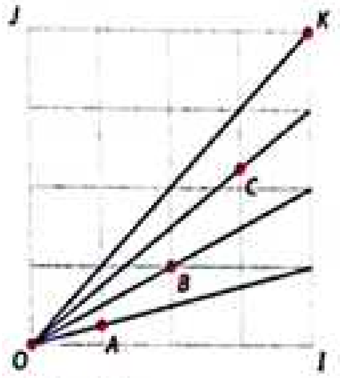
c. Démontrer que si $M \in (\mathcal{C})$, alors ses coordonnées dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vérifient $Y = X^3$.

d. Démontrer que, dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, si les coordonnées du point M vérifient $Y = X^3$, alors M appartient à $(\mathcal{C})$.

3. a. Placer A dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ puis tracer la courbe d'équation $Y = X^3$ dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b. Par quelle transformation peut-on obtenir cette courbe $(\mathcal{C})$ à partir de la courbe d'une fonction usuelle ?

97 Tracé d'une parabole sur un quadrillage



$OIJK$ est un carré de côté 1.

$OIJK$ est partagé en 16 carrés identiques

a. Démontrer que A appartient à la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation :

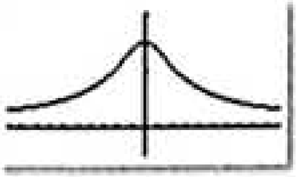
$$y = x^2.$$

b. Montrer, de même, que les points O, B, C et K appartiennent à cette parabole $(\mathcal{P})$. Tracer à main levée une allure de $(\mathcal{P})$.

Exercices d'approfondissement

98 Enchainement et variation

Sur l'écran de calculatrice, ci-dessous, on a tracé la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}}$.



1. Conjecturer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Utiliser les fonctions usuelles pour étudier les variations de f :
a. sur $[0\,;+\infty[$; b. $]-\infty\,;0]$.
3. Démontrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Rappel

> *M est le maximum de f sur un intervalle I si, et seulement si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.*

99 Asymptote

f désigne la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-2x+7}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x de I, $f(x)=-2+\dfrac{5}{x-1}$.
3. Déterminer les variations de f sur chaque intervalle de I en utilisant les variations des fonctions usuelles.
4. a. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f dans un repère ne coupe jamais la droite (Δ) d'équation $y=-2$.
b. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) pour $x \in\,]1\,;+\infty[$.
5. Pour $x \in\,]1\,;+\infty[$, M est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x et M' celui de (Δ) d'abscisse x.
a. Exprimer la distance MM' en fonction de x.
On la note $d(x)$.
b. Déterminer les variations de la fonction :
$$x \mapsto d(x) \text{ sur }]1\,;+\infty[.$$
c. Que dire de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (Δ) ?
d. À partir de quelle valeur de x a-t-on $MM' < 0{,}1$?

100 Bénéfice maximum

Monsieur B. est directeur d'un hôtel faisant partie des hôtels de la chaine mondiale BIENDORMIR.

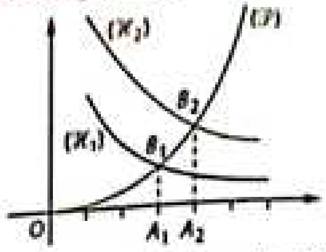
Il vient de recevoir le résultat d'une analyse qui a étudié le bénéfice, noté $B(x)$ exprimé en F CFA, de son hôtel, en fonction du taux d'occupation des chambres x, exprimé en %.

Voici la formule donnée :

Pour tout x de $[20\,;90]$, $B(x)=-x^2+160x+c$, c étant une constante à calculer avec le bénéfice obtenu lorsque le taux d'occupation est de 40 %.

a. Pour un taux d'occupation de 40 % le bénéfice est de 9 000 F CFA. Calculer c.
b. Démontrer que, dans ce cas, pour tout $x \in [20\,;90]$,
$$B(x)=-(x-80)^2+10\,600.$$
c. Déterminer les variations de B sur $[20\,;90]$.
d. Déterminer le taux d'occupation pour qu'il y ait un bénéfice maximal dans ce cas.

101 Aire de triangles



Dans le repère ci-dessus, $(\mathscr{P})$ est la représentation graphique de la fonction carré et $(\mathscr{H}_n)$ est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{n}{x}$, où n est un nombre entier naturel non nul.

B_n est le point d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{H}_n)$ et A_n est le projeté orthogonal de B_n sur l'axe des abscisses.
Exprimer l'aire du triangle OA_nB_n en fonction de n.

102 Distance d'un point à une droite

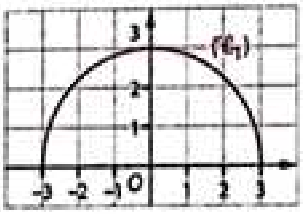
Dans le repère orthonormé (O, I, J), A est le point de coordonnées $(6\,;2)$ et $(\mathscr{D})$ est la droite d'équation réduite $y=3x+2$.

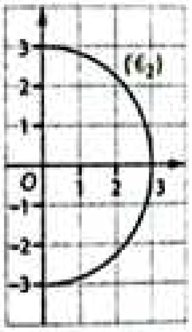
1. $M(x\,;y)$ est un point de la droite $(\mathscr{D})$, exprimer AM^2 en fonction de x.
2. Montrer que pour tout nombre réel x,
$$x^2-1{,}2x+3{,}6=(x-0{,}6)^2+3{,}24.$$
3. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto AM^2$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de x pour laquelle AM est minimum.
5. a. Donner les coordonnées du point M pour lequel AM est minimal.
b. Calculer alors AM.

Vocabulaire

> Cette valeur est appelée distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

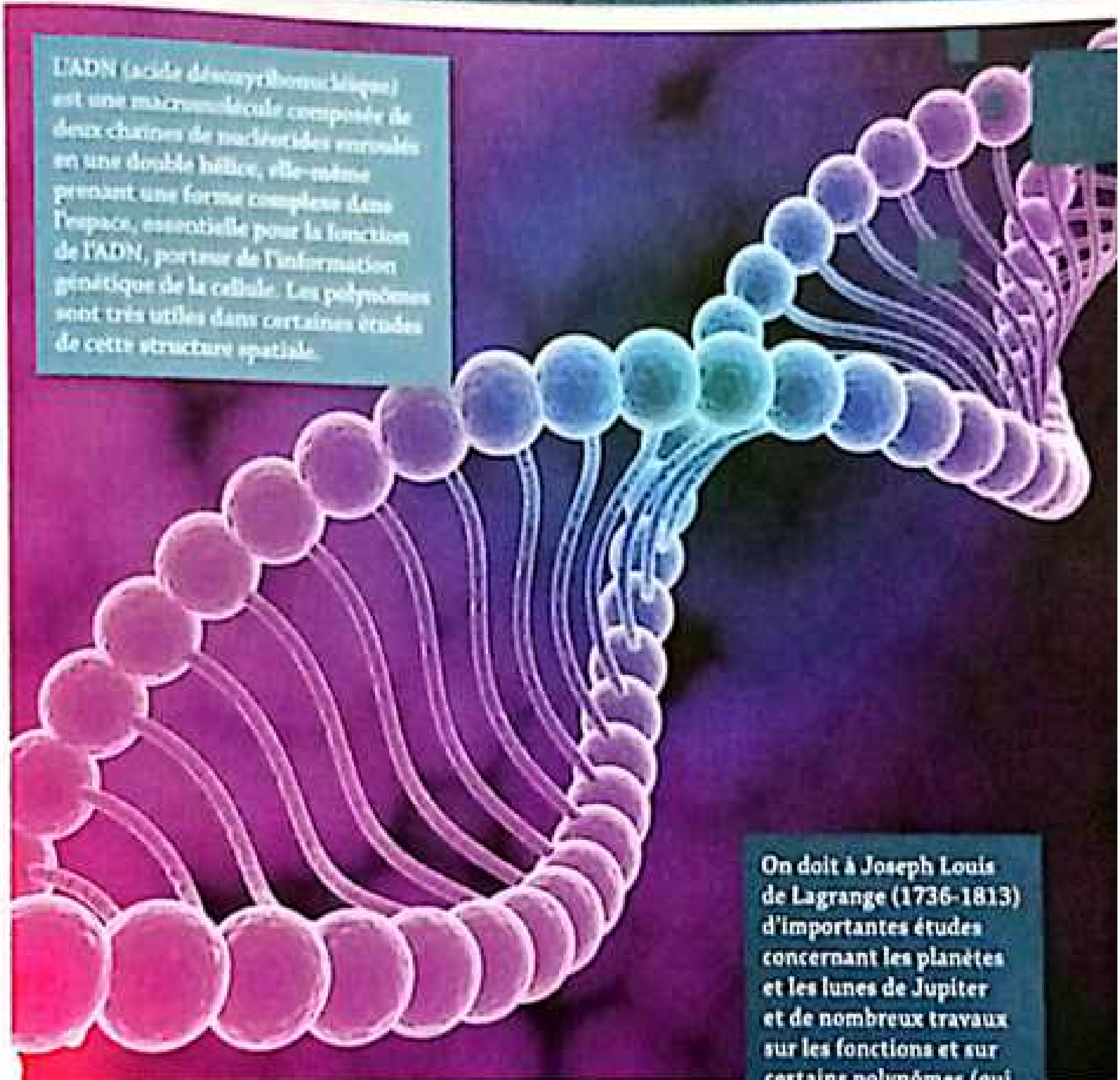
103 Demi-cercle et fonction





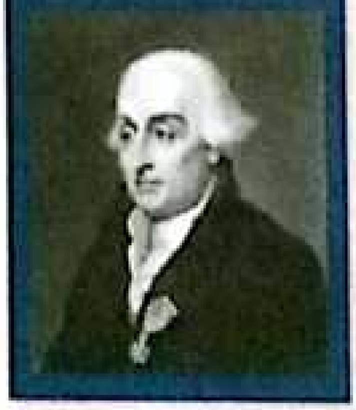
1. a. Parmi les graphiques ci-dessus, quel est celui qui représente une fonction ? On note cette fonction f et $(\mathscr{C})$ le graphique.
b. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Démontrer qu'un point $M(x\,;y)$ appartient à $(\mathscr{C}_1)$ si, et seulement si, $-3 \leqslant x \leqslant 3$; $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2=9$.
3. En déduire une équation de la courbe $(\mathscr{C}_1)$; puis une expression de $f(x)$.
4. Établir le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
5. Justifier l'existence d'un élément de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$ en utilisant l'expression de $f(x)$.
6. On note $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses.
Déterminer l'expression $g(x)$ de la fonction représentée par $(\mathscr{C}')$.

12 Polynômes et fractions rationnelles



L'ADN (acide désoxyribonucléique) est une macromolécule composée de deux chaînes de nucléotides enroulés en une double hélice, elle-même prenant une forme complexe dans l'espace, essentielle pour la fonction de l'ADN, porteur de l'information génétique de la cellule. Les polynômes sont très utiles dans certaines études de cette structure spatiale.

On doit à Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) d'importantes études concernant les planètes et les lunes de Jupiter et de nombreux travaux sur les fonctions et sur certains polynômes (qui portent son nom).



Les objectifs du chapitre

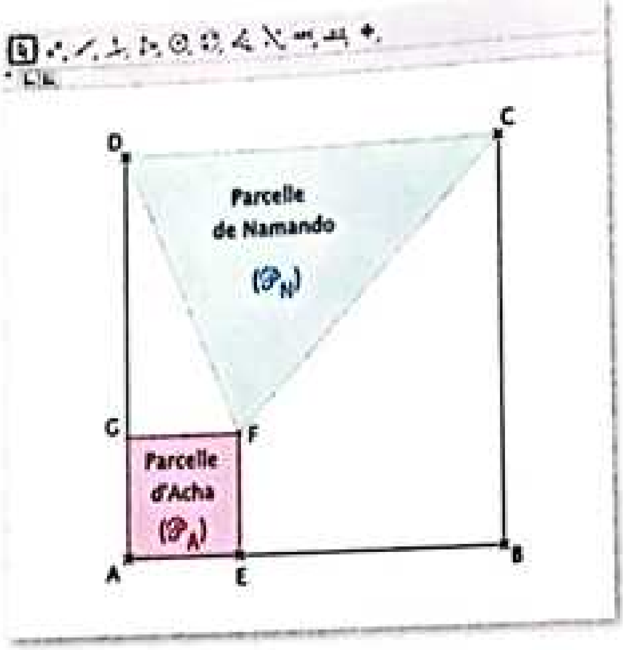
- Maîtriser le vocabulaire relatif aux polynômes (degré, racine, monôme, etc.).
- Factoriser un polynôme par identification ou à l'aide d'une division euclidienne.
- Résoudre des équations polynômiales.
- Maîtriser le vocabulaire relatif aux fractions rationnelles (racines, pôles, etc.).
- Manipuler les différentes écritures d'une fraction rationnelle.

Cours 1

1 Un problème d'aires

Un grand-père dispose d'une parcelle carrée de 12 dam de côté.
Il souhaite donner une partie à chacune de ses petites-filles, Acha et Namando.
Acha voudrait une partie carrée, tandis que Namando préfère une partie triangulaire.
La parcelle est représentée ci-contre par le carré *ABCD*.
Le point *E* est un point mobile du segment [*AB*]. Pour que le partage soit équitable, il faut que les parties $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_N$ aient la même aire.

1 Conjecturer avec le logiciel GeoGebra



a. Ouvrir le logiciel GeoGebra et construire un carré *ABCD* tel que *AB* = 12.

- Placer un point *E* sur le segment [*AB*].
- Dans le menu déroulant de l'icône ▷, cliquer sur l'icône ⬠ Polygone régulier ; puis sur les points *A* et *E* de la figure afin d'obtenir le carré *AEFG*.
- Construire le segment [*AE*].
- Cliquer sur l'icône ▷ ; puis sur les points *F*, *C*, *D*, *F* afin de créer le triangle *CDF*.

b. Cliquer sur l'icône ↖ afin de déplacer le point *E* sur [*AB*].
Observer les aires des polygones *AEFG* et *CDF*.
Conjecturer la position du point *E* pour laquelle le partage est équitable.

2 Démontrer une conjecture

On pose $x = AE$.

a. Exprimer l'aire des deux parcelles $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_N$ en fonction de x.

b. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 + 6x - 72 = 0$.

L'expression $x^2 + 6x - 72$ est un polynôme du second degré.

c. Montrer que l'équation $x^2 + 6x - 72 = 0$ est équivalente à l'équation $(x - 6)(x + 12) = 0$.

d. Où faut-il placer le point *E* afin que le partage soit équitable ? Justifier.

2 Forme canonique

Cours 1

1 Se laisser guider

P désigne le polynôme défini par $P(x) = 5x^2 - 2x - 3$.

a. Recopier et compléter :

$$P(x) = 5\left[x^2 - \frac{2x}{5} - \ldots\right] = 5\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \ldots - \ldots\right] = 5\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{\ldots}{25}\right].$$

L'expression initiale de P est appelée forme développée.
L'expression finale de P est appelée forme canonique.

b. • Déduire une factorisation de *P* en utilisant une identité remarquable.

• Quelles sont les valeurs de *x* pour lesquelles $P(x) = 0$?

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont appelées racines de P.

2 Travailler en autonomie

Q désigne le polynôme défini par $Q(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

a. Compléter l'expression ci-dessous afin d'obtenir la forme canonique de *Q*.

$$Q(x) = 2\left[x^2 + \ldots + \ldots\right] = 2\left[(x + \ldots)^2 - \ldots + \ldots\right] = 2\left[(x + \ldots)^2 + \ldots\right].$$

b. • Peut-on factoriser le polynôme *Q* ?

• Le polynôme *Q* possède-t-il des racines ? Justifier.

3 Signe de polynômes – Quotient de polynômes

Cours 4

P et *Q* désignent les polynômes définis par :

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \quad \text{et} \quad Q(x) = 5 - 2x.$$

1 Signe d'un polynôme

a. Justifier que $P(x) = (x + 1)(3x - 1)(x + 2)$.

b. Donner les racines du polynôme *P*.

c. Compléter le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+1$			0		
$3x-1$				0	
$x+2$		0			
$P(x)$					

2 Quotient de polynômes

On donne $F(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$.

Une telle expression, obtenue par quotient de deux polynômes, est appelée fraction rationnelle.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de *x*, le nombre $F(x)$ est-il défini ?
Préciser alors l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_F$, de la fraction rationnelle *F*.

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont appelées pôles de F.

b. Compléter le tableau de la question 1. c., avec le signe de $Q(x)$, afin d'en déduire le signe de $F(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_F$.

1 Polynôme du second degré

a forme développée

Définitions

Un polynôme du second degré P est une expression de la forme :

$$ax^2+bx+c$$

où a désigne un nombre réel non nul, et b et c deux nombres réels.
Cette expression est appelée **forme développée** de P.

Exemple
$Q(x)=x^2-7$;
$R(x)=-5x^2+x-1$;
$S(x)=2x^2-3x$
sont des polynômes du second degré.

Remarque On parle aussi de trinôme du second degré.

Définition

P désigne un polynôme du second degré.
Lorsqu'elle existe, une **racine du polynôme** P est un nombre réel α tel que $P(\alpha)=0$.

Exemple
$P(x)=x^2-x-2$.
$P(2)=2^2-2-2=0$.
$P(-1)=(-1)^2-(-1)-2=0$.
2 et -1 sont deux racines de P.

Remarques

- Selon les cas, un polynôme du second degré peut admettre deux, une ou aucune racine(*s*).
- Une racine de P est donc une solution de l'équation $P(x)=0$.

Propriété

P désigne un polynôme du second degré, d'expression $P(x)=ax^2+bx+c$.
Quand elles existent, les racines α et β de P vérifient :

- $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$;
- $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

Exemple
$P(x)=x^2-x-2$.
$\alpha+\beta=2+(-1)=1=-\dfrac{(-1)}{1}$
$\alpha\beta=2\times(-1)=-\dfrac{2}{1}$.

b forme canonique

Propriété Définition

Tout polynôme P du second degré, d'expression $P(x)=ax^2+bx+c$ s'écrit :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Cette expression est appelée **forme canonique** de P.

Remarque

En posant $x_0=\dfrac{-b}{2a}$, la forme canonique permet d'écrire :

$P(x_0)=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+P(x_0)$.

Ainsi, si $a>0$, $P(x)>P(x_0)$ et si $a<0$, $P(x)<P(x_0)$.

Exemple

- $T(x)=7x^2+5x-4$
$$=7\left[x^2+\frac{5}{7}x-\frac{4}{7}\right]$$
$$=7\left[\left(x+\frac{5}{14}\right)^2-\frac{137}{196}\right].$$
- $U(x)=x^2-x+1$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

c forme factorisée

Propriété Définition

- P désigne un polynôme du second degré, d'expression $P(x)=ax^2+bx+c$.
Si P admet une racine x_1, alors il existe une seconde racine x_2 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Lorsqu'elle existe, cette forme est appelée **forme factorisée** de P.

Exemple
$P(x)=x^2-x-2$.
On a vu que P admet deux racines, 2 et -1, donc
$$P(x)=\underset{\overset{\uparrow}{a}}{1}(x-\underset{\overset{\uparrow}{x_1}}{2})(x-(\underset{\overset{\uparrow}{x_2}}{-1})).$$

Remarque

Il existe des polynômes du second degré non factorisables dans $\mathbb{R}$, comme x^2+9 ou x^2-x+1.

12 Savoir-faire

1 Racines d'un polynôme du second degré

P désigne le polynôme défini par $P(x)=2x^2-5x-12$.
a. Vérifier que 4 est une racine de P ; puis déterminer sa seconde racine.
b. Déterminer un polynôme du second degré ayant −3 et 5 pour racines.

Solution commentée

a. • $P(4)=2\times4^2-5\times4-12=0$ donc 4 est une racine de P.

• On note β la seconde racine de P.

On écrit : $\begin{cases} 4+\beta=-\dfrac{-5}{2}=\dfrac{5}{2} & (1) \\ 4\times\beta=\dfrac{-12}{2}=-6 & (2) \end{cases}$.

L'équation (2) donne $\beta=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}$. Puisque $4+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$, l'équation (1) est vérifiée. $-\dfrac{3}{2}$ est donc la seconde racine de P.

b. On cherche deux nombres réels b et c tels que le polynôme x^2+bx+c ait −3 et 5 pour racines.

On sait que $(-3)+5=-\dfrac{b}{1}=-b$, donc $b=-2$ et $(-3)\times5=\dfrac{c}{1}=c$ donc $c=-15$.

Ainsi, le polynôme $x^2-2x-15$ a pour racines −3 et 5.

Méthode

a. Lorsqu'une racine réelle α d'un polynôme du second degré est connue, la seconde racine réelle β vérifie :

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

où $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ d'après la propriété du paragraphe 1. a.

b. Pour déterminer un polynôme du second degré x^2+bx+c ayant pour racines réelles α et β, on peut :
- poser $b=-(\alpha+\beta)$ et $c=\alpha\beta$;
- utiliser la forme factorisée.

2 Différentes écritures d'un polynôme du second degré

P désigne le polynôme défini par $P(x)=2x^2-x-3$.
a. Écrire la forme canonique de P.
b. En déduire la forme factorisée de P.

Solution commentée

a. $$P(x)=\underbrace{2x^2-x-3}_{\text{forme développée}}=2\left[\underbrace{x^2-\frac{x}{2}}_{\text{début d'une identité remarquable}}-\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right]$$

donc $P(x)=2\left[\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{16}\right]$. (forme canonique de P)

b. $$P(x)=2\left[\underbrace{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2}_{\text{Identité remarquable}}\right]=2\left[\left(x-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\right]$$

$=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)$. (forme factorisée de P)

Méthode

a. Pour déterminer la forme canonique d'un polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq0$
1. factoriser par a ;
2. écrire l'intérieur de la parenthèse comme le début d'une identité remarquable ;
3. écrire l'identité remarquable et éliminer le terme supplémentaire.

b. Pour obtenir la forme factorisée à partir de la forme canonique, utiliser, si possible, l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

S'exercer

3 Pour chaque polynôme P, vérifier que α est une racine de P, puis déterminer la seconde racine de P.

a. $\begin{cases} P(x)=7x^2-5x-2 \\ \alpha=1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} P(x)=x^2-4x-5 \\ \alpha=5 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} P(x)=x^2-x-6 \\ \alpha=3 \end{cases}$; d. $\begin{cases} P(x)=2x^2-12x-14 \\ \alpha=-1 \end{cases}$.

4 Déterminer deux polynômes du second degré ayant 2 et $-\dfrac{1}{2}$ pour racines.

5 Pour chaque polynôme, donner la forme canonique, puis la forme factorisée lorsqu'elle existe.

a. $P_1(x)=x^2-7x+10$; b. $P_2(x)=5x^2-4x$;
c. $P_3(x)=3x^2+x+1$; d. $P_4(x)=-2x^2+x+4$.

2 Polynôme

a Généralités

Définitions

n désigne un nombre entier naturel.

- Un **polynôme** P est une expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ désignent des nombres réels.

- Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés **coefficients** de P.
- Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n, les termes $a_k x^k$ sont appelés **monômes** de degré k.
- Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé **degré** de P et on note $\deg P = n$.

Exemple

- $P(x) = -4$ définit un polynôme de degré 0.
- $Q(x) = 5 - x$ définit un polynôme de degré 1.
- $R(x) = x^3 - x + 3$ définit un polynôme de degré 3, le coefficient de son terme de degré 1 est -1.

Remarques

- Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- Par abus de langage, on parle aussi de fonction polynôme pour désigner un polynôme.

b Propriétés des polynômes

Propriété 1

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même degré et les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.

Propriété 2

P et Q désignent deux polynômes.

- PQ est un polynôme et $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.
- $P + Q$ est un polynôme et $\deg P + Q \leqslant \max(\deg P\,;\, \deg Q)$.

Exemple

$P(x) = 4x - 1$

$Q(x) = 5x^2 + 1$

$$\begin{aligned}\deg PQ &= \deg P + \deg Q\\ &= 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

$\deg P + Q = \deg Q = 2.$

c Racines d'un polynôme

Définition

P désigne un polynôme.

Lorsqu'elle existe, une **racine de polynôme** P est un nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple

- $P(x) = 1 - 3x$; P a une seule racine : $\frac{1}{3}$.
- $Q(x) = x^2 - 2x - 3$. Comme $Q(3) = Q(-1) = 0$, 3 et -1 sont les deux racines de Q.

Remarques

- α est également appelée zéro de P.
- Chercher les racines d'un polynôme P revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Propriété

P désigne un polynôme de degré n, avec n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1.

α désigne un nombre réel.

α est une racine de P si, et seulement si, il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout nombre réel x :

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x).$$

Exemple

$P(x) = x^3 - 2x + 1$.

- $P(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- Ainsi, il existe un polynôme Q de degré 2 ($= \deg P - 1$) tel que $P(x) = (x - 1)\,Q(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

6 Maîtriser le vocabulaire

P désigne le polynôme défini par $P(x)=5x^3-3x^2-2x$.

a. Donner le degré de P.

b. Vérifier que 0 et 1 sont deux racines de P.

c. Montrer que $P(x)=5x(x-1)\left(x+\frac{2}{5}\right)$; en déduire toutes les racines de P.

Solution commentée

a. $P(x)=\underbrace{5x^3}_{\text{terme de plus haut degré}}-3x^2-2x$: deg $P=3$.

b. $P(0)=5\times0^3-3\times0^2-2\times0=0-0-0=0$

$P(1)=5\times1^3-3\times1^2-2\times1=5-3-2=0$: donc 0 et 1 sont deux racines de P.

c. • $5x(x-1)\left(x+\frac{2}{5}\right)=(5x^2-5x)\left(x+\frac{2}{5}\right)$

$=5x^3+2x^2-5x^2-2x=5x^3-3x^2-2x=P(x)$

on réduit

• x racine de $P \Leftrightarrow P(x)=0$

$\Leftrightarrow 5x(x-1)\left(x+\frac{2}{5}\right)=0$ (produit de facteurs nuls)

$\Leftrightarrow 5x=0$ ou $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{5}=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-\frac{2}{5}$

Les racines de P sont donc : 0 ; 1 et $-\frac{2}{5}$.

Méthode

- Pour déterminer le degré d'un polynôme ; on identifie son monôme $a_k x^k$ de plus au degré.
- Déterminer les racines x de P, c'est résoudre l'équation $P(x)=0$.

Vocabulaire

Une racine est dite évidente si elle est simple à trouver, par exemple −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2…

7 Identifier deux polynômes égaux

P désigne le polynôme défini par $P(x)=x^2+x-2$.

a. Vérifier que $P(1)=0$.

b. Justifier que $P(x)=(x-1)(ax+b)$, puis déterminer a et b.

Solution commentée

a. $P(1)=1^2+1-2=0$.

b. **1.** $P(1)=0$ donc il existe un polynôme Q de degré 1 (deg Q = deg $P-1$) tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$. On pose $Q(x)=ax+b$.

2. $(x-1)(ax+b)=ax^2+bx-ax-b=ax^2+(b-a)x-b$.

Ainsi, $P(x)=ax^2+(b-a)x-b$ donc $\begin{cases} a=1 & \text{(termes en } x^2) \\ b-a=1 & \text{(termes en } x) \\ -b=-2 & \text{(termes constants)} \end{cases}$

3. On résout : $a=1$ et $b=2$ (on vérifie que $b-a=2-1=1$).

4. On conclut que $P(x)=(x-1)(x+2)$.

Méthode

1. Trouver α tel que $P(\alpha)=0$ signifie qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$, avec deg Q = deg $P-1$.
2. Développer $(x-\alpha)Q(x)$ et utiliser la propriété 1 du cours 2. b. sur l'égalité de deux polynômes afin d'aboutir à un système d'équations.
3. Résoudre ce système pour déterminer $Q(x)$.
4. Conclure.

S'exercer

8 Déterminer une racine évidente des polynômes suivants, et préciser leur degré.

a. $P_1(x)=5-x$;
b. $P_2(x)=3x^2-x-2$;
c. $P_3(x)=x^4-16$;
d. $P_4(x)=-2x^3+5x^2-4$.

9 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=2x^3-x^2-2x+1.$$

a. Montrer que $P(x)=(x^2-1)(2x-1)$.

b. En déduire toutes les racines de P.

10 P désigne le polynôme défini par $P(x)=5x^2+x-4$.

a. Vérifier que −1 est une racine de P.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$P(x)=(x+1)(ax+b).$$

11 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=x^3-x^2-x+10.$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$P(x)=(x+2)(x^2+ax+b).$$

3 Factorisation d'un polynôme

Définition

Un polynôme est dit **factorisé** lorsqu'il s'écrit comme le produit d'au moins deux polynômes.

Méthodes de factorisation

Lorsque la factorisation d'un polynôme ne s'obtient pas par des calculs usuels (identités remarquables, distributivité), on utilise l'une des deux méthodes détaillées ci-dessous.
P désigne un polynôme. α est une racine de P. On cherche le polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Identification des coefficients

- On développe l'expression $(x - \alpha)Q(x)$.
- On identifie les coefficients avec ceux de $P(x)$.

Division euclidienne

On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$: $Q(x)$ est le quotient de cette division ; le reste doit être nul

Exemple $P(x) = x^2 + 5x + 6$

- On cherche tout d'abord une racine de P : $P(-2) = (-2)^2 + 5 \times (-2) + 6 = 0$ donc -2 est une racine de P.
- Ainsi, il existe Q de degré 1 ($= \deg P - 1$) tel que $P(x) = (x - (-2))Q(x) = (x + 2)Q(x)$.
- Il reste à déterminer Q par les deux méthodes.

Identification des coefficients

$(x + 2)(ax + b) = P(x)$
$\Leftrightarrow ax^2 + (b + 2a)x + 2b = x^2 + 5x + 6$.

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 5 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Ainsi, $P(x) = (x + 2)(x + 3)$.

Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \cline{2-2} -(x^2 + 2x) & x + 3 \leftarrow \text{quotient} \\ \hline 3x + 6 & \\ -(3x + 6) & \\ \hline \text{reste nul} \rightarrow 0 & \end{array}$$

On procède comme pour une division posée entre deux nombres réels.

Ainsi, $P(x) = (x + 2)(x + 3)$.

4 Fraction rationnelle

a Généralités

Définition

Une **fraction rationnelle** est une expression de la forme $\dfrac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes.

Remarque Par abus de langage, une fraction rationnelle est aussi appelée fonction rationnelle.

Définitions

$F = \dfrac{P}{Q}$ désigne une fraction rationnelle.

- Les nombres réels α tels que $P(\alpha) = 0$ sont appelés **zéros** de F.
- Les nombres réels β tels que $Q(\beta) = 0$ sont appelés **pôles** de F.
- L'**ensemble de définition** de F est $\mathbb{R} \setminus \{\text{pôles}\}$.

Exemple

$F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$

est une fraction rationnelle de zéro 3 et de pôle −1.

b Signe d'une fraction rationnelle

Pour étudier le signe de $F = \dfrac{P}{Q}$, on étudie le signe des polynômes P et Q.

Exemple

$F(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + 1}$

F est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x + 3$		−	0	+	
$x^2 + 1$		+		+	
$F(x)$		−	0	+	

c Différentes écritures d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle peut s'écrire sous plusieurs formes.

Exemple

$$F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{(x + 1)(x - 3)} = x - 1 + \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 3}.$$

12 Factoriser un polynôme

P et Q désignent les polynômes définis par $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ et $Q(x) = x - 1$.

a. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$; en déduire une factorisation de P.

b. Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que $P(x) = Q(x) \times (ax^2 + bx + c)$; retrouver le résultat de la question a.

Solution commentée

a.

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+2x^2-4x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(3x^3-3x^2) & 3x^2+5x+1 \\ \cline{1-1}
5x^2-4x-1 & \uparrow \quad\;\; \uparrow \quad \uparrow \\
-(5x^2-5x) & 3x^3 \;\; 5x^2 \;\; x \\ \cline{1-1}
x-1 & \\
-(x-1) & \\ \cline{1-1}
0 \leftarrow \text{reste nul} &
\end{array}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1) \times (3x^2 + 5x + 1)$.

b. $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1$

Par identification $\begin{cases} a=3 \\ b-a=2 \\ c-b=-4 \\ -c=-1 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} a=3 \\ b=2+a=5 \\ c=1 \end{cases}$

(et on vérifie que $1-5=-4$).

On a bien : $P(x) = (x-1)(3x^2+5x+1)$.

Méthode

P désigne un polynôme et α une racine réelle de P.

Pour factoriser $P(x)$ par $x - \alpha$, il y a deux méthodes.

a. Division euclidienne

Effectuer la division de P par Q.

Pour cela, éliminer pas à pas le terme de plus haut degré du polynôme de gauche en utilisant le terme de plus haut degré de Q pour pivot.

$\begin{array}{c|c} P & Q \\ \cline{2-2} R & S \end{array}$ $\quad 0 \leqslant \deg R < \deg Q$ et $P = Q \times S + R$.

b. Identification

- Écrire $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.
- Développer $(x - \alpha)Q(x)$.

Déterminer les coefficients de Q par identification (voir Savoir-faire 7).

13 Étudier le signe d'une fraction rationnelle

F désigne la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{3+4x}{(2-x)(x+3)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.

b. Déterminer le signe de $F(x)$ selon les valeurs de x dans $\mathcal{D}_F$.

Solution commentée

a. $F(x)$ est définie lorsque $(2-x)(x+3) \neq 0$.

Donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{2 ; -3\}$.

b.

x	$-\infty$		-3		$-3/4$		2		$+\infty$
$2-x$		+	⋮	+	⋮	+	0	−	
$x+3$		−	0	+	⋮	+	⋮	+	
$3+4x$		−	⋮	−	0	+	⋮	+	
$F(x)$		+	‖	−	0	+	‖	−	

Les pôles de F sont des valeurs interdites.

Méthode

Pour étudier le signe d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle :

1. si ce n'est pas déjà fait, on factorise l'expression au maximum ;
2. puis, on utilise des propriétés sur les signes :
   - un carré est toujours positif ;
   - une racine carrée est toujours positive ;
   - le signe d'une expression de la forme $ax + b$ vérifie :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		−	0	+	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	−	

S'exercer

14 Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chaque cas.

a. $P(x) = 2x^5 + x^4 + 1$; $Q(x) = x^3 + 1$.

b. $P(x) = 2x^2 + 3x + 9$; $Q(x) = x + 3$.

15 Étudier le signe des fractions rationnelles suivantes, après avoir précisé leur ensemble de définition.

a. $\dfrac{x}{5-x}$; b. $3x(2x-5)$; c. $\dfrac{x+1}{x(3-x)}$.

Polynômes du second degré

Réponses rapides

16 **1.** Recopier et compléter.
Un polynôme P du second degré est de la forme :

$$P(x) = \ldots$$

où a, b, c désignent trois nombres … tels que a … .

2. Identifier les polynômes du second degré parmi les expressions suivantes.

a. $x^2 - (x-3)^2$; **b.** $-7x + x^2 + 3$;
c. $(x+1)^3 - x^3$; **d.** $(5-x)(x+1)$;
e. $7x + x(x-3)$; **f.** $3 - 4x^2$.

17 Factoriser les polynômes du second degré suivants.

a. $9x^2 - 16$; **b.** $x^2 + 10x + 25$;
c. $(5+x)^2 - 1$; **d.** $(x-1)^2 - 2x(x-1)$;
e. $4x^2 + 4x + 1$; **f.** $36 - 24x + 4x^2$.

18 Déterminer pour chaque polynôme une racine évidente.

a. $x^2 + 2x - 3$; **b.** $4x^2 - 1$; **c.** $3x^2 + 2x - 1$.

19 Reproduire et compléter à l'aide des mots « canonique », « factorisée », « développée ».

a. $3[(x-5)^2 - 1]$ est la forme … .
b. $3(x-6)(x-4)$ est la forme … .
c. $3x^2 - 30x + 72$ est la forme … .

20 Écrire chaque polynôme sous forme canonique.

a. $x^2 + 2x + 2$; **b.** $3x^2 - 2x + 1$;
c. $5x^2 + 16x + 3$; **d.** $-4x^2 + 7x - 3$.

21 Factoriser chaque polynôme ; en déduire son signe.

a. $-x^2 + x + 2$; **b.** $4x^2 - 3x - 1$;
c. $7x^2 - 5x$; **d.** $x^2 + x - 6$.

Aide

Pour factoriser un polynôme, on peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes présentées au Savoir-faire 12.

22 P désigne le polynôme défini par $P(x) = 16 - (1-x)^2$.

1. Développer et factoriser P.

2. Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre les équations suivantes.

a. $P(x) = 16$; **b.** $P(x) = 15$; **c.** $P(x) = 0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$; **b.** $x^2 - 6x + 9 = 0$;
c. $3x^2 - 2\sqrt{3x} + 1 = 0$; **d.** $-x^2 - 11 = 0$.

Aide

Pour résoudre une équation de second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, il est souvent utile de factoriser (identités remarquables, distributivité).

24 **Démontrer une propriété**

1. P désigne un polynôme du second degré :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

On suppose que P admet deux racines réelles α et β.
Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.

2. Application

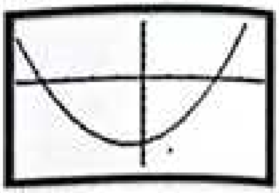
Dans chaque cas, déterminer les racines des polynômes.

a. $P(x) = x^2 - 4x - 12$; **b.** $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

25 Déterminer un polynôme du second degré tel que :

a. 1 et 3 soient racines ; **b.** (-2) soit racine double ;
c. -1 et $\frac{1}{2}$ soient racines ; **d.** 0 et $\sqrt{3}$ soient racines ;
e. il n'ait aucune racine ; **f.** $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$ soient racines.

26 La fonction dont l'expression est celle d'un polynôme P de degré deux a été représentée sur l'écran de calculatrice ci-contre.



a. Conjecturer les racines éventuelles du polynôme.
b. En déduire sa factorisation.

27 P et Q désignent les polynômes définis par :

$$P(x) = 5x^2 + 32x - 21 \quad \text{et} \quad Q(x) = 4x^2 + x - 5.$$

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les racines de P et de Q.
b. En déduire leur factorisation.

28 Dans une usine, le coût de fabrication annuel, en milliers de francs CFA, en fonction du nombre x d'appareils fabriqués est :

$$C(x) = 0{,}02x^3 - 2x^2 + 500x.$$

1. Le coût annuel moyen de fabrication d'un appareil lorsque l'usine en fabrique x est $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

a. Montrer que $C_M(x) = 0{,}02\,[(x-50)^2 + 22\,500]$, pour tout $x > 0$.
b. En déduire que le coût moyen annuel minimal est 22 500, et préciser pour quel nombre d'appareils il est atteint.

2. Chaque appareil est vendu 650 000 F CFA.

a. Montrer que le bénéfice annuel $B(x)$ en fonction du nombre x d'appareils fabriqués et vendus est, pour tout $x > 0$:

$$B(x) = 150x - 0{,}02x^3 + 2x^2.$$

b. Le bénéfice annuel moyen est :

$$B_M(x) = \frac{B(x)}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

Montrer que $B_M(x) = 200 - 0{,}02\,(x-50)^2$.
En déduire le nombre d'appareils pour lequel le bénéfice annuel moyen est positif.

Polynômes de degré quelconque

Réponses rapides

29 Pour chacune des affirmations, donner la (ou les) réponse(s) exactes(s).

1. Le polynôme P défini par :

$$P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$$

est un polynôme de degré n lorsque :

a. $a_n \neq 0$; b. $a_0 \neq 0$; c. $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \neq 0$.

2. α désigne une racine d'un polynôme P lorsque :

a. $P(0) = \alpha$; b. $P(\alpha) = 0$;

c. α a pour image 0 par la fonction P.

3. Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme de degré égal à :

a. $\deg P \times \deg Q$; b. $\deg P + \deg Q$; c. $\max(\deg P ; \deg Q)$.

30 Parmi les expressions suivantes, reconnaître les polynômes. Lorsqu'il s'agit d'un polynôme, préciser son degré.

a. $(x-3)(5-x)$; b. $x - 2x^3 + x^7 - 3$; c. $\dfrac{x^2+3x-1}{x}$;

d. $(x-4)^2 - x^2$; e. $1 + \dfrac{2}{x}$; f. $\sqrt{3}x - 1$;

g. $x^9 - 1$; h. $x^2 + 3 + \sqrt{x}$; i. $(x-2)(x+1) - x + 3$.

31 Préciser le degré des polynômes suivants, ainsi que leur monôme de degré 2.

a. $3x^5 - 4x^3 + x^2 + 1$; b. $x^{11} - x^9 + 1$;

c. $-5x(x^2-1) + 3x^2$; d. $(x^2+1)^2$;

e. $(x-3)(x^2-1)$: f. $x^4 - \sqrt{2}x^3 + \sqrt{3}x^2$.

32 Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q.

a. $P(x) = 5x^2 - 3x + 11$ et $Q(x) = x - 1$;

b. $P(x) = -7x^2 + x$ et $Q(x) = 3x - 1$.

33 Donner la forme développée des polynômes suivants.

a. $(x-5)^2 + (3x-1)^2$; b. $\dfrac{9x-18}{-3}$;

c. $(2x+1)^3$; d. $(7-x)(x+1) + 3x^2$;

e. $(5x-1)^2 - x(x+1)^2$; f. $(x-1)^4$.

34 Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q.

a. $P(x) = x^6 - 3x + 4$ et $Q(x) = x + 2$;

b. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$ et $Q(x) = x^2 + 1$;

c. $P(x) = x^4 + 3$ et $Q(x) = x - 1$;

d. $P(x) = x^5 + x^3 + 1$ et $Q(x) = x^3 + x + 1$.

35 Déterminer pour chaque polynôme une racine évidente α, puis factoriser par $x - \alpha$.

a. $x^3 - x^2 + 2x - 2$; b. $x^5 - 1$;

c. $3x^2 + 2x - 1$; d. $x^4 - 3x^2 + 2$.

Aide

Lorsqu'une racine α d'un polynôme est connue, on peut factoriser par $x - \alpha$ en effectuant une division euclidienne ou en utilisant la méthode d'identification.

36 P désigne le polynôme défini par $P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$.

a. Vérifier que $P(2) = 0$.

b. Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x-2)\,Q(x)$.

c. Montrer que $Q(x) = (x+3)(x+5)$.

d. En déduire une factorisation de P et toutes les racines de P.

37 Dans chaque cas, déterminer un polynôme P satisfaisant les conditions proposées.

a. P de degré 2 tel que $P(3) = 1$ et $P(-1) = 0$.

b. P de degré 3 tel que $P(0) = 0$; $P(1) = 1$ et $P(-1) = 2$.

c. P de degré 4 tel que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P(3) = 1$.

38 Au cours d'une expérience, en chimie, deux quantités q_1 et q_2 sont mesurées au cours du temps.

On observe que : · $q_1(0) = \dfrac{1}{2}$; $q_1(1) = \dfrac{1}{4}$;

· $q_2(0) = 1$; $q_2(1) = \dfrac{3}{2}$; $q_2(2) = 4$.

Trouver, pour ces deux quantités, un polynôme qui coïncide avec les mesures données.

39 Étudier le signe de chaque polynôme.

a. $3x - 2$; b. $5 - 4x$; c. $3(x-1)(2-x)$;

d. $(x-1)^2(x-2)$; e. $(x-1)^3(x+2)$; f. $x(x-4)(7-x)$.

40 Factoriser chacun des polynômes suivants ; en déduire son signe.

a. $x^3 + 4x^2$; b. $(x-3)^2 + (x-3)(5-2x)$;

c. $3x(x-5) - (x-5)$; d. $2(x+1)^3 - 4x(x+1)^2$.

41 P désigne le polynôme défini par $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

a. Vérifier que $P(-1) = 0$.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$P(x) = (x+1)(x^2 + ax + b).$$

c. Q désigne le polynôme défini par $Q(x) = x^2 + x - 6$.

Factoriser Q.

d. Donner la forme factorisée de P, puis son signe.

42 P désigne le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire P comme le produit de polynômes de degré 1 ; en déduire son signe.

43 P désigne le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 1$.

a. Déterminer le polynôme Q du second degré tel que :

$$P(x) = Q(x^2).$$

b. Factoriser Q.

c. En déduire que $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

44 P et Q désignent les polynômes définis par :

$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 - 3x - 4.$$

1. a. Montrer que 4 et −1 sont les racines de Q.
b. Factoriser Q.
2. En remarquant que $P(x) = Q(x^2)$, factoriser P.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

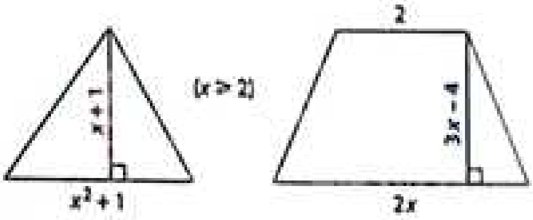
45 a. P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = x^2 - x - 2.$$

Factoriser P.
b. En posant $X = \sqrt{x}$, résoudre l'équation :

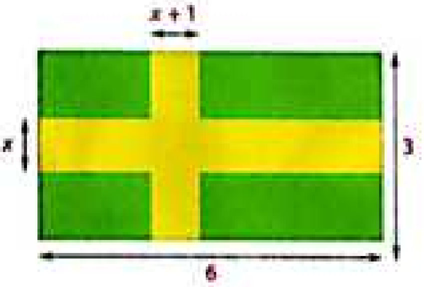
$$x - \sqrt{x} - 2 = 0 \ (x \geqslant 0).$$

46 Fua assure qu'il est possible de construire un triangle et un trapèze de même aire avec les dimensions données ci-dessous.



A-t-il raison ? Si oui, préciser la (ou les) valeur(s) de x.

47 x désigne un nombre réel de l'intervalle [0 ; 3].



Quelle valeur doit-on choisir pour x afin que l'aire de la croix soit égale à la moitié de l'aire du drapeau ?

48 P désigne le polynôme défini par $P(x)$:

$$4x^3 + 5x^2 - 16x - 20.$$

a. Observer la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	x	P(x)
2	-3	-35
3	-2	0
4	-1	-3
5	0	-20
6	1	-27
7	2	0
8	3	85

P admet-il des racines entières ?
b. Factoriser P ; en déduire toutes ses racines.

49 Les polynômes d'Hermite sont les polynômes, notés H_k, définis par :

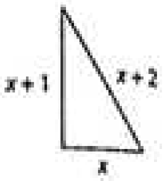
$$H_0(x) = 1\,;$$
$$H_1(x) = \frac{1}{1}(x-0)\,;$$
$$H_2(x) = \frac{1}{2\times1}(x-0)(x-1)\,;$$
$$H_3(x) = \frac{1}{3\times2\times1}(x-0)(x-1)(x-2)$$

et pour tout k nombre entier naturel non nul :

$$H_k(x) = \frac{1}{k\times(k-1)\times\ldots\times2\times1}(x-0)(x-1)\ldots[x-(k-1)].$$

a. Déterminer le degré du polynôme H_k.
b. Déterminer, pour tout nombre entier naturel k, la valeur de $H_k(k)$.
c. Déterminer les racines de H_k.

50 a. x désigne un nombre réel positif.
Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour la(les)quelle(s) le triangle ci-contre est rectangle.
b. Est-il possible de construire un triangle rectangle dont les longueurs sont trois nombres entiers consécutifs ?



51 P désigne le polynôme défini par $P(x) = (x^2 - 1)^2 + (2x)^2$.
a. Développer et réduire P.
b. Factoriser P.
c. Trouver deux nombres entiers tels que $p^2 + q^2 = 101^2$.

52 a. Observer la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	x	P(x)
2	0	1
3	5	1
4	10	1
5	15	1
6	20	1
7	25	1
8	30	1

La colonne A contient des nombres quelconques.
Dans la cellule B1, la formule :

A1^4-(A1^2+1)*(A1^2-1)

a été tapée, puis étirée vers le bas.
Émettre une conjecture.
b. Écrire sous forme algébrique la conjecture émise à la question a.
c. Démontrer cette conjecture.

53 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = x^3 - x^2 + 2x.$$

a. Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = x \times Q(x)$.
b. Écrire Q sous forme canonique.
c. En déduire que P possède une unique racine.

Fractions rationnelles

Réponses rapides

54 1. F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-5)}.$$

a. Les pôles de F sont :

- 1 et −2 ? • −1 et 2 ? • −3 et 5 ? • 3 et −5 ?

b. Les zéros de F sont :

- −3 et 5 ? • 1 et −2 ? • 3 et −5 ? • −1 et 2 ?

2. F désigne la fraction rationnelle définie par $F(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a. F est définie sur :

- $\mathbb{R}$? • $\mathbb{R}\setminus\{1\}$? • $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$?

b. F s'écrit aussi :

- $x+\frac{x}{x+1}$? • $x-\frac{1}{x+1}$? • $x-\frac{x}{x+1}$?

55 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fractions rationnelles suivantes.

a. $\frac{x+2}{(x-7)(x+4)}$; b. $\frac{x^3+5}{x^4+1}$; c. $\frac{-1}{x(x^2-9)}$.

56 Déterminer, lorsqu'ils existent, les zéros de chacune des fractions rationnelles.

a. $\frac{x-11}{x^2+4}$; b. $\frac{x^2-x}{(4+x)(x+1)}$; c. $\frac{x^2-16}{x+5}$.

57 Dans chaque cas, déterminer une fraction rationnelle vérifiant les conditions données.

a. F s'annule en 3 et 0 et son ensemble de définition est :

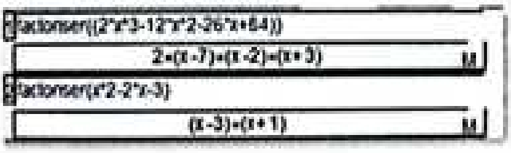
$$\mathbb{R}\setminus\{7\,;-3\}.$$

b. G s'annule en −2 ; 2 et 1 et son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

58 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{2x^3-12x^2-26x+84}{x^2-2x-3}.$$

Utiliser la vue d'écran ci-dessous, obtenue grâce à un logiciel de calcul formel, pour déterminer les zéros et les pôles de F.



```
factoriser((2*x^3-12*x^2-26*x+84))
                2*(x-7)*(x-2)*(x+3)
factoriser(x^2-2*x-3)
                (x-3)*(x+1)
```

59 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{3x+2}{x+1}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.

b. Déterminer a et b tels que pour tout x de $\mathcal{D}_F$,

$$F(x)=a+\frac{b}{x+1}.$$

Aide

Pour déterminer une seconde écriture d'une fraction rationnelle, on utilise la méthode d'identification ou on effectue une division euclidienne.

60 F désigne la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$F(x)=\frac{x^2+x-3}{x-1}.$$

a. Effectuer la division euclidienne de x^2+x-3 par $x-1$.

b. En déduire trois nombres réels a, b et c tels que

pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

61 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{1}{x^4-81}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_F$, de F.
2. L'objectif est de déterminer quatre nombres réels a, b, c, et d tels que, pour tout x de $\mathcal{D}_F$,

$$F(x)=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}+\frac{cx+d}{x^2+9}.$$

a. On donne $G(x)=(x-3)\,F(x)$.
Calculer $G(3)$ et en déduire a.

b. De la même manière, déterminer b.

c. Exprimer $F(0)$ et $F(1)$ en fonction de c et d.
En déduire les valeurs de c et d.

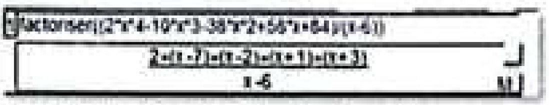
Aide

Résoudre l'équation $X^2-81=0$, et poser $X=x^2$.

62 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{2x^4-10x^3-38x^2+58x+84}{x-6}.$$

a. Justifier par un calcul l'affichage ci-dessous.



```
factoriser((2*x^4-10*x^3-38*x^2+58*x+84)/(x-6))
                2*(x-7)*(x-2)*(x+1)*(x+3)
                ─────────────────────────
                           x-6
```

b. En déduire le signe de F selon les valeurs de x.

63 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_F$, de F.

b. L'objectif est de déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pout tout $x\in\mathcal{D}_F$,

$$F(x)=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

On donne $G(x)=x\,F(x)$.
Calculer $G(0)$ et en déduire a.

c. Calculer $F(1)$ et $F(-1)$.
En déduire les valeurs de b et de c.

64 F désigne la fraction rationnelle définie par :

$$F(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2+7}.$$

1. Justifier que $F(x)$ est défini pour tout nombre réel x.
2. a. Déterminer une racine évidente α du polynôme Q défini par $Q(x)=-x^2+2x+3$.
   b. Factoriser Q par $x-\alpha$.
3. Déterminer le signe de F selon les valeurs de x.

Faire le point

65 Vocabulaire

F désigne la fraction rationnelle définie par $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec :

$$P(x)=x^2-x-2 \quad \text{et} \quad Q(x)=x^3+2x^2-x-2.$$

Compléter les phrases ci-dessous.

a. Le degré de P est … ;

b. Le coefficient de degré 2 de Q est … ;

c. 2 est une … de P ;

d. 2 est une … de F ;

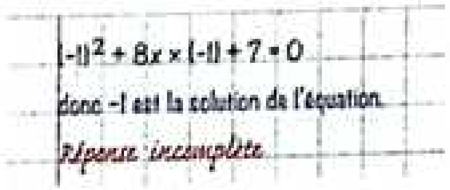
e. −1 est une … de Q et un … de F.

66 Une équation

Le professeur a demandé à ses élèves de résoudre l'équation $x^2+8x+7=0$.

Voici les réponses proposées par deux élèves et les remarques du professeur.

Sofi :

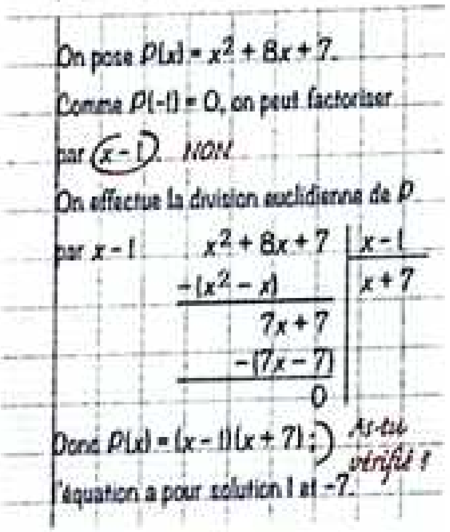


$(-1)^2+8x\times(-1)+7=0$

donc −1 est la solution de l'équation.

Réponse incomplète

Atem :



On pose $P(x)=x^2+8x+7$.

Comme $P(-1)=0$, on peut factoriser

par $\boxed{x-1}$. NON

On effectue la division euclidienne de P

par $x-1$

$$\begin{array}{r|l} x^2+8x+7 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^2-x) & x+7 \\ \hline 7x+7 & \\ -(7x-7) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $P(x)=(x-1)(x+7)$; *As-tu vérifié ?*

l'équation a pour solution 1 et −7.

Expliquer les remarques du professeur et proposer une solution à cet exercice.

67 Différentes méthodes pour factoriser

Lorsque l'on connaît une racine réelle d'un polynôme, on peut factoriser celui-ci à l'aide de deux méthodes.

1. P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=5x^2+11x+2.$$

a. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x)=(x+2)\,Q(x)$ où Q désigne un polynôme de degré 1.

b. Première méthode : identification

Développer $P(x)$ afin de déterminer les nombres réels a et b tels que $P(x)=(x+2)(ax+b)$.

c. Seconde méthode : division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$.

2. En utilisant l'une des deux méthodes décrites précédemment, factoriser les polynômes suivants :

a. $7x^2-6x-1$; **b.** x^3+x^2+x+1 ; **c.** $5x^4+x^3-4$.

68 Racines évidentes

Un nombre réel α est dit racine évidente d'un polynôme P lorsque $P(\alpha)=0$ avec $\alpha\in\{-3\,;-2\,;\ldots\,;3\}$.

P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=2x^3-3x^2-11x+6.$$

a. Déterminer deux racines évidentes, notées α et β, de P.

b. Développer le polynôme $(x-\alpha)(x+\beta)$.

c. Factoriser $P(x)$ par $(x-\alpha)(x+\beta)$.

d. En déduire la troisième racine de P.

69 Déceler une erreur et la corriger

Voici le tableau dressé par Acha pour obtenir le signe de :

$$P(x)=(x^2+1)(x+3)(2-x).$$

x	$-\infty$		$+3$		-2		$+\infty$
x^2+1		+		+		+	
$x+3$		−	0	+		+	
$2-x$		−		−	0	+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	

1. Déceler les erreurs commises par Acha.

2. a. Corriger le tableau précédent. Résoudre l'inéquation $P(x)\geqslant 0$.

b. Déduire du tableau les solutions de l'inéquation :

$$\frac{(x^2+1)(x+3)}{2-x}\leqslant 0.$$

70 Différentes écritures d'une fraction rationnelle

On donne :

$$F_1(x)=\frac{x^3+x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad F_2(x)=\frac{3}{(x+2)(1-x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F_1 et F_2.

2. Écriture de $F_1=\dfrac{P_1}{Q_1}$ avec $\deg P_1\geqslant \deg Q_1$

a. Effectuer la division euclidienne de P_1 par Q_1.

b. En déduire une nouvelle écriture de F_1.

3. Écriture de $F_2=\dfrac{P_2}{Q_2}$ avec $\deg P_2<\deg Q_2$

Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$F_2(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{1-x}$$

pour tout nombre réel x différent de −2 et de 1.

71 Forme canonique et racines

P_1 et P_2 désignent les polynômes définis par :

$$P_1(x)=x^2+x+1 \quad \text{et} \quad P_2(x)=2x^2+x-10.$$

1. a. Écrire P_1 sous forme canonique.

b. En déduire que P_1 n'a pas de racine.

2. a. Écrire P_2 sous forme canonique.

b. En déduire que P_2 admet deux racines distinctes.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

72 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Le polynôme $(5x-4)^2-25x^2+3x-1$ est de degré 1.	☐	☐
2. Le polynôme x^2-7 a pour racines $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.	☐	☐
3. L'équation $(5-3x)(x+4)=0$ a pour solutions $\frac{5}{3}$ et -4.	☐	☐
4. Le polynôme $(5-x)(x^2+1)$ est du même signe que le polynôme $(5-x)$.	☐	☐
5. Le produit d'un polynôme de degré 3 et d'un polynôme de degré 7 est un polynôme de degré 7.	☐	☐
6. La fraction rationnelle $\frac{x^5-1}{x(x+6)}$ a pour pôles 0 et 6.	☐	☐

Avec justification

73 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Le polynôme $2(x-1)^3-(2x+1)(x-1)^2$ est de degré 3.	☐	☐
2. Le polynôme $(3-x)(x-4)-(x-4)^2$ a pour forme factorisée $(x-4)(1+2x)$.	☐	☐
3. Le polynôme $x^2+10x+25$ n'a pas de racine.	☐	☐
4. L'équation $x^4-10x^2+21=0$ admet quatre solutions.	☐	☐
5. Le polynôme x^2-x-2 est positif ou nul pour tout x de $[-1\,;2]$.	☐	☐
6. La fraction rationnelle $\frac{3}{x^2+5x-6}$ s'écrit aussi $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+6}$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

74 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Les racines du polynôme $-2(x+1)(x-5)(x+7)$ sont :
   a. $-1\,;-7\,;5$; b. $1\,;7\,;-5$; c. $2\,;-1\,;-7\,;5$.

2. Le polynôme $5x^2+x-4$
   a. n'est pas factorisable ; b. est factorisable par x ;
   c. est factorisable par $x+1$.

3. La forme factorisée du polynôme x^2-x-12 est :
   a. $(x-3)(x+4)$; b. $(x+3)(x-4)$; c. $(3-x)(x+4)$.

4. L'ensemble de définition de la fraction rationnelle F définie par $F(x)=\frac{x-3}{x(x^2-4)}$ est :
   a. $\mathbb{R}\setminus\{-4\,;0\,;4\}$; b. $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;0\,;2\}$; c. $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;2\}$.

5. Le tableau de signe de la fonction rationnelle F définie par $F(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ est :

a.

x	$-\infty$ $+\infty$
$F(x)$	+

b.

x	$-\infty$ 1 $-\infty$
$F(x)$	− 0 +

c.

x	$-\infty$ 1 $-\infty$
$F(x)$	+ 0 −

Avec justification

75 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. La forme canonique du polynôme $3x^2-5x-2$ est :
   a. $3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right]$; b. $3\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right]$; c. $3\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{36}$.

2. Le polynôme x^3+2x^2+x possède :
   a. une seule racine ; b. trois racines distinctes ;
   c. deux racines distinctes.

3. Le polynôme $(4+x)(5-x)(2+x)$ est strictement positif lorsque : a. $x\in[-2\,;5]$; b. $x\in]-4\,;-2[$;
   c. $x<-4$ ou $x\in]-2\,;5[$.

4. La fraction rationnelle F définie par $F(x)=\frac{x^3-1}{(5-x)(x+2)}$ s'écrit aussi :
   a. $x+3+\frac{19x+29}{(5-x)(x+2)}$; b. $-x-3+\frac{19x+29}{(5-x)(x+2)}$;
   c. $x-3+\frac{19x+29}{(5-x)(x+2)}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

76 Coefficients et racines d'un polynôme de degré 3

1. Cas général

P désigne un polynôme de degré 3 :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a \neq 0.$$

a. Déterminer p, q et r tels que $P(x) = a(x^3 + px^2 + qx + r)$.

b. Vérifier que : x racine de $P \Leftrightarrow x$ racine de $x^3 + px^2 + qx + r$.

On note $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

On suppose que Q admet trois racines notées α, β et γ.

- Justifier que $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.
- En déduire que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)\,; \quad r = -\alpha\beta\gamma\,; \quad q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

c. Déduire des questions précédentes que :

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}\,; \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}\,; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}.$$

2. Application

P désigne le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

a. Vérifier que -1 est une racine de P.

b. Déterminer les deux autres racines de P en utilisant les relations coefficients-racines établies à la question 1.

77 Dimensions du livre de mathématiques

Le livre de mathématiques de Seconde 5 a une forme de parallélépipède rectangle. a, b, et c désignent ses trois dimensions en cm.

Sachant que son volume est égal à 990 cm³, la somme des aires de ses faces est égale à 882 cm² et la somme des longueurs de ses arêtes est égale à 160 cm, trouver ses dimensions.

Aide

On pourra utiliser l'exercice précédent.

78 Un polynôme de degré 3

Déterminer le (ou les) nombre(s) réel(s) λ tel(s) que le polynôme $x^3 - 7x + \lambda$ admette pour racine(s) un nombre et son double.

79 Un polynôme de degré 5

P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent trois nombres réels.

Existe-t-il des valeurs de a, b et c pour lesquelles le polynôme P est factorisable par le polynôme $(x^2 - 1)(x - 3)$?

80 Polynômes et carrés

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré 3 s'annulant en 0, tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(x + 1) - P(x) = x^2$.

2. n désigne un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

a. Montrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = P(n + 1) - P(1)$.

b. En déduire que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Applications

Les questions suivantes sont à traiter sans calculatrice.

a. Calculer la somme des carrés des 100 premiers nombres entiers naturels.

b. En déduire la somme $S = 100^2 + 101^2 + \ldots + 200^2$.

81 La méthode de Horner

Lorsqu'une racine d'un polynôme est connue, on peut factoriser à l'aide du tableau de Horner, mathématicien britannique (1786-1837).

1. La méthode

P_n désigne un polynôme degré n ;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

avec $a_n \neq 0$ et n un nombre entier naturel non nul.

On suppose connue une racine de P, notée α non nulle.

L'objectif est de déterminer les coefficients du polynôme de degré $n - 1$, noté Q_{n-1}, tel que :

$$P_n(x) = (x - \alpha)\,Q_{n-1}(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

On pose $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec $b_{n-1} \neq 0$.

a. Montrer que $b_{n-1} = a_n$ et $b_0 = -\dfrac{a_0}{\alpha}$,

puis que pour tout k de $\{0 ; 1 ; \ldots ; n-2\}$,

$$b_k = a_{k+1} + \alpha \times b_{k+1}.$$

b. Reproduire et compléter le tableau de Horner.

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	…	x^2	x^1	x^0
P_n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		…	a_2	a_1	a_0
Q_n		a_n			…			

2. Application

P désigne le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$.

a. Vérifier que $P(5) = 0$.

b. Écrire le tableau de Horner pour factoriser P.

82 Polynôme et degré

n et m sont deux nombres entiers naturels non nuls.

P_n et Q_m désignent les polynômes définis par :

$$\begin{cases} P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 & \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0 & \text{avec } b_m \neq 0. \end{cases}$$

1. Le cas $n \neq m$

a. On suppose que $n > m$. Montrer que $\deg(P_n + Q_m) = n$.

b. Que vaut $\deg(P_n + Q_m)$ si $n < m$?

c. Déterminer $\deg(P_n Q_m)$.

2. Le cas $n = m$

a. On suppose que $a_n + b_n \neq 0$. Montrer que $\deg(P_n + Q_m) = n$.

b. Que vaut $\deg(P_n + Q_m)$ si $a_n + b_n = 0$?

83 Polynômes de Lagrange

On appelle polynômes de Lagrange aux points 1, 2, 3 les polynômes L_1, L_2, L_3 définis par : $L_1(x) = \left(\dfrac{x-2}{1-2}\right)\left(\dfrac{x-3}{1-3}\right)$;

$$L_2(x) = \left(\frac{x-1}{2-1}\right)\left(\frac{x-3}{2-3}\right)\,; \qquad L_3(x) = \left(\frac{x-1}{3-1}\right)\left(\frac{x-2}{3-2}\right).$$

a. Vérifier que pour tout nombre i de $\{1 ; 2 ; 3\}$:

$$L_i(j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } L_i(i) = 1.$$

b. On dit qu'un polynôme P interpole une fonction f donnée aux points x_1, x_2, x_3 si :

$$f(x_i) = P(x_i) \text{ pour tout } i \text{ de } \{1 ; 2 ; 3\}.$$

En utilisant les polynômes L_1, L_2 et L_3, déterminer un polynôme de degré 2 interpolant une fonction f aux points 1, 2 et 3.

76 Coefficients et racines d'un polynôme de degré 3

1. Cas général

P désigne un polynôme de degré 3 :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a \neq 0.$$

a. Déterminer p, q et r tels que $P(x) = a(x^3 + px^2 + qx + r)$.

b. Vérifier que : x racine de $P \Leftrightarrow x$ racine de $x^3 + px^2 + qx + r$.

On note $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

On suppose que Q admet trois racines notées α, β et γ.

- Justifier que $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.
- En déduire que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)\,; \quad r = -\alpha\beta\gamma\,; \quad q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

c. Déduire des questions précédentes que :

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}\,; \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}\,; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}.$$

2. Application

P désigne le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

a. Vérifier que -1 est une racine de P.

b. Déterminer les deux autres racines de P en utilisant les relations coefficients-racines établies à la question 1.

77 Dimensions du livre de mathématiques

Le livre de mathématiques de Seconde S a une forme de parallélépipède rectangle. a, b, et c désignent ses trois dimensions en cm.

Sachant que son volume est égal à 990 cm^3, la somme des aires de ses faces est égale à 882 cm^2 et la somme des longueurs de ses arêtes est égale à 160 cm, trouver ses dimensions.

aide

On pourra utiliser l'exercice précédent.

78 Un polynôme de degré 3

Déterminer le (ou les) nombre(s) réel(s) λ tel(s) que le polynôme $x^3 - 7x + \lambda$ admette pour racine(s) un nombre et son double.

79 Un polynôme de degré 5

P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent trois nombres réels.

Existe-t-il des valeurs de a, b et c pour lesquelles le polynôme P est factorisable par le polynôme $(x^2 - 1)(x - 3)$?

80 Polynômes et carrés

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré 3 s'annulant en 0, tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(x + 1) - P(x) = x^2$.

2. n désigne un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

a. Montrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = P(n + 1) - P(1)$.

b. En déduire que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Applications

Les questions suivantes sont à traiter sans calculatrice.

a. Calculer la somme des carrés des 100 premiers nombres entiers naturels.

b. En déduire la somme $S = 100^2 + 101^2 + \ldots + 200^2$.

81 La méthode de Horner

Lorsqu'une racine d'un polynôme est connue, on peut factoriser à l'aide du tableau de Horner, mathématicien britannique (1786-1837).

1. La méthode

P_n désigne un polynôme degré n ;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

avec $a_n \neq 0$ et n un nombre entier naturel non nul.

On suppose connue une racine de P, notée α non nulle.

L'objectif est de déterminer les coefficients du polynôme de degré $n - 1$, noté Q_{n-1}, tel que :

$$P_n(x) = (x - \alpha)\,Q_{n-1}(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

On pose $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec $b_{n-1} \neq 0$.

a. Montrer que $b_{n-1} = a_n$ et $b_0 = -\dfrac{a_0}{\alpha}$.

puis que pour tout k de $\{0\,; 1\,; \ldots\,; n - 2\}$.

$$b_k = a_{k+1} + \alpha \times b_{k+1}.$$

b. Reproduire et compléter le tableau de Horner.

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	…	x^2	x^1	x^0
P_n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		…	a_2	a_1	a_0
Q_n		a_n			…			

2. Application

P désigne le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$.

a. Vérifier que $P(5) = 0$.

b. Écrire le tableau de Horner pour factoriser P.

82 Polynôme et degré

n et m sont deux nombres entiers naturels non nuls.

P_n et Q_m désignent les polynômes définis par :

$$\begin{cases} P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 & \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q_m(x) = b_n x^m + \ldots + b_1 x + b_0 & \text{avec } b_m \neq 0. \end{cases}$$

1. Le cas $n \neq m$

a. On suppose que $n > m$. Montrer que $\deg(P_n + Q_m) = n$.

b. Que vaut $\deg(P_n + Q_m)$ si $n < m$?

c. Déterminer $\deg(P_n Q_m)$.

2. Le cas $n = m$

a. On suppose que $a_n + b_n \neq 0$. Montrer que $\deg(P_n + Q_m) = n$.

b. Que vaut $\deg(P_n + Q_m)$ si $a_n + b_n = 0$?

83 Polynômes de Lagrange

On appelle polynômes de Lagrange aux points 1, 2, 3 les polynômes L_1, L_2, L_3 définis par : $L_1(x) = \left(\dfrac{x-2}{1-2}\right)\left(\dfrac{x-3}{1-3}\right)$;

$$L_2(x) = \left(\frac{x-1}{2-1}\right)\left(\frac{x-3}{2-3}\right)\,; \qquad L_3(x) = \left(\frac{x-1}{3-1}\right)\left(\frac{x-2}{3-2}\right).$$

a. Vérifier que pour tout nombre i de $\{1\,; 2\,; 3\}$:

$$L_i(j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } L_i(i) = 1.$$

b. On dit qu'un polynôme P interpole une fonction f donnée aux points x_1, x_2, x_3 si :

$$f(x_i) = P(x_i) \text{ pour tout } i \text{ de } \{1\,; 2\,; 3\}.$$

En utilisant les polynômes L_1, L_2 et L_3, déterminer un polynôme de degré 2 interpolant une fonction f aux points 1, 2 et 3.

Un polynôme de degré quelconque

a et b désignent deux nombres réels et n un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^2 - 1$ divise le polynôme $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

b. Calculer alors le quotient de $aX^{n+1} + bX^n + 1$ par $X^2 - 1$.

Distinguer les cas n pair et n impair.

85 Une compétition de football

Trois amis disposent d'une corde de 160 m pour créer un espace rectangulaire dans lequel ils souhaitent organiser un tournoi de football pour les enfants des alentours.

Ils utilisent toute la corde.

a. Observer le schéma ci-dessous, puis exprimer l'aire, notée $\mathscr{A}(x)$, de la zone rectangulaire en fonction de x.

Donner $\mathscr{A}(x)$ sous forme factorisée.

b. Montrer que $0 \leqslant x \leqslant 80$.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire semble être maximale.

d. En écrivant $\mathscr{A}(x)$ sous forme canonique, retrouver le résultat par le calcul.

e. Où doivent être placés les poteaux A et B afin que le terrain soit le plus grand possible ?

86 Dimensions d'une feuille de papier

Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre donné p et une longueur donnée x.

a. Déterminer l'aire de la feuille en fonction de x et de p.

b. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la feuille est maximale.

87 Polynômes symétriques

Un polynôme est dit symétrique lorsque ses coefficients se lisent indifféremment dans les deux sens.

A. Polynômes symétriques de degré 2

1. P désigne un polynôme symétrique de degré 2,

$$P(x) = ax^2 + bx + a \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

a. Montrer que 0 n'est pas une racine de P.

b. x désigne un nombre réel non nul.

Montrer que x racine de $P \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ racine de P.

2. P_1 et P_2 désignent les polynômes définis par :

$$P_1(x) = x^2 - 3x + 1 \,; \qquad P_2(x) = 2x^2 + 5x + 2.$$

a. Justifier que P_1 et P_2 sont symétriques.

b. Montrer que $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ est une racine de P_1 ; en déduire la factorisation de P.

c. Déterminer une racine évidente de P_2 ; en déduire la factorisation de P_2.

B. Polynômes symétriques de degré 3

1. P désigne un polynôme symétrique de degré 3,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

a. Montrer que 0 n'est pas une racine de P.

b. x désigne un nombre réel non nul.

Montrer que x racine de $P \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ racine de P.

c. Montrer que $P(x) = (x+1)(ax^2 + (b-a)x + a)$.

2. P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3.$$

a. Justifier que P est symétrique.

b. Vérifier que $-\dfrac{1}{3}$ est une racine du polynôme $3x^2 + 10x + 3$.

c. Déterminer toutes les racines de P ; en déduire sa factorisation.

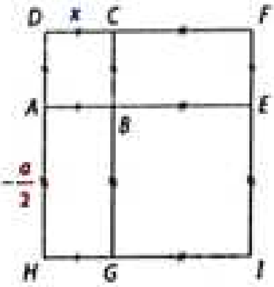
88 La méthode d'Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi, mathématicien perse du IX^{e} siècle, savait résoudre géométriquement les équations du second degré de la forme :

$$x^2 = ax + b \quad \text{avec} \quad a \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b \geqslant 0.$$

Pour cela, il cherchait à déterminer la longueur x du côté d'un carré $ABCD$ de sorte que, si l'on lui ajoute deux rectangles $BEFC$ et $ABGH$ de côtés respectifs x et $-\dfrac{a}{2}$, on obtient une figure $DCFEGH$ dont l'aire est égale à b.

A. Un exemple : résolution de $x^2 + 8x - 20 = 0$



1. Compléter : Dans ce cas, $a = \ldots$ et $b = \ldots$.

2. a. Exprimer l'aire de $DCFEGH$ en fonction de x.

b. Exprimer l'aire du carré $BEIG$ de deux manières différentes pour trouver une nouvelle équation satisfaite par x.

c. Quelle est la valeur de x calculé par Al-Khwarizmi ?

3. a. Résoudre algébriquement $x^2 + 8x - 20 = 0$.

b. Quelle valeur n'obtient-on pas ?

B. En autonomie

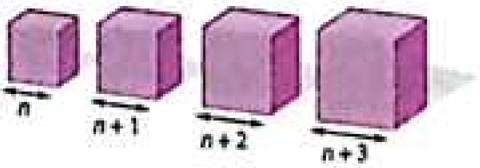
Résoudre l'équation $x^2 + 12x - 85 = 0$:

1. par la méthode d'Al-Khwarizmi ;
2. algébriquement.

Exercices d'approfondissement

89 Histoire de cubes

n désigne un nombre entier naturel non nul.



Existe-t-il une valeur de n pour laquelle le contenu des trois premiers cubes remplisse exactement le quatrième cube ?

90 Un polynôme symétrique de degré 4

L'objectif est de résoudre l'équation :

$$(E) : x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. x désigne un nombre réel non nul.

a. Montrer que x est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{x}$ solution de (E).

b. Montrer que x est solution de (E)

$\Leftrightarrow x$ est solution de l'équation (E') :

$$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

3. a. Développer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ pour tout nombre réel x non nul.

b. En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que (E') se ramène à une équation de degré 2.

4. Résoudre l'équation (E).

91 Polynôme et arithmétique

Étant donnés deux nombres entiers relatifs p et q, $p \neq 0$, on dit que p divise q s'il existe un nombre entier relatif k tel que $q = p \times k$.

1. Généralités

P désigne le polynôme défini par :

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

avec a_0, a_1, a_2 et a_3 quatre nombres entiers relatifs tels que $a_0 \neq 0$.

Montrer que s'il existe une racine m de P telle que $m \in \mathbb{Z}$, alors m divise a_0.

Aide

On remarquera que $P(x) = x(a_3x^2 + a_2x + a_1) + a_0$.

2. Applications

a. Q désigne le polynôme défini par :

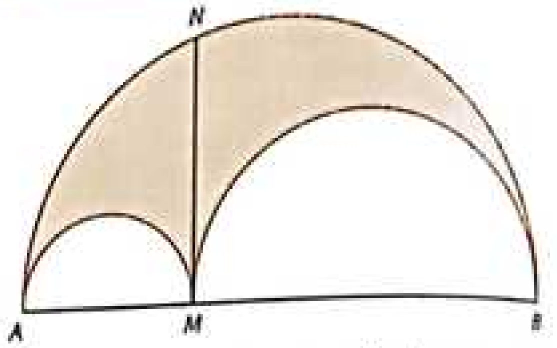
$$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5.$$

- Existe-t-il un nombre entier naturel pair qui soit une racine de Q ?
- Déterminer une racine de Q qui soit un nombre entier relatif en utilisant la question 1.
- Factoriser Q.

b. En procédant de la même manière, factoriser les polynômes R et S définis par :

$$R(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9 ;$$
$$S(x) = x^3 + 9x^2 + 16x + 14.$$

92 L'arbelos d'Archimède



Sur la figure ci-dessus, M désigne un point du segment $[AB]$. On appelle « Arbelos d'Archimède » le domaine délimité par les trois demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$. On pose $AB = 6$ cm et $AM = x$.

a. Montrer que le périmètre de l'arbelos est constant.

b. Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à :

$$\frac{\pi}{4}(6x - x^2).$$

c. N désigne le point du demi-cercle de diamètre $[AB]$ tel que (AB) et (NM) soient perpendiculaires.

Montrer que l'aire du disque de diamètre $[MN]$ est égale à celle de l'arbelos.

Info

Le terme « arbelos » signifie couteau du savetier. Un savetier est une personne qui fabrique des chaussures.

93 Des égalités

Voici quelques égalités :

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} ;$$
$$2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} ;$$
$$3 \times \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} ;$$
$$4 \times \frac{4}{5} = 4 - \frac{4}{5}.$$

a. Vérifier ces égalités.

b. Quelles généralisations suggèrent-elles ?

c. Prouver ces généralisations.

13

Équations et inéquations dans ℝ

Dans une grande entreprise, on utilise des ordinateurs pour résoudre des centaines d'équations et d'inéquations afin d'optimiser l'utilisation des machines, l'affectation du personnel...

Au IX^e siècle, Al-Khwârizmi fut le premier à répertorier et à classer les méthodes de résolution des équations. Il a contribué à diffuser l'utilisation des chiffres arabes. Son nom est à l'origine du mot *algorithme*.

Les objectifs du chapitre

- Résoudre des équations et des inéquations du premier degré.
- Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à du premier degré.
- Résoudre des problèmes grâce à leur mise en équation ou en inéquation.
- Utiliser des représentations graphiques pour conjecturer ou contrôler les solutions d'équations et d'inéquations.

1 Les dimensions d'un rectangle

Cours 1

Un professeur demande à ses élèves de choisir au hasard un nombre réel x ; puis d'imaginer un rectangle de dimensions $2x-3$ et $\frac{1}{2}x+4$.

1 Comprendre la situation

a. Obtient-on les dimensions d'un rectangle pour n'importe quelle valeur de x ? Sinon, indiquer les valeurs possibles pour x.

b. Dans un repère, représenter les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $y=2x-3$ et $y=\frac{1}{2}x+4$.

2 a. Par lecture graphique, conjecturer la valeur de x pour laquelle ce rectangle est un carré.

b. Démontrer la conjecture en résolvant une équation.

La valeur de x trouvée est appelée solution de l'équation.

3 Une autre situation

Peut-on résoudre la question 2. avec un rectangle de dimensions $2x+4$ et $\frac{1}{3}x-7$? Expliquer.

4 Cas général

a, b, c et d désignent quatre nombres réels avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

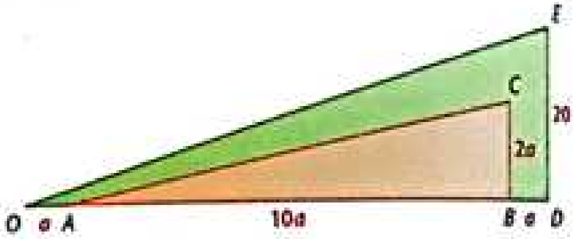
a. À quelles conditions sur le nombre réel x les expressions $ax+b$ et $cx+d$ peuvent-elles désigner les dimensions d'un rectangle ?

b. Pour quelle(s) valeur(s) de x le rectangle de la question précédente est-il un carré ?

2 Création d'un logo publicitaire

Cours 2

On veut créer, pour une entreprise, un logo publicitaire ayant la forme dessinée ci-contre.
Les points O, A, B, D sont alignés et les triangles ABC et ODE sont rectangles.
On dispose de davantage de couleur verte que de couleur orange.



1 Conjecturer à l'aide de GeoGebra

a. Ouvrir une page GeoGebra.

b. Cliquer sur afin de créer un curseur a allant de 0 à 9,6 avec un incrément de 0,1.

- Dans la barre de saisie, taper :

$O=(0\,;0)$, $A=(a\,;0)$, $B=(11a\,;0)$, $C=(11a\,;2\text{ a})$, $D=(12a\,;0)$, $E=(12a\,;21)$.

- Cliquer sur l'icône **Polygone** afin de créer les polygones ABC et ODE.
- Saisir les points $Y=(a$, poly1) et $Z=(a$, poly2-poly1).

Dans la fenêtre Algèbre, située à gauche, on observe que poly1 désigne l'aire du polynôme 1.

- Effectuer un clic droit sur le point Y et activer la trace. Faire de même avec Z.

c. Cliquer sur l'icône afin de déplacer le curseur et de conjecturer une valeur de a pour laquelle l'aire de la zone orange est égale à celle de la zone verte.

2 Démontrer la conjecture

a. Exprimer par le calcul l'aire de la zone verte, puis celle de la zone orange en fonction de a.

b. Déterminer la valeur de a pour laquelle les deux zones ont la même aire.
Comparer avec la conjecture émise au a.

3 Préciser toutes les valeurs de a pour lesquelles l'aire de la zone verte est supérieure ou égale à celle de la zone orange.

3 Bénéfice d'une entreprise

Cours 2

Une entreprise veut étudier l'évolution de ses bénéfices en fonction de la quantité, en kg, de produit fabriqué et vendu. On dispose de la représentation graphique ci-après qui donne le bénéfice réalisé, en milliers de F CFA, en fonction de la quantité de produit.

1 Résolution graphique d'équations

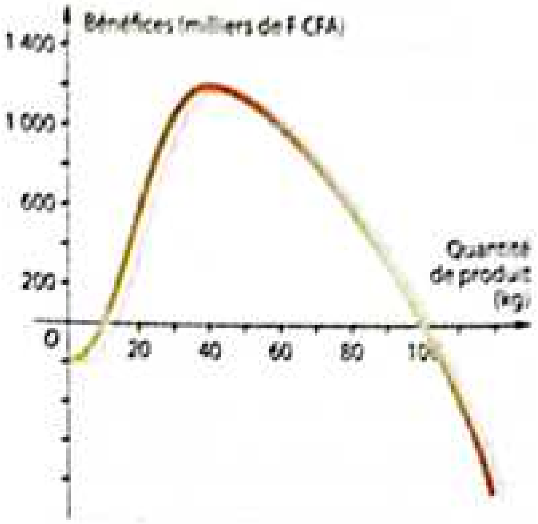
Déterminer graphiquement (le plus précisément possible) pour quelle(s) quantité(s) de produit :

a. le bénéfice est nul ;

b. le bénéfice est maximum ;

c. le bénéfice est égal à 1 000 000 F CFA ;

d. le bénéfice est égal à 2 000 000 F CFA.



2 Résolution graphique d'inéquations

Déterminer graphiquement (le plus précisément possible) pour quelle(s) quantité(s) de produit :

a. le bénéfice est positif ;

b. le bénéfice est supérieur à 1 000 000 F CFA.

4 Inéquation produit, inéquation quotient

Cours 2

1 Inéquation produit

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 4)(5 - x)$.
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère.

a. Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

b. Représenter graphiquement la fonction f sur la calculatrice.
Conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Reproduire et compléter le tableau suivant ci-dessous en utilisant la règle des signes rappelée dans l'encadré.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $(3x + 4)$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
Signe de $(5 - x)$			⋮		⋮		
Signe de $(3x + 4)(5 - x)$			⋮		⋮		

Rappel

Règle des signes :
« + par + donne + »
« + par − donne − »
« − par + donne − »
« − par − donne + »

Le résultat est-il cohérent avec la conjecture émise au b. ?

2 Inéquation quotient

g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x+4}{5-x}$.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $g(x)$ n'est-elle pas définie ?

b. Reproduire et compléter le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $(3x + 4)$			⋮		⋮		
Signe de $(5 - x)$			⋮		⋮		
Signe de $\dfrac{(3x+4)}{(5-x)}$			⋮		‖		

Représenter graphiquement la fonction g sur la calculatrice. Vérifier la cohérence avec le tableau obtenu au b.

13 Cours

1 Équations

a Résolution d'équation

Définitions

f désigne une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

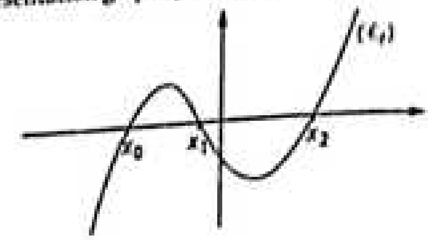
- Un nombre réel a est **solution** de l'équation $f(x) = 0$ si a appartient à D et si $f(a) = 0$.
- **Résoudre** une équation, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Exemple

Sur l'exemple ci-contre, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont x_0, x_1 et x_2.

Illustration graphique

Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la représentation graphique de f avec l'axe des abscisses.



b Équations équivalentes

Définition

Deux équations **équivalentes** sont deux équations ayant le même ensemble de solutions.

Propriétés

À partir d'une équation, on obtient une équation équivalente :

1. si on ajoute ou on retranche un même nombre réel à ses deux membres ;
2. si on multiplie ou on divise ses deux membres par un même nombre réel non nul.

Exemple

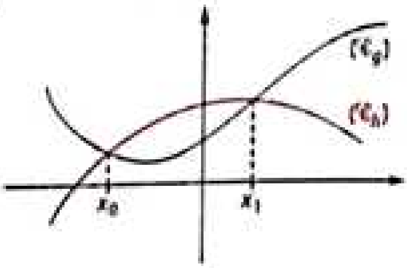
Dans l'exemple ci-contre les solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ sont x_0 et x_1.

Conséquence

L'équation $g(x) = h(x)$ est équivalente à $f(x) = 0$ avec $f(x) = g(x) - h(x)$.

Illustration graphique

Graphiquement les solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques de g et h.



c Quelques équations usuelles

- L'équation $ax + b = 0$ où a et b sont des nombres réels fixés avec $a \neq 0$, admet une solution unique : le nombre réel $-\frac{b}{a}$.

Exemple

L'équation $3x + 2 = 0$ admet une solution unique : $-\frac{2}{3}$.

- L'équation $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ où f et g désignent deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ est équivalente à $f(x) = 0$ et $g(x) \neq 0$.

Exemple

L'équation $\frac{3x+2}{-x+5} = 0$ est équivalente à $3x + 2 = 0$ et $-x + 5 \neq 0$, c'est-à-dire à $x = -\frac{2}{3}$ et $x \neq 5$.

- L'équation $f(x) \times g(x) = 0$ où f et g sont deux fonctions données est équivalente à $(f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$.

Exemple

L'équation $(3x + 2)(-x + 5) = 0$ est équivalente à $3x + 2 = 0$ ou $-x + 5 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 5$.

- L'équation $x^2 = a$ où a est un nombre réel donné :

$$\begin{cases} \text{admet deux solutions : } \sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a} \text{ si } a > 0 ; \\ \text{admet une seule solution : } 0 \text{ si } a = 0 ; \\ \text{n'admet aucune solution si } a < 0. \end{cases}$$

Exemple

L'équation $x^2 = 3$ admet deux solutions : $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$.

1 Équations usuelles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a. $2x+3=0$; **b.** $(x+3)(2-5x)=0$; **c.** $\frac{x-2}{2x+5}=3$; **d.** $x^2=5$.

Solution commentée

a. $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

L'équation $2x+3=0$ admet une solution unique : $-\frac{3}{2}$.

b. $(x+3)(2-5x)=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ou $2-5x=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\frac{2}{5}$.

L'équation $(x+3)(2-5x)=0$ admet deux solutions : -3 et $\frac{2}{5}$.

c. $\frac{x-2}{2x+5}=3 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+5}-3=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+5}-\frac{3(2x+5)}{2x+5}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x-2-6x-15}{2x+5}=0 \Leftrightarrow \frac{-5x-17}{2x+5}=0$

$\Leftrightarrow -5x-17=0$ et $2x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{5}$ et $x \neq -\frac{5}{2}$.

L'équation $\frac{x-2}{2x+5}=3$ admet une solution unique : $-\frac{17}{5}$.

c. $a=5>0$; donc l'équation $x^2=5$ admet deux solutions : $x=\sqrt{5}$ et $x=-\sqrt{5}$.

Méthode

Se reporter au paragraphe sur les équations usuelles.

a. Pour résoudre une équation du premier degré de la forme $ax+b=0$, on ajoute $-b$ à chacun des deux membres pour obtenir la forme $ax=-b$; puis on divise par a $(a \neq 0)$ chacun des deux membres.

b. Se ramener à deux équations du premier degré.

c. Penser à vérifier que la solution $x=-\frac{17}{5}$ est compatible avec $x \neq -\frac{5}{2}$.

d. Dans une équation du type $x^2=a$, c'est le signe de a qui détermine l'existence ou non de solutions.

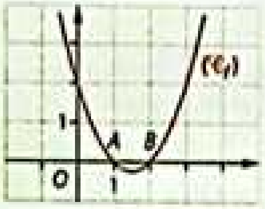
2 Résolution graphique

La représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+2$.

a. Par lecture graphique, résoudre l'équation :

$$x^2-3x+2=0.$$

b. Vérifier par le calcul les résultats du a.



Solution commentée

a. Les solutions de l'équation $x^2-3x+2=0$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses c'est-à-dire : 1 et 2.

b. $1^2-3\times1+2=1-3+2=0$ donc 1 est la solution de l'équation $x^2-3x+2=0$.
$2^2-3\times2+2=4-6+2=0$ donc 2 est solution de l'équation $x^2-3x+2=0$.
1 et 2 sont les solutions de l'équation $x^2-3x+2=0$.

Méthode

a. Les solutions graphiques de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de l'axe des abscisses, c'est-à-dire les abscisses des points A et B.

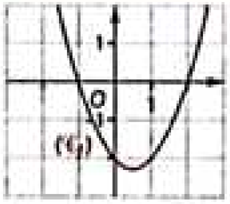
b. Lorsqu'il s'agit de trouver des solutions par lecture graphique, penser à vérifier par le calcul les résultats (quand c'est possible).

S'exercer

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-5x+8=0$; **b.** $x-1=3(1-2x)$;
c. $x(5x-1)=0$; **d.** $x^2-10=0$;
e. $\frac{x+3}{x}=-4$; **f.** $\frac{1}{x-3}=5$.

4 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x-2$.
a. Par lecture graphique, résoudre l'équation $x^2-x+2=0$.
b. Vérifier par le calcul les résultats du a.



2 Inéquations

a Résolution d'inéquation

Définitions

f désigne une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

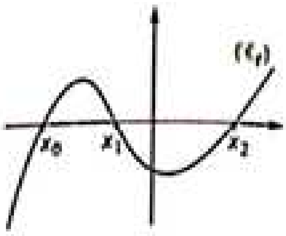
- **Un nombre réel a est solution de l'inéquation $f(x) < 0$ si $a \in D$ et si $f(a) < 0$.**
- **Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.**

Remarque

Dans les définitions précédentes, on peut remplacer $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Illustration graphique

Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont les abscisses des points de la représentation graphique de f qui sont strictement au-dessous de l'axe des abscisses.



Exemple

Sur l'exemple ci-contre, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par $(\mathscr{C}_f)$.
L'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $]-\infty\,; x_0[\cup]x_1\,; x_2[$.

b Inéquations usuelles

• Signe de $ax + b$

a et b désignent deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Le signe de l'expression $ax + b$ est donné par l'un des tableaux ci-dessous.

• Lorsque $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

• Lorsque $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

• Signe d'un produit, d'un quotient

a, b, c et d désignent quatre nombres réels avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

L'étude du signe de $(ax+b)(cx+d)$ et de $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ s'obtient à l'aide d'un tableau de signes comprenant le signe de $ax+b$ et celui de $cx+d$ (voir exercice 5).

Remarque sur les signes évidents :

Les expressions $(ax+b)^2$ et $\sqrt{ax+b}$ sont positives ou nulles sur leur domaine de définition.

c Inéquations équivalentes

Propriétés

À partir d'une inéquation on obtient une inéquation équivalente :

1. **si on ajoute ou on retranche un même nombre réel à ses deux membres. L'ordre étant conservé.**
2. **si on multiplie ou on divise ses deux membres par un même nombre réel non nul a. L'ordre étant conservé si $a > 0$ et inversé si $a < 0$.**

Exemple 1

$$\begin{gathered} 4x+3 \geqslant 2x+7 \\ 4x+3-3 \geqslant 2x+7-3 \\ 4x \geqslant 2x+4 \\ 4x-2x \geqslant 2x+4-2x \\ 2x \geqslant 4 \\ \frac{2x}{2} \geqslant \frac{4}{2} \\ x \geqslant 2. \end{gathered}$$

Exemple 2

$$\begin{gathered} x-1 \leqslant 4x+5 \\ x-1+1 \leqslant 4x+5+1 \\ x \leqslant 4x+6 \\ x-4x \leqslant 4x+6-4x \\ -3x \leqslant 6 \\ \frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{6}{-3} \\ x \geqslant -2. \end{gathered}$$

Savoir-faire

5 Résolution d'inéquations usuelles

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{x^2+1}{3x-1}>0$; **b.** $(x+1)(-2x+6)<0$; **c.** $\dfrac{-4x+2}{2x^2+1}\geqslant 0$.

Solution commentée

a. $\dfrac{x^2+1}{3x-1}>0 \Leftrightarrow 3x-1>0 \text{ (car } x^2+1>0) \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

b.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]3\,;+\infty[$

c. $\dfrac{-4x+2}{2x^2+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow -4x+2\geqslant 0 \text{ (car } 2x^2+1>0) \Leftrightarrow -4x\geqslant -2 \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{-2}{-4} \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

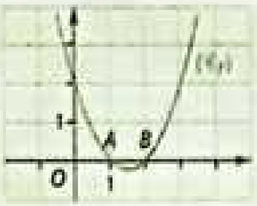
L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

Méthode

- Repérer, s'il y en a, les expressions dont le signe est évident.
- Lorsque l'expression comporte un dénominateur, il faut que ce dénominateur soit non nul.
- Si ce n'est pas déjà le cas, on essaie de ramener la résolution d'une équation à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de fonctions affines.

6 Résolution graphique d'inéquation

Dans le repère ci-contre, la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ est celle de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2-3x+2$.
Par lecture graphique, résoudre l'inéquation $x^2-3x+2\leqslant 0$.



Solution commentée

Les solutions de l'inéquation $x^2-3x+2\leqslant 0$ sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ qui sont situés sous l'axe des abscisses, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2-3x+2\leqslant 0$ est $[1\,;2]$.

Méthode

Les solutions de l'inéquation :

- $f(x)\leqslant 0$ sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ situés sous l'axe des abscisses ;
- $f(x)\geqslant 0$ sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ situés au-dessus de l'axe des abscisses.

S'exercer

7 Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.

a. $\dfrac{1}{3-x}\leqslant 0$; b. $\dfrac{-3}{2x+5}\geqslant 0$;

c. $(2x+3)(2-x)\geqslant 0$; d. $(2x-1)^2\geqslant 25$;

e. $(2x-1)^2(x-5)\geqslant 0$; f. $\dfrac{x+3}{2-x}\leqslant 5$;

g. $\dfrac{3x+2}{5x^2+2}\leqslant 0$; h. $\dfrac{2x-1}{x^2-9}\leqslant 0$.

8 f désigne la fonction définie sur ℝ par :

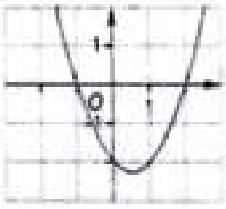
$$f(x)=x^2-x-2$$

et représentée dans le repère ci-contre.

Par lecture graphique, résoudre l'inéquation.

a. $x^2-x-2\leqslant 0$;

b. $x^2-x-2>0$.

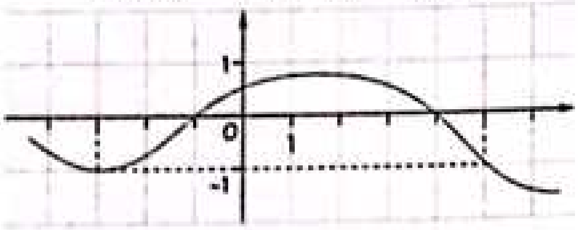


13 Exercices d'entraînement

Équations

Réponses rapides

9 Sur le graphique ci-dessous, lire les solutions de l'équation :
- $f(x)=0$;
- $f(x)=-1$;
- $f(x)=3$.



10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $3x+2=0$;
b. $-x+3=0$;
c. $x^2=7$;
d. $x^2=0$;
e. $x^2=-5$;
f. $(x+3)^2=0$.

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x-3(2x-1)=2+3x$;
b. $\frac{1}{3}x-2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}=1$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $(x-3)(2x+5)=0$;
b. $x(1-x)(3x-2)=0$;
c. $(x-3)^2-25=0$;
d. $x^2-9x=0$;
e. $x^3-x=0$;
f. $x^2+x=0$.

Aide

Penser à factoriser pour se ramener à une équation produit.

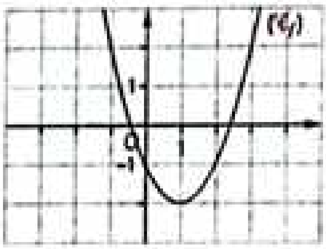
13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\frac{x+3}{x-1}=0$;
b. $\frac{x(x-2)}{1+2x}=0$;
c. $\frac{2x^2+3x}{x+2}=0$;
d. $\frac{9x^2-1}{x(3x+1)}=0$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2=9$;
b. $4x^2=1$;
c. $x^2=-1$;
d. $x^2+25=0$;
e. $(x+3)^2=4$;
f. $(x-1)^2=-5$.

15 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x$. Elle est représentée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère ci-dessous.



a. Lire sur le graphique les solutions de l'équation $f(x)=0$.
b. Vérifier, par le calcul, les résultats du a.

16 Utiliser l'écran de calcul formel ci-dessous pour résoudre l'équation $\frac{x^2+x-2}{3x^2+7x+4}=0$.

```
1 factoriser ((x^2+x-2)/(3x^2+7x+4))
```

$$\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(3x+4)}$$

17 f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(3x-1)^2-25(x-1)^2$$

et

$$g(x)=(4x-3)^2-(3x-2)(4x-3).$$

a. Développer $f(x)$ et $g(x)$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
- $f(x)=-24$;
- $g(x)=3$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
- $f(x)=-16x^2$;
- $g(x)=4x^2$.

Vérifier la cohérence des résultats du b. à la calculatrice.

18 a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

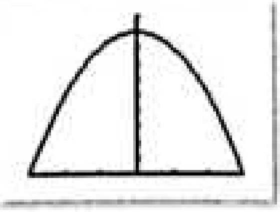
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $2x-3$		0	

b. En déduire une écriture sans valeur absolue de l'équation $|2x-3|=3$ suivant les valeurs de x.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-3|=3$.

Aide

Pour résoudre une équation avec valeur absolue, on peut l'écrire sans valeur absolue en utilisant un tableau de signes, puis résoudre l'équation obtenue.

19 a. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x^2-9|$ est représentée sur l'écran de calculatrice ci-contre.
Conjecturer les solutions de l'équation $|x^2-9|=5$.



b. Étudier le signe de x^2-9.
c. En déduire les solutions de l'équation $|x^2-9|=5$.

20 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-9x$.
a. Résoudre l'équation $f(x)=0$.
b. Représenter graphiquement la fonction f sur la calculatrice et contrôler les résultats du a.

21 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-2x-8.$$

a. Représenter graphiquement la fonction f sur la calculatrice et déterminer par lecture graphique les solutions de l'équation $f(x)=0$.
b. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2-9$:
- factoriser $f(x)$;
- résoudre l'équation $f(x)=0$ par le calcul ;
- comparer avec les résultats du a.

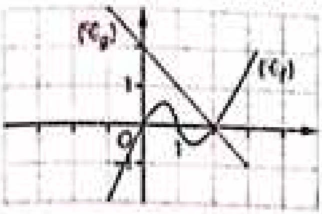
22 f désigne la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{4x^2-25}{3x+2}$.
a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
b. Représenter graphiquement la fonction f sur la calculatrice et contrôler les résultats du a.

Inéquations

Réponses rapides

23 Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.
a. $-3x < 2$;
b. $x^2 \geqslant 0$;
c. $(x-3)^2 > 0$;
d. $(x^2+3)(x-1) > 0$;
e. $(x-5)^2 \leqslant 0$;
f. $\dfrac{-3}{x+5} > 0$.

24 On a dessiné ci-dessous les représentations graphique $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ des fonctions f et g définies sur $[-1 ; 3]$.

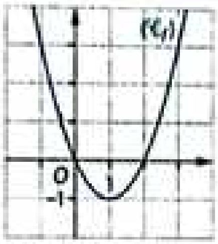


Lire graphiquement les solutions des inéquations suivantes.
a. $f(x) \leqslant 0$;
b. $g(x) > 0$;
c. $f(x) \leqslant g(x)$.

25 Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.
a. $3x - 1 - (3 - x) > x + 3$;
b. $\dfrac{1}{9}x - 3 < \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3}$.

26 Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.
a. $(2x-3)(1-5x) \geqslant 0$;
b. $x^2 - 5 < 0$;
c. $(2x-1)^2 \leqslant 9x^2$;
d. $(x+3)^2 \leqslant -1$.

27 f désigne la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^3 - x$.
Elle est représentée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère ci-contre.
a. Lire sur le graphique les solutions de l'inéquation $x^3 - x \geqslant 0$.
b. Vérifier, par le calcul, les résultats du a.



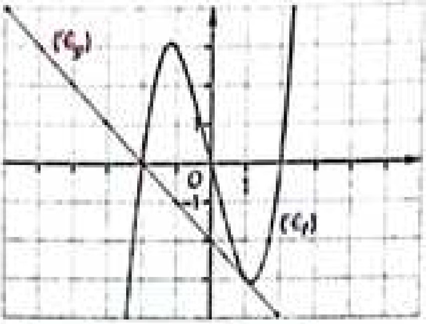
28 Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.
a. $\dfrac{x+5}{2-x} \geqslant 0$;
b. $\dfrac{3x-1}{x} < 0$;
c. $\dfrac{5}{x+2} > 0$;
d. $\dfrac{x^2-25}{3-x} \geqslant 0$;
e. $\dfrac{x+2}{3-x} > 5$;
f. $\dfrac{3x-2}{x^2-1} < \dfrac{3}{x+2}$;
g. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3} \leqslant \dfrac{2x-1}{x^2-9}$.

Aide
Pour résoudre une inéquation avec des fractions rationnelles, on essaie de ramener la résolution de l'inéquation à l'étude du signe d'un quotient.

29 f et g désignent les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = x^3 - 4x \text{ et } g(x) = -x - 2.$$

Leurs courbes représentatives sont tracées dans le repère ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement les inéquations :
a. $f(x) > 0$;
b. $f(x) > g(x)$.
2. Montrer que, pour tout x de ℝ, $f(x) = x(x+2)(x-2)$.
3. Résoudre par le calcul les inéquations :
a. $f(x) > 0$;
b. $f(x) > g(x)$.
4. Comparer les résultats avec ceux de la question 1.

30 a. Dresser le tableau de signes de l'expression $2x - 3$.
b. Écrire l'inéquation $|2x-3| \leqslant 1$, sans valeur absolue suivant les valeurs de x.
c. En déduire les solutions de l'inéquation $|2x-3| \leqslant 1$.

31 a. Reproduire et compléter le tableau.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $x^2 - x$		0	0	
$\lvert x^2 - x \rvert =$		⋮	⋮	

b. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation :

$$|x^2 - x| \leqslant x.$$

32 a. Montrer que, pour tout x de ℝ,

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

b. Montrer que pour tout x de ℝ,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

c. Déterminer le signe de $x^2 + x + 1$ à l'aide du a.
d. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^3 < 1$.

33 a. Montrer que, pour tout x de ℝ,

$$-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1.$$

b. Montrer que, pour tout x de ℝ,

$$-x^3 + 2x - 4 = (x+2)(-x^2+2x-2).$$

c. Déterminer le signe de $-x^2 + 2x - 2$.
d. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation :

$$-x^3 + 2x - 4 \geqslant 0.$$

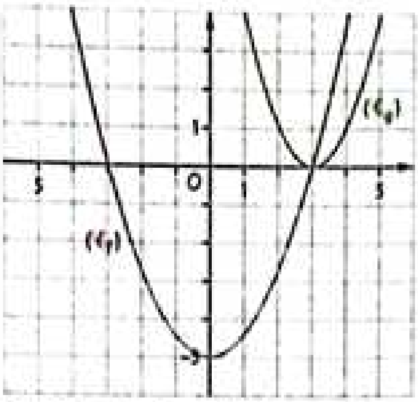
34 Résoudre dans ℝ l'inéquation $(x-3)^4 < 1$.

Aide
$(x-3)^4 < 1 \Leftrightarrow (x-3)^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow [(x-3)^2]^2 - 1^2 < 0.$

Exercices d'entraînement

35 Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 6x + 9.$$



Résoudre graphiquement, puis algébriquement, chacune des équations et inéquations suivantes :

a. $f(x) = 0$; b. $g(x) \geqslant 0$; c. $g(x) = f(x)$; d. $g(x) > f(x)$.

36 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5(x-3)^2 - 2.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative dans un repère et (d) désigne la droite d'équation $y = 3$.

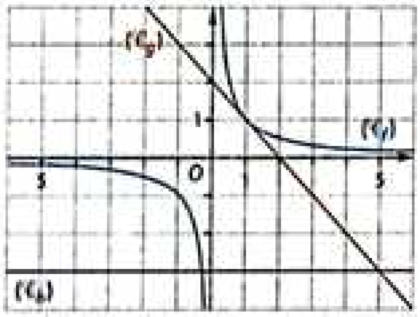
1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (d).

2. a. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.

b. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.a.

37 Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -x + 2 \quad \text{et} \quad h(x) = -3.$$



1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

b. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

2. a. Résoudre algébriquement l'inéquation $\frac{1}{x} > -3$.

b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

38 f et g désignent deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbes représentatives dans un repère.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x \leqslant \sqrt{x}$.

c. En déduire la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ selon les valeurs de x.

39 f et g désignent les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbes représentatives dans un repère.

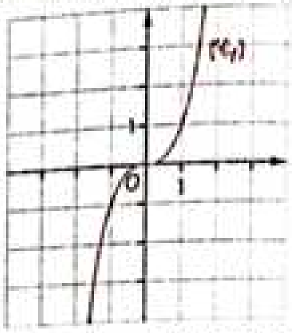
a. Vérifier que $x\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$.

b. En déduire que $f(x) - g(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$.

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

d. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ selon les valeurs de x.

40 Dans le repère ci-dessous, on a tracé la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



a. Conjecturer un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 2$ par deux nombres entiers consécutifs.

b. On admet que, si a et b sont deux nombres réels tels que :

$$f(a) < 2 \quad \text{et} \quad f(b) > 2,$$

alors la solution de l'équation $f(x) = 2$ est située entre a et b. Justifier la conjecture de la question a.

c. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la solution de l'équation $f(x) = 2$.

41 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2$. On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère et (d) désigne la droite d'équation $y = 3x + 2$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (d).

2. a. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 3x + 2$.

b. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.a.

AIDE

Pour résoudre une inéquation, on essaie de ramener la résolution à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient.

42 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3$. On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère et $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y = 2x^2 - x + 1$.

a. Développer l'expression $(x-1)(2x^2+1)$.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{P})$.

c. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{P})$ selon les valeurs de x.

d. À l'aide d'une calculatrice, représenter graphiquement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{P})$, puis vérifier les résultats précédents.

43 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :

$$\sqrt{2x-3} - 5 \leqslant 0.$$

AIDE

L'expression $\sqrt{2x-3}$ est définie si, et seulement si, $2x - 3 \geqslant 0$.

44 1. a. Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et la droite } (d) \text{ d'équation } y = x.$$

b. Conjecturer les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (d).
c. Conjecturer les valeurs de x pour lesquelles $(\mathscr{C})$ est située au-dessous de (d).

2. a. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = x$.

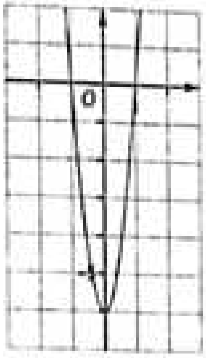
b. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geqslant x$.

c. Vérifier que les ensembles de solutions obtenus sont en accord avec les conjectures émises aux questions 1. b. et 1. c.

45 f désigne la fonction sur ℝ par :

$$f(x) = x^4 + 5x^2 - 6.$$

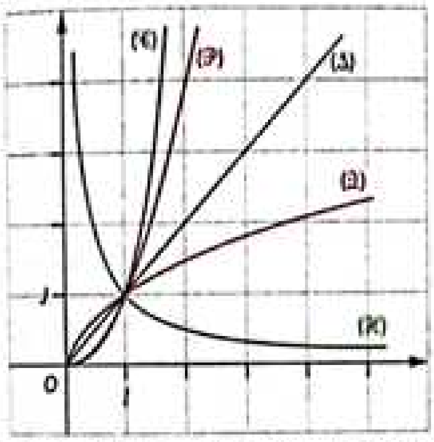
Elle est représentée dans le repère ci-contre.



a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
b. Montrer que, pour tout x de ℝ, $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 6)$.
c. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
Comparer avec le résultat du a.

46 Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on considère les courbes suivantes :

$(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$;
$(\mathscr{S})$ d'équation $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$;
(Δ) d'équation $y = x$ $(x \geqslant 0)$;
$(\mathscr{H})$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;
$(\mathscr{C})$ d'équation $y = x^3$ $(x \geqslant 0)$;



a. Comparer graphiquement suivant les valeurs de x les expressions $x^3, x^2, x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$.

b. Vérifier par le calcul les résultats du a.

Aide

Pour comparer les expressions $x^3, x^2, x, \sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$, on peut étudier le signe de leurs différences deux à deux.

47 f désigne la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^3 - 4x$. On note $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'axe des abscisses suivant les valeurs de x.

Résolution de problèmes

48 Déterminer, si cela est possible, trois nombres entiers consécutifs de somme 504.

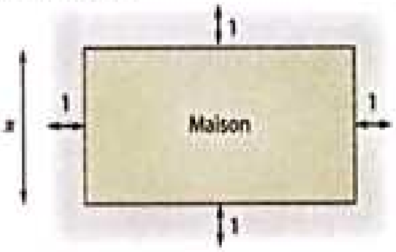
49 Déterminer, si cela est possible, deux nombres entiers naturels consécutifs tels que leur quotient soit égal à $\frac{5}{7}$.

50 Comment choisir le côté d'un carré pour que son aire soit inférieure ou égale à 625 cm² ?

51 Déterminer les nombres réels qui sont strictement supérieurs à leur cube.

52 Binto a obtenu une note égale à 14 lors d'un devoir affecté du coefficient 2.
Quelle note doit-il obtenir, au deuxième devoir affecté du coefficient 3 pour que sa moyenne soit supérieure à 17 ?

53 On veut construire une maison soumise aux contraintes suivantes :
- l'aire de la maison doit être de 32 m² ;
- la maison doit être rectangulaire et positionnée sous un toit qui déborde d'un mètre de chaque côté pour l'ombre selon le schéma ci-dessous.



Les mesures sur le schéma sont en mètres et la largeur de la maison est notée x.
a. Donner l'ensemble des valeurs possibles de x.
b. Montrer que l'aire de la partie du toit qui déborde est égale à celle de la maison si, et seulement si, $(x - 7)^2 - 17 = 0$.
c. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie du toit qui déborde est égale à celle de la maison.

Faire le point

54 Vocabulaire

f désigne une fonction définie sur un ensemble *D*.

Écrire les phrases ci-dessous, en complétant les pointillés.

a. 3 est une solution de l'équation $f(x) = 0$ signifie $f(3) = \dots$ et $3 \in \dots$.

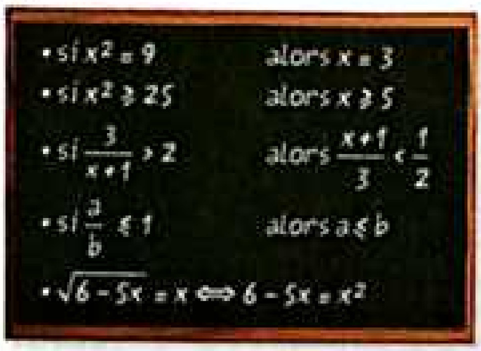
b. 7 est une solution de l'inéquation $f(x) < 0$ signifie ….

c. Grahiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont ….

d. Grahiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sont ….

55 À quelques détails près

Le professeur a écrit au tableau cinq raisonnements erronés d'élèves.



- si $x^2 = 9$ alors $x = 3$
- si $x^2 \geqslant 25$ alors $x \geqslant 5$
- si $\frac{3}{x+1} > 2$ alors $\frac{x+1}{3} < \frac{1}{2}$
- si $\frac{a}{b} \leqslant 1$ alors $a \leqslant b$
- $\sqrt{6-5x} = x \Longleftrightarrow 6 - 5x = x^2$

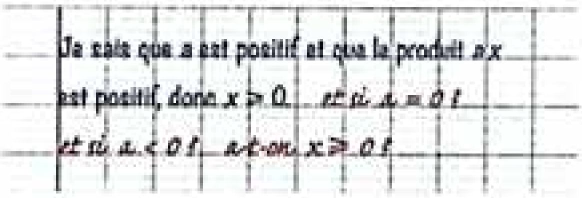
Déceler les erreurs commises et proposer une réponse correcte.

56 Déceler une erreur

a désigne un nombre réel fixé.

Pour résoudre l'inéquation $ax \geqslant 0$, un élève a tenu le raisonnement suivant.

Les remarques du professeur sont indiquées en rouge.



Je sais que *a* est positif et que le produit *ax* est positif, donc $x \geqslant 0$. *et si a = 0 ?*
et si a < 0 ? a-t-on x ⩾ 0 ?

Expliquer les remarques du professeur et proposer une solution correcte.

57 Un tableau pour plusieurs expressions

1. Reproduire et compléter le tableau de signes.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x + 1$	
$2 - x$	
$(x+1)(2-x)$	

2. En déduire les solutions des inéquations suivantes.

a. $(x+1)(2-x) < 0$; **b.** $\frac{x+1}{2-x} \geqslant 0$;

c. $\frac{2-x}{x+1} \leqslant 0$; **d.** $\frac{x^2(2-x)}{x+1} \geqslant 0$;

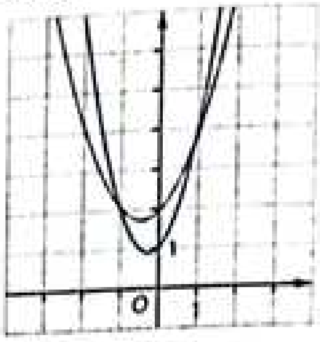
e. $\frac{2-x}{x^2(x+1)} \leqslant 0$; **f.** $\frac{(2-x)(x^2+3)}{x+2} \leqslant 0$.

58 Pas de conclusion hâtive

f et *g* désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + \frac{11}{12}x + \frac{23}{12}.$$

Leurs courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont tracées dans le repère ci-dessous.



a. Sur le graphique ci-dessus, lire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

b. Vérifier par le calcul les résultats du **a.** sachant que l'équation $f(x) = g(x)$ a deux solutions.

c. Vérifier que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à :

$$\left(x - \frac{11}{12}\right)(x+1) = 0.$$

d. Comparer les résultats du **a.** et du **c.** puis commenter.

59 Un peu de calcul mental

Déterminer mentalement le signe de chaque expression suivant les valeurs de *x*.

- $3(x+1)^2$;
- $-4\sqrt{x^2+3}$;
- $17|2-5x|$;
- $3 + 4x$;
- $-2x + 5$;
- $\frac{3}{-x^2-2}$;
- $\frac{1}{x}$;
- $-\frac{1}{\sqrt{x^2+3+5}}$;
- $(x-1)^2(2-x)^6(2x^4+3)$;
- $x^3(2x^2+3)(-x^2-2)$.

60 Fiche méthode

1. Reproduire et compléter la fiche méthode ci-dessous qui permet de résoudre une inéquation du type $|ax+b| \leqslant c$.

① J'étudie le … de $ax + b$ suivant les valeurs de *x*.
② J'en déduis, suivant les valeurs de *x*, une expression de ….
③ Je résous chacune des ….

2. Utiliser la fiche ci-dessus pour résoudre les inéquations suivantes :

a. $|2x-3| = 4$;

b. $|-x+1| > 5$.

Se tester

Vrai-faux

Top chrono (sans justification)

1 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ est $\{-3;3\}$.	☐	☐
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3>0$ est ℝ.	☐	☐
3. L'inéquation $x(x+3)\geqslant 0$ est équivalente à $x+3\geqslant 0$.	☐	☐
4. 1 est l'unique solution de l'équation $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$.	☐	☐
5. L'inéquation $x^2\leqslant 0$ n'a pas de solution.	☐	☐
6. L'équation $ax=b$, a toujours une solution.	☐	☐

Avec justification

2 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. -2 est solution de l'équation $x^3-3x^2-x+1=0$.	☐	☐
2. L'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2>0$ est ℝ*.	☐	☐
3. L'inéquation $\frac{5-x}{x^2+3}\geqslant 0$ est équivalente à $5-x\geqslant 0$.	☐	☐
4. Le produit ax^2 est toujours positif.	☐	☐
5. L'inéquation $\frac{x}{3}\leqslant\frac{5}{x}$ est équivalente à $x^2\leqslant 15$.	☐	☐
6. L'inéquation $x^2>9$ est équivalente à $x>3$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

3 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. L'inéquation $(x^2+9)(2x+5)>0$ est équivalente à l'inéquation :
   a. $(x+3)(x-3)(2x+5)>0$;
   b. $x>0$;
   c. $2x+5>0$.

2. Le nombre -5 est solution de l'équation :
   a. $5+x(2-x)=0$;
   b. $x^2+25=0$;
   c. $(2x-3)(x+5)=0$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2+25=0$ est :
   a. $\{-5;5\}$; b. vide ; c. $\{-5\}$.

4. L'ensemble des solutions de l'équation $|x|<3$ est :
   a. $[0;3[$; b. $]-3;3[$; c. $]-\infty;3[$.

Avec justification

4 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. -1 est solution de l'équation :
   a. $-x^2=1$; b. $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=0$; c. $x^3=x$.

2. L'équation $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ est équivalente à :
   a. $x^2-1=0$; b. $x-1=0$;
   c. $x^2-1=0$ ou $x+1=0$.

3. L'inéquation $\frac{x+3}{x+2}>0$ est équivalente à :
   a. $(x+3)(x+2)>0$;
   b. $x+3>0$ et $x+2>0$; c. $x>0$.

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)^2(5x^2+3)\leqslant 0$ est :
   a. vide ; b. $[0;+\infty[$; c. $\{-3\}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

13 Exercices d'approfondissement

65 Avec ou sans solution ?

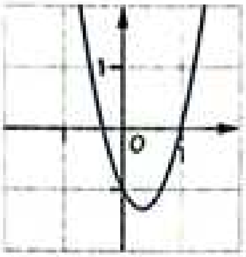
f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + \frac{181}{20}$.

a. Utiliser la calculatrice pour conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 6x + \frac{181}{20} = 0$.

b. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 + \frac{1}{20}$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et vérifier la conjecture du **a**.

66 Solutions et nombre de solutions



Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

1. Résoudre graphiquement les équations : • $f(x) = 0$; • $f(x) = -1$; • $f(x) = -2$.

2. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = (x-1)(3x+1) \quad \text{et} \quad f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}.$$

3. Résoudre par le calcul les équations et inéquations suivantes :

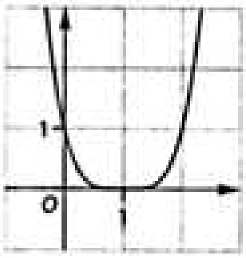
• $f(x) = 0$; • $f(x) = -1$; • $f(x) = -2$; • $f(x) > 0$; • $f(x) \geqslant -\frac{4}{3}$.

4. k désigne un nombre réel.

Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

a. Graphiquement ; **b.** par le calcul.

67 Une aide précieuse



Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^4.$$

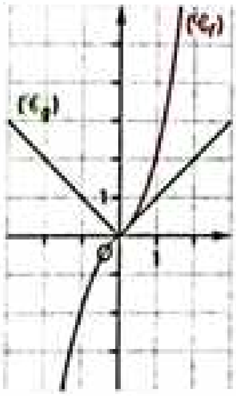
a. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$.

b. Résoudre par le calcul les inéquations : • $f(x) \geqslant 0$; • $f(x) \geqslant 1$.

Aide

▸ $(x-1)^4 - 1 = [(x-1)^2]^2 - 1^2 = \ldots$

68 Avec une valeur absolue



f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x$$

et $$g(x) = |x|.$$

Dans le repère ci-contre, on a tracé leurs courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

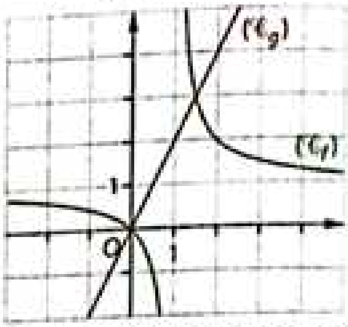
a. Utiliser le graphique pour conjecturer les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

b. Démontrer la conjecture par le calcul.

69 Positions relatives de deux courbes

Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x.$$

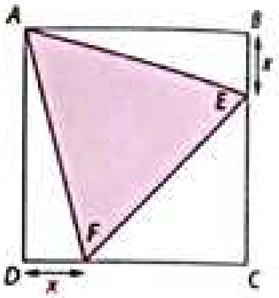


a. Conjecturer les valeurs de x pour lesquelles $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$.

b. Démontrer la conjecture émise au **a**.

70 Triangle équilatéral et équation

$ABCD$ désigne un carré de côté 10 cm.

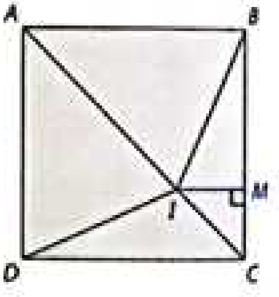


E est un point de $[BC]$, F un point de $[CD]$ et x un nombre réel tel que $BE = DF = x$.

a. Montrer que le triangle AEF est équilatéral si, et seulement si, $(x-20)^2 - 300 = 0$.

b. En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (ou lesquelles) le triangle AEF est équilatéral.

71 Égalité d'aires



$ABCD$ désigne un terrain carré de côté 1 km.

M est un point du côté $[BC]$.

Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du trapèze $IMCD$ est égale à celle du triangle IAB.

72 Le coup d'œil

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^6 + 3x^4 + x^2 + 2 = 0.$$

73 Expression auxiliaire

1. Montrer que, pour tous nombres réels a et b,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

3. (I) désigne l'inéquation $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 \leqslant 0$.

a. On pose $X = x^2$. En déduire une autre écriture de (I).

b. Résoudre (I).

Aide

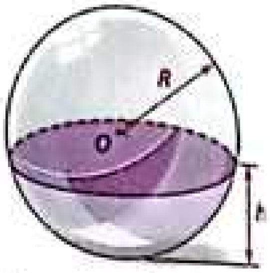
▸ Ramener la résolution de l'inéquation (I) à celle de :

$$(x+1)(x-1)^3 \leqslant 0.$$

74 Surface d'un liquide

On verse un liquide dans un récipient de forme sphérique de rayon égal à R, en m.

h désigne la hauteur du liquide, en m.



1. Calculer l'aire de la surface colorée du liquide en fonction de la hauteur h.

2. En déduire les valeurs de h pour lesquelles l'aire de la surface du liquide ;

a. est égale à πR^2 ; b. est égale à 0. Commenter.

3. On sait que le rayon R du récipient est égal à 1 m.

Pour quelle(s) valeur(s) de la hauteur, l'aire de la surface du liquide est-elle supérieure ou égale à 1 m ?

75 Équation de degré trois

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$x^3-2x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=0, \text{ notée } (E).$$

a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice l'existence d'un nombre entier solution de (E).

b. Vérifier cette conjecture par un calcul.

c. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$x^3-2x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=(x-1)(ax^2+bx+c).$$

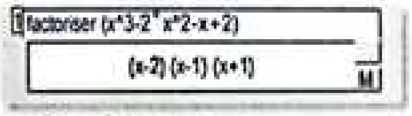
d. En déduire la résolution de l'équation (E).

76 À l'aide d'un calcul formel

f désigne la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x)=x^3-2x^2-x+2.$$

À l'aide du logiciel de calcul formel X-cas, on a obtenu l'affichage suivant.



```
factoriser (x^3-2*x^2-x+2)
(x-2) (x-1) (x+1)
```

a. Factoriser x^3-2x^2.

b. En déduire une factorisation de $f(x)$.

c. Comparer la factorisation obtenue à celle de l'affichage du logiciel.

d. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

77 Nombre de points d'intersection

f désigne la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^2-6x+10$.

On note ($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère.

k désigne un nombre réel quelconque.

On note (d_k) la droite d'équation $y=k$.

a. Montrer que, pour tout x de ℝ, $f(x)=(x-3)^2+1$.

b. Déterminer le nombre de points d'intersection de ($\mathscr{C}_f$) et (d_k) suivant les valeurs de k.

c. Pour $k>1$, étudier la position relative de ($\mathscr{C}_f$) et (d_k) suivant les valeurs de x.

78 Tramway et cycliste

À un certain arrêt de tramway, il a été établi que pendant les 30 premières secondes de démarrage, la distance d (en mètres) parcourue par le tramway et le temps t (en secondes) mis pour effectuer ce parcours, sont liés par la relation : $d=\frac{t^2}{10}$.

1. Au moment où le tramway démarre, un cycliste apparaît derrière lui, à 22,5 m de l'arrêt, à la vitesse de 18 km/h.

a. À quelle distance de l'arrêt rattrape-t-il le tramway ?

b. Avec les données de l'énoncé, peut-on assurer que le tramway redépassera le cycliste ?

2. Au moment où démarre le tramway, apparaît aussi à 22,5 m de l'arrêt, un passager potentiel qui se met aussitôt à le poursuivre à la vitesse constante v.

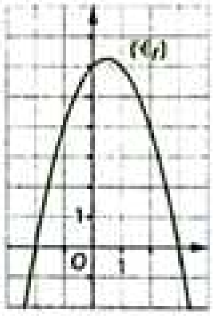
a. Si $v=9$ km/h, peut-il rattraper le tramway ? Sinon, quelle est la distance minimale qui l'en séparera pendant la poursuite ?

b. Quelle est la valeur minimale de v pour que ce passager puisse rattraper le tramway ?

79 Représentation graphique et factorisation

f désigne la fonction définie sur ℝ par $f(x)=-x^2+x+6$.

On a tracé sa courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) dans le repère ci-contre.



a. Utiliser la représentation graphique de f pour factoriser $-x^2+x+6$.

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\frac{x}{-x^2+x+6}=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x-3}.$$

80 Changement d'inconnue

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) :

$$x^4+3x^2-4=0.$$

1. On pose $X=x^2$.

a. Écrire l'équation (E) à l'aide de X.

b. • Établir que la forme canonique de X^2+3X-4 est :

$$\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}.$$

• Résoudre l'équation $X^2+3X-4=0$.

c. En déduire la résolution de (E).

2. Utiliser une méthode analogue pour résoudre les équations suivantes :

a. $x+3\sqrt{x}-4=0$; b. $(2x-1)^2+3(2x-1)-4=0$;

c. $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-4=0$.

Exercices d'approfondissement

81 Fraction composée

(*E*) désigne l'équation suivante : $\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{1-x}{1-\dfrac{1}{x}}}=0$.

Résoudre (*E*) en précisant, à chaque étape de la résolution, les contraintes sur l'inconnue.

82 Arithmétique universelle

Voici un problème posé par Newton dans son « arithmétique universelle ».

Un marchand possède une certaine somme d'argent, en livres.

La première année, il dépense 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers.

La deuxième année, il dépense encore 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers.

La troisième année , il dépense à nouveau 100 livres, puis il augmente ce qui lui reste d'un tiers. Il se trouve alors deux fois plus riche que la première année.

Quel était son capital initial ?

Info

Newton a contribué à développer tous les domaines des mathématiques et il est surtout célèbre pour avoir fondé, en mécanique, la théorie de la gravitation universelle.

83 Être méthodique

(*I*) désigne l'inéquation $\dfrac{(2+x)^2+(2-x)^2}{(2+x)^2-(2-x)^2}<-\dfrac{3}{5}$.

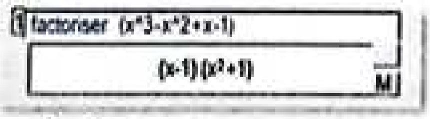
a. *Préciser les contraintes sur l'inconnue de (I).*

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (*I*).

84 Être bon observateur

(*J*) désigne l'inéquation $x^3-x^2+x-1\leqslant 0$.

À l'aide du logiciel de calcul formel X-cas, on a obtenu l'affichage suivant :



```
1 factoriser  (x^3-x^2+x-1)
(x-1)(x²+1)
```

a. Factoriser x^3-x^2.

b. En déduire la factorisation de x^3-x^2+x-1.

c. Résoudre l'inéquation (*J*).

85 Double inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la double inéquation.

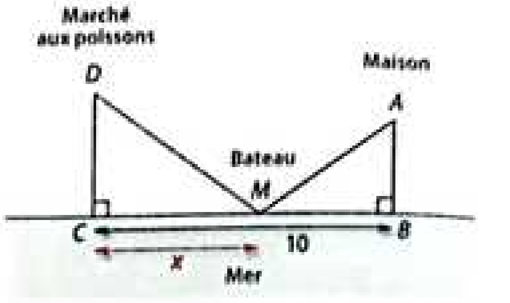
$$\frac{x-2}{x-1}\leqslant\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\leqslant\frac{x-1}{x-2}.$$

Aide

Commencer par résoudre séparément chacune des inéquations.

86 Chemin et proportions

Les points *D*, *M* et *A* désignent respectivement les emplacements du marché aux poissons, du bateau et celui de la maison.



On veut réaliser un chemin qui part de *D* et qui mène à *A* comme indiqué sur la figure ci-dessus.

Les longueurs sont indiquées en km et *M* désigne un point de [*BC*].

a. Où doit-on ranger le bateau le long de la plage [*BC*] pour que la longueur du chemin *MA* soit égale aux trois quarts de celle du chemin *DM* ?

b. Vérifier graphiquement à l'aide d'une calculatrice que, pour cette position du point *M*, le trajet est le plus court possible. Justifier cette conjecture graphique par le calcul ?

Aide

$MA=\dfrac{3}{4}DM \Leftrightarrow MA^2=\dfrac{9}{16}DM^2$.

87 Vitesse d'un coureur

1. Une course entre deux coureurs consiste en un aller-retour entre deux villes notées *A* et *B*.

On note *d* la distance en km entre *A* et *B*.

Le premier coureur fait le trajet de *A* à *B* à une vitesse constante V_1 km/h et le trajet de *B* à *A* à une vitesse constante inconnue *V* km/h.

Le deuxième coureur fait l'aller et le retour à la même vitesse constante V_2 km/h.

Sachant que les deux coureurs ont terminé la course en même temps, déterminer *V* en fonction de V_1 et V_2.

2. Applications

a. Sachant que $V_1=18$ et $V_2=15$, déterminer *V*.

b. Sachant que $V_1=2V_2$, déterminer *V* en fonction de V_2.

c. Sachant que $V_1=V_2$, déterminer *V* en fonction de V_2. Le résultat est-il prévisible ?

14

Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Selon le mathématicien russe Andreï Markov (1856-1922), les prévisions du futur ne dépendent pas d'informations sur le passé : le présent contient déjà toutes les données. Les contraintes mises en jeu sont modélisées par des systèmes d'équations.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est un mathématicien prolifique. On lui doit notamment une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires appelée « méthode du pivot de Gauss ».

Les objectifs du chapitre

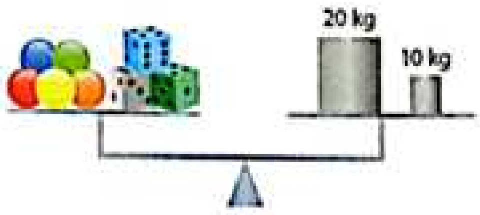
- Déterminer l'existence et l'unicité de solution d'un système de deux équations à deux inconnues.
- Résoudre par le calcul un système d'équations linéaires.
- Tester la cohérence et la validité des solutions trouvées.
- Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires.
- Résoudre graphiquement une inéquation linéaire.
- Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires.

14 Activités d'introduction

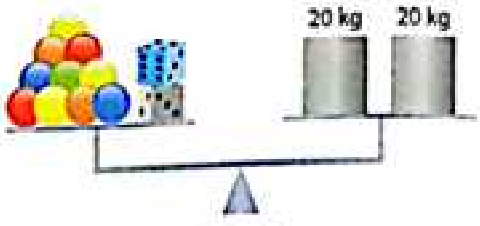
1 Masse d'une bille et d'un dé

Cours 1

Pour déterminer les masses respectives d'une bille et d'un dé, on dispose d'une balance et de poids. On suppose que l'on a des billes, des dés et des poids de 10 kg et de 20 kg en quantité suffisante, et que les solides de chaque sorte ont tous la même masse.
On effectue deux pesées schématisées ci-dessous dans lesquelles les balances sont à l'équilibre.



Pesée 1



Pesée 2

x désigne la masse d'une bille, en kg, et y désigne la masse d'un dé, en kg.

1 Mise en équations

Écrire les équations (1) et (2) d'inconnues x et y, traduisant les pesées 1 et 2.

2 Résolution

a. Dans le plateau gauche de la balance de la pesée 1, on double le nombre de billes afin d'avoir le même nombre de billes que dans la pesée 2.
- Quel est alors le nombre de dés à rajouter ?
- Quelle doit être la masse, en kg, dans le plateau de droite pour que la balance soit équilibrée ?

b. Écrire l'équation (3) traduisant cette troisième pesée.

c. • Soustraire membre à membre les équations (3) et (2).
• En déduire la masse d'un dé.

d. Conclure en calculant la masse d'une bille.

La méthode utilisée pour résoudre ce système est appelée méthode de résolution par combinaisons linéaires.

2 Nombre de DVD

Cours 1c

Gana et Mambo discutent des DVD de films qu'ils possèdent. Voici un extrait de leur dialogue.

Gana : « Si je doublais mon nombre de DVD, j'en aurais 7 de plus que toi. »
Mambo : « Si nous en achetions encore 2 chacun, nous en aurions 24 au total. »

1 Mise en équations

x désigne le nombre de DVD de Mambo et y désigne le nombre de DVD de Gana.

Justifier que le dialogue se traduit par le système : $\begin{cases} y = 2x - 7 & (1) \\ y = -x + 20 & (2) \end{cases}$.

2 Résolution graphique

a. Dans un repère, tracer les droites d'équations réduites (1) et (2).

b. Lire les coordonnées du point d'intersection.

c. En déduire le nombre de DVD de Mambo et le nombre de DVD de Gana.

3 Résolution par le calcul

a. À partir des équations (1) et (2), écrire une égalité où la seule inconnue est x.

b. Résoudre ensuite cette équation, puis calculer y.

c. Comparer avec les résultats du 2.

La méthode utilisée pour résoudre ce système est appelée méthode de résolution par substitution.

3 Une ou plusieurs solutions ?

Cours 1

On considère le système suivant d'inconnues x et y : $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases}$.

1 Qui a raison ?

Babila affirme que la solution est le couple $(1\,;-1)$ et Nembo que c'est $(4\,;1)$.
Vérifier par le calcul la validité ou l'invalidité de chaque affirmation.

2 Par le graphique

On se place dans un repère.

a. Tracer les droites correspondant aux deux équations du système.

b. Que constate-t-on ?

3 Par le calcul

a. Dans chacune des équations du système, exprimer y en fonction de x.

b. Que constate-t-on ?

c. En déduire que l'expression générale d'un couple solution du système est : $\left(x\,;\dfrac{2x-5}{3}\right)$
(x étant un nombre réel quelconque).

4 Un autre cas de figure

Reprendre une démarche analogue à celle des questions **2.** et **3.** pour le système : $\begin{cases} x-2y=-3 \\ -3x+6y=2 \end{cases}$.

Un système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues peut avoir une seule solution, une infinité de solutions ou ne pas en avoir du tout.

4 Fabrication de jouets

Cours 2b

Un artisan fabrique deux types de jouets en bois : des marionnettes et des petites voitures.
Pour fabriquer une marionnette, il lui faut 1,5 h de travail et 2 kg de bois ;
pour une voiture, il lui faut une demi-heure de travail et 1 kg de bois.
Il travaille au maximum 8 heures par jour et dispose d'un stock journalier de 14 kg de bois.

1 Mise en inéquations

x désigne le nombre de marionnettes et y le nombre de voitures fabriquées par jour.

a. Expliquer pourquoi on a : $1{,}5x + 0{,}5y \leqslant 8$.

b. Écrire l'inéquation traduisant la deuxième contrainte de l'énoncé.

2 Résolution graphique des contraintes

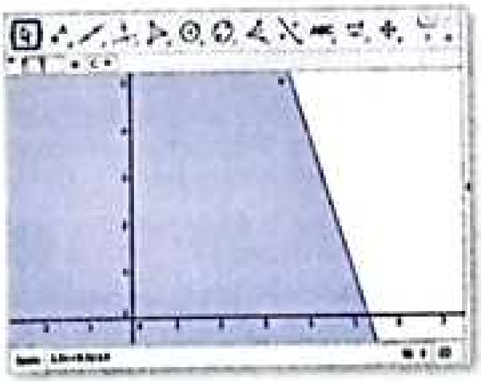
Dans la barre de saisie d'une feuille GeoGebra, taper chacune des inéquations.
(Pour obtenir le symbole ⩽, cliquer au bout de la ligne de saisie sur le bouton α.)

3 Lecture graphique des solutions

a. Justifier que les solutions sont des couples de nombres entiers.

b. En utilisant le graphique répondre aux questions suivantes :

- L'artisan peut-il fabriquer en une journée :
  - – 4 marionnettes et 3 voitures ?
  - – 5 marionnettes et 4 voitures ?
- En une journée, combien l'artisan peut-il fabriquer au maximum de marionnettes ? de voitures ?



14 Cours

1 Système d'équations linéaires

a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres réels fixés (non tous nuls).

a Rappels

Définitions

- Un **système linéaire** de deux équations du premier degré à deux **inconnues** x et y est un système de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

- ***Résoudre le système***, c'est trouver tous les couples de nombres réels $(x\,;y)$ vérifiant simultanément les deux équations du système.
- Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques • Les solutions d'un tel système sont des **couples** de nombres réels ; il y a en effet deux inconnues.
• Il existe des systèmes ayant plus d'équations, leur résolution s'inspire de celles des systèmes à deux équations.

b Existence et unicité de la solution

Définition

(S) désigne le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

On appelle **déterminant** du système (S) le nombre réel $ab'-a'b$.

Propriété

Un système de deux équations à deux inconnues admet une solution unique si, et seulement si, son déterminant est différent de zéro.

Exemple 1

Le système $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ admet un seul couple solution car $2\times(-2)-3\times3=-11$ et $-11\neq0$.

Exemple 2

Le système $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ 6x-3y=5 \end{cases}$ a un déterminant qui est nul. Il peut y avoir une infinité de solutions ou ne pas y en avoir du tout. *(Voir Activité 3)*

c Illustration graphique

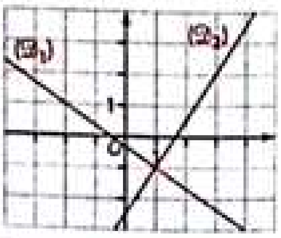
Propriété

(S) désigne le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des coordonnées des points d'intersection des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$.

Remarque Deux droites peuvent être sécantes, strictement parallèles ou confondues, le système (S) aura alors respectivement soit une, soit aucune, soit une infinité de solutions.

Exemple Dans un repère, on peut représenter graphiquement le système (S) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ en traçant les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $2x+3y=1$ et $3x-2y=5$.
La solution de ce système correspond aux coordonnées du point d'intersection.
La solution est le couple : $(1\,;-1)$.



Remarque Le déterminant d'un tel système est égal au déterminant de deux **vecteurs directeurs** des droites dont les équations sont celles du système.

Les droites $(\mathscr{D}_1)$et $(\mathscr{D}_2)$ de l'exemple précédent ont pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}(-3\,;2)$ et $\overrightarrow{u_2}(2\,;3)$.
Le déterminant de (S) est bien égal à $\text{dét}\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=-13$.

1 Résolution par substitution

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système $(S) : \begin{cases} 3x-y=7 & (1) \\ -2x-2y=-2 & (2) \end{cases}$.

Solution commentée

1. L'équation (1) s'écrit : $y=3x-7$. On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ -2x-2y=-2 \end{cases}$$

2. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ -2x-2(3x-7)=-2 \end{cases}$ (On remplace y dans l'équation (2).)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ -2x-6x+14=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ -8x=-16 \end{cases}$.

3. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-7 \\ x=2 \end{cases}$ (On calcule x.)

4. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=3\times2-7 \\ x=2 \end{cases}$ (On remplace x par sa valeur dans l'équation (1).)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ (On calcule y.)

5. La solution est le couple $(2\,;-1)$.

Méthode

1. Isoler une inconnue dans une des deux équations. Choisir l'inconnue la plus facile à isoler, par exemple lorsque le coefficient devant cette inconnue est égal à 1 ou à –1).

2. Substituer (c'est-à-dire remplacer) l'inconnue isolée dans l'autre équation.

3. Résoudre l'équation à une seule inconnue obtenue.

4. Substituer dans l'autre équation la valeur trouvée et calculer la valeur de la deuxième inconnue.

5. Conclure.

[illegible]

▸ $(S) \Leftrightarrow (S')$ signifie que les deux systèmes sont équivalents.

2 Résolution par combinaisons linéaires

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système $(S) : \begin{cases} 3x-2y=-3 & (1) \\ 2x+\ \ y=17 & (2) \end{cases}$.

Solution commentée

1. $\begin{matrix} (1)\times5 \\ (2)\times2 \end{matrix} \begin{cases} 15x-10y=-15 \\ 4x+10y=34 \end{cases}$. (On choisit d'éliminer y.)

2. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 15x-10y+4x+10y=-15+34 \\ 4x+10y=34 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 19x=19 \\ 4x+10y=34 \end{cases}$ (On additionne membre à membre les deux équations puisque les coefficients de y sont opposés.)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4x+10y=34 \end{cases}$

3. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4x+10y=34 \end{cases}$ (On remplace x par sa valeur dans l'équation (2).)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 10y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=30 \end{cases}$

4. La solution est le couple $(1\,;3)$.

Méthode

1. Éliminer l'une des deux inconnues par soustraction ou addition membre à membre des deux équations. Pour cela, multiplier chaque équation par des nombres tels que les coefficients de l'une des inconnues deviennent soit égaux, soit opposés.

2. Additionner les deux équations obtenues. Résoudre ensuite pour obtenir la valeur de l'inconnue restante.

3. Substituer dans l'une des équations du système la valeur trouvée et calculer la valeur de la deuxième inconnue.

4. Conclure.

Remarque

▸ Lorsqu'on a trouvé la solution, il est bon de vérifier en remplaçant, dans les équations de départ, les inconnues par leurs valeurs.

S'exercer

3 Résoudre par le calcul les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} 5x-y=17 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} 0{,}5x-0{,}7y=1{,}5 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 0{,}5x-y=-4 \\ 0{,}25x+0{,}5y=1 \end{cases}$;

e. $\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{1}{4}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=7 \end{cases}$; f. $\begin{cases} x-\frac{1}{3}y=1 \\ 2x+\frac{1}{3}y=3 \end{cases}$;

4 Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il y a une solution unique.

a. $\begin{cases} 5x-10y=17 \\ x-2y=2 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 5x-y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$.

5 Résoudre graphiquement le système c. de l'exercice 4.

6 En utilisant la méthode de votre choix, démontrer que le système $\begin{cases} 3x+15y=17 \\ 2x+10y=9 \end{cases}$ n'a pas de solution.

2 Inéquations du premier degré à deux inconnues

a Régionnement du plan

Propriété

La droite $(\mathscr{D})$ d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux **demi-plans** ouverts de frontière $(\mathscr{D})$:

- l'un, noté $(\mathscr{P}_1)$, est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
$$ax + by + c < 0\,;$$
- l'autre, noté $(\mathscr{P}_2)$, est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
$$ax + by + c > 0.$$

Remarque Lorsque l'inégalité est large, les demi-plans sont dits fermés.

Principe

Pour vérifier qu'un point $A(x_A\,;y_A)$ appartient à l'un des deux demi-plans, on calcule $ax_A + by_A + c$ puis on détermine son signe ; si l'expression est nulle, le point est sur la droite frontière.

Exemple

$(\mathscr{D})$ désigne la droite d'équation $3x - 2y + 2 = 0$.

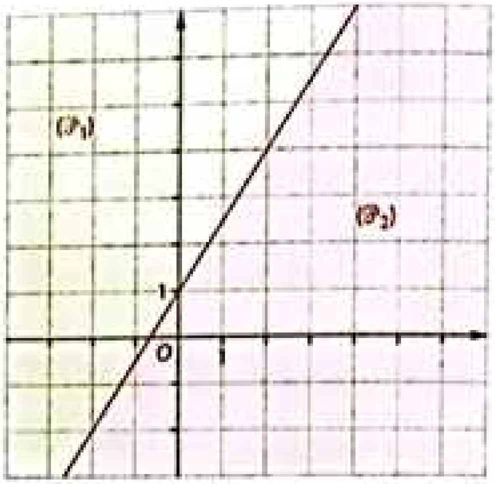
Cette droite partage le plan en deux demi-plans ouverts :

- l'un noté $(\mathscr{P}_1)$ d'inéquation $3x - 2y + 2 < 0$;
- l'autre noté $(\mathscr{P}_2)$ d'inéquation $3x - 2y + 2 > 0$.

Le point $A(2\,;1)$ est dans le demi-plan $(\mathscr{P}_2)$ car $3 \times 2 - 2 \times 1 + 2 = 6$ et $6 > 0$.

Le point $B(-2\,;3)$ est dans le demi-plan $(\mathscr{P}_1)$ car $3 \times (-2) - 2 \times 3 + 2 = -10$ et $-10 < 0$.

Le point $C(2\,;4)$ est sur la droite $(\mathscr{D})$ car $3 \times 2 - 2 \times 4 + 2 = 0$.



b Systèmes d'inéquations

Définition

Résoudre graphiquement un système d'inéquations, c'est déterminer la région du plan où les coordonnées des points vérifient toutes les inéquations du système.

Exemple

(S) désigne le système : $\begin{cases} 2x - 3y > 4 & (1) \\ x + 5y < 2 & (2) \end{cases}$.

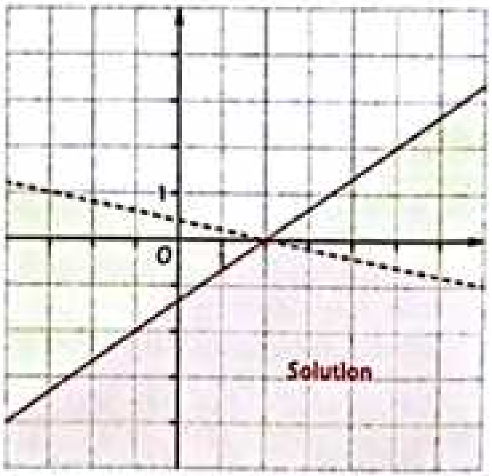
On trace les deux droites frontières, et on détermine pour chaque inéquation le demi-plan solution.

L'ensemble des solutions est le domaine ouvert commun aux deux demi-plans solutions.

$A(2\,;-2)$ est dans la région solution de (S).

$B(5\,;1)$ est dans le demi-plan solution de l'inéquation (1), mais pas dans le demi-plan solution de l'inéquation (2), donc il n'est pas dans la région solution de (S).

$C(2\,;1)$ n'est pas dans la région solution de (S).



7 Programmation linéaire

Un livreur doit livrer deux types de cartons : C_1 et C_2.
Un carton C_1 pèse 30 kg et occupe un volume de 40 dm³ ;
un carton C_2 pèse 15 kg et occupe un volume de 60 dm³.
Le camion du livreur peut emporter une charge maximale de 1,2 tonnes et un volume de 2 m³.
Comment optimiser le nombre *N* de cartons sachant qu'il doit charger deux fois plus de cartons C_1 que de cartons C_2 ?

Solution commentée

1. *x* désigne le nombre de cartons C_1 et *y* le nombre de cartons C_2.

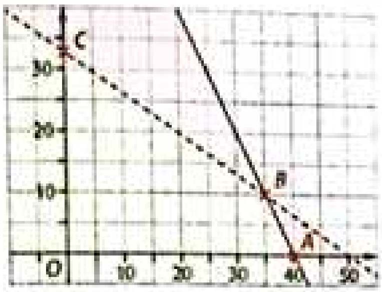
Les premières données de l'énoncé se traduisent par l'inéquation :

$30x + 15y \leqslant 1\,200$ (le nombre de kg).

Les deuxièmes données de l'énoncé se traduisent par l'inéquation :

$40x + 60y \leqslant 2\,000$ (le nombre de dm³).

2.



Les chargements possibles correspondent aux coordonnées entières des points intérieurs au polygone *ABCD*.

3. Le nombre de cartons chargés est $N = x + y$. Il doit y avoir deux fois plus de cartons C_1 que de cartons C_2, donc $x = 2y$.

On a alors $N = y + 2y = 3y$ et on cherche le point intérieur au polygone *OABC* pour lequel *N* est maximal, c'est-à-dire pour lequel *y* est maximal.

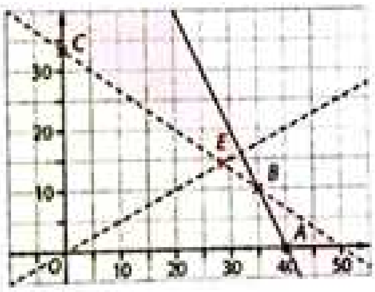
4. On trace la droite d'équation :

$x = 2y$.

Le point cherché est le point *E* de cette droite intérieur au polygone *OABC* et dont l'ordonnée est maximale.

On trouve graphiquement :

$x = 28$ et $y = 14$.



On vérifie que le chargement est conforme en masse et en volume.

Méthode

1. Mettre en inéquations le problème en choisissant deux inconnues.

2. Résoudre le système obtenu graphiquement, c'est-à-dire déterminer la région du plan contenant les points dont les coordonnées vérifient toutes les inéquations du système et sont des nombres entiers.

3. Écrire l'expression qui correspond à la fonction à optimiser.

4. Représenter sur le même graphique la fonction à optimiser (ici, une droite). Déterminer sur le graphique le (ou les) point(s) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à la fois à la droite et à l'intérieur du polygone *OABC*.

Info

▸ La dénomination de programmation linéaire a tendance à être abandonnée au profit d'optimisation linéaire, pour éviter la confusion avec la programmation informatique.

Le but reste de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction répondant à des contraintes traduites par un polygone convexe.

S'exercer

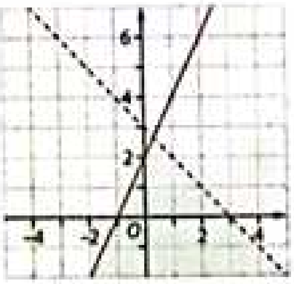
8 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a. $3x - 2y + 1 > 0$;
b. $x + 5y - 1 \leqslant 0$;
c. $x - 5 < 0$;
d. $-2y + 1 \geqslant 0$.

9 Résoudre graphiquement les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} 3x - 2y > 1 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x - y + 2 \leqslant 1 \\ x + 2y - 1 > 0 \end{cases}$.

10 Donner un système d'inéquations dont la solution est représentée par la partie la plus foncée du graphique ci-contre (les droites frontières n'étant pas incluses).



Exercices d'entraînement

Systèmes de deux équations : résolution

Réponses rapides

11 Dire lequel, parmi les couples suivants, est solution du système $(S) : \begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+y=2 \end{cases}$.

a. $(4 ; 1)$; b. $(1 ; -1)$; c. $(-1 ; 1)$.

12 Résoudre par substitution le système :

$$(S) : \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=7 \end{cases}.$$

13 Résoudre par combinaisons linéaires le système :

$$(S) : \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

14 Relier chaque système à sa solution éventuelle.

$(S_1) : \begin{cases} x+y=2 \\ -2x-y=-1 \end{cases}$ • • pas de solution

$(S_2) : \begin{cases} x-2y=6 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ • • $(-1 ; 3)$

$(S_3) : \begin{cases} 4x-2y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ • • $(1 ; 2)$

$(S_4) : \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ • • $(2 ; -2)$

15 Résoudre chacun des systèmes suivants avec la méthode de calcul de votre choix.

a. $\begin{cases} x-y=2 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} 4x+y=7 \\ -3x-2y=-1 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 5x+3y=8 \\ -2x-3y=-5 \end{cases}$.

Aide

▶ Ce sont les coefficients des inconnues x et y qui doivent guider votre choix.

16 Résoudre chacun des systèmes suivants avec la méthode de calcul de votre choix.

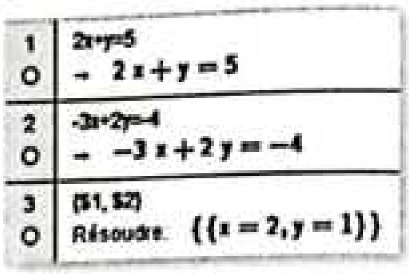
a. $\begin{cases} 0{,}4x-0{,}7y=1{,}5 \\ 0{,}6x+0{,}5y=0{,}7 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 0{,}4x+0{,}1y=1 \\ -0{,}5x+0{,}3y=-0{,}4 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=0 \\ -\frac{1}{2}x-y=1 \end{cases}$; d. $\begin{cases} x\sqrt{3}-y=-2 \\ -x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3} \end{cases}$.

17 Dans chacun des cas, déterminer le nombre réel k pour que le couple $(-1 ; 1)$ soit solution du système :

a. $\begin{cases} kx+y=5 \\ -x+2y=3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+ky=1 \end{cases}$.

18 a. Expliquer ce qu'affiche l'écran ci-dessous obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.



```
1  2x+y=5
○  → 2x + y = 5
2  -3x+2y=-4
○  → −3x + 2y = −4
3  {$1, $2}
○  Résoudre  {{x = 2, y = 1}}
```

b. Retrouver le résultat par le calcul.

19 Dans un bar, une première commande de deux sodas et trois jus de fruit a coûté 2 475 F CFA, alors qu'une deuxième commande de trois sodas et un jus de fruit a été facturée 1 875 F CFA.

a. Écrire un système d'équations vérifiées par le prix x d'un soda et le prix y d'un jus de fruit.

b. Résoudre ce système pour connaître le prix de chaque boisson.

c. Un client paye ses boissons (soda et jus de fruit) 1 950 F CFA.
Qu'a-t-il commandé ?

20 Déterminer deux nombres entiers naturels dont la somme est égale à 32 et la différence est égale à 10.

21 Déterminer deux nombres entiers naturels dont la somme est égale à 27 et tels que la différence entre le double du premier et le triple du second est égale à 14.

22 Peut-on déterminer deux nombres entiers naturels tels que :
- la somme du premier et du double du second est égale à 17 ;
- la somme du quadruple du premier et du double du second est égale à 30 ?

23 Représenter un rectangle dont le périmètre est égal à 50 cm et dont la largeur est égale au tiers de sa largeur.

24 Lors d'un championnat de football, une équipe a terminé les 36 matchs de l'année avec 40 points et 18 matchs perdus.

a. Sachant qu'une victoire rapporte trois points et qu'un match nul en rapporte un, déterminer le nombre de victoires et de matchs nuls de cette équipe.

b. Pour éviter la relégation (descente en division inférieure), l'équipe devait finir avec au moins 30 points.
Proposer une méthode pour obtenir tous les couples (nombre de victoires, nombre de matchs nuls) possibles.

25 Les deux élèves Angu et Gana ont reçu leurs relevés de notes pour la première période :

Évaluation	Coefficient	Angu	Gana
1	✱	15	13
2	✱	12	10
3	5	16	17
Moyenne		14,9	14,4

Aide

La moyenne se calcule en faisant la somme des produits coefficient par note, et en divisant le résultat par le total des coefficients.

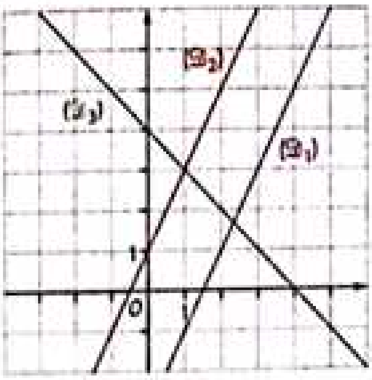
Malheureusement deux tâches d'encre ont masqué les coefficients des deux premières évaluations.
En désignant par x et y ces deux coefficients, écrire un système d'équations d'inconnues x et y, puis le résoudre.

26 Lors d'un concert, le prix d'une place debout est de 950 F CFA et d'une place assise en tribune de 1 900 F CFA.
Il y a eu en tout 3 550 places vendues et la recette totale s'est élevée à 4 664 500 F CFA.
Calculer le nombre de billets vendus de chaque sorte.

Systèmes de deux équations : lecture graphique

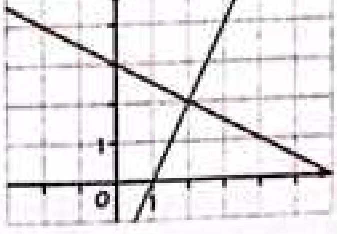
Réponses rapides

27



1. Associer à chaque droite tracée ci-dessus son équation :
a. $y=-x+4$; **b.** $y=2x-3$; **c.** $y=2x+1$.
2. Lire, si elles existent, les solutions des systèmes :
a. $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=2x+1 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=2x+1 \end{cases}$; **c.** $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=2x-3 \end{cases}$.

28 Donner un système pouvant être résolu grâce au graphique ci-contre et lire sa solution.
Vérifier le résultat par le calcul.



29 Résoudre graphiquement les systèmes suivants.

a. $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 2x=1 \\ x-y=6 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} 3x+5y=9 \\ 3x-2y=-33 \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} x+y=7 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$;

e. $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$; **f.** $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$.

Pour les exercices 30 à 32, conjecturer graphiquement la solution du système (*S*), puis valider ou invalider la conjecture par un calcul.

30 (*S*) désigne le système suivant :

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -3{,}6x+2y=3 \end{cases}.$$

31 (*S*) désigne le système suivant :

$$\begin{cases} 21x-3y=-2 \\ -69x+10y=50 \end{cases}.$$

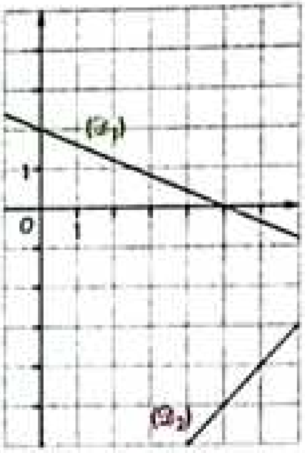
32 (*S*) désigne le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+y=-5 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}.$$

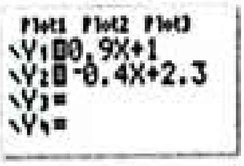
Remarque

La résolution graphique a ses limites, notamment lorsque la solution « sort du cadre du tracé » et parce que la lecture est parfois imprécise.

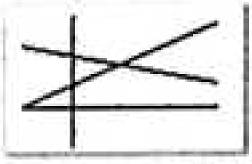
33 Le graphique ci-contre est incomplet : on ne peut pas lire le point d'intersection des deux droites.
a. Justifier que ces deux droites se coupent.
b. Retrouver les équations des droites.
c. Tracer ces droites dans un repère afin de résoudre graphiquement le système obtenu.
d. Vérifier par le calcul les coordonnées du point d'intersection.



34 Voici deux écrans obtenus à l'aide d'une calculatrice :

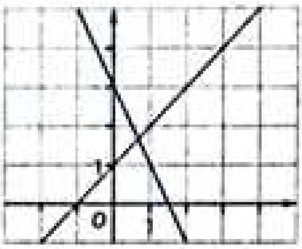


```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■0,9X+1
\Y2■-0.4X+2.3
\Y3=
\Y4=
```



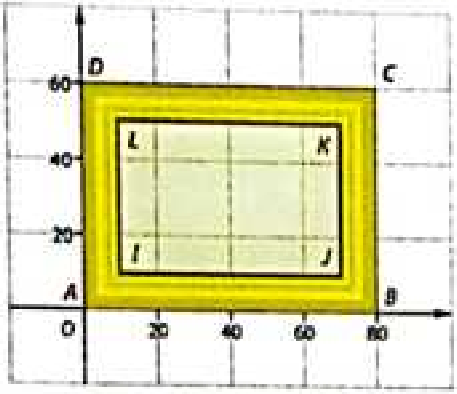
a. Conjecturer la solution du système représenté.
b. Valider ou invalider la conjecture par le calcul.

35 Donner un système pouvant être résolu grâce au graphique ci-contre et lire sa solution.
Vérifier le résultat par le calcul.



Exercices d'entraînement

36 Le cadre d'un tableau est représenté par la figure ci-dessous.



ABCD et *IJKL* sont des rectangles tels que :

$$AB = 80 \text{ cm} \quad \text{et} \quad AD = 60 \text{ cm}.$$

L'épaisseur de l'encadrement est de 10 cm.
Pour suspendre ce cadre et pour des raisons d'équilibre, le crochet doit être placé à l'intersection des droites (*AJ*) et (*BJ*).
On se place dans un repère d'origine *A* et d'axes (*AB*) et (*AD*).

a. Justifier que le problème revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=80 \end{cases}.$$

b. Résoudre graphiquement ce système et donner la position du crochet.

Aide

- Déterminer les coordonnées des points dans le repère choisi, puis les équations des droites (*AJ*) et (*BJ*).

37 (*S*) désigne le système : $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$.

a. Déterminer un vecteur directeur de chaque droite correspondant au système.
b. Calculer le déterminant de ces deux vecteurs.
Que peut-on en déduire ?
c. Résoudre graphiquement (*S*).

Aide

- Un système linéaire de deux équations à deux inconnues a une solution unique si les vecteurs directeurs des deux droites correspondantes ne sont pas colinéaires : le déterminant du système est égal au déterminant des deux vecteurs.

38 Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il a une solution unique, puis le résoudre graphiquement.

a. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+3y=2 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 4x-6y=-2 \\ -2x+3y=7 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} x-2y=1 \\ -3x+6y=-3 \end{cases}$; **d.** $\begin{cases} x+5y=-3 \\ 2x+y=3 \end{cases}$;

e. $\begin{cases} 2y=1 \\ -x+y=-3 \end{cases}$; **f.** $\begin{cases} x+1=0 \\ -3x=-3 \end{cases}$.

39 $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ désignent les droites d'équations :

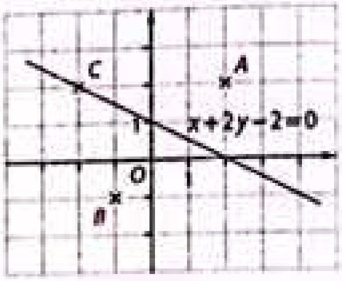
$$y=3x+1 \quad \text{et} \quad y=-x+5.$$

a. Justifier que $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes.
b. Déterminer graphiquement leur point d'intersection.

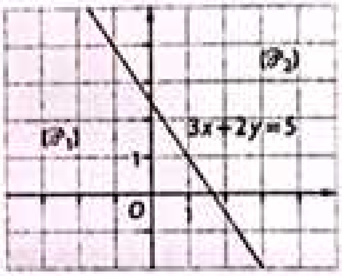
Inéquations

Réponses rapides

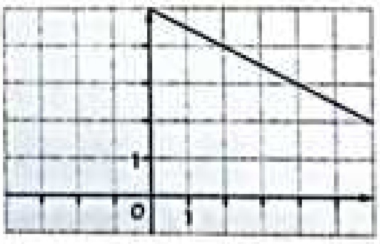
40 Pour chacun des points *A*, *B* et *C* de la figure, indiquer l'équation ou l'inéquation dont ses coordonnées sont solution.



41 Associer à chaque demi-plan ouvert de la figure son inéquation.



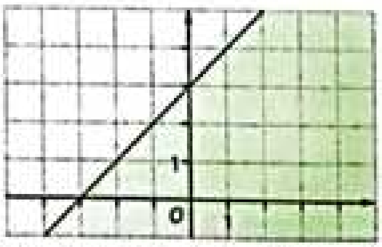
42 Écrire une inéquation dont l'ensemble des solutions est le demi-plan ouvert coloré ci-dessous.



43 Résoudre graphiquement l'inéquation suivante :

$$2x+3y-3<0.$$

44



1. Écrire une inéquation dont l'ensemble des solutions est le demi-plan fermé coloré sur le graphique ci-dessus.
2. Parmi les couples suivants, déterminer ceux qui sont solution de cette inéquation :
a. (−2 ; 1) ; **b.** (−1 ; 3) ; **c.** (4 ; 2).
3. Proposer deux points dont les coordonnées sont solution de l'inéquation.

45 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a. $x < 2y - 3$; b. $2x > y + 1$;

c. $5y - x \leqslant 3$; d. $3x - y \geqslant -3$;

e. $x < 2y$; f. $y > -3$.

46 Un bureau de recherche emploie des informaticiens et des mathématiciens.

Le nombre de mathématiciens doit être au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens. On désigne par x le nombre d'informaticiens et y le nombre de mathématiciens.

1. Écrire l'inéquation que doivent vérifier ces nombres.
2. Résoudre graphiquement cette inéquation.
3. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes.

a. Citer quelques couples de nombres possibles.

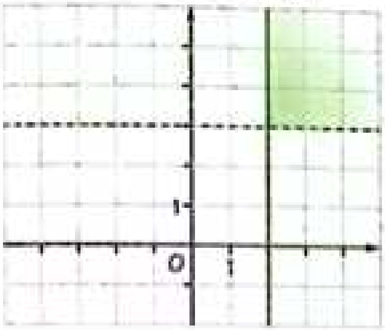
b. Est-il possible que le nombre d'informaticiens soit égal à 15 et le nombre de mathématiciens à 30 ?

c. Quel est le nombre maximal d'informaticiens si l'effectif total de l'entreprise est de 50 employés ?

Systèmes d'inéquations

Réponses rapides

47 Écrire un système dont l'ensemble des solutions est la partie du plan colorée en foncé ci-dessous.

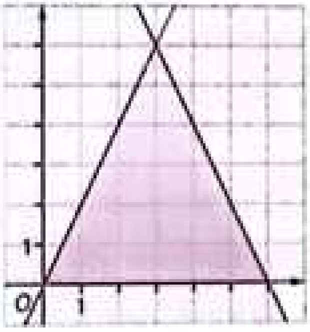


48 Le triangle foncé ci-dessous est la solution de l'un des systèmes d'inéquations suivantes. Lequel ?

a. $(S_1)\begin{cases}2x - y \geqslant 0\\2x + y - 12 \leqslant 0\\y \leqslant 6\end{cases}$;

b. $(S_2)\begin{cases}y \leqslant 2x\\2x + y - 12 \leqslant 0\\y \geqslant 0\end{cases}$;

c. $(S_3)\begin{cases}y \leqslant 2x\\y \leqslant 12 - 2x\end{cases}$.



Pour les exercices 49 à 56, résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations.

49 $(S_1)\begin{cases}2x - y > 3\\x - 3y < 2\end{cases}$. **50** $(S_2)\begin{cases}-2x - y \leqslant 3\\x - 3y < 2\end{cases}$.

51 $(S_3)\begin{cases}2x > y\\x - 3y < 2\end{cases}$. **52** $(S_4)\begin{cases}2x - y > 3\\x < 2\end{cases}$.

53 $(S_5)\begin{cases}2x + 3y \geqslant -1\\x - 3y \leqslant 2\end{cases}$. **54** $(S_6)\begin{cases}y > 3\\x < 2\end{cases}$.

55 $(S_7)\begin{cases}2x - y < 3\\3y < 6x + 1\end{cases}$. **56** $(S_8)\begin{cases}x + y > 2\\3x > 2y - 1\end{cases}$.

57 On veut fabriquer deux sortes de gâteaux pour une fête. Pour cela on dispose d'un stock de 2,5 kg de farine et de 7 h de temps.

On désigne par x le nombre de gâteaux de type A nécessitant 200 g de farine et 45 minutes de préparation et par y le nombre de gâteaux de type B nécessitant 300 g de farine et 20 minutes de préparation.

a. Écrire le système d'inéquations traduisant les contraintes de stock de farine et de temps.

b. Résoudre graphiquement ce système.

c. Lire les quantités de gâteaux de chaque sorte à fabriquer lorsque l'on utilise tout le temps.

Préciser la quantité de farine restante.

Aide

Il peut y avoir plusieurs réponses.

d. Lire les coordonnées du point d'intersection des deux droites tracées. À quoi correspondent ces valeurs ?

e. Retrouver par le calcul la réponse à la question **d.**

58 Un artisan fabrique deux types de jouets, des petits pour lesquels il faut 1 m de tissu et 3 h de travail et des grands pour lesquels il faut 4 m de tissu et 1 h de travail.

Avec ses ouvriers, il dispose de 30 h et de 32 m de tissu par jour.

De plus, il doit fabriquer au moins 10 jouets par jour.

1. Écrire le système d'inéquations découlant des indications de l'énoncé.
2. Résoudre graphiquement ce système.
3. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes.

a. Peut-il fabriquer 3 petits et 5 grands jouets ?

b. Peut-il fabriquer 7 petits et 7 grands jouets ?

c. Peut-il fabriquer 9 petits et 4 grands jouets ?

Pour les exercices 59 et 61, déterminer un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est l'intérieur de la figure bords compris tracée dans un repère (O, I, J) orthonormé.

59 ABC désigne un triangle avec $A(1 ; 2)$, $B(2 ; 5)$ et $C(5 ; 3)$.

60 $ABCD$ désigne un rectangle avec $A(2 ; 3)$, $B(8 ; 3)$, $C(8 ; 6)$ et $D(2 ; 6)$.

61 $ABCD$ désigne un carré de coté 4 et de centre l'origine du repère.

Aide

Commencer par écrire les équations des droites qui sont les supports des côtés de chaque polygone.

14 Faire le point

62 Le bon choix

Pour chacun des systèmes suivants, choisir la méthode de résolution entre la substitution, la combinaison linéaire ou la représentation graphique. Justifier votre choix.

$(S_1) : \begin{cases} x+y=1 \\ x+3y=5 \end{cases}$; $(S_2) \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-3y=5 \end{cases}$;

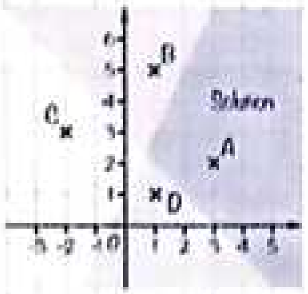
$(S_3) : \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$; $(S_4) \begin{cases} y=1+3x \\ y=2x+5 \end{cases}$.

(On ne demande pas de résoudre les systèmes.)

63 Où est l'erreur ?

(S) désigne le système $\begin{cases} y<2x+1 \\ y<-x+3 \end{cases}$.

Pour résoudre graphiquement ce système, un élève a proposé le graphique ci-dessous. Les remarques du professeur sont indiquées en rouge.



Vérifie ta solution en remplaçant dans le système x et y par les coordonnées du point A. Utilise les autres points pour trouver la bonne zone solution.

a. Expliquer la remarque du professeur et proposer une solution correcte.

b. Quel système aurait la zone foncée comme solution ?

Aide

Lorsque l'on a fait une résolution graphique, il est utile de faire une vérification en remplaçant dans les deux inéquations x et y par les coordonnées de points de la zone solution.

64 Avec ou sans aide

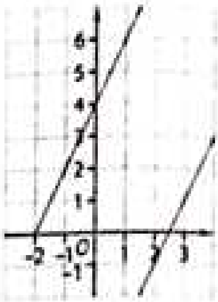
Un fabriquant conditionne du café en paquets de 250 g :
- des paquets de type A contenant 200 g d'Arabica et 50 g de Robusta,
- des paquets de type B contenant 125 g d'Arabica et 125 g de Robusta.

Il dispose de 15 kg d'Arabica et de 10 kg de Robusta. Combien de paquets de chaque sorte peut-il préparer ?

Pour répondre à cette question, si besoin, utiliser la fiche méthode rédigée par Ali :

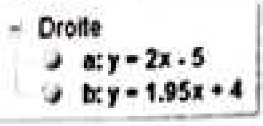
① Donner un nom aux inconnues x et y si l'énoncé ne le précise pas.
② Simplifier le système si possible.
③ Faire attention à utiliser les mêmes unités dans les équations.
④ Observer le système pour choisir la méthode de résolution la mieux adaptée.

65 Le calcul au secours de la lecture graphique



1. À l'aide du graphique ci-contre, déterminer les équations réduites des deux droites.

2. Que peut-on conjecturer sur la position relative des deux droites ? En fait, les droites tracées sont celles d'équations données par la copie d'écran ci-dessous :



Droite
a: y = 2x - 5
b: y = 1.95x + 4

3. a. Justifier qu'elles ne sont pas parallèles.

b. Résoudre par le calcul le système pour déterminer les coordonnées du point d'intersection.

66 Système de Cramer

Un système linéaire est dit de Cramer lorsqu'il a autant d'équations que d'inconnues et lorsqu'il a une solution unique.

(S) désigne le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Méthode de Cramer

- Le déterminant de (S) est noté $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.
- Les déterminants de x et de y sont respectivement notés : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$.
- La solution de (S) est alors $(x\,;y) = \left(\frac{D_x}{D}\,;\frac{D_y}{D}\right)$.

Appliquer la méthode de Cramer pour résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=5 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -3x+y=1 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$;

c. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$; d. $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=-2 \end{cases}$.

Remarque

L'intérêt de cette méthode est de donner directement la solution par trois calculs numériques.
Pour résoudre des systèmes ayant plus de deux équations, il existe d'autres méthodes.

67 Déterminant nul

(S) désigne le système $\begin{cases} 2x-3y=0{,}5 \\ -4x+6y=-1 \end{cases}$.

a. Démontrer que le déterminant de (S) est nul.

b. Vérifier que le couple $\left(\frac{1}{4}\,;0\right)$ est solution de (S).

c. Justifier que tout couple solution est de la forme : $\left(x\,;\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}\right)$ où x est un nombre réel.

Remarque

Un déterminant nul n'est pas synonyme d'absence de solution.

Se tester

Vrai-faux

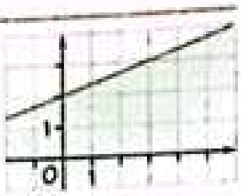
Top chrono (sans justification)

68 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
(S) désigne le système $\begin{cases} 4x-3y=5 & (1) \\ -x+3y=1 & (2) \end{cases}$.

	vrai	faux
1. (S) a une seule solution.	☐	☐
2. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=5 \\ x=3y-1 \end{cases}$.	☐	☐
3. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=5 \\ -4x+12y=1 \end{cases}$.	☐	☐
4. (3 ; 1) est solution de (S).	☐	☐
5. y vérifie $9y=6$.	☐	☐
6. x vérifie $3x=6$.	☐	☐
7. Les droites d'équations (1) et (2) sont sécantes.	☐	☐
8. Le déterminant de (S) est égal à 15.	☐	☐

Avec justification

69 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.



	vrai	faux
1. La droite représentée a pour équation $y=\frac{1}{3}x+2$.	☐	☐
2. La partie colorée est solution de : $y \geqslant \frac{1}{3}x+2$.	☐	☐
3. Le point $A(2\,;3)$ est solution de $3y-x \leqslant 6$.	☐	☐
4. Le point $B(6\,;4)$ est solution de $3y-x < 6$.	☐	☐
5. Le point $C(3\,;3)$ est solution de : $y \leqslant \frac{1}{3}x+2$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

70 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
(S) désigne le système :

$$\begin{cases} 13x+7y=-5 \\ 5x+y=-7 \end{cases}.$$

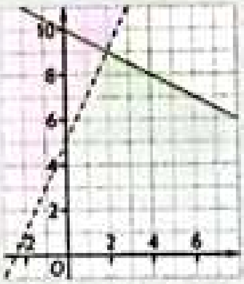
1. a. (S) n'a pas de solution ;
   b. (S) a une infinité de solutions ;
   c. (S) a une seule solution.

2. Le couple solution de (S) est :
   a. (2 ; 3) ;
   b. (−2 ; 3) ;
   c. (−2 ; −3).

3. a. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 13x+7y=-5 \\ 35x+7y=-49 \end{cases}$;
   b. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 13x+7y=-5 \\ 35x-7y=49 \end{cases}$;
   c. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 13x+7y=-5 \\ -35x-7y=-49 \end{cases}$.

Avec justification

71 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
On a représenté ci-contre la résolution graphique d'un système d'inéquations (S). L'ensemble solution est la partie fermée colorée en vert.



1. a. (S) $\begin{cases} 2x-y+5 \leqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \geqslant 0 \end{cases}$; b. (S) $\begin{cases} 2x-y+5 \geqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \geqslant 0 \end{cases}$;
   c. (S) $\begin{cases} 2x-y+5 \leqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \leqslant 0 \end{cases}$.

2. Un couple solution de (S) est :
   a. (−2 ; 5) ; b. (6 ; 10) ; c. (3 ; 4).

3. a. (S) $\begin{cases} y-2x-5 \geqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \leqslant 0 \end{cases}$; b. (S) $\begin{cases} y-2x-5 \leqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \leqslant 0 \end{cases}$;
   c. (S) $\begin{cases} y-2x-5 \leqslant 0 \\ -0{,}5x-y+10 \geqslant 0 \end{cases}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

14 Exercices d'approfondissement

72 Un problème de billes

Dans une boite se trouvent 10 billes, rouges et bleues. On ajoute 3 billes bleues et deux billes rouges ; il y a alors deux fois plus de billes bleues que de billes rouges.

a. Écrire le système d'équations vérifiées par les nombres de billes de chaque couleur.

b. Résoudre le système et déterminer le nombre de billes de chaque couleur dans la boite.

73 Un nombre inconnu

Un nombre entier de deux chiffres s'écrit $\overline{xy}$.

La somme des chiffres x et y est égale à 9. Si on inverse les deux chiffres le nombre augmente de 27.

1. Justifier que les chiffres sont solution du système :

$$(S)\begin{cases} x+y=9 \\ -x+y=3 \end{cases}.$$

2. a. Résoudre le système (S).

b. Conclure.

74 Ce nombre existe ?

Existe-t-il un nombre entier de deux chiffres dont la somme des chiffres est égale à 7 et tel que si l'on inverse les deux chiffres le nombre augmente de 30 ?

75 Deux nombres inconnus

Deux nombres a et b sont tels que leur somme est égale à 21 et la différence de leurs carrés est égale à 105.

a. Écrire le système d'équations vérifiées par ces deux nombres.

b. Résoudre ce système et conclure.

Aide

▶ La méthode de substitution fonctionne pour la plupart des systèmes. Ici aussi, mais il y a une méthode plus simple qui utilise une identité remarquable.

76 Un problème de tables

Dans un atelier de menuiserie, on fabrique des tables de type A et de type B.

Une table de type A nécessite 3 heures de travail et 2 panneaux.

Une table de type B nécessite 2 heures de travail et 6 panneaux.

On dispose quotidiennement d'un maximum de 120 h de travail et de 300 panneaux.

On désigne par x le nombre de tables de type A et par y le nombre de tables de type B fabriquées en une journée de travail.

a. Justifier que x et y vérifient le système :

$$(S)\begin{cases} 0 \leqslant 3x+2y \leqslant 120 \\ 0 \leqslant 2x+3y \leqslant 150 \end{cases}.$$

b. Résoudre graphiquement ce système.

c. Est-il possible de fabriquer en une journée :

- 30 tables de type A et 20 tables de type B ?
- 20 tables de type A et 25 tables de type B ?

77 Système 3 × 3

Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} 3x=2y \\ 5y=3z \\ x+y+z=10\,000 \end{cases}$.

78 Un système non linéaire

(S) désigne le système $\begin{cases} 2x+y^2=1 \\ x+3y^2=11 \end{cases}$. On pose $Y=y^2$.

a. Écrire le nouveau système (S') d'inconnues x et Y.

b. Résoudre (S').

c. En déduire les solutions du système initial.

Remarque

▶ Le système (S') n'est pas équivalent à (S). En effet, le changement de variable impose que $Y \geqslant 0$. Donc, si la solution de (S') donne un Y négatif, il n'y aura pas de solution pour (S).

79 Une équation non linéaire

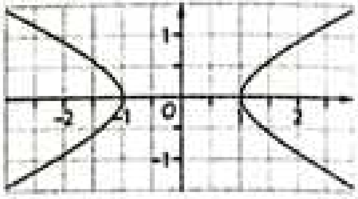
(E) désigne l'équation : $x^2-4y^2=1$.

Acha factorise le premier membre et affirme que (E) est équivalente au système $(S)\begin{cases} x+2y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$.

Elle résout ce système et conclut qu'il n'a qu'une solution.

1. Justifier qu'un couple $(x\,;y)$ qui vérifie le système (S) vérifie également l'équation (E).

2. Kouma lui rétorque alors que le couple $\left(\sqrt{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ est solution de (E). Justifier cette affirmation.



3. a. Dans un repère, reproduire à main levée la courbe d'équation (E) ci-contre.

b. Tracer les deux droites du système (S).

c. Placer le point proposé par Kouma.

d. Qui a raison ?

4. Donner d'autres systèmes analogues à celui d'Acha en utilisant d'autres décompositions de 1 comme produit.

80 Changement d'inconnues

1. Résoudre le système suivant avec la méthode de calcul de votre choix :

$$(S)\begin{cases} X-Y=1 \\ 2X+3Y=7 \end{cases}.$$

2. En déduire la solution du système suivant :

$$(S')\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \end{cases}.$$

Aide

▶ Faire un changement de variable en posant :

$$x=\frac{1}{X} \text{ et } y=\frac{1}{Y} \ (X \neq 0 \text{ et } Y \neq 0).$$

3. En faisant un changement de variable adéquat, résoudre de manière analogue les systèmes suivants.

a. $(S_1)\begin{cases} 2x^2-y^2=-5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ **b.** $(S_2)\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=-5 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=17 \end{cases}$.

Aide

▶ Lorsque l'on a obtenu le couple solution de (S'_1), on en déduit que (S_1) a quatre couples solutions, suivant les signes de x et de y.

81 Trois équations, deux inconnues

(S) désigne le système suivant $\begin{cases} x+2y=5 \\ -2x+y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$.

1. Résoudre le système (S') constitué des deux premières équations avec la méthode de calcul de votre choix.
2. Justifier par le calcul que la solution obtenue vérifie aussi la troisième équation et conclure.
3. Procéder de même avec les systèmes suivants :

a. $(S_1) \begin{cases} x+y=2 \\ -2x-y=-1 \\ -x+3y=10 \end{cases}$; b. $(S_2) \begin{cases} x-2y=6 \\ 2x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$.

Remarque

On n'est pas obligé de choisir les deux premières équations du système initial. On choisit celles qui conduisent au système (S') le plus simple.

82 Trois équations, deux inconnues

(S) désigne le système suivant : $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=10 \\ -x+y=-2 \end{cases}$.

a. Résoudre graphiquement le système (S).
b. Vérifier le résultat obtenu par le calcul.

83 Trois équations, trois inconnues

Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} x-3y=8 \\ 4x+2y=-10 \\ 2x-6y+4z=24 \end{cases}$.

Aide

Commencer par résoudre le système constitué des deux premières équations.

84 Théorème de Pappus

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$A(1\,;1)$, $B(3\,;3)$, $C(5\,;5)$,
$D(2\,;-1)$, $E(6\,;-2)$ et $F(10\,;-3)$.

1. a. Déterminer les équations des droites (AE) et (BD).
b. Résoudre le système obtenu pour obtenir les coordonnées du point d'intersection I.
2. Faire de même pour les droites (AF) et (DC) ainsi que les droites (BF) et (EC). On obtient les points J et K.
3. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Info

- Cette propriété est indépendante de la position des points A, B et C ainsi que D, E et F sur deux droites données.
- Pappus d'Alexandrie (IVe siècle) est l'un des plus importants mathématiciens de la Grèce antique. Auteur prolifique, il est surtout connu pour le théorème qui porte son nom.

85 Système symétrique

(S) désigne le système suivant : $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=4 \end{cases}$.

a. Justifier que $x=y$.
b. En déduire la solution de (S).

86 Optimisation de bénéfice

Une entreprise fabrique des seaux en plastique qu'elle vend 1 300 F CFA l'un. Pour sa production journalière, elle a des coûts fixes de 160 000 F CFA et des coûts variables de 500 F CFA par seau.
On désigne par x le nombre de seaux vendus.

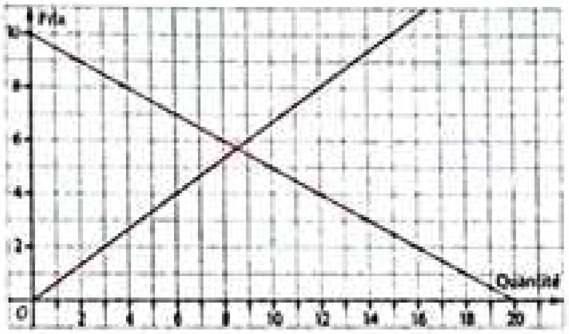
1. Donner en fonction de x l'expression de la recette $R(x)$ et du coût total $C(x)$.
2. a. Représenter sur un même graphique ces deux fonctions.
b. Lire le nombre minimal de seaux que l'entreprise doit vendre pour faire du bénéfice.
c. Retrouver ce résultat par le calcul.

87 Un problème de bocaux

Une cuisinière prépare un plat qu'elle répartit dans des bocaux de 250 mL et de 500 mL.
Elle a préparé en tout 14 bocaux pour un volume total de 4,5 L.
Combien de bocaux de chaque sorte a-t-elle préparé ?

88 En économie : offre et demande

L'offre est la quantité d'objets qu'une entreprise est prête à vendre pour un prix donné, alors que la demande est la quantité que les consommateurs sont prêts à acheter pour ce même prix.



Sur le graphique ci-dessus, on a représenté l'offre et la demande en fonction de la quantité d'objets.
Les quantités sont exprimées en centaines d'objets et les prix en milliers de francs CFA.

1. Par lecture graphique, déterminer les équations des deux droites tracées.
2. a. Lire les coordonnées du point d'intersection.
b. Retrouver ces coordonnées par un calcul.
3. Quel est le rapport entre offre et demande pour ce point ?

89 Division euclidienne

Deux nombres entiers naturels a et b, $a > b$, sont tels que leur somme est égale à 4 933 et la division euclidienne de a par b a pour quotient 6 et reste 19.
Déterminer ces deux nombres.

Aide

Lorsque a et b désignent deux nombres entiers naturels, la division euclidienne de a par b se traduit par l'égalité $a = bq + r$ où q est le quotient et r le reste, avec $0 \leqslant r < b$.

Exercices d'approfondissement

90 Défi

Sur le schéma ci-dessous, les blocs gris sont identiques.

On veut mesurer la hauteur de cette table.

On désigne par h la hauteur de la table, ℓ et L les dimensions de chaque bloc.

a. Écrire un système d'équations traduisant les deux mesures effectuées.

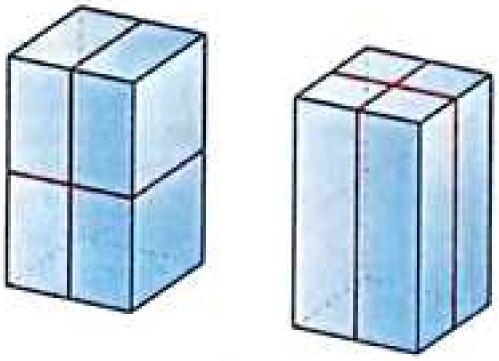
b. En déduire la hauteur de la table.

Est-il possible de déterminer les dimensions des blocs ?

91 Une ficelle ou deux...

On ficelle deux paquets identiques à bases carrées de deux manières différentes (voir figures ci-dessous). Dans les deux cas, on utilise 30 cm de ficelle pour le nœud final.

Pour la figure de gauche, on utilise 3,20 m de ficelle, alors que pour celle de droite, on en utilise 3,90 m.



Déterminer les dimensions du paquet.

92 Un système non linéaire

On veut déterminer deux nombres a et b tels que leur somme est égale à 30 et leur produit est égal à 221.

1. Écrire le système vérifié par ces deux nombres.

2. a. En utilisant la méthode de substitution, démontrer que :

$$b^2 - 30b + 221 = 0.$$

b. Justifier que $b^2 - 30b + 221 = (b - 15)^2 - 4$.

c. Factoriser $b^2 - 30b + 221$.

d. Calculer les deux valeurs de b possibles.

3. Conclure en donnant la solution au problème.

93 Triangles

a. Cas particulier

Déterminer tous les triangles rectangles dont le périmètre est égal à 24 et dont l'un des côtés adjacents à l'angle droit a pour mesure 8.

b. Généralisation

Déterminer tous les triangles rectangles dont le périmètre est égal à p et dont l'un des côtés de l'angle droit a pour mesure m.

94 Une équation perdue

Un élève a résolu un système linéaire de deux équations et a trouvé pour solution $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

L'une des équations du système est $x + y = 1$ (1),

mais il a perdu l'équation (2).

a. Cette équation peut-elle être $2x + y = 2$?

b. Proposer une équation satisfaisante.

c. Représenter graphiquement l'équation (1) et déterminer quelles sont les droites dont les équations pourraient être celle cherchée.

95 Inéquations

(I) désigne l'inéquation $x^2 - y^2 > 0$.

a. Factoriser $x^2 - y^2$.

b. Dans un repère, représenter graphiquement les solutions de l'inéquation (I).

96 Formule de Blondel

Cette formule régit le calcul du nombre de marches d'un escalier assurant un bon confort et une bonne esthétique :

$$60 \leqslant g + 2h < 64$$

où g est le « giron » (c'est-à-dire la profondeur) de chaque marche et h la hauteur, exprimés en cm.

La hauteur h ne doit pas excéder 25 cm.

1. On suppose que l'on dispose d'une profondeur totale de 3 m pour l'escalier. Dans les habitations, il est d'usage de faire des marches de hauteur approximative $h = 17$ cm.

a. Démontrer qu'alors le giron vérifie :

$$26 \leqslant g \leqslant 30.$$

b. Quel nombre maximal de marches peut-on construire ?

c. Quelle est la hauteur de chaque marche ?

d. Quelle est la hauteur totale ainsi atteinte ?

2. On suppose maintenant que l'on dispose d'une profondeur totale de 3,60 m et que l'on désire que l'escalier ait une hauteur totale de 2,50 m.

n désigne le nombre de marches de l'escalier.

a. Justifier que $\begin{cases} nh = 250 \\ ng = 360 \\ 60 \leqslant g + 2h \leqslant 64 \end{cases}$.

b. Exprimer, dans les deux premières équations, g et h en fonction de n. En déduire que $60 \leqslant \frac{860}{n} \leqslant 64$.

c. En déduire un encadrement de n, puis sa valeur.

d. Préciser alors les valeurs de h et g.

Info

François Blondel, architecte, ingénieur et diplomate français (1618-1686) a été l'un des principaux théoriciens de l'architecture classique. On lui doit de nombreux ouvrages à Paris et aux Antilles.

Corrigés
Se tester

Chapitre 1

Angles inscrits et polygones inscriptibles

55 1. **Vrai ;** 2. **Faux ;** 3. **Vrai ;** 4. **Faux.**

[illegible] 1. **Vrai.** Le quadrilatère *EHFG* est un quadrilatère croisé inscriptible, donc mes $\widehat{EHF}$ = mes $\widehat{EGF}$;
puisque mes $\widehat{EHF} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOF} = 45°$; ces deux angles sont complémentaires.
2. **Vrai.** Le triangle *OEF* est isocèle rectangle en *E*, donc mes $\widehat{OEF} = 45°$.
De plus, mes $\widehat{EGF}$ = mes $\widehat{JEF} = 45°$.
Donc (*EF*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JEG}$.
3. **Faux.** mes $\widehat{EOF} \neq$ mes $\widehat{EJF}$ donc le quadrilatère *EOFJ* n'est pas inscriptible.
4. **Faux.** L'aire du triangle *EFJ* est égale à $\frac{OE \times EJ}{2} = \frac{4 \times 1{,}5}{2} = 3$.

57 1. **b. ;** 2. **c. ;** 3. **b.**

[illegible] 1. **b.** En effet, tous les angles au centre entre deux sommets consécutifs ont même mesure puisque ce polygone est régulier, donc $7 \times$ mes $\widehat{COD} = 360°$, ainsi, mes $\widehat{COD} \approx 51°$.

2. **b.** En effet, mes $\widehat{EAC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOC}$ et mes $\widehat{EOC} = 2$ mes $\widehat{COD}$.

Donc mes $\widehat{EAC}$ = mes $\widehat{COD} \approx 51°$.
3. **c.** En effet, le triangle *OAB* est isocèle en *O*, donc le milieu *I* de [*AB*] est également le pied de la hauteur issue de *O*.

Ainsi, dans le triangle *OIB* rectangle en *I*, $\sin \widehat{IOB} = \frac{IB}{OB}$ donc $\sin 25{,}5° = \frac{5}{R}$,

donc $R = \frac{5}{\sin 25{,}5} \approx \frac{5}{0{,}43} \approx 11{,}6$.

4. **a.** En effet, l'aire de cet heptagone régulier est égale à sept fois l'aire $\mathcal{A}$ du triangle *OAB*.

Or, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin 51°$,

donc $\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} \times 11{,}6^2 \times 0{,}78 \approx 52{,}47$.

Finalement, l'aire de l'heptagone est environ $7 \times 52{,}47 \approx 367$.

Chapitre 2

Angles orientés et trigonométrie

[illegible] 1. **Vrai ;** 2. **Faux ;** 3. **Vrai ;**
4. **Vrai ;** 5. **Vrai ;** 6. **Faux.**

[illegible] 1. **Vrai.** • $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$.

Comme $-\frac{\pi}{6} \in]-\pi\,;\pi]$, $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $\frac{11\pi}{6}$.

• $35\pi = (36 - 1)\pi = (3 \times 12 - 1)\pi$, donc
$\frac{35\pi}{6} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}$ donc $-\frac{\pi}{6}$ est aussi la mesure principale de $\frac{35\pi}{6}$.

2. **Faux.** mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$ = mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ + mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ d'après la relation de Chasles.

Donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\pi}{7} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{21} - \frac{7\pi}{21} = -\frac{4\pi}{21}\ [2\pi]$.

3. **Faux.** • $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc $\cos(x) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

• Or, $\cos(x) < 0$ car $x \in \left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

• Enfin, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{-2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

4. **Vrai.** Un octogone régulier a huit angles au centre égaux dont la somme est égale à 2π.

Ainsi, chacun mesure $\frac{2\pi}{8}$, soit $\frac{\pi}{4}$ rad.

5. **Faux.** mes $(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE}}) = -3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}\ [2\pi]$.

6. **Faux.** Le triangle *OCB* est isocèle en *O*.

Ainsi mes $\widehat{OCB} = \frac{\pi - \text{mes}\,\widehat{COB}}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Et on a mes $(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

65 1. **b. ;** 2. **a. ;** 3. **b. ;** 4. **a.**

66 1. **a.** $3\alpha + 2\beta = -\frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi = \pi - 2\pi$.

Comme $\pi \in]-\pi\,;\pi]$; π est la mesure principale de $3\alpha + 2\beta$.

2. **a.** • $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$= 1 - \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2}{4} = 1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{4 - 3 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4},$$

donc $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}$.

• Or $\cos(x) < 0$ car $x \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) = -\frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}$.

3. **a.** $\cos(x + \pi) - 2\cos(x - \pi) + \cos(x + 5\pi)$
$$= -\cos(x) - 2 \times (-\cos(x)) + \cos(x + 4\pi + \pi)$$
$$= \cos(x) + \cos(x + \pi)$$
$$= \cos(x) - \cos(x) = 0.$$

4. **b.** $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$.
De plus, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant -2\sin(x) \leqslant 2$.
Ainsi, par somme, $-1 \leqslant 2 + \cos(x) - 2\sin(x) \leqslant 5$.

Chapitre 3

Vecteurs

84 1. **Vrai ;** 2. **Faux ;** 3. **Vrai ;** 4. **Faux ;**
5. **Faux ;** 6. **Vrai ;** 7. **Vrai.**

85 1. **Vrai.** $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{DC}(3\,;2)$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc *ABCD* est un parallélogramme.
2. **Vrai.** Le centre de *ABCD* est le milieu de [*AC*] dont les coordonnées sont bien celles de *I*.
3. **Faux.** $\overrightarrow{CD}(-3\,;-2)$ et $\overrightarrow{DE}(-3\,;-1)$. $\det(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) = -3$.
$-3 \neq 0$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points *C*, *D* et *E* ne sont pas alignés.
4. **Faux.** $\overrightarrow{AF}(5\,;-4)$ et $\overrightarrow{BF}(2\,;-6)$.
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$, $\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{41}$ et $\|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{40}$.
Le triangle *ABF* n'est donc pas isocèle.
5. **Vrai.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$
$= 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (Relation de Chasles)
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{OM}$.

Donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

6. **Vrai.** $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$. On peut aussi calculer les coordonnées des vecteurs et vérifier l'égalité.
7. **Vrai.** $\overrightarrow{AE}\,(0\,;-6)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-3\,;-2)$. $\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CD}) = -18$. $-18 \neq 0$.
Les vecteurs sont non nuls et non colinéaires. Ils constituent une base.

66 1. b. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. a. ; 5. b.

67 1. c. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1)$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$.
2. b. $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,; y_C - y_A)$ donc $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;-5)$.
3. a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = -4 \\ y_D - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = -1 \end{cases}$.
4. a. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1)$ et $\overrightarrow{CE}\,(2\,;-1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Ils sont donc colinéaires.
5. c. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1)$ et $\overrightarrow{BE}\,(-2\,;-5)$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}) \neq 0$.
Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites (AB) et (BE) sont donc sécantes.

Chapitre 4

Produit scalaire

84 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai ;
5. Faux ; 6. Vrai ; 7. Vrai.

85 1. **Vrai.** $\overrightarrow{AB}\,(4\,;-4)$ et $\overrightarrow{CD}\,(2\,;2)$.
Le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 4\times 2 + (-4)\times 2 = 0$.
Les droites (AB) et (CD) sont donc perpendiculaires.
2. **Faux.** $\overrightarrow{AC}\,(-5\,;0)$ et $\overrightarrow{BD}\,(-7\,;6)$.
Le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé,
donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (-5)\times(-7) + 0\times 6 = 35 \neq 0$.
3. **Vrai.** $\overrightarrow{AB}\,(4\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-5\,;0)$.
Le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé,
donc $AB = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$; $AC = 5$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times(-5) + (-4)\times 0 = -20$.
Or, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
Donc, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{-20}{4\sqrt{2}\times 5} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ rad.
4. **Faux.** Le point E appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si le triangle ABE est rectangle en E.
Or, $\overrightarrow{AE}\,(4{,}5\,;-1)$ et $\overrightarrow{BE}\,(0{,}5\,;3)$. Le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE} = 4{,}5\times 0{,}5 + (-1)\times 3 = -0{,}75 \neq 0$.
Donc le triangle ABE n'est pas rectangle en E.
5. **Faux.** $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AC\times BH}{2}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (AC).
Or, $AC = 5$ et $BH = 4$, donc $\mathcal{A}(ABC) = 10$.
6. **Faux.** D'après le théorème de la médiane $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ où A' est le milieu de $[AA']$.
Or, $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 5$ et $BC = \sqrt{(-9)^2+4^2} = \sqrt{97}$.
Ainsi, $AA'^2 = \dfrac{(4\sqrt{2})^2 + 5^2 - \dfrac{\sqrt{97}^2}{2}}{2} = 4{,}25$. Donc, $AA' = \sqrt{4{,}25} \neq 1{,}8$.

86 1. a. ; 2. a. ; 3. c. ; 4. b.

87 1. a. En effet, $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\times(-1) + 5\times x$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4x$.
Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.
2. c. En effet, $(\vec{w}+\vec{z})\cdot(\vec{w}-\vec{z}) = \vec{w}\cdot\vec{w} + \vec{z}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{z} - \vec{z}\cdot\vec{z}$
$= \vec{w}^2 + \vec{z}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{z} - \vec{z}^2 = \vec{w}^2 - \vec{z}^2 = \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{z}\|^2$.
Ainsi, $(\vec{w}+\vec{z})\cdot(\vec{w}-\vec{z}) = 0$ si et seulement si, $\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{z}\|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $\|\vec{w}\| = \|\vec{z}\|$ (car la norme d'un vecteur est un nombre positif).
3. c. En effet, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont : $\vec{a}\left(-\dfrac{4}{5}\,;\dfrac{3}{5}\right)$ et $\vec{b}\left(\dfrac{3}{5}\,;\dfrac{4}{5}\right)$. Or, $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}$ $= -5 \neq 0$, donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires. $(\vec{a}, \vec{b})$ constitue bien une base du plan. De plus, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5} = 0$.
Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : la base $(\vec{a}, \vec{b})$ est orthogonale.
Enfin, $\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25}} = 1$
et $\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25}} = 1$.
La base $(\vec{a}, \vec{b})$ est donc orthonormée.

Chapitre 5

Équations de droites et de cercles

70 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ;
5. Faux ; 6. Faux ; 7. Vrai.

71 1. **Vrai.** Pour $t = 1$, on a $x = 4$ et $y = 5$.
2. **Vrai.** $\vec{w}\,(1\,;5)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v} = -3\,\vec{w}$, donc $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$.
3. **Vrai.** Notons (d'') la droite d'équation $x + 2y - 14 = 0$.
- (d'') passe par le point $A\,(4\,;5)$.
En effet, $x_A + 2y_A - 14 = 4 + 2\times 5 - 14 = 0$.
- (d'') est dirigée par $\vec{s}\,(-2\,;1)$. Or, $\vec{u} = -\vec{s}$, donc, (d'') est dirigée par $\vec{u}$.

4. **Vrai.** $\vec{r}\,(2\,;10)$ est un vecteur directeur de la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = -5 + 10t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$ et qui passe par le point $B(3\,;0)$ associé à $t' = \dfrac{1}{2}$. La droite (d) passe par $B\,(3\,;0)$ et elle est dirigée par $\vec{p}\,(1\,;5) = \dfrac{1}{2}\vec{r}$. (d) et (d') désignent donc la même droite car elles ont un point commun $B\,(3\,;0)$ et ont un même vecteur directeur $\vec{p}\,(1\,;5)$.
5. **Vrai.** $5x - 15 = 5(3 + t) - 15 = 15 + 5t - 15 = 5t = y$.
6. **Vrai.** (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;5)$ et (d') a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(-2\,;1)$. Or, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1\times 1 - 5\times(-2) = 11 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc (d) et (d') sont sécantes.

72 1. b. ; 2. b. ; 3. a. ; 4. b.

73 1. b. En effet, $AB^2 = [2 - (-1)]^2 + (-4 - 0)^2 = 25$, donc $(\mathscr{C})$ est le cercle d'équation $[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 25$, c'est-à-dire $(x + 1)^2 + y^2 = 25$, soit $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$.
2. a. En effet, $\overrightarrow{BA}\,(-3\,;4)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $4x + 3y + 4 = 0$. Et $4x_A + 3y_A + 4 = -4 + 4 = 0$.
3. b. En effet, les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$; elles vérifient l'équation $3x - 4y - \dfrac{19}{2} = 0$ et le vecteur directeur $\vec{u}\,(4\,;3)$ de la droite d'équation $3x - 4y - \dfrac{19}{2} = 0$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}\,(3\,;-4)$.
$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 3 + 3\times(-4) = 12 - 12 = 0$.

Chapitre 6

Transformations du plan

1. **Vrai** ; 2. **Vrai** ; 3. **Faux** ; 4. **Faux** ; 5. **Vrai**.

1. **Vrai.** $OA = OC$ et $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})} = \frac{2\pi}{3}$.

De plus, le trapèze $AMOM'$ est isocèle, donc $\text{mes}\,\widehat{OMA} = \text{mes}\,\widehat{MAM'} = \frac{\pi}{3}$, donc $\text{mes}\,\widehat{AM'O} = \text{mes}\,\widehat{M'OM} = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi, $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \frac{2\pi}{3}$; comme de plus $OM = OM'$, on a bien $r(C) = A$ et $r(M) = M'$ où r est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

2. **Faux.** $r(C) = A$ et comme l'image d'un point par une transformation est unique, $r(C) \neq B$.

3. **Vrai.** Les points O, M, C ont pour images respectives O, M', A par r donc les triangles OMC et $OM'A$ ont même aire.

4. **Vrai.** $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC})} = \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OC})}$

$= \frac{2\pi}{3} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} = \frac{2\pi}{3} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})} - \frac{2\pi}{3}$

$= \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})}$.

D'où, $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC})} - \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})} = 0$,

c'est-à-dire, $\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC})} + \text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})} = 0$.

5. **Faux.** $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ donc $3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}$ donc l'homothétie de centre C et de rapport 3 transforme M en A.

1. c. ; 2. a. ; 3. b. ; 4. b. ; 5. b.

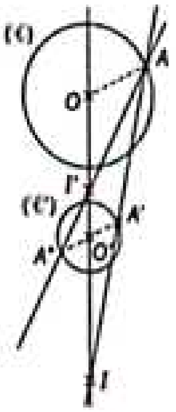
1. c. Voir le schéma ci-contre.

- La première homothétie transforme O en O' et A en A' : elle a pour centre I.
- La seconde homothétie transforme O en O' et A en A'' (A'' étant le point diamétralement opposé à A' dans le cercle $(\mathscr{C}')$: elle a pour centre I'.

2. c. On note k le rapport de cette homothétie. $\overrightarrow{IO'} = k\,\overrightarrow{IO}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IO'}$ sont colinéaires, donc les points I, O, O' sont alignés.

3. a. $\overrightarrow{O'A'} = k\,\overrightarrow{OA}$ donc $\overline{O'A'} = k \times \overline{OA}$

d'où $k = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{R'}{R}$.



Chapitre 7

Géométrie dans l'espace

1. **Vrai** ; 2. **Vrai** ; 3. **Faux** ; 4. **Faux** ; 5. **Vrai**.

1. **Faux.** Supposons que les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires, alors les points I, J, C et D sont coplanaires. Or les points J, C et D appartiennent au plan (ACD) et $I \notin (ACD)$.
Donc, par l'absurde, (IJ) et (DC) ne sont pas coplanaires.

2. **Faux.** Les droites (IJ) et (DC) sont non coplanaires (Voir 1.), donc elles ne sont pas sécantes.

3. **Vrai.** $ABCD$ est un tétraèdre régulier donc toutes ses faces sont des triangles équilatéraux superposables. BJ est une médiane d'un de ses triangles et JC est aussi une médiane d'un autre de ses triangles, donc, $BJ = JC$; cela signifie que BJC isocèle.

4. **Vrai.** AI et ID sont des médianes des triangles ABC et BCD donc $AI = ID$.

5. **Faux.** BJC est un triangle isocèle en J (Voir 3.) et I milieu de $[BC]$ donc IJ est médiane, médiatrice, hauteur. Ainsi, BIJ triangle rectangle en I donc, d'après Pythagore, $BJ^2 = BI^2 + IJ^2$. De même dans le triangle ABJ rectangle en J, $AB^2 = AJ^2 + JB^2$.
Ainsi, $JB^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ et $IJ^2 = 27 - 3^2 = 18$. Donc $IJ = \sqrt{18}$.

37 **1. c. ; 2. b. ; 3. a. ; 4. b.**

1. a. En effet, les points A, B, M et N appartiennent à la face SAC du tétraèdre donc sont coplanaires. Ainsi, les droites (AB) et (MN) sont soit parallèles, soit sécantes. D'après l'énoncé, elles sont non parallèles, donc elles sont sécantes.

2. b. En effet, les plans (MNP) et (ABC) sont sécantes (d'après a.). Les droites (NP) et (BC) sont incluses dans (MNP) et (ABC) et sont parallèles, donc, (NP) et (BC) sont parallèles à la droite d'intersection des plans (MNP) et (ABC).

3. c. En effet, les droites (NP) et (BC) sont parallèles donc aussi coplanaires.

4. b. En effet, le plan (MNP) coupe le tétraèdre $SMNP$ selon le triangle MNP et les sommets de ce triangle appartiennent aux arêtes du tétraèdre donc $S \notin (MNP)$. Les points M, N, S et P ne sont donc pas coplanaires.

Chapitre 8

Statistiques

45 1. **Vrai** ; 2. **Faux** ; 3. **Faux** ; 4. **Vrai** ; 5. **Vrai**.

46 1. **Vrai.** La modalité la plus fréquente est 4.

2. **Faux.** La fréquence cumulée de la modalité est $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$.

3. **Faux.** La médiane d'une série statistique est un nombre réel tel qu'au moins 50 % des modalités sont inférieures ou égales à ce nombre et au moins 50 % des modalités sont supérieures ou égales à ce nombre. Ici, il y a 60 % des valeurs inférieures à 5 mais 40 % des valeurs supérieures à 5.

4. **Vrai.** $\bar{x} = 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2 + 7 \times 0{,}1 + 10 \times 0{,}1 = 4{,}6$.

5. **Faux.** L'écart moyen est égal à : $0{,}1 \times |1 - 4{,}6| + 0{,}2 \times |2 - 4{,}6| + 0{,}3 \times |4 - 4{,}6| + 0{,}2 \times |6 - 4{,}6| + 0{,}1 \times |7 - 4{,}6| + 0{,}1 \times |10 - 4{,}6| = 2{,}12$

47 **1. a. ; 2. b. ; 3. b. ; 4. b.**

48 **1. b.** En effet, l'effectif total est $40 = 6 + 4 + 10 + n + 15$ donc $40 = 35 + n$, c'est-à-dire $5 = n$.

2. b. En effet, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i}$, d'où

$$72{,}625 = \frac{6 \times 20 + 4 \times 40 + 10 \times 70 + n \times x + 15 \times 100}{6 + 47 + 10 + n + 15},$$

c'est-à-dire $72{,}625 = \frac{2480 + 5x}{40}$. Ainsi, $72{,}625 \times 40 = 2\,480 + 5\,x$, c'est-à-dire $x = 85$.

3. c. En effet, l'écart moyen est

$$\frac{6 \times |20 - 72{,}625| + 4 \times |40 - 72{,}625| + 10 \times |70 - 72{,}625| + 5 \times |85 - 72{,}625| + 15 \times |100 - 72{,}625|}{6 + 4 + 10 + 5 + 15} = 23{,}625.$$

4. a. En effet, 40 étant l'effectif total la médiane est un nombre réel de l'intervalle [20^e^ modalité ; 21^e^ modalité] lorsque la série est ordonnée. Or, la 20^e^ modalité est 70, la 21^e^ modalité est 85, donc la médiane est un nombre réel de [70 ; 85].

Corrigés

Se tester

Chapitre 9

Calculs dans R

90 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ;
4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Faux.

91 1. Faux. $\frac{1}{\sqrt{17}+1}-\frac{1}{\sqrt{17}-1}=\frac{(\sqrt{17}-1)-(\sqrt{17}+1)}{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)}$

$=\frac{-2}{(\sqrt{17})^2-1^2}=\frac{-2}{17-1}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}\in \mathbb{D}$.

2. Vrai. $(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}-3=3+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

3. Faux. $|3x-1|>7$

$3x-1<-7 \Leftrightarrow 3x<-6 \Leftrightarrow 3x<-6 \Leftrightarrow x<-2$

ou $3x-1>7 \Leftrightarrow 3x>8 \Leftrightarrow x>\frac{8}{3}$.

Les solutions de $|3x-1|$ sont les nombres réels x tels que $x<-2$ ou $x>\frac{8}{3}$.

4. Faux. • $0,1 \leq y \leq 0,2$ donc $0,01 \leq y^2 \leq 0,04$ d'après les propriétés des carrés. • Comme x est négatif, on a : $0,04x \leq xy^2 \leq 0,01x$.

• De plus, $-1,5 \leq x \leq -0,5$ donc $\begin{cases}-0,06=0,04\times(-1,5)\leq 0,04x\\ 0,01x \leq 0,01\times(-0,5)=-0,005\end{cases}$.

• Ainsi, $xy^2 \in [-0,06\,;-0,005]$.

5. Vrai. • On note E cet ensemble : $E=\{n\in\mathbb{N},\ n^2\leq 1500\}$.

Si $m\in E$, alors $m\in\mathbb{N}$ et $m\leq\sqrt{1500}$, d'après les propriétés de la racine carrée.

• Or $38^2=1\,444$ et $39^2=1\,521$, donc $38\in E$ et $39\notin E$. Le maximum de E est 38.

6. Vrai. L'aire d'un tel disque est égale à $\pi\times 530^2$, soit environ $8,8\times 10^5$. L'ordre de grandeur est donc 9×10^5.

92 1. b. ; 2. b. ; 3. b. ; 4. b. ; 5. b.

93 1. c. $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\frac{(\sqrt{x+1})^2-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}=\frac{x+1-2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}{(x+1)-(x-1)}$

$=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$.

2. b. • $|x|<\frac{1}{3}$ donc $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ et $-1<3x<1$.

• Or, $2<y<5$ donc, $-1+2<3x+y<1+5$, donc $1<3x+y<6$.

3. b. $9-25x^2-(3-5x)=3^2-(5x)^2-(3-5x)$

$=\underline{(3-5x)}(3+5x)-1\times\underline{(3-5x)}=(3-5x)[(3+5x)-1]=(3-5x)(2+5x)$.

4. b. $|5x+1|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq 5x+1\leq 1$

$$\Leftrightarrow -2\leq 5x\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{5}\leq x\leq 0.$$

Les solutions de $|5x+1|\leq 1$ sont les nombres réels x tels que $\frac{-2}{5}\leq x\leq 0$.

Chapitre 10

Fonctions – Généralités

78 1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai ;
4. Faux ; 5. Vrai ; 6. Vrai.

79 1. Faux. $f(-1)=(-1-2)^2+1=10$; $10\neq -1$ donc $A\notin(\mathscr{C}_f)$.

2. Vrai. $2\leq a<b \Leftrightarrow 0\leq a-2<b-2 \Rightarrow (a-2)^2<(b-2)^2$
$\Rightarrow (a-2)^2+1<(b-2)^2+1 \Rightarrow f(a)<f(b)$.

3. Vrai. Un carré est toujours positif ou nul donc : $(x-2)^2\geq 0$ et donc, $(x-2)^2+1>0$. f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

4. Faux. Le minimum de f correspond à la valeur de x qui annule $(x-2)^2$, soit $x=2$. Le minimum vaut donc 1.

5. Vrai. $f(x)=3 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=3 \Leftrightarrow (x-2)^2=2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\ x=2-\sqrt{2}\end{cases}$.

3 a donc bien deux antécédents par f.

6. Faux. $f(0)=5$; $f(3)=2$ mais le minimum de f sur $[0\,;3]$ est égal à 1. Donc, $f([0\,;3])=[1\,;5]$.

80 1. b. ; 2. c. ; 3. a. ; 4. c.

81 1. c. Sur $[-7\,;-4]$, f est décroissante de 3 à -5, donc il existe un nombre réel a de $[-7\,;-4]$ tel que $f(a)=0$. De même sur $[-4\,;-2]$, $[-2\,;0]$ et $[0\,;5]$.

2. b. f est croissante sur $[-4\,;-2]$ qui contient $[-2,5\,;-2]$.

3. a. Sur $[-4\,;0]$, f a pour maximum 2. Sur $[0\,;5]$, f a pour maximum 0. Donc sur $[-4\,;5]$, f a pour maximum 2. Par conséquent sur $[-4\,;4]$, f a pour maximum 2.

Chapitre 11

Fonctions usuelles

80 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ;
4. Vrai ; 5. Vrai.

81 1. Vrai. x est un nombre réel, $M(x\,;|x|)$ est un point de la courbe représentative de la valeur absolue, il a pour symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, le point $M'(-x\,;|x|)$.
Or, $|-x|=|x|$ donc $M'(-x\,;|-x|)$ est un point de la courbe représentative de la valeur absolue.

2. Vrai. x est un nombre réel non nul, le point d'abscisse x appartient à $(\mathscr{C}_f)$ si, et seulement si, $y=\frac{1}{x}$ et appartient à $(\mathscr{C}_g)$ si, et seulement si, $y=ax$. Il faut résoudre $\frac{1}{x}=ax$.

Comme $\begin{cases}x\neq 0\\ a\neq 0\end{cases}$, $\frac{1}{x}=ax \Leftrightarrow 1=ax^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{a}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{1}{a}}$.

Donc, ces deux courbes ont deux points communs.

3. Vrai. a et b sont tels que $1\leq a\leq b\leq 10$, c'est-à-dire $0\leq a-1\leq b-1\leq 9$. Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $0\leq(a-1)^2\leq(b-1)^2\leq 81$ et $0\leq 3(a-1)^2+2\leq 3(b-1)^2+2\leq 245$.
Cela signifie que la fonction est croissante sur $[1\,;10]$.

4. Faux. $2<9 \Leftrightarrow \sqrt{2}<\sqrt{9}$ ($x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{9}}$ ($x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$) $\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}<-\frac{1}{3}$.

5. Faux. $-1\,001<-999$, donc $(-1\,001)^3<(-999)^3$ car $x\mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

82 1. b. ; 2. a. ; 3. b.

83 1. c. En effet, en utilisant la courbe jaune représentant la fonction carrée, si a et b sont de signes contraires, alors la fonction n'est pas monotone et on ne peut pas comparer a^2 et b^2.

2. c. En effet, en utilisant la courbe rouge, représentant la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$ la fonction inverse est décroissante donc si $x\in[-3\,;-1]$ alors $\frac{1}{x}\in\left[-1\,;-\frac{1}{3}\right]$.

3. b. En effet, en utilisant la courbe violette, représentant la fonction cube sur $\mathbb{R}$, la fonction cube est croissante donc si $a\leq 0\leq b$ alors $a^3\leq 0\leq b^3$, c'est-à-dire $a^3\leq b^3 \Leftrightarrow a^3-b^3\leq 0$.

Chapitre 12

Polynômes et fractions rationnelles

72 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Vrai ;
4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Faux.

73 1. Faux. $2(x-1)^3-(2x+1)(x-1)^2$
$=2(x-1)\underline{(x-1)^2}-(2x+1)\underline{(x-1)^2}=(x-1)^2[(2x-2)-(2x+1)]$
$=(x-1)^2(2x-2-2x-1)=-3(x-1)^2$
$=-3x^2+6x-3$: ce polynôme est de degré 2.
2. Faux. $(3-x)(x-4)-(x-4)^2$
$=(3-x)\underline{(x-4)}-(x-4)\underline{(x-4)}=(x-4)[(3-x)-(x-4)]$
$=(x-4)[3-x-x+4]=(x-4)(-2x+7)$.
3. Faux. $x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$.
Ainsi, $x^2+10x+21=0$ a pour racine -5, et c'est la seule.
4. Vrai. On pose $X=x^2$. Ainsi, $x^4-10x^2+21=0 \Leftrightarrow X^2-10X+21=0$.
• Si $X^2-10X+21$ admet deux racines, notées X_1 et X_2,
alors $\begin{cases}X_1+X_2=10\\X_1X_2=21\end{cases}$: le couple (3 ; 7) est solution de ce système.
3 et 7 sont donc les deux racines de $X^2-10X+21$
et on a $X^2-10X+21=(X-3)(X-7)$.
• Enfin, $x^4-10x^2+21=0 \Leftrightarrow (x^2-3)(x^2-7)=0$
$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$
5. Faux. Si x^2-x-2 admet deux racines, notées x_1 et x_2,
alors $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-2\end{cases}$: le couple (−1 ; 2) est solution de ce système.
−1 et 2 sont donc les deux racines de x^2-x-2
et on a $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.
On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, x^2-x-2 est négatif ou nul lorsque $x\in[-1\,;2]$.
6. Faux. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+6}=\dfrac{1\times(x+6)+2\times(x-1)}{(x-1)(x+6)}=\dfrac{x+6+2x-2}{x^2+5x-6}$
$=\dfrac{3x+4}{x^2+5x-6}\neq\dfrac{3}{x^2+5x-6}$.

74 1. a. ; 2. b. ; 3. b. ; 4. b. ; 5. b.

75 1. a. $3x^2-5x+2=3\left[x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}\right]=3\left[\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{2}{3}\right]$
$=3\left[\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{1}{36}\right]$.
2. c. $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$.
Ainsi, les racines de x^3+2x^2+x sont 0 et −1 : deux racines distinctes.
3. c. Le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-2		5		$+\infty$
$4+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4+x)(5-x)(2+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	

Ainsi, le polynôme $(4+x)(5-x)(2+x)$ est strictement positif lorsque $x<-4$ ou $x\in\,]-2\,;5[$.
4. b. $(5-x)(2+x)=-x^2+3x+10$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad\qquad -\ 1 & -x^2+3x+10 \\ \cline{2-2} -(x^3-3x^2-10x) \qquad & -x-3 \\ \cline{1-1} 3x^2+10x-\ 1 & \\ -(3x^2-\ 9x-30) & \\ \cline{1-1} 19x+29 & \end{array}$$

Ainsi : $x^3-1=(-x-3)(5-x)(2+x)+19x+29$
et $\dfrac{x^3-1}{(5-x)(2+x)}=-x-3+\dfrac{19x+29}{(5-x)(2+x)}$.

Chapitre 13

Équations et inéquations dans ℝ

61 1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Faux.

62 1. Faux. $(-2)^3-3(-2)^2-(-2)+1=-8-12+2+1=-17\neq0$.
2. Vrai. Pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}^*$, on a $x\neq0$, donc $x^2>0$.
3. Vrai. Pour tout nombre réel x de ℝ, on a $x^2\geqslant0$, donc $x^2+3\geqslant3$ d'où $x^2+3>0$.
4. Faux. Pour $a=-1$ et $x=1$, on a $ax^2=-1<0$.
5. Faux. Pour tout nombre réel x de $]-\infty\,;0[$, on a :
$\dfrac{x}{3}\leqslant\dfrac{5}{x}\Leftrightarrow x\dfrac{x}{3}\geqslant x\dfrac{5}{x}\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{3}\geqslant5\Leftrightarrow x^2\geqslant15$.
6. Faux. −4 est solution de l'inéquation $x^2>9$ et −4 n'est pas supérieur à 3.

63 1. c. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. b.

64 1. c. En effet, $(-1)^3=-1$.
2. b. En effet, $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=0\\x+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-1)=0\\x+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow x-1=0$.
3. a. En effet, l'inéquation $\dfrac{x+3}{x+2}>0$ est équivalente à $x+3$ et $x+2$ ont le même signe, ce qui est équivalent à $(x+3)(x+2)>0$.
4. c. En effet, pour tout nombre réel x on a $x^2\geqslant0$ donc $5x^2\geqslant0$ et $5x^2+3>0$, d'où l'inéquation $(x+3)^2(5x^2+3)\leqslant0$ est équivalente à $(x+3)^2\leqslant0$, c'est-à-dire à $x+3=0$.

Chapitre 14

Équations, inéquations dans ℝ × ℝ

68 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ;
5. Vrai ; 6. Vrai ; 7. Vrai ; 8. Faux.

69 1. Vrai. Par lecture graphique, l'ordonnée à l'origine est égale à 2 et le coefficient directeur à $\dfrac{1}{3}$.
2. Faux. Les coordonnées de O vérifient : $y\leqslant\dfrac{1}{3}x+2$.
3. Faux. Car $3\times3-2=7$ et $7>6$.
4. Faux. $3\times4-6=6$ et $6\leqslant6$.
5. Vrai. Car $\dfrac{1}{3}\times3+2=3$ et $3\leqslant3$.

70 1. c. ; 2. b. ; 3. a.

71 1. b. Le point O est dans la zone solution. Ses coordonnées doivent vérifier les deux inéquations.
2. c. Le point est dans la zone verte.
3. c. Si on multiplie l'inéquation (1) par −1, le sens change.

Installation de GeoGebra

GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique téléchargeable gratuitement, qui peut être installé sur n'importe quel ordinateur, ordinateur portable, tablette...

1 • Dans un moteur de recherche de type Google, Yahoo..., taper GeoGebra dans la barre de menu.

• Cliquer sur le lien GeoGebra.

2 Dans la fenêtre qui s'ouvre, cliquer sur : Télécharger maintenant.

GEOGEBRA

EST UN LOGICIEL DE MATHS MULTI-PLATEFORME PERMETTANT À TOUS D'EXPÉRIMENTER

LES INTUITIONS EXTRAORDINAIRES QUI PEUVENT NAÎTRE DES MATHS.

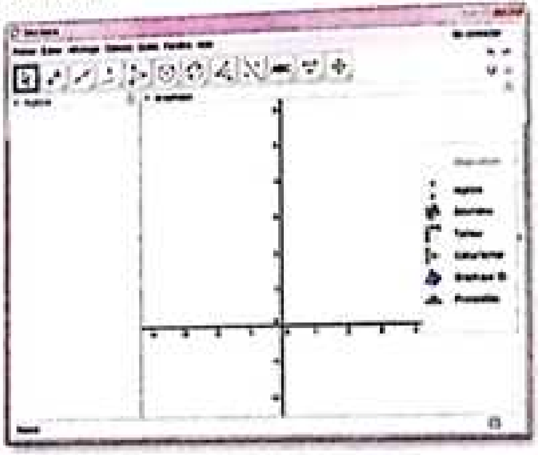
3 Choisir le support (tablette, ordinateur ou téléphone) et le système d'exploitation de l'appareil (pour les ordinateurs : Windows, Mac ou Linux).

4 • Sur la fenêtre qui apparaît, cliquer sur : Enregistrer le fichier.

• Lancer l'exécution.

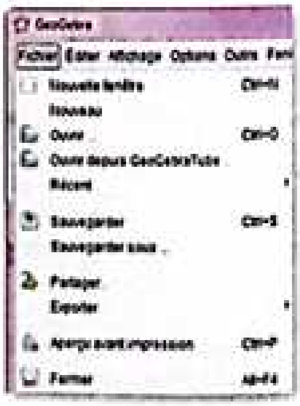
• Suivre les instructions d'installation standard.

5 Une fenêtre GeoGebra s'ouvre à la fin de l'installation.



Des menus s'affichent à droite de la fenêtre. Ils désignent les différentes capacités du logiciel.

6 • L'icône apparaît désormais sur le bureau de l'ordinateur. Double-cliquer sur cette icône pour ouvrir une fenêtre GeoGebra.



• En haut d'une fenêtre GeoGebra, cliquer sur Fichier :

- pour enregistrer un travail (Sauvegarder sous) ;
- pour imprimer un travail (Aperçu avant impression) ;
- ouvrir un ancien document (Ouvrir).

Utilisation du logiciel

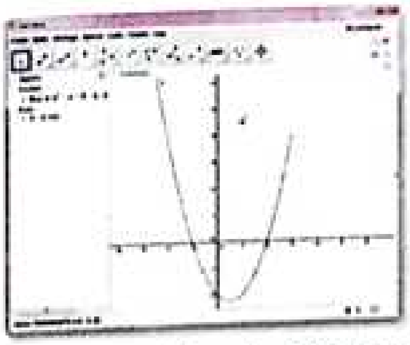
Menus déroulants

En haut d'une page GeoGebra, on lit : Fichier, Éditer…
Chaque terme contient un menu déroulant.

Par exemple, le menu déroulant Affichage permet de faire apparaître ou d'enlever la fenêtre Algèbre, la fenêtre Tableur…

Barre de saisie

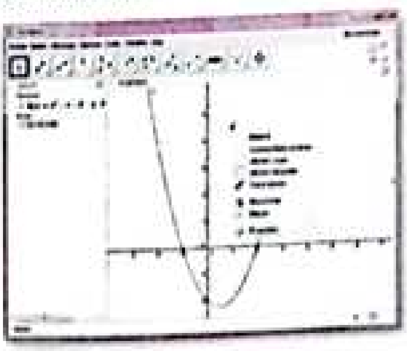
La barre de saisie située en bas de la page permet de tracer une fonction, de placer un point de coordonnées, données…



Par exemple, on a tracé la fonction f définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$ en tapant : **Fonction[x^2-5x+2,-3,4]** et le point $A(1 ; 4{,}5)$ en tapant : **A=(1,4.5)**.

Modifier un objet : nom, couleur, épaisseur

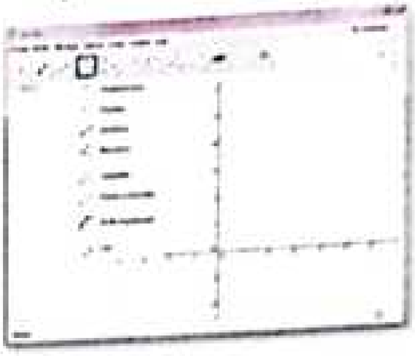
En effectuant un clic-droit sur un objet, on peut changer son nom (renommer), l'effacer…



En cliquant sur Propriétés, on peut modifier sa couleur, son style…

Icônes

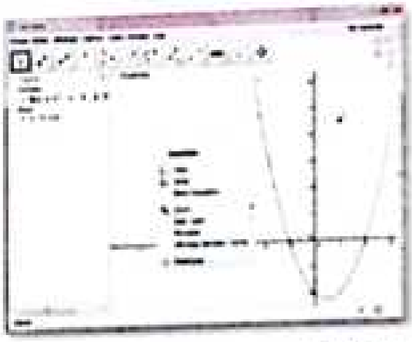
Chacune des icônes contient un menu déroulant qui offre plusieurs possibilités.



Par exemple, l'icône ⫽ permet de tracer une parallèle, une perpendiculaire, une tangente…

Modifier des données : axes, quadrillage, zoom

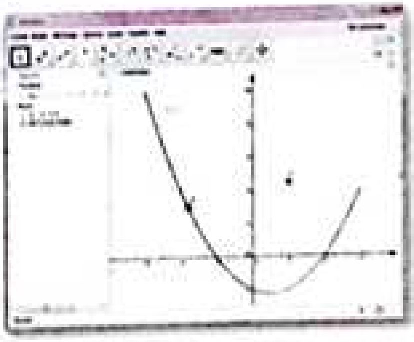
En cliquant sur l'icône ✥, on peut déplacer la fenêtre, zoomer ou dézoomer.



En effectuant un clic-droit sur une partie blanche de la fenêtre graphique, on peut faire apparaître ou enlever les axes, le quadrillage, changer les graduations…

Dynamiser une figure

Pour déplacer un objet lié par une condition, on utilise l'icône ↖.



Par exemple, on place un point M sur $(\mathscr{C}_f)$. On peut déplacer le point M sur $(\mathscr{C}_f)$ et observer ses coordonnées.

Utilisation pour la géométrie dans l'espace

Le logiciel gratuit GeoGebra possède également un module de géométrie dans l'espace.

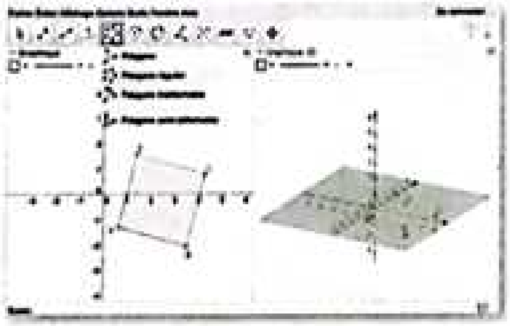
Utiliser le module de géométrie dans l'espace

Cliquer sur le menu déroulant du menu **Affichage** puis sélectionner **Graphique 3D**.

En cliquant sur la croix ✕ en haut à droite d'une des fenêtres, on ferme cette fenêtre.

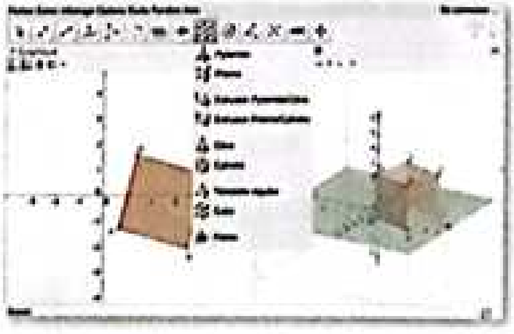
Construire un cube

❶ • Dans la fenêtre graphique, créer un segment [*AB*], puis cliquer sur le menu de l'icône ▷ et sélectionner **Polygône régulier**.



Cliquer alors sur le point *A*, puis le point *B*, puis choisir 4 points.
Un carré *ABCD* s'affiche dans les deux fenêtres.

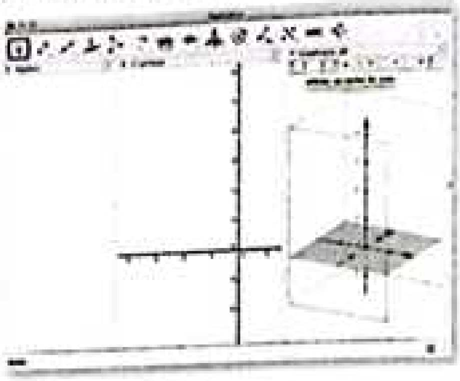
❷ • Dans la fenêtre **Graphique 3D**, cliquer sur le menu déroulant de l'icône et sélectionner **Cube**.



Cliquer sur le point *A*, puis le point *B*.
Un cube s'affiche.

Afficher / Enlever les axes, le quadrillage...

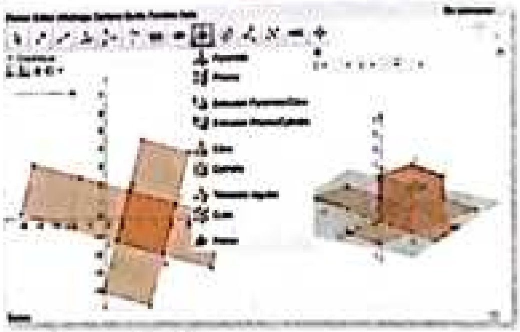
Pour afficher ou enlever les axes, le quadrillage... effectuer un clic-droit sur la fenêtre **Graphique 3D** et (dé)sélectionner Axes, Grille...



En cliquant sur le menu déroulant de **Graphique 3D**, on peut faire apparaître la figure...

Représenter un patron

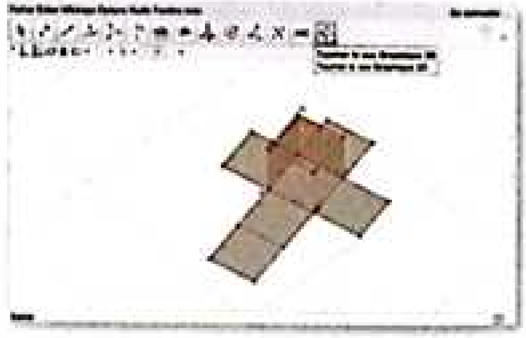
Pour représenter un patron du cube créé, cliquer sur le menu déroulant de l'icône et sélectionner **Patron**.



Cliquer alors sur le cube.
Le patron du cube s'affiche dans les deux fenêtres.

Pivoter la vue

Cliquer sur l'icône ✥, puis, en maintenant le bouton gauche enfoncé, sur un point du cube.

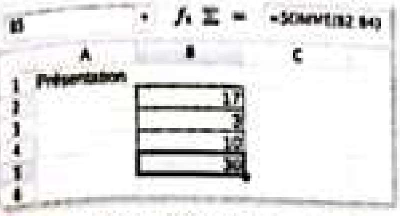


Déplacer la souris permet de faire pivoter la figure.

Tableur

OpenOffice.org est un logiciel de traitement de texte disposant d'un tableur (tout comme Excel). Il est téléchargeable gratuitement sur Internet.

Présentation



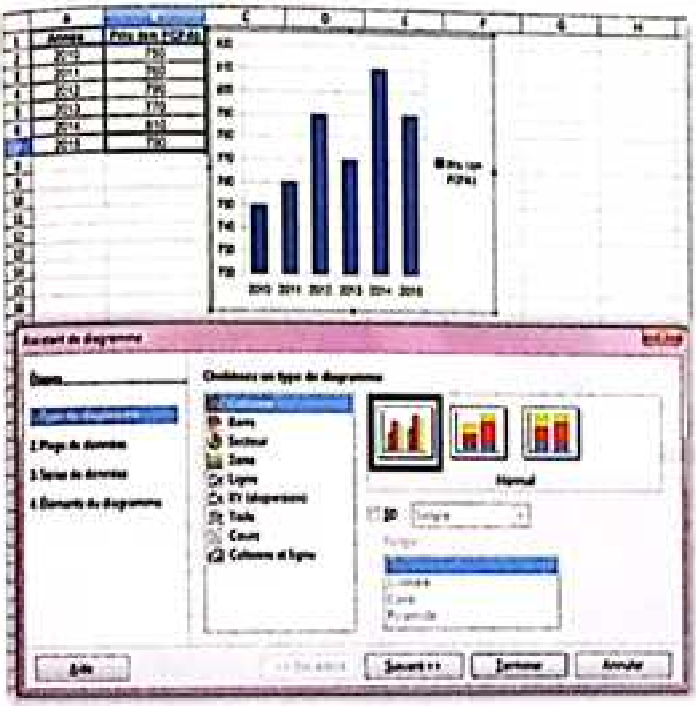
Remarque Toute formule commence par le symbole « = ».

Une page de tableur est constituée de **cellules** repérées par une lettre et un nombre.

À l'intérieur d'une cellule, on peut saisir :

- un **mot**, par exemple, la cellule A1 contient le mot Présentation ;
- un **nombre**, par exemple, la cellule B4 contient le nombre 10 ;
- une **formule**, par exemple, la cellule B5 contient la formule =SOMME(B2:B4) qui permet de calculer la somme des nombres inscrits dans les cellules B2 à B4.

Représentation de données



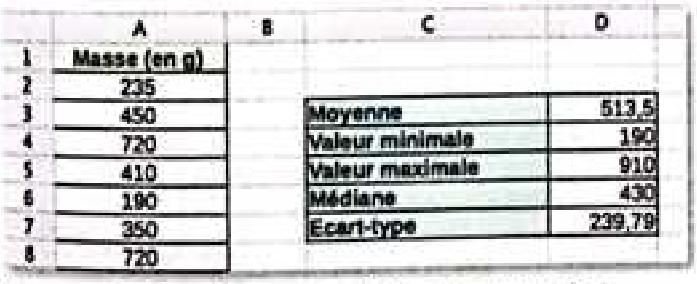
Exemple

Dans le tableau ci-contre, on a relevé les prix au kg, en F CFA, d'un fruit sur le marché selon l'année.

Pour représenter ces données :

1. sélectionner les cellules A1 à B7 (en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé) ;
2. cliquer sur l'icône **Diagramme** ;
3. choisir le type de diagramme ;
4. si l'on souhaite représenter les années en abscisses et les prix en ordonnées, dans **Plage de données**, il faut cocher **Première colonne comme étiquette**.
5. cliquer sur **Terminer**.

Calcul des paramètres d'une série statistique



	A	B	C	D
1	Masse (en g)			
2	235			
3	450		Moyenne	513,5
4	720		Valeur minimale	190
5	410		Valeur maximale	910
6	190		Médiane	430
7	350		Ecart-type	239,79
8	720			

Remarque Ces formules ne sont valables que pour une liste de modalités (de valeurs).

Pour calculer ces paramètres, il faut saisir :

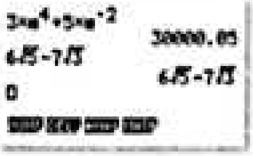
- en cellule B4 : =MOYENNE(A2:A11) ;
- en cellule D4 : =MIN(A2:A11) ;
- en cellule D5 : =MAX(A2:A11) ;
- en cellule D6 : =MEDIANE(A2:A11) ;
- en cellule D7 : =ECARTYPEP(A2:A11).

Calculs usuels

Utiliser des puissances, des racines, des nombres négatifs...

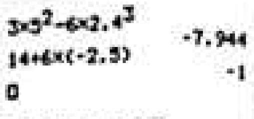
Taper MENU, puis choisir le MENU 1 : RUN-MAT, taper EXE.

- Utiliser ×10ˣ ou SHIFT log (10ˣ) pour les puissances de 10.
- Utiliser SHIFT x^2 ($\sqrt{\ }$) pour les racines carrées.



```
3×■⁴+5×■⁻²
                30000.05
6√5-7√3
                 6√5-7√3
0
```

- Utiliser x^2 pour un carré et ^ pour une puissance.
- Utiliser (−) pour les nombres négatifs (et non pas −).



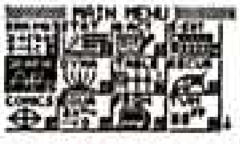
```
3×5²-6×2.4³
                  -7.944
14+6×(-2.5)
                      -1
0
```

Fonctions

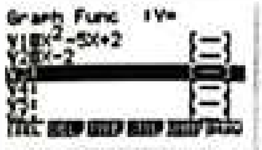
On utilise les fonctions définies sur ℝ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$ et $g(x) = x - 2$.

Définir une fonction

1 Taper MENU, puis choisir le MENU 5 : GRAPH, EXE.



2 Saisir l'expression $f(x)$ pour Y1 et l'expression $g(x)$ pour Y2.
Pour x, utiliser X, θ, T.

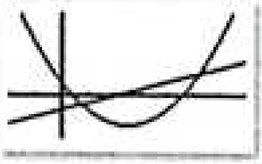


```
Graph Func  :Y=
Y1■X²-5X+2
Y2■X-2
```

Représenter graphiquement une fonction

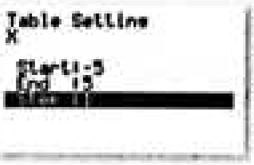
1 Taper SHIFT F3 (V-Window) et choisir la fenêtre graphique la mieux adaptée. (Lorsque Xscale = Yscale = 1, le repère est orthonormé.)

2 Lorsque la fenêtre est choisie, taper EXE, puis EXE.



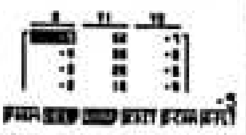
Dresser un tableau de valeurs

1 Taper MENU, puis choisir le MENU 7 : TABLE, EXE.
Taper F5 SET pour choisir le début, la fin et le pas du tableau.



```
Table Setting
X
 Start:-5
 End  :5
```

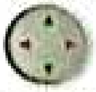
2 Lorsque le tableau est choisi, taper EXE, puis EXE.
On lit les valeurs de $f(x)$ en Y1 et les valeurs de $g(x)$ en Y2.



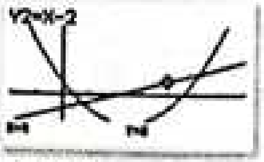
Déplacer un point sur une courbe

1 Taper MENU, puis choisir le MENU 5 : GRAPH, EXE.
Taper F6 (DRAW), puis SHIFT F1 (Trace).
Un point clignotant apparaît sur la courbe.

2 On peut déplacer ce point en utilisant les flèches rouges



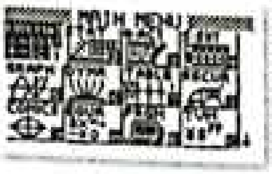
ou changer de courbe en utilisant les flèches vertes.



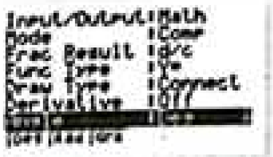
Trigonométrie

Changer d'unité : radian / degré

1 Taper MENU, puis choisir le MENU 1 : RUN-MAT.



2 • Taper SHIFT MENU, (SET UP).
• Dans la liste, choisir Angle et sélectionner l'unité voulue.



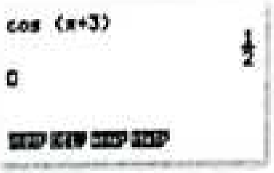
```
Input/Output :Math
Mode         :Comp
Frac Result  :d/c
Func Type    :Y=
Draw Type    :Connect
Derivative   :Off
```

Calculer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle

• Choisir le MENU 1 : puis utiliser les touches cos, sin ou tan.

• Pour obtenir le nombre π, il faut taper SHIFT ×10ˣ (π).

• Exemple : pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$: mettre la calculatrice en mode radians, puis taper cos (SHIFT ×10ˣ (π) ÷ 3) EXE.

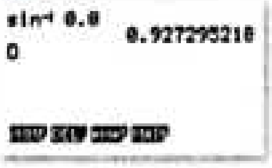


```
cos (π÷3)
                    1/2
0
```

Calculer la mesure d'un angle dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente

• Choisir le MENU 1, puis utiliser les touches : SHIFT cos (Acs), SHIFT sin (Asn) ou SHIFT tan (Atn).

• Exemple : pour calculer la mesure, en radians, de l'angle $\widehat{A}$ tel que $\sin \widehat{A} = 0{,}8$; mettre la calculatrice en mode radians, puis taper SHIFT sin (Asn) 0 • 8 EXE.



```
sin⁻¹ 0.8
            0.927295218
0
```

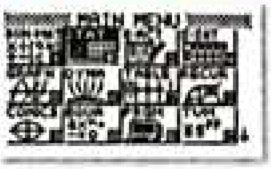
Statistiques

On utilise la série statistique donnée dans le tableau ci-contre.

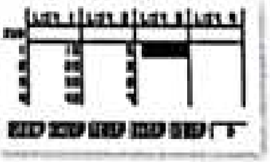
Modalité	10	20	20	40	50
Effectif	5	3	8	7	2

Saisir les données de la série dans la calculatrice

1 Taper MENU, puis choisir le MENU 2 : STAT.

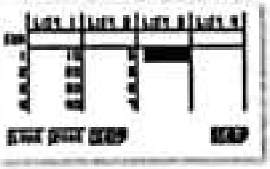


2 • Dans la List 1, saisir les modalités ;
• dans la List 2, saisir les effectifs (ou les fréquences ou les pourcentages).



Calculer les indicateurs statistiques

1 Taper CALC (F2), puis taper SET (F6).

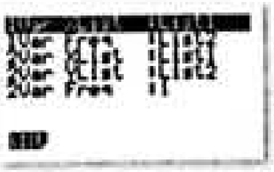


2 Vérifier que :

1Var XList : List 1

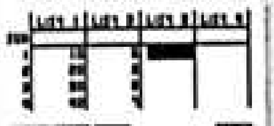
et

1Var Freq : List 2.



```
1Var XList :List1
1Var Freq  :List2
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq  :1
```

3 Taper EXE, puis taper 1VAR (F1).

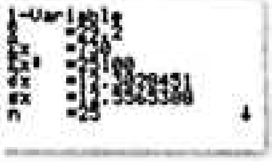


On lit :

la moyenne

l'écart-type

l'effectif total

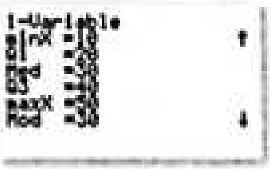


et en descendant

avec

la médiane

les valeurs extrêmes



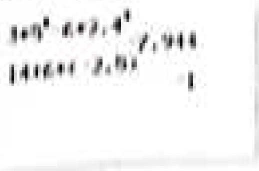
Remarque Pour effacer les données d'une liste : se placer sur la liste, taper F6 (▷), sélectionner DEL-A, puis F1 (Yes).

Calculs usuels

Utiliser des puissances, des racines, des nombres négatifs

- Utiliser 2ND | LOG | (10^x) pour les puissances de 10
- Utiliser 2ND | x² | (√) pour les racines carrées

- Utiliser x² pour un carré et ^ pour une puissance
- Utiliser (-) pour les nombres négatifs (et non pas −)

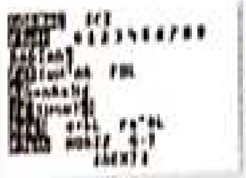


Fonctions

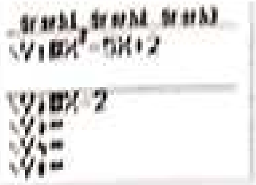
On utilise les fonctions définies sur ℝ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$ et $g(x) = x - 2$.

Définir une fonction

1 Taper MODE et vérifier les réglages ci-contre, en particulier Fct.



2 Taper Y= et saisir l'expression $f(x)$ pour Y1 et l'expression $g(x)$ pour Y2. Pour x, utiliser X,T,θ,n.



\Y1=X²-5X+2
\Y2=X-2
\Y3=
\Y4=

Représenter graphiquement une fonction

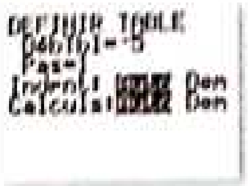
1 Taper WINDOW et choisir la fenêtre graphique la mieux adaptée. (Lorsque Xgrad = Ygrad = 1, le repère est orthonormé.)

FENETRE
Xmin=-2
Xmax=7
Xgrad=1
Ymin=-5
Ymax=12
Ygrad=1
Xres=1

2 Lorsque la fenêtre est choisie, taper GRAPH.

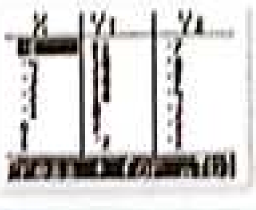
Dresser un tableau de valeurs

1 Taper 2ND | WINDOW (TBLSET) pour choisir le début du tableau et le pas entre chaque valeur.



DEFINIR TABLE
DébutTbl=-5
Pas=1
Indpnt: Auto Dem
Calcul: Auto Dem

2 Lorsque le tableau est choisi, taper 2ND | TABLE. On lit les valeurs de $f(x)$ en Y1 et les valeurs de $g(x)$ en Y2.

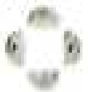


Déplacer un point sur une courbe

1 Taper GRAPH puis taper TRACE.

Un point clignotant apparaît sur la courbe.

2 On peut déplacer ce point en utilisant les flèches rouges



ou changer de courbe en utilisant les flèches vertes.

Trigonométrie

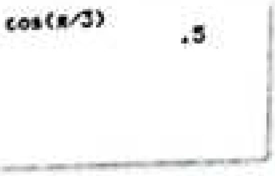
Changer d'unité : radian / degré

1 Taper MODE.

2 Sélectionner l'unité choisie puis taper ENTER.
Taper 2ND MODE (QUIT) pour sortir.

Calculer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle

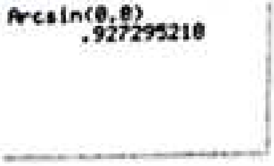
- Utiliser les touches COS, SIN ou TAN.
- Pour obtenir le nombre π, il faut taper 2ND ∧ (π).
- Exemple : pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$: mettre la calculatrice en mode radians, puis taper COS (2ND ∧ (π) ÷ 3) ENTER.



```
cos(π/3)
                .5
```

Calculer la mesure d'un angle dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente

- Utiliser les touches : 2ND COS (COS⁻¹), 2ND SIN (SIN⁻¹) ou 2ND TAN (TAN⁻¹).
- Exemple : pour calculer la mesure, en radians, de l'angle $\widehat{A}$ tel que $\sin \widehat{A} = 0{,}8$; mettre la calculatrice en mode radians, puis taper 2ND SIN (SIN⁻¹) 0 • 8 ENTER.



```
Arcsin(0,8)
      .927295218
```

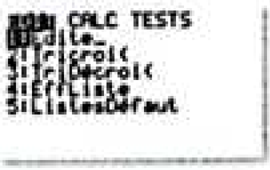
Statistiques

On utilise la série statistiques donnée dans le tableau ci-contre.

Modalité	10	20	20	40	50
Effectif	5	3	8	7	2

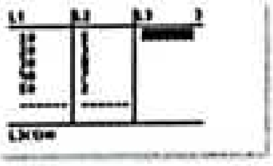
Saisir les données de la série dans la calculatrice

1 Taper STAT, puis choisir EDIT, ENTER.



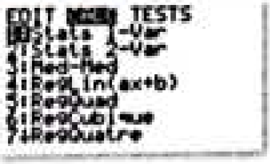
```
EDIT CALC TESTS
1:Edite…
2:TriCroi(
3:TriDécroi(
4:EffListe
5:ListesDéfaut
```

2 • Dans la liste L1, saisir les modalités ;
• dans la liste L2, saisir les effectifs (ou les fréquences ou les pourcentages).



Calculer les indicateurs statistiques

1 Taper STAT, puis choisir CALC, 1:Stats1-Var ENTER.



```
EDIT CALC TESTS
1:Stats 1-Var
2:Stats 2-Var
3:Med-Med
4:RégLin(ax+b)
5:RégQuad
6:RégCubique
7:RégQuatre
```

2 Selon le modèle de calculatrice, taper Stats1-Var (L_1, L_2) ou compléter comme ci-contre puis ENTER.

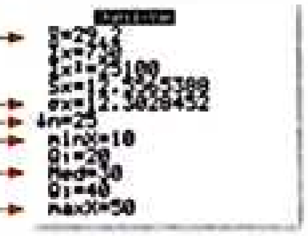
```
Liste:L1
FreqListe:L2
Calculs
```

3 On lit :

la moyenne
l'écart-type
l'effectif total

et en descendant avec ▲▼◀▶.

la médiane
les valeurs extrêmes



```
n=25
minX=10
Q1=20
Med=30
Q3=40
maxX=50
```

Remarques

- Pour obtenir la liste L_1 : taper 2ND 1 (L_1).
- Pour effacer les données d'une liste : se placer sur le nom de cette liste (par exemple L_1), puis taper annul ou CLEAR.

Index

Crédits

Couverture : © Maersk

p. 5 (grande) : œil de libellule © Tomatito / Shutterstock ; (petite) : Léonard de Vinci, *Homme de Vitruve*, © Jakub Krechowicz/Shutterstock • p. 19 : © LivingCanvas / Shutterstock • p. 21 (grande) : Carte de Ptolémée © Marzolino /Shutterstock ; (petite) Astrolabe © a40757/Shutterstock • p. 34 : ©Maxisport /Shutterstock • p. 35 (grande) : flamands roses © Sebastien Burel /Shutterstock ; (petite) : *René Descartes* © AISA – Everett / Shutterstock • p. 36 : comète ©solarseven /Shutterstock • p. 48 : © Bplanet /Shutterstock • p. 51: © Hector Conesa /Shutterstock • p. 52 : *Alice au pays des merveilles* © Morphart Creation /Shutterstock • p. 53 : © Pascal Kryl /Shutterstock • p. 54: Euler © Georgios Kollidas /Shutterstock • p. 55 (grande) ; vortex de turbulence © NASA Langley Research Center – Multimedia Repository ; (petite) : Hamilton © Photo12/Alamy • p. 68 : Sam Loyd puzzle © Sam Loyd is a registered trademark of The Sam Loyd Company. Puzzle design is Copyright by The Sam Loyd Company. All rights reserved. • p. 72 : Mosquée de Djenné © trevor kittelty / Shutterstock • p. 74 : © Andaman / Shutterstock • p. 75 (grande) : © Mark Dumbleton / Shutterstock; (petite) : Euclide © Pavila / Shutterstock • p. 90 : © Narinto / Shutterstock • p. 91 : © Tena Rebernjak / Shutterstock • p. 91 : © Hakuna_Jina / Shutterstock • p. 93 (grande) : Curiosity 2012 © Nasa/JPL-Caltech ; (petite) : © Daniel Honc / Shutterstock • p. 94 : © Giovanni Cancemi / Shutterstock • p. 109 : © Pierre-Yves Babelon / Shutterstock • p. 111 : © Joggie Botma / Shutterstock • p. 113 (grande) : Makoko, école sur pilotis de Lagos de l'architecte Kunlé Adeyemi © Image by NLÉ ; (petite) : Maryam Mirzakhani © Stanford/AP-SIPA • p. 114 : Makoko, école sur pilotis de Lagos de l'architecte Kunlé Adeyemi © Image by NLÉ • p. 133 (grande) : © Catfish Photography / Shutterstock ; (petite) : © Granger NYC / Rue des Archives • p. 134 : © Papa Bravo / Shutterstock • p. 135 : © klublu / Shutterstock • p. 144 (h) : © Gautier 22 / Shutterstock ; (b) : © Blend Images / Shutterstock • p. 151 (grande) : Parthénon © Nick Pavlakis / Shutterstock ; (petite) : Manuscrit de Rhind, British museum © Erich Lessing / AKG • p. 164 : © Enrico Lapponi /Shutterstock • p. 166 : © CLIPAREA l Custom media / Shutterstock • p. 167 : © Loskutnikov / Shutterstock • p. 168 : © Jefunne / Shutterstock • p. 169 (grande) : © Fredy Thuerig / Shutterstock ; (petite) : Machine à calculer de Leibniz © Kolossos-Creative Commons • p. 170 : Galyna Andrushko / Shutterstock • p. 185 : © subarashii21 / Shutterstock • p. 186 : © Photo smile/ Shutterstock • p. 187 : © Africa Studio / Shutterstock • p. 188 (g) : © Bullstar / Shutterstock ; (d) © naharlyani / Shutterstock • p. 189 (grande) : © Bocman1973 / Shutterstock ; (petite) : © Nicku / Shutterstock • p. 191 : © Apiguide / Shutterstock • p. 207 (grande) : © Mathagraphics / Shutterstock ; (petite) : © Georgios Kollidas / Shutterstock • p. 216 : © sspopov / Shutterstock • p. 217 : © PhotoSky / Shutterstock • p. 223 : © Menna /Shutterstock • p. 224 : © panpote / Shutterstock • p. 225 (grande) : © Yentafern / Shutterstock ; (petite) : ©Eduard Kim / Shutterstock • p. 225 : © SamDCruz / Shutterstock • p. 239 : © Radiokafka / Shutterstock.com • p. 240 (g) : © Georgios Kollidas / Shutterstock ; (d) : © : Bas Rabeling / Shutterstock • p. 241 (grande) : ©Tashatuvango / Shutterstock ; (petite) : © Nicku / Shutterstock • p. 248 (h) : © M. Unal Ozmen / Shutterstock ; (b) : © Tungphoto / Shutterstock • p. 249 : © dwphotos / Shutterstock • p. 251 : © wavebreakmedia / Shutterstock • p. 254 : © STILLFX / Shutterstock • p. 255 : © Laborant / Shutterstock.

Imprimé en Italie par L.E.G.O. S.p.A. - Dépôt légal : 06/2015 - Collection n° 11 - Édition n° 01 - 68/0005/0

CARGO

Collection de Mathématiques

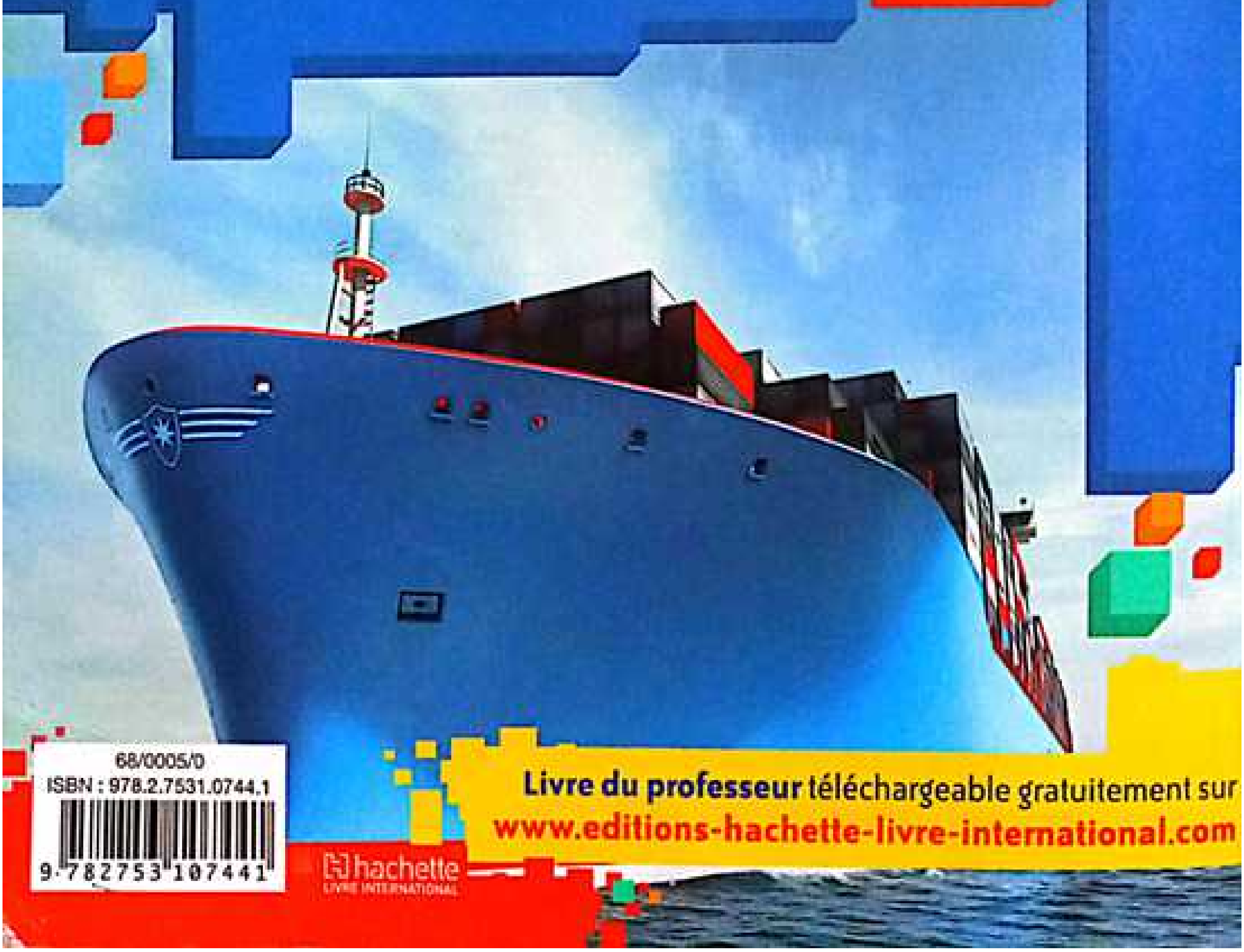
2^{nde}S

- Une pédagogie centrée sur l'apprenant, basée sur l'approche par les compétences.
- Pour chaque chapitre :
  - Des activités pour introduire les notions importantes.
  - Des points sur l'**histoire des sciences** et de nombreuses activités **pluridisciplinaires**.
  - Un **cours** clair et synthétique complété par des **exercices résolus** pour bien installer **savoirs** et **savoir-faire**.
  - Des exercices de difficulté progressive et des moments pour faire le point avant d'aller plus loin :
    - Des exercices d'**entraînement** qui suivent la progression du cours.
    - **« Faire le point »** : des exercices ciblés pour gagner en **méthode**.
    - Des **tests** et des **QCM** pour **s'auto évaluer**. **NOUVEAU !**
    - Des exercices d'**approfondissement** pour **intégrer** les acquis. Ils présentent, à chaque fois que possible, des situations concrètes ou interdisciplinaires.

NOUVEAU !

Des activités pour **utiliser les TIC** : manipuler un logiciel de géométrie dynamique et les calculatrices scientifiques.

TOUT LE PROGRAMME



Livre du professeur téléchargeable gratuitement sur **www.editions-hachette-livre-international.com**

68/0005/0
ISBN : 978.2.7531.0744.1
9 782753 107441
hachette LIVRE INTERNATIONAL